

Further Mathematics

S.Olivia

March 2024

目录

1	多元函数的极限与连续	5
1.1	基本概念	5
1.2	二元函数的极限	5
1.2.1	重极限与累次极限	6

Chapter 1

多元函数的极限与连续

1.1 基本概念

平面: $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}$

平面点集: $\{(x, y) | (x, y) \text{ 满足条件 } P\}$

邻域: $U(P_0, \delta) = \{P | |PP_0| < \delta\}$

内点: P_0 是集合 D 的内点, 如果存在 $\delta > 0$, 使得 $U(P_0, \delta) \subset D$

外点: P_0 是集合 D 的外点, 如果存在 $\delta > 0$, 使得 $U(P_0, \delta) \cap D = \emptyset$

(边)界点: P_0 是集合 D 的边界点, 如果对任意 $\delta > 0$, $U(P_0, \delta)$ 内既有 D 内的点, 也有 D 外的点

聚点: 对任意 $\delta > 0$, $U(P_0, \delta)$ 内有 D 内的点

开集: 集合 D 中的每一点都是 D 的内点, 如 (a, b)

闭集: 集合 D 中的每一个边界点都是 D 的点, 如 $[a, b]$

开域: 联通的开集

闭域: 联通的闭集

有界集: 集合 D 内的点都在某一邻域内

无界集: 集合 D 内的点没有界限约束

联通集: 集合 D 内的任意两点都可以用 D 内的折线连接

1.2 二元函数的极限

称 f 在 D 上当 $P \rightarrow P_0$ 时以 A 为极限, 记

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$$

当 P, P_0 分别用坐标 $(x, y), (x_0, y_0)$ 表示时, 上式也常写作

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$$

多元函数的逼近可以沿着任何一条路径进行, 但是极限只有一个, 与逼近的路径无关。如果极限不相等, 则称多元函数在该点无极限。

1.2.1 重极限与累次极限

在上面讨论的 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 中, 自变量 (x,y) 是以任何方式趋于 (x_0,y_0) 的, 这种极限也称为重极限。

而 x 与 y 依一定的先后顺序, 相继趋于 x_0 与 y_0 时 f 的极限, 这种极限称为累次极限。若对每一个 $y \in Y(y \neq y_0)$, 存在极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$, 它一般与 y 有关, 记作

$$\varphi(y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$$

如果进一步还存在极限

$$L = \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y)$$

则称此 L 为 $f(x,y)$ 先对 $x(x \rightarrow x_0)$ 后对 $y(y \rightarrow y_0)$ 的累次极限, 记作

$$L = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$$

定理 1.1 如果 $f(x,y)$ 的重极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ 与累次极限 $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$ 都存在, 则两者必定相等。

$\varepsilon - \delta$ 定义

对于任何正数 ε , 都能够找到一个正数 δ , 当 x 满足 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 对于满足上式的 x 都有 $0 < |f(x) - b| < \varepsilon$ 。