

# Further Mathematics

S.Olivia

March 2024



# 目录

<b>1</b>	<b>多元函数的极限与连续</b>	<b>5</b>
1.1	基本概念	5
1.2	二元函数的极限	5
1.2.1	重极限与累次极限	6
1.3	二元函数的连续性	6
1.3.1	复合函数的连续性	6
<b>2</b>	<b>多元函数微分学</b>	<b>7</b>
2.1	可微性	7
2.1.1	偏导数	7
2.1.2	全微分	7
2.1.3	曲面的切平面与法线	8
2.2	复合函数微分法	9
2.2.1	复合函数的偏导数	9
2.2.2	复合函数的全微分	9
2.3	方向导数与梯度	9
2.3.1	方向导数	9
2.3.2	梯度	9
2.4	泰勒公式与极值	10
2.4.1	高阶偏导数	10
2.4.2	中值定理和泰勒公式	10
2.4.3	极值	11
<b>3</b>	<b>隐函数定理及其应用</b>	<b>13</b>
3.1	隐函数	13
3.1.1	隐函数定理	13
3.2	隐函数组	13
3.3	条件极值	14
<b>4</b>	<b>曲线积分</b>	<b>15</b>
4.1	第一型曲线积分	15
4.2	第二型曲线积分	15

<b>5 重积分</b>	<b>17</b>
5.1 二重积分	17
5.1.1 二重积分的概念	17
5.1.2 累次积分	17
5.1.3 二重积分的性质	17
5.1.4 二重积分的计算	18
5.1.5 二重积分的变量代换	18
5.2 格林公式	19
5.3 三重积分	19
5.3.1 三重积分的概念	19
5.3.2 累次积分	20
5.3.3 三重积分的计算	20
5.3.4 三重积分的变量代换	20

# Chapter 1

## 多元函数的极限与连续

### 1.1 基本概念

平面:  $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}$

平面点集:  $\{(x, y) | (x, y) \text{ 满足条件 } P\}$

邻域:  $U(P_0, \delta) = \{P | |PP_0| < \delta\}$

内点:  $P_0$  是集合  $D$  的内点, 如果存在  $\delta > 0$ , 使得  $U(P_0, \delta) \subset D$

外点:  $P_0$  是集合  $D$  的外点, 如果存在  $\delta > 0$ , 使得  $U(P_0, \delta) \cap D = \emptyset$

(边)界点:  $P_0$  是集合  $D$  的边界点, 如果对任意  $\delta > 0$ ,  $U(P_0, \delta)$  内既有  $D$  内的点, 也有  $D$  外的点

聚点: 对任意  $\delta > 0$ ,  $U(P_0, \delta)$  内有  $D$  内的点

开集: 集合  $D$  中的每一点都是  $D$  的内点, 如  $(a, b)$

闭集: 集合  $D$  中的每一个边界点都是  $D$  的点, 如  $[a, b]$

开域: 联通的开集

闭域: 联通的闭集

有界集: 集合  $D$  内的点都在某一邻域内

无界集: 集合  $D$  内的点没有界限约束

联通集: 集合  $D$  内的任意两点都可以用  $D$  内的折线连接

### 1.2 二元函数的极限

称  $f$  在  $D$  上当  $P \rightarrow P_0$  时以  $A$  为极限, 记

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$$

当  $P, P_0$  分别用坐标  $(x, y), (x_0, y_0)$  表示时, 上式也常写作

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$$

多元函数的逼近可以沿着任何一条路径进行, 但是极限只有一个, 与逼近的路径无关。如果极限不相等, 则称多元函数在该点无极限。

### 1.2.1 重极限与累次极限

在上面讨论的  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A$  中, 自变量  $(x,y)$  是以任何方式趋于  $(x_0,y_0)$  的, 这种极限也称为重极限。

而  $x$  与  $y$  依一定的先后顺序, 相继趋于  $x_0$  与  $y_0$  时  $f$  的极限, 这种极限称为累次极限。若对每一个  $y \in Y(y \neq y_0)$ , 存在极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$ , 它一般与  $y$  有关, 记作

$$\varphi(y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$$

如果进一步还存在极限

$$L = \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y)$$

则称此  $L$  为  $f(x,y)$  先对  $x(x \rightarrow x_0)$  后对  $y(y \rightarrow y_0)$  的累次极限, 记作

$$L = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$$

**定理 1.1** 如果  $f(x,y)$  的重极限  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$  与累次极限  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$  都存在, 则两者必定相等。

$\varepsilon - \delta$  定义

对于任何正数  $\varepsilon$ , 都能够找到一个正数  $\delta$ , 当  $x$  满足  $0 < |x - a| < \delta$  时, 对于满足上式的  $x$  都有  $0 < |f(x) - b| < \varepsilon$ 。

## 1.3 二元函数的连续性

和一元函数相似, 二元函数的连续性也有以下三种定义:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

1. 有定义
2. 有极限
3. 极限等于函数值

几何意义: 不断开的曲面。

### 1.3.1 复合函数的连续性

设函数  $z = f(x,y)$  在点  $(x_0,y_0)$  的某邻域内有定义, 函数  $u = g(x,y)$  在点  $(x_0,y_0)$  的某邻域内有定义, 且  $f(x,y)$  在点  $(x_0,y_0)$  连续,  $g(x,y)$  在点  $(x_0,y_0)$  连续, 那么复合函数  $u = g(f(x,y))$  在点  $(x_0,y_0)$  连续。

“连续函数的连续函数是连续函数”。

## Chapter 2

# 多元函数微分学

## 2.1 可微性

### 2.1.1 偏导数

**定义 2.1** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的某邻域内有定义, 当  $x$  在  $x_0$  处有增量  $\Delta x$ ,  $y$  在  $y_0$  处有增量  $\Delta y$  时, 相应的函数有增量  $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ , 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限为函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处对  $x$  的偏导数, 记作

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \quad \text{或} \quad f'_x(x_0, y_0) \quad \text{或} \quad z'_x$$

同理可得函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处对  $y$  的偏导数。

怎么求:

- 对  $x$  的偏导数: 将  $y$  看作常数, 对  $x$  求导;
- 对  $y$  的偏导数: 将  $x$  看作常数, 对  $y$  求导。

关于连续性

1. 对于一元函数, 可导必定连续
2. 对于多元函数, 偏导数存在不一定连续

### 2.1.2 全微分

**定义 2.2** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的某邻域内有定义, 且在该点有偏导数, 则称函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处可微分, 如果存在常数  $A$  和  $B$ , 使得全增量

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

其中  $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ , 则称  $A\Delta x + B\Delta y$  为函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0 = (x_0, y_0)$  处的全微分, 记作

$$dz|_{P_0} = df(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y$$

当  $\Delta x$  和  $\Delta y$  趋于零时, 全微分  $dz$  可作为全增量  $\Delta z$  的近似值, 于是有近似公式

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

### 可微性条件

**定理 2.1** 若二元函数  $f$  在其定义域内一点  $(x_0, y_0)$  处可微, 则  $f$  在该点关于每个自变量的偏导数都存在。此时, 全微分可写成

$$df(x, y) = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

**定理 2.2 (可微的充分条件)** 若函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的偏导数  $f_x(x_0, y_0)$  和  $f_y(x_0, y_0)$  存在且连续, 则  $f$  在该点可微。

另外, 连续是可微的一个必要条件。

### 2.1.3 曲面的切平面与法线

**定义 2.3** 设曲面  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处可微, 且  $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 则曲面在该点的切平面方程为

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

同理, 有曲面  $F(x, y, z) = 0$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处可微, 则曲面在该点的切平面方程为

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

**定义 2.4** 设曲面  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处可微, 且  $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 则曲面在该点的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

同理, 有曲面  $F(x, y, z) = 0$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处可微, 则曲面在该点的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

### 法向量

设曲面  $f(x, y, z) = 0$  在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  处可微, 且  $f_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , 则曲面在该点的法向量为

$$\mathbf{n} = (f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0))$$

**定义 2.5 (正交)** 若两个向量  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  满足  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ , 则称向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  正交。

**定义 2.6 (平行)** 设曲线或曲面  $C_1$  和  $C_2$  在某一点  $P$  处的切向量分别为  $\mathbf{v}_1$  和  $\mathbf{v}_2$ , 如果  $\mathbf{v}_1$  与  $\mathbf{v}_2$  正交, 则称曲线或曲面  $C_1$  和  $C_2$  在点  $P$  处平行。



## 2.2 复合函数微分法

### 2.2.1 复合函数的偏导数

**定理 2.3** 设函数  $z = f(u, v)$  在点  $(u, v)$  处可微, 函数  $u = u(x, y)$  和  $v = v(x, y)$  分别在点  $(x, y)$  处可微, 则复合函数  $z = f(u(x, y), v(x, y))$  在点  $(x, y)$  处可微, 且有

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}$$

特殊情况: 有函数  $z = f(u, x, y)$ ,  $u = u(x, y)$ , 则

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

这里, 把  $f$  看作  $u, x, y$  三个变量的函数,  $z$  看作  $x, y$  两个变量的函数。

### 2.2.2 复合函数的全微分

**定理 2.4** 设函数  $z = f(u, v)$  在点  $(u, v)$  处可微, 函数  $u = u(x, y)$  和  $v = v(x, y)$  分别在点  $(x, y)$  处可微, 则复合函数  $z = f(u(x, y), v(x, y))$  在点  $(x, y)$  处可微, 且有

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

## 2.3 方向导数与梯度

### 2.3.1 方向导数

**定义 2.7** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的某邻域内有定义, 点  $P_0(x_0, y_0)$  处沿方向  $\boldsymbol{l} = (\cos \alpha, \cos \beta)$  的方向导数为

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \rho \cos \alpha, y_0 + \rho \cos \beta) - f(x_0, y_0)}{\rho}$$

其中  $\rho = \sqrt{(\cos \alpha)^2 + (\cos \beta)^2}$ 。

就是多元函数沿着某个特定方向的变化率。

**定理 2.5** 函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处可微, 则函数在该点沿任一方向  $\boldsymbol{l} = (\cos \alpha, \cos \beta)$  的方向导数存在, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial l} = f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta \quad *$$

### 2.3.2 梯度

**定义 2.8** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处可微, 定义函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的梯度为

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad *$$

就是多元函数变化率取值最大的方向。

**定理 2.6** 函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处可微, 则函数在该点的梯度  $\nabla f(x_0, y_0)$  就是函数在该点沿各个方向的方向导数的最大值, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot l$$

## 2.4 泰勒公式与极值

### 2.4.1 高阶偏导数

二元函数的二阶偏导数有如下四种形式:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

另外, 称  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  和  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  这种既有关于  $x$ , 又有关于  $y$  的高阶偏导数为混合偏导数。

**定理 2.7** 若函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的二阶偏导数  $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$  都存在且连续, 则

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

### 复合函数的高阶偏导数

设

$$z = f(x, y), x = \varphi(s, t), y = \phi(s, t)$$

若函数  $f, \varphi, \phi$  都具有连续的二阶偏导数, 则复合函数  $z = f(\varphi(s, t), \phi(s, t))$  对  $s, t$  同样存在二阶连续偏导数。

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \end{aligned}$$

显然  $\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}$  仍然是  $s, t$  的复合函数, 其中  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  是  $x, y$  的函数,  $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial t}$  是  $s, t$  的函数。继续求... (求不出来了)

### 2.4.2 中值定理和泰勒公式

**定理 2.8 (拉格朗日中值定理)** 设函数  $z = f(x, y)$  在凸开域  $D \in R^2$  连续, 在  $D$  的所有内点都可微, 则对于  $D$  内任意两点  $P(a, b), Q(a + h, b + k) \in D, \forall \theta (0 < \theta < 1)$ , 使得

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = f_x(a + \theta h, b + \theta k)h + f_y(a + \theta h, b + \theta k)k$$

**定理 2.9 (泰勒公式)** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的某邻域内具有  $n + 1$  阶连续偏导数, 则对于任意一点  $(x_0 + h, y_0 + k), \forall \theta \in (0, 1)$ , 使得

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0, y_0) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!}(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0, y_0) + R_n \end{aligned}$$

其中  $R_n$  为拉格朗日余项, 即

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

前面的中值定理是泰勒公式的特殊情况, 即  $n = 0$ 。

若只要求  $R_n = o(\rho^n)$ , 此时  $n$  阶泰勒公式为

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!}(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^p f(x_0, y_0) + o(\rho^n)$$

实际优化问题的目标函数往往比较复杂。为了使问题简化, 通常将目标函数在某点附近展开为泰勒(Taylor)多项式来逼近原函数。

一元函数在点  $x_k$  处的泰勒展开式为:

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x - x_k)^2 + o^n$$

二元函数在点  $(x_k, y_k)$  处的泰勒展开式为:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_k, y_k) + (x - x_k)f_x(x_k, y_k) + (y - y_k)f_y(x_k, y_k) \\ &\quad + \frac{1}{2!}[(x - x_k)^2 f_{xx}(x_k, y_k) + 2(x - x_k)(y - y_k)f_{xy}(x_k, y_k) + (y - y_k)^2 f_{yy}(x_k, y_k)] + o^n \end{aligned}$$

### 2.4.3 极值

**定义 2.9** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的某邻域内有定义, 如果存在这个邻域内的任意一点  $(x, y)$ , 使得  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ , 则称  $f(x_0, y_0)$  是函数  $z = f(x, y)$  的一个极大值点; 如果存在这个邻域内的任意一点  $(x, y)$ , 使得  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ , 则称  $f(x_0, y_0)$  是函数  $z = f(x, y)$  的一个极小值点。

**定理 2.10 (极值的必要条件)** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处有极值, 且在该点处有偏导数, 则有

$$f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$$

**定义 2.10 (稳定点)**, 即驻点若函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处有偏导数, 且在该点处有偏导数  $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$ , 则称点  $(x_0, y_0)$  为函数  $z = f(x, y)$  的一个稳定点。

- 稳定点不一定是极值点;
- 极值点一定是稳定点。

**定理 2.11 (极值的充分条件)** 判断驻点是否等于极值点

设函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  处有连续偏导数, 且在该点处有偏导数  $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$ , 则有

- 若  $f_{xx}(P_0)f_{yy}(P_0) - f_{xy}^2(P_0) > 0$ , 则  $P_0$  是函数  $z = f(x, y)$  的一个极值点:
  - 若  $f_{xx}(P_0) > 0$ , 则  $P_0$  是函数  $z = f(x, y)$  的一个极小值点;
  - 若  $f_{xx}(P_0) < 0$ , 则  $P_0$  是函数  $z = f(x, y)$  的一个极大值点。
- 若  $f_{xx}(P_0)f_{yy}(P_0) - f_{xy}^2(P_0) < 0$ , 则  $P_0$  不是函数  $z = f(x, y)$  的一个极值点;
- 若  $f_{xx}(P_0)f_{yy}(P_0) - f_{xy}^2(P_0) = 0$ , 则无法判断  $P_0$  是否为函数  $z = f(x, y)$  的一个极值点。

## Chapter 3

# 隐函数定理及其应用

### 3.1 隐函数

**定义 3.1** 设方程  $F(x, y) = 0$  在点  $(x_0, y_0)$  的某一邻域内恒有解  $y = f(x)$ , 且  $f(x_0) = y_0$ , 若  $f(x)$  在点  $x_0$  处可微, 则称  $y = f(x)$  为方程  $F(x, y) = 0$  在点  $(x_0, y_0)$  处的隐函数。

#### 3.1.1 隐函数定理

**定理 3.1 (隐函数存在唯一性定理)** 设函数  $F(x, y)$  满足下列条件

1.  $F(x_0, y_0) = 0$ ;
2.  $F(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的某一邻域内有连续偏导数  $F_y(x, y)$ ;
3.  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ 。

则在点  $(x_0, y_0)$  的某一邻域内, 方程  $F(x, y) = 0$  有且仅有一个连续可微的隐函数  $y = f(x)$ , 满足  $F(x, f(x)) = 0$ , 且  $y_0 = y(x_0)$ , 并有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} \quad (3.1)$$

**定理 3.2 (隐函数可微性定理)** 设函数  $F(x, y)$  满足隐函数存在唯一性定理的条件, 在  $D$  内还存在连续的  $F_x(x, y)$  则由方程  $F(x, y) = 0$  所确定的隐函数  $y = f(x)$  在  $I$  内有连续的导函数, 且

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad (3.2)$$

### 3.2 隐函数组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

**定理 3.3 (雅可比行列式)** 设函数  $F(x, y, u, v)$  和  $G(x, y, u, v)$  在点  $(x_0, y_0, u_0, v_0)$  的某一邻域内有连续偏导数  $F_x, F_y, F_u, F_v, G_x, G_y, G_u, G_v$ , 且

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3.4)$$

则在点  $(x_0, y_0, u_0, v_0)$  的某一邻域内, 方程组  $F(x, y, u, v) = 0$  和  $G(x, y, u, v) = 0$  有且仅有一个连续可微的隐函数组  $u = f(x, y)$  和  $v = g(x, y)$ , 满足  $F(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0$  和  $G(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0$ , 且  $u_0 = u(x_0, y_0)$  和  $v_0 = v(x_0, y_0)$ , 并有

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} = - \frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)} = - \frac{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} = - \frac{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)} = - \frac{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}} \end{array} \right. \quad (3.5)$$

### 3.3 条件极值

**定理 3.4 (拉格朗日乘数法)** 设函数  $z = f(x, y)$  在条件  $\varphi(x, y) = 0$  下取得极值, 则可以构造拉格朗日函数

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \phi(x, y) \quad (3.6)$$

其中  $\lambda$  为拉格朗日乘子。则  $z = f(x, y)$  在条件  $\varphi(x, y) = 0$  下取得极值的必要条件是

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

即

$$\begin{cases} f'_x + \lambda \varphi'_x = 0 \\ f'_y + \lambda \varphi'_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

# Chapter 4

## 曲线积分

### 4.1 第一型曲线积分

第一型曲线积分是对弧长的积分，它是曲线积分的最简单形式。

计算步骤：

1. 画出所积曲线的示意图，并转化为定积分的形式： $\int_L f(x, y) ds$

2. 确定积分区间  $[x_1, x_2]$  或  $[y_1, y_2]$  或  $[t_1, t_2]$

3. 计算  $ds$ ：

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

4. 将  $ds$  代入积分式中，计算积分

### 4.2 第二型曲线积分

第二型曲线积分是对向量场的积分，它是曲线积分的一般形式。

计算步骤：

1. 画出所积曲线的示意图，并转化为定积分的形式：

$$\int_L P(x, y) dx + \int_L Q(x, y) dy = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_L \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r}$$

2. 确定积分区间  $[x_1, x_2]$  或  $[y_1, y_2]$  或  $[t_1, t_2]$ （注意有方向）

3. 计算  $dx$  和  $dy$ ：

$$\begin{cases} dx = \frac{dx}{dt} dt \\ dy = \frac{dy}{dt} dt \end{cases}$$

4. 将  $dx$  和  $dy$  代入积分式中，计算积分

性质：

1. 线积分与路径无关:

$$\int_L \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} = \int_{L_1} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} = \int_{L_2} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r}$$

2. 线积分与参数化无关

$$\int_L (\alpha \vec{F}_1(x, y) + \beta \vec{F}_2(x, y)) \cdot d\vec{r} = \alpha \int_L \vec{F}_1(x, y) \cdot d\vec{r} + \beta \int_L \vec{F}_2(x, y) \cdot d\vec{r}$$

3. 线积分与方向有关

$$-\int_L \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} = \int_{-L} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r}$$



# Chapter 5

## 重积分

### 5.1 二重积分

#### 5.1.1 二重积分的概念

**定义 5.1** 设  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上有界, 将  $D$  划分为  $n$  个小区域  $D_{ij}$ , 在每个小区域  $D_{ij}$  取一点  $(\xi_{ij}, \eta_{ij})$ , 作积分和

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \Delta \delta_{ij}$$

如果当小区域的直径趋于零时, 这个积分和的极限存在, 且与划分方法和点的选取无关, 那么称此极限为  $f(x, y)$  在区域  $D$  上的二重积分, 记作

$$\iint_D f(x, y) d\delta$$

#### 5.1.2 累次积分

**定理 5.1** 设  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上有界, 且  $D$  的边界为  $a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\delta = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

#### 5.1.3 二重积分的性质

1. 线性性质: 设  $f(x, y)$  和  $g(x, y)$  在区域  $D$  上有界,  $k_1, k_2$  为常数, 则

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) d\delta = \alpha \iint_D f(x, y) d\delta + \beta \iint_D g(x, y) d\delta$$

2. 区域可加性: 设  $D$  可表示为两个无交区域  $D_1, D_2$  的并,  $f(x, y)$  在  $D$  上有界, 则

$$\iint_D f(x, y) d\delta = \iint_{D_1} f(x, y) d\delta + \iint_{D_2} f(x, y) d\delta$$

3. 保号性: 设  $f(x, y)$  在区域  $D$  上有界, 且  $f(x, y) \geq 0$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\delta = 0 \iff f(x, y) = 0$$

$$f(x, y) \equiv 1, \iint_D 1 \, d\delta = \delta$$

4. 绝对值不等式: 设  $f(x, y)$  在区域  $D$  上有界, 则

$$\left| \iint_D f(x, y) \, d\delta \right| \leq \iint_D |f(x, y)| \, d\delta$$

$$f(x, y) \leq g(x, y) \Rightarrow \iint_D f(x, y) \, d\delta \leq \iint_D g(x, y) \, d\delta$$

5. 设  $M, m$  分别为  $f(x, y)$  在区域  $D$  上的最大值和最小值, 则

$$m\delta \leq \iint_D f(x, y) \, d\delta \leq M\delta$$

### 5.1.4 二重积分的计算

1. 若积分区域  $D$  为矩形区域, 且  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 则

$$\iint_D f(x, y) \, d\delta = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx$$

若  $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, d\delta &= \int_a^b dx \int_c^d f_1(x)f_2(y) \, dy = \int_a^b f_1(x) \, dx \int_c^d f_2(y) \, dy \\ &= \left( \int_a^b f_1(x) \, dx \right) \left( \int_c^d f_2(y) \, dy \right) \end{aligned}$$

2. 若积分区域  $D$  为三角形区域, 且  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 则

$$\iint_D f(x, y) \, d\delta = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx$$

### 5.1.5 二重积分的变量代换

1. 设  $x = x(u, v), y = y(u, v)$  为区域  $D$  到区域  $D'$  的一一映射, 且满足

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

为  $D$  到  $D'$  的可逆变换, 且  $x(u, v), y(u, v)$  具有一阶连续偏导数, 则

$$\iint_D f(x, y) \, d\delta = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J| \, d\delta'$$

其中  $J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right|$

2. 设  $x = x(u), y = y(v)$  为区域  $D$  到区域  $D'$  的一一映射, 且满足

$$\begin{cases} x = x(u) \\ y = y(v) \end{cases}$$

为  $D$  到  $D'$  的可逆变换, 且  $x(u), y(v)$  具有一阶连续偏导数, 则

$$\iint_D f(x, y) d\delta = \iint_{D'} f(x(u), y(v)) |J| d\delta'$$

其中  $J = \left| \frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} \right|$ ,  $d\delta' = \left| \frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} \right| du dv$

### 极坐标变换

设  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ , 则

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) d\delta &= \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) |J| d\delta' \\ &= \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \end{aligned}$$

## 5.2 格林公式

**定理 5.2** 设  $D$  是平面区域,  $P(x, y), Q(x, y)$  在  $D$  上有连续偏导数, 则

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy$$

这里  $L$  是区域  $D$  的边界, 按照逆时针方向取正向。

[口诀] 交换相减反求偏导, 交叉相乘积分加。

面积公式:

$$\iint_D 1 d\delta = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$$

积分与路径无关:

$$\oint_L P dx + Q dy = 0$$

也就是说

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

## 5.3 三重积分

### 5.3.1 三重积分的概念

**定义 5.2** 设  $f(x, y, z)$  在有界闭区域  $V$  上有界, 将  $V$  划分为  $n$  个小体积  $V_i$ , 在每个小体积  $V_i$  取一点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ , 作积分和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$$

如果当小体积的直径趋于零时, 这个积分和的极限存在, 且与划分方法和点的选取无关, 那么称此极限为  $f(x, y, z)$  在区域  $V$  上的三重积分, 记作

$$\iiint_V f(x, y, z) dV$$

### 5.3.2 累次积分

**定理 5.3** 设  $f(x, y, z)$  在有界闭区域  $V$  上有界, 且  $V$  的边界为  $a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)$ , 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left( \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

### 5.3.3 三重积分的计算

1. 若积分区域  $V$  为长方体区域, 若函数  $f(x, y, z)$  在长方体

$$V = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$$

上的三重积分存在, 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_a^b \left( \int_c^d \left( \int_e^f f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

2. 若积分区域  $V$  为棱柱区域, 且  $f(x, y, z)$  在  $V$  上连续, 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left( \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

### 5.3.4 三重积分的变量代换

1. 设  $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$  为区域  $V$  到区域  $V'$  的一一映射, 且满足

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

为  $V$  到  $V'$  的可逆变换, 且  $x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)$  具有一阶连续偏导数, 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| dV'$$

其中

$$J = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

2. 设  $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$  为区域  $V$  到区域  $V'$  的一一映射, 且满足

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

为  $V$  到  $V'$  的可逆变换, 且  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  具有一阶连续偏导数, 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iint_{V'} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |J| dV'$$

其中  $J = \left| \frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} \frac{dz}{dv} \right|, dV' = \left| \frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} \frac{dz}{dv} \right| du dv$

## 柱坐标变换

设  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$ , 其中  $0 \leq r \leq +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty \leq z \leq +\infty$ ,

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) \, dV &= \iiint_{V'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) |J| \, dV' \\ &= \iiint_{V'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r \, dr \, d\theta \, dz \end{aligned}$$

## 球坐标变换

设  $x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \varphi$ , 其中  $0 \leq r \leq +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi$ ,

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) \, dV &= \iiint_{V'} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) |J| \, dV' \\ &= \iiint_{V'} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta \end{aligned}$$