

# Further Mathematics

S.Olivia

March 2024



# 目录

1	多元函数的极限与连续	5
1.1	基本概念	5
1.2	二元函数的极限	5
1.2.1	重极限与累次极限	6
1.3	二元函数的连续性	6
1.3.1	复合函数的连续性	6
2	多元函数微分学	7
2.1	可微性	7
2.1.1	偏导数	7
2.1.2	全微分	7
2.1.3	曲面的切平面与法线	8
2.2	复合函数微分法	8
2.2.1	复合函数的偏导数	8
2.2.2	复合函数的全微分	9
2.3	方向导数与梯度	9
2.3.1	方向导数	9
2.3.2	梯度	9
2.4	泰勒公式与极值	10
2.4.1	高阶偏导数	10
2.4.2	中值定理和泰勒公式	10
2.4.3	极值	11



# Chapter 1

## 多元函数的极限与连续

### 1.1 基本概念

平面:  $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}$

平面点集:  $\{(x, y) | (x, y) \text{ 满足条件 } P\}$

邻域:  $U(P_0, \delta) = \{P | |PP_0| < \delta\}$

内点:  $P_0$  是集合  $D$  的内点, 如果存在  $\delta > 0$ , 使得  $U(P_0, \delta) \subset D$

外点:  $P_0$  是集合  $D$  的外点, 如果存在  $\delta > 0$ , 使得  $U(P_0, \delta) \cap D = \emptyset$

(边)界点:  $P_0$  是集合  $D$  的边界点, 如果对任意  $\delta > 0$ ,  $U(P_0, \delta)$  内既有  $D$  内的点, 也有  $D$  外的点

聚点: 对任意  $\delta > 0$ ,  $U(P_0, \delta)$  内有  $D$  内的点

开集: 集合  $D$  中的每一点都是  $D$  的内点, 如  $(a, b)$

闭集: 集合  $D$  中的每一个边界点都是  $D$  的点, 如  $[a, b]$

开域: 联通的开集

闭域: 联通的闭集

有界集: 集合  $D$  内的点都在某一邻域内

无界集: 集合  $D$  内的点没有界限约束

联通集: 集合  $D$  内的任意两点都可以用  $D$  内的折线连接

### 1.2 二元函数的极限

称  $f$  在  $D$  上当  $P \rightarrow P_0$  时以  $A$  为极限, 记

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$$

当  $P, P_0$  分别用坐标  $(x, y), (x_0, y_0)$  表示时, 上式也常写作

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$$

多元函数的逼近可以沿着任何一条路径进行, 但是极限只有一个, 与逼近的路径无关。如果极限不相等, 则称多元函数在该点无极限。

### 1.2.1 重极限与累次极限

在上面讨论的  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A$  中, 自变量  $(x,y)$  是以任何方式趋于  $(x_0,y_0)$  的, 这种极限也称为重极限。

而  $x$  与  $y$  依一定的先后顺序, 相继趋于  $x_0$  与  $y_0$  时  $f$  的极限, 这种极限称为累次极限。若对每一个  $y \in Y(y \neq y_0)$ , 存在极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$ , 它一般与  $y$  有关, 记作

$$\varphi(y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$$

如果进一步还存在极限

$$L = \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y)$$

则称此  $L$  为  $f(x,y)$  先对  $x(x \rightarrow x_0)$  后对  $y(y \rightarrow y_0)$  的累次极限, 记作

$$L = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$$

**定理 1.1** 如果  $f(x,y)$  的重极限  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$  与累次极限  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$  都存在, 则两者必定相等。

$\varepsilon - \delta$  定义

对于任何正数  $\varepsilon$ , 都能够找到一个正数  $\delta$ , 当  $x$  满足  $0 < |x - a| < \delta$  时, 对于满足上式的  $x$  都有  $0 < |f(x) - b| < \varepsilon$ 。

## 1.3 二元函数的连续性

和一元函数相似, 二元函数的连续性也有以下三种定义:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

1. 有定义
2. 有极限
3. 极限等于函数值

几何意义: 不断开的曲面。

### 1.3.1 复合函数的连续性

设函数  $z = f(x,y)$  在点  $(x_0,y_0)$  的某邻域内有定义, 函数  $u = g(x,y)$  在点  $(x_0,y_0)$  的某邻域内有定义, 且  $f(x,y)$  在点  $(x_0,y_0)$  连续,  $g(x,y)$  在点  $(x_0,y_0)$  连续, 那么复合函数  $u = g(f(x,y))$  在点  $(x_0,y_0)$  连续。

“连续函数的连续函数是连续函数”。

## Chapter 2

# 多元函数微分学

## 2.1 可微性

### 2.1.1 偏导数

**定义 2.1** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的某邻域内有定义，当  $x$  在  $x_0$  处有增量  $\Delta x$ ， $y$  在  $y_0$  处有增量  $\Delta y$  时，相应的函数有增量  $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ ，如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处对  $x$  的偏导数，记作

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \quad \text{或} \quad f'_x(x_0, y_0) \quad \text{或} \quad z'_x$$

同理可得函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处对  $y$  的偏导数。

怎么求：

- 对  $x$  的偏导数：将  $y$  看作常数，对  $x$  求导；
- 对  $y$  的偏导数：将  $x$  看作常数，对  $y$  求导。

关于连续性

1. 对于一元函数，可导必定连续
2. 对于多元函数，偏导数存在不一定连续

### 2.1.2 全微分

**定义 2.2** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的某邻域内有定义，且在该点有偏导数，则称函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处可微分，如果存在常数  $A$  和  $B$ ，使得全增量

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

其中  $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ , 则称  $A\Delta x + B\Delta y$  为函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0 = (x_0, y_0)$  处的全微分, 记作

$$dz|_{P_0} = df(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y$$

当  $\Delta x$  和  $\Delta y$  趋于零时, 全微分  $dz$  可作为全增量  $\Delta z$  的近似值, 于是有近似公式

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

### 可微性条件

**定理 2.1** 若二元函数  $f$  在其定义域内一点  $(x_0, y_0)$  处可微, 则  $f$  在该点关于每个自变量的偏导数都存在。此时, 全微分可写成

$$df(x, y) = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

**定理 2.2 (可微的充分条件)** 若函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的偏导数  $f_x(x_0, y_0)$  和  $f_y(x_0, y_0)$  存在且连续, 则  $f$  在该点可微。

另外, 连续是可微的一个必要条件。

### 2.1.3 曲面的切平面与法线

**定义 2.3** 设曲面  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处可微, 且  $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 则曲面在该点的切平面方程为

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

同理, 有曲面  $F(x, y, z) = 0$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处可微, 则曲面在该点的切平面方程为

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

**定义 2.4** 设曲面  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处可微, 且  $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 则曲面在该点的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

同理, 有曲面  $F(x, y, z) = 0$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处可微, 则曲面在该点的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

## 2.2 复合函数微分法

### 2.2.1 复合函数的偏导数

**定理 2.3** 设函数  $z = f(u, v)$  在点  $(u, v)$  处可微, 函数  $u = u(x, y)$  和  $v = v(x, y)$  分别在点  $(x, y)$  处可微, 则复合函数  $z = f(u(x, y), v(x, y))$  在点  $(x, y)$  处可微, 且有

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$



特殊情况：有函数  $z = f(u, x, y), u = u(x, y)$ ，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

这里，把  $f$  看作  $u, x, y$  三个变量的函数， $z$  看作  $x, y$  两个变量的函数。

## 2.2.2 复合函数的全微分

**定理 2.4** 设函数  $z = f(u, v)$  在点  $(u, v)$  处可微，函数  $u = u(x, y)$  和  $v = v(x, y)$  分别在点  $(x, y)$  处可微，则复合函数  $z = f(u(x, y), v(x, y))$  在点  $(x, y)$  处可微，且有

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

## 2.3 方向导数与梯度

### 2.3.1 方向导数

**定义 2.5** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的某邻域内有定义，点  $P_0(x_0, y_0)$  处沿方向  $\boldsymbol{l} = (\cos \alpha, \cos \beta)$  的方向导数为

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \rho \cos \alpha, y_0 + \rho \cos \beta) - f(x_0, y_0)}{\rho}$$

其中  $\rho = \sqrt{(\cos \alpha)^2 + (\cos \beta)^2}$ 。

**定理 2.5** 函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处可微，则函数在该点沿任一方向  $\boldsymbol{l} = (\cos \alpha, \cos \beta)$  的方向导数存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial l} = f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta$$

### 2.3.2 梯度

**定义 2.6** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处可微，定义函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的梯度为

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

**定理 2.6** 函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处可微，则函数在该点的梯度  $\nabla f(x_0, y_0)$  就是函数在该点沿各个方向的方向导数的最大值，且有

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \boldsymbol{l}$$

## 2.4 泰勒公式与极值

### 2.4.1 高阶偏导数

二元函数的二阶偏导数有如下四种形式:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

另外, 称  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  和  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  这种既有关于  $x$ , 又有关于  $y$  的高阶偏导数为混合偏导数。

**定理 2.7** 若函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的二阶偏导数  $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$  都存在且连续, 则

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

### 复合函数的高阶偏导数

设

$$z = f(x, y), x = \varphi(s, t), y = \phi(s, t)$$

若函数  $f, \varphi, \phi$  都具有连续的二阶偏导数, 则复合函数  $z = f(\varphi(s, t), \phi(s, t))$  对  $s, t$  同样存在二阶连续偏导数。

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \end{aligned}$$

显然  $\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}$  仍然是  $s, t$  的复合函数, 其中  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  是  $x, y$  的函数,  $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial t}$  是  $s, t$  的函数。继续求... (求不出来了)

### 2.4.2 中值定理和泰勒公式

**定理 2.8 (拉格朗日中值定理)** 设函数  $z = f(x, y)$  在凸开域  $D \in R^2$  连续, 在  $D$  的所有内点都可微, 则对于  $D$  内任意两点  $P(a, b), Q(a + h, b + k) \in D, \forall \theta (0 < \theta < 1)$ , 使得

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = f_x(a + \theta h, b + \theta k)h + f_y(a + \theta h, b + \theta k)k$$

**定理 2.9 (泰勒公式)** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的某邻域内具有  $n + 1$  阶连续偏导数, 则对于任意一点  $(x_0 + h, y_0 + k), \forall \theta \in (0, 1)$ , 使得

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0, y_0) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!}(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0, y_0) + R_n \end{aligned}$$

其中  $R_n$  为拉格朗日余项, 即

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

前面的中值定理是泰勒公式的特殊情况, 即  $n = 0$ 。

若只要求  $R_n = o(\rho^n)$ , 此时  $n$  阶泰勒公式为

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(x_0, y_0) + o(\rho^n)$$

实际优化问题的目标函数往往比较复杂。为了使问题简化, 通常将目标函数在某点附近展开为泰勒(Taylor)多项式来逼近原函数。

一元函数在点  $x_k$  处的泰勒展开式为:

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2} f''(x_k)(x - x_k)^2 + o^n$$

二元函数在点  $(x_k, y_k)$  处的泰勒展开式为:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_k, y_k) + (x - x_k)f_x(x_k, y_k) + (y - y_k)f_y(x_k, y_k) \\ &+ \frac{1}{2!} [(x - x_k)^2 f_{xx}(x_k, y_k) + 2(x - x_k)(y - y_k)f_{xy}(x_k, y_k) + (y - y_k)^2 f_{yy}(x_k, y_k)] + o^n \end{aligned}$$

### 2.4.3 极值

**定义 2.7** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的某邻域内有定义, 如果存在这个邻域内的任意一点  $(x, y)$ , 使得  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ , 则称  $f(x_0, y_0)$  是函数  $z = f(x, y)$  的一个极大值点; 如果存在这个邻域内的任意一点  $(x, y)$ , 使得  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ , 则称  $f(x_0, y_0)$  是函数  $z = f(x, y)$  的一个极小值点。

**定理 2.10 (极值的必要条件)** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处有极值, 且在该点处有偏导数, 则有

$$f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$$

**定义 2.8 (驻点)** 若函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处有偏导数, 且在该点处有偏导数  $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$ , 则称点  $(x_0, y_0)$  为函数  $z = f(x, y)$  的一个驻点。

- 驻点不一定是极值点;
- 极值点一定是驻点。

**定理 2.11 (极值的充分条件)** 判断驻点是否等于极值点

设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处有连续偏导数, 且在该点处有偏导数  $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$ , 则有

- 若  $f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$ , 则  $f(x_0, y_0)$  是函数  $z = f(x, y)$  的一个极值点:
  - 若  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ , 则  $f(x_0, y_0)$  是函数  $z = f(x, y)$  的一个极小值点;
  - 若  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ , 则  $f(x_0, y_0)$  是函数  $z = f(x, y)$  的一个极大值点。
- 若  $f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) < 0$ , 则  $f(x_0, y_0)$  不是函数  $z = f(x, y)$  的一个极值点;
- 若  $f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) = 0$ , 则无法判断  $f(x_0, y_0)$  是否为函数  $z = f(x, y)$  的一个极值点。