Further Mathematics

S.Olivia

March 2024

目录

Chapter 1

多元函数的极限与连续

1.1 基本概念

平面：$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x,y)|x,y \in \mathbf{R}\}$

平面点集：$\{(x,y)|(x,y)$满足条件$P\}$

邻域：$U(P_0,\delta) = \{P||PP_0| < \delta\}$

内点：P_0是集合D的内点，如果存在$\delta > 0$，使得$U(P_0,\delta) \subset D$

外点：P_0是集合D的外点，如果存在$\delta > 0$，使得$U(P_0,\delta) \cap D = \emptyset$

（边）界点：P_0是集合D的边界点，如果对任意$\delta > 0$，$U(P_0,\delta)$内既有D内的点，也有D外的点

聚点：对任意$\delta > 0$，$U(P_0,\delta)$内有D内的点

开集：集合D中的每一点都是D的内点，如(a,b)

闭集：集合D中的每一个边界点都是D的点，如$[a,b]$

开域：联通的开集

闭域：联通的闭集

有界集：集合D内的点都在某一邻域内

无界集：集合D内的点没有界限约束

联通集：集合D内的任意两点都可以用D内的折线连接

1.2 二元函数的极限

称f在D上当$P \to P_0$时以A为极限, 记

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A$$

当P, P_0分别用坐标$(x,y), (x_0,y_0)$表示时, 上式也常写作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$$

多元函数的逼近可以沿着任何一条路径进行, 但是极限只有一个, 与逼近的路径无关。如果极限不相等, 则称多元函数在该点无极限。

1.2.1 重极限与累次极限

在上面讨论的$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$中, 自变量 (x, y)是以任何方式趋于 (x_0, y_0)的, 这种极限也称为重极限。

而x与y依一定的先后顺序, 相继趋于 x_0 与 y_0 时 f 的极限, 这种极限称为累次极限。若对每一个$y \in Y(y \not y_0)$，存在极限$\lim_{x\to x_0} f(x, y)$，它一般与y有关，记作

$$\varphi(y) = \lim_{x\to x_0} f(x, y)$$

如果进一步还存在极限

$$L = \lim_{y\to y_0} \varphi(y)$$

则称此L为$f(x, y)$先对$x(x \to x_0)$后对$y(y \to y_0)$的累次极限，记作

$$L = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x, y)$$

定理 1.1 如果$f(x, y)$的重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$与累次极限$\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$都存在，则两者必定相等。

$\varepsilon - \delta$**定义**

对于任何正数ε，都能够找到一个正数δ，当x满足$0 <| x - a |< \delta$时，对于满足上式的x都有 $0 <| f(x) - b |< \varepsilon$。

1.3 二元函数的连续性

和一元函数相似，二元函数的连续性也有以下三种定义：

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

1. 有定义
2. 有极限
3. 极限等于函数值

几何意义：不断开的曲面。

1.3.1 复合函数的连续性

设函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某邻域内有定义，函数$u = g(x, y)$在点(x_0, y_0)的某邻域内有定义，且$f(x, y)$在点(x_0, y_0)连续，$g(x, y)$在点(x_0, y_0)连续，那么复合函数$u = g(f(x, y))$在点(x_0, y_0)连续。

“连续函数的连续函数是连续函数”。

Chapter 2

多元函数微分学

2.1 偏导数

定义 2.1 设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有定义，当x在x_0处有增量Δx，y在y_0处有增量Δy时，相应的函数有增量$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对x的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\quad \text{或}\quad f'_x(x_0,y_0)\quad \text{或}\quad z'_x$$

同理可得函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对y的偏导数。

怎么求：

- 对x的偏导数：将y看作常数，对x求导；
- 对y的偏导数：将x看作常数，对y求导。

2.1.1 关于连续性

1. 对于一元函数，可导必定连续
2. 对于多元函数，偏导数存在不一定连续