Further Mathematics

S.Olivia

March 2024

目录

Chapter 1

多元函数的极限与连续

1.1 基本概念

平面：$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x,y)|x,y \in \mathbf{R}\}$
平面点集：$\{(x,y)|(x,y)$满足条件$P\}$
邻域：$U(P_0,\delta) = \{P||PP_0| < \delta\}$
内点：P_0是集合D的内点，如果存在$\delta > 0$，使得$U(P_0,\delta) \subset D$
外点：P_0是集合D的外点，如果存在$\delta > 0$，使得$U(P_0,\delta) \cap D = \emptyset$
（边）界点：P_0是集合D的边界点，如果对任意$\delta > 0$，$U(P_0,\delta)$内既有D内的点，也有D外的点
聚点：对任意$\delta > 0$，$U(P_0,\delta)$内有D内的点
开集：集合D中的每一点都是D的内点，如(a,b)
闭集：集合D中的每一个边界点都是D的点，如$[a,b]$
开域：联通的开集
闭域：联通的闭集
有界集：集合D内的点都在某一邻域内
无界集：集合D内的点没有界限约束
联通集：集合D内的任意两点都可以用D内的折线连接

1.2 二元函数的极限

称f在D上当$P \to P_0$时以A为极限, 记

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A$$

当P, P_0分别用坐标$(x,y), (x_0,y_0)$表示时, 上式也常写作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$$

多元函数的逼近可以沿着任何一条路径进行, 但是极限只有一个, 与逼近的路径无关。如果极限不相等, 则称多元函数在该点无极限。

1.2.1 重极限与累次极限

在上面讨论的$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$中, 自变量 (x,y)是以任何方式趋于 (x_0,y_0)的, 这种极限也称为重极限。

而x与y依一定的先后顺序, 相继趋于 x_0 与 y_0 时 f 的极限, 这种极限称为累次极限。若对每一个$y\in Y(y \not y_0)$，存在极限$\lim_{x\to x_0} f(x,y)$，它一般与y有关，记作

$$\varphi(y)=\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

如果进一步还存在极限

$$L=\lim_{y\to y_0}\varphi(y)$$

则称此L为$f(x,y)$先对$x(x\to x_0)$后对$y(y\to y_0)$的累次极限，记作

$$L=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

定理 1.1 如果$f(x,y)$的重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$与累次极限$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$都存在，则两者必定相等。

$\varepsilon-\delta$**定义**

对于任何正数ε，都能够找到一个正数δ，当x满足$0<\mid x-a\mid<\delta$时，对于满足上式的x都有
$0<\mid f(x)-b\mid<\varepsilon$。

1.3 二元函数的连续性

和一元函数相似，二元函数的连续性也有以下三种定义：

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

1. 有定义
2. 有极限
3. 极限等于函数值

几何意义：不断开的曲面。

1.3.1 复合函数的连续性

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有定义，函数$u=g(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有定义，且$f(x,y)$在点(x_0,y_0)连续，$g(x,y)$在点(x_0,y_0)连续，那么复合函数$u=g(f(x,y))$在点(x_0,y_0)连续。

“连续函数的连续函数是连续函数”。

Chapter 2

多元函数微分学

2.1 偏导数

定义 2.1 设函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某邻域内有定义，当x在x_0处有增量Δx，y在y_0处有增量Δy时，相应的函数有增量$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$，如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)处对x的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} \quad \text{或} \quad f'_x(x_0, y_0) \quad \text{或} \quad z'_x$$

同理可得函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)处对y的偏导数。

怎么求：

- 对x的偏导数：将y看作常数，对x求导；
- 对y的偏导数：将x看作常数，对y求导。

2.1.1 关于连续性

1. 对于一元函数，可导必定连续
2. 对于多元函数，偏导数存在不一定连续

2.2 全微分

定义 2.2 设函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某邻域内有定义，且在该点有偏导数，则称函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)处可微分，如果存在常数A和B，使得全增量

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

其中$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，则称$A\Delta x + B\Delta y$为函数$z = f(x, y)$在点$P_0 = (x_0, y_0)$处的全微分，记作

$$\mathrm{d}z|_{P_0} = df(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y$$

当Δx和Δy趋于零时，全微分$\mathrm{d}z$可作为全增量Δz的近似值，于是有近似公式

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + A(x-x_0) + B(y-y_0)$$

2.2.1 可微性条件

定理 2.1 若二元函数 f 在其定义域内一点 (x_0,y_0) 处可微，则 f 在该点关于每个自变量的偏导数都存在。此时，全微分可写成

$$\mathrm{d}f(x,y) = f_x(x,y)\mathrm{d}x + f_y(x,y)\mathrm{d}y$$

定理 2.2 (可微的充分条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 存在且连续，则 f 在该点可微。

另外，连续是可微的一个必要条件。

2.3 曲面的切平面与法线

定义 2.3 设曲面 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处可微，且 $f_x(x_0,y_0)\neq 0$，则曲面在该点的切平面方程为

$$z-z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

同理，有曲面 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处可微，则曲面在该店的切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$$

定义 2.4 设曲面 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处可微，且 $f_x(x_0,y_0)\neq 0$，则曲面在该点的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$$

同理，有曲面 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处可微，则曲面在该店的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$