习　　题

习题分章排列．每一章内的次序，大体上依照课文中有关内容出现的次序．

习题按难易程度分为三类．题号右上角有一个“∘”的，是较易的题．题号右上角有一个“*”号的，是较难的题．不加任何记号的题，其难度介乎二者之间．如果一个题包含若干小题，其各小题标识可以不同．

各类题的数量，加“∘”者 222 题，加“*”者 50 题，其余 228 题．

第　一　章

以 $\mathbf{R}^k$ 记 k 维欧氏空间，$\mathscr{B}_k$ 记 $\mathbf{R}^k$ 的一切 Borel 子集构成的 σ 域．当空间为 $\mathbf{R}^k$ 之一 Borel 子集时，也用 $\mathscr{B}_k$ 记其一切 Borel 子集构成的 σ 域．

1°．设 P 为 $(\mathbf{R}^k,\mathscr{B}_k)$ 上的一概率分布．证明 P 的支撑 A 为闭集(按原始定义)．证明 $P(A)=1$．

2°．设 μ 为 $(\mathbf{R}^k,\mathscr{B}_k)$ 上的 σ 有限测度，概率测度 $\mathrm{d}P=f\mathrm{d}\mu$，定出 P 的支撑(不拘于原始定义，下同)．若有一族概率分布 $\{fd\mu: f\in\mathscr{F}\}$，集 $\{x:f(x)>0\}$ 与 f 无关，证明此分布族有共同支撑．

3. 给定闭集 $A\subset\mathbf{R}^1$，必存在一维分布以 A 为支撑．以此为基础，证明这断言对 $\mathbf{R}^k$ 也对，$k>1$．此题与第 1 题结合，得出：在支撑的原始定义下，$\mathbf{R}^k$ 中一集 A 能作为某概率分布的支撑的充要条件是：A 为闭集．

4°．举一个如下的例子：一族一维分布 $\mathscr{P}$，其中每一个有支撑

$(0,1)$，但 $\mathscr{P}$ 并不受控于任何 σ 有限测度.

5. 设 P 为 $\mathbf{R}^1$ 上的概率测度. 用下法重新定义 P 的支撑 A：$a \in A$，当且仅当对任给 $\varepsilon>0$ 有

$$P([a-\varepsilon,a])>0,\ P([a,a+\varepsilon])>0.$$

证明 A 为 Borel 集，$P(A)=1$，且 A 在早先的意义下也是 P 的支撑(非原始意义).

6. $\mathbf{R}^k$ 上任一概率分布函数必为 Borel 可测.

7. 两个同维分布函数 $F.G$ 的 Kolmogorov 距离定义为 $K(F,G)=\sup\limits_{x}|F(x)-G(x)|$，其"绝对距离"定义为

$$A(F,G)=\sup\{|F(A)-G(A)|:A\in\mathscr{B}_k\}.$$

(1)° 若 $\mathrm{d}F=f\mathrm{d}\mu,\mathrm{d}G=g\mathrm{d}\mu$，证明

$$A(F,G)=\int_{\mathbf{R}^k}|f-g|\mathrm{d}\mu/2.$$

(2) 总有 $K(F,G)\leqslant A(F,G)$. 利用 1°，在一维情况得出等号成立的充要条件，并由其结果的形式进而推广到多维.

(3)° 若 $\mathrm{d}F_n=f_n\mathrm{d}\mu,n\geqslant1,\mathrm{d}F=f\mathrm{d}\mu$，则 $A(F_n,F)\to0$ 的一个充分条件为 $f_n\to f$ a.e. μ，举反例证明此条件并非必要.

(4)° 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自具分布 F 的 iid. 样本，F_n 为 $X_1,\cdots,X_n$ 的经验分布函数. 证明 $K(F_n,F)$(即 Kolmogorov 统计量)确是统计量，即它是 $(\mathbf{R}^k,\mathscr{B}_k)\to(\mathbf{R}^1,\mathscr{B}^1)$ 的 Borel 可测函数.

8° X 的样本空间为 $(\mathbf{R}^1,\mathscr{B}_1)$. 证明：找不到一个取值于 $(\mathbf{R}^1,\mathscr{B}_1)$ 的统计量 $T=T(X)$，使 $T^{-1}(\mathscr{B}_1)=\mathscr{F}$，其中 $\mathscr{F}$ 为 $\mathscr{B}_1$ 之一子 σ 域，由 $\mathbf{R}^1$ 的一切可列集(包括空集，有限集)及其余集构成.

9° X 的样本空间为 $(\mathbf{R}^k,\mathscr{B}_k)$，$\mathscr{F}$ 为由一切满足如下条件的 Borel 集 A 构成的子 σ 域：若 $a=(a_1,\cdots,a_k)\in A$，则当 $\sum\limits_{i=1}^{k}|b_i|=\sum\limits_{i=1}^{k}|a_i|$ 时，也有 $(b_1,\cdots,b_k)\in A$. 找一个取值于 $(R_1,\mathscr{B}_1)$ 的统计量 $T=T(X)$，使 $T^{-1}(\mathscr{B}_1)=\mathscr{F}$.

10°. X 的样本空间为$(\mathscr{X},\mathscr{B}_x)$，分布族为$\{f_\theta(x)\mathrm{d}\mu,\theta\in\Theta\}$，$\Theta$ 上一切函数构成的空间记为 $\mathscr{T}$. X 的似然函数 $f_\theta(x)$是 $\mathscr{T}$ 的元素. 课文中已指出：在 $\mathscr{T}$ 中适当选择 σ 域 $\mathscr{B}_{\mathscr{T}}$，可使似然函数成为统计量，在某些场合下 $\mathscr{B}_{\mathscr{T}}$ 可按"自然"的方式选择，以下是几个例子，试证明之：

(1)° Θ 为一有限集$\{\theta_1,\cdots,\theta_k\}$. 这时 $\mathscr{T}$ 为 $\mathbf{R}^k$，而 $\mathscr{B}_{\mathscr{T}}$ 可选为 $\mathscr{B}_k$.

(2)° Θ 为 $\mathbf{R}^m$ 中一区间，且对每个 $x\in\mathscr{X}$，$f_\theta(x)$作为 θ 的函数，在 Θ 上有界连续. 这时把 $\mathscr{T}$ 取为 Θ 上一切有界连续函数之集. $\mathscr{T}$ 中两元 g 和 h 的距离定义为 $d(g,h)=\sup\limits_{\theta\in\Theta}|g(\theta)-h(\theta)|$，取在此距离上 $\mathscr{T}$ 中一切 Borel 子集作为 $\mathscr{B}_{\mathscr{T}}$.

11°. X 的样本空间为$(\mathbf{R}^1,\mathscr{B}_1)$. 两个统计量 $T_1=|X|$和 $T_2=X^2$ 都取值于$(\mathbf{R}^1,\mathscr{B}_1)$. 证明 $T_1^{-1}(\mathscr{B}_1)=T'^{-1}(\mathscr{B}_2)=\{R_1$ 的一切关于 0 对称的 Borel 子集$\}$.

12°. 设 $X\sim\chi^2_{2n}$，n 为自然数，则

$$P(X<a)=\sum_{i=n}^{\infty}(i!2^i)^{-1}\mathrm{e}^{-a/2}a^i$$

对任何 $a>0$(即 $P(X<a)=P(Y\geqslant n)$，$Y\sim\mathscr{P}(a/2)$).

13°. 设 $Y\sim\mathscr{P}(\delta^2/2)$(参数为 $\delta^2/2$ 的 Poisson 分布)，且对任何非负整数 k，有 $X|Y=k\sim\chi^2_{n+2k}$，则 $X\sim\chi^2_{n,\delta}$. 对非中心 t 及非中心 F 分布无类似结果，例如，

$$Y\sim P(\delta^2/2),X|Y=k\sim F_{m+2k,n}\nRightarrow X\sim F_{m,n,\delta}.$$

14°. 把 χ^2 分布推广到 n 非整数时：χ^2_α 是有密度$(2^{\alpha/2}\Gamma(\alpha/2))^{-1}\mathrm{e}^{-x/2}x^{\alpha/2-1}I(x>0)$的随机变量. 证

$$\mathrm{E}(\chi^2_\alpha)=\alpha,\mathrm{Var}(\chi^2_\alpha)=2\alpha,$$

且当 $\alpha\to\infty$时

$$(\chi^2_\alpha-\alpha)/\sqrt{2\alpha}\xrightarrow{\mathscr{L}}N(0,1).$$

15. 设 $X\sim\chi^2_{n,\delta}$，n 为自然数，$\delta>0$. 定义集合 A 如下：$a\in A$，

当且仅当存在独立 r. v. Y,Z,使 $Y\sim\chi_a^2$(a 不必为整数),$Z\geqslant 0$,$X\overset{d}{=\!=}Y+Z$(d表同分布). 约定 $0\in A$ 以使 A 总不为空集. 证明:**a.** 若 $a_1\in A, 0<a_2<a_1$,则 $a_2\in A$. **b.** $A\subset[0,n]$. **c.** $\sup A\in[n-1,n]$. **d.** 记 $a^*=\sup A$,则 $a^*\in A$.

16°. 设 X,Y 独立,$X\sim\chi_a^2, Y\sim\chi_b^2, a>0, b>0$ 不必为整数,则 $X/(X+Y)\sim \mathrm{B}(a,b)$. 利用这个事实证明:若 $X_1,\cdots,X_m$ 独立,$X_i\sim\chi_{a_i}^2, 1\leqslant i\leqslant m$,则当 $r\geqslant 1/2$ 时有 $\left(a=\sum_{i=1}^m a_i\right)$

$$P\left(\frac{\max(X_1,\cdots,X_m)}{X_1+\cdots+X_m}\geqslant r\right)=$$

$$\Gamma(a)\sum_{i=1}^m(\Gamma(a_i)\Gamma(a-a_i))^{-1}\int_r^1 x^{a_i-1}(1-x)^{a-a_i}\mathrm{d}x.$$

当 $r<1/2$ 时,此概率可用 Dirichlet 分布表出,形式很复杂.

17°. 记 $X=(X_1,\cdots,X_n)'$,其中 $X_1,\cdots,X_n$ 独立正态等方差,A_1,A_2 为 n 阶对称方阵,$Y_i=X'A_iX, i=1,2$. 则

(1)° $A_1A_2=0$,则 Y_1,Y_2 独立(其逆亦真,证明较难).

(2)° 若 b 为 n 维常向量,则 $b'X$ 与 Y_1 独立$\Leftrightarrow A_1b=0$.

18. 不用特征函数证明以下结果:设 $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim N(0,1)$,$a_1,\cdots,a_n$ 为常数,则((1),(2)容易,(3)包含(1),(2)).

(1) 对任何 $\alpha>n$,$\sum_{i=1}^n a_iX_i^2$ 不能有分布 χ_α^2.

(2) $\sum_{i=1}^n a_iX_i^2\sim\chi_n^2\Leftrightarrow a_1=\cdots=a_n=1$.

(3) $\sum_{i=1}^n a_iX_i^2\sim\chi_\alpha^2\Leftrightarrow\alpha\leqslant n$,$\alpha$ 为整数,且 $a_1,\cdots,a_n$ 中有 α 个 1,其余为 0(找到有关的 trick 此题极易).

19°. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 独立正态等方差,证明:

(1) 若 $f(x_1+c,\cdots,x_n+c)=f(x_1,\cdots,x_n)$对任何实数 c,则 $f(X_1,\cdots,X_n)$与 $\overline{X}$ 独立(特例:f 为样本方差).

（2）若 X_i 都有期望 0，而 $f(cx_1,\cdots,cx_n)=cf(x_1,\cdots,x_n)$ 对任何 $c>0$，则 $f(X_1,\cdots,X_n)\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)^{1/2}$ 与 $\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 独立.

20°. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 独立，$X_i\sim N(a_i,\sigma_i^2)$，$1\leqslant i\leqslant n$. 记

$$Y=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^{-2}X_i\Big/\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^{-2},\ Z=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^{-2}(X_i-Y)^2,$$

$$a=\mathrm{E}Y=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^{-2}a_i\Big/\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^{-2}.$$

则

（1）° Y,Z 独立.

（2）° $Z\sim\chi^2_{n-1,\delta}$，其中 $\delta^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^{-2}(a_i-a)^2$.

21. 设 $1/2<\alpha<1$，则 t 分布分位点 $t_n(\alpha)$ 随着 n 上升而严格下降.

22°. 设 $X_1,\cdots,X_n$ iid. 正态，

$$Y\sim t_{n-1},\ S=\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)^{1/2}.$$

则

（1）° $\sqrt{n-1}(X_1-\overline{X})/S$ 与 $(n-1)Y/\{n(Y^2+n-2)\}^{1/2}$ 同分布.

（2）° 以 $X_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)}$ 记次序统计量，有

$$\sup\{(X_{(i)}-\overline{X})/S:X_1,\cdots,X_n\text{ 不全相同}\}$$
$$=(i-1)^{1/2}n^{-1/2}(n-i+1)^{-1/2}.$$

（3）° 利用 1°，2° 证明：当 $x\geqslant(2n)^{-1/2}(n-1)^{1/2}(n-2)^{1/2}$ 时，有

$$P(\sqrt{n-1}(X_{(n)}-\overline{X})/S>x)$$
$$=nP(Y>(n(n-2))^{1/2}((n-1)^2-nx^2)^{-1/2}x).$$

（4）° 若 $\xi\sim t_n$，则 $P(\xi>\sqrt{n})<(n+2)^{-1}$.

23°. 设 $\delta_2>\delta_1\geqslant0$，$m,n$ 为自然数. 则

$$P(\chi^2_{n,\delta_2}>x)>P(\chi^2_{n,\delta_1}>x),$$

$$P(F_{m,n,\delta_2} > x) > P(F_{m,n,\delta_1} > x), \quad x > 0,$$

$$P(t_{n,\delta_2} > x) > P(t_{n,\delta_1} > x), \text{ 一切 } x,$$

又若 $a_2>a_1>0$，则 $P(\chi^2_{a_2}>x)>P(\chi^2_{a_1}>x)$， $x>0$.

24. 设 $X\sim F_{m,n}$，$Y\sim F_{mN}$，$N>n$. 以 a_t 记 F_{mt} 的上 α 分位点 $(0<\alpha<1)$. 证明：$P(Y/a_n<c)>,=,<P(X/a_n<c)$，视 $c<,=,>1$ 而定.

25. 以 u_α 记 $N(0,1)$ 分布函数 Φ 的上 α 分位点. 证明：***a***. $u_{\alpha/2}\leqslant(\chi_n^2(\alpha))^{1/2}$，$n\geqslant1$，等号当且仅当 $n=1$. ***b***. $(1-\alpha)u_\alpha+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-u_\alpha^2/2)<u_{\alpha/2}$， $0<\alpha<1$.

26. 证明：***a***.

$$e^{-u^2}+\frac{\pi-2}{\pi}u^2e^{-u^2/2}>4\Phi(u)(1-\Phi(u))>e^{-2u^2/\pi}, \quad u\neq0,$$

并借此证明

$$\left((1+\left(1-e^{-2u^2/\pi}\right)^{1/2}\right)/2$$
$$>\Phi(u)>\left(1+\left(1-e^{-u^2}-\frac{\pi-2}{\pi}u^2e^{-u^2/2}\right)^{1/2}\right)\Big/2, \quad u>0.$$

b. 对任何 $a<2/\pi$，

$$4\Phi(u)(1-\Phi(u))>e^{-au^2},$$

$u>0$ 时已不再成立.

27. ***a***. 证明当 $x>0$ 时，$e^{x^2}\Phi(x)\Phi(-x)$ 严增. ***b***. 但当 $a\geqslant\sqrt{2/\pi}$ 时，$e^{x^2}\Phi(x)\Phi(-x-a)$ 在 $x>0$ 时，非单调. ***c***. 对固定的 $a>0$，$\Phi(x-a)(1-\Phi(x+a))$ 在 $x>0$ 处严降.

28°. 设 $X_n^2\sim\chi_n^2$，用两种办法证明：$EX_n/\sqrt{n}\to1$ 当 $n\to\infty$：***a°***. 算出 EX_n，用 Stirling 公式

$$\sqrt{2\pi}p^{p+1/2}e^{-p}e^{1/12p}>\Gamma(p+1)>\sqrt{2\pi}p^{p+1/2}e^{-p}e^{1/(12p+1)}, p>0.$$

b°. 不用算出 EX_n，想一个简捷的方法

29. 设 $F_1,\cdots,F_n$ 为分布函数，$p_1\geqslant0,\cdots,p_n\geqslant0$，$\sum_1^n p_i=1$.

$F = \sum_1^n p_i F_i$ 称为 $F_1, \cdots, F_n$ 的一个混合. 证明:*a*. 混合若干个不同正态分布得不出正态分布. *b*. 混合若干个不同的 Poisson 分布得不出 Poisson 分布. *c*. 设 $n \geqslant 2, \theta_1, \cdots, \theta_k$ 不全相同. 混合 $B(n, \theta_1), \cdots, B(n, \theta_k)$ 得不出 $B(n, \theta)$.

30. 设 A 是(x,y) 平面第一象限内一个 Borel 集,以 S_a 记以$(0,0)$,(a,a) 为对角顶点的正方形,则 $f(x) \equiv \int_{S_x} I_A(u,v) \mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 有以下性质:在 $0 < x < \infty$ 非降,绝对连续且 $f(x) \leqslant x^2$. 问:*a*. 是否任一满足这些条件的 f,都有一集 A 使上式成立?充要条件如何?*b*. 当 f 满足上式(即有 A 使 $f(x) = \int_{S_x} I_A(u,v) \mathrm{d}u\mathrm{d}v, x > 0$) 时 A 是否唯一?给出一切能满足上式的 A.

31. 设 $X_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant X_{(n)}$ 为自指数分布 $\mathrm{e}^{-x} I(x > 0)\mathrm{d}x$ 中抽出的 iid. 样本的次序统计量. $Y_1 = X_{(1)}, Y_i = X_{(i)} - X_{(i-1)}, 2 \leqslant i \leqslant n$.

(1)° 证明 $Y_1, \cdots, Y_n$ 独立,求出各自的分布.

(2)° 反过来,若 $Y_1, \cdots, Y_n$ 独立,总体分布有密度 $f(x)\mathrm{d}x$ 且 $f(x) = 0$ 当 $x < 0$, > 0 当 $x \geqslant 0$,则总体分布必为指数分布 $\theta \mathrm{e}^{-\theta x} \cdot I(x > 0)\mathrm{d}x$,对某个 $\theta > 0$.

(3)° 一种元件寿命分布为 $\theta \mathrm{e}^{-\theta x} I(x > 0)\mathrm{d}x$, $\theta > 0$,取 n 个这种元件独立地作试验,并作 r 个定数截尾. 记录得前 r 个失效元件的失效时间依次为 $\xi_1 \leqslant \cdots \leqslant \xi_r$,到停止试验时,这 n 个元件总的工作时间为 $Y = \xi_1 + \cdots + \xi_{r-1} + (n - r + 1)\xi_r$. 利用 1°求出 Y 的分布.

32°. 任给 $\mathbf{R}^1$ 的凸集 Θ,必存在一维指数族 $C(\theta)\mathrm{e}^{\theta x}\mathrm{d}\mu$,其自然参数空间恰为 Θ,且若 Θ 有边界点 a,则对给定的 $r \geqslant 0$,尚可使 $\mathrm{E}_a |r|^r < \infty$ 但 $\mathrm{E}_a |X|^{r+\varepsilon} = \infty$ 当 $\varepsilon > 0$.

33*. 上题可推广到 $\mathbf{R}^k$ 的闭集 Θ,按以下步骤:(1) 若 $C_n(\theta) \mathrm{e}^{\theta' x} \mathrm{d}\mu_n$ 有自然参数空间 $\Theta_n, n \geqslant 1, \mu_n$ 为 $\mathbf{R}^k$ 上的测度,满足

$\sup\limits_{n\geq 1}\mu_n(B)<\infty$对 $\mathbf{R}^k$ 任何有界集 B,则对

$$\mu=\sum_1^{\infty}i^{-2}\mu_i,\ C(\theta)e^{\theta' x}d\mu$$

有自然参数空间$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Theta_n$.(2) 对 $\mathbf{R}^k$ 的闭半空间$\{\theta;a'\theta+b\geqslant 0\}$,找出以它为自然参数空间的指数族.(3) 若$\Theta$为闭凸集,E属于$\Theta$的边界$\overline{\Theta}$且是$\overline{\Theta}$上处处稠密的可列集,过E的每点$e_n$作$\Theta$的支撑,其包含$\Theta$的那个半空间记为$A_n$,则$\Theta=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 结合(1)-(3),证明所述结果.按:此结论可推广到Θ为开集,但对$\mathbf{R}^k(k>1)$内一般凸集不一定对.

34°. 给定 $k,r,0\leqslant r\leqslant k$,则可找到 k 维指数族 $C(\theta)e^{\theta' x}d\mu$,其自然参数空间退化到 $\mathbf{R}^k$ 的一 r 维超平面内.

35. 令 $f(\theta)=\int_{\mathscr{X}}e^{\theta T(x)}d\mu(x),\theta\in\mathbf{R}^k$. 设 $a_0\neq a_1$ 都属于 $\mathbf{R}^k$,且 $f(a_0)<\infty$. 则当 θ 沿线段$\overline{a_0a_1}$趋于 a_1 时,$f(\theta)\to f(a_1)$. 举反例证明条件 $f(a_0)<\infty$不可少.

36. 设一维指数族 $C(\theta)e^{\theta x}d\mu$ 的自然参数空间 Θ 非空,B 为 μ 的支撑,而 $b=\sup B<\infty$. 证明:

(1) Θ 包含充分大的 θ.

(2) $\lim\limits_{\theta\to\infty}C(\theta)e^{\theta x}=0$,对任何 $x<b$

$=(\mu(\{b\}))^{-1}$,当 $x=b$

$=\infty$,当 $x>b$.

37°. 设二维变量(X,Y)为单参数 θ 的指数型族,问 X 是否必为 θ 的指数型族?

38. 设 $\theta_1\neq\theta_2$ 都是指数型族 $C(\theta)e^{\theta T(x)}d\mu(x)$的自然参数空间$\Theta$的内点,则 $E_{\theta_1}(T(X))\neq E_{\theta_2}(T(X))$. 即使 θ_1,θ_2 不全是内点,只要 $E_{\theta_1}(T(X))$和 $E_{\theta_2}(T(X))$都有限,这个结论也成立. 对方差不然,举一个 $N(\theta,1)$以外的例子.

39. (1) 证明 Cauchy 分布族$\{(\pi(1+(x-\theta)^2))^{-1}dx,-\infty<\theta$

$<\infty\}$不是指数型族. 一种可能想到的证法是:Cauchy 分布没有期望而指数型分布有期望. 这个证明能否成立?(2) 证明 Laplace 分布族$\{2^{-1}e^{-|x-\theta|}dx,-\infty<\theta<\infty\}$不是指数型族. (3)* 一般,一维位置参数分布族$\{f(x-\theta)dx,-\infty<\theta<\infty\}$(此处 f 已知,$f\geqslant 0$,$\int_{-\infty}^{\infty}f dx=1$)可以是也可以不是指数型族. 前者的周知例子是正态 $N(\theta,1)$,再举一个例子.

40°. 设 X,Y 独立,则

X,Y 都有指数型分布族$\Leftrightarrow(X,Y)$有指数型分布族. 举例说明,当 X,Y 不独立时,$\Leftrightarrow$两向都不必成立.

41°. 设 $X\sim N(\theta_1,\sigma_1^2)$,$Y\sim N(\theta_2,\sigma_2^2)$. 以 a_0 和 a_1 分别记决策(行动)"$\theta_1\leqslant\theta_2$"和"$\theta_1>\theta_2$",损失为

$L(\theta_1,\theta_2,a_0)=\max(\theta_1-\theta_2,0)$, $L(\theta_1,\theta_2,a_1)=\max(\theta_2-\theta_1,0)$.

以 $X_1,\cdots,X_m$ 和 $Y_1,\cdots,Y_n$ 分别记 X 和 Y 的 iid. 样本. 取决策函数 $\delta(X_1,\cdots,X_m;Y_1,\cdots,Y_n)=a_{I(\bar{X}>\bar{Y})}$,计算 δ 的风险函数.

42°. 一合中有 N 个球,其上分别有数字 $1,\cdots,N$,N 未知,从其中随机地放回地抽取 n 个球,记录其上的数字 $X_1,\cdots,X_n$,要依此估计 N,损失函数为 $L(N,a)=(N-a)^2$,取"决策函数"$\delta(X_1,\cdots,X_n)=k\cdot\max(X_1,\cdots,X_n)$,决定 $k=k_N$ 使风险达到最小,并求当 $N\to\infty$时 k_N 的极限(注:因 k_N 依赖未知的 N,δ 无法由样本算出,故无法使用).

43°. 一统计决策问题的诸要素如下:参数空间 $\Theta=\{1,2\}$,样本分布 $P_1\sim R(0,1)$,$P_2\sim R(0,2)$,行动空间 $A=\{1,2\}$,损失函数 $L(\theta,a)=|\theta-a|$. 决策函数 $\delta(x)$的最大风险记为 $M(\delta)=\max(R(1,\delta),R(2,\delta))$. 找出一切使 $M(\delta)$达到最小的 δ.

44°. 一铜板投掷时出现正面的概率为 1/4 或 3/4. 为判定系何者,将铜板独立地投掷 2 次,据其结果作一判定. 损失为:判对为 0,判错为 1. 找出使最大风险 $M(\delta)$达到最小的决策函数 δ(注:允许随机化决策函数,下题同).

45°. 一般，设参数空间为 $\Theta=\{\theta_1,\cdots,\theta_m\}$，行动空间为 $A=\{a_1,\cdots,a_k\}$，样本分布为 $P_\theta(X=j)=p_{ij},1\leqslant j\leqslant l,1\leqslant i\leqslant m$，损失函数为 $L(\theta_i,a_j)=c_{ij}$. 任一随机化判决函数 δ 可表为 $\{d_{ij}:1\leqslant i\leqslant k,1\leqslant j\leqslant l\}$，$d_{ij}$ 为当样本为 j 时，取行动 a_i 的概率. 找一个这样的 δ 使风险和 $\sum_{i=1}^{m}R(\theta_i,\delta)$ 达到最小，并证明这种 δ 可取为非随机化的（若要求 δ 使 $M(\delta)$ 达到最小，则得到一个复杂的非线性规划问题）.

46°. 设 X,Y,Z 都是随机变量，证明

$$\mathrm{E}(X\mathrm{E}(Y|Z))=\mathrm{E}(Y\mathrm{E}(X|Z)),\mathrm{E}(\mathrm{E}(Z|X,Y)|X)=\mathrm{E}(Z|X)$$

又问 $\mathrm{E}(\mathrm{E}(Z|XY)|X)=\mathrm{E}(Z|X)$ 是否成立.

47°. 证明(1)° $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}(\mathrm{Var}(X|Y))+\mathrm{Var}(\mathrm{E}(X|Y))$.

(2)° $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(\mathrm{Cov}\{(X,Y)|Z\})+\mathrm{Cov}(\mathrm{E}(X|Z),\mathrm{E}(Y|Z))$.

((1)证明了：条件方差 $\mathrm{Var}(X|Y)$“平均说来”$\leqslant$无条件方差. “平均说来”四字可否去掉?)

48°. 设 X,Y 是随机变量，$\mathrm{E}Y^2<\infty$. 找一个只依赖于 X 的随机变量 $f(X)$，使 $\mathrm{E}(Y-f(X))^2$ 达到最小. 证明 $f(X)=\mathrm{E}(Y|X)$. 更一般地，设 ρ 为 $\mathbf{R}^1$ 的严凸函数，$\rho(\pm\infty)=\infty$，$\mathrm{E}\rho(Y+c)<\infty$ 对任何 $c\in\mathbf{R}^1$，则存在 a.s. 唯一的函数 f，使 $\mathrm{E}\rho(Y-f(X))$ 达到最小.

49. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 独立，$Y=Y(X_1,\cdots,X_n)$，$\mathrm{E}Y^2<\infty$，要找 Y 的一个形如 $\sum_{i=1}^{n}f_i(X_i)$ 的最佳（在均方误差意义下）逼近：即对任何选择 $g_1,\cdots,g_n$，都有

$$\mathrm{E}\Big(Y-\sum_{i=1}^{n}f_i(X_i)\Big)^2\leqslant\mathrm{E}\Big(Y-\sum_{i=1}^{n}g_i(X_i)\Big)^2.$$

证明一个解是

$$f_i(x)=\mathrm{E}(Y|X_i=x)-n^{-1}(n-1)\mathrm{E}(Y),1\leqslant i\leqslant n.$$

且若记

$$\widetilde{Y} = \sum_{i=1}^{n} f_i(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(Y|X_i) - (n-1)\mathrm{E}Y,$$

则有

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(\widetilde{Y}) + \mathrm{Var}(Y - \widetilde{Y}).$$

对下面两个特例算出具体形式：

(1) (U 统计量)，设 $X_1,\cdots,X_n$ 为 iid.

$$Y = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} h(X_i,X_j),$$

$h(u_1,u_2)$为 u_1,u_2 的对称函数.

(2) (秩统计量)设 $X_1,\cdots,X_n$ 为 iid.，公共分布 F 在 $\mathbf{R}^1$ 上处处连续(这时以概率 1 $X_1,\cdots,X_n$ 互不相同)，令 $Y=R_i=$满足条件"$X_j\leqslant X_i$"的 $j(1\leqslant j\leqslant n)$的个数.

50°. 以(0,0)和(1,1)为顶点的单位正方形 J 内给定(X,Y)的概率分布如下：在直线段(0,0)—(1,1)上有概率 α，概率元为 $g(s)\mathrm{d}s(0<s<\sqrt{2})$，在 J 的其余点处有密度

$$f(x,y):\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1-\alpha,$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} g(s)\mathrm{d}s = \alpha \quad (0<\alpha<1).$$

求给定 X 时 Y 的条件分布.

51. 设 X,Y 分别有概率密度(对 L 测度)f 和 g，设存在常数 $k>1$ 使 $kf(x)\geqslant g(x)$对一切 $x\in\mathbf{R}^1$. 按下述方式产生一个量 ξ：抽取 X 的一个样本 x_0，然后在 $R(0,1)$中抽样. 若结果$\leqslant g(x_0)/(kf(x_0))$，则令 $\xi=x_0$，否则重新抽取 X 的样本再按上述方式处理，直到可定出 ξ 为止. 证明：这样定出的 ξ 其分布与 Y 同(这个结果可用来对某些分布作抽样，例如取 $f=N(0,1)$密度而 g 满足所述条件. 从实用观点，不必在 $\mathbf{R}^1$ 上处处满足 $kf(x)\geqslant g(x)$，只需在足够长的区间$(-a,a)$上满足即可).

52°. 不用因子分解定理，直接计算条件分布，证明：若 $X_1,\cdots,$

X_n 为 iid. 样本，则当总体分布为指数族$\{\theta e^{-\theta x}I(x>0)dx, 0<\theta<\infty\}$或正态分布族$\{N(\theta,\sigma^2): -\infty<\theta<\infty\}$($\sigma^2$ 已知)时，$\overline{X}$ 为充分统计量.

53. 设样本 X 的分布族中只包含 m 个分布，m 有限，则必存在一个 $m-1$ 维(即取值于 $\mathbf{R}^{m-1}$)的充分统计量.

54°. 设 X 样本空间 $\mathscr{X}$ 可列，则不论 X 的分布族如何，必存在一个一维充分统计量.

55. 设 X 的样本空间与分布族为$(\mathscr{X},\mathscr{B}_x,P_\theta,\theta\in\Theta)$，取值于$(\mathscr{T},\mathscr{B}_{\mathscr{T}})$的统计量 T 为充分. 设 $A\in\mathscr{B}_x$ 满足 $P_\theta(A)>0$ 对一切 $\theta\in\Theta$，定义 $\tilde{P}_\theta$:$\tilde{P}_\theta(B)=P_\theta(B\cap A)/P_\theta(A)$，$B\in\mathscr{B}_x$. 证明：对分布族$(\tilde{P}_\theta:\theta\in\Theta)$而言，$T$ 仍为充分.

56. 两统计量 $T=T(X)$ 及 $S=S(T)=S(T(X))$，若 S 为充分统计量，则 T 也是. 此事实在直观上显然，试从充分性的意义的角度去说明之，并在以下两个情况给以严格证明：**(1)°** X 的分布族为受控时. **(2)** T 及 X 皆在欧氏空间取值时. (一般情况应当也是对的，作者还不知道如何证明).

57. 设 X:$(\mathscr{X},\mathscr{B}_x,P_\theta,\theta\in\Theta)$，$Y$:$(\mathscr{Y},\mathscr{B}_y,\tilde{P}_\varphi,\varphi\in\tilde{\Theta})$，$T_1(X)$ 和 $T_2(Y)$分别为前者和后者的充分统计量. 证明：(T_1,T_2)是$(\mathscr{X}\times\mathscr{Y},\mathscr{B}_x\times\mathscr{B}_y,P_\theta\times\tilde{P}_\varphi,(\theta,\varphi)\in\Theta\times\tilde{\Theta})$的充分统计量(注：不能用分解定理，因未假定分布族可控). 证明其逆也成立.

58°. 设 $T=T(X)$是取值于$(\mathscr{T},\mathscr{B}_{\mathscr{T}})$的充分统计量，且正则条件概率分布存在. 按充分性定义，对每个 $t\in\mathscr{T}$，条件分布 $P_\theta(\cdot|T=t)$与 θ 无关. 由此似乎自然地得到以下的结论：对任何 $A\in\mathscr{B}_{\mathscr{T}}$，若 $P_\theta(T(X)\in A)>0$ 对任何 $\theta>0$，则条件分布 $P_\theta(\cdot|T\in A)$(这可按初等概率计算)也应与 θ 无关. 此结论是否对？如何解释？

59*. 样本 X 的分布族$(P_\theta,\theta\in\Theta)$受控，设统计量 $T=T(X)$ 有"两两充分性"，即对 Θ 中的任两点 $\theta_1\neq\theta_2$，T 是关于$\{P_{\theta_1},P_{\theta_2}\}$的充分统计量. 证明：$T$ 关于$(P_\theta,\theta\in\Theta)$也是充分统计量.

60°. 以下两件事实虽容易证明，值得留意一下.

(1)° 一串充分统计量之极限(a. s. 或 in pr.)不必为充分统计量. **(2)°** 充分统计量 T 之分布，对不同的参数值必不同(假定不同参数对应样本之不同分布).

61*. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是从分布族$\{f(x,\theta)\mathrm{d}x,\theta\in\Theta\subset\mathbf{R}^1\}$中抽出的 iid. 样本，$f(x,\theta)>0$ 对$-\infty<x<\infty$及 $\theta\in\Theta$. 设 $T_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 为充分统计量，则这分布族为指数型.

62. 样本 X 有分布族$\{f_\theta(x)\mathrm{d}x,\theta=(\theta_1,\theta_2)\in\Theta_1\times\Theta_2\}$，又 $f_\theta(x)$处处大于 0. 设(T_1,T_2)为统计量，满足以下条件：对任何 $\theta_1\in\Theta_1$ 固定时，T_2 是参数 θ_2 的充分统计量(即分布族$\{f_{\theta_1,\theta_2}(x):\theta_2\in\Theta_2,\theta_1$ 固定$\}$之充分统计量)；对任何 $\theta_2\in\Theta_2$ 固定时，T_1 是 θ_1 的充分统计量. 则(T_1,T_2)是$\{f_\theta:\theta\in\Theta_1\times\Theta_2\}$的充分统计量. 又举反例证明此结论之逆不真.

63°. X 的样本空间为$(\mathbf{R}^1,\mathscr{B}_1)$，分布族为一切关于原点对称的分布的族. 证明 $T(X)=|X|$是充分统计量(此题直观上显然，问题在证明可测性).

64°. $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自一维分布族$(F:F\in\mathscr{F})$($\mathscr{F}$ 任意)的 iid. 样本，T 为次序统计量. 证明 T 的充分性是这样做的：对任何满足条件 $t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n$ 的 $t=(t_1,\cdots,t_n)$，及 $A\in\mathscr{B}_n$，定义 $P(A,t)$如下：由 t 作任意置换得 $n!$ 个点$(t_{i_1},\cdots,t_{i_n})$(相同的要重复计算). 以 r 记这些点中落在 A 中的个数，则 $P(A,t)=r/n!$. 此与 X_i 的分布 F 无关. 试严格证明它确实满足充分性定义中对 $P(A,t)$的一切要求.

65. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为自$\{N(0,\sigma^2):\sigma^2>0\}$中抽出的 iid. 样本，已知 $T=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 为充分统计量. 试证：即使把参数空间由$\{\sigma^2>0\}$扩大为$\{\sigma^2\geqslant0\}$($N(0,0)$理解为退化为一点 0 之分布)，T 仍是充分统计量.

在保持充分性的前提下，一个统计量愈精简愈好. 把"最精简的"充分统计量叫做"极小充分统计量". 数学上可以这样定义：设取值于$(\mathscr{T},\mathscr{B}_{\mathscr{T}})$的统计量 T 为充分，且对任何充分统计量 T_1，取值于$(\mathscr{T}_1,\mathscr{B}_{\mathscr{T}_1})$，必存在由$(\mathscr{T}_1,\mathscr{B}_{\mathscr{T}_1})$到$(\mathscr{T},\mathscr{B}_{\mathscr{T}})$的可测函数 g，使 $T(X)=g(T_1(X))$ a. s. P_θ 对任何 $\theta\in\Theta$，则称 T 为极小充分统计量.

66°. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自两点分布族 $P_\theta(X=1)=1-P_\theta(X=0)=\theta(0\leqslant\theta\leqslant1)$的 iid. 样本，证明 $\sum\limits_{i=1}^n X_i$ 为极小充分统计量.

67. * 推而广之，设样本分布为指数型族 $C(\theta)e^{\theta T(x)}d\mu(x)$，$\theta\in\Theta$，$\theta$ 为 k 维，而 Θ 作为 $\mathbf{R}^k$ 之子集有内点，则 T 为极小充分统计量.

68. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是从共支撑分布族 $f(x,\theta)d\mu(x)$中抽出的 iid. 样本，θ 属于 $\mathbf{R}^1$ 之一区间. 证明：在 $n\geqslant3$ 时，样本中位数 $\text{med}(X_1,\cdots,X_n)$绝不是充分统计量.

69°. 设$(X_1,Y_1),\cdots,(X_n,Y_n)$是二维正态 $N(\theta_1,\theta_2,1,1,\rho)$中抽出的 iid. 样本. 用下法求相关系数

$$r=\sum_1^n(Y_i-\overline{Y})X_i/S_XS_Y$$

的分布，设 $\rho=0$. 此处

$$S_X=\left(\sum_1^n(X_i-\overline{X})^2\right)^{1/2},$$

$$S_Y=\left(\sum_1^n(Y_i-\overline{Y})^2\right)^{1/2}.$$

给定$(Y_1,\cdots,Y_n)$，因 $\rho=0$，$(X_1,\cdots,X_n)$的条件分布等于其无条件分布. 再用与 22 题 1°相似的结果(注：这个方法也适用于 $\rho\neq0$ 时，当然计算复杂得多).

70°. 设 T 是$(\mathscr{X},\mathscr{B}_x,P_\theta)$，$\theta\in\Theta$ 的充分统计量，则对任何 $\mathscr{B}_x$ 可测函数 f，$E_\theta|f(x)|<\infty$对任何 $\theta\in\Theta$，必存在 $\mathscr{B}_{\mathscr{T}}$ 可测函数 g，

使 $\mathrm{E}_\theta(f(X)|T)=g(T),\theta\in\Theta$.

71. 设样本 $X_1,\cdots,X_m\sim f(x,\theta_1,\theta_3)\mathrm{d}x$, $Y_1,\cdots,Y_n\sim f(y,\theta_2,\theta_3)\mathrm{d}y$, $X_1,\cdots,Y_n$全体独立. 此处

$$f(x,a,b)=H^{-1}(a,b)h(x)I(a<x<b),\ h(x)>0,$$

$$\int_a^b h(x)\mathrm{d}x\equiv H(a,b)<\infty,\ -\infty<(\theta_1,\theta_2)<\theta_3<\infty.$$

令 $m_x=\min(X_1,\cdots,X_m)$, $m_y=\min(Y_1,\cdots,Y_n)$, $M=\max(X_1,\cdots,X_m,Y_1,\cdots,Y_n)$, $T=(m_x,m_y,M)$. 直接计算条件分布$(\max(X_i),\max(Y_j))|T$,以证明 T 为充分统计量——这个事实从因子分解定理显然.

72°. 设样本分布依赖于参数(θ,φ). 统计量 T 称为相对于 θ 是充分的,若① T 的分布只依赖 θ,② 给定 T 时样本的条件分布不依赖 θ. ***a.*** 证明(这是最常见的一种情况):若样本 X,Y 独立,X 的分布只依赖 θ 而 $T=T(X)$是 X 分布族的充分统计量,而 Y 的分布只依赖 φ,则 T 相对于 θ 是充分的. ***b.*** 举一个不属于 a 中情况的例.

第　二　章

1. ***a.*** 一维分布族 $\{F:\int_{\mathbf{R}^1}x\mathrm{d}F\in\{c_1,\cdots,c_n\}\}$, 其中 $c_1,\cdots,c_n$ 为互不相同的常数,当 $n=1$ 时非完全,$n\geqslant2$ 时完全. ***b.*** 如增加限制:"F 有密度(对 L 测度)",则上述结论仍成立.

2°. β 分布族$\{\beta(a,b):a>0$ 固定,$b=1,2,\cdots\}$及$\{\beta(a,b):b$ 固定,$a=1,2,\cdots\}$都完全.

3. 若假定指数型分布族 $\{C(\theta)\exp\left(\sum_{i=1}^k\theta_iT_i(X)\right)\mathrm{d}\mu(x):\theta\in\Theta\}$, 其自然参数空间 Θ 作为 $\mathbf{R}^k$ 的子集无内点,则统计量 $T=(T_1,\cdots,T_k)'$决非完全. 若 Θ 非自然参数空间而是人为给定的,情况如何?

4°. $\mathscr{F}=\{f(x-\theta)\mathrm{d}x:-\infty<\theta<\infty, f\geqslant 0$ 偶, $\int_{\mathbf{R}^1} f\mathrm{d}x=1$, $\theta\in\mathbf{R}^1\}$, T 为其 iid. 样本的次序统计量. 求证:$n=1,2$ 时(n 为样本量)T 完全,$n\geqslant 3$ 时不完全.

5°. $\mathscr{F}$ 为至少有一个非退化分布的一维分布族,$X_1,\cdots,X_n$ 为其 iid. 样本,则统计量 $T=(X_1,\cdots,X_n)$ 当 $n>1$ 非完全.

6. 证明:完全⇒有界完全,但其逆不真.

7°. 举反例证明 Basu 定理之逆不真. 利用 Basu 定理解第一章习题 19,及下述问题:设 $X_1,\cdots,X_n$ 是抽自分布族$\{e^{-(x-\theta)}\cdot I(x>\theta)\mathrm{d}x:-\infty<\theta<\infty\}$的 iid. 样本,

$$T_1=\min X_i,$$

$$T_2=\sum_{i=1}^n X_i-n\min X_i,$$

则 T_1,T_2 独立.

8. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自分布族 $\{e^{-(x-\theta)}I(x>\theta)\mathrm{d}x:-\infty<\theta<\infty\}$ 的 iid. 样本. 证明:统计量 $\sum_{i=1}^n X_i$ 完全而非充分.

9. (删失分布) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是从均匀分布族$\{R(0,\theta):0<\theta<\infty\}$在 1 这个点的右删而得到的分布族$\{P_\theta:0<\theta<\infty\}$中抽出的 iid. 样本($P_\theta$ 的定义是:$P_\theta=R(0,1)$当 $0<\theta\leqslant 1$,$P_\theta(A)=|A|/\theta$ 当 $A\subset(0,1)$,$|A|$为 A 的 L 测度,而 $P_\theta(\{1\})=(\theta-1)/\theta$. 则统计量 $T=\max X_i$ 仍为完全,但不再是充分的(后一结论可与第一章 55 题比较,本题结论在更广的范围内成立).

10°. 一个只包含有限个连续型分布的族 $\mathscr{F}=\{f_i(x)\mathrm{d}x:1\leqslant i\leqslant k\}$必不是完全的. 如把"有限"改为"可列",结论不再成立. 又如去掉"连续型"的限制,结论也不成立.

11°. $X_1,\cdots,X_n$ 是从均匀分布族$\{R(0,\theta):\theta\in A\}$中抽出的 iid. 样本,$A\subset(0,\infty)$. 证明:统计量 $T=\max X_i$ 完全的充要条件是:A 在$(0,\infty)$处处稠密.

12*. χ^2, t, F 的完全性问题:*a*. $\{|t_n|, n\geqslant 1\}$, $\{F_{mn}: m\geqslant 1, n\geqslant\}$ 都完全. *b*. $\{t_{n,\delta}: n$ 固定, $\delta>0\}$, $\{F_{m,n,\delta}: m, n$ 固定, $\delta>0\}$ 都完全. *c*. $\{\chi^2_{n,\delta}: n$ 固定, $\delta>0\}$, $\{\chi^2_n: n=1,2,\cdots\}$ 都不完全.

13. 利用完全性证明:若自然形式的一维指数型分布族 $\{C(\theta)e^{\theta x}d\mu(x), \theta\in\Theta\}$, $\Theta\subset\mathbf{R}^1$ 有内点,则① 若其方差与 θ 无关,则为正态分布族;② 若其均值总等于其方差(对一切 $\theta\in\Theta$),则为 Poisson 分布族. 请举反例证明:若指数型有一般形式 $C(\theta)\exp\left(\sum_{i=1}^k Q_i(\theta)T_i(x)\right)d\mu(x)$ (θ, x 皆一维),或去掉分布族为指数型的假定,则上述两结论都失效.

又:① 可以推广到多维:若 $C(\theta)\exp\left(\sum_{i=1}^k \theta_i x_i\right)d\mu(x)$, $\theta\in\Theta$, Θ 在 $\mathbf{R}^k$ 有内点,则为 k 维正态分布族.

14*. $X_1,\cdots,X_n$ 是抽自分布族 $\{R(\theta,\theta+1): \theta\in\mathbf{R}^1\}$ 的 iid. 样本, $T_1=\min X_i$, $T_2=\max X_i$. 则 (T_1,T_2) 充分而非有界完全, T_2 有界完全而非充分(T_1 亦然).

称一族分布 $(\mathscr{X}, \mathscr{B}_x, P_\theta, \theta\in\Theta)$ 有强完全性,若存在 $(\Theta, \mathscr{B}_\Theta)$(当 Θ 为欧氏时, $\mathscr{B}_\Theta$ 总取为 Borel)上的概率测度 ν,使则"$E_\theta g(X)=0$ 对 θ a.e. ν 成立"就可推出 $P_\theta(g(X)\neq 0)=0$ 对一切(不是 a.e. ν!)$\theta\in\Theta$. 统计量 T 的强完全性相应定义.

15°. $X_1,\cdots,X_n$ 是从均匀分布 $R(-\theta,\theta)$ 中抽出的 iid. 样本, $\theta>0$. 记 $M=\max\limits_i X_i$, $m=\min\limits_i X_i$, $T_1=M-m$, $T_2=\max(M,-m)$. *a*. 证明 T_2 是完全充分统计量. *b*. 证明 T_1/T_2 与 T_2 独立. *c*. 求 T_2/T_1 的分布.

16. 样本 X 有分布($x\in\mathbf{R}^1$)

$$C(\theta)\exp\left(\sum_3^k \theta_i A_i(x)\right)I(\theta_1<x<\theta_2)d\mu(x),$$

其中 $(\theta_3,\cdots,\theta_k)$ 属于 $\mathbf{R}^{k-2}$ 中某有内点的集 Θ,而 $a<\theta_1<\theta_2<b$, $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为 X 的 iid. 样本,记

$$T_i = \sum_{j=1}^{n} A_i(X_j),3 \leqslant i \leqslant k,\ m = \min X_j,\ M = \max X_j.$$

证明：$(T_3,\cdots,T_k,m,M)$为完全充分统计量.

又：若 $\theta_1<x<\theta_2$ 改为 $\theta_1<x(x<\theta_2)$，则 $M(m)$可以去掉，结论仍成立.

17*. 设 F 是一维分布，$\{F(x-\theta),\theta\in\mathbf{R}^1\}$为位置参数分布族. 此分布族可以是完全的，例如 $F\sim N(0,1)$；也可以是不完全的，试举出一个这样的例子.

18. 设 $X_1,\cdots,X_m$ iid. $\sim N(\theta_1,\theta_3)$，$Y_1,\cdots,Y_n$ iid. $\sim R(\theta_2,\theta_3)$且全体独立，$-\infty<(\theta_1,\theta_2)<\theta_3<\infty$. 记 $M_x=\max\limits_i X_i$，$m_x=\min\limits_i X_i$，M_y,m_y 类似. ***a°***. 证明：(M_x,m_x,M_y,m_y)充分而非完全. ***b***. 找出一个完全充分统计量.

19. 设 $X_1,\cdots,X_m$ iid.，有公共密度 $\sigma_1^{-1}\exp\left(-\dfrac{x-\theta_1}{\sigma_1}\right)I(x>\theta_1)\mathrm{d}x$，$Y_1,\cdots,Y_n$ iid.，有公共密度 $\sigma_2^{-1}\exp\left(-\dfrac{y-\theta_2}{\sigma_2}\right)I(y>\theta_2)\mathrm{d}y$，此处 $\theta_1\in\mathbf{R}^1,\theta_2\in\mathbf{R}^1,\sigma_1>0,\sigma_2=\Delta\sigma_1,\Delta>0$ 已知. 证明：$(T_1,T_2,T_3)=\left(\Delta\sum_1^m(X_i-\underline{X})+\sum_1^n(Y_j-\underline{Y}),m\underline{X},n\underline{Y}\right)$ 是完全充分统计量，$\underline{X}=\min X_i,\underline{Y}=\min Y_j$.

20. ***a°***. 强完全性⇒完全性，其逆不真. ***b***. 指数型族$\{C(\theta)\cdot e^{\theta T(x)}\mathrm{d}\mu(x),\theta\in\Theta\}$，若 Θ 在 $\mathbf{R}^k$ 有内点(θ 为 k 维)，则 T 有强完全性. ***c***. 第 11 题可解释为 $\max X_i$ 有强完全性. ***d***. 设 $X:(\mathscr{X},\mathscr{B}_x,P_\theta,\theta\in\Theta)$及 $Y:(\mathscr{Y},\mathscr{B}_y,\tilde{P}_\varphi:\varphi\in\tilde{\Theta})$独立，$T_1=T_1(X)$，$T_2=T_2(Y)$分别是二者的完全统计量，又二者中至少有一个为强完全，则 $T=(T_1,T_2)$是$(\mathscr{X}\times\mathscr{Y},\mathscr{B}_x\times\mathscr{B}_y,P_\theta\times\tilde{P}_\varphi:(\theta,\varphi)\in\Theta\times\tilde{\Theta})$的完全统计量. ***e***. 设 $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim\sigma^{-1}\exp\left(-\dfrac{x-\theta}{\sigma}\right)I(x>\theta)\mathrm{d}x,\theta\in\mathbf{R}^1$，$\sigma>0$. 令 $t_1=\min X_i,t_2=\sum_1^n(X_i-t_1)$. 则$(t_1,t_2)$ 为完全充分统

计量.

21°. F 为一维分布. 考虑分布族 $\{F(\theta x):\theta>0\}$, $X_1,\cdots,X_n$ 为其 iid. 样本, T 为次序统计量. 设 F 不退化到一点, 则当 $n\geqslant 2$ 时 T 非完全, $n=1$ 时可完全可不完全, 各举一例. 后一情况并请举一个其支撑全在 $(0,\infty)$ 的 F 的例子.

22. (第 1 题的推广) $\mathscr{F}=\{$一维分布 F: $E_F X=c_1$ 或 $c_2,\cdots$, 或 $c_m\}$, c_i 为互不相同的常数. 以 T 记 X 的 iid. 样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的次序统计量, 则当 $n\geqslant m$ 时 T 不完全, $n<m$ 时为完全.

23. $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim N(\theta,\sigma^2)$, $S^2=\sum\limits_1^n(X_i-\overline{X}^2)$. ***a.*** 固定 $\sigma^2=\sigma_0^2$. 若 $f(\overline{X})$ 的分布与 θ 无关, 则 $f=\text{const}$. a.e. L 于 $\mathbf{R}^1$. ***b.*** 固定 $\sigma^2=\sigma_0^2$. 若 $f(X_1,\cdots,X_n)$ 的分布与 θ 无关, 则存在 $n-1$ 元函数 g, 使 $f(x_1,\cdots,x_n)=g(x_2-x_1,\cdots,x_n-x_1)$ a.e. L 于 $\mathbf{R}^n$. ***c.*** 若 $f(S)>0$, $E_\sigma f(S)<\infty$ 对任何 $\sigma>0$, 而 $f(S)/\sigma$ 的分布与 σ 无关, 则存在常数 $C>0$, 使 $f(S)=CS$ a.e. L. 于 $S>0$. ***d.*** 若 $X\sim N(\theta,\sigma^2)$, $f(X)$ 与 X 独立, 则 $f=\text{const}$ a.e. L 于 $\mathbf{R}^1$. 利用这一事实证 ***a***.

24. 以 $\varphi_{\theta,\sigma}$ 记 $N(\theta,\sigma^2)$ 的密度, 取定 $\sigma_1>0$, $\sigma_2>0$. 设 $C(\theta)>0$ 定义于 $\mathbf{R}^1$, 在某点 θ_0 处非无穷阶可导, 则分布族 $\{f(x,\theta)\mathrm{d}x=(\varphi_{\theta\sigma_1}(x)+C(\theta)\varphi_{\theta\sigma_2}(x))/(1+C(\theta))\mathrm{d}x:\theta\in\mathbf{R}^1\}$ 为完全族 (此题将用于 71 题).

25. 设样本 X 的分布为 P_θ, $\theta\in\Theta$. ***a°***. 为要使 θ 有一无偏估计 $\hat{\theta}(X)$ 其方差 $\mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta})\equiv 0$ 于 Θ 上, 必要条件是: 对每个 θ, 存在可测集 A_θ 使 $P_\theta(A_\theta)=1$, $P_{\tilde{\theta}}(A_\theta)=0$, 当 $\tilde{\theta}\neq\theta$. ***b°***. 这个条件是不是充分条件?

26. 参数空间包含两点 0, 1. 当 $\theta=0,1$ 时, 样本分布分别为 $f_0\mathrm{d}x$ 和 $f_1\mathrm{d}x$, f_0, f_1 在 $(0,1)$ 之外为 0, 在 $(0,1)$ 内处处大于 0. 想找一个 θ 的无偏估计 $\hat{\theta}$, 使对给定的 $\varepsilon>0$ 有 $\mathrm{Var}_1(\hat{\theta})\leqslant\varepsilon$. ***a.*** 若 f_0 和 f_1 "很不相同", 这可以做到. 具体说, 若任给 $\eta>0$, $K<\infty$, 存在

$E\subset(0,1)$，使 $|E|\leqslant\eta$ 且 $\int_E f_0\mathrm{d}x\geqslant\sqrt{\int_E f_1\mathrm{d}x K}$，则对任给 $\varepsilon>0$ 都可以. ***b***. 反之，若 f_0,f_1"差距不大"，具体说，若存在常数 c，$0<c<\infty$，使对一切 $x\in(0,1)$ 有 $f_0(x)\leqslant cf(x)$，则对充分小的 $\varepsilon>0$ 不可以. ***c***. 但是，不管 f_0,f_1 如何（但满足 $f_0(x)f_1(x)>0$ 于 $x\in(0,1)$），对充分小的 $\varepsilon>0$，不存在无偏估计 $\hat{\theta}$，使 $\mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta})\leqslant\varepsilon$，$\theta=0,1$.

27. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为 $N(\theta,\sigma^2)$的 iid. 样本. ***a***. 一个只与 σ 有关的函数 $g(\sigma)$若有无偏估计，则必有只依赖于 $S^2=\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2$ 的无偏估计. ***b***. 问此断言对 θ 是否成立，即 $h(\theta)$若有无偏估计，是否必有只依赖于 $\overline{X}$ 的无偏估计.

28. 样本 X 有指数型分布 $C(\theta)\mathrm{e}^{\theta x}r(x)I(a<x<\infty)\mathrm{d}x$. ***a***. 若 $a=-\infty$，r 的 m 阶导数 $r^{(m)}(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 处处存在且$|\mathrm{e}^{\theta x}r^{(m)}(x)|$在 $\mathbf{R}^1$ 为 L 可积，则 θ^m 有无偏估计 $\hat{g}(x)=(-1)^m r^{(m)}(x)r^{-1}(x)\cdot I(r(x)>0)$. ***b***. 若 a 有限，$r^{(m)}(x)$在(a,∞)处处存在且 $\lim\limits_{x\downarrow a}r^{(i)}(x)=0$ 对 $0\leqslant i\leqslant m-1$，又 $|\mathrm{e}^{\theta x}r^{(m)}(x)|$ 在(a,∞)可积，则 ***a*** 中给的 $\hat{g}$ 仍为 θ^m 的无偏估计.

29°. 即使在 iid. 样本并限制估计量必须是样本的对称函数的前提下，也有这样的情况：两个不同的无偏估计有处处相等的方差. 一个例子是 $X_1,\cdots,X_n\sim N(0,\sigma^2)$，估计 σ^2，$\hat{\sigma}_1^2=\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2\Big/(n-1)$，$\hat{\sigma}_2^2=n^{-1}(n-1)^{-1}\left((n-2)\sum_{i=1}^n X_i^2+n^2\overline{X}^2\right)$. 验证这个例子，并再举一个这样的例子（此题与 27 题 ***a*** 对照看）.

30°. 设样本 $X_1,\cdots,X_n$ 抽自 Logistic 分布 $\mathrm{e}^{(x-\theta)}(1+\mathrm{e}^{(x-\theta)})^{-2}\mathrm{d}x$，$\theta\in\mathbf{R}^1$. ***a***. 证明对估计 θ，方差的 C-R 界为 $3/n$，而这个界限达不到. ***b***. 计算无偏估计 $\overline{X}$ 的方差.

31. $X_1,\cdots,X_n$ iid.，$\sim R(0,\theta)$，$\theta>0$，$g_1(\theta)=\log\theta$，$g_2(\theta)=\theta$.

证明：**a**. 任给 $\epsilon>0$，存在 n_0 充分大及估计 $\hat{g}_1$，使 $\sup\limits_{\theta>0}\mathrm{E}(\hat{g}_1 - g_1(\theta))^2 < \epsilon$，当 $n \geqslant n_0$. **b**. 不论 n 多大，对任何估计 $\hat{g}_2$，皆有 $\sup\limits_{\theta>0}\mathrm{E}(\hat{g}_2 - g_2(\theta))^2 = \infty$.

32. $X\sim B(n,p)$，用 X 估计 np，取损失 $(X-np)^2$ 及 $|X-np|$. **a**. 证明风险 $\mathrm{E}|X-np| = 2k(1-p)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$，其中 k 为 $[np,np+1]$ 内任一整数. **b**. 利用 **a** 证明：在区间 $(1-2^{-1/(n-1)}, 2^{-1/(n-1)})$ 内，$\mathrm{E}|X-np|$ 比 $np(1-p)$ 小，在此区间外则 $\mathrm{E}|X-np|$ 比 $np(1-p)$ 大，在区间的两端点二者相同.

33°. **a**. 设 $\hat{\theta}$ 为 θ 的 MVUE，$\hat{\theta}_1$ 为 θ 之一无偏估计，其方差 $v_1(\hat{\theta})$ 处处有限. 设 c 为常数而 $\hat{\theta}_2=c\hat{\theta}-(c-1)\hat{\theta}_1$，则 $\hat{\theta}_2$ 为 θ 的无偏估计，且其方差 $v_2(\theta)$：

$$
\begin{aligned}
v_2(\theta) &= v_1(\theta), \quad \text{当 } c = 0 \text{ 或 } 2; \\
&\leqslant w_1(\theta), \quad \text{当 } 0 < c < 2; \\
&\geqslant v_1(\theta), \quad \text{其他 } c,
\end{aligned}
$$

且每当 $v_1(\theta)\geqslant v(\theta)=\mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta})$ 成立严格不等号时，上式也成立严格不等号. **b**. 利用上述结果证明：设 $X_1,\cdots,X_n$ 为 $N(0,\sigma^2)$ 的 iid. 样本，则

$$
\hat{g}(X) = (n(n-1))^{-1}\left((n-2)\sum_1^n X_i^2 + (n\overline{X})^2\right)
$$

为 σ^2 的无偏估计，且有方差 $2\sigma^4/(n-1)$.

34*. 样本 $X\sim R(\theta-\pi,\theta+\pi)$，平方损失 $(\theta-d)^2$. 证明：对任一指定点 $\theta_0\in\mathbf{R}^1$，都可找到无偏估计 $\hat{\theta}$，使 $\mathrm{Var}_{\theta_0}(\hat{\theta})<\mathrm{Var}(X)$. 但是，不可能找到一个与 X 不同的无偏估计 θ^*，使 $\mathrm{Var}_\theta(\theta^*)\leqslant \mathrm{Var}_\theta(X)$，对一切 $\theta\in\mathbf{R}^1$.

35. 样本 X 服从 Poisson 分布 $P(\theta)$，$\theta>0$，平方损失 $(\theta-d)^2$. 设 $\delta(X)$ 为 θ 之一估计，其风险 $R(\theta,\delta)$ 与 X 之风险 θ 在一区间 (a,b) 上重合，则 $\delta=X$.

36°. $X \sim C(\theta)e^{\theta T(x)}d\mu(x), \theta \in \mathbf{R}^1$. 由完全性知，若 $E_\theta g(X)=0$ 当 $\theta \in A$，而集 A 有有限的极限点，则 $g(X)=0$ a.s.. 但若 A 虽无限但无有限极限点则不然. 举一个这样的具体例子.

37. $(X_1,Y_1),\cdots,(X_n,Y_n)$是抽自二维正态 $N(\theta_1,\theta_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 的 iid. 样本，$|\rho|<1$，ρ 是相关系数，$\theta_1 \in R_1$，$\theta_2 \in R_1$，$\sigma_1^2>0$，$\sigma_2^2>0$. ***a°***. 证明

$$\left(\overline{X},\overline{Y},\sum_1^n (X_i-\overline{X})^2,\sum_1^n (Y_i-\overline{Y})^2,\sum_1^n (X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})\right)$$

是完全充分统计量. ***b***. 样本相关系数

$$r=\sum_1^n (X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})\Big/\left(\sum_1^n (X_i-\overline{X})^2\sum_1^n (Y_i-\overline{Y})^2\right)^{1/2}$$

有密度(见 Cramer:Mathematical Methods of Statistics, p. 398)

$$f_n(r)=\frac{2^{n-3}}{\pi(n-3)!}(1-\rho^2)^{(n-1)/2}(1-r^2)^{(n-4)/2}$$

$$\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\Gamma^2\left(\frac{n+i-1}{2}\right)\frac{(2\rho r)^i}{i!}I(|r|<1),$$

利用这个形式证明：r 不是 ρ 的无偏估计. ***c***. 证明在样本量 $n\geqslant 10$ 时，确有 ρ 的无偏估计在. 因而结合 ***a*** 可知，ρ 的 MVUE 也存在.

38°. 样本$(X_1,\cdots,X_n)$服从 n 维正态 $N(0,A)$，其中 A 的对角元为 $\sigma^2>0$，非对角元为 $\rho\sigma^2$. ***a***. 问 ρ 能容许的值的范围如何. ***b***. 定出完全充分统计量. ***c***. 定出 σ^2 的 MVUE，并计算其方差. ***d***. 证明当 $n\geqslant 4$ 时 ρ 的 MVUE 存在. ***e***. 对"序列相关"，即

$$EX_iX_j=\sigma^2 \text{当 } i=j,\ =\rho \text{ 当 } j=i+1;\ =0 \text{ 其他}$$

的情况，解 ***a***~***d***.

39. 设 $f(x,y)$是平面上以$(0,0)$，$(1,0)$，$(0,2)$为顶点的直角三角形内的均匀分布密度. 设$(X_1,Y_1),\cdots,(X_n,Y_n)$是抽自分布族 $f(x-\theta_1,y-\theta_2)$的 iid. 样本. ***a***. 找出(θ_1,θ_2)的一个充分统计量，并考察它的完全性. ***b***. 找出一个基于此充分统计量的无偏估计. ***c***. 这个题可以作怎样的推广？

40. $Y \sim N(\theta, \sigma^2)$，$\theta \in R_1$，$\sigma^2 > 0$，$X = e^Y$. X 的分布称为**对数正态分布**. 设 $X_1, \cdots, X_n$ iid. 为 X 样本. 求 X 的期望的 MVUE. 求 X 的方差的 MVUE.

41°. $(X_1, Y_1), \cdots, (X_n, Y_n)$ 是从以 (θ_1, θ_2) 为圆心，θ_3 为半径的圆内均匀分布抽出的 iid. 样本. 找 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 的无偏估计，并尽其可能缩小估计的方差.

42°. 一批原件其寿命服从指数分布 $\lambda e^{-\lambda x} I(x>0) dx$，$\lambda > 0$. 进行两种试验以估计 λ，第一种试验是：固定一个时刻 $T>0$，从时刻 0 开始取一个元件作试验，到其失效时立即换上同批中一新元件，直到时刻 T 为止. 以 X 记到那时为止用坏的元件个数，基于 X 作 λ 的 MVUE $\hat{\theta}_1$. 第二种试验是：固定一个自然数 $k \geqslant 3$，每用坏一个元件立即替换一个新的，直到用坏 k 个为止，用 Y 记第 k 个用坏时的时刻（或者说，取 k 个元件同时作试验，Y 是它们的寿命之和)，基于 Y 作 λ 的 MVUE $\hat{\theta}_2$. 如果试验费用只取决于时间，问那一种试验方式更有利. 更确切地说，取第一种试验中的 T 等于第二种试验的平均时间，去比较 $\hat{\theta}_1$ 的方差和 $\hat{\theta}_2$ 的方差孰大孰小.

43. 一合中有 $\theta \geqslant r$ 个球，分别写上数字 $1, 2, \cdots, \theta$. 每次随机抽出一球，记下其上的数字，放回去再抽，一直抽到记下 r 个不同数字为止. 以 X_i 记“记下第 $i-1$ 个数字之后到记下第 i 个数字为止的抽球次数”，$i = 1, \cdots, r$（显然 $X_1 = 1$）. 证明：***a***. $T = \sum_2^r X_i$ 是 θ 的一个充分统计量. ***b***. 基于单个 X_i 不能作出 θ 的无偏估计. ***c***.（较难）即使利用全部 $X_2, \cdots, X_r$，也不可能作出 θ 的无偏估计.

44. 有 θ 个空合子，把 r（r 已知）个球逐一独立随机地放入其中（每球有同等机会入每合，各球独立），以 X 记空合数. ***a°***. 计算 $E_\theta X$. ***b***. 若 $\hat{\theta}(X)$ 是 θ 的无偏估计，则 $\lim_{k\to\infty}(\hat{\theta}(k) - (k+r)) = 0$.

中位无偏. 设 θ 为一维参数，$\hat{\theta}(X)$ 为 θ 的估计，若对任何 $\theta \in \Theta$，在分布 $X \sim P_\theta$ 之下，$\hat{\theta}(X)$ 的中位数唯一且等于 θ，称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的**中位无偏估计**.

45*. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为 X 的 iid. 样本，***a***. 设对任何 $\theta\in\Theta,\theta$ 是 $X\sim P_\theta$ 的唯一中位数，且 X 的分布 P_θ 在 θ 点连续($P_\theta(X=\theta)=0$)，记 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)=\mathrm{med}(X_1,\cdots,X_n)$. 则当 n 为奇数时，$\hat{\theta}$ 是 θ 的中位无偏估计. ***b***. 当 n 为偶数时，加上条件："分布 P_θ 关于 θ 对称"，***a*** 中之结论仍成立. 在不附加这条件时结论可不成立. ***c***. 若 X 有分布 $f(x-\theta)\mathrm{d}x,\theta\in\mathbf{R}^1$ 而 $n\geqslant 2,\theta$ 的中位无偏估计必存在. 对 $n=1$，情况如何？

46°. MVUE 的理论很依赖完全充分统计量，而这些对中位无偏都失效. ***a***. 设 $\hat{\theta}$ 为 θ 的中位无偏估计，T 为充分统计量，则 $\mathrm{E}(\hat{\theta}|T)$ 不见得仍是中位无偏. ***b***. 完全统计量 T 不必是"中位完全"，即可以有 $f(T)$，使 $\mathrm{med}_\theta(f(T))=0$ 对一切 $\theta\in\Theta$，但 $f(T)$ 不必 a.s. 为 0. 请各举出例子.

47°. ***a***. 不论在任何情况下，若 MVUE 存在且方差有限，则必唯一. ***b***. 若 $\hat{g}$ 为 $g(\theta)$ 的 MVUE，则对任何常数 $a,b,a\hat{g}+b$ 是 $ag(\theta)+b$ 的 MVUE. ***c***. 推而广之，对 g 为 k 维，a 为 $m\times k$ 常矩阵，b 为 m 维常向量时，***b*** 也成立.

48*. 一切一维连续型分布族 $\mathscr{F}=\{f\mathrm{d}x$：一切密度 $f\}$ 上定义泛函 $G(f)$，设 $X_1,\cdots,X_n$ 为 $\mathscr{F}$ 的 iid. 样本，则 $G(f)$ 有无偏估计时，G 必在 $\mathscr{F}$ 上有界.

49°. 证明(2.11)式.

50°. 记 $\mathscr{F}_k=\{$一维分布 F：$\int_{\mathbf{R}^1}|x|^k\mathrm{d}F<\infty\}$，$k$ 为给定的大于 1 的自然数. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自 F 的 iid. 样本，以 $\theta(F)$ 记 F 的中心矩. 则当 $n\geqslant k$ 时，$\theta(F)$ 的 MVUE 存在，$n<k$ 时，$\theta(F)$ 没有无偏估计.

51°. 证明在族 $\mathscr{F}=\{$一维分布 F：$\int_{\mathbf{R}^1}x^4\mathrm{d}F<\infty,\mathrm{Var}_F(X)>0,\ \mathrm{E}_F(X-\mathrm{E}_FX)^3\neq 0\}$，不论样本量多大，$F$ 的偏、峰度系数都没有无偏估计.

52*. 找一个这样的例子：某个 $g(\theta)$ 的 MVUE 存在但完全充

分统计量不存在.

局部 MVUE 以 $\mathscr{U}$ 记 $g(\theta)$ 的无偏估计的类. 设 $\hat{g}_0$ 属于 $\mathscr{U}$ 满足条件：对任何 $\hat{g}\in\mathscr{U}$ 都有 $\mathrm{Var}_{\theta_0}(\hat{g})\geqslant\mathrm{Var}_{\theta_0}(g_0)$，则称 $\hat{g}_0$ 为在 θ_0 点的，g 的局部 MVUE(LMVE).

53. ***a°***. 若 g 的 MVUE 存在，它对任何 $\theta_0\in\Theta$ 为 LMVE. ***b***. 找一个这样的例子：对任何 $\theta_0\in\Theta$，g 的 LMVE 存在，但 g 的 MVUE 不存在.

54°. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是 $\{N(\theta,\sigma^2),\theta\in\mathbf{R}^1,\sigma^2>0\}$ 的 iid. 样本，g 是 σ 的函数，$\hat{g}$ 是 g 的无偏估计. 若 $\mathrm{Var}_{(\theta,\sigma^2)}\hat{g}<\infty$(一切 (θ,σ^2))，则 $\mathrm{Cov}_{\theta,\sigma^2}(\overline{X},\hat{g})=0$，一切 (θ,σ^2).

55°. 设 $X_1,\cdots,X_m$ 和 $Y_1,\cdots,Y_n$ 分别是抽自 $N(\theta,\sigma_1^2)$ 和 $N(\theta,\sigma_2^2)$ 的 iid. 样本且全体独立. 此处 $\theta\in\mathbf{R}^1$，$\sigma_1^2>0$，$\sigma_2^2>0$ 都是未知参数. 证明：θ 的 MVUE 不存在. θ 的 LMVE 如何？

56. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自 $\{R(\theta,2\theta):\theta>0\}$ 的 iid. 样本. ***a***. 证明：次序统计量 T 当 $n=1$ 时为有界完全但非完全，$n>1$ 时非有界完全. ***b***. $n=1$ 时，除 $g(\theta)$ 为常数，其 MVUE 不存在(可以证明：$n>1$ 时也不存在. 见陈桂景、陈希孺：《数学研究与评论》，1984 年，p. 93～98).

57. ***a***. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是分布族 $\{P_\theta,\theta\in Z\}$ 的 iid. 样本，其中 $Z=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，$P_\theta(X=\theta+i)=1/m$，$i=0,1,\cdots,m-1$，$m\geqslant2$ 固定. 则除非 g 在 Z 上为常数，$g(\theta)$ 没有 MVUE. ***b***. 若把问题 ***a*** 中的概率 $1/m$ 改为 $p_{\theta i}\geqslant0$，$i=0,\cdots,m-1$，则情况如何？***c***. 若在问题 ***a*** 中把 $\theta\in Z$ 改为 $\theta\in\mathbf{R}^1$，则当且仅当 g 为 $\mathbf{R}^1$ 上周期为 1 的函数时，$g(\theta)$ 才有 MVUE.

58°. 样本 X 的分布族为 $\{R(\theta,\theta+1),\theta\in\mathbf{R}^1\}$，证明此族非完全，且 $g(\theta)$ 的 MVUE 不存在，除非 g 为常数.

59. $g(\theta)$ 的无偏估计类 $\mathscr{U}_g$ 中使 $\mathrm{E}_\theta|\hat{g}(X)-g(\theta)|$ 对 θ 一致地达到最小的 $\hat{g}\in\mathscr{U}_g$，称为 g 的 $\mathrm{ML_1UE}$(最小 L_1 模无偏估计). 证明：$\hat{g}\in\mathscr{U}_g$ 是 $g(\theta)$ 的 $\mathrm{ML_1UE}$ 的充要条件是：若记

$$A_{0\theta}(A_{+\theta},A_{-\theta})=\{x:\hat{g}(x)=(>,<)g(\theta)\},$$

则对任何零的无偏估计 $n(x)$，有

$$\int_{A_{0\theta}}|n(x)|\mathrm{d}P_\theta(x)\geqslant\left|\int_{A_{+\theta}}n(x)\mathrm{d}P_\theta(x)-\int_{A_{-\theta}}n(x)\mathrm{d}P_\theta(x)\right|$$

对任何 $\theta\in\Theta$. 利用这个结果证明：若样本 X 有分布 $P_\theta(X=-1)=\theta,P_\theta(X=i)=(1-\theta)^2\theta^i,i=0,1,\cdots,0<\theta<1$，则 $g(\theta)=(1-\theta)^2$ 的 $\mathrm{ML_1UE}$ 为：$\hat{g}(0)=1,\hat{g}(x)=0$，其他 x. θ 的 $\mathrm{ML_1UE}$?

60. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为自分布族 $\mathscr{F}=\{(\theta f_1(x)+(1-\theta)f_2(x))\cdot\mathrm{d}x:0\leqslant\theta\leqslant1\}$ 中抽出的 iid. 样本，f_1,f_2 为已知的不同概率密度函数. ***a***. 当 $n=1$ 时，$g(\theta)$ 有无偏估计的充要条件为 $g(\theta)=a\theta+b$，a,b 为常数. ***b***. 对 $f_1\sim R(1,2),f_2\sim R(0,2)$ 的特例，求 θ 的 MVUE 及 $\mathrm{ML_1UE}$(对一般 n).

61°. 设 $X_1,\cdots,X_m$ 和 $Y_1,\cdots,Y_n$ 分别是从指数分布族 $\{\theta^{-1}\cdot e^{-x/\theta}I(x>0)\mathrm{d}x:\theta>0\}$ 和 $\{\varphi^{-1}e^{-y/\varphi}I(y>0)\mathrm{d}y:\varphi>0\}$ 中抽出的 iid. 样本，且全体独立. 证明：若 $T=T(X_1,\cdots,X_m,Y_1,\cdots,Y_n)$ 和 $S=S(X_1,\cdots,X_m,Y_1,\cdots,Y_n)$ 分别为 $g(\theta)$ 和 $h(\varphi)$ 的 MVUE，则 TS 为 $g(\theta)h(\varphi)$ 的 MVUE. 利用这个结果，求 θ/φ 的 MVUE.

62. 样本 $X_1,\cdots,X_n$ 同上题 ***a***°. 求 $e^{-a/\theta}$ 的 MVUE，此处 $a>0$ 已知，又证：当 $a<0$ 时，$e^{-a/\theta}$ 没有无偏估计. ***b***. 当 $n=1$ 时，θ^{-1} 没有无偏估计，$n\geqslant2$ 时则有 MVUE. ***c***. 当 $n\geqslant2$ 时，求密度在 $a(a>0$ 已知)点之值 $\theta^{-1}e^{-a/\theta}$ 的 MVUE. 当 $n=1$ 时，证明 $\theta^{-1}e^{-a/\theta}$ 没有无偏估计.

63. ***a***°. 以 Φ 记 $N(0,1)$ 的分布函数，$X\sim N(\theta,\sigma^2)$ 则 $\mathrm{E}\Phi(X)=\Phi(\theta(1+\sigma^2)^{-1/2})$. ***b***. 利用 ***a*** 证明：若 $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自 $N(\theta,1)$ 的 iid. 样本，则 $P_\theta(X_1<c)=\Phi(c-\theta)$ (c 固定)的 MVUE 为 $\Phi(\sqrt{n}(c-\bar{X})/\sqrt{n-1})$. 而在 c 点密度值 $(2\pi)^{-1/2}\exp(-(c-\theta)^2/2)$ 的 MVUE 为 $\sqrt{n}(2\pi(n-1))^{-1/2}\exp(-n(c-\bar{X})^2/(2n-2))$，当 $n\geqslant2$. ***c***. $n=1$ 时，情况如何?

64. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是从截尾分布族 $\{K(\theta)f(x)I(0<x<\theta)\mathrm{d}x:0<\theta<a\}$ 中抽出的 iid. 样本，$0<a\leqslant\infty$ 使 $0<\int_0^\theta f(x)\mathrm{d}x<\infty$ 对任何 $\theta\in(0,a)$. 找出一组条件使 $g(\theta)$ 的 MVUE 存在，并求出它.

65°. $X_1,\cdots,X_n$ 是从分布族 $\{f(x-\theta)\mathrm{d}x;\theta\in\mathbf{R}^1\}$ 中抽出的 iid. 样本，f 已知，且满足 $f(-x)=f(x)$. 假定存在 $\varepsilon>0$ 使 $f(x)=O(|x|^{-\varepsilon})$ 当 $|x|\to\infty$，则在 n 充分大时，θ 有无偏估计.

66. 设 $X_1,\cdots,X_m$ 和 $Y_1,\cdots,Y_n$ 分别是抽自 $N(\theta,\sigma_1^2)$ 和 $N(\theta_2,\sigma_2^2)$ 的 iid. 样本，且全体独立. 记 $g(\theta_1,\theta_2,\sigma_1,\sigma_2)=P(X_1<Y_1)$. ***a***. 计算 g：在(甲) σ_1,σ_2 自由变化，和(乙) $\sigma_1=\sigma_2$ 两种情况. ***b***. 在甲、乙两种情况下分别找出 g 的 MVUE.

67°. 以 $R(\theta,\sigma)$ 记 $\mathbf{R}^2$ 中以 θ 为中心，$\sigma>0$ 为半径的圆内的均匀分布. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自此分布的 iid. 样本. ***a***. 固定 $\theta=0$，求半径 σ 及面积 $\pi\sigma^2$ 的 MVUE. ***b***. θ 也未知，找出 θ 及 σ 的一个合理的估计.

68. X 为一维随机变量，$-\infty<a<b<\infty$，a,b 为常数. 定义 $\tilde{X}=a,X$ 或 b，视 $X<a,a\leqslant X\leqslant b$ 或 $X>b$ 而定. 分别用概率和统计的方法证明：$\mathrm{Var}(\tilde{X})\leqslant\mathrm{Var}(X)$，等号当且仅当 $P(X<a)=P(X>b)=0$时成立.

69°. $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自 Poisson 分布族 $\{\mathscr{P}(\theta):\theta\geqslant0\}$ 的 iid. 样本，$g(\theta)$ 定义于 $[0,\infty)$. 证明，$g(\theta)$ 有无偏估计的充要条件是：g 可以展为幂级数，其收敛半径为 ∞. 当此条件满足时，求出 $g(\theta)$ 的 MVUE. 又若 g 不满足此条件，则存在 $\varepsilon>0$，使对任一估计量 $\hat{g}=\hat{g}(X_1,\cdots,X_n)$ 必有 $\sup\{|\mathrm{E}_\theta\hat{g}-g(\theta)|:\theta\geqslant0\}>\varepsilon$.

70. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是 $N(\theta,1)$ 的 iid. 样本，参数 θ 限制在一有界区间 (a,b) 内. ***a°***. 证明：不存在 θ 的一个有界无偏估计. ***b****. 任意给定 n 个实数 $c_1,\cdots,c_k$，限制参数 θ 属于集 $\{c_1,\cdots,c_k\}$，则存在 θ 的一个有界无偏估计.

71*. 找这样的分布族 $\{f(x,\theta)\mathrm{d}x;\theta\in\mathbf{R}^1\}$ 的例子：***a***. C-R 不

等式的下界在指定的 k 个点 $a_1,\cdots,a_k$ 达到，而在其余点 θ 处都不达到. **b**. C-R 下界在 $\theta\geqslant 0$ 处处达到，而在 $\theta<0$ 处处达不到(注：指对估计 θ 的 C-R 下界).

72°. 对 60 题的分布族证明：样本量为 1 时，C-R 下界总不小于 $\theta(1-\theta)$，等号当且仅当 $f_1,f_2=0$ a.e. L 时成立.

73°. 设 k 个函数 $p_i(\theta)$，$1\leqslant i\leqslant k$ 定义于开区间 $a<\theta<b$，满足 $p_i(\theta)>0,1\leqslant i\leqslant k$，$\sum_{i=1}^{k}p_i(\theta)=1$. 样本 $(X_1,\cdots,X_k)$ 的分布为 $P_\theta(X_i=1,X_j=0,j\neq i,1\leqslant j\leqslant k)=p_i(\theta),i=1,\cdots,n$. 设 $c_1,\cdots,c_k$ 为已知常数，$g(\theta)=\sum_{i=1}^{k}c_ip_i(\theta)$，$g(\theta)$ 之一无偏估计为 $\hat{g}=\sum_{i=1}^{k}c_iX_i$. **a**. 算出 $\hat{g}$ 的方差的 C-R 界. **b**. 直接算出 $\hat{g}$ 的方差，并不依赖 C-R 界的结果去证明：$\hat{g}$ 的方差确实不小于其 C-R 界. **c**. 找出 $p_i(\theta)$ 的形式以使对此 $g(\theta)$ 而言，C-R 界恰能达到.

74°. $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自 $\{f(x,\theta)\mathrm{d}\mu(x):\theta\in(a,b)\}$ 的 iid. 样本，在 C-R 不等式条件满足时，θ 的无偏估计 $\hat{\theta}_n$(若存在)之方差只能以 n^{-1} 的数量级随 $n\to\infty$ 而趋于 0. 在非正则情况下，这数量级可以高于 $O(n^{-1})$，一个常引的例子是 $\{R(0,\theta):\theta>0\}$. 分析一下这个例子之所以能引致更高数量级的原因所在，并以此为据证明：对任给 $m>0$，可找到这样的例子，其 θ 的某无偏估计方差达到量级 $O(n^{-m})$.

75. 设 X 为抽自 $N(\theta,1)$ 的样本，$\theta=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 以 $\delta(x)$ 记与 x 距离最近的整数(如有两个，任取其一). 证明：**a**. δ 是 θ 的无偏估计. **b**. δ 不是 LMVE.

C-R 不等式的改进

76. **a**. 设样本 X 有分布 $\{f(x,\theta)\mathrm{d}\mu(x),\theta\in\Theta\}$，$\Theta$ 为 $\mathbf{R}^1$ 的区间，设 $f(x,\theta)>0$ 对一切 $x\in\mathscr{X}$，$\theta\in\Theta$. 证明：若 $\hat{g}$ 为 $g(\theta)$ 的无偏

估计，则有

$$\mathrm{Var}_\theta(\hat{g}) \geqslant \sup\{g(\theta+\Delta)-g(\theta))^2/$$
$$\mathrm{E}_\theta\left(\frac{f(X,\theta+\Delta)}{f(X,\theta)}-1\right)^2: \Delta \neq 0, \theta+\Delta \in \Theta\}.$$

b. 证明：当一定条件适合时，此式给出的下界优于C-R 界. ***c***. 证明：对 $X \sim N(\theta,1)$的情况，此界限并不给出比C-R 界更好的结果，用直接计算和不直接计算这两种方式来证明这一点. ***d***. 找一个例子，证明此界限确能给出比C-R 界为好的结果.

77*. (Bhattacharya 不等式)***a***. 设$(a_{ij})_{1,\cdots,n}$为 n 阶对称方阵，$A_1=(a_{ij})_{2,\cdots,n}$非异，则 $\det(A)=\det(A_1)(a_{11}-b'A_1^{-1}b)$，其中 $b=(a_{12},\cdots,a_{1n})'$. ***b***. 保持定理 2.4 的条件，且其条件 3°加强为：等式 $\int_{\mathscr{X}}\hat{g}(x)f(x,\theta)\mathrm{d}\mu(x)=g(\theta)$ 可在积分号下对 θ m 次求导. 令 $S_i=(f(X,\theta))^{-1}\partial^i f(X,\theta)/\partial\theta$, $S=(S_1,\cdots,S_m)'$. 假定 $V(\theta)=\mathrm{COV}_\theta(S)>0$，计算 $A=\mathrm{COV}_\theta\begin{pmatrix}\hat{g}\\ S\end{pmatrix}$. 把 ***a*** 用到方阵 A 以得出 $g(\theta)$ 的无偏估计 $\hat{g}$ 的方差之一下界. ***c***. 证明此下界当 m 增加时不减. ***d***. 证明：在样本分布为指数型 $C(\theta)e^{\theta T(x)}\mathrm{d}\mu$ 的前提下，要 $\mathrm{Var}_\theta(\hat{g})$ 达到 m 时的界限而达不到 $m-1$ 时的界限，只在 $g(\theta)$ 为 T 的 m 阶多项式的期望时，即

$$g(\theta)=\mathrm{E}_\theta\left(\sum_{i=1}^{m}a_iT^i(X)\right),$$

其中 $a_0,\cdots,a_m$ 为常数，$a_m\neq 0$.

78°. 设样本 X 有分布 $f(x,\theta)\mathrm{d}\mu(x)$, $0<\theta<\infty$, f 适合 C-R 不等式的正则条件，C-R 界$(\mathrm{E}_\theta(\partial\log f(X,\theta)/\partial\theta)^2)^{-1}$记为 $J(\theta)$. 设有 θ 的无偏估计，其方差处处达到 $J(\theta)$，则 ***a***. 当 $J(\theta)=\theta$ 时 X 有 Poisson 分布. ***b***. 当 $J(\theta)=$常数 1 时 X 有正态分布 $N(\theta,1)$. ***c***. 当 $J(\theta)=\theta(1-\theta)/m$, m 为自然数时，X 有二项分布 $B(m,\theta)$.

79°. 样本 X 服从负二项分布 $P_\theta(X=k)=\binom{k+r-1}{k}\theta^r\cdot$

$(1-\theta)^k$, $k=0,1,\cdots,0\leqslant\theta\leqslant 1$. ***a***. 算 $\omega(\theta)=\mathrm{E}_\theta X$. ***b***. 求 $\omega(\theta)$ 的 MVUE. ***c***. 利用定理 2.10,得出在平方损失$(1/\theta-d)^2$之下,$1/\theta$的若干容许估计.

80°. 设样本 X 有分布 $\theta e^{-\theta x}I(x>0)\mathrm{d}x,\theta>0$,其期望 θ^{-1}有 MVUE,即 X. ***a***. 证明此估计在平方损失下不可容许. 同时,定理 2.10 的条件确也不满足. ***b***. 在一切形如 CX(C 为常数)的估计中,唯有 $C=1/2$ 时可容许. ***c***. 在形如 $X/2+d$ 的估计中,有哪些是可容许的,哪些不可容许? ***d***. 一般,在形如 $aX+b$ 的估计中,哪些可容许,哪些不可容许? ***e***. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为从此分布中抽出的 iid. 样本,考虑形如 $a\overline{X}+b$ 的容许问题(以上 a,b,d 都是常数).

81°. 举例证明:***a***. 容许估计的极限不必容许. ***b***. 定理 2.10 的条件并非必要. ***c***. 定理 2.10 不包括 $X+c$ 的情况,$c\neq 0$ 为常数,有否必要另行建立定理?

82°. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是抽自 $N(\theta,\sigma^2)$的 iid. 样本,θ 限制在一有界或无界的区间内,但不是 $\mathbf{R}^1$,σ^2 可以已知,或限制在一集合内(可以是$(0,\infty)$任一子集,包括其本身). 证明:在平方损失下,θ 的任何无偏估计都不可容许.

83°. 同上题,但限定 $\theta=0$. ***a***. 证明在平方损失之下,$(n+2)^{-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 σ^2 的容许估计,且在一切形如 $C\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 的估计中,唯有这一个是可容许的. ***b***. 对形如 $a\sum_{i=1}^{n}X_i^2+b$ 的估计(a,b 为常数),其容许情况如何.

84°. 设样本 X 有分布 $C(\theta)\exp(\theta^3x)I(0<x<1)\mathrm{d}x,\theta\in\mathbf{R}^1$. 算出 $C(\theta)$. 利用定理 2.10 能处理 θ 的什么函数的估计之容许问题,在什么损失之下? 指认出由该定理能确定的容许估计.

85°. ***a***. 样本 $X\sim B(n,\theta),0<\theta<1$. 平方损失$(d-n\theta)^2$,找出用定理 2.10 能确定的容许估计. ***b***. 对样本 X 服从 Poisson 分布 $P(\theta),\theta>0$ 的情况,解决同一问题,并证明:即使把 θ 的取值域扩

展为 $0\leqslant\theta\leqslant 1$ 或(对 Poisson)$\theta\geqslant 0$,所确定的容许估计仍为容许(为化到指数族以使用定理 2.10,去掉了 $\theta=0$ 和 $\theta=1$,或(对 Poisson)$\theta=0$).

86°. 设样本 X 满足条件 $\mathrm{Var}_\theta(X)<\infty$,$\mathrm{Var}_\theta(X)\geqslant(\mathrm{E}_\theta X)^2$,对一切 $\theta\in\Theta$. 为估计 $\omega(\theta)=\mathrm{E}_\theta X$,用平方损失 $(d-\omega(\theta))^2$,证明:若 $a>1/2$,则 aX 不是容许估计. 举一个属于本题情况的常见例子.

87°. 设样本 X 有期望 $\omega(\theta)\leqslant 1$,对一切 $\theta\in\Theta$,常数 a,b 满足 $a+b>1$. 则在平方损失 $(d-\omega(\theta))^2$ 下,$\omega(\theta)$ 的估计 $aX+b$ 不容许.

88°. 举例:两个不同估计在平方损失下有同一风险(要求参数取值充满一个区间).

89°. $X\sim B(n,\theta)$,$0\leqslant\theta\leqslant 1$. 平方损失. 证明:$\delta(X)=1-X/n$ 不容许.

限制可容许性. 设 ε 为一类估计,$\hat{\theta}\in\varepsilon$. 称 $\hat{\theta}$ 为($\mathscr{E}$)**容许**,若在 ε 中找不出一个估计 $\hat{\theta}_1$,使其风险处处不超过且至少在一个点处小于 $\hat{\theta}$ 的风险.

90°. 记 $\mathscr{F}$ 为一切其方差有限的一维分布族,$\mathscr{F}_c$ 为其方差等于 c 的子族. 为估计 $F\in\mathscr{F}$ 的期望,取平方损失,以 $\mathscr{E}$ 记一切形如 $c_0+\sum\limits_1^n c_iX_i$ 的估计的类,$c_0,\cdots,c_n$ 为常数. 找出一切($\mathscr{E}$)容许估计类:*a*. 对 $\mathscr{F}$. *b*. 对 $\mathscr{F}_c$.

91°. 设 $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim N(\theta,\sigma^2)$,$\theta\in\mathbf{R}^1$,$\sigma^2>0$. 以 $\mathscr{E}$ 记 σ^2 的二次估计类,即一切形如

$$\hat{\sigma}^2=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}X_iX_j+\sum_{i=1}^n b_iX_i+c$$

的估计类,其中 a_{ij},b_i,c 为常数,$a_{ij}=a_{ji}$,证明:在平方损失 $(\hat{\sigma}^2-\sigma^2)^2$ 之下,

$$\hat{g}=(n+1)^{-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2$$

为($\mathscr{E}$)容许的.

92. * 续上题，取 $\mathscr{E}_1$ 为一切形如 $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}X_iX_j$ 的估计的类，通过直接比较风险函数，找出尽可能多的($\mathscr{E}_1$)容许估计.

93°. $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim N(\theta,\sigma^2)$，$\theta\in\mathbf{R}^1$，$\sigma^2>0$，作为 σ^2 的估计

$$\hat{\sigma}^2=(n+1)^{-1}\sum_1^n(X_i-\overline{X})^2,$$

可证它在平方损失 $(\sigma^2-\hat{\sigma}^2)^2/\sigma^4$ 之下不容许. 但是，可以证明：对 σ^2 的任何估计 δ，必有 $\inf\{R(\theta,\sigma^2;\hat{\sigma}^2)-R(\theta,\sigma^2;\delta):\theta\in\mathbf{R}^1,\sigma^2>0\}\leqslant 2((n+1)(n+2))^{-1}$.

94*. $\mathscr{F}$ 为均值 0，方差 $\sigma^2(F)<\infty$ 的分布 F 的族，$X_1,\cdots,X_n$ 为 iid. 样本. 分别以 $\mathscr{E}_1$ 和 $\mathscr{E}_2$ 记 $\sigma^2(F)$ 的一切形如 $X'AX$ 的无偏估计类和一切形如 $X'AX+b'X+c$ 的无偏估计类，此处 $X=(X_1,\cdots,X_n)'$，A 为 n 阶常数对称阵，b 为 n 维常向量，c 为常数. 证明：局限于类 $\mathscr{E}_1$，$\sigma^2(F)$ 有 MVUE；而局限于类 $\mathscr{E}_2$ 则没有.

95°. 设样本 X 有二项分布 $B(n,\theta)$，$0\leqslant\theta\leqslant 1$. 为估计 θ 用平方损失. ***a.*** 证明：在 $n\leqslant 2$，凡满足"$\hat{\theta}(x)$ 非降"且 $0\leqslant\hat{\theta}(x)\leqslant 1$ 的估计皆可容许. ***b.*** 证明：在 $n=1$，凡满足 $\hat{\theta}(0)\geqslant 2^{-1/3}$，$\hat{\theta}(1)\leqslant 1-\hat{\theta}(0)$ 的估计 $\hat{\theta}$ 皆可容许.

有限总体抽样及估计

总体含 N(已知)单元，i 单元的大小为 M_i(已知)，指标值 Y_i(未知). 记

$$p_i^*=M_i/\sum_1^N M_j,\ P^*=(p_1^*,\cdots,p_N^*).$$

记

$$\mathscr{P}=\{P=(p_1,\cdots,p_N):p_i\geqslant 0,\sum_1^N p_i=1\},$$

$\mathscr{P}$ 中任一个 $P=(p_1,\cdots,p_N)$ 称为一个(概率)抽样方案：抽到 i 单

元的概率为 p_i. 若抽到 i 单元,就用 Y_i/p_i^* 去估计指标和 $Y = \sum_1^N Y_i$. 设进行 n 次独立的有放回的抽样,分别抽得第 $i_1,\cdots,i_n$ 单元,则用

$$\hat{Y}_H(P) = n^{-1}\sum_{j=1}^{n} Y_{i_j}/p_{i_j}^*$$

作为 Y 的估计值,称为 Hansen-Hurwitz 估计. 注意方案 P 的作用只在抽取样本,估计量 $\hat{Y}_H(P)$ 的形式与之无关.

如果存在方案 $Q \in \mathscr{P}$,使 $\mathrm{E}(\hat{Y}_H(Q) - Y)^2 \leqslant \mathrm{E}(\hat{Y}_H(P) - Y)^2$ 对一切 $(Y_1,\cdots,Y_N) \in \mathbf{R}^N$,且严格不等号至少在 $\mathbf{R}^N$ 中的一点成立,称方案 P(在平方损失下)不可容许,否则就是可容许的. 以下几个关于 P 的可容许的题是依据邹国华和冯士雍的工作(《科学通报》,1995,p. 683). 记 $M(P) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N} p_i$.

96°. ***a*°**. 证明风险表达式

$$\begin{aligned} R(P) &\equiv \mathrm{E}(\hat{Y}_H(P) - Y)^2 \\ &= n^{-1}\sum_1^N p_i(Y_i/p_i^* - Y)^2 \\ &\quad + n^{-1}(n-1)\Big(\sum_1^N p_iY_i/p_i^* - Y\Big)^2. \end{aligned}$$

b. 若 $M(P^*)<1/2$(P^* 见前),则 P^* 可容许. ***c***. 若 $M(P^*)=1/2$,而 $N\geqslant 3, n\geqslant 2$,则 P^* 可容许.

97°. (续上题)若 $M(P^*)=1/2$, $N\geqslant 3$ 而 $n=1$,则 P^* 不可容许. 若 $M(P^*)>1/2$ 而 $n=1$,P^* 不可容许.

98°. (续上题)证明在 $N=2$, $n>1$,至多只有一个可容许的方案存在. 若 $n=1$,则情况如何?

99°. (续上题)设 $P=(p_1,\cdots,p_N)$ 和 $Q=(q_1,\cdots,q_N)$ 都属于 $\mathscr{P}$. 证明:若 $p_i<q_i$, $1\leqslant i\leqslant 3$,则 Q 不可能严格一致优于 P.

100°. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是从位置参数分布族 $F(x-\theta)$ 中(参数 $\theta\in\mathbf{R}^1$)抽出的 iid. 样本,以 G 记平移变换群. ***a***. 当 $n=1$ 时,θ 有同

变无偏估计的充要条件为 $E_0|X|<\infty$，这时同变无偏估计必唯一. *b*. 在 *a* 的条件下，非同变的无偏估计可存在也可不存在，各举一例，且在不存在的场合要举正态以外的例子.

101°. 续上题，若分布 $F(x)$ 关于 0 对称 ($F(-x)=1-F(x-0)$) 且不退化，则在平方损失 $(\theta-d)^2$ 之下，当 $n\leqslant 2$ 时 $\bar{X}$ 是 θ 的最优同变估计（对群 G，下同），若 $n\geqslant 3$，如果 X 有任意阶矩但非正态，则 $\bar{X}$ 决非 θ 的最优同变估计. 把这个结果用于 24 题可得出何结论.

102°. 设样本 $X_1,\cdots,X_n\sim N(\theta,1)$，损失函数为 $V(\theta-d)$，$V(u)$ 为偶函数且在 $0\leqslant u<\infty$ 非降，则 $\bar{X}$ 是 θ 的最优同变估计.

103°. $X_1,\cdots,X_n$ 为取自 Cauchy 分布 $\pi^{-1}(1+(x-\theta)^2)^{-1}\mathrm{d}x$，$\theta\in\mathbf{R}^1$ 的 iid. 样本，为估计 θ，取损失函数为平方损失 $(\theta-d)^2$.

a. 试找出 θ 的最优同变估计. *b**. 探讨所找的估计的风险的有界性.

104°. 完成例 2.14 的(2.60)式的证明.

105°. $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim R(0,\theta)$，$\theta>0$，平方损失 $(\theta-d)^2\theta^{-2}$，求在变换群 $G=(\{g_c:g_c(x_1,\cdots,x_n)=(cx_1,\cdots,cx_n),c>0\}$ 之下，θ 的最优同变估计.

106°. $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim R(\theta_1-\theta_2,\theta_1+\theta_2)$，$\theta_1\in\mathbf{R}^1$，$\theta_2>0$. 为估计 (θ_1,θ_2)，用平方损失 $c_1(\theta_1-d_1)^2\theta_2^{-2}+c_2(\theta_2-d_2)^2\theta_2^{-2}$，$c_1>0$，$c_2>0$ 为已知常数. 引进变换群 G 如例 2.14，求在这群下，(θ_1,θ_2) 的最优同变估计.

107°. 在上题中，如 $\theta_2>0$ 已知，损失函数为 $(\theta_1-d)^2$，变换群为平移群，求 θ_1 的最优同变估计.

108°. 在 106 题中，若引进平移群 $G=\{g_c:c\in\mathbf{R}^1\}$，其中 $g_c(x_1,\cdots,x_n)=(x_1+c,\cdots,x_n+c)$，平方损失 $c_1(\theta_1-d_1)^2+c_2(\theta_2-d_2)^2$. 为求 (θ_1,θ_2) 的最优同变估计，106 题的方法是否仍可行?

109°. (本题说明，最优同变估计不必可容许). 样本 X 有分布 $P_\theta(X=\theta-1)=P_\theta(X=\theta+1)=1/2$，$\theta\in\mathbf{R}^1$. 为估计 θ，取三种

损失：**a**. $\min(|\theta-d|,1)$. **b**. $|\theta-d|$. **c**. $|\theta-d|^2$. 求在这三种损失下，在平移变换群下，θ 的最优同变估计，并证明它不可容许.

110°. (续上题)损失及变换群同上题，但从 P_θ 中取 iid. 样本 $X_1,\cdots X_n$. 求 θ 的最优同变估计，并证明它不可容许.

111°. 设 $X_1,\cdots,X_n$ iid. 抽自 k 维正态分布 $N_k(\mu,\Lambda)$，参数 $\mu\in\mathbf{R}^k$，而 Λ 可取任何 k 阶正定方阵. **a**. 指出此分布族的完全充分统计量. **b**. 求(μ,Σ)的 MUVE. **c**. 在 $\mathbf{R}^{kn}$中引进变换群 $G=\{g_{A,b}$: A 是 k 阶非异方阵，$b\in\mathbf{R}^k\}$，而 $g_{A,b}(x_1,\cdots,x_n)=(Ax_1+b,\cdots,Ax_n+b)$. 找出它在参数空间中的导出变换群，并引进一种损失函数，以使不变结构成立. **d**. 在 **c** 中找出的损失函数之下，求(μ,Σ)的最优同变估计.

112°. (续上题)如把上题中之变换群 G 修改为：限制 A 为正交阵，作上题的 **c**，并问在作题 **d** 时情况有无变化？从这两题的比较中悟出什么道理？

113°. $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自半正态分布$(2/\sqrt{2\pi})\exp(-(x-\theta)^2/2)I(x>\theta)\mathrm{d}x$ 的 iid. 样本，平方损失$(\theta-d)^2$. 求 θ 在平移群下的最优同变估计.

114°. 样本 X 有分布 $F(x-\theta)$，$\theta\in\mathbf{R}^1$，F 为离散型分布：$F(k)=k^{-1}(k+1)^{-1}$，$k=1,2,\cdots$. 损失函数为 $L(\theta,d)=\max(d-\theta,0)$ (这表示不怕低估，只怕高估). **a°**. 证明：任何在平移群下同变的估计必有风险∞. **b**. 但是，风险有界的非同变估计存在. 试找出这样一个估计. **c**. 更进一步，对任给 $\varepsilon>0$，可找到估计 $\delta_\varepsilon(x)$，使 $\mathrm{Sup}(R(\theta,\delta_\varepsilon),\theta\in\mathbf{R}^1)<\varepsilon$. **d**. 找不到一个估计 δ_0，使 $R(\theta,\delta_0)=0$.

115°. 设 $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim N(\theta,\sigma^2)$，$A\subset R_n$ 满足

$$P_{\theta,\sigma^2}((X_1,\cdots,X_n)\in A)=\alpha,\ 对一切\ \theta\subset\mathbf{R}^1,\sigma^2>0.$$

a. $n=1\Rightarrow\alpha=0,1$. **b**. $n=2\Rightarrow\alpha=0,1$，或 $1/2$，且当 $\alpha=1/2$ 时，A 不能是“置换不变”的(置换不变是指 $(x_1,\cdots,x_n)\in A\Rightarrow(x_{i_1},\cdots,x_{i_n})\in A$ 对$(1,\cdots,n)$的任何置换$(i_1,\cdots,i_n)$). **c**. $n\geqslant3$ 时，一切 $\alpha\in[0,1]$都可能，且 A 可取为置换不变的.

第 三 章

1°. 用一种统计的想法证明

$$\int_0^a \cdots \int_0^a (\max(x_1, \cdots, x_n))^{-(n-1)} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = na,$$

当 $a>0$,再用分析方法证明之.

2°. ***a***. 样本 X 有分布 $f(x,\theta)\mathrm{d}\mu(x)$,$T$ 为充分统计量. 证明:在任何损失下,Bayes 解只与 T 有关. ***b***. 反之,假定参数空间 Θ 为 $\mathbf{R}^k$ 的 Borel 集,其 L 测度 $|\Theta|>0$,对任何 $\theta\in\Theta$,$f(x,\theta)$在样本空间 $\mathscr{X}$ 上处处大于 0,而固定 x 时,函数 $f(x,.)$在 Θ 上连续(即若 $\theta\in\Theta$,$\theta_n\in\Theta$ 而 $\theta_n\to\theta$,则 $f(x,\theta_n)\to f(x,\theta)$),则如对 Θ 上的任何先验分布 ν 及任何样本 x(或 a.e. μ x),θ 的后验分布只与统计量 T 有关(因而 Bayes 解只与 T 有关),则 T 是充分统计量.

3°. ***a***. 以 $p(x,d)$记有样本 x 而采用行动 d 时的后验风险,假定 $p(\cdot,d)$为 $\mathscr{B}$ 可测,对每个 $d\in A=\mathbf{R}^k$(或其某 Borel 子集也可以). 对每个 $x\in\mathscr{X}$,$p(x,\cdot)$在 A 上连续,且在唯一点 $\delta(x)$处达到其最小值,则 Bayes 解 δ 是 x 的 $\mathscr{B}$ 可测函数. ***b***. 指出一组条件(施加在样本 X 的分布 $f(x,\theta)\mathrm{d}\mu(x)$,先验分布 ν 以及损失 $L(\theta,d)$上,以使 a 中的条件满足,并给一具体例子.

4°. 举一个这样的例子:一串先验分布$\{\nu_n\}$依分布收敛于 ν,但在平方损失$(\theta-d)^2$之下,对每个 θ,ν_n 之下的 Bayes 估计 $\delta_n(x)$都不依概率收敛到先验分布 ν 之下的 Bayes 估计 $\delta(x)$.

5°. ***a***. 设函数 $L(\theta)$定义于 R_1,满足条件:①在有界区间内有界. ② $\inf\limits_{|\theta|\geq\varepsilon} L(\theta)>0$ 对任何 $\varepsilon>0$. ③$\limsup\limits_{|\theta|\to\infty}(L(\theta+a)/L(\theta))<\infty$ 对任何 $a\in\mathbf{R}^1$. 又 ν 为$(\mathbf{R}^1,\mathscr{B}_1)$上的测度,则

$$h(t) = \int_{\mathbf{R}^1} L(\theta - t)\mathrm{d}\nu(\theta)$$

如果在两个不同点 t_1,t_2 为有限,则必对一切 t 有限. ***b***. 利用 ***a*** 证

明：若 L 满足 $\boldsymbol{a}$ 中之条件，损失函数为 $\lambda(\theta)L(g(\theta)-d)$，样本 X 有分布 $f(x,\theta)\mathrm{d}\mu(x)$，则后验风险如在两个 d 值处有限，则必对一切 d 有限（特别，这包括了平方损失 $\lambda(\theta)(g(\theta)-d)^2$ 的情形）．$\boldsymbol{c}$．结论 $\boldsymbol{a}$，因而 $\boldsymbol{b}$，对 L 为凸函数时可不成立．

6°．举一个在平方损失下，对任何样本 x，后验风险只在一个 d 值有限的例子．

7°．样本 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 有联合分布 $f(x_1-\theta,\cdots,x_n-\theta)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$，$\theta\in\mathbf{R}^1$．在平方损失及广义先验分布 $\mathrm{d}\theta$ 之下，证明 θ 的广义 Bayes 解就是 Pitman 估计（例 2.12），即平移变换群下的最优不变估计．

8°．样本 $X\sim B(n_1,\theta_1)$，$Y\sim B(n_2,\theta_2)$ 独立，损失 $((\theta_2-\theta_1)-d)^2$（这表示要估计 $\theta_2-\theta_1$），先验分布为 $\{0<(\theta_1,\theta_2)<1\}$ 这正方形上的均匀分布，求 Bayes 解．

9°．给定 $p\in(0,1)$，F 为一维分布．定义

$$h(t)=(1-p)\int_{-\infty}^{t}(t-x)\mathrm{d}F(x)+p\int_{t}^{\infty}(x-t)\mathrm{d}F(x).$$

$\boldsymbol{a}$．证明 $h(t)$ 在 $t=F$ 的 p 分位数时取最小值．$\boldsymbol{b}$．利用 $\boldsymbol{a}$ 证明：若损失为 $p(g(\theta)-d)I(g(\theta)>d)+(1-p)(d-g(\theta))I(g(\theta)\leqslant d)$，则 Bayes 解是后验分布的 p 分位数．

10°．分布 $\mathrm{d}\nu(\theta_1,\cdots,\theta_{k-1})=c\theta_1^{\alpha_1-1}\cdots,\theta_{k-1}^{\alpha_{k-1}-1}(1-\theta_1-\cdots-\theta_{k-1})^{\alpha_k-1}I(\theta_1>0,\cdots,\theta_{k-1}>0,\theta_1+\cdots+\theta_k<1)\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{k-1}$ 称为 Dirichlet 分布，记为 $D(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$，此处 $\alpha_1>0,\cdots,\alpha_k>0$．设 $X=(X_1,\cdots,X_k)$ 有多项分布 $M(n;\theta_1,\cdots,\theta_k)\left(\theta_i>0,\sum_{i=1}^{k}\theta_i=1\right)$，损失函数 $(d-\theta)'A(d-\theta)$，其中 $d=(d_1,\cdots,d_k)'$，$\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_k)'$，$A$ 为 k 阶正定方阵．求 Bayes 解．

11°．$X_1,\cdots,X_n$ 为抽自 $\theta\mathrm{e}^{-\theta x}I(x>0)\mathrm{d}x$ 的 iid. 样本，要估计

$g(\theta)=P_\theta(X_1>t)=e^{-\theta t}$. 损失$(e^{-\theta t}-d)^2$,先验分布取为 Gamma 分布$(\Gamma(\beta))^{-1}\alpha^\beta\theta^{\beta-1}e^{-\alpha\theta}I(\theta>0)d\theta$,求 Bayes 解.

12*. 一批产品 N 个,内次品 M 个. N 已知,M 为参数. 从其中随机抽取 n 个,$1\leqslant n\leqslant N$,要估计次品率 M/N,损失函数$(M/N-d)^2$. **a**. 用一种巧的想法,不经计算证明组合恒等式

$$\sum_{i=0}^{N-n}\binom{i+k}{k}\binom{N-i-k}{n-k}=\binom{N+1}{n+1}=\binom{N+1}{N-n}.$$

b. 借助此式,在均匀先验分布 $\nu(\{i\})=(N+1)^{-1},i=0,1,\cdots,N$ 之下,求 Bayes 解并算出 Bayes 风险,分别为$(N(n+2))^{-1}((N+2)\cdot X+N-n)$,$X$ 为样本中次品个数.

13°. **a**. $X\sim B(n,\theta),0\leqslant\theta\leqslant1$,平方损失. 除非先验分布 ν 满足条件 $\nu(0<\theta<1)=0$,否则 X/n 不能是 θ 的 Bayes 估计. **b**. $X\sim P(\theta),\theta\geqslant0$,平方损失. 除非先验分布满足条件 $\nu(\theta>0)=0$,否则 X 不能是 θ 的 Bayes 估计.

14°. 广义 Bayes 估计不必容许(此处广义 Bayes 指使广义后验风险达到最小的估计),举平方损失下两个例子.

15°. 验证共轭先验分布(3.26).

16°. 为估计 $g(\theta)$,取平方损失$(g(\theta)-d)^2$,先验分布 ν. 设 δ 为 $g(\theta)$ 之一无偏估计,满足 $\mathrm{Var}_\theta(\delta)>0$ 对一切 $\theta\in\boldsymbol{\Theta}$, $\int_{\boldsymbol{\Theta}}\mathrm{Var}_\theta(\delta)d\nu(\theta)<\infty$, 又 $\int_{\boldsymbol{\Theta}}g^2(\theta)d\nu(\theta)<\infty$,且 δ 决非 Bayes 解.

17.* 用 Bayes 法证明下述广义 Bayes 解的容许性:**a**. $X\sim N(\theta,1)$,平方损失$(\theta-d)^2$,先验分布 $d\nu=d\theta$(广义 Bayes 解为 X). **b**. $X\sim B(n,\theta)$,平方损失$(\theta-d)^2$,先验分布 $d\nu=(\theta(1-\theta))^{-1}\cdot I(0<\theta<1)d\theta$(广义 Bayes 解为 X/n).

18°. 在样本分布的支撑无界,先验分布的支撑也无界的场合,平方损失下的 Bayes 解风险有界的例子罕见. 这是什么原因? 举一个这种"罕见"的例子,并指出造出这一例子的思想.

19°. 样本 $X\sim N(0,1)$,损失函数 $L(\theta,d)=e^{3\theta^2/4}(\theta-d)^2$,先

验分布 $N(0,1)$. 证明:不存在 Bayes 风险为有限的估计.

20°. 样本 X 服从:***a***. 指数型分布 $C(\theta)e^{\theta x}d\mu(x)$,$\theta$ 属于 R_1 的开区间 Θ. ***b***. 二项分布 $B(n,\theta)$,$0\leqslant\theta\leqslant1$. ***c***. Poisson 分布 $P(\theta)$,$\theta\geqslant0$. 证明:不论 θ 的先验分布如何,平方损失下的 θ 的 Bayes 估计必是 x 的非降函数. 利用 ***b***,结合定理 3.1,对第二章 95 题作进一步的讨论. 又:对这非降性质可作何直观解释?

21°. 举例 ***a***. 一个估计量可以同是两个不同的先验分布下,θ 的 Bayes 估计. ***b°***. 一个估计量可以同时是狭义和广义的 Bayes 估计.

22°. 样本 $X\sim N(\theta,1)$,$\theta\in\mathbf{R}^1$,平方损失,不论在狭义或广义先验分布下,$2X+1$ 不能是 θ 的(广义)Bayes 估计,除非一切估计量都有 Bayes 风险∞. 举一个并非这种情况的例子.

23*. 平方损失,广义先验分布 $I(\theta>1)\theta^{-1}d\theta$. 证明:对以下两个模型,不存在一个估计,其(广义)Bayes 风险有限:***a***. $X\sim N(\theta,1)$,$\theta\in R_1$;***b***. $X\sim\theta^{-1}e^{-x/\theta}I(x>0)dx$,$\theta>0$.

24°. 举一个例子:平方损失下的 Bayes 估计,可以是不容许的.

下题结果不是最好的,但它显示了运用 Bayes 法处理容许问题的一种灵活性.

25*. 样本 X,Y 独立,各服从 Poisson 分布 $P(\theta)$和 $P(\varphi)$. 取平方损失$(\theta-d)^2$(说明问题在估计 θ),试用 Bayes 方法证明:若常数 a,b,c 满足 $0<b<a<1$,$c>0$,则估计 $aX+bY+c$ 可容许. 怎样解释这种现象:完全无关的样本参与估计,但仍能保持容许性.

下面这个题有其出人意表之处,在于用初等的直接比较风险的方法,彻底解决了一个初一看不很容易的问题. 当然,这种情况少之又少.

26*. 样本和损失同上题. 证明:$aX+bY+c$ 容许的充要条件为:或者 $0\leqslant a<1$,$b\geqslant0$,$c\geqslant0$;或者 $a=1$,$b=c=0$.

27*. 用上题同样的方法,对二项分布证明类似结果,X,Y 独

立，$X\sim B(m,\theta)$，$Y\sim B(n,\varphi)$，$0\leqslant\theta\leqslant 1$，$0\leqslant\varphi\leqslant 1$，平方损失$(\theta-d)^2$．则$aX+bY+c$可容许的充要条件为：或者$\{0\leqslant a<1,0\leqslant c\leqslant 1,0\leqslant a+c\leqslant 1,0\leqslant b+c\leqslant 1,0\leqslant a+b+c\leqslant 1\}$，或者$\{a=1,b=c=0\}$．

28°．***a***．样本$X\sim N(\theta,1)$，$\theta\in\mathbf{R}^1$．另有与之独立的样本Y，Y有分布$f(\varphi,y)\mathrm{d}\mu(y)$，$\varphi$属于$\mathbf{R}^k$之某Borel集$\Phi$．为估计$\theta$，取平方损失．试证在这一结构下，$X$仍是$\theta$的容许估计．***b***．对$X$服从二项分布的情况解决同一问题．

29°．***a***．设法利用上题的***a***，证明：设k维样本X有分布$N_k(\theta,\Lambda)$，此处$\theta\in\mathbf{R}^k$，Λ为已知的k阶正定方阵．为估计$c'\theta$（c为已知k维向量），用损失$(c'\theta-d)^2$，则$c'X$是$c'\theta$的Minimax容许估计．本问题可否用第17题的方法解决？***b***．设$X_1,\cdots,X_k$独立，$X_i\sim B(n_i,\theta_i)$，$0\leqslant\theta_i\leqslant 1$，$1\leqslant i\leqslant k$，平方损失$\left(\sum_1^k c_i\theta_i-d\right)^2$，$c_i$已知，证明：$\sum_1^k c_iX_i/n_i$是容许估计：问：$\sum_1^k c_i\theta_i$的Minimax估计是否仍为$\sum_1^k c_i\hat{\theta}_i$（$\hat{\theta}_i$是只有样本$X_i$时$\theta_i$的Minimax估计）？为什么？

30°．元件寿命有指数分布$\theta^{-1}\mathrm{e}^{-x/\theta}I(x>0)\mathrm{d}x$，$\theta>0$．拿$n$个元件独立做试验，到有$r$个失效为止，记录其寿命为$X_1,\cdots,X_r$．利用这些样本，在损失$(\theta-d)^2/\theta^2$之下，求平均寿命$\theta$的Minimax估计．

31°．找这样一个例子：$X\sim F(x-\theta)$，F为已知一维分布，$\theta\in\mathbf{R}^1$，平方损失，其在平移群下的最优同变估计既非容许，也非Minimax．

32°．样本X有分布$B(1,\theta)$，$0\leqslant\theta\leqslant 1$，损失函数为$L(\theta-d)$，其中$L(u)$为偶函数，且在$u\geqslant 0$为严格上升．***a***．求$\theta$的Minimax估计．***b***．证明：这个问题不能用Bayes方法解决．***c***．证明***a***找出的估计是容许估计，也是在某个先验分布下的Bayes估计．

33°. 样本 $X_1,\cdots,X_n$ 抽自 $N(\theta,\sigma^2)$，平方损失 $(\theta-d)^2$. 证明：对任何估计量 δ，必有 $\sup\{R(\theta,\sigma^2;\delta):\theta\in\mathbf{R}^1,\sigma^2>0\}=\infty$.

34°. 样本同上题，损失函数 $(\theta-d)^2/\sigma^2$. 用定理 3.3 中 2°的方法，证明 $\overline{X}$ 是 Minimax 估计.

35°. 从容许性的观点证明，在平方损失 $(\theta-d)^2$ 下，当 $X\sim N(\theta,1)$ 或 $X\sim B(n,\theta)$ 时，X 是 θ 的唯一 Minimax 估计. 又若损失为 $(\theta-d)^2/\theta$，$X\sim p(\theta)$，X 也是 θ 的唯一 Minimax 估计（本题着重在唯一性）.

36°. 设样本 $X\sim N_k(\theta,I_k)$，损失 $\|\theta-d\|^2$（I_k 为 k 阶单位阵）. 证明：X 是 θ 的 Minimax 估计（当 $k\geqslant 3$ 时，X 不容许，故这是 Minimax 估计不容许的一例）.

37°. 在一维参数也有 Minimax 估计不容许的情况，一个简单例子如下：$X\sim B(1,\theta)$，损失 $I(\theta\neq d)$，$\delta(X)\equiv 2$ 是 Minimax 估计，但不容许，试证明之（更自然的例子见第 48 题及其注）.

38°. 用定理 3.3 的方法，对以下几个问题找出 Minimax 估计，***a***. $X_1,\cdots,X_n\sim N(\theta,\sigma^2)$，$\theta\in\mathbf{R}^1$，$\sigma^2>0$，损失 $(\sigma^2-d)^2/\sigma^4$（问题是估计 σ^2）. ***b***. $X_1,\cdots,X_n\sim R(0,\theta)$，$\theta>0$，损失为 $(\theta-d)^2/\theta^2$. ***c***. $X_1,\cdots,X_n\sim\theta^{-1}e^{-x/\theta}I(x>0)dx$，$\theta>0$，损失为 $(\theta-d)^2/\theta^2$.

39°. 在上题的记号下，证明：若把各题损失的分母改为 1，分子不动，则任何估计的风险都以 ∞ 为上确界.

40°. $X_1,\cdots,X_n\sim R(\theta-1/2,\theta+1/2)$，$\theta\in\mathbf{R}^1$，平方损失 $(\theta-d)^2$. ***a***. 证明：$2^{-1}(\min X_i+\max X_i)$ 是 θ 的 Minimax 估计. ***b***. 证明：即使把分布族放大为 $\{R(\theta-\varphi,\theta+\varphi):\theta\in\mathbf{R}^1,0<\varphi\leqslant 1/2\}$，***a*** 中求出的估计仍为 Minimax 估计. ***c***. 若把 ***a*** 中的分布族放大至 $\{R(\theta-\varphi,\theta+\varphi):\theta\in\mathbf{R}^1,\varphi>0\}$，则 Minimax 问题失去意义，即：任何估计其风险都无界.

41°. 第二章的 109 题，下述估计是容许的 Minimax 估计：$\hat{\theta}=(\min X_i+\max X_i)/2$ 当 X_i 不全相同，若 X_i 全相同，$\hat{\theta}=X_1+1$ 当 $X_1<0$，$=X_1-1$ 当 $X_1>0$.

42°. 样本 $X \sim B(n,\theta)$，损失 $L(\theta,d)=\min((\theta-d)^2/\theta^2,2)$. 证明：$\hat{\theta}\equiv 0$ 是 θ 的可容许 Minimax 估计.

43. *给定常数 $a,b,-\infty<a<b<\infty$，以 $\mathscr{F}_{a,b}$记一切其支撑落在区间$[a,b]$上的分布族. 要由 iid. 样本 $X_1,\cdots,X_n$ 估计其期望 $\theta(F)=\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}F(x), F\in\mathscr{F}_{a,b}$，损失为$(\theta(F)-d)^2$. **a**. 对 $a=0$，$b=1$ 的特例，求 Minimax 估计. **b**. 利用 **a** 的结果，对一般 a,b 解问题.

44°. 给定常数 $M>0$，以 $\mathscr{F}_M$ 记一切其方差不超过 M 的一维分布族，要由 iid. 样本估计期望 $\theta(F)$，损失为$(\theta(F)-d)^2$. 证明：$\bar{X}$ 为 Minimax 估计. 又问：若将 $\mathscr{F}_M$ 改为“其 4 阶中心矩不超过 M”的分布族，则 $\bar{X}$ 是否仍能用原法证明其为 Minimax 估计，为什么？

45*. 样本 X,Y 独立，$X\sim B(n,\theta_1)$，$Y\sim B(n,\theta_2)$. 为估计 $\theta_2-\theta_1$，取损失$((\theta_2-\theta_1)-d)^2$. 证明：$\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}+1}(Y/n-X/n)$是 Minimax 估计.

46°. X 服从超几何分布，M 为参数，可取值 $0,1,\cdots,N$(见 12 题)，平方损失$(M/N-d)^2$，证明：Minimax 解为 $aX/n+b$，$a=\left[1+\sqrt{\frac{N-n}{n(N-1)}}\right]^{-1}$，$b=(1-a)/2$，提示：取先验分布 $P(M=d)=\int_0^1\binom{N}{d}p^d q^{N-d}(I(a+b)/I(b))p^{a-1}q^{b-1}\mathrm{d}p, q=1-p$.

47°. X 服从多项分布 $M(n,\theta_1,\cdots,\theta_k)$，$0\leqslant\theta_i\leqslant 1$，$\sum_1^k\theta_i=1$，平方损失 $\sum_1^k(\theta_i-d_i)^2$. 证明：$(b^{-1}(X_1+a),\cdots,b^{-1}(X_k+a))$是$(\theta_1,\cdots,\theta_k)$ 的 Minimax 估计，$a=(k+1)^{-1}\sqrt{n}$，$b=n+\sqrt{n}$.

48°. 对样本 $X_1,\cdots,X_n\sim N(\theta,1)$，平方损失$(\theta-d)^2$，$\theta$ 限制在 $\theta\geqslant c$，c 已知. 证明 $\bar{X}$ 仍为 Minimax 估计，但不容许. 与此相似，

对 Poisson 分布 $P(\theta)$限制 $\theta>c$，解决同一问题.

49°. 对负二项分布(见第二章 79 题)，想求 θ^{-1}在平方损失下的 Minimax 估计. ***a***. 仿照 $B(n,\theta)$的成例，会这样想：找形如 $aX+b$ 的解. 这个想法能否实现？困难何在？***b***. 证明：其实根本不存在 $1/\theta$ 之一估计，其风险有界. 故这个问题没有意义.

50°. 设样本 $X\sim N(\theta,1)$，$a\leqslant\theta\leqslant b$，其中 a,b 为已知常数，$-\infty<a<b<\infty$. 证明：在平方损失下，X 不是 θ 的 Minimax 估计.

51°. 二维随机向量(X,Y)有分布 $F\in\mathscr{F}$，$\mathscr{F}$ 为一切二维分布的集合，设$(X_1,Y_1),\cdots,(X_n,Y_n)$为$(X,Y)$的 iid. 观察值，要估计 $\theta(F)=P_F(X\geqslant Y)$. 取平方损失$(\theta(F)-d)^2$，求 $\theta(F)$的 Minimax 估计.

设为估计 θ 或 θ 的某函数，用损失 $L(\theta,d)$. 把 $M=\inf\limits_{\delta}\sup\limits_{\theta\in\Theta}R(\theta,\delta)$称为问题的 Minimax 值. 达到此值的 δ 就是 Minimax 解，它不一定存在，但 $M\leqslant\infty$总有定义.

52°. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自 Cauchy 分布 $\pi^{-1}(1+(x-\theta)^2)^{-1}\cdot dx$，$\theta\in\mathbf{R}^1$ 的 iid. 样本，损失$(\theta-d)^2$. 证明：当 $n=1$ 时此问题的 Minimax 值无限，$n\geqslant3$ 时则为有限.

53.° 按上题求解的想法，找出这样一个密度 f，使若 $X_1,\cdots,X_n$ 是从 $f(x-\theta)dx$，$\theta\in\mathbf{R}^1$ 中抽出的 iid. 样本，则在平方损失$(\theta-d)^2$ 之下，不论样本量 n 多大，Minimax 值总是无穷.

54°. 设样本 X 有分布

$$P_\theta(X=x_i)=f_\theta(x_i),i=1,2,\cdots,\theta\in\Theta.$$

行动空间 A 只含有限个元 $d_1,\cdots,d_m$，损失函数 L 有界，则非随机化的 Minimax 解(即在只允许使用非随机化决策函数时的解)与随机化的 Minimax 解都存在. 若 A 有可列个元，这个结论失效，但若 A 为一有界闭集，$L(\theta,\cdot)$在 A 上连续，则非随机化的 Minimax 解仍存在.

55°. 如果损失函数是凸的，则在原有样本 X 之外再加上使用

样本 Y,Y 与 X 独立且其分布不依赖参数 θ,则并不能降低 Minimax 值,即原来只在 X 样本范围内考虑得出的 Minimax 解 $\delta(X)$,在样本(X,Y)的模型中仍是 Minimax 解.

56°. 样本 $X \sim B(2,p)$,损失函数 $L(p,d)=|d-2p|$. ***a°***. 计算 $2p$ 的估计量 X 的风险及风险的最大值. ***b***. 通过研究上述风险函数的性状,设法构造一个估计量 $\delta(X)$,使其风险最大值有所降低.

57°. ***a***. 在例 3.8 的经验 Bayes(EB)估计(3.22)式中,用 X_1,$\cdots$,X_n 和 X 共同估计 σ^2:$\hat{\sigma}_n^2=(n+1)^{-1}\left(\sum_1^n X_i^2+X^2\right)-1$. 证明(3.22)仍为 a.o.EB. ***b***. 在例 3.8 中,若取先验分布族为 $\{N(\mu,1),\mu\in\mathbf{R}^1\}$,求在平方损失 $(\theta-d)^2$ 下 θ 的 EB 估计 $\hat{\theta}_n$. 若在 $\hat{\theta}_n$ 中对 μ 的估计用了当前样本 X,证明 $\hat{\theta}_n$ 为 a.o.EB.

58°. 样本 $X_1,\cdots,X_n$ iid.,$\sim N(\theta,1)$,$\theta\in\mathbf{R}^1$. 损失 $(\theta-d)^2$ 先验分布 G. 试证明 θ 的 Bayes 估计为 $\delta_G(x)=x+f'_G(x)/f_G(x)$,其中 f_G 是 X 在先验分布 G 之下的边缘密度函数. 利用这个形式构想出 θ 的一个 EB 估计.

59°. 样本 $X\sim B(n,\theta)$,$0\leqslant\theta\leqslant 1$,平方损失. 针对先验分布族(3.9),构造出 θ 的一个 EB 估计(在估计 a,b 时要使用当前样本),并证其为 a.o..

60°. 样本 X 有分布 $f(x,\theta)d\mu(x)$,$\theta\in\Theta$,$\mathscr{G}$ 为一先验分布族. 对 $G\in\mathscr{G}$,X 的(边缘)分布为 $f_G(x)\mathrm{d}\mu(x)$,其中 $f_G(x)=\int_\Theta f(x,\theta)\mathrm{d}G(\theta)$. 若当 $G_1\neq G_2$ 都属于 $\mathscr{G}$ 时,必有 $f_{G_1}\neq f_{G_2}$(即 $\mu(x:f_{G_1}(x)\neq f_{G_2}(x))>0$),称"相对于 $f(x,\theta)$ 局限于 $\mathscr{G}$"是"可以辨识的". 如这个条件不成立,则一般地,相对于先验分布族 $\mathscr{G}$ 不存在 a.o.EB 估计. 论证一下这个断语.

61°. 证明以下情况先验分布 $\mathscr{G}$ 的可辨识性: ***a***. 指数型族 $\{C(\theta)e^{\theta'x}\mathrm{d}\mu(x),\theta\in\mathbf{R}^k\}$,$\mathscr{G}$ 为一切 k 维分布族. ***b***. 平移族 $\{f(x-$

$\theta)\mathrm{d}x,\theta\in\mathbf{R}^k\}$且 f 的特征函数处处不为 0. **c**. 二项分布族$\{B(n,\theta),0\leqslant\theta\leqslant1\}$,$\mathscr{G}$ 为 β 分布族. **d**. Poisson 分布族$\{P(\theta),\theta\geqslant0\}$,$\mathscr{G}$ 为 Gamma 分布族$\{G(\alpha,\beta):\alpha>0,\beta>0\}$. 在 **c**,若把 $\mathscr{G}$ 改为一切分布族(当然局限在参数所在范围内),则是不可辨识的.

第　四　章

一串 r.v$\{X_n\}$称为是 $O_p(1)$,若对任何 $\varepsilon>0$ 存在 $M_\varepsilon<\infty$,使 $P(|X_n|>M_\varepsilon)\leqslant\varepsilon$,对一切 n. 称为是 $o_p(1)$,若 $X_n\to0$ in pr.. $\{X_n\}$ 称为是 $O(1)$ a.s.,若 $P(\{X_n\}有界)=1$. 称为是 $o(1)$ a.s.,若 $X_n\to0$,a.s..

1°. $o(1)$ a.s.$\Rightarrow O_p(1)$,其逆不真.

2°. 若对任何常数列 $\varepsilon_n\downarrow0$ 都有 $\varepsilon_nX_n\to0$ in pr.(a.s.),则 $X_n=O_p(1)(O(1)$ a.s.).

3°. 一串随机变量$\{X_n\}$为 iid.. 问 $X_n=O(1)$ a.s. 的充要条件是什么?

4°. 证明:$X_n=O(1)$ a.s. 等价于:对任给 $\varepsilon>0$ 存在 $M_\varepsilon<\infty$,使 $P(|X_n|\leqslant M_\varepsilon,n=1,2,\cdots)\geqslant1-\varepsilon$.

5°. 若一串$\{X_n\}$具有如下性质:对其任一子列$\{X'_n\}$必存在后者的一子列$\{X''_n\}$为 $O_p(1)$,则 $X_n=O_p(1)$. 类似的性质对 $O(1)$ a.s. 是否成立?

6°. 是否从任一串 $O_p(1)$序列中必能抽出 $O(1)$ a.s. 的子列?

7°. 一串 r.v.$\{X_n\}$如满足条件:对任给 $\varepsilon>0$ 存在与 n 无关但可以与 ε 有关的常数 $c=c_\varepsilon$,使 $P(|X_n|\geqslant\varepsilon)\leqslant ce^{-n\varepsilon},n\geqslant1$,则有时称 X_n 依指数速度收敛于 0. 有关这个概念回答以下问题:

a. 若 X_n 依指数速度收敛于 0,则 $X_n\to0$,a.s.,其逆不真.

b. 这个概念是针对尾部概率的,不能把它和 X_n 本身趋于 0 的速度混淆了. 事实上,对任一串常数 $M_n\uparrow\infty$,可找到一串依指数速度趋于 0 的 r.v.$\{X_n\}$,使 M_nX_n 不是 $o(1)$ a.s.. 反过来,对任

给 $M_n\uparrow\infty$，可找到$\{X_n\}$，使 $M_nX_n\to 0$ a.s.，但$\{X_n\}$不依指数速度收敛.

c. 如果常数 C 可取得与 ϵ 无关，则 X_n 有各阶矩. 通常是 C 与 ϵ 有关但只要求 $P(|X_n|\geqslant\epsilon)\leqslant c_\epsilon e^{-n\epsilon}$在 n"充分大"(即 $n\geqslant n_\epsilon$，n_ϵ 与 ϵ 有关)时成立，这一点无关紧要，因放大c'_ϵ之值可使上式对一切 n 成立. 在 c 可与 ϵ 有关时，举例证明 X_n 的任意阶矩也可以不存在.

8°. 在证明统计量有渐近分布时，以下两个简单事实有时有用：

a. 设 X_n 有分布 F_n，$n\geqslant 1$. F 为一分布. 若存在 $a_n>0$，$b_n>0$ 使 $\liminf\limits_{n\to\infty}F_n(x-a_n)\geqslant F(x)\geqslant\limsup\limits_{n\to\infty}F_n(x)$，则 X_n 依分布收敛于 F. *b*. 若 $Y_n\leqslant X_n\leqslant Z_n$，$n\geqslant 1$ 而 Y_n 和 Z_n 都依分布收敛于 F，则 X_n 也依分布收敛于 F.

9°. 以 Φ 记 $N(0,1)$的分布，c_1,c_2,c_3 为正常数，$X_n=X_{n1}+X_{n2}$，X_n 和 X_{n1}分别有分布 F 和 F_{n1}. 设条件 $\|F_{n1}-\Phi\|=\sup\limits_x|F_{n1}(x)-\Phi(x)|\leqslant c_1/\sqrt{n}$，$P(|X_{n2}|>c_2/\sqrt{n})\leqslant c_3/\sqrt{n}$，则存在与 n 无关的常数 c，使 $\|F_n-\Phi\|\leqslant c/\sqrt{n}$.

$\mu_r(X)(\mu_r)$和 $\alpha_r(X)(\alpha_r)$分别记 X 的 r 阶中心矩和 r 阶原点矩. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为 X 的 iid. 样本，以 m_{rn}和 a_{rn}分别记其 r 阶样本中心矩和原点矩，$\mathscr{F}_r=\{X:\mathrm{E}|X|^r<\infty\}$，$0<r<\infty$，$\mathscr{F}_\infty=\bigcap_{r=1}^{\infty}\mathscr{F}_r$.

10*. ((4.2)的推广，不要求做)若 $X\in\mathscr{F}_r$，则

$$\mathrm{E}|a_{1n}-\alpha_1|^r=o(n^{1-r}),1\leqslant r\leqslant 2;\ =O(n^{-r/2}),r\geqslant 2,\tag{1}$$

(4.2)式是当 r 为偶数的特例.

11. 利用上题结果证明：若 $X\in\mathscr{F}_{br}$，$b\geqslant 1$，则

$$\mathrm{E}|m_{rn}-\mu_r|^b=o(n^{1-b}),1\leqslant b\leqslant 2;\ =O(n^{-b/2}),b\geqslant 2.\tag{2}$$

12. (续上题)设 $r_1,\cdots,r_t$ 为自然数，$c_1\geqslant 1,\cdots,c_t\geqslant 1$，$l=c_1r_1+\cdots+c_tr_t$，$X\in\mathscr{F}_l$. 对 $\mathrm{E}(|m_{r_1n}-\mu_{r_1}|^{c_1}\cdots|m_{r_tn}-\mu_{r_t}|^{c_t})$作出一种类似

于(1)式的估计，并证明，此式$=o(n^{-(t-1)/2-2/N})$对$t\geqslant 2$.

13. (续上题)记号与假定同上题. 对$c_1,\cdots,c_t$为自然数的情况，为$\mathrm{E}(|m_{r_1n}^{c_1}\cdots m_{r_tn}^{c_t}-\mu_{r_1}^{c_1}\cdots\mu_{r_t}^{c_t}|^k)$的数量级(当$n\to\infty$)作一估计，$k\geqslant 1$$\left(l\text{ 改为 }k\sum\limits_{i=1}^{t}c_ir_i\right)$. 对$a_{1n}^{c_0}m_{r_1n}^{c_1}\cdots m_{r_tn}^{c_t}$解决同一问题.

14. 证明：$\sum{}^{*}X_{i_1}^{t_1}\cdots X_{i_r}^{t_r}$可表为$a_{1n},m_{2n},\cdots,m_{tn}$的多项式，$t=t_1+\cdots+t_r$，此处$\sum{}^{*}$表示对$i_1,\cdots,i_r=1,\cdots,n$且互不相同求和. 又证明：在$n$充分大时这多项式唯一($t_1,\cdots,t_r$是自然数).

15. 设$X_1,\cdots,X_n$为$X\in\mathscr{F}_r$的iid. 样本，$n\geqslant r$. 利用上题结果证明：$\mu_r(X)$有一个形如$H(m_{rn},\cdots,m_{2n})$的无偏估计(且是MVUE). 这里的要点是H不依赖a_{1n}.

16°. 一般讲MLE优于矩估计；但相反的情况也有. 举一个这样的例子：估计一维参数，参数空间为$\boldsymbol{R}^1$，θ的MLE经调整成无偏得$\hat{\theta}$(通过乘以或加以常数)后，其方差处处大于无偏矩估计的方差.

与MLE存在性有关的种种例子.

17°. 存在这样的指数族$C(\theta)\mathrm{e}^{\theta x}\mathrm{d}\mu(x)$，自然参数空间$\mathbf{R}^1$，通过样本$X$估计$\theta$，MLE恒不存在. 也存在上述形式的指数族，MLE存在的概率介乎0,1之间.

18. * 上题那种情况在高维也有. 设二维$X_{10},\cdots,X_{n0}$是从指数族$C(\theta)\mathrm{e}^{\theta' x}\mathrm{d}\mu(x)$，$\theta\in\boldsymbol{R}^2$中抽出的iid. 样本，$\mu$的支撑包含在单位圆周$\|x\|=1$上，则：***a***. 当$n=1$时，MLE不存在. ***b***. 当$n\geqslant 2$而$\mu$在$\|x\|=1$上连续(即不存在$a$，$\|a\|=1$，使$\mu(\{a\})>0$)，则MLE以概率1存在. ***c***. 当$n\geqslant 2$而$\mu$在$\|x\|=1$上有离散部分时，MLE存在的概率小于1. 具体取决于μ的形式及样本点的位置.

19. 举一个这样的例子：单参数θ属于一个区间，MLE总存在，似然方程总有唯一解(解不可在区间外)，但其解有时是MLE，有时不是.

20. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自 Cauchy 分布 $\pi^{-1}(1+(x-\theta)^2)^{-1}\mathrm{d}x$，$\theta\in\mathbf{R}^1$ 的 iid. 样本，$n\geqslant 2$. 证明：P_θ(似然方程恰有一根)介乎 0,1 之间(不为 0,1).

21°. 设 f 为一维密度，在 $\mathbf{R}^1$ 处处大于 0，且 $-\log f(x)$ 为严格凸，则称 f 为"强单峰"的. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自 $f(x-\theta)\mathrm{d}x,\theta\in\mathbf{R}^1$ 的 iid. 样本，f 为强单峰且 f' 在 $\mathbf{R}^1$ 处处存在，则似然方程有唯一解，其解为 MLE.

22°. 举例证明 MLE 不一定是充分统计量.

23°. X 服从在 1 处截断的 Poisson 分布：$X\sim Y|Y\geqslant 1,Y\sim P(\theta),0<\theta<\infty$. 证明：对 X 的 iid. 样本，似然方程有唯一解，且此解为相合的 MLE.

24°. MLE 不一定相合，下面是一个简例：$X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim P_\theta,P_\theta(X_1=1)=1-p_\theta(X_1=0)$，当 $\theta\in[0,1]$为有理数；$P_\theta(X_1=1)=1-P_\theta(X_1=0)=1-\theta$，当 $\theta\in[0,1]$为无理数. 证明：θ 的 MLE 不相合.

注 可进一步证明：θ 的相合估计根本没有(见作者等 Statist. & Probab. Letters, 1994, p. 141～145).

25°. k 维样本 $X_1,\cdots,X_n$ 独立，$X_i\sim N_k(\mu_i l,\sigma^2 I_k),i=1,\cdots,n$，此处 $l=(1,\cdots,1)',\mu_i\in\mathbf{R}^1,i\geqslant 1$ 和 $\sigma^2>0$ 都是参数. 求 σ^2 的 MLE 并证明它并非相合.

26. 举下述情况的估计的例：***a***. 弱相合但不强相合. ***b***. 任意阶矩相合但非强相合. ***c***. 强相合，但对任何 $r>0$ 非 r 阶矩相合.

27°. 双参数 Weibull 分布为

$$\alpha^{-1}\beta x^{\beta-1}\exp(-x^\beta/\alpha)I(x>0)\mathrm{d}x,\alpha>0,\beta>0.$$

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是 iid. 样本. 证明似然方程必有唯一解，此解必是 (α,β)的 MLE，且是相合的.

28. $X_1,\cdots,X_n$ 是从 $N_k(\mu,\Lambda)$中抽出的 iid. 样本. 利用此分布为指数型的特点. 找出 Λ 的 MLE，并求 Λ 之一非对角元 σ_{ij}的 MLE $\hat{\sigma}_{ijn}$的极限分布.

29. $X_1,\cdots X_n$ 为 iid. 样本，$X_1 \sim R(0,1-\theta)$，$0<\theta<1$；$X_1 \sim R(0,1)$ 当 $\theta=1$，找 θ 的一个相合估计.

30°. $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim P_\theta$，要估计 $g(\theta)$. 如若对某 n_0，g 有基于 $(X_1,\cdots,X_{n_0})$ 的无偏估计 $\hat{g}$，则 $g(\theta)$ 的强相合估计存在.

31. 若参数空间 Θ 只包含有限个点，则 θ 的相合估计存在的充要条件是：存在 θ 的渐近无偏估计，即满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{E}_\theta(\hat{\theta}_n(X_1,\cdots,X_n))=\theta$（对一切 $\theta\in\Theta$）的估计 $\hat{\theta}_n$.

一致相合性·局部一致相合性

设 $\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(X_1,\cdots,X_n)$ 是 $g(\theta)$，$\theta\in\Theta$ 的估计. 若对任给 $\varepsilon>0$，$\eta>0$ 存在与 θ 无关的 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时有 $P_\theta(|\hat{\theta}_n-g(\theta)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\eta$，对一切 $\theta\in\Theta$ 同时成立，则称 $\hat{\theta}_n$ 是 $g(\theta)$ 的一致相合估计. 若对任何 $\theta\in\Theta$，存在 θ 的邻域 S_θ，使 $\hat{\theta}_n$ 是对 $\Theta\cap S_\theta$ 一致相合的估计，则称 $\hat{\theta}_n$ 是 $g(\theta)$ 的局部一致相合估计.

32. 找这样一个例子：$\hat{\theta}_n$ 是 θ 的相合估计，但对任何 $\theta_0\in\Theta$ 及任何 $\varepsilon>0$，$\hat{\theta}_n$ 在集 $\Theta\cap\{\theta:\ \|\theta-\theta_0\|<\varepsilon\}$ 上不是一致相合.

33. 找一个这样的例子：有相合估计存在，但没有一致相合估计.

34*. 通常在研究相合估计存在问题时，往往限于弱相合估计，这其中有个原因：根据“弱收敛序列总能抽出强收敛子列”的事实，一经得到弱相合估计，往往可抽出一个子列，是强相合的. 但参数空间 Θ 不止一点，故不见得能取出一个对一切 $\theta\in\Theta$ 都强收敛的公共子列. 试找出一个这种实例，即 $\{\hat{\theta}_n\}$ 弱相合，但对其任何子列 $\{\hat{\theta}_{n_i}\}$，必存在 $\theta_0\in\Theta$（与 $\{n_i\}$ 有关），使 $P_{\theta_0}(\hat{\theta}_{n_i}(X_1,\cdots,X_{n_i})\to\theta_0)<1$.

35°. （续上题）但是，若 $\{\hat{\theta}_n\}$ 为一致弱相合估计，则必可找到子列 $\{\hat{\theta}_{n_i}\}$，使 $P_\theta(\hat{\theta}_{n_i}\to\theta)=1$，对一切 $\theta\in\Theta$.

36. 设 f 为 $\mathbf{R}^1$ 上的已知密度函数，满足条件①$f(x)=0$ 当 $a<x<b$. ②f 在 a 点左连续，$f(a)>0$. ③f 在 b 点右连续，$f(b)>$

0. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为抽自 $f(x-\theta)\mathrm{d}x,\theta\in\mathbf{R}^1$ 的 iid. 样本,以 $\hat{m}_n=\hat{m}_n(X_1,\cdots,X_n)$记样本中位数. ***a***. 找 θ 的一个相合估计. ***b***. 研究一下 $\hat{m}_n$ 的极限分布问题. ***c***. 不存在仅基于 $\hat{m}_n$(即形如 $\hat{\theta}_n=g_n(\hat{m}_n)$)的 θ 的相合估计. ***d***. 但是,若能同时使用 $\hat{m}_k,1\leqslant k\leqslant n$,则可以造出 θ 的相合估计.

37*. 证明在一些正则条件下,似然方程渐近地只有唯一相合解. 就是说,若 $\hat{\theta}_{1n}$和 $\hat{\theta}_{2n}$为似然方程的两个相合解,则$\lim\limits_{n\to\infty}P_\theta(\hat{\theta}_{1n}=\hat{\theta}_{2n})=1$. 具体条件在解题过程中导出.

38. 设样本 $X_1,\cdots,X_n$ iid. ,$\sim N(\theta,\sigma^2)$. $\theta\in\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$,而 $\sigma^2>0$,求 θ 的 MLE $\hat{\theta}_n$. 计算 $\hat{\theta}_n$ 的抽样分布,渐近方差. 证明它是无偏估计和强相合估计.

39. 若 $Y\sim N(\theta,\sigma^2)$,则 $X=\mathrm{e}^Y$ 的分布称为对数正态分布. ***a***. 计算 X 的期望 θ_1 和方差 θ_2. ***b***. 若 $X_1,\cdots,X_n$ 为 X 的 iid. 样本,求 θ_1 的 MLE $\hat{\theta}_n$. 计算 $\mathrm{E}_{\theta,\sigma^2}(\hat{\theta}_n)$并证明它总大于 θ_1,但 $\hat{\theta}_n$ 为渐近无偏. ***c***. $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的强相合估计. ***d***. 求 $\hat{\theta}_n$ 的渐近分布. ***e***. 计算 θ_1 的矩估计 θ_n^* 及 $\hat{\theta}_n$ 的相对效率(渐近方差之比).

40*. 由(4.100)式最小二乘法得出的解为

$$\alpha:\ \hat{\alpha}_n=\sum_{i=1}^n X_{ni}(C_{ni}-C_n)\Big/\sum_{i=1}^n(X_{ni}-\overline{X}_n)^2,$$
$$u:\ \hat{u}_n=\overline{X}_n-C_n/\hat{\alpha}_n,$$

此处 $C_n=n^{-1}\sum\limits_{i=1}^n X_{ni}$, $\overline{X}_n=n^{-1}\sum\limits_{i=1}^n X_{ni}=n^{-1}\sum\limits_1^n X_i$. 证明:$\hat{\alpha}_n$ 和 $\hat{u}_n$ 分别是 α 和 u 的强相合估计.

41. 设样本 $X_{i1},\cdots,X_{in_i}$ iid. ,有分布$\{f_i(x,\theta)\mathrm{d}\mu_i,\theta\in\Theta\}$,$1\leqslant i\leqslant m$. 在一定的正则条件下,似然方程

$$\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{n_i}\partial\log f_i(X_{ij},\theta)/\partial\theta_r=0,\ 1\leqslant r\leqslant k$$

有一相合解 $\hat{\theta}_n$,满足渐近正态性

$$\left(\sum_{i=1}^{m} n_i I_i(\theta)\right)^{1/2} \xrightarrow{\mathscr{L}} N(0, I_k).$$

此处假定 $\min(n_1,\cdots,n_m)\to\infty$，$I_i(\theta)$是 $f_i(x,\theta)$的 Fisher 信息量（设 $I_i(\theta)>0$，$1\leqslant i\leqslant m$），$\left(\sum_{i=1}^{m} n_i I_i(\theta)\right)^{1/2}$是 $\sum_{i=1}^{m} n_i I_i(\theta)$ 的正定平方根）.

42. 证明第 4.3 节末尾关于均匀分布参数 MLE 的结论（不引用定理 4.15）.

43*. 样本 $X_1,\cdots,X_{2N}$（N 为自然数）iid. $\sim N(0,1)$，以 m_{2N}和 g_{2N}分别记样本中位数及样本中位数的密度. ***a.*** 证明$\lim\limits_{N\to\infty} g_{2N}(0)/\sqrt{2N}=\pi^{-1}$，并对结果给予一个解释. ***b.*** 证明 $g_{2N}(u)$为偶函数，在 $u\geqslant 0$ 严降（这些结果对样本量为奇数时也对，但问题简单，不值一提）.

44. 样本 $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim F$，n 为奇数. 当 F 关于 0 对称时，样本中位数的分布也关于 0 对称（这个事实平凡）. 证明在下述条件下此命题之逆亦真：F 的支撑为一些开区间，在每个这样的开区间内 F 有密度 f，f 在这些开区间内每点解析（即在每点适当领域内可展为幂级数）.

45. （续上题）当总体分布为 $F(x-\theta)$，$F(x)$关于 0 对称时，样本中位数必是中位数 θ 的无偏估计. 但即使 F 不关于 0 对称，样本中位数仍有可能是 θ 的无偏估计，举一个这样的例子.

第　五　章

1°. 设$\{p_\theta(x)\mathrm{d}\mu\}$关于 $T(x)$为 MLR 族，$g(T)$为 T 的（严格）增加函数，则 $\mathrm{E}_\theta g(T(X))$为 θ 的（严格）增加函数.

2. 举这样的例子：***a.*** 样本量为 1 时有 UMP 检验，大于 1 时没有. ***b°.*** 不同的检验有同一的功效函数. ***c°.*** 有共同支撑的连续

型($\mathrm{d}\mu=\mathrm{d}x$)MLR 族但非指数族. ***d***. 非 MLR 族有 UMP 检验. ***e***. 对某些水平 α 有 UMP 检验,对某些 α 没有.

3. ***a***°. 简单假设 $H: f\mathrm{d}\mu \leftrightarrow K: g\mathrm{d}\mu$,若 $\mathrm{d}\mu=\mathrm{d}x$,则对任何 $\alpha\in[0,1]$,可找到水平 α 的非随机 UMP 检验. ***b***. 若 μ 为 $\mathscr{X}$ 上的计数测度而 $f(x)\leqslant c$ 对 $x\in A$,则对任给 $\alpha\in[c/2,1-c/2]$,可找到 $\alpha'\in[\alpha-c/2,\alpha+c/2]$,以使水平 α' 的非随机化 *UMP* 检验存在(即水平的修正可不超过 $c/2$).

4°. 设 t 是 $(\mathscr{X},\mathscr{B}_x,P_\theta),\theta\in\Theta$ 的充分统计量,则对(5.1)的任何检验函数 $\phi(x)$,必可找到只依赖于 t 的检验函数 $\psi(t)$,与 ϕ 有同一的功效函数. 又:若 Y 与 X 独立,其分布已知,则形如 $\phi(x,y)$ 的检验函数(与只用 x 的检验函数比)不会带来任何改善.

5°. 双边假设而存在 UMP 检验的情况极为罕见,但也有:***a***. $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim R(0,\theta),\theta>0$. $H: \theta=\theta_0\leftrightarrow\theta\neq\theta_0$. ***b***. $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim e^{-(x-\theta)}I(x>\theta)\mathrm{d}x,\theta\in\boldsymbol{R}^1,H: \theta=\theta_0\leftrightarrow K: \theta\neq\theta_0$.

6. 样本 $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim\sigma^{-1}\exp\left(-\dfrac{x-\theta}{\sigma}\right)I(x>\theta)\mathrm{d}x,\theta\in\boldsymbol{R}^1,\sigma>0$. ***a***. $\sigma\leqslant\sigma_0\leftrightarrow\sigma>\sigma_0$ 有 UMPU 检验. ***b***. $H: \theta=\theta_0,\sigma=\sigma_0\leftrightarrow K: \theta\leqslant\theta_0,\sigma=\sigma_1(\sigma_1\neq\sigma_0)$有 UMP 检验.

7°. 考虑检验问题(5.1),设 ν 是 Θ_0 上的一个概率测度,定义 $f_\nu(x)=\int_{\Theta_0}f(x,\theta),\mathrm{d}\nu(\theta)$ (X 有分布 $P_\theta,f(x,\theta)=\mathrm{d}P_\theta(x)/\mathrm{d}\mu$),则 $f_\nu\mathrm{d}\mu$ 为概率分布. 立检验问题 $H_0: f_\nu\mathrm{d}\mu\leftrightarrow K$($K$ 同(5.1)),如果 ϕ 是 $H_0\leftrightarrow K$ 的水平 α UMP 检验,且 ϕ 相对于原假设 H 也有水平 α(即 $\beta_\phi(\theta)\leqslant\alpha$ 对 $\theta\in\Theta_0$),则 ϕ 是(5.1)的水平 α 的 UMP 检验.

8°. 利用上题的结果解决检验问题:样本 $X_1,\cdots X_n$ iid. $\sim N(a,\sigma^2),a\in\mathbf{R}^1,\sigma^2>0$. ***a***. $H: \sigma^2\leqslant\sigma_0^2\leftrightarrow K_0: \sigma^2=\sigma_1^2,a=a_1(\sigma_1^2>\sigma_0^2)$. 取 ν 为

$$\nu(A)=P(\xi\in A\cap\{(a,\sigma): a\in\mathbf{R}^1,\sigma=\sigma_0\}),$$

$$\xi\sim N(a_1,n^{-1}(\sigma_1^2-\sigma_0^2)),$$

对 $A \subset \{(a,\sigma): a \in \mathbf{R}^1, \sigma \leqslant \sigma_0\}$. 证明由此所得的 $H \leftrightarrow K_0$ 的水平 α UMP 检验与(a_1,σ_1^2)无关,因而是

$$H: \sigma^2 \leqslant \sigma_0^2 \leftrightarrow K: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

的水平 α 的 UMP 检验. ***b***. $H: \sigma^2 \leftrightarrow K_1: a = a_1, \sigma^2 = \sigma_1^2 (\sigma_1^2 < \sigma_0^2)$. 取 λ 集中在(a_1,σ_0^2)一点. 由此所得 $H \leftrightarrow K_1$ 的水平 α 的 UMP 检验与(a_1,σ_1^2)有关,且是唯一的,因而 $\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2 \leftrightarrow \sigma^2 < \sigma_0^2$ 的 UMP 检验不存在.

9. 样本 $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim N(\theta,\sigma^2), \theta \in \mathbf{R}^1, \sigma^2 > 0$,检验 $\theta \leqslant 0$. ***a***. 在 $n=1$ 时,不存在非随机检验,其功效函数为常数 $\alpha \in (0,1)$. ***b***. 当 n=2 时,这种检验只对 $\alpha = 1/2$ 存在,但必非置换不变的(见第二章 115 题 b). ***c***. 当 $n \geqslant 3$ 时,对任何 α 这种检验存在,且可取为置换不变的.

10°. 举例说明:当(5.7)不成立时,UMP 检验可以不满足(5.6).

11. 设函数 $g_i(x), 1 \leqslant i \leqslant m$,定义于区间 I 上,满足条件:存在 $T(x)$,使 $g_{i+1}(x)/g_i(x)$当 $x \in I$ 是 $T(x)$的非降函数. 在 $\mathbf{R}^1$ 指定点 $c_1 < \cdots < c_m$. 证明:可找到 I 上的 *MLR* 分布族 $f(x,\theta)\mathrm{d}x, \theta \in \mathbf{R}^1$,使 $f(x,c_i) = g_i(x), 1 \leqslant i \leqslant m$. 就是说,可把$\{g_i\}$嵌入一个 MLR 族中.

12*. 单参指数族 $C(\theta)\mathrm{e}^{\theta x}\mathrm{d}\mu(x)$有 UMVU 检验之根源在于:若 $\theta_1 < \theta_2 < \theta_0$(或 $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2$),且存在常数 k_1, k_2,使

$$\sum_1^2 k_i C(\theta_i)\mathrm{e}^{\theta_i a_j} = C(\theta_0)\mathrm{e}^{\theta_0 a_j}, j = 1,2, a_1 < a_2,$$

则在区间(a_1,a_2)内 $C(\theta_0)\mathrm{e}^{\theta_0 x} \leqslant \sum_1^2 k_i C(\theta_i)\mathrm{e}^{\theta_i x}$ 而在$[a_1,a_2]$外则为 $\geqslant$. ***a***. 举例证明 MLR 族不必具备这一性质(这正是 MLR 族不必有 UMVU 检验关键之所在). ***b***. 另一方面,非指数 MLR 族也有满足此条件的,试举一例,并证明在此例中,假设 $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ 的 UMPU 检验存在.

13. ***a***. 在定理 5.6,对任何 $\alpha\in[0,1]$,满足(5.22)和(5.23)的 ϕ 必存在. 据此对定理 5.8 证明相当结果. ***b***. 在定理 5.6,若 t 的分布连续,则 $\{\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2\leftrightarrow\theta<\theta_1$ 或 $>\theta_2\}$ 的水平 α 的 UMPU 检验唯一. 若 t 的分布不连续,情况如何? ***c***. 指出一个条件,保证定理 5.8中检验的唯一性.

14. $X\sim C(\theta)e^{\theta t(x)}d\mu(x)$. t 的分布连续,则 $\theta=\theta_0\leftrightarrow\theta\neq\theta_0$ 的 UMPU 检验接受域 $C_1(\theta_0)\leqslant t(x)\leqslant C_2(\theta_0)$ 中,$C_i(\theta)$,$i=1,2$,是 θ 的连续严格增函数.

15. 样本 $X_1,\cdots,X_m$ iid. $\sim R(0,\theta_1)$,$Y_1,\cdots,Y_n$ iid. $\sim R(0,\theta_2)$,全体独立. 证明:对任何 $\alpha\in(0,1)$,$\theta_1\leqslant\theta_2\leftrightarrow\theta_1>\theta_2$ 的水平 α UMP 检验存在.

16*. (续上题)为行文简单计考虑上题 $m=n=1$ 的情况(一般 m、n 类似). ***a***. 证明在 $0<\alpha\leqslant1/2$ 时,上题所得水平 α UMP 检验唯一,但在 $\alpha>1/2$ 时不唯一. ***b***. 利用 ***a***,证明在 $\alpha\leqslant1/2$ 时,上题不可能用第 7 题的方法解决.

17°. 设 $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim N(\theta_1,1)$,$Y_1,\cdots,Y_n$ iid. $\sim N(\theta_2,1)$,全体独立. 要检验假设 H : $\theta_2\leqslant c\theta_1\leftrightarrow\theta_2>c\theta_1$. 证明:此问题有 UMP 检验,其形成为:当 $\bar{Y}-c\bar{X}$ 大于某常数时否定 H. 改 $N(\theta_i,1)$为 $N(\theta_i,\sigma_i^2)$(σ_1^2,σ_2^2 已知),解同一问题.

18. 样本 $X_1,\cdots,X_m$ iid. $\sim N(\theta_1,\sigma_1^2)$,$Y_1,\cdots,Y_n$ iid. $\sim N(\theta_2,\sigma_2^2)$. 要检验假设 H : $\sigma_2^2\leqslant\sigma_1^2\leftrightarrow K$: $\sigma_2^2>\sigma_1^2$. ***a***. 若 θ_1,θ_2 都已知,$H\leftrightarrow K$ 有 UMP 检验. ***b***. 若 θ_1,θ_2 都未知,则没有 UMP 检验. ***c***. 若 θ_1,θ_2 中一个已知另一个未知,情况如何?

19. 设计出一种方法,不需利用第 7 题,而设法利用以 $\sum_1^n(Y_j-\bar{Y})^2\Big/\sum_1^m X_i^2>nF_{n-1,m}(\alpha)/m$ 为否定域之检验 ϕ,以证明上题的 ***b*** 没有 UMP 检验.

20*. (续 15 题)考虑 $m=n=1$ 的情况. ***a***. 证明:H : $\theta_1=\theta_2\leftrightarrow$

$K:\theta_1\neq\theta_2$ 对水平 $\alpha\in(0,1)$没有 UMP 检验. ***b.*** $H\leftrightarrow K$ 有 UMPU 检验.

21. 设样本 $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim R(\theta_1,\theta_2)$, $-\infty<\theta_1<\theta_2<\infty$. ***a.*** 证明:$\theta_2\leqslant\theta_0\leftrightarrow\theta_2>\theta_0$ 有 UMP 检验. ***b.*** 证明:$\theta_2=\theta_0\leftrightarrow\theta_2\neq\theta_0$ 有 UMPU 检验,但对水平 $\alpha\in(0,1)$没有 UMP 检验.

22*. 样本 $X_1\sim B(m,p_1)$, $X_2\sim B(n,p_2)$, X_1,X_2 独立. 求水平 α 的 UMPU 检验:***a.*** 对 $H_1(p_1\leqslant p_2)\leftrightarrow K_1(p_1>p_2)$. ***b.*** $H_2(p_1=p_2)\leftrightarrow K_2(p_1\neq p_2)$.

23*. 证明以下的概率结果,以作为下题的预备:设 X_n,Y_n 独立,各有二项分布 $B(n,p)$. ***a.*** 记

$$k(n,c)=P_{1/2}(|Y_n-X_n|=c),$$

则

$$k(n,0)>k(n,1)>\cdots>k(n,n).$$

b. 记

$$\begin{aligned}g_c(n,p)&=P_p(Y_n-X_n>c)\\&=2^{-1}P_p(|Y_n-X_n|>c)\\&\equiv 2^{-1}\bar{h}_c(n,p),\\ \bar{h}_c(n,p)&=P_p(|X_n-Y_n|\geqslant c),\end{aligned}$$

则 $g_c(n,p)<g_c(n,1/2)$当 $p<1/2$, $c=0.1,\cdots n-1$, $\bar{h}_c(n,p)<\bar{h}_c(n,1/2)$, $c=1,\cdots,n$, $p<1/2$. ***c.***

$$P_p(X_n=Y_n)>k(n,0)$$

当 $p<1/2$. ***d.*** 令

$$l_n(p)=P_p(Y_n-X_n>c)+rP_p(Y_n-X_n=c),$$

其中 $c=1,\cdots,n-1$, $0<r<1$,则在 $0\leqslant p\leqslant 1/2$ 内 $l(p)$严格增加.

24. 设样本 X,Y iid. $\sim B(n,p)$. ***a.*** 证明:对固定的(p'_1,p'_2), $p'_2>p'_1$, $p'_1+p'_2=1$, $H(p_2\leqslant p_1)\leftrightarrow K'(p'_1,p'_2)$的水平 α 的 UMP 检验为:当 $Y-X$ 大时否定. ***b.*** 证明:$H\leftrightarrow K(p_2>p_1)$没有 UMP 检验$\left(\text{水平 }\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)$.

25. (续上题)对水平 $\alpha>1/2$ 及 $n=1$ 的情况,证明 $H(p_2\leqslant p_1)\leftrightarrow K(p_2>p_1)$没有 UMP 检验.

26. 样本 X,Y 独立,各服从 Poisson 分布 $P(\lambda)$和 $P(\mu)$. 对检验问题 $H(\mu\leqslant\lambda)\leftrightarrow K(\mu>\lambda)$,一个直观上看合理的检验 ϕ 是:$\phi(x,y)=1,r,0$,视 $y-x>a=a$ 或$<a$. 证明:这一检验不是 UMP 检验,***a***. 利用 UMPU 检验. ***b***. 利用如下事实:在 $\alpha<1/2$ 时,这种检验不可能有水平 α. ***c***. 对 $\alpha\geqslant1/2$,这种形式的水平 α 检验存在,且可使$\sup\limits_{\mu\leqslant\lambda}\beta_\phi(\lambda,\mu)=\alpha$.

27°. 沿用第一章 72 题的记号,设 T 相对于 θ 是充分统计量,则 $H(\theta=\theta_1)\leftrightarrow K(\theta=\theta_0)$(这是一个复合假设,因还有另外的参数 φ)有只依赖于 T 的 UMP 检验. 一般讲,任一形如 $H(\theta\in A)\leftrightarrow K(\theta\in B)$的假设,如在只依赖于 T 的检验类 $\mathscr{F}$ 中有 UMP 检验 $\phi(T)$(相对于 $\mathscr{F}$ 为 UMP),则 ϕ 在一切检验类中也是 UMP. 举一个利用这个结果求 UMP 检验的自然而非人为的例子.

28°. 用上题的方法解下述问题:设样本 $X_1,\cdots,X_n$ 独立,各有 Poisson 分布 $P(\lambda_i)$,$1\leqslant i\leqslant n$,求 $\sum\limits_1^n\lambda_i\leqslant\lambda_0\leftrightarrow\sum\limits_1^n\lambda_i>0$ 的 UMP 检验.

29. 样本 $X_1,\cdots,X_n$ 独立,$X_i\sim N(\theta_i,1)$,$1\leqslant i\leqslant n$,$\theta=\sum\limits_1^n\theta_i$. ***a***. 证明:$H_1(\theta\leqslant\theta_0)\leftrightarrow K_1(\theta>\theta_0)$的 UMP 检验存在. 找出这个检验. ***b***. 证明:$H_2(\theta=\theta_0)\leftrightarrow K_2(\theta\neq\theta_0)$的 UMPU 检验存在,并找出这个检验.

30. (续上题)若在上题中改 $X_i\sim N(\theta_i,\sigma^2)$,$\sigma^2>0$ 未知,给定 $\alpha\in(0,1)$. 证明:存在 $H_1\leftrightarrow K_1$ 的水平 α 检验,其功效(功效函数在对立假设处之值)总大于 α. 对 $H_2\leftrightarrow K_2$,水平 α 的 UMPU 检验存在.

31*. 有趣的是:与上两题类似的结果对二项分布不成立:设

$X_i \sim B(n, p_i)$，$1 \leqslant i \leqslant m$，独立，$p = \sum_1^m p_i$. 直观上看，$H(p \leqslant p_0) \leftrightarrow K(p > p_0)$的一个合理检验是当$\sum_1^m X_i$大时否定. 举一个最简单情况 $n=1$，$m=2$ 的例子，说明上述检验不必是 UMP 检验(适当选择 p_0，水平 α).

32. 样本 X 有指数型分布 $C(\theta)\mathrm{e}^{Q(\theta)T(x)}\mathrm{d}\mu(x)$，$\theta \in \Theta$，$\Theta$ 为 $\mathbf{R}^1$ 之开区间，$Q'(\theta) > 0$ 于 Θ 上. 取定水平 $\alpha \in (0,1)$，$\theta_0 \in \Theta$. ***a.*** 以 $\beta(\theta)$记 $\theta \leqslant \theta_0 \leftrightarrow \theta > \theta_0$ 的水平 α UMP 检验的功效函数，则 $\beta'(\theta) > 0$ 对一切 $\theta \in \Theta$. ***b.*** 若 ϕ 为 $H_1(\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2) \leftrightarrow K_1(\theta \overline{\in} [\theta_1, \theta_2])$或 $H_2(\theta = \theta_0) \leftrightarrow K_2(\theta \neq \theta_0)$的水平 α 的 UMPU 检验，而 $\beta_\phi(\theta)$在某对立假设点 θ' 处的功效等于 α，则 $\phi \equiv \alpha$. 指出这种情况发生的(分布族 $C(\theta)\mathrm{e}^{Q(\theta)T(x)}\mathrm{d}\mu(x)$所应满足的)充要条件.

33°. 证明下述结果，以作为下题的预备：设 $f(x)\mathrm{d}\mu$，$f_n(x)\mathrm{d}\mu$，$n \geqslant 1$，是 $\mathbf{R}^n$ 上一串概率测度，满足 $f_n \to f$ a.eμ. 给定 $M < \infty$，以 $\mathscr{F}_M$ 记一切界于 M 的可测函数集，则当 $n \to \infty$，对 $\mathscr{F}_M$ 中的 g 一致地有 $\int f_n g \mathrm{d}\mu \to \int f g \mathrm{d}\mu$.

34. 设 f 为一维概率密度(对 L 测度)，$X_1, \cdots, X_n$ 是从位置——刻度参数族$\{\sigma^{-1}f(\sigma^{-1}(x-\theta)) : \theta \in \mathbf{R}^1, \sigma > 0\}$中抽出的 iid. 样本. 考虑复合假设检验问题 $H(\theta=\theta_0, \sigma > 0) \leftrightarrow K(\theta = \theta_1, \sigma > 0)$，$\theta_1 \neq \theta_0$，$\theta_0$，$\theta_1$ 给定. 若 ϕ 为 $H \leftrightarrow K$ 的水平 α 检验，则必有$\limsup\limits_{\sigma \to \infty} \beta_\phi(\theta_1, \sigma) \leqslant \alpha$.

35. 设样本 X，Y 独立，各自服从指数型分布 $C_1(\theta_1)\mathrm{e}^{\theta_1 T_1(x)} \cdot \mathrm{d}\mu_1(x)$和 $C_2(\theta_2)\mathrm{e}^{\theta_2 T_2(y)}\mathrm{d}\mu_2(y)$. 给定水平 $\alpha \in (0,1)$及常数 θ_{10}，θ_{20}，则当且仅当 μ_1 和 μ_2 的支撑都只包含两个点时，$H(\theta_1 = \theta_{10}, \theta_2 = \theta_{20}) \leftrightarrow K((\theta_1, \theta_2) \neq (\theta_{10}, \theta_{20}))$有水平 α 的 UMPU 检验且即为 $\phi_\alpha \equiv \alpha$. 这个结果可以推广到 X 的分布为一般指数型 $C(\theta)\exp(\theta' T(x)) \cdot \mathrm{d}\mu(x)$，$\theta \in \Theta$ 的形状，其中 θ 为 k 维，Θ 为 $\mathbf{R}^k$ 中一有内点的

子集，θ_0 为 Θ 之内点. 假设 $\theta=\theta_0\leftrightarrow\theta\neq\theta_0$ 没有 UMPU 检验(水平 $\alpha\in(0,1)$)，除非 μ 的支撑集为 $A_1\times\cdots\times A_k$，其中每个 A_i 都是只含两个点的 $\mathbf{R}^1$ 的子集. 在这个场合，水平 α 的 UMPU 就是 $\phi_\alpha\equiv\alpha$.

36. 样本 X 有一维指数族 $C(\theta)e^{\theta T(x)}d\mu(x)$. 考虑检验问题 $\theta=\theta_0\leftrightarrow\theta\neq\theta_0$，其水平 α 的 UMPU ϕ_α 有形状

$$\phi_\alpha(T)=\begin{cases}1 & \text{当 } T<c_{1\alpha} \text{ 或 } >c_{2\alpha};\\ r_{i\alpha} & \text{当 } T=c_{i\alpha},\ i=1,2;\\ 0 & \text{当 } c_{1\alpha}<T<c_{2\alpha}.\end{cases}$$

证明：随着 α 的增加，ϕ_α 的接受域 $(c_{1\alpha},c_{2\alpha})$ 呈收缩的态势，即当 $\alpha'>\alpha$ 时有 $c_{1\alpha'}\geqslant c_{1\alpha}$，且若 $c_{1\alpha'}=c_{1\alpha}$ 则 $r_{1\alpha'}\geqslant r_{1\alpha}$；又 $c_{2\alpha'}\leqslant c_{2\alpha}$，且若 $c_{2\alpha'}=c_{2\alpha}$ 则 $r_{2\alpha'}\geqslant r_{2\alpha}$. 同样结论也适用于 $\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2\leftrightarrow\theta\in[\theta_1,\theta_2]$.

37. 设 $H\leftrightarrow K$ 的水平 α UMP 检验 ϕ_α 只取 0，1 为值. 记 $S_\alpha=\{x:\phi_\alpha(x)=1\}$. ***a*°**. 证明：若 $\inf\limits_{\theta\in K}P_\theta(S_\alpha)<1$，则 $\sup\limits_{\theta\in H}P_\theta(S_\alpha)=\alpha$(此可视为定理 5.1，2°的推广). ***b*°**. 在 ***a*** 的条件下，当 $\alpha<\alpha'$ 时不能有 $S_{\alpha'}\subset S_\alpha$. ***c***. 但是，也不一定有 $S_{\alpha'}\supset S_\alpha$，举例明之.

38. X 有分布

$$C(\theta)\exp(\theta' T(x))d\mu(x)=C(\theta)\exp\left(\sum_1^k\theta_i T_i(x)\right)d\mu(x),$$

每个 T_i 的支撑都多于两点，θ_0 为参数空间内点. 证明：任给 $\alpha\in(0,1)$，可找到 $\theta=\theta_0\leftrightarrow\theta\neq\theta_0$ 之一无偏检验 ϕ，使 $\beta_\phi(\theta)>\alpha$ 当 $\theta\neq\theta_0$.

39*. 样本 X 有指数型分布 $C(\theta)\exp(\theta_1T_1(x)+\theta_2T_2(x))\cdot d\mu(x)$，$\theta\in\Theta$，$\theta_0=(\theta_{01},\theta_{02})$ 是 Θ 内点. 证明：$H(\theta_1\leqslant\theta_{01},\theta_2\leqslant\theta_{02})\leftrightarrow K(\theta_1>\theta_{01}$ 或 $\theta_2>\theta_{02})$ 的水平 α 的 UMPU 检验的功效函数恒等于 α. 若 $T_1(X)=X_1$，$T_2(X)=X_2$，则此检验即为 $\phi_\alpha\equiv\alpha$. 把这个结果推广到 θ 大于 2 维的情况.

40°. 样本 $X_1,\cdots,X_n$ 独立，分布为

$$\begin{aligned}(P_\theta(X_j=1)&=1-P_\theta(X_j=0)\\&=(1+\exp(-\theta_1-j\theta_2))^{-1},1\leqslant j\leqslant n,n\geqslant 2,\end{aligned}$$

其中 $\theta=(\theta_1,\theta_2)\in\mathbf{R}^2$. 证明:不同的 θ 相应于$(X_1,\cdots,X_n)$的不同分布. 求 $H(\theta_2\leqslant 0)\leftrightarrow K(\theta_2>0)$的 UMPU 检验.

41°. 样本 $X_1,\cdots,X_n$ 独立,$X_j\sim N(j\theta,\sigma^2)$,$1\leqslant j\leqslant n$,$\theta\in\mathbf{R}^1$,$\sigma^2>0$,求 $H(\theta=0)\leftrightarrow K(\theta\neq 0)$的 UMPU 检验.

42°. (成对比较模型)样本 $X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_n$ 独立,$X_i\sim N(\varphi_i,\sigma^2)$,$Y_i\sim N(\varphi_i+\theta,\sigma^2)$,$1\leqslant i\leqslant n$. 求 $H(\theta\leqslant 0)\leftrightarrow K(\theta>0)$的 UMPU 检验.

43°. 如果样本空间至多可列,则当 K 为简单(只含一个分布)时,$H\leftrightarrow K$ 的 UMP 检验必存在.

44. 设$(X_1,Y_1),\cdots(X_n,Y_n)$是从二维正态总体 $N(\theta_1,\theta_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$中抽出的 iid. 样本,$\rho$ 为相关系数. 记 $\Delta=\sigma_2/\sigma_1$. ***a***. 求 $\Delta=\Delta_0\leftrightarrow\Delta\neq\Delta_0$ 的 UMPU 检验. ***b***. 在 $\Delta=1$ 的假定下,求 $\theta=0\leftrightarrow\theta\neq 0$ 的 UMPU 检验,$\theta=\theta_1-\theta_2$.

45°. 用两个方法证明:(5.29)的第二式可用 $c_1k_{2n}(2c_1/\theta_0)=c_2k_{2n}(2c_2/\theta_0)$去代替.

46. (MLR 族的条件)***a***. 分布族 $\{f(x-\theta)\mathrm{d}x,\theta\in\mathbf{R}^1\}$,$\int_{-\infty}^{\infty}f\mathrm{d}x=1$,$f$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上处处连续并大于 0,则它是 MLR 族的充要条件是:$-\log f(x)$ 为凸函数. 举一个这样的例子. ***b***. 设 h 在$(0,\infty)$ 处处连续且大于 0,$\int_0^{\infty}h(x)\mathrm{d}x=1$, 则刻度族$\{\theta^{-1}h(x/\theta)\cdot I(x>0)\mathrm{d}x,\theta>0\}$为 MLR 族的充要条件是:$-\log h(\mathrm{e}^x)$,$x\in\mathbf{R}^1$,为凸函数. ***c***. 举反例证明以下的论断不对:若 h 为偶函数. 在 $\mathbf{R}^1$ 处处连续且大于 0,$-\log h(x)$为凸函数,则$-\log h(\mathrm{e}^x)$也是凸函数. ***d***. 反之,由$-\log h(\mathrm{e}^x)$凸也推不出$-\log h(x)$凸.

47°. 设统计量 T 有值域空间 $\mathscr{T}=T(\mathscr{X})=\{T(X):X\in X\}$. 假定条件(5.42)满足,则依该处所定义的,由 g 所导出的 $\mathscr{T}$ 上的变换 g^* 是 $\mathscr{T}$ 到 $\mathscr{T}$ 上的一一变换,且 $G^*=\{g^*:g\in G\}$是一个与 G 同构的群,即

$$(g^{-1})^* = (g^*)^{-1},\ (g_1g_2)^* = g_1^*g_2^*.$$

48°. (续上题)当满足某些条件(其中最重要的一个情况,是 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{T}$ 都是欧氏样本空间)时,由变换群 G 是$(\mathscr{X},\mathscr{B}_x)$的可测变换群可推出 G^* 是$(\mathscr{T},\mathscr{B}_T)$的可测变换群,证明这时有 $P_\theta(g^*T\in A)=P_{\bar{g}\theta}(T\in A)$,这里 $\bar{g}$ 的意义同课文(这说明:G^* 在 Θ 上导出的变换群,与 G 导出的一致).

49°. 证明:若 $H\leftrightarrow K$ 在变换群 G 之下不变,则 $\beta_\alpha^*(\theta)$在变换群 $\bar{G}$ 之下不变,$\beta_\alpha^*(\theta)$是功效的包络.

50°. 证明:***a***. 设 $m(x)$是定义在样本空间 $\mathscr{X}$ 上的一个函数(取值于某抽象空间),则必存在 $\mathscr{X}$ 上的一个一一变换群,以 m 为一个极大不变量. ***b***. 设 $\mathscr{X}=\mathbf{R}^n$. 找出以 $m(x)=\sum_1^n x_i$ 为极大不变量的一切一一变换群. 找出其中的一个线性变换群.

51°. 举例证明:由一个检验 ϕ 的功效函数在群 $\bar{G}$ 下不变(即 $\beta_\phi(\bar{g}\theta)=\beta_\phi(\theta)$对任何 $\theta\in\Theta$ 及 $\bar{g}\in\bar{G}$,推不出 ϕ 是 G 的一个不变检验.

52°. 设 T 是完全充分统计量,满足(5.42),因而 $\mathscr{X}$ 上的一一变换群 G 可导出 $\mathscr{T}$ 上的一一变换群 G^*. 设检验问题 $H\leftrightarrow K$ 在群 G 下不变,而 $\bar{G}$ 是 G 在参数空间上的导出变换群. 证明:若一个只依赖于 T 的检验 $\phi(T)$之功效函数 $\beta_\phi(\theta)$在群 G 下不变,则 $\phi(T)$是"几乎不变检验",即对任何 $g^*\in G^*$,有 $\phi(g^*T)=\phi(T)$ a. s. p_θ^T 对一切 $\theta\in\Theta$(例外集可以与 g^* 有关).

可以证明:在很一般的条件下,(参看作者著《数理统计引论》p. 289);几乎不变检验 ϕ 等价于一不变检验 ψ,即 $\phi(x)=\psi(x)$ a. s. p_θ 对一切 $\theta\in\Theta$. 设这一情况成立,证明:

53°. 当 T 为完全充分统计量且(5.42)满足时,转换到统计量 T 再求基于 T 的 UMPI 检验的作法以,是合法的.

54. 样本 X 有 Cauchy 分布 $\pi^{-1}(1+(x-\theta)^2)^{-1}\mathrm{d}x$,要检验假设 $\theta\leqslant0\leftrightarrow\theta>0$. ***a***°. 在乘法群 $G\{g_c: c>0\}(g_cx=cx)$下,有 UMPI

检验. **b**. 若水平 $\alpha\in(0,1/2)$,没有水平 α 的 UMP 检验.

55°. 样本 $X_1,\cdots X_m$ iid. $\sim N(a_1,\sigma_1^2)$, $Y_1,\cdots,Y_n$ iid. $\sim N(a_2,\sigma_2^2)$. **a**. 求在变换群 $x'_i=cx_i+d_1, 1\leqslant i\leqslant m, Y'_j=cY_j+d_2, 1\leqslant j\leqslant n, d_1\in\mathbf{R}^1, d_2\in\mathbf{R}^1, c>0$ 之下,$\sigma_1^2\leqslant\sigma_2^2\leftrightarrow\sigma_1^2>\sigma_2^2$ 的 UMPI 检验. **b**. 在 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 的假定下,求在变换群 $X'_i=cx_i+d, 1\leqslant i\leqslant m, Y_j=cY_j+d, 1\leqslant j\leqslant n$ 之下,$a_1\leqslant a_2\leftrightarrow a_1>a_2$ 的 UMPI 检验.

56. **a**. 样本 $X_1,\cdots,X_m$ iid. $\sim R(0,\theta)$, $Y_1,\cdots,Y_n$ iid. $\sim R(0,\theta_2)$,要检验假设 $H: \theta_1\geqslant\theta_2\leftrightarrow K: \theta_1<\theta_2$. 问在变换群 $g_cx_i=cx_i, 1\leqslant i\leqslant m, g_cy_j=cy_j, 1\leqslant j\leqslant n$ 之下,UMPI 检验是否存在. **b**. 若 $X_1,\cdots,X_m$ iid. $\sim R(\theta_1,\theta_2)$, $Y_1,\cdots,Y_n$ iid. $\sim R(\varphi_1,\varphi_2)$,要检验假设 $H: \theta_2-\theta_1\geqslant\varphi_2-\varphi_1\leftrightarrow K: \theta_2-\theta_1<\varphi_2-\varphi_1$. 问在变换群 $X'_i=cx_i+d_1, 1\leqslant i\leqslant m, y'_j=cy_j+d_2, 1\leqslant j\leqslant n, c>0, d_1\in\mathbf{R}^1, d_2\in\mathbf{R}^1$ 之下,UMPI 检验是否存在.

57. $X_1,\cdots,X_m$ iid.,公共分布为 $\sigma_1^{-1}\exp\left(-\frac{x-\theta_1}{\sigma_1}\right)I(x>\theta_1)\cdot\mathrm{d}x$, $Y_1,\cdots,Y_n$ iid.,公共分布为 $\sigma_2^{-1}\exp\left(-\frac{y-\theta_2}{\sigma_2}\right)I(y>\theta_2)\mathrm{d}y$. **a°**. 求在上题 **b** 的变换群下,$H: \sigma_2/\sigma_1\leqslant\Delta_0\leftrightarrow K: \sigma_2/\sigma_1>\Delta_0$ 的 UMPI 检验. **b***. 证明此 UMPI 检验也是 UMPU 检验.

58. (双侧 t 检验)$X_1,\cdots,X_n$ iid., $\sim N(\theta,\sigma^2)$. 证明在乘法变换群 $x'_i=cx_i, 1\leqslant i\leqslant n, c\neq 0$ 之下,$H: \theta=0\leftrightarrow K: \theta\neq 0$ 有 UMPI 检验.

59. 样本 $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim N(\theta,1)$,检验假设 $H: \theta=0\leftrightarrow K: \theta\neq 0$. 取先验分布 ν, $\nu(\{0\})=p, 0<p<1$ 且 ν 满足条件 $\nu(0,\varepsilon)>0<\nu(-\varepsilon,0)$ 对任何 $\varepsilon>0$. 证明:若 ϕ_n 是 Bayes 检验,则当真参数值 $\theta\neq 0$ 时,$P_\theta(\phi$ 否定 $H)\to 1$.

60. (续上题)设在上题中先验分布 ν 为

$$\nu(A)=pI(0\in A)+(1-p)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau}\int_A\exp\left(-\frac{1}{2\tau^2}(\theta-\mu)^2\right)\mathrm{d}\theta,$$

$\tau>0$ 和 μ 已知. **a°**. 证明:$\theta=0\leftrightarrow\theta\neq0$ 的 Bayes 检验接受域为一有界区间(可以是空集),此区间是否以 $\overline{X}$ 为中点则取决于 $\mu=0$ 或否. **b**. 对 $\sqrt{n}\,|\overline{X}|=1.96$,在 $\mu=0$ 的情况,研究一下 $\theta=0$ 这点的后验概率的性状,从中能作出怎样的结论?

61. (续上题)在 59 题中考虑如下形式的先验分布

$$\nu(A)=pI(0\in A)+(1-p)F(A),F(\{0\})=0,$$

其中 F 是一个关于 o 点对称的分布. 证明:若 $\sqrt{n}\,|\overline{X}|\leqslant1$,则 o 点的后验概率 $P(\theta=0|x)d_x$ 总是大于其先验概率 p.

62*. (续上题)在上题中设 $\mathrm{d}F(\theta)=f(\theta)\mathrm{d}\theta$,$f$ 为偶函数,在 $[0,\infty]$ 非增. 对 $\sqrt{n}\,|\overline{X}|>1$ 时,证明当 f 取均匀分布(必然以 o 为中点,因 f 为偶)时,α_x 达到最小值.

第　六　章

1°. 样本 X 有一维指数族分布 $\tilde{C}(\theta)\mathrm{e}^{T(x)\theta}\mathrm{d}\mu(x)$,$\theta\in\Theta$,$\Theta$ 为 $\boldsymbol{R}^1$ 的开区间,又假定 $\mathrm{E}_\theta T(X)\in\Theta$,$\theta\in\Theta$. **a**. 证明在上述条件下,可找到一个指数族分布 $\{C(\theta)\mathrm{e}^{T(x)m(\theta)}\mathrm{d}\mu(x),\theta\in\Theta_1\}$,$\Theta_1$ 为 $\mathbf{R}^1$ 的开区间,满足 $\mathrm{E}_\theta T(X)=\theta$,组 $m(\cdot)$ 在 Θ_1 内严格上升,解析,且当 θ 遍历 Θ_1 时,$m(\theta)$ 遍历 Θ. **b**. 利用 **a**,求 $\tilde{C}(\theta)\mathrm{e}^{T(x)\theta}\mathrm{d}\mu$ 下,$H:\theta=\theta_0\leftrightarrow K:\theta\neq\theta_0$ 的似然比检验有形式

$$\phi(x)=\begin{cases}0,\text{当 } c_1<T(x)<c_2;\\ r_i,\text{当 } T(x)=c_i,\quad i=1,2;\\ 1,\text{其他 } x,\end{cases}$$

其中 $0\leqslant r_i\leqslant1$,而 $c_1<c_2$ 满足关系

$$C(c_1)\exp(c_1(m(c_1)-m(\theta_0)))=C(c_2)\exp(c_2(m(c_2)-m(\theta_0))).$$

2°. 样本 $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim N(\mu,\sigma^2)$. 证明:假设 $H:\sigma^2=\sigma_0^2\leftrightarrow K:\sigma^2\neq\sigma_0^2$ 的似然比检验不是其 UMPU 检验.

3. 似然比检验不必无偏的若干进一步例子,试证明之. **a**. 样

本 X 有分布 $\theta^{-1}e^{-x/\theta}I(x>0)dx,\theta>0$，假设 $H: 1\leqslant\theta\leqslant2\leftrightarrow K: \theta\in[1,2]$；**b.** X_1,X_2，独立，$X_i\sim N(\theta_i,1)$，$i=1,2$，假设 $H: \theta_1\leqslant0,\theta_2\leqslant0\leftrightarrow K: \max(\theta_1,\theta_2)>0$.

似然比检验有狭义广义两种理解. 狭义的是 $\phi(x)=1,r,0$，视 $\mathrm{LR}(x)>c,=c$ 或 $<c$，$r\in[0,1]$为常数. 广义的在 $\mathrm{LR}(x)=c$ 时不必为常数.

4. 设 X 的分布族$\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$，$\Theta$ 可列，受控于 μ，且 $\mu\ll P_\theta$ 对任何 $\theta\in\Theta$. 设 $\theta_0\in\Theta,\alpha\in(0,1)$. 证明：若 $H: \theta=\theta_0\leftrightarrow K: \theta\neq\theta_0$ 的水平 α UMP 检验存在，则它必是广义似然比检验，但不必是狭义似然比检验.

用证明定理 5.6 完全相同的方法，不难证明下述结果：设样本 X 有指数族分布 $C(\theta)e^{T(x)\theta}d\mu$. 考虑检验问题 $H: \theta\leqslant\theta_1$ 或 $\theta\geqslant\theta_2\leftrightarrow K: \theta_1<\theta<\theta_2$. 如果检验 ϕ 有形状

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & c_1<T(x)<c_2,\\ r_i, & T(x)=c_i, \quad i=1,2,\\ 0, & \text{其他 } x,\end{cases}$$

且 $E_{\theta_1}\phi=E_{\theta_2}\phi=\alpha$，则 ϕ 就是 $H\leftrightarrow K$ 的水平 α UMP 检验(证明可参见 Lehmann《Testing Statical Hypothesis》第三章).

5. 利用这个结果证明：当原假设为复合时，UMP 检验甚至可以不是广义似然比检验. 这补足了上题关于似然比检验与 UMP 检验关系的结果.

6°. 造一个这样的例子：对任何 $\alpha\in[0,1]$，水平 α 的似然比检验都不存在.

7. 似然比检验可以比平凡检验 $\phi_\alpha\equiv\alpha$ 更差，试构造一个这样的例子.

8°. $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim N(\mu,\sigma^2)$. $H: \mu\leqslant0\leftrightarrow K: \mu>0$，求 $2\log\mathrm{LR}(X)$的极限分布. 为何结果与定理 6.1 不合?

截断型分布似然比极限定理

9°. 设 $F(x)$在 $0\leqslant x<\infty$绝对连续,非降,$F(x)>0$ 当 $x>0$. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是从分布 P_θ 抽出的 iid. 样本, $\mathrm{d}P_\theta(x)=f(x)\cdot I(0<x<\theta)\mathrm{d}x/F(\theta)$, $f=F'$, $\theta>0$. 求 $H:\theta=\theta_0\leftrightarrow K:\theta\neq\theta_0$ 的 $2\log\mathrm{LR}(X)$在 $\theta=\theta_0$ 时的极限分布.

10°. F 的假定同上题. 设 $X=(X_1,\cdots,X_k)$的分布为 $\mathrm{d}P_\theta(x)=f(x_1)\cdots f(x_k)I(0<x_i<\theta_i,1\leqslant i\leqslant k)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k/(F(\theta_1)\cdots F(\theta_k))$, $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_k)$, $\theta_i>0$, $1\leqslant i\leqslant k$. 设 $X^{(i)}=(X_{i1},\cdots,X_{ik})$, $1\leqslant i\leqslant n$, 为 X 的 iid. 样本,求 $H:\theta_1=\cdots=\theta_k\leftrightarrow K:\theta_i$ 不全相同的 $2\log\mathrm{LR}(X)$ 在 H 成立之下的根限分布.

11°. 设 $X_1,\cdots X_n$ iid. $\sim R(\theta_1-\theta_2,\theta_1+\theta_2)$, $\theta_1\in R^1$, $\theta_2>0$. 求 $H:\theta_1=0\leftrightarrow K:\theta_1\neq\theta$ 的 $2\log\mathrm{LR}(X)$在 $\theta_1=0$ 成立时的极限分布.

12°. 以 $E(a,\sigma)$记分布 $\sigma^{-1}\exp(-(x-a)/\sigma)I(x>a)dx$, $a\in\mathbf{R}^1$, $\sigma>0$. 设 $X_1,\cdots,X_{n_1}$和 $Y_1,\cdots,Y_{n_2}$分别是抽自 $E(a_1,\sigma)$和 $E(a_2,\sigma)$的 iid. 样本,且二者独立. ***a°***. 求 $H:a_1=a_2\leftrightarrow K:a_1\neq a_2$ 的似然比 $\mathrm{LR}(x)$. ***b°***. (为下题作准备)设 $a=0$, $\sigma=1$. 记 $x=\min X_i$, $Y=\min Y_i$, $Z=\min(X,Y)$, $\xi=n_1(X-Z)$当 $Z=Y$, $\xi=n_2(Y-Z)$当 $Z=X$. 证明 ξ 的分布为 $E(0,1)$. ***c°***. 证明在原假设下,当 $\min(n_1,n_2)\to\infty$时, $2\log\mathrm{LR}(X)\xrightarrow{\mathscr{L}}\chi_2{}^2$(这又是一个不符合定理 6.1的例子.) 以上几例说明:在截断情况下自由度加倍是一普遍现象. ***d***. 证明 $H\leftrightarrow K$ 的似然比检验是无偏的.

13°. 考虑序列相关,或称一阶自回归模型

$$X_i=px_{i-1}+e_i,\ i=1,\cdots,n,\ X_0=0,$$

而 $e_1,\cdots,e_n$ iid. $\sim N(0,\sigma)$. 此处$|p|<1$, $\sigma^2>0$ 都未知,求 $p=0\leftrightarrow p\neq0$ 的似然比检验.

14°. ***a***. 在原假设成立的条件下计算(6.14)的统计量 Y_n 的均值方差. ***b***. 不依赖于 ***a*** 中求得的 $\mathrm{Var}(Y_n)$表达式,用简捷的方法

证明：若$\min\limits_{1\leqslant i\leqslant k} p_i \to 0$，则 $\mathrm{Var}(Y_n) \to \infty$.

15. 考虑统计量 $\widetilde{Y}_n = \sum\limits_{i=1}^{k} c_{ni}(\xi_{ni} - np_i)^2$. 为了在原假设下有 $\widetilde{Y}_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \chi^2_{k-1}$，必须(只须)$c_{ni} \cdot np_i \to 1$，$1 \leqslant i \leqslant k$.

16. 设在(6.14)Y_n 的定义中以 p_{ni}取代 p_i(即 p_i 可随 n 而变)，不失普遍性不妨设 $p_{n1} \geqslant \cdots \geqslant p_{nk}$. 证明：只要$\lim\limits_{n\to\infty} np_{nk} = \infty$，则仍有 $Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \chi^2_{k-1}$，更进一步：这个条件也是必要的.

17°. 在对立假设$(p_{n1}, \cdots, p_{nk})$处计算 Y_n 的分布，此处 $p_{ni} = p_i + c_i/\sqrt{n}$，$1 \leqslant i \leqslant k$($(p_1, \cdots, p_k)$为原假设，$c_i$ 为常数). 则当 $n \to \infty$ 时，此分布依分布收敛于 $\chi^2_{k-1,\delta}$. 求非中心参数 δ.

18. 原假设 $H(p_1, \cdots, p_k)$: $p(X = a_i) = p_i$，$1 \leqslant i \leqslant k$. 检验统计量 Y_n 如(6.14). 取检验 $\phi = I(Y_n > c_n(\alpha))$使有水平 α($\alpha \in (0,1)$ 固定)，即 $P(Y_n > c_n(\alpha) | H(p_1, \cdots, p_k)) \leqslant \alpha$，假定 $c_n(\alpha)$是对一切 $(p_1, \cdots, p_k)$ $\left(\text{满足 } p_i \geqslant 0, \sum p_i = 1\right)$ 都满足上述条件的最小者. ***a***. 证明：对任何 $\alpha \in (0,1)$及自然数 n，上述 $c_n(\alpha)$存在并有限. ***b***. 是否对任何 $\alpha \in (0,1)$必有 $c_n(\alpha) \to \chi^2_{k-1}(\alpha)$?

19°. 举例说明：$H(p_1 = p_{10}, \cdots, p_k = p_{k0})$的 χ^2 拟合优度检验不必是无偏的.

20*. (续上题：一般结果)，当且仅当 $p_{10} = \cdots = p_{k0} = 1/k$ 时，上题假设 H 的 χ^2 拟合优度检验才是无偏的.

21*. 对上题假设 H，可找到常数 c_n，使检验 $\phi_n = I(Y_n > c_n)$满足

$$\beta_{\phi_n}(p_{10}, \cdots, p_{k0}) \to 0,$$

$$\beta_{\phi_n}(p_1, \cdots, p_k) \to 1 \text{ 当}(p_1, \cdots, p_k) \neq (p_{10}, \cdots, p_{k0}).$$

22°. 将(6.14)统计量 Y_n 修改为

$$\widetilde{Y}_n = \sum_1^k (\xi_{ni} - np_i)^2/\xi_{ni},$$

$$Y_n^* = \sum_1^k 4(\sqrt{\xi_{ni}} - \sqrt{np_i})^2.$$

证明：在原假设成立时，当 $n\to\infty$，$\tilde{Y}_n$ 和 Y_n^* 都依分布收敛于 χ^2_{k-1}.

23. 在 $|\xi_{ni}/n-p_i|$，$i=1,\cdots,k$ 的最大值为 $\Delta(0<\Delta\leqslant 1/2)$ 的条件下，(6.14)的统计量 Y_n 的最小值为 $4n\Delta^2$（最小值是对$\{\xi_{ni}\}$和$\{p_i\}$取）. 找出达到这个最小值的充要条件.

24*. 检验假设(6.12)，F 为已知的一维连续分布. 如果用 χ^2 拟合优度检验，但分的区间数及区间端点都不随 n 而变，则一个分布 G 虽然不等于 F，但只要它在上述每个区间内的概率都与 F 在同一区间上的概率重合，则检验在 G 处的功效就等于其水平 α，因而当 $n\to\infty$时并不收敛于 1(检验不相合).

但是，若让分区间数随 n 增加，则有可能作出相合的 χ^2 拟合优度检验. 具体说有以下结果：令 $k=k_n=[n^\delta]$，$0<\delta 1/4$（$[a]$表不超过 a 的最大整数）. 把 $\mathbf{R}^1$ 分成 k 个(F)等概率区间，而作统计量(6.14)，则可找到常数 c_n，使检验函数 $\phi_n=I(Y_n>c_n)$的功效函数 β_{ϕ_n}满足

$$\beta_{\phi_n}(F)\to 0,\beta_{\phi_n}(G)\to 1,\text{对任何分布 } G\neq F$$

25°. 证明：定理 6.2 和 6.3，可由似然比极限定理 6.1 推出.

26.* 列联表统计量(6.20)对每个属性分成无穷多组一样有定义，而且，由于(6.20)的 Y_n 是反映两属性的相关的，它应能反映一个二维分布的相关特性.

现设有一个二维正态分布$(X,Y)\sim N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，相关系数 $\rho\in(-1,1)$. 把平而分成一些边长为 Δ 的正方形（其边与坐标轴平行），以 n_{ij}记这正态分布在(i,j)格内的概率而按(6.20)计算 Y_n. 证明：当 $\Delta\to 0$ 时，$Y_n\to\rho^2/(1-\rho^2)$.

27°. Kolmogorov(以下几题简称为 K)检验有相合性.

28. K 检验不一定无偏. ***a***. 先证明以下预备事实：设 X,Y 各有连续严增分布 F_0 和 F_1，且存在 a，使 $0<F_0(a)<1/2$，$F_1(x)<F_0(x)$当 $x<a$. $F_1(x)=F_0(x)$当 $x\geqslant a$. 证明：存在定义于 $\mathbf{R}^1$ 的连

续严增函数 g，满足 $g(x)>x$ 当 $x<a$，$g(x)=x$ 当 $x\geqslant a$，且 $g(X)$ 与 Y 同分布. **b**. 取适当 $\Delta\geqslant F_0(a)$. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为 iid. 样本，$F_{(n)}$ 为其经验分布. 利用 a 证明：

$$\alpha\equiv P_{F_0}(\sup_x|F_{(n)}(X)-F_0(X)|>\Delta)$$

$$>P_{F_1}(\sup_x|F_{(n)}(X)-F_0(X)|>\Delta)$$

这说明：当 F_0 为原假设时，水平 α 的 K 检验非无偏.

29. **a°**. 以 $X_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)}$ 记样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的次序统计量，证明：K 统计量 $\sup_x|F_{(n)}(x)-F(x)|=\sup_{1\leqslant i\leqslant n}|i/n-F(x_{(i)})|$. **b°**. 转化到均匀分布 $R(0,1)$，证明：在原假设 F 下且 F 连续时，K 统计量之分布与 F 无关. **c°**. 借助于 b，对 $n=1,2$ 求出 K 统计量之确切分布. **d**. 在 F 连续时，对任何 n，K 统计量有密度（对 L 测度）.

30°. **a**. 设分布 F 有一个不连续点 c，其他各点连续. 记 $a=F(c-0)$，$b=F(c)$. 证明：在原假设 F 之下，K 统计量之分布与 $\sup\{|t-G_n(t)|:0\leqslant t\leqslant 1,t\overline{\in}(a,b)\}$ 之分布同，此处 $G_n(t)$ 是 $R(0,1)$ 中 iid. 样本的经验分布. 在 F 可以有不止一个跳跃点的情况，这结果有如何之推广？由此可以得出怎样的结论？**b**. 对总体分布为 $P(X=1)=1-P(X=0)=p$ 的情况，算出 $\xi\ \sqrt{n}\sup_x|F_n(x)-F(x)|$ 在原假设下的极限分布. 由此可得出怎样的结论？

31. **a°**. 由(6.25)定义的统计量 W_n^2，在原假设 F 下的分布，当 F 连续时与 F 无关，而在 F 不连续时则不然. **b**. 求出 W_n^2 的一个（与(6)相似）有限表达式（分 F 连续与不连续两种情形）. **c°** 在 F 连续且原假设成立之下，求 W_n^2 的均值方差. **d**. 证明：以 $W_n^2>c_n/n$ （$c_n>0$ 为常数，适当选取）为否定域的检验，在原假设 F 处处连续时为相合. 而在原假设 F 有跳跃点时，可以不存在基于 W_n^2 的相合检验.

32*. 以 W_n^2 大值为为否定域的检验，即使对原假设和对立假设分布都局限于处处连续的情况，也可以不是无偏的（要举反例，悬空制作，需要一点 trick）.

33°. *a*. 例 6.9 中,以 I 记抽出的天平号,$p_1=P(I=1)$已知($p_2=1-p_1=P(I=2)$),记录 $(I,X_1,\cdots,X_n)$. 证明:基于这个样本作 $\theta=\theta_0\leftrightarrow\theta>\theta_0$ 的检验,对水平 $\alpha\in(0,1)$不存在 UMP 检验. *b*. 若 p_1 未知(因之 p_1,也是一个参数),且 p_1 可取(0,1)区间内任何值,则上述假设的 UMP 检验存在,且就是条件 UMP 检验.

34°. 证明例 6.13.

35°. 设 $A_n=(a_{n1},\cdots,a_{nn})$. 证明:"$A_n$ 满足条件 N"的充要条件是 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(a_{ni}-\bar{a}_n)^2/S_n^2=0(1)$,当 $n\to\infty$,$S_n^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(a_{ni}-\bar{a}_n)^2$. 这个条件比条件 N 原来的形式要方便些.

36. 设 $X_1,X_2,\cdots$为 X 的 iid. 样本,$0<\mathrm{Var}(X)<\infty$. 令 $A_n=(X_1,\cdots,X_n)$,$n=1,2,\cdots$. 则 A_n 以概率 1 满足条件 W 的充要条件是:X 的各阶矩有限.

37. *a*. 用 Hajek 定理,以及直接证明这两种方法,证明:若 A_N,C_N 中有一个满足条件 W,另一个满足条件 N,则(A_N,C_N)满足条件 M(见(6.57)). *b*. 举例证明 *a* 之逆不真.

38°. *a*. 若(A_N,C_N)满足条件 M,则 A_N,C_N 都满足条件 N. *b*. *a* 之逆不真.

39. *a*. $A_N=\{1,2,\cdots,N\}$,$C_N=\{0,\cdots,0,1,\cdots,1\}$($k$ 个 1,k 固定). 基于 A_N,C_N 的线性置换统计量记为 L_N,证明:$(L_N-\mathrm{E}L_N)/(\mathrm{Var}L_N)^{1/2}$当 $N\to\infty$时的极限分布,是 k 个 iid. $R(-\sqrt{3/k},\sqrt{3/k})$变量和分布. *b*. 利用 *a*. 举出 A_N,C_N,其$(L_N-\mathrm{E}L_N)/(VarL_N)^{1/2}$当 $N\to\infty$时不依分布收敛.

40. 设 $A_N=\{a_{N1},\cdots,a_{NN}\}$满足 $\bar{a}_n=0$,$\sum\limits_{i=1}^{N}a_{Ni}^2=1$. *a*°. 证明:$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}|a_{Ni}|=O(N^{-1/2})$是 A_N 满足条件 W 的充分条件,但非必要条件. *b*°. 但若存在 $\varepsilon<1/2$,使

$$\limsup_{N\to\infty}N^{\varepsilon}\max_{1\leqslant i\leqslant N}|a_{Ni}|>0,$$

则 A_N 不满足条件 $W.c.$ 证明：不论 $d_N \downarrow 0$ 如何，$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} = |a_{N_i}| = O(d_N)$不能是"$A_N$ 满足 W"的充要条件.

41. 设样本 $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim F$，以 R^i 记 X_i 的秩. ***a***. 在 F 连续时证明(6.75). ***b***. 当 F 可以有跳跃点而用随机法决定秩时，证明(6.75)仍成立.

42°. (续上题)***a***. 在 F 为离散型分布的情况，给出$(X_1,\cdots,X_n)$的由平均法确定的秩$(\bar{R}_1,\cdots,\bar{R}_n)$的分布. ***b***. 设 F 的跳跃点集$\{a_1,a_2,\cdots\}$没有有限的极限点(聚点)，指出确定$(\bar{R}_1,\cdots,\bar{R}_n)$分布的方法(只要求指明步骤).

43. ***a***. 设 $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim F$ 连续. 计算 $\mathrm{E}\,(R^i|X_1=x)$，分 $i=1$ 和 $i\neq 1$ 两种情况. ***b***. 设 $X_1,\cdots,X_m$ iid.，$\sim F$ 连续，$Y_1,\cdots Y_n$ iid. $\sim G$ 连续，$X_1,\cdots,Y_n$ 全体独立. 以 R 记 X_1 在合样本中的秩，计算 R 的分布.

44. 对 FY 和 Van der Waerden 检验中的记分数函数 $A_n=(a_{n1},\cdots,a_{nn})$，其中 $a_{ni}=\mathrm{E}\xi_{ni}$或 $a_{ni}=\Phi^{-1}\left(\dfrac{i}{n+1}\right)$，证明 A_n 满足条件 W.

45. 考虑模型(6.31)，设 $F\sim N(0,1)$，证明：不存在基于$(X_1,\cdots,X_m,Y_1,\cdots,Y_n)$的秩$(R^1,\cdots,R^m,S_1,\cdots,S_n)$的 θ 无偏估计. 更进一步：指定任一区间(a,b)，不可能存在基于上述秩统计量的，$\theta\in(a,b)$的无偏估计.

46°. (续上题)仍考虑模型(6.31)，F 连续已知，$0<F(x)<1$，并为简单计设 $m=n$. 证明：存在着基于$(R^1,\cdots,R^n,S_1,\cdots,S_n)$的，$\theta$ 的相合估计. 问：条件 $0<F(x)<1$ 可否略去?

47°. 考虑模型(6.31)，设 F 连续，$m=n$. 用下法检验 $\theta\leqslant 0\leftrightarrow\theta>0$：令 $T=\sum\limits_{i=1}^{n} I(Y_i>X_i)$，以 T 的大值为否定域. ***a***. 证明：ARE$(T,W)=1/3$. ***b***. 给"此检验 T 在渐近效率上弱于 W"这个事实一个解释.

第　七　章

1°. $X_1,\cdots,X_m$ iid. $\sim N(\theta_1,\sigma_1^2)$, $Y_1,\cdots,Y_n$ iid. $\sim N(\theta_2,\sigma_2^2)$，全体独立. 考虑用(7.3)式定义的 T 来作 $\theta_2-\theta_1$ 的区间估计问题，把 T 的分母记作 Q. **a°**. 当且仅当 $m=n(\geqslant 2)$ 且 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 时，才有 $T\sim t_{m+n-2}$，这时 T 与以前定义的两样本 t 统计量一致. **b**. 若近似地认为 $T\sim t_{m+n-2}$ 而取 $\theta_2-\theta_1$ 的区间估计 $J=\overline{Y}-\overline{X}\pm Qt_{m+n-2}(\alpha/2)$，则 J 的置信系数达不到 $1-\alpha$，但也不会为 0.

2. (续上题)假定 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$. 证明：**a**. T 的分布与 θ_1,θ_2 和 σ 无关，其密度关于 o 对称且严格下降于正半实轴. **b**. 据 **a**(仍设 $\sigma_1=\sigma_2$)，可找到 c_0，使区间估计 $J_1=Y_1-\overline{X}\pm c_0Q$ 相似且有(严格)置信系数 $1-\alpha$. 证明：拿 J_1 与两样本 t 区间估计比，互有短长，即对不同的样本，J_1 可以比 J_2 长或短，但平均长度则 J_1 比 J_2 大.

3. 样本 $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim N(\theta,\sigma^2)$，θ、σ^2 都未知. 记 $S=\left(\sum_1^n(X_i-\overline{X})^2\right)^{1/2}$. 若 $f(s)>0$，$(\overline{X}-\theta)/f(S)$ 的分布与 σ 无关(它必然与 θ 无关，何故?)，则由此可造出 θ 的相似置信区间 $\overline{X}\pm cf(S)$，$c>0$. 一个例子是 $f(s)=as$，$a>0$ 为常数，这导致 t 区间. **a**. 证明：若要求 $\mathrm{E}_\sigma|\log f(S)|<\infty$ 对一切 $\sigma>0$，则 $f(s)=as$ 是唯一能使 $(\overline{X}-\theta)/f(S)$ 的分布与 σ 无关的函数. **b**. 若只要求 f 为统计量而不必是 s 的函数，则可找到不同于 as 的 f，具有上述性质，但由之所产生的置信区间，其平均长必大于同一置信系数下 t 区间的平均长.

4. 对 Behrens-Fisher 问题，记 $S_1^2=\sum_1^m(X_i-\overline{X})^2$，$S_2^2=\sum_1^n(Y_i-\overline{Y})^2$. 若能找到函数 $f(s_1,s_2)$，使 $((\overline{Y}-\overline{X})-(\theta_2-\theta_1))/f(S_1,S_2)$ 的分布与 σ_1,σ_2 无关，则可据以建立 $\theta_2-\theta_1$ 的相似置信区

间. 证明：$E_{\sigma_1\sigma_2}|\log f(S_1,S_2)|<\infty$（对一切 $\sigma_1>0,\sigma_2>0$）的限制下，这样的 f 不存在.

注 本题推广了 Scheffe 1944 年一个结果. Scheffe 证明：对任何 $X_1,\cdots,X_m,Y_1,\cdots,Y_n$ 的二次型 Q，$((\overline{Y}-\overline{X})-(\theta_2-\theta_1))/\sqrt{Q}$ 不可能对一切 $\sigma_1>0,\sigma_2>0$ 都有 t 分布. Scheffe 没有要求 Q 只依赖 s_1 和 s_2，但由他提出的要求 $Q/k\sim\chi^2$ 分布对某个 k，容易推出 Q 只与 s_1 和 s_2 有关.

5°. Behrens-Fisher 问题. 定义 S_1^2 和 S_2^2 如第 4 题. 证明：***a***. 置信区间 $\overline{Y}-\overline{X}\pm\sqrt{2}\left(t_1^2\dfrac{S_1^2}{m(m-1)}+t_2^2\dfrac{S_2^2}{n(n-1)}\right)^{1/2}$ 的置信系数不小于 $1-\alpha$，其中 $t_1=t_{m-1}(\alpha/2)$，$t_2=t_{n-1}(\alpha/2)$. ***b***. 置信区间 $\overline{Y}-\overline{X}\pm\sqrt{2}\left(\tilde{t}_1^2\dfrac{S_1^2}{m(m-1)}+\tilde{t}_2^2\dfrac{S_2^2}{n(n-1)}\right)^{1/2}$ 的置信系数不小于 $1-\alpha$，其中 $\tilde{t}_1=t_{m-1}(\alpha/4)$，$\tilde{t}_2=t_{n-1}(\alpha/4)$. 比较一下 ***a***、***b*** 的优劣.

6°. 考虑例 7.5. 为作 $\theta_i-\theta_j$，$1\leqslant i\leqslant j\leqslant k$ 的同时区间估计，得到(7.4). 现设想要做 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 之间涉及两个或更多个的比较，即一切形如 $\sum_1^k c_i\theta_i$ 的量的同时区间估计，此处 $c_1,\cdots,c_k$ 为常数，满足 $\sum_1^k c_i=0$ $\left(\text{例如，要比较前}\,r\,\text{个的平均和后}\,k-r\,\text{个的平均，要估计}\ \dfrac{1}{r}\sum_1^r\theta_i-\dfrac{1}{k-r}\sum_{r+1}^k\theta_i\right)$. 证明：区间估计

$$\sum_1^k c_i\overline{X}_i\pm c\,\frac{1}{2}\sum_1^k|c_i|s/\sqrt{kn(n-1)}$$

对一切满足条件 $\sum_1^k c_i=0$ 的$(c_1,\cdots,c_k)$同时成立的概率仍为 $1-\alpha$，其中 c 与(7.4)式中的一样.

7*. 若无偏检验与无偏置信区间都采用第一种定义，则由关系 $x\in A(\theta_0)\Leftrightarrow\theta_0\in S(x)$ 所建立的检验和置信区间对子中，由其一个为无偏不一定能推出另一个为无偏. 各举一反例.

8. ***a***. 设在定理 7.2 中样本 X 服从指数型分布而 Θ 为自然参数空间. 证明该定理证明后的注中关于方程 $F(t,\theta)=1-\alpha$ 是否有解与 Θ 的关系的论断. ***b***. 对定理 7.3,关于$[\theta_1(X),\theta_2(X)]$是否总有界,证明该定理证明后面所作的论断.

9°. 证明:加在定理 7.3 中 T 的分布的条件,与 μ^T(T 的导出测度)的下述条件等价:{μ^T 的支撑充满一区间,$\mu^T(\{a\})=0$ 对任何单点集$\{a\}$}.

10°. 虽然定理 7.1 之逆在技术上不成立,但仍有以下结果:设样本 X 的分布族$\{f(x,\theta)\mathrm{d}\mu,\theta\in\Theta\}$关于 $T(X)$ 为 MLR 族,Θ 为区间,则 θ 的 UMA 置信区间不存在.

11°. UMPU 检验在功效比较上有可容许性. 就是说,如果 ϕ 是 $H\leftrightarrow K$ 的水平 α 的 UMPU 检验,则不可能存在水平 α 检验 ϕ^*,使

$$\beta_{\phi^*}(\theta)\geqslant\beta_{\phi}(\theta),\quad 对一切\ \theta\in K,$$

且不等号至少对一个 $\theta\in K$ 成立. 但在平均长度比较的意义上,UMAU 置信区间不一定有可容许性.

12. ***a°***. 指数型分布族 $C(\theta)e^{\theta t}\mathrm{d}\mu(t)$,若 μ 的支撑有限的上界 b,则其自然参数空间必延伸至∞. ***b°***. 在 ***a*** 的情况下,当 $\theta\to\infty$时,T 的分布 $C(\theta)e^{\theta t}\mathrm{d}\mu$ 有极限,为单点分布 $P(T=b)=1$. 若 μ 的支撑上界为∞,则即使 Θ 延伸至∞,当 $\theta\to\infty$时 T 的分布也没有极限. ***c***. 在 ***a*** 的情况下,通过替换参数 $\psi=\mathrm{actg}\theta$,可把分布族拓展到 $\psi=\pi/2$ 这个点(当 $\psi=\pi/2$ 时,$T=b$,a.s.). 这样做了以后,原来在分布族$\{C(\theta)e^{\theta t}\mathrm{d}\mu,\theta\in\Theta\}$下所作的 θ 的 UMAU 置信上、下界,可延拓扩包括 $\psi=\pi/2$ 这个点,不失其 UMAU 性. ***d***. 对 Θ 的左端有类似结果(Poisson 分布和二项分布是本题特例).

13. 证明第 7.2 节中,关于在 μ 为离散时,方程 $F(t,\theta)=1-\alpha$ 是否有解的条件的断言.

14°. 例 7.6 的区间估计 J_n 有置信系数 0(n 固定).

15. 以 $1-\alpha_n$ 记例 7.6 中置信区间 $\mathcal{J}_n$ 的置信系数,则当 $\alpha>0$

充分小时，$\limsup_{n\to\infty}(1-\alpha_n)<1-\alpha$.

16°. 设 J_n 的置信系数为 $1-\alpha_n$，而$\{J_n\}$的渐近置信系数为 $1-\alpha$，证明总有$\liminf_{n\to\infty}(1-\alpha_n)\leqslant 1-\alpha$.

17*. 在非随机化检验和置信区间范围内，一族($\theta=\theta_0\leftrightarrow\theta\neq\theta_0$ 的)接受域$\{A(\theta_0):\theta_0\in\Theta\}$与 θ_0 的置信区间 $S(x)$通过关系 $x\in A(\theta_0)\Leftrightarrow\theta_0\in S(x)$建立一一对应. 但在随机检验和置信区间的范围内，虽然一个随机化置信区间仍唯一地对应一族随机化检验，但反过来不必成立：不同的随机化置信区间可以对应同一族检验$\{\varphi_{\theta_0}:\theta_0\in\Theta\}$. 试举例证明之.

18. ***a***. 设样本 $X\sim P_\theta,\theta\in\Theta=\{0,1,\cdots\}$. 可把$\{P_\theta\}$嵌入分布族$\{\tilde{P}_\theta,\theta\in\tilde{\Theta}\}$，$\tilde{\Theta}=[0,\infty)$，使 $\tilde{P}_\theta=P_\theta,\theta\in\Theta$，且若 $\bar{\theta}(X)$是在$\{\tilde{P}_\theta,\theta\in\tilde{\Theta}\}$下 θ 的$(1-\alpha)$ UMA 置信界，则$[\bar{\theta}(X)]$是在$\{P_\theta,\theta\in\tilde{\Theta}\}$下，$\theta$ 的$(1-\alpha)$UMA 置信界，此处$[a]$为不超过 a 的最大整数. ***b***. 若$\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$关于 $T(X)$为 MLR 族，则可以使$\{\tilde{P}_\theta,\theta\in\tilde{\Theta}\}$也有这个性质——这与定理 7.2 及本题 ***a*** 结合，可用以建立在原模型$\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$下 θ 的 UMA 置信界.

19°. 样本 $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim R(\theta_1,\theta_2)$，$-\infty<\theta_1<\theta_2<\infty$. 利用统计量 $U=\max_i X_i$ 和 $V=\min_i X_i$，以建立总体均值$(\theta_1+\theta_2)/2$ 的一个相似置信区间.

20°. 样本 $X_1,\cdots,X_m$ iid. $\sim R(0,\theta_1)$，$Y_1,\cdots,Y_n$ iid. $\sim R(0,\theta_2)$，全体独立. 证明：θ_2/θ_1 的 UMA 置信界和 UMA 置信区间都存在(用第五章 15 题)

21°. 设样本 $X_1,\cdots,X_n$ iid.，公共分布为

$$(k!)^{-1}e^{-(x-\theta)}(x-\theta)^k I(x>\theta)dx,\quad \theta\in\mathbf{R}^1,$$

k 为已知的非负整数. ***a***. 对 $k=0$，证明 θ 有 UMA 置信上下界. ***b***. 对 $k>0$，UMA 置信界不存在，但可作出相似置信界和相似置信区间. ***c***. 设样本 $X_1,\cdots,X_n$ iid.，公共分布为

$$\sigma^{-1}\exp(-(x-\theta)/\sigma)I(x>\theta)dx,\quad \theta\in\mathbf{R}^1,\sigma>0,$$

证明 θ 和 σ 的 UMAU 置信区间都存在.

22°. 样本 $X_1,\cdots,X_n$ iid.,公共分布为 $f\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma}\mathrm{d}x,\theta\in\mathbf{R}^1,\sigma>0$. 指出一种构造 θ 与 σ 的相似置信区间与相似置信界的方法(设 $n\geqslant 2$. $n=1$ 的情况见第 58、59 题).

23°. 在定理 7.2 处理 p_θ 为离散分布的方法中,若 μ 不是计点测度,或 $T=T(X)$ 不是取值于 $\{0,1,2\cdots\}$ 而是在某一可列集 $A=\{a_i\}$ 上取值(集 A 当然已知,测度 μ 也已知),问所提出的处理方法是否仍可使用?

24°. 样本 X 服从指数分布 $C(\theta)e^{\theta T(x)}\mathrm{d}\mu(x)$,$\theta$ 的数大于 1. 如何构造 $c'\theta$ 的置信区间和置信界,其中向量 $c\neq 0$ 已知.

25. *a*°. 样本 X 有分布 P_θ. 若对任给 $\varepsilon>0$ 及 $1-\alpha<1$,必存在 θ 的区间估计 $J(X)$,置信水平为 $1-\alpha$ 且其长不超过 ε,即 $P_\theta(|J(x)|\leqslant\varepsilon)=1$,对一切 θ($|J|$ 表示 J 之长),则对不同的 θ,θ',P_θ 和 $P_{\theta'}$"几乎"没有公共支撑,即不存在这样的集 $A\in\mathscr{B}_x$,使

$$P_\theta(A)>0,\ P_{\theta'}(A)>0,\ \text{且}\ P_\theta\leqslant P_{\theta'}\leqslant P_\theta\ \text{于}\ A\ \text{上}.$$

b*. 此结果之逆不成立,举一反例.

26. 考虑模型(6.31),其中分布函数 F 连续. 证明:借助于秩检验,例如 Wilcoxon 检验,可作出 θ 的具有指定置信水平的置信界和置信区间.

27. 样本 $X\sim R(0,\theta)$,$\theta>0$,$[A(x),B(x)]$ 为 θ 的 $(1-\alpha)$ 置信区间. ***a***. 若 $B(x)-A(x)=(\alpha^{-1}-1)x$ a.e. L 于 $x>0$,则必有 $A(x)=x$ a.e. L 于 $x>0$. ***b***. 更强的结果也成立:如果 $E_\theta(B(X)-A(X))=(\alpha^{-1}-1)\theta/2$ 对一切 $\theta>0$,则 $[A(x),B(x)]$ 就是 $[x,\alpha^{-1}x]$.

28°. 在定理 7.4 的证明中,$S(x)\subset\Theta$ 这个条件用在何处?它可否免除?举一个容易的反例.

29. 样本 $x_1,\cdots,x_n$ iid.,$n\geqslant 2$,抽自正态总体 $N(a,\sigma^2)$. 作 a/σ 的 $(1-\alpha)$ 相似置信区间的置信界.

30*. 样本 $x_1,\cdots,x_n$ iid. $\sim N(\theta,1)$. 证明:基于样本中位数 $\hat{m}_n$ 的 $(1-\alpha)$ 区间估计 $\hat{m}_n \pm c_n/\sqrt{n}$,总比基于均值的区间估计 $\bar{X} \pm u_{\alpha/2}/\sqrt{n}$ 要长(限定 n 为奇数时).

31. $x_1,\cdots,x_n$ iid.,有截断分布

$$(H(\theta))^{-1}h(x)I(0<x<\theta)\mathrm{d}x,\quad \theta>0$$

其中 h 非负,定义于 $(0,\infty)$,且 $H(\theta)=\int_0^\theta (h(x)\mathrm{d}x>0$ 当 $\theta>0$. 证明存在并作出 θ 的 UMA 置信界与置信区间.

32. $x_1,\cdots,x_n$ iid. $\sim N(\theta,1)$. 从 $\sum_1^n (x_i-\theta)^2 \sim \chi_n^2$ 出发,造出 θ 的一个 $(1-\alpha)$ 相似置信区间 $J(X)$,并计算 $\mathbf{E}_\theta|J(X)|$.

33. 样本 $x\sim R(0,\theta)$, $0<\theta\leqslant 1$, $J(x)$ 是 θ 的一区间估计. ***a***. 证明:若 $|J(x)|\leqslant 1/3$ a.e. L 于 $x\in(0,1)$,则 J 的置信系数超不过 1/2 但可达到 1/2. ***b***. 用解 ***a*** 的方法证明下述一般结论:若 $|J(x)|\leqslant c$ a.e. L 于 $x\in(0,1)$,此处 $c\in(0,1)$,则 J 的置信系数最大值为

$$1-\alpha=2/((k+1)(2-kc)),\ (k+1)^{-1}\leqslant c<k^{-1},$$

其中 $k=1,2,\cdots$,此值可以达到. ***c***. 与 θ 的 $(1-\alpha)$UMA 置信区间去比较其平均长度.

34*. 样本 X 取值于 $\mathbf{R}^n$,对 L 测度有密度 $f(x,\theta)$,满足条件

$$\lim_{\theta'\to\theta} f(x,\theta')=f(x,\theta),\quad \text{a.e.}\ L,\ x\in\mathbf{R}^n.$$

证明:对任给的 $1-\alpha\in(0,1)$,不存在 θ 的一个 $(1-\alpha)$ 置信区间 $J(x)$,其长度 $|J(x)|$ a.s. 最小(即:对另外的 $(1-\alpha)$ 置信区间 J^*,都是 $P_\theta(|J(X)|\leqslant|J^*(X)|)=1$,一切 θ).

35°. ***a***. 证明定理 7.5. ***b***. 设 $X\sim N(\theta,1)$,用定理 7.5,以定出一个形如 $X\pm c$ 的 (β,γ) 容忍区间. 证明:可找到更小的 $c'<c$,使 $X\pm c'$ 也是 (β,γ) 容忍区间.

36. 样本 $X_1,\cdots,X_n$ iid.,公共分布是:***a***°. $R(0,\theta)$, $\theta>0$; ***b***°. $\theta e^{-\theta x}I(x>0)\mathrm{d}x$, $\theta>0$. 求 (β,γ) 容忍区间.

37. 用次序统计量求容忍上限时，经常是 $X_{(m)}$ 嫌过大，$X_{(m-1)}$ 嫌过小. **a**. 证明：若条件 $1-\beta^n \geqslant \gamma \geqslant (1-\beta)^n$ 成立，则可找到 m 和 c，$2 \leqslant m \leqslant n$，$0 \leqslant c \leqslant 1$，使 $P(CU_{(m-1)}+(1-c)U_{(m)} \geqslant \beta)=\gamma$. **b**. 考察一下这结果是否有助于处理题首指出的那个问题.

38. * 设总体分布有严格单峰的密度 $f(x)\mathrm{d}x$，因而对 $\beta \in (0,1)$，存在唯一的最短区间 $[a(\beta),b(\beta)]$，其所含概率 $\int_{a(\beta)}^{b(\beta)} f\mathrm{d}x=\beta$. 证明：对任何给定的 (β,γ)，$0<\beta<1$，$0<\gamma<1$，必可找到基于 iid. 样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的 (β,γ) 容忍区间 $[T_1(X_1,\cdots,X_n),T_2(x_1,\cdots,X_n)]$，使当 $n\to\infty$ 时，有 $T_1\to a(\beta)$，$T_2\to b(\beta)$，a. s..

39°. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为连续分布 F 的 iid. 样本. 第 7.3 节中已证明：若 $1-\beta^n \geqslant \gamma$，则 (β,γ) 容忍上限存在. 有趣的是，这也是 (β,γ) 容忍上限存在的必要条件，试对 $n=1$ 的情况证明这个结果.

40. **a**. 令 $c=u_{\alpha/2}$. 对 $a>0$，$c-a>u_\alpha$，可找到 $d=d(a)$ 使

$$\int_{-c}^{c}\exp(-x^2/2)\mathrm{d}x=\int_{-c-da}^{c-a}\exp(-x^2/2)\mathrm{d}x.$$

(当然，也有 $\int_{-c}^{c}\exp(-x^2/2)\mathrm{d}x=\int_{-c+a}^{c+da}\exp(-x^2/2)\mathrm{d}x$) 证明：对任给 $\epsilon>0$，有 $\inf\limits_{a\geqslant\epsilon} d(a)>1$. **b**. 对任给 $a_0>0$，$c-a_0>u_\alpha$，令 $d_0=1$，$d_n=d(d_{n-1}a_0)$，$n\geqslant 1$，最终会达到 $c-d_na_0<u_\alpha$(这时 d_{n+1} 就无法定义了).

41. X_1、$\cdots$，X_n iid. $\sim N(\theta,1)$. 记 $a=u_{\alpha/2}/\sqrt{n}$. 证明：若区间估计 $J(x)$($x=(X_1,\cdots,X_n)$) 满足条件

$J(x)\subset[\overline{X}-a,\overline{X}+a]$，$m(\{x:|J(x)|<2a\}]>0$，

则 J 的置信水平必小于 $1-\alpha$，此处 $|J|$ 表 J 之长，而 $m(A)$ 表 A 的 L 测度.

42*. 样本 $X\sim N(\theta,1)$，$\theta\in R^1$. 区间估计 $J(x)=[B(x),A(x)]$满足条件：①$A(x)$随 x 严格上升. ② $|J(x)|\leqslant 2a\equiv 2u_{\alpha/2}$对一切 x. ③J 的置信水平$\geqslant 1-\alpha$. 证明：J 就是$[x-u_{\alpha/2},x+u_{\alpha/2}]$.

43. 样本 $X\sim N(\theta,1)$，$\theta\in\mathbf{R}^1$，满足条件

$$P_\theta(A(x) \leqslant \theta \leqslant B(x)) = 1 - \alpha,\ \theta \in \mathbf{R}^1$$

的区间估计显然的例子是$[x-u_{\alpha_2}, x-u_{\alpha_1}]$. 其中 $0<\alpha_1<\alpha, \alpha_2=\alpha_1+1-\alpha$. 研究一下，还有没有其他的可能？

44. 样本 $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim F(x-\theta)$, $F(x-\theta)$, F 连续，已知. 证明：对任给 $l>0$, $1-\alpha<1$，当 n 充分大时，可作出 θ 的其长不超过 l，置信系数不小于 $1-\alpha$ 的区间估计(以后简称这种估计为 $(1-\alpha, l)$ 估计).

45. (续上题)研究一下 F 已知但有跳跃点的情况，上题的结论是否仍真.

下题表明，同样的结论对刻度参数不再成立.

46*. $X_1,\cdots,X_n$ iid. ***a.*** $\sim R(0,\theta)$, $\theta>0$. 证明：任给 $1-\alpha>0$ 和 L 小于∞，不存在 θ 的$(1-\alpha, L)$估计. ***b.*** $\sim\theta e^{-\theta x}I(x>0)dx$，证明同一结论. ***c.*** $\sim N(\theta,\sigma^2)$, $\theta\in R^1$, $\sigma^2>0$，对 θ 证明同一结论，并用定理 7.6 证明这个结论.

47*. 举一个这样的例子：对样本量 $n=1$ 时，对任何 $1-\alpha>0$ 及 $l<\infty$，不存在$(1-\alpha, l)$估计，而对 $n=2$ 时，对任给 $1-\alpha<1$ 及充分大的 l，$(1-\alpha, l)$估计存在.

48*. $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim N(\theta,1)$, $J(x)=[\bar{X}-u_{\alpha/2}/\sqrt{n}, \bar{X}+u_{\alpha/2}/\sqrt{n}]$. 证明：任何狭义的先验分布 $d\xi(\theta)$都不能使 $J(x)$成为 Bayes 区间估计，其后验置信系数$\geqslant 1-\alpha$.

49. 找一个这样的例子：样本 $X_1,\cdots,X_n$ iid.，任给 $1-\alpha<1$, $l>0$，当 n 充分大时存在 θ 的$(1-\alpha, l)$区间估计. 但不论 n 多大，对 θ 的任一估计 $\hat{g}$，其均方差无界：$\sup_\theta E_\theta(\hat{g}-\theta)^2=\infty$.

暂把满足条件 $P^*(\theta\in J(X)|X)=1-\alpha$, a.s. $P^*(x)$的区间估计叫做 θ 的严格$(1-\alpha)$ Bayes 置信区间，此处 P^* 是(θ, X)的联合分布.

50°. ***a.*** 证明：对 θ 的任何严格$(1-\alpha)$ Bayes 置信区间 J，其置信水平(Neyman 意义)不能超过 $1-\alpha$. 更确切地有

$$\inf_{\theta} P_\theta(\theta \in J(X)) \leqslant 1-\alpha \leqslant \sup_\theta P_\theta(\theta \in J(X)). \qquad (*)$$

举一个（*）式两边都成立严格不等号的例子. ***b***. 研究一下，有否可能（*）式全成立等号？有否可能（*）式中有一边为等号而另一边为不等号？

例 7.9 给出的 $N(\theta,1)$参数的严格$(1-\alpha)$ Bayes 置信区间比常见的 Neyman 置信区间一致地短，但仍与后者一样有性质 $P^*(\hat{\theta}_1(X)\leqslant\theta\leqslant\hat{\theta}_2(X))=1-\alpha$，这里 P^* 是(θ,X)的联合分布. 考察一般常见的 Bayes 置信区间，发现情况多如此. 这是由于知道 θ 的先验信息而带来的改进，不足为怪. 这样启发了下面的问题：

51. ***a***. 上述情况并非一般规律. 即使在先验密度 $h(\theta)$为连续单峰且关于 0 对称的情况下，对 $X\sim N(\theta,1)$，θ 的最短严格$(1-\alpha)$ Bayes 置信区间之长仍有可能大于 $u_{\alpha/2}$. ***b***. 但如先验密度是单峰的，就不可能对一切样本 x，最短严格$(1-\alpha)$Bayes 置信区间之长都大于 $2u_{\alpha/2}$. 且除非 $h(\theta)\equiv1$，“这长度小于 $2u_{\alpha/2}$”的概率大于 0.

52*.（续上题）但是，对正态以外的情况，可找到这样的例子：最短$(1-\alpha)$ Bayes 置信区间之长，总不小于$(1-\alpha)$ Neyman 置信区间之长，且“前者大于后者”的概率大于 0.

53°. 设样本 $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim N(\theta,1)$. 考虑 θ 的区间估计

$$J(x)=[\min(0,\overline{X}-u_\alpha/\sqrt{n}),\ \mathrm{man}(0,\overline{X}+u_\alpha/\sqrt{n})]$$

a. 证明 J 有置信系数 $1-\alpha$，***b***. 证明 $\mathrm{E}_0|J(X)|<2u_{\alpha/2}/\sqrt{n}$（利用第一章 25*b* 题）. 本题表明：$[\overline{X}-u_{\alpha/2}/\sqrt{n},\ \overline{X}+u_{\alpha/2}/\sqrt{n}]$并不具有“平均长度一致最小”的性质.

54. 设样本 $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim N(\theta,\sigma^2)$，$\theta\in\mathbf{R}^1$，$\sigma>0$. 为作 θ 的区间估计，取损失

$$L((\theta,\sigma),[a,b]) = (b-a)/\sigma + mI(\theta \overline{\in} [a,b]),$$

$m>0$ 为常数. 取(θ,σ)的先验分布如下：σ 有密度 $C(\lambda_1,\lambda_2)\sigma^{-(1+\lambda_2)}\exp(-\lambda_1/2\sigma^2)$，$C(\lambda_1,\lambda_2)=2^{1-\lambda_2/2}\lambda_1^{\lambda_2/2}/\Gamma(\lambda_2/2)$，$\lambda_1>0,\lambda_2>0$. 而在给定 σ 的条件下，$\theta|\sigma\sim N(0,\tau\sigma^2)$，$J>0$. 把这

一分布记为 $D(\lambda_1,\lambda_2,\mu,\tau)(\mu=0)$，$D$ 是共轭先验分布. 问题：求此先验分布下的 Bayes 解，并证明：适当选取 m，在 $\lambda_1\to 0,\lambda_2\to 0,\tau\to\infty$的情况下，Bayes 解收敛于置信系数 $1-\alpha$ 的 t 区间估计

$$\left[\overline{X}-St_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Big/\sqrt{n(n-1)},\overline{X}+St_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Big/\sqrt{n(n-1)}\right],$$

$S=\left(\sum\limits_1^n(X_i-\overline{X})^2\right)^{1/2}$. 这区间估计就是在所选定的 m 之下，上述统计决策问题的 Minimax 解.

55°. $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim\theta^{-1}e^{-x/\theta}I(x>0)dx,\theta>0$. 为作 θ 的区间估计，引进损失函数 $L(\theta,[a,b])=(b-a)/\theta+mI(\theta\overline{\in}[a,b])$. 证明：对适当选择的 m，此问题的 Minimax 解为 θ 之$(1-\alpha)$置信区间，有形式 $\lambda_2{}^{-1}\sum\limits_1^n X_i\leqslant\theta\leqslant\lambda_1{}^{-1}\sum\limits_1^n X_i$，其中

$$K_{2n}(\lambda_2)-K_{2n}(\lambda_1)=1-\alpha,\ k_{2n}(\lambda_1)=k_{2n}(\lambda_2),$$

K_{2n}和 k_{2n}分别是 χ^2_{2n}的分布函数和密度函数(与上题及定理 7.6 不同，此题求得的 Minimax 解并非 θ 的无偏置信区间).

56. 设 $X_i\sim N(\theta_i,1),i=1,\cdots,n$，独立. 同时作 $\theta_1,\cdots,\theta_n$ 的区间估计$[X_i-u_{\alpha i/2},X_i+u_{\alpha i/2}],i=1,\cdots,n$，它们的联合置信系数为 $1-\alpha=(1-\alpha_1)\cdots(1-\alpha_n)$，置信区域体积为 $2^n u_{\alpha_1/2}\cdots u_{\alpha_n/2}$. 证明：在指定联合置信系数 $1-\alpha$ 之下，唯有取 $1-\alpha_1=\cdots=1-\alpha_n=\sqrt[n]{1-\alpha}$，才使置信区域体积达到最小，但这个最小值仍大于$(1-\alpha)$球置信域 $\left\{(\theta_1,\cdots,\theta_n):\sum\limits_1^n(x_i-\theta_i)^2\leqslant\chi^2_n(\alpha)\right\}$.

57. 样本 $X_1,\cdots,X_n$ iid. $\sim R(0,\theta_1)$；$Y_1,\cdots,Y_n$ iid. $\sim R(0,\theta_2)$，全体独立，$\theta_1>0,\theta_2>0$，要作(θ_1,θ_2)的区域估计. 记 $M_x=\max(X_i),M_y=\max(Y_i)$. **a°**. 对形如

$$\{M_x\leqslant\theta_1\leqslant c_1M_x,\ M_y\leqslant\theta_2\leqslant c_2M_y\}$$

的矩形估计，解上题的问题. **b°**. 决定常数 c，使置信域$\{(\theta_1,\theta_2):c\leqslant M_x/\theta_1+M_y/\theta_2\leqslant 2\}$有给定的置信系数 $1-\alpha$. **c°**. 在基于(M_x,M_y)

的置信区域类中，找一个具指定置信系数，但面积一致地不大于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中所决定的置信域的面积，并使面积尽可能小，$\boldsymbol{d}$. 可否断言，你在问题 c 下找到的置信域，是在基于(M_x,M_y)的置信域类中，面积一致最小的？作出解释. $\boldsymbol{e}$. 要在置信系数 $1-\alpha$ 的限制下，找置信域 $S=S(X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_n)$，使 $\max\limits_{\theta_1>0,\theta_2>0}(\mathrm{E}_{\theta_1\theta_2}(S)/\theta_1\theta_2)$ 达到最小. 猜出这个解，并描述一下证明的方要步骤.

58°. 设总体分布为位置一刻度参数型 $\sigma^{-1}f\left(\dfrac{x-\theta}{\sigma}\right)\mathrm{d}x$，$f$ 为已知的概率密度，面 $\theta\in\mathbf{R}^1$ 和 $\sigma>0$ 都未知. 证明：即使只取一个样本 X，仍有可能作出 θ 的置信区间，具指定的置信系数 $1-\alpha<1$（可考虑 $X\pm c|X|$，取 c 充分大）.

59°. (续上题)总体分布为 $F\left(\dfrac{x-\theta}{\sigma}\right)$，$\theta\in\mathbf{R}^1$，$\sigma>0$，$F$ 为已知分布函数，$\{a_k,k\geqslant 1\}$ 为其跳跃点集(可以是空集). 记 $\alpha_0=\max\limits_{a_k\neq 0}F(\{a_k\})$. 指定置信系数 $1-\alpha$，证明：$\boldsymbol{a}$. 若 $\alpha>\alpha_0$，则只凭一个样本也可以作出 θ 的置信区间，而 $\alpha<\alpha_0$ 时则不行. 当 $\alpha=\alpha_0$ 时，两种可能性都有，各举一例. $\boldsymbol{b}$. 证明对 σ 的区间估计问题有类似结果，不同之处在于：α_0 的定义改为 $\max\limits_{k\geqslant 1}F(\{a_k\})$. $\boldsymbol{c}$. 若 F 有密度 $f\mathrm{d}x$，而要求 σ 的区间估计$[A(x),B(x)]$的下端 $A(x)>0$（因 $\sigma>0$），提出这个要求是有理的），则其置信系数只能为 0.

称(一串)区间估计$\{J_n=J_n(X_1,\cdots,X_n)\}$（$n$ 为样本量）是**相合的**，如果 J_n 的置信系数 $1-\alpha_n\to 1$ 当 $n\to\infty$，且其长 $|J_n|\to 0$ in pr. P_θ 对任何 θ 称一串点估计$\{\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(X_1,\cdots,X_n)\}$一致相合，若

$$\lim_{n\to\infty}(\sup_\theta P_\theta(|\hat{\theta}_\theta-\theta|\geqslant\epsilon))=0,\ 对任何\ \epsilon>0.$$

60°. 证明：$\boldsymbol{a}°$. 若 θ（或一般地，$g(\theta)$）有一致相合点估计，则必有相合区间估计. 若 θ 有相合区间估计，则必有相合点估计. $\boldsymbol{b}$. $\boldsymbol{a}$ 中两命题之逆皆不真，举例说明之（前一反例平凡）.

61°. 用(7.33)式的“正规”算法证明(θ,σ)的信任分布

(7.34).

62°. 样本 $X_1,\cdots,X_m$ iid. $\sim R(0,\theta_1)$，$\theta_1>0$；$Y_1,\cdots,Y_n$ iid. $\sim R(0,\theta_2)$，$\theta_2>0$，全体独立. 用信任推断法作 $\theta_2-\theta_1$ 的信任区间.

第　八　章

1°. 对线性模型(8.5)，若 X 不为列满秩，则在 β 的一切 LSE 中，以 $\hat{\beta}=S^{-}X'Y$ 的长 $\|\hat{\beta}\|$ 达到最小.

2°. 设在模型(8.5)中，误差 $e_1,\cdots,e_n$ iid.，其公共分布 F 关于 O 对称. ***a***. 证明：任一可估函数 $c'\beta$ 的 LSE $c'\hat{\beta}$ 为"中位无偏"，即 $\mathrm{med}(c'\hat{\beta})=c'\beta$. ***b***. 若 F 已知且 F 有有限一阶矩，则 $c'\beta$ 的一切中位无偏线性估计类$\{a'Y\}$中，存在着平均绝对偏差最小者，即使 $\mathrm{E}|a'Y-c'\beta|$ 最小，此估计不必是 LSE. ***c***. 当 F 未知（但有一阶矩）时，这种线性估计不存在.

3°. 证明 $c'\beta$ 可估的四条件等价：①存在 $c'\beta$ 的线性无偏估计. ②存在 $c'\beta$ 的无偏估计（不必线性）. ③$c'\beta$ 由 $\mathrm{E}(Y)$（指(8.5)中的 Y）唯一决定. ④$c'\hat{\beta}$ 与 LSE $\hat{\beta}$ 的选择无关.

4°. （续上题，约束情况）模型(8.5)加约束 $H\beta=0$. "$c'\beta$ 在此约束下可估"的以下四条件等价：①存在线性估计 $a'Y$，使 $\mathrm{E}(a'Y)=c'\beta$ 当 $H\beta=0$. ②存在估计 $g(Y)$，使 $\mathrm{E}(g(Y))=c'\beta$ 当 $H\beta=0$. ③存在 a、b，使 $c=X'a+H'b$. ④在约束 $H\beta=0$ 之下，$c'\beta$ 由 $\mathrm{E}(Y)$ 唯一决定. ⑤$c'\hat{\beta}$ 与 $\hat{\beta}$ 的选择无关，只要 $\hat{\beta}$ 是(8.42)的解.

5°. 举例说明：当在定理 8.3 中去掉正态假定后，"$c'\hat{\beta}$ 为 MVUE"这个结论可以也可以不成立，要看对误差的具体假定如何.

6°. 两个有用的矩阵公式. ***a***. 设分块矩阵 $A=\begin{pmatrix} B & C \\ C' & D \end{pmatrix}$ 对称正定，其中 B，D 为方阵，则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} B_1 & C_1 \\ C'_1 & D_1 \end{pmatrix}$，其中 $B_1=(B-$

$CD^{-1}C')^{-1}, D_1=(D-C'B^{-1}C)^{-1}, C_1=-B_1CD^{-1}=-B^{-1}CD_1$.
b. 设 A 为对称正定方阵，a 为列向量，则 $(A+aa')^{-1}=A^{-1}-(A^{-1}a)(a'A^{-1})/(1+a'A^{-1}a)$.

7°. 设在秤物设计例 8.4 中，误差满足 GM 条件，且各物重 β_i 皆可估. 证明：***a***.° 若只秤 n 次，则不论如何设计（但要使 β_i 皆可估），β_i 的 LSE $\hat{\beta}_i$ 的方差不能小于 σ^2/n（利用上题 a）. ***b***. °若有 n 个物件秤 n 次，设计要满足何种条件，才能使 $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_i)=\sigma^2/n$ 对 $i=1,\cdots,n$? 对 $n=8$ 作出这种设计，并由此悟出对 $n=2^m$ 的情况作出此种设计的方法. ***c***. °n 为奇数时这种设计不存在. ***d***. $n>2$ 不为 4 的倍数时不存在.

8°. 证明在例 8.2 中，对为使 $\sum\limits_1^n(x_i-\bar{x})^2$ 最大，x_i 应取配置的结论.

9°. ***a***. 证明：若 H 各行为 $h'_1,\cdots,h'_m$，$h'_i\beta$ 皆可估，则在 GM 条件下有 $\mathrm{COV}(H\hat{\beta})=\sigma^2HS^-H'$，与 S^- 的选择无关. ***b***. 若可估函数 $c'\beta$ 中 $c\neq 0$，则其 LSE$c'\hat{\beta}$ 不能为 0. ***c***. 在题 ***a*** 的情况，若 $\mathrm{rk}(H)=m$，则 $H\hat{\beta}$ 各分量线性无关，即不存在非 0 向量 c 使 $c'H\hat{\beta}=0$, a.s..

10°. 在带常数项的线性模型 $Y_i=\alpha+x'_i\beta+e_i, 1\leqslant i\leqslant n$ 中，$c'\beta$ 的可估性只取决于中心化矩阵 $(x_1-\bar{x}|\cdots|x_n-\bar{x})'$.

11. ***a***. 证明：线性空间 $\{X\beta: H\beta=0\}$ 的维数是 $\mathrm{rk}(X_H)-\mathrm{rk}(H)$. 从这一公式，推出“$H\beta=0$ 对 $X\beta$ 毫无约束”的充要条件. ***b***. 利用 ***a***，找出“适度的（即不过紧又不过松的）约束 $H\beta=0$ 所应满足的充要条件.

12°. 设 $\hat{\beta}$ 为模型(8.5)（其中 e 满足 GM 条件）这下，β 的 LSE，A 为已知的正定阵. 问：$\hat{\beta}'A\hat{\beta}$ 在什么条件下是 $\beta'A\beta$ 的无偏估计？当此条件不满足时，修正 $\hat{\beta}'A\hat{\beta}$ 以得到一个无偏估计.

13°. 在模型(8.5)下，设 $c'\beta$ 可估，$c\neq 0$. 问在 $c'\beta$ 的一切线性无偏估计中，最多能有多少个线性无关的（k 个线性估计 $a'_iY, 1\leqslant i$

$\leqslant k$,称为线性无关,若 $a_1,\cdots,a_k$ 为线性无关)?

14. 设 Y 与参数的"正确"关系是线性模型

$$Y = X\beta + e = (X_{(1)} | X_{(2)}) \begin{pmatrix} \beta_{(1)} \\ \beta_{(2)} \end{pmatrix} + e = \sum_1^2 X_{(i)}\beta_{(i)} + e$$

其中 e 满足 GM 条件. 由于简化的考虑或失误,我们采用了模型 $Y = X_{(1)}\beta_{(1)} + e$,并在这模型下求得了 $\beta_{(1)}$ 的 LSE $\tilde{\beta}_{(1)}$. 问:当 X 满足什么条件时,$\tilde{\beta}_{(1)}$ 仍是 $\beta_{(1)}$ 的无偏估计? 解释其条件的意义.

15. (续上题)***a***. 证明逆矩阵公式

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}B^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}B^{-1} \\ -B^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$$

这里假定 $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ 对称正定,A_{11} 为方阵,$B = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$. ***b***. 利用 ***a*** 证明:若在上题中以 $\hat{\beta}_{(1)}$ 记在"正确"模型下 $\beta_{(1)}$ 的 LSE,则 $\mathrm{COV}(\tilde{\beta}_{(1)}) \leqslant \mathrm{COV}(\hat{\beta}_{(1)})$,等号当且仅当 $X'_{(2)}X_{(1)} = 0$ 时成立. ***c***. 若以 $\tilde{\sigma}^2$ 记在模型 $X_{(1)}\beta_{(1)}$ 之下 σ^2 的 RSS 估计(即 $\tilde{\sigma}^2 = \| Y - X_{(1)} \cdot \tilde{\beta}_{(1)} \|^2/(n-r_1)$,$r_1 = \mathrm{rk}(X_{(1)})$),则除非 $\beta_{(2)} = 0$,$\tilde{\sigma}^2$ 不是 σ^2 的无偏估计.

16. ***a***. 证明:若 $e_1,e_2,\cdots$ 满足 GM 条件,$a_1,a_2,\cdots$ 为常数,$\sum_1^\infty a_i^2 < \infty$ 而不为 0,则当 $n \to \infty$ 时,$\xi_n \equiv \sum_1^n a_i e_i$ 依概率收敛于某随机变量 ξ,且 $P(\xi \neq 0) > 0$. ***b***. 利用 ***a*** 证明:设线性模型 $Y_i = x_i\beta + e_i$,$1 \leqslant i \leqslant n$,$\beta$ 为一维,$e_1,e_2,\cdots$ 满足 GM 条件,则当 $S_n^{-1} = \left(\sum_1^n x_i^2\right)^{-1} \nrightarrow 0$ 即 $\sum_1^n x_i^2 \nrightarrow \infty$ 时,β 的 LSE $\hat{\beta}_n = S_n^{-1}\sum_1^n x_i Y_i$ 不是 β 的弱相合估计.

17*. (续上题)把上题的结果推广到一般维数的线性模型. 这要复杂很多,但基本思想仍是应用上题 ***a***(略作推广),见本题 ***a***),以下将其化为几个较容易的小题. ***a***. 设 $e_1,e_2,\cdots$ 满足 GM 条件,$\{h_{ni}, 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 某\ n_0\}$ 为常数阵列,满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n}h_{ni}^2=c\in(0,\infty),\ \sum_{i=1}^{k}h_{ni}^2\geqslant\sum_{i=1}^{k}h_{ni}^2,\ n>k$$

则 $\left\{\sum_{1}^{n}a_{ni}e_i,n\geqslant 1\right\}$ 中可抽出子序列依概率收敛于一非 0 r.v. ***b.*** 设有一串 p 维向量($p>1$)$\{x_i=x_{i1},\cdots,x_{ip})',i\geqslant 1\}$. 记 $T_i=(x_{i2},\cdots,x_{ip})',K_n=\sum_{i=1}^{n}x_{i1}T_i,H_n=\sum_{i=1}^{n}T_iT_i'$,设 H_n 正定. 定义 $h_{ni}=x_{i1}-K'_nH_n^{-1}T_i,1\leqslant i\leqslant n,n\geqslant$ 某 n.(以使 $H_n>0$),则$\{h_{ni}\}$满足 ***a*** 中第二条件,而$\left(\sum_{i=1}^{n}h_{ni}^2\right)^{-1}$是$S_n^{-1}\equiv\left(\sum_{1}^{n}x_ix_i'\right)^{-1}$的(1,1)元. ***c.*** 线性模型$Y_i=x_i'\beta+e_i,i=1,\cdots,n$,假定$S_n^{-1}$存在对$n\geqslant$某$n_0$,则$\beta$的第一分量$\beta_1$的 LSE $\hat{\beta}_{1n}=\sum_{i=1}^{n}h_{ni}e_i\Big/\sum_{i=1}^{n}h_{ni}^2+\beta_1$. ***d.*** 证明:若 $e_1,e_2,\cdots$ 满足 GM 条件而$\hat{\beta}_{1n}$为β_1的弱相合估计,则S_n^{-1}的(1,1)元 $S_n^{-1}(1,1)\to 0$ 当 $n\to\infty$. ***e.*** 把上述结果推广到 $c'\beta$:$c'\hat{\beta}_n$ 如弱相合,则 $c'S_n^{-1}c\to 0$.

18. 举例说明:在 $e_1,e_2,\cdots$ 满足 GM 条件的情况下,当 LSE 不为弱相合时,仍可能(不是一定)存在其他的线性弱相合估计.

19. 带常数的线性回归 $Y_i=\alpha+x_i\beta+e_i,1\leqslant i\leqslant n,\beta$ 为一维,$e_1,e_2,\cdots$ 满足 GM 条件. 证明: ***a***°. 若 β 的 LSE $\hat{\beta}_n$ 弱相合,则 α 的 LSE $\hat{\alpha}_n$ 亦然. ***b.*** 举反例证明 ***a*** 之逆不真.

20. 按中心极限理论(Loeve,《Probability Theory》,1960 年,p. 317)可推出以下结果:若 $e_1,e_2,\cdots$ iid,$\{a_{ni},1\leqslant i\leqslant n,n\geqslant 1\}$为常数阵列,满足 $\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_{ni}|=0$,则 $\sum_{i=1}^{n}a_{ni}e_i\to 0$ in pr. 的一个必要条件是 $\sum_{i=1}^{n}P(|e_i|\geqslant|a_{ni}|^{-1})\to 0$ 当 $n\to\infty$. 利用这个结果证明:当不假定误差的二阶矩有限时,条件 $S_n^{-1}\to 0$ 不能保证 $\hat{\beta}_n$ 弱相合. 更确切一些,对任给 $\epsilon>0$,"误差有 $2-\epsilon$ 阶有限矩"和条件 $S_n^{-1}\to 0$ 不足以保证 $\hat{\beta}_n$ 弱相合.

21°. 按所提示的梗概,完成定理 8.5 的证明.

22. 就例 8.6,证明该例中所用的决定检验统计量的方法,与似然比方法得出同一结果.

23°. 分别用概率方法和矩阵计算两种方法,证明(8.59)式.

24°. 设模型(8.5)中,误差 e 满足 GM 条件. 证明:对任何 $a \in \mu(X)$,$a'Y$ 必是某可估计函数 $c'\beta$ 的 LSE.

25°. 设模型(8.5)中误差 $e_1,\cdots,e_n$ iid. $\sim N(0,\sigma^2)$,给定 d 个线性无关的可估函数 $l_i'\beta, i=1,\cdots,d$,(8.56)式作其同时区间估计 $l_i'\hat{\beta} \pm \sqrt{d \cdot F_{d,n-p}(\alpha)}\,s(l_i'S^{-1}l_i)^{1/2}, 1 \leqslant i \leqslant d$. 证明:其联合置信系数比 $1-\alpha$ 要大.

26°. (续上题) 上题的联合区间估计可加以调整,即把 $\sqrt{d \cdot F_{d,n-p}(\alpha)}$ 改为某常数 c,以使其联合置信系数恰为 $1-\alpha$.

27. 设(8.5)中误差 $e_1,\cdots,e_n$ iid. $\sim N(0,\sigma^2)$. $h_i'\beta, 1 \leqslant i \leqslant k$,是 k 个线性无关的可估函数,则 $H\beta(H=(h_1|\cdots|h_k)')$ 的置信椭球

$$\{a:(H\hat{\beta}-a)'(HS^{-}H')^{-1}(H\hat{\beta}-a) \leqslant ks^2F_{k,n-p}(\alpha)\}$$

有确切的置信系数 $1-\alpha$. 可以作出具有一准确置信系数 $1-\alpha$,且有指定形状(球、立方体之类)的置信区域,方法如下:找集 A,使 $p(\xi \in A)=1-\alpha$,这里 $\xi=H(\hat{\beta}-\beta)/s$,$\xi$ 的分布不依赖 β 和 σ^2,然后由$\{a:(H\hat{\beta}-a)/s \in A\}$所定义的区域就是 $H\beta$ 的具确切置信系数 $1-\alpha$ 的置信域. 若取 A 为立方体,则此置信域为立方体,等等. 证明:这样定出的置信域,其体积全超过上述椭球,除非该置信域就是上述椭球.

28°. ***a***. 有 k 个事件 $A_1,\cdots,A_k$,证明 $P(\bigcap_{i=1}^k A_i) \geqslant \sum_1^k P(A_i) - (k-1)$. 如 $k \geqslant 2$ 且存在 $i \neq j$ 使 $P(A_i \cup A_j) < 1$,则成立严格不等号. ***b***. 用这个结果,证明(8.61)的联合置信系数大于 $1-\alpha$.

29. *设在模型(8.5)中,误差 $e_1,\cdots,e_n$ iid.,$\sim N(0,\sigma^2)$. 要对

一切 $x_0\in\mathbf{R}^p$ 作 Y_0 值的预测. 证明:不论预测区间 $A(Y,x_0)\leqslant Y_0\leqslant B(Y,x_0)$ 如何定,其联合置信系数(对一切的 $x_0\in\mathbf{R}^p$)总是 0.

30°. 假定模型(8.5)的误差 e 满足 GM 条件,在 n 个试验点 $x_1,\cdots,x_n$ 处作预测. 设 β 为 p 维而 X 为列满秩,则 n 个预测方差之和为 $(n+p)\sigma^2$.

31. 设有线性模型 $Y_i=x_i'\beta+e_i,1\leqslant i\leqslant n,e_1,\cdots,e_n$ 满足 GM 条件. 从其中删除 (x_i,Y_i),用剩下的 $n-1$ 组样本作 β 的 LSE,记为 $\hat{\beta}_{(i)}$,然后用此值作在 x_i 点 Y 值的预测 $x_i'\hat{\beta}_{(i)}$. 对每个 $i=1,\cdots,n$ 都这样做,得到 n 个偏差 $Y_i-x_i'\hat{\beta}_{(i)},1\leqslant i\leqslant n$,证明其平方和

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-x_i'\hat{\beta}_{(i)})^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\delta_i}{1-h_{ii}}\right)^2$$

其中 h_{ii} 是 $XS^{-1}X'$ 的 (i,i) 元,δ_i 是在 (x_i,Y_i) 点的残差 $Y_i-x_i'\hat{\beta}$, $\hat{\beta}$ 是用全部 n 个样本所作出的 β 的 LSE.

32. (续上题)证明:若以 $\hat{\sigma}^2_{(i)}$ 记删去 (x_i,Y_i) 后所得模型作出的误差方差估计,则有

$$\hat{\sigma}^2_{(i)}=\frac{n-p-r_i^2}{n-p-1}\hat{\sigma}^2$$

此处 $\hat{\sigma}^2$ 是在原模型下对误差方差的估计,而 $r_i=\dfrac{\delta_i}{\hat{\sigma}\sqrt{1-h_{ii}}}$.

33. *a*. 考虑线性模型 $Y=X\beta+e,\mathrm{E}e=0,\mathrm{COV}(e)=\sigma^2G,G>0$ 已知. 证明:为了任一可估函数 $c'\beta$ 的 LSE $a'Y$ 与其 BLUE $b'Y$ 重合,充要条件是

$$c'Gd=0,\ 对任何\ c\in\mu(X),\ d\perp\mu(X).$$

b. 另一个充要条件是:$d\in\mu(X)\Rightarrow Gd\in\mu(X)$. ***c***. 根据上述结果,对给定 X,找出一些 G,具有所述的性质.

34°. 对第 8.3 节中两因素全面试验的例子 ***a***. 证明约束 $\sum_1^I a_i=0,\sum_1^J b_j=0\}$ 满足第 11 题中所说的"适度约束"的充要条件. ***b***.

利用 a，推出该例中各平方和表达式 SS_1、SS_2 和 SS_e.

35. 正交设计. ***a.*** 设按课文中描述的方法对有 k 个因素分别有 $n_1,\cdots n_k$ 个水平的因子试验进行正交表设计(假定有这种正交表存在)，则得到 n 个形如 $Y_t=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}\alpha_{ij}+e_t$ 的方程，此处 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{in_i}$ 是因素 i 各水平的效应，$x_{ij_0}=1$，其他 x_{ij} 为 0，若在第 t 次试验中，因素 i 出现 j_0 水平，$1\leqslant i\leqslant k$. 证明：此设计的矩阵，经过中心化后，对各群 $\{\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1n_1}\},\cdots,\{\alpha_{k1},\cdots,\alpha_{kn_k}\}$ 确是正交的. ***b.*** 若一正交表的某列的最大元为 a，则称 $a-1$ 为该列的自由度(此名称来由是：该列可安排一个 a 水平因素，共有 a 个效应，但受到约束“各效应和为 0”，故只有 $a-1$ 个自由度，即 a 个效应中只有 $a-1$ 个可以自由变化). 证明：一正交表各列自由度之和 $\leqslant n-1$，n 为该正交表的行数.

36°. 证明：***a.*** 分解式(8.70)成立(对任何样本 Y)也是设计的正交性的必要条件. ***b.*** 在协方差分析模型(8.74)中，若 β 可估，则 $X_2'PX_2$ 必为满秩，用代数方法证明之. 此处 $X=I-X_1S_1^-X_1'$.