Further Mathematics

S.Olivia

March 2024

目录

Chapter 1

多元函数的极限与连续

1.1　基本概念

平面：$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y)|x, y \in \mathbf{R}\}$

平面点集：$\{(x, y)|(x, y)$满足条件$P\}$

邻域：$U(P_0, \delta) = \{P||PP_0| < \delta\}$

内点：P_0是集合D的内点，如果存在$\delta > 0$，使得$U(P_0, \delta) \subset D$

外点：P_0是集合D的外点，如果存在$\delta > 0$，使得$U(P_0, \delta) \cap D = \emptyset$

（边）界点：P_0是集合D的边界点，如果对任意$\delta > 0$，$U(P_0, \delta)$内既有D内的点，也有D外的点

聚点：对任意$\delta > 0$，$U(P_0, \delta)$内有D内的点

开集：集合D中的每一点都是D的内点，如(a, b)

闭集：集合D中的每一个边界点都是D的点，如$[a, b]$

开域：联通的开集

闭域：联通的闭集

有界集：集合D内的点都在某一邻域内

无界集：集合D内的点没有界限约束

联通集：集合D内的任意两点都可以用D内的折线连接

1.2　二元函数的极限

称f在D上当$P \to P_0$时以A为极限, 记

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A$$

当P, P_0分别用坐标$(x, y), (x_0, y_0)$表示时, 上式也常写作

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = A$$

多元函数的逼近可以沿着任何一条路径进行, 但是极限只有一个, 与逼近的路径无关。如果极限不相等, 则称多元函数在该点无极限。

1.2.1 重极限与累次极限

在上面讨论的$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$中, 自变量 (x,y)是以任何方式趋于 (x_0,y_0)的, 这种极限也称为重极限。

而x与y依一定的先后顺序, 相继趋于 x_0 与 y_0 时 f 的极限, 这种极限称为累次极限。若对每一个$y \in Y(y \not y_0)$，存在极限$\lim_{x\to x_0} f(x,y)$，它一般与y有关，记作

$$\varphi(y) = \lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

如果进一步还存在极限

$$L = \lim_{y\to y_0} \varphi(y)$$

则称此L为$f(x,y)$先对$x(x\to x_0)$后对$y(y\to y_0)$的累次极限，记作

$$L = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

定理 1.1 如果$f(x,y)$的重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$与累次极限$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$都存在，则两者必定相等。

$\varepsilon-\delta$**定义**

对于任何正数ε，都能够找到一个正数δ，当x满足$0 <| x-a |< \delta$时，对于满足上式的x都有
$0 <| f(x)-b |< \varepsilon$。

1.3 二元函数的连续性

和一元函数相似，二元函数的连续性也有以下三种定义：

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

1. 有定义
2. 有极限
3. 极限等于函数值

几何意义：不断开的曲面。

1.3.1 复合函数的连续性

设函数$z = f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有定义，函数$u = g(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有定义，且$f(x,y)$在点(x_0,y_0)连续，$g(x,y)$在点(x_0,y_0)连续，那么复合函数$u = g(f(x,y))$在点(x_0,y_0)连续。

“连续函数的连续函数是连续函数”。

Chapter 2

多元函数微分学

2.1 可微性

2.1.1 偏导数

定义 2.1 设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有定义，当x在x_0处有增量Δx，y在y_0处有增量Δy时，相应的函数有增量$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对x的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\quad\text{或}\quad f'_x(x_0,y_0)\quad\text{或}\quad z'_x$$

同理可得函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对y的偏导数。

怎么求：

- 对x的偏导数：将y看作常数，对x求导；
- 对y的偏导数：将x看作常数，对y求导。

关于连续性

1. 对于一元函数，可导必定连续
2. 对于多元函数，偏导数存在不一定连续

2.1.2 全微分

定义 2.2 设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有定义，且在该点有偏导数，则称函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微分，如果存在常数A和B，使得全增量

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

其中$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称$A\Delta x+B\Delta y$为函数$z=f(x,y)$在点$P_0=(x_0,y_0)$处的全微分，记作

$$\mathrm{d}z|_{P_0}=df(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y$$

当Δx和Δy趋于零时，全微分$\mathrm{d}z$可作为全增量Δz的近似值，于是有近似公式

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)$$

可微性条件

定理 2.1 若二元函数 f 在其定义域内一点 (x_0,y_0) 处可微，则 f 在该点关于每个自变量的偏导数都存在。此时，全微分可写成

$$\mathrm{d}f(x,y)=f_x(x,y)\mathrm{d}x+f_y(x,y)\mathrm{d}y$$

定理 2.2 (可微的充分条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 存在且连续，则 f 在该点可微。

另外，连续是可微的一个必要条件。

2.1.3 曲面的切平面与法线

定义 2.3 设曲面 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处可微，且 $f_x(x_0,y_0)\neq 0$，则曲面在该点的切平面方程为

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

同理，有曲面 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处可微，则曲面在该店的切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

定义 2.4 设曲面 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处可微，且 $f_x(x_0,y_0)\neq 0$，则曲面在该点的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

同理，有曲面 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处可微，则曲面在该店的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

法向量

设曲面 $f(x,y,z)=0$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微，且 $f_x(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则曲面在该点的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(f_x(x_0,y_0,z_0),f_y(x_0,y_0,z_0),f_z(x_0,y_0,z_0))$$

定义 2.5 (正交) 若两个向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 正交。

定义 2.6 (平行) 设曲线或曲面 C_1 和 C_2 在某一点 P 处的切向量分别为 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$，如果 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 正交，则称曲线或曲面 C_1 和 C_2 在点 P 处平行。

2.2 复合函数微分法

2.2.1 复合函数的偏导数

定理 2.3 设函数 $z=f(u,v)$ 在点 (u,v) 处可微，函数 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 分别在点 (x,y) 处可微，则复合函数 $z=f(u(x,y),v(x,y))$ 在点 (x,y) 处可微，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

特殊情况：有函数 $z=f(u,x,y),u=u(x,y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}$$

这里，把 f 看作 u,x,y 三个变量的函数，z 看作 x,y 两个变量的函数。

2.2.2 复合函数的全微分

定理 2.4 设函数 $z=f(u,v)$ 在点 (u,v) 处可微，函数 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 分别在点 (x,y) 处可微，则复合函数 $z=f(u(x,y),v(x,y))$ 在点 (x,y) 处可微，且有

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$$

2.3 方向导数与梯度

2.3.1 方向导数

定义 2.7 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，点 $P_0(x_0,y_0)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 的方向导数为

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{\rho}$$

其中 $\rho=\sqrt{(\cos\alpha)^2+(\cos\beta)^2}$。

就是多元函数沿着某个特定方向的变化率。

定理 2.5 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则函数在该点沿任一方向 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 的方向导数存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial l}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta \quad \star$$

2.3.2 梯度

定义 2.8 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，定义函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的梯度为

$$\nabla f(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \star$$

就是多元函数变化率取值最大的方向。

定理 2.6 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则函数在该点的梯度 $\nabla f(x_0,y_0)$ 就是函数在该点沿各个方向的方向导数的最大值，且有

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\nabla f(x_0,y_0)\cdot \boldsymbol{l}$$

2.4 泰勒公式与极值

2.4.1 高阶偏导数

二元函数的二阶偏导数有如下四种形式:

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$f_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

另外，称 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 这种既有关于 x, 又有关于 y 的高阶偏导数为混合偏导数。

定理 2.7 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的二阶偏导数 $f_{xx},f_{yy},f_{xy},f_{yx}$ 都存在且连续，则

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$$

复合函数的高阶偏导数

设

$$z=f(x,y),x=\varphi(s,t),y=\phi(s,t)$$

若函数 f,φ,ϕ 都具有连续的二阶偏导数，则复合函数 $z=f(\varphi(s,t),\phi(s,t))$ 对 s,t 同样存在二阶连续偏导数。

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$
$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

显然 $\frac{\partial z}{\partial s},\frac{\partial z}{\partial t}$ 仍然是 s,t 的复合函数，其中 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 是 x,y 的函数，$\frac{\partial x}{\partial s},\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial s},\frac{\partial y}{\partial t}$ 是 s,t 的函数。继续求...（求不出来了）

2.4.2 中值定理和泰勒公式

定理 2.8 (拉格朗日中值定理) 设函数 $z=f(x,y)$ 在凸开域 $D\in R^2$ 连续，在 D 的所有内点都可微，则对于 D 内任意两点 $P(a,b),Q(a+h,b+k)\in D,\forall\theta(0<\theta<1)$，使得

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=f_x(a+\theta h,b+\theta k)h+f_y(a+\theta h,b+\theta k)k$$

定理 2.9 (泰勒公式) 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内具有 $n+1$ 阶连续偏导数，则对于任意一点 $(x_0+h,y_0+k),\forall\theta\in(0,1)$，使得

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2f(x_0,y_0)+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^nf(x_0,y_0)+R_n$$

其中 R_n 为拉格朗日余项，即

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$$

前面的中值定理是泰勒公式的特殊情况，即 $n=0$。

若只要求 $R_n=o(\rho^n)$，此时 n 阶泰勒公式为

$$f(x_0+h,y_0+k)=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^pf(x_0,y_0)+o(\rho^n)$$

实际优化问题的目标函数往往比较复杂。为了使问题简化，通常将目标函数在某点附近展开为泰勒(Taylor)多项式来逼近原函数。

一元函数在点 x_k 处的泰勒展开式为：

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{1}{2}f''(x_k)(x-x_k)^2+o^n)$$

二元函数在点(x_k,x_y)处的泰勒展开式为：

$$f(x,y)=f(x_k,y_k)+(x-x_k)f_x(x_k,y_k)+(y-y_k)f_y(x_k,y_k)$$
$$+\frac{1}{2!}[(x-x_k)^2f_{xx}(x_k,y_k)+2(x-x_k)(y-y_k)f_{xy}(x_k,y_k)+(y-y_k)^2f_{yy}(x_k,y_k)]+o^n$$

2.4.3 极值

定义 2.9 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，如果存在这个邻域内的任意一点 (x,y)，使得 $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$，则称 $f(x_0,y_0)$ 是函数 $z=f(x,y)$ 的一个极大值点；如果存在这个邻域内的任意一点 (x,y)，使得 $f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$，则称 $f(x_0,y_0)$ 是函数 $z=f(x,y)$ 的一个极小值点。

定理 2.10 (极值的必要条件) 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有极值，且在该点处有偏导数，则有

$$f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0$$

定义 2.10 (稳定点) ，即驻点若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有偏导数，且在该点处有偏导数 $f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0$，则称点 (x_0,y_0) 为函数 $z=f(x,y)$ 的一个稳定点。

- 稳定点不一定是极值点；
- 极值点一定是稳定点。

定理 2.11 (极值的充分条件) 判断驻点是否等于极值点

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处有连续偏导数，且在该点处有偏导数 $f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0$，则有

- 若 $f_{xx}(P_0)f_{yy}(P_0) - f_{xy}^2(P_0) > 0$，则 P_0 是函数 $z = f(x, y)$ 的一个极值点：
  - 若 $f_{xx}(P_0) > 0$，则 P_0 是函数 $z = f(x, y)$ 的一个极小值点；
  - 若 $f_{xx}(P_0) < 0$，则 P_0 是函数 $z = f(x, y)$ 的一个极大值点。
- 若 $f_{xx}(P_0)f_{yy}(P_0) - f_{xy}^2(P_0) < 0$，则 P_0 不是函数 $z = f(x, y)$ 的一个极值点；
- 若 $f_{xx}(P_0)f_{yy}(P_0) - f_{xy}^2(P_0) = 0$，则无法判断$P_0$ 是否为函数 $z = f(x, y)$ 的一个极值点。

Chapter 3

隐函数定理及其应用

3.1 隐函数

定义 3.1 设方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内恒有解 $y=f(x)$，且 $f(x_0)=y_0$，若 $f(x)$ 在点 x_0 处可微，则称 $y=f(x)$ 为方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 处的隐函数。

3.1.1 隐函数定理

定理 3.1 (隐函数存在唯一性定理) 设函数 $F(x,y)$ 满足下列条件

1. $F(x_0,y_0)=0$;
2. $F(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有连续偏导数 $F_y(x,y)$;
3. $F_y(x_0,y_0)\neq 0$。

则在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内，方程 $F(x,y)=0$ 有且仅有一个连续可微的隐函数 $y=f(x)$，满足 $F(x,f(x))=0$，且 $y_0=y(x_0)$，并有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x'}{F_y'} \tag{3.1}$$

定理 3.2 (隐函数可微性定理) 设函数 $F(x,y)$ 满足隐函数存在唯一性定理的条件，在 D 内还存在连续的 $F_x(x,y)$ 则由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 在 I 内有连续的导函数，且

$$f'(x)=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)} \tag{3.2}$$

3.2 隐函数组

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases} \tag{3.3}$$

定理 3.3 (雅可比行列式) 设函数 $F(x,y,u,v)$ 和 $G(x,y,u,v)$ 在点 (x_0,y_0,u_0,v_0) 的某一邻域内有连续偏导数 $F_x,F_y,F_u,F_v,G_x,G_y,G_u,G_v$，且

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}\neq 0 \tag{3.4}$$

则在点 (x_0,y_0,u_0,v_0) 的某一邻域内，方程组 $F(x,y,u,v)=0$ 和 $G(x,y,u,v)=0$ 有且仅有一个连续可微的隐函数组 $u=f(x,y)$ 和 $v=g(x,y)$，满足 $F(x,y,f(x,y),g(x,y))=0$ 和 $G(x,y,f(x,y),g(x,y))=0$，且 $u_0=u(x_0,y_0)$ 和 $v_0=v(x_0,y_0)$，并有

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}\end{cases} \tag{3.5}$$

3.3 条件极值

定理 3.4 (拉格朗日乘数法) 设函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下取得极值，则可以构造拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\phi(x,y) \tag{3.6}$$

其中 λ 为拉格朗日乘子。则 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下取得极值的必要条件是

$$\begin{cases}L'_x=0\\ L'_y=0\\ \varphi(x,y)=0\end{cases} \tag{3.7}$$

即

$$\begin{cases}f'_x+\lambda\varphi'_x=0\\ f'_y+\lambda\varphi'_y=0\\ \varphi(x,y)=0\end{cases} \tag{3.8}$$

Chapter 4

曲线积分

4.1 第一型曲线积分

第一型曲线积分是对弧长的积分，它是曲线积分的最简单形式。
计算步骤：

1. 画出所积曲线的示意图，并转化为定积分的形式：$\int_L f(x, y)\,\mathrm{d}s$
2. 确定积分区间 $[x_1, x_2]$ 或 $[y_1, y_2]$ 或 $[t_1, t_2]$
3. 计算 $\mathrm{d}s$ ：
$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1 + (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y})^2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2}\,\mathrm{d}t$$
4. 将 $\mathrm{d}s$ 代入积分式中，计算积分

4.2 第二型曲线积分

第二型曲线积分是对向量场的积分，它是曲线积分的一般形式。
计算步骤：

1. 画出所积曲线的示意图，并转化为定积分的形式：
$$\int_L P(x, y)\,\mathrm{d}x + \int LQ(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_L P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_L \vec{F}(x, y) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$
2. 确定积分区间 $[x_1, x_2]$ 或 $[y_1, y_2]$ 或 $[t_1, t_2]$（注意有方向）
3. 计算 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ ：
$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \end{cases}$$
4. 将 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 代入积分式中，计算积分

性质：

1. 线积分与路径无关：

$$\int_L \vec{F}(x,y)\cdot\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{L_1} \vec{F}(x,y)\cdot\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{L_2} \vec{F}(x,y)\cdot\,\mathrm{d}\vec{r}$$

2. 线积分与参数化无关

$$\int_L (\alpha\vec{F}_1(x,y) + \beta\vec{F}_2(x,y))\cdot\,\mathrm{d}\vec{r} = \alpha\int_L \vec{F}_1(x,y)\cdot\,\mathrm{d}\vec{r} + \beta\int_L \vec{F}_2(x,y)\cdot\,\mathrm{d}\vec{r}$$

3. 线积分与方向有关

$$-\int_L \vec{F}(x,y)\cdot\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{-L} \vec{F}(x,y)\cdot\,\mathrm{d}\vec{r}$$

Chapter 5

重积分

5.1 二重积分

5.1.1 二重积分的概念

定义 5.1 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有界，将 D 划分为 n 个小区域 D_{ij}，在每个小区域 D_{ij} 取一点 (ξ_{ij},η_{ij})，作积分和

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta\delta_{ij}$$

如果当小区域的直径趋于零时，这个积分和的极限存在，且与划分方法和点的选取无关，那么称此极限为 $f(x,y)$ 在区域 D 上的二重积分，记作

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\delta$$

5.1.2 累次积分

定理 5.1 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有界，且 D 的边界为 $a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\delta = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

5.1.3 二重积分的性质

1. 线性性质：设 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 在区域 D 上有界，k_1,k_2 为常数，则

$$\iint_D (\alpha f(x,y)+\beta g(x,y))\,\mathrm{d}\delta = \alpha\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\delta + \beta\iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\delta$$

2. 区域可加性：设 D 可表示为两个无交区域 D_1,D_2 的并，$f(x,y)$ 在 D 上有界，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\delta = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\delta + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\delta$$

3. 保号性：设 $f(x,y)$ 在区域 D 上有界，且 $f(x,y) \ge 0$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\delta = 0 \iff f(x,y) = 0$$

$$f(x,y) \equiv 1,\ \iint_D 1\,\mathrm{d}\delta = \delta$$

4. 绝对值不等式：设 $f(x,y)$ 在区域 D 上有界，则

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\delta\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}\delta$$

$$f(x,y) \le g(x,y) \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\delta \le \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\delta$$

5. 设 M,m 分别为 $f(x,y)$ 在区域 D 上的最大值和最小值，则

$$m\delta \le \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\delta \le M\delta$$

5.1.4 二重积分的计算

1. 若积分区域 D 为矩形区域，且 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\delta = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x$$

若 $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\delta &= \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f_1(x)f_2(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x \int_c^d f_2(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \left(\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_c^d f_2(y)\,\mathrm{d}y\right)\end{aligned}$$

2. 若积分区域 D 为三角形区域，且 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\delta = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x$$

5.1.5 二重积分的变量代换

1. 设 $x = x(u,v), y = y(u,v)$ 为区域 D 到区域 D' 的一一映射，且满足

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

为 D 到 D' 的可逆变换，且 $x(u,v), y(u,v)$ 具有一阶连续偏导数，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\delta = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,|J|\,\mathrm{d}\delta'$$

其中 $J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right|$

2. 设 $x = x(u), y = y(v)$ 为区域 D 到区域 D' 的一一映射，且满足

$$\begin{cases} x = x(u) \\ y = y(v) \end{cases}$$

为 D 到 D' 的可逆变换，且 $x(u), y(v)$ 具有一阶连续偏导数，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\delta = \iint_{D'} f(x(u),y(v))\,|J|\,\mathrm{d}\delta'$$

其中 $J = \left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v}\right|$，$\mathrm{d}\delta' = \left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v}\right|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

极坐标变换

设 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，则

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\delta &= \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,|J|\,\mathrm{d}\delta' \\ &= \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

5.2 格林公式

定理 5.2 设 D 是平面区域，$P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 上有连续偏导数，则

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

这里 L 是区域 D 的边界，按照逆时针方向取正向。

[口诀] 交换相减反求偏导，交叉相乘积分加。

面积公式：

$$\iint_D 1\,\mathrm{d}\delta = \frac{1}{2}\oint_L x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$$

积分与路径无关：

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$$

也就是说

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$