

# Further Mathematics

S.Olivia

March 2024



# 目录

1	多元函数的极限与连续	5
1.1	基本概念	5
1.2	二元函数的极限	5
1.2.1	重极限与累次极限	6
1.3	二元函数的连续性	6
1.3.1	复合函数的连续性	6



# Chapter 1

## 多元函数的极限与连续

### 1.1 基本概念

平面:  $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}$

平面点集:  $\{(x, y) | (x, y) \text{ 满足条件 } P\}$

邻域:  $U(P_0, \delta) = \{P | |PP_0| < \delta\}$

内点:  $P_0$  是集合  $D$  的内点, 如果存在  $\delta > 0$ , 使得  $U(P_0, \delta) \subset D$

外点:  $P_0$  是集合  $D$  的外点, 如果存在  $\delta > 0$ , 使得  $U(P_0, \delta) \cap D = \emptyset$

(边)界点:  $P_0$  是集合  $D$  的边界点, 如果对任意  $\delta > 0$ ,  $U(P_0, \delta)$  内既有  $D$  内的点, 也有  $D$  外的点

聚点: 对任意  $\delta > 0$ ,  $U(P_0, \delta)$  内有  $D$  内的点

开集: 集合  $D$  中的每一点都是  $D$  的内点, 如  $(a, b)$

闭集: 集合  $D$  中的每一个边界点都是  $D$  的点, 如  $[a, b]$

开域: 联通的开集

闭域: 联通的闭集

有界集: 集合  $D$  内的点都在某一邻域内

无界集: 集合  $D$  内的点没有界限约束

联通集: 集合  $D$  内的任意两点都可以用  $D$  内的折线连接

### 1.2 二元函数的极限

称  $f$  在  $D$  上当  $P \rightarrow P_0$  时以  $A$  为极限, 记

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$$

当  $P, P_0$  分别用坐标  $(x, y), (x_0, y_0)$  表示时, 上式也常写作

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$$

多元函数的逼近可以沿着任何一条路径进行, 但是极限只有一个, 与逼近的路径无关。如果极限不相等, 则称多元函数在该点无极限。

### 1.2.1 重极限与累次极限

在上面讨论的  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A$  中, 自变量  $(x,y)$  是以任何方式趋于  $(x_0,y_0)$  的, 这种极限也称为重极限。

而  $x$  与  $y$  依一定的先后顺序, 相继趋于  $x_0$  与  $y_0$  时  $f$  的极限, 这种极限称为累次极限。若对每一个  $y \in Y(y \neq y_0)$ , 存在极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$ , 它一般与  $y$  有关, 记作

$$\varphi(y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$$

如果进一步还存在极限

$$L = \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y)$$

则称此  $L$  为  $f(x,y)$  先对  $x(x \rightarrow x_0)$  后对  $y(y \rightarrow y_0)$  的累次极限, 记作

$$L = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$$

**定理 1.1** 如果  $f(x,y)$  的重极限  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$  与累次极限  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$  都存在, 则两者必定相等。

$\varepsilon - \delta$  定义

对于任何正数  $\varepsilon$ , 都能够找到一个正数  $\delta$ , 当  $x$  满足  $0 < |x - a| < \delta$  时, 对于满足上式的  $x$  都有  $0 < |f(x) - b| < \varepsilon$ 。

## 1.3 二元函数的连续性

和一元函数相似, 二元函数的连续性也有以下三种定义:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

1. 有定义
2. 有极限
3. 极限等于函数值

几何意义: 不断开的曲面。

### 1.3.1 复合函数的连续性

设函数  $z = f(x,y)$  在点  $(x_0,y_0)$  的某邻域内有定义, 函数  $u = g(x,y)$  在点  $(x_0,y_0)$  的某邻域内有定义, 且  $f(x,y)$  在点  $(x_0,y_0)$  连续,  $g(x,y)$  在点  $(x_0,y_0)$  连续, 那么复合函数  $u = g(f(x,y))$  在点  $(x_0,y_0)$  连续。

“连续函数的连续函数是连续函数”。