

Further Mathematics

S.Olivia

March 2024

目录

1	多元函数的极限与连续	5
1.1	基本概念	5
1.2	二元函数的极限	5
1.2.1	重极限与累次极限	6
1.3	二元函数的连续性	6
1.3.1	复合函数的连续性	6
2	多元函数微分学	7
2.1	可微性	7
2.1.1	偏导数	7
2.1.2	全微分	7
2.1.3	曲面的切平面与法线	8
2.2	复合函数微分法	8
2.2.1	复合函数的偏导数	8
2.2.2	复合函数的全微分	9
2.3	方向导数与梯度	9
2.3.1	方向导数	9
2.3.2	梯度	9
2.4	泰勒公式与极值	10
2.4.1	高阶偏导数	10
2.4.2	中值定理和泰勒公式	10
2.4.3	极值	11
3	隐函数定理及其应用	13
3.1	隐函数	13
3.1.1	隐函数定理	13

Chapter 1

多元函数的极限与连续

1.1 基本概念

平面: $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}$

平面点集: $\{(x, y) | (x, y) \text{ 满足条件 } P\}$

邻域: $U(P_0, \delta) = \{P | |PP_0| < \delta\}$

内点: P_0 是集合 D 的内点, 如果存在 $\delta > 0$, 使得 $U(P_0, \delta) \subset D$

外点: P_0 是集合 D 的外点, 如果存在 $\delta > 0$, 使得 $U(P_0, \delta) \cap D = \emptyset$

(边)界点: P_0 是集合 D 的边界点, 如果对任意 $\delta > 0$, $U(P_0, \delta)$ 内既有 D 内的点, 也有 D 外的点

聚点: 对任意 $\delta > 0$, $U(P_0, \delta)$ 内有 D 内的点

开集: 集合 D 中的每一点都是 D 的内点, 如 (a, b)

闭集: 集合 D 中的每一个边界点都是 D 的点, 如 $[a, b]$

开域: 联通的开集

闭域: 联通的闭集

有界集: 集合 D 内的点都在某一邻域内

无界集: 集合 D 内的点没有界限约束

联通集: 集合 D 内的任意两点都可以用 D 内的折线连接

1.2 二元函数的极限

称 f 在 D 上当 $P \rightarrow P_0$ 时以 A 为极限, 记

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$$

当 P, P_0 分别用坐标 $(x, y), (x_0, y_0)$ 表示时, 上式也常写作

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$$

多元函数的逼近可以沿着任何一条路径进行, 但是极限只有一个, 与逼近的路径无关。如果极限不相等, 则称多元函数在该点无极限。

1.2.1 重极限与累次极限

在上面讨论的 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 中, 自变量 (x,y) 是以任何方式趋于 (x_0,y_0) 的, 这种极限也称为重极限。

而 x 与 y 依一定的先后顺序, 相继趋于 x_0 与 y_0 时 f 的极限, 这种极限称为累次极限。若对每一个 $y \in Y(y \neq y_0)$, 存在极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$, 它一般与 y 有关, 记作

$$\varphi(y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$$

如果进一步还存在极限

$$L = \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y)$$

则称此 L 为 $f(x,y)$ 先对 $x(x \rightarrow x_0)$ 后对 $y(y \rightarrow y_0)$ 的累次极限, 记作

$$L = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$$

定理 1.1 如果 $f(x,y)$ 的重极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ 与累次极限 $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$ 都存在, 则两者必定相等。

$\varepsilon - \delta$ 定义

对于任何正数 ε , 都能够找到一个正数 δ , 当 x 满足 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 对于满足上式的 x 都有 $0 < |f(x) - b| < \varepsilon$ 。

1.3 二元函数的连续性

和一元函数相似, 二元函数的连续性也有以下三种定义:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

1. 有定义
2. 有极限
3. 极限等于函数值

几何意义: 不断开的曲面。

1.3.1 复合函数的连续性

设函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义, 函数 $u = g(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义, 且 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续, $g(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续, 那么复合函数 $u = g(f(x,y))$ 在点 (x_0,y_0) 连续。

“连续函数的连续函数是连续函数”。

Chapter 2

多元函数微分学

2.1 可微性

2.1.1 偏导数

定义 2.1 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义，当 x 在 x_0 处有增量 Δx ， y 在 y_0 处有增量 Δy 时，相应的函数有增量 $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ ，如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数，记作

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \quad \text{或} \quad f'_x(x_0, y_0) \quad \text{或} \quad z'_x$$

同理可得函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数。

怎么求：

- 对 x 的偏导数：将 y 看作常数，对 x 求导；
- 对 y 的偏导数：将 x 看作常数，对 y 求导。

关于连续性

1. 对于一元函数，可导必定连续
2. 对于多元函数，偏导数存在不一定连续

2.1.2 全微分

定义 2.2 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义，且在该点有偏导数，则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微分，如果存在常数 A 和 B ，使得全增量

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 则称 $A\Delta x + B\Delta y$ 为函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0 = (x_0, y_0)$ 处的全微分, 记作

$$dz|_{P_0} = df(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y$$

当 Δx 和 Δy 趋于零时, 全微分 dz 可作为全增量 Δz 的近似值, 于是有近似公式

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

可微性条件

定理 2.1 若二元函数 f 在其定义域内一点 (x_0, y_0) 处可微, 则 f 在该点关于每个自变量的偏导数都存在。此时, 全微分可写成

$$df(x, y) = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

定理 2.2 (可微的充分条件) 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 和 $f_y(x_0, y_0)$ 存在且连续, 则 f 在该点可微。

另外, 连续是可微的一个必要条件。

2.1.3 曲面的切平面与法线

定义 2.3 设曲面 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处可微, 且 $f_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则曲面在该点的切平面方程为

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

同理, 有曲面 $F(x, y, z) = 0$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处可微, 则曲面在该点的切平面方程为

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

定义 2.4 设曲面 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处可微, 且 $f_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则曲面在该点的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

同理, 有曲面 $F(x, y, z) = 0$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处可微, 则曲面在该点的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

2.2 复合函数微分法

2.2.1 复合函数的偏导数

定理 2.3 设函数 $z = f(u, v)$ 在点 (u, v) 处可微, 函数 $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 分别在点 (x, y) 处可微, 则复合函数 $z = f(u(x, y), v(x, y))$ 在点 (x, y) 处可微, 且有

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

特殊情况：有函数 $z = f(u, x, y), u = u(x, y)$ ，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

这里，把 f 看作 u, x, y 三个变量的函数， z 看作 x, y 两个变量的函数。

2.2.2 复合函数的全微分

定理 2.4 设函数 $z = f(u, v)$ 在点 (u, v) 处可微，函数 $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 分别在点 (x, y) 处可微，则复合函数 $z = f(u(x, y), v(x, y))$ 在点 (x, y) 处可微，且有

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

2.3 方向导数与梯度

2.3.1 方向导数

定义 2.5 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义，点 $P_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l} = (\cos \alpha, \cos \beta)$ 的方向导数为

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \rho \cos \alpha, y_0 + \rho \cos \beta) - f(x_0, y_0)}{\rho}$$

其中 $\rho = \sqrt{(\cos \alpha)^2 + (\cos \beta)^2}$ 。

就是多元函数沿着某个特定方向的变化率。

定理 2.5 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微，则函数在该点沿任一方向 $\boldsymbol{l} = (\cos \alpha, \cos \beta)$ 的方向导数存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial l} = f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta \quad \star$$

2.3.2 梯度

定义 2.6 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微，定义函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的梯度为

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \star$$

就是多元函数变化率取值最大的方向。

定理 2.6 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微，则函数在该点的梯度 $\nabla f(x_0, y_0)$ 就是函数在该点沿各个方向的方向导数的最大值，且有

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \boldsymbol{l}$$

2.4 泰勒公式与极值

2.4.1 高阶偏导数

二元函数的二阶偏导数有如下四种形式:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

另外, 称 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 这种既有关于 x , 又有关于 y 的高阶偏导数为混合偏导数。

定理 2.7 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的二阶偏导数 $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$ 都存在且连续, 则

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

复合函数的高阶偏导数

设

$$z = f(x, y), x = \varphi(s, t), y = \phi(s, t)$$

若函数 f, φ, ϕ 都具有连续的二阶偏导数, 则复合函数 $z = f(\varphi(s, t), \phi(s, t))$ 对 s, t 同样存在二阶连续偏导数。

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \end{aligned}$$

显然 $\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}$ 仍然是 s, t 的复合函数, 其中 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 是 x, y 的函数, $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial t}$ 是 s, t 的函数。继续求... (求不出来了)

2.4.2 中值定理和泰勒公式

定理 2.8 (拉格朗日中值定理) 设函数 $z = f(x, y)$ 在凸开域 $D \in R^2$ 连续, 在 D 的所有内点都可微, 则对于 D 内任意两点 $P(a, b), Q(a + h, b + k) \in D, \forall \theta (0 < \theta < 1)$, 使得

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = f_x(a + \theta h, b + \theta k)h + f_y(a + \theta h, b + \theta k)k$$

定理 2.9 (泰勒公式) 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内具有 $n + 1$ 阶连续偏导数, 则对于任意一点 $(x_0 + h, y_0 + k), \forall \theta \in (0, 1)$, 使得

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0, y_0) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!}(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0, y_0) + R_n \end{aligned}$$

其中 R_n 为拉格朗日余项, 即

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

前面的中值定理是泰勒公式的特殊情况, 即 $n = 0$ 。

若只要求 $R_n = o(\rho^n)$, 此时 n 阶泰勒公式为

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(x_0, y_0) + o(\rho^n)$$

实际优化问题的目标函数往往比较复杂。为了使问题简化, 通常将目标函数在某点附近展开为泰勒(Taylor)多项式来逼近原函数。

一元函数在点 x_k 处的泰勒展开式为:

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2} f''(x_k)(x - x_k)^2 + o^n$$

二元函数在点 (x_k, y_k) 处的泰勒展开式为:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_k, y_k) + (x - x_k)f_x(x_k, y_k) + (y - y_k)f_y(x_k, y_k) \\ &+ \frac{1}{2!} [(x - x_k)^2 f_{xx}(x_k, y_k) + 2(x - x_k)(y - y_k)f_{xy}(x_k, y_k) + (y - y_k)^2 f_{yy}(x_k, y_k)] + o^n \end{aligned}$$

2.4.3 极值

定义 2.7 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义, 如果存在这个邻域内的任意一点 (x, y) , 使得 $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, 则称 $f(x_0, y_0)$ 是函数 $z = f(x, y)$ 的一个极大值点; 如果存在这个邻域内的任意一点 (x, y) , 使得 $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$, 则称 $f(x_0, y_0)$ 是函数 $z = f(x, y)$ 的一个极小值点。

定理 2.10 (极值的必要条件) 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处有极值, 且在该点处有偏导数, 则有

$$f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$$

定义 2.8 (稳定点), 即驻点若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处有偏导数, 且在该点处有偏导数 $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$, 则称点 (x_0, y_0) 为函数 $z = f(x, y)$ 的一个稳定点。

- 稳定点不一定是极值点;
- 极值点一定是稳定点。

定理 2.11 (极值的充分条件) 判断驻点是否等于极值点

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处有连续偏导数, 且在该点处有偏导数 $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$, 则有

- 若 $f_{xx}(P_0)f_{yy}(P_0) - f_{xy}^2(P_0) > 0$, 则 P_0 是函数 $z = f(x, y)$ 的一个极值点:
 - 若 $f_{xx}(P_0) > 0$, 则 P_0 是函数 $z = f(x, y)$ 的一个极小值点;
 - 若 $f_{xx}(P_0) < 0$, 则 P_0 是函数 $z = f(x, y)$ 的一个极大值点。
- 若 $f_{xx}(P_0)f_{yy}(P_0) - f_{xy}^2(P_0) < 0$, 则 P_0 不是函数 $z = f(x, y)$ 的一个极值点;
- 若 $f_{xx}(P_0)f_{yy}(P_0) - f_{xy}^2(P_0) = 0$, 则无法判断 P_0 是否为函数 $z = f(x, y)$ 的一个极值点。

Chapter 3

隐函数定理及其应用

3.1 隐函数

定义 3.1 设方程 $F(x, y) = 0$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内恒有解 $y = f(x)$, 且 $f(x_0) = y_0$, 若 $f(x)$ 在点 x_0 处可微, 则称 $y = f(x)$ 为方程 $F(x, y) = 0$ 在点 (x_0, y_0) 处的隐函数。

3.1.1 隐函数定理

定理 3.1 (隐函数存在唯一性定理) 设函数 $F(x, y)$ 满足下列条件

1. $F(x_0, y_0) = 0$;
2. $F(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有连续偏导数 $F_y(x, y)$;
3. $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ 。

则在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内, 方程 $F(x, y) = 0$ 有且仅有一个连续可微的隐函数 $y = f(x)$, 满足 $F(x, f(x)) = 0$, 且 $y_0 = f(x_0)$, 并有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} \quad (3.1)$$

定理 3.2 (隐函数可微性定理) 设函数 $F(x, y)$ 满足隐函数存在唯一性定理的条件, 在 D 内还存在连续的 $F_x(x, y)$ 则由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数 $y = f(x)$ 在 I 内有连续的导函数, 且

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad (3.2)$$