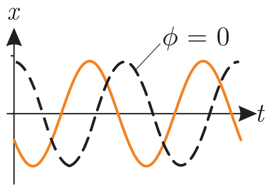
Physique 3 Ondes et physique moderne - 1re édition

Chapitre 01 Les oscillations

Q1 **Illustrer la situation** La figure ci-contre montre la courbe de la question et la courbe dans le cas d'une constante de phase nulle (la courbe en pointillés).



Décortiquer le problème La courbe de la question est déplacée vers la gauche, avec un déphasage plus petit qu'une demi-période.

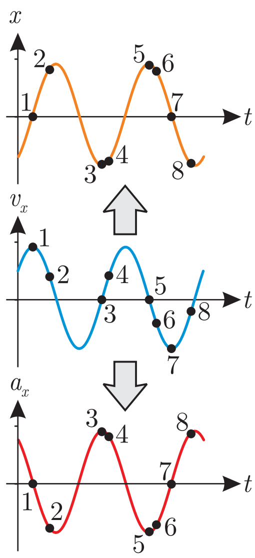
Identifier la clé La clé est que la constante de phase doit être positive pour une courbe qui est déplacée vers la gauche par rapport à la courbe ayant une constante de phase nulle.

Résoudre le problème Un déphasage d'une période correspond à un déphasage de 2π rad. Dans le présent cas, le déphasage est compris entre un quart de période et une demi-période, ce qui correspond à $\pi/2 < \phi < \pi$. Donc, la réponse est

l'expression (iv). (réponse)

Valider la réponse À $t = 0$, la position est négative, ce qui est le cas pour $x = \cos(\phi)$ avec $\pi/2 < \phi < \pi$.

Q2 **Décortiquer le problème** On a un graphique de la vitesse en fonction du temps. Sur ce graphique, la position verticale représente la vitesse et la pente représente l'accélération. On peut déduire la position en associant les combinaisons de vitesse et d'accélération à différentes positions dans un cycle d'oscillation. Ou encore, on peut utiliser le graphique de la vitesse pour construire ceux de la position et de l'accélération, comme le montre la figure ci-contre. En outre, on suppose qu'une vitesse positive est associée à un déplacement vers la droite et une vitesse nulle est associée à un maximum ou un minimum de la position dans le mouvement d'oscillation.



a. **Identifier la clé** La clé est qu'à une position maximale (un sommet positif), l'objet s'immobilise avant de revenir sur ses pas. La vitesse doit donc être nulle, après une phase de vitesse positive et avant une phase de vitesse négative.

Résoudre le problème Le point 5 est le seul pour lequel la vitesse est nulle, tout en étant précédé d'une vitesse positive et suivie d'une vitesse négative. Donc, la réponse est

le point 5. (réponse)

Valider la réponse Sur le graphique ci-contre, le point 5 se trouve vis-à-vis un point où $x(t)$ atteint sa valeur maximale et où $a(t)$ atteint sa valeur négative maximale.

b. **Identifier la clé** La clé est qu'une vitesse vers la gauche a une composante horizontale négative et qu'une accélération vers la droite donne une pente positive sur $v(t)$.

Résoudre le problème Les conditions $v_x < 0$ et pente positive se retrouvent au point 8 uniquement, donc, la réponse est

le point 8. (réponse)

Valider la réponse Sur le graphique ci-dessus, le point 8 se trouve vis-à-vis une phase du mouvement où la courbe d'accélération est au-dessus de l'axe horizontal.

c. **Identifier la clé** La clé est qu'à la position d'équilibre, la vitesse est à sa valeur la plus élevée, au milieu de la transition entre les deux positions extrêmes (dans un sens ou dans l'autre).

Résoudre le problème Deux points présentent des valeurs extrêmes de vitesse, une fois positive, une fois négative. Donc, la réponse est

les points 1 et 7. (réponse)

Valider la réponse Sur le graphique ci-dessus, les points 1 et 7 se trouvent vis-à-vis des passages de la courbe $x(t)$ sur l'axe horizontal.

d. **Identifier la clé** La clé est que, dans un mouvement d'oscillation, les positions positives, dans les deux sens possibles du déplacement, coïncident avec une accélération négative (vitesse qui diminue en montant et qui augmente en redescendant).

Résoudre le problème Sur le graphique $v(t)$ ci-dessus, deux points présentent une accélération négative, c'est-à-dire une pente négative, tout en excluant les frontières du domaine indiqué. Donc, la réponse est

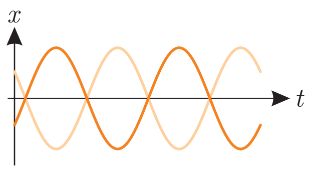
les points 2 et 6. (réponse)

Valider la réponse Sur le graphique ci-dessus, les points 2 et 6 se trouvent vis-à-vis des secteurs positifs de la courbe $x(t)$, sans inclure la position maximale.

Q3 **Décortiquer le problème** On a un graphique de l'accélération en fonction du temps.

a. **Identifier la clé** La clé est que les points particuliers d'une courbe $a(t)$ peuvent être associés à des positions particulières d'un mouvement d'oscillation, et ainsi à la courbe $x(t)$ correspondante.

Résoudre le problème Les points où $a = 0$ (points d'inflexion) représentent les moments où la vitesse croissante devient décroissante, ou vice versa. Cela se produit quand la particule coupe l'axe, c'est-à-dire lorsque $x = 0$. Donc $x = 0$ lorsque $a = 0$. Par ailleurs, l'accélération est maximale lorsque la particule atteint une position extrême (force de rappel maximale). À la position maximale positive, l'accélération est cependant à sa valeur maximale négative, pour que la particule inverse son mouvement. De la même manière, l'accélération est maximale et positive lorsque la position est maximale et négative. On obtient la courbe $x(t)$ correspondante suivante.

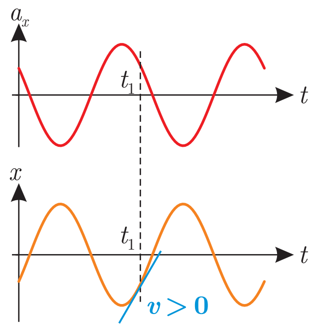


(réponse)

Valider la réponse L'équation 1.7 stipule bien que le lien entre a_x et x est un facteur constant et négatif, ce qui est cohérent avec des courbes cosinusoïdales miroirs : $a_x = -\omega^2 x$.

b. **Identifier la clé** La clé est que l'accélération est proportionnelle à l'opposé de la position.

Illustrer la situation La figure ci-contre illustre le graphique de l'accélération en fonction du temps comme présenté dans l'énoncé, ainsi que le graphique correspondant de la position en fonction du temps.



Résoudre le problème La vitesse étant de même signe que la dérivée de la position par rapport au temps, ou de même signe que la pente de $x(t)$, on peut utiliser le graphique produit en **a.** pour observer qu'au temps t_1, la pente de $x(t)$ est positive ; donc la particule se déplace dans le sens positif de l'axe du mouvement à l'instant t_1,

donc vers la droite. (réponse)

Valider la réponse L'accélération positive mais décroissante du temps t_1 correspond à la portion du mouvement où la particule revient de sa position minimale en se déplaçant vers sa position d'équilibre. La vitesse y est bien positive.

Q4 **Décortiquer le problème** Les équations fournies ont toutes la même forme, celle d'un mouvement cosinusoïdal sans déphasage : $x = x_\mathrm{m}\cos(\omega t)$.

a. **Identifier la clé** La clé est que l'amplitude est le coefficient qui multiplie le cosinus.

Résoudre le problème Pour une même valeur de x_m, l'amplitude correspond aux valeurs de x lorsque $\cos(\omega t) = 1$. Ainsi,

$$0{,}7x_\mathrm{m} < 0{,}8x_\mathrm{m} < x_\mathrm{m} < 2x_\mathrm{m}$$

et donc

$$x_{4\mathrm{m}} < x_{3\mathrm{m}} < x_{1\mathrm{m}} < x_{2\mathrm{m}} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Pour toute valeur de x_m, une simplification donnerait $0{,}7 < 0{,}8 < 1 < 2$.

b. **Identifier la clé** La clé est que le facteur qui multiplie t dans l'argument du cosinus est la fréquence angulaire du mouvement.

Résoudre le problème La fréquence angulaire est liée à l'inverse de la période par $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Pour une même valeur de ω, on a donc

$$3\omega > 2\omega = 2\omega > \omega \ .$$

En remplaçant ω par $\frac{2\pi}{T}$, on a

$$3 \times \frac{2\pi}{T} > 2 \times \frac{2\pi}{T} = 2 \times \frac{2\pi}{T} > 1 \times \frac{2\pi}{T} \ .$$

Après simplification, on obtient

$$\frac{T}{3} < \frac{T}{2} = \frac{T}{2} < \frac{T}{1} \ ,$$

et finalement

$$T_3 < T_1 = T_4 < T_2 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse C'est bien l'ordre inverse par rapport aux fréquences angulaires croissantes.

c. **Identifier la clé** La clé est que l'amplitude de la vitesse est égale au produit ωx_m, comme dans l'équation $v_x = -\omega x_\mathrm{m}\sin(\omega t + \phi)$.

Résoudre le problème On peut calculer d'abord la vitesse maximale de chaque système :

$$v_{\mathrm{m}1} = 2\omega \times x_\mathrm{m} \qquad v_{\mathrm{m}2} = \omega \times 2x_\mathrm{m} \qquad v_{\mathrm{m}3} = 3\omega \times 0{,}8x_\mathrm{m} \qquad v_{\mathrm{m}4} = 2\omega \times 0{,}7x_\mathrm{m} \ .$$

Après simplification, on a

$$v_{\mathrm{m}1} = 2\omega_{x\mathrm{m}} \qquad v_{\mathrm{m}2} = 2\omega x_\mathrm{m} \qquad v_{\mathrm{m}3} = 2{,}4\omega x_\mathrm{m} \qquad v_{\mathrm{m}4} = 1{,}4\omega x_\mathrm{m} \ .$$

Voici les vitesses maximales en ordre croissant :

$$v_{\mathrm{m}4} < v_{\mathrm{m}1} = v_{\mathrm{m}2} < v_{\mathrm{m}3} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse En simplifiant, on trouve bien

$$1{,}4 \quad < \quad 2 \quad = \quad 2 \quad < \quad 2{,}4 \ .$$

E5 **Décortiquer le problème** La phase correspond à l'argument de la fonction cosinus.

Connues		Inconnue
$\Phi_2 = t + \pi$	$\Phi_1 = t + \pi/2$	$\Delta\Phi$

Identifier la clé On calcule la différence de phase à l'aide de l'équation

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 \ . \tag{i}$$

Résoudre le problème On obtient

$$\Delta\Phi = (t + \pi) - \left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La différence de phase est mesurée en radians.

E6 **Décortiquer le problème** Les données fournies permettent de caractériser tous les aspects de l'oscillation.

Connues		Inconnue
$a_\mathrm{m} = 0{,}2g$	$T = 2{,}0\,\mathrm{s}$	x_m

Identifier la clé Les trois variables sont liées par l'équation $a_x = -\omega^2 x$.
Résoudre le problème Si on considère les valeurs maximales de x et de a_x, on peut ne lier que les valeurs absolues de x et de a_x :

$$a_\mathrm{m} = |\omega^2 x_\mathrm{m}|, \qquad \text{où } \omega = \frac{2\pi}{T} \ .$$

Ces deux équations réunies donnent

$$a_\mathrm{m} = \frac{4\pi^2}{T^2} \times x_\mathrm{m} \ .$$

En isolant x_m, on obtient

$$x_\mathrm{m} = \frac{a_\mathrm{m} T^2}{4\pi^2} = \frac{0{,}2 \times 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \times 2{,}0\,\mathrm{s}}{4\pi^2} = 0{,}20\,\mathrm{m} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur est plausible pour un tremblement de terre important.

E7 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$v_\mathrm{m} = 0{,}450\,\mathrm{m/s^2}$	T
$\frac{1}{2}T = 0{,}80\,\mathrm{s}$	x_m
	a_m

a. **Identifier la clé** Dans un cycle complet, la masse s'éloigne deux fois du centre pour y revenir (une fois vers les positifs, une fois vers les négatifs).
Résoudre le problème Le temps de 0,80 s est la durée de la moitié d'un cycle, d'un seul aller-retour vers l'une des positions extrêmes. La période entière est donc le double de cette durée :

$$T = 2 \times (\frac{1}{2}T) = 2 \times 0{,}80\,\mathrm{s} = 1{,}60\,\mathrm{s} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La vitesse maximale est liée à l'amplitude du mouvement et à la fréquence angulaire et s'observe lorsque le bloc passe par sa position d'équlibre.
Résoudre le problème L'équation de la vitesse a la forme $v_x = -\omega x_\mathrm{m} \sin(\omega t + \phi)$. On peut donc affirmer que $v_\mathrm{m} = \omega x_\mathrm{m}$. Sachant que $\omega = \frac{2\pi}{T}$, on obtient

$$x_\mathrm{m} = \frac{v_\mathrm{m}}{\omega} = \frac{v_\mathrm{m}}{(\frac{2\pi}{T})} = \frac{0{,}450\,\mathrm{m/s}}{(\frac{2\pi}{1{,}60\,\mathrm{s}})} = 0{,}11\,\mathrm{m} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. **Identifier la clé** L'accélération maximale est liée à l'amplitude du mouvement et à la fréquence angulaire.

Résoudre le problème L'équation de l'accélération a la forme $a_x = -\omega^2 x_\mathrm{m} \cos(\omega t + \phi)$. On peut donc affirmer que $a_\mathrm{m} = \omega^2 x_\mathrm{m}$. Par extension, on peut aussi utiliser le raisonnement fait en **b.** pour écrire $a_\mathrm{m} = \omega v_\mathrm{m}$. On obtient alors

$$a_\mathrm{m} = v_\mathrm{m}\omega = v_\mathrm{m} \times \frac{2\pi}{T} = 0{,}450\,\mathrm{m/s} \times \frac{2\pi}{1{,}60\,\mathrm{s}} = 1{,}8\,\mathrm{m/s^2}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Le calcul utilisant la réponse obtenue en **b.** donne le même résultat : $a_\mathrm{m} = \omega^2 x_\mathrm{m} = 1{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.

E8 **Décortiquer le problème** L'équation donnée est celle de la position en fonction du temps. Elle contient tous les paramètres du mouvement, et ses dérivées première et seconde permettent de trouver la vitesse et l'accélération.

Connues	Inconnues
$x_\mathrm{m} = 2{,}50\,\mathrm{cm}$	T
$\omega = 4\,\mathrm{rad/s}$	f
$\phi = \pi\,\mathrm{rad}$	$d = 4x_\mathrm{m}$
	$v(t)$
	$a(1{,}50\,\mathrm{s})$

a. **Identifier la clé** La période recherchée est liée à la fréquence angulaire $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Résoudre le problème

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\,\mathrm{rad/s}} = \frac{\pi}{2}\mathrm{s} = 1{,}57\,\mathrm{s}\ .$$

La fréquence étant l'inverse de la période, on obtient

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1{,}57\,\mathrm{s}} = 0{,}637\,\mathrm{Hz}$$

$$T = 1{,}57\,\mathrm{s} \quad \text{et} \quad f = 0{,}637\,\mathrm{Hz}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La distance parcourue en un aller-retour complet équivaut à deux aller-retour du centre vers l'une des positions extrêmes, c'est-à-dire à quatre fois la distance d'un aller du centre vers une position extrême.

Résoudre le problème

$$d = 4 \times x_\mathrm{m} = 4 \times 2{,}50\,\mathrm{cm} = 10{,}0\,\mathrm{cm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. **Identifier la clé** Il suffit de localiser quelques points particuliers de la courbe (points extrêmes et intersections d'axes) pour connaître son allure.

Résoudre le problème Les intersections d'axes correspondent aux points où la solution de l'équation de la position est 0, c'est-à-dire les instants t où le cosinus de $(4t + \pi)$ égale 0. Cela se produit lorsque l'argument du cosinus égale $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, etc., donc lorsque $(4t + \pi) = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$. La solution de t pour les quatre premiers instants de la série sont

$$(4t + \pi) = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{-\pi}{8}\mathrm{s}$$

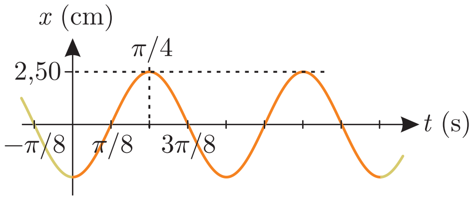
$$(4t + \pi) = \frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{8}\mathrm{s}$$

$$(4t + \pi) = \frac{5\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{3\pi}{8}\mathrm{s}\ .$$

On sait que l'amplitude est de 2,50 cm. Il ne reste donc qu'à déterminer l'instant d'un point extrême pour pouvoir faire apparaître la courbe entière. On résout pour un sommet positif, qui apparaît lorsque $\cos(4t+\phi)=+1$. Cela se produit lorsque $(4t+\phi)=0,\ 2\pi, 4\pi$, etc. Le premier cas donnant un temps positif se trouve lorsque

$$(4t+\pi)=2\pi \qquad \Rightarrow \qquad t=\frac{\pi}{4}\text{s} \ .$$

On a maintenant tout ce qu'il faut pour tracer un cycle complet et, par répétition, tous les cycles suivants ou précédents.



(réponse)

Valider la réponse On a bien la courbe d'un mouvement dont l'amplitude est 2,50 cm et dont le déphasage (décalage vers la gauche) est d'un demi-cycle ($\phi=\pi$).

d. Identifier la clé Les mêmes paramètres apparaissent dans l'équation de la vitesse, mais la forme est plutôt $v_x=-v_\mathrm{m}\sin(\omega t+\phi)$.

Résoudre le problème

$$v_x=-v_\mathrm{m}\sin(\omega t+\phi)$$

où

$$v_\mathrm{m}=\omega x_\mathrm{m}=4\,\mathrm{rad/s}\times 2{,}50\,\mathrm{cm}=10\,\mathrm{cm/s}$$
$$v_x=-(10{,}0\,\mathrm{cm/s})\sin(4t+\pi)\ . \qquad \text{(réponse)}$$

e. Identifier la clé L'accélération de la particule à 1,50 s est la solution de l'équation ayant la forme $a_x=-\omega^2x_\mathrm{m}\cos(\omega t+\phi)$.

Résoudre le problème Avec les paramètres du mouvement donné, l'équation devient

$$a_x=-(4\,\mathrm{rad/s})^2\times 2{,}50\,\mathrm{cm}\times\cos(4\,\mathrm{rad/s}\times t+\pi)\ .$$

Ainsi,

$$a_x=-40\,\mathrm{cm/s^2}\cos(4\,\mathrm{rad/s}\times 1{,}50\,\mathrm{s}+\pi)$$
$$a_x=38{,}4\,\mathrm{cm/s^2}=0{,}384\,\mathrm{m/s^2}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur est raisonnable étant donné l'ordre de grandeur de l'amplitude du mouvement et de la fréquence angulaire.

E9 Décortiquer le problème L'équation donnée contient tous les paramètres du mouvement.

Connues	Inconnues
$x_\mathrm{m}=30{,}0\,\mathrm{cm}$	v_m
$\omega=1{,}98\,\mathrm{rad/s}$	$a_{x=-15{,}0\,\mathrm{cm}}$
	$\Delta t_{a=2{,}00\,\mathrm{m/s^2},v<0}$

a. Identifier la clé La vitesse maximale est liée à l'amplitude du mouvement et à la fréquence angulaire.

Résoudre le problème L'équation de la vitesse a la forme $v_x=-\omega x_\mathrm{m}\sin(\omega t+\phi)$. On peut donc affirmer que $v_\mathrm{m}=\omega x_\mathrm{m}$. Ainsi,

$$v_\mathrm{m}=\omega x_\mathrm{m}=1{,}98\,\mathrm{rad/s}\times 30{,}0\,\mathrm{cm}=59{,}4\,\mathrm{cm/s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Identifier la clé L'accélération est directement liée à la position par $a_x=-\omega^2x$.

Résoudre le problème En remplaçant x par $-15{,}0$ cm dans $a_x=-\omega^2x$ (car l'ouest correspond à des positions négatives), on obtient

$$a_x=-(1{,}98\,\mathrm{rad/s})^2\times(-15{,}0\,\mathrm{cm})=58{,}8\,\mathrm{cm/s^2}=0{,}588\,\mathrm{m/s^2}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

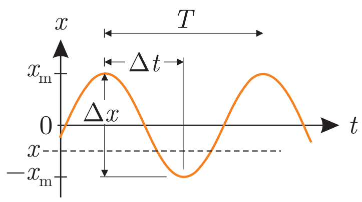
c. Identifier la clé La combinaison d'une valeur d'accélération et d'un sens à la vitesse ne se produit qu'une fois par cycle.

Résoudre le problème La clé permet de voir que la durée recherchée est la période du mouvement. Ainsi,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1{,}98\,\mathrm{rad/s}} = 3{,}17\,\mathrm{s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Si l'accélération passe deux fois par cycle à la valeur de $+2{,}00\,\mathrm{m/s^2}$, une seule de ces deux fois coïncide avec une vitesse négative.

P10 Illustrer la situation La figure ci-contre montre le graphique de la position en fonction du temps.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\Delta x = 25{,}0\,\mathrm{cm}$	T
$\Delta t = 2{,}30\,\mathrm{s}$	x_m
$x = -x_m + 5{,}00\,\mathrm{cm}$	v_x

a. Identifier la clé Selon la figure, la période correspond au double du temps Δt :

$$T = 2\,\Delta t\ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème On obtient

$$T = 2 \times 2{,}30\,\mathrm{s} = 4{,}60\,\mathrm{s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Identifier la clé Comme le montre la figure, la position varie de $-x_m$ à x_m, ce qui correspond à une distance de $2x_m$:

$$\Delta x = 2x_m \Rightarrow x_m = \frac{\Delta x}{2}\ . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème On obtient

$$x_m = \frac{25{,}0\,\mathrm{cm}}{2} = 12{,}5\,\mathrm{cm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. Décortiquer le problème On cherche la vitesse lorsque la position est 5,00 cm à droite de la position la plus à gauche, c'est-à-dire lorsque $x = -x_m + 5{,}00\,\mathrm{cm} = -7{,}50\,\mathrm{cm}$.

Identifier la clé La vitesse est donnée par l'équation 1.5 :

$$v_x = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi) = -\omega x_m \sin(\Phi)\ , \qquad \text{(iii)}$$

où $\omega = 2\pi/T$ est la fréquence angulaire et Φ est la phase. La phase dépend de la position de la particule. Selon l'équation 1.2,

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi) = x_m \cos(\Phi)\ . \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème On calcule d'abord la fréquence angulaire :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4{,}60\,\mathrm{s}} = 1{,}366\,\mathrm{rad/s}\ . \qquad \text{(v)}$$

Ensuite, on calcule la phase qui correspond à x :

$$-7{,}50 = 12{,}5\,\cos(\Phi)$$
$$\Rightarrow \Phi = \arccos\left(\frac{-7{,}50}{12{,}50}\right)$$
$$\Phi = \begin{cases} 2{,}214\,\mathrm{rad} \\ -2{,}214\,\mathrm{rad} \end{cases}$$

La vitesse correspondant à la première valeur de la phase est

$$v_x = -1{,}366\,\mathrm{rad/s} \times 12{,}5\,\mathrm{cm}\ \sin(2{,}214\,\mathrm{rad}) = -13{,}66\,\mathrm{cm/s}\ .$$

La vitesse pour la deuxième valeur de la phase est

$$v_x = -1{,}366\,\mathrm{rad/s} \times 12{,}5\,\mathrm{cm}\ \sin(-2{,}214\,\mathrm{rad}) = 13{,}66\,\mathrm{cm/s}\ .$$

La vitesse est donc

$$v_x = \pm 13{,}7\,\mathrm{cm/s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Pour une position donnée, la vitesse peut avoir deux valeurs : une valeur lorsque l'objet se déplace vers la droite et une autre valeur lorsque l'objet se déplace vers la gauche. Ces deux vitesses doivent avoir le même module, ce qui est bien le cas ici.

P11 **Décortiquer le problème** On a un graphique de la position en fonction du temps.

a. **Identifier la clé** La période est l'étendue horizontale d'un cycle complet sur le graphique.

Résoudre le problème Si on peut repérer l'intersection de la courbe avec un point précis du quadrillage, il s'agit ensuite d'évaluer le nombre de graduations horizontales séparant ce point d'un point homologue plus loin sur la courbe. La courbe semble passer précisément par $x = 3\,\mathrm{cm}$ à $t = 0$. Le point le plus près où $x = 3\,\mathrm{cm}$ sur une section ascendante de la courbe se trouve cinq cases plus loin, vis-à-vis $t = 5{,}0\,\mathrm{s}$. Ainsi,

$$T = 5{,}0\,\mathrm{s} - 0 = 5{,}0\,\mathrm{s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Toutes les paires de points homologues sont distantes de 5,0 s. Qui plus est, le graphique présente deux cycles entiers et s'étend sur 10,0 s.

b. **Identifier la clé** L'amplitude est la distance entre le centre du mouvement et l'une des positions extrêmes.

Résoudre le problème Le mouvement est centré à $x = 0$, et les sommets se trouvent à $x = \pm 4{,}0\,\mathrm{cm}$. Ainsi,

$$x_\mathrm{m} = 4{,}0\,\mathrm{cm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Le mouvement d'oscillation entier s'étend sur le double de l'amplitude, soit effectivement de $+4{,}0\,\mathrm{cm}$ à $-4{,}0\,\mathrm{cm}$.

c. **Décortiquer le problème** On a déterminé précédemment certaines caractéristiques du mouvement.

Connues	Inconnue
$x_\mathrm{m} = 4{,}0\,\mathrm{cm}$	ϕ
$T = 5{,}0\,\mathrm{s}$	

Identifier la clé La constante de phase est la variable ϕ de l'équation de la position en fonction du temps.

Résoudre le problème Connaissant les valeurs de l'amplitude et de la période, on peut générer l'équation particulière de ce mouvement et trouver la valeur de ϕ à partir d'une position connue. Ainsi,

$$x = x_\mathrm{m}\cos(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad \text{où } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{5{,}0\,\mathrm{s}} = 0{,}4\pi\ \frac{\mathrm{rad}}{2{,}0}$$

devient

$$x = 4{,}0\cos(0{,}4\pi t + \phi), \qquad \text{en centimètres et en secondes}$$
$$\phi = \arccos\left(\frac{x}{4\,\mathrm{cm}}\right) - 0{,}4\pi t\ .$$

En insérant les valeurs d'un point connu, soit (0 s, 3,0 cm), on obtient

$$\phi = \arccos\left(\frac{3{,}0\,\text{cm}}{4{,}0\,\text{cm}}\right) - 0{,}4\pi \times 0 = \pm 0{,}72\,\text{rad}\ .$$

Il reste à déterminer celle des deux solutions possibles qui est la bonne. Pour ce faire, on peut évaluer que 0,72 rad représente un peu plus d'un dixième de cycle, $\frac{0{,}72}{2\pi} = 0{,}11$. Ainsi, si la courbe du problème est décalée d'un dixième de cycle par rapport à une courbe de cosinus standard, elle est décalée vers la droite. Et un décalage vers la droite correspond à une valeur négative de déphasage. Ainsi,

$$\phi = -0{,}72\,\text{rad}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse On peut utiliser cette valeur de ϕ pour localiser un passage à $x = 0$, et c'est bien avec $\phi = -0{,}72$ rad qu'on trouve les intersections d'axes aperçues sur le graphique ($t = \frac{\arccos(\frac{0}{x_\text{m}})-\phi}{\omega} = 1{,}8\,\text{s}$).

d. **Identifier la clé** L'équation de la vitesse en fonction du temps a la forme $v_x = -\omega x_\text{m}\sin(\omega t+\phi)$.
Résoudre le problème Les paramètres du mouvement étant connus, on peut écrire l'équation de la vitesse :

$$v_x = -\omega x_\text{m}\sin(\omega t + \phi) = -0{,}4\pi\ \text{rad/s} \times 4\,\text{cm}\sin(0{,}4\pi t - 0{,}72)\ .$$

Finalement, on a

$$v_x = -1{,}6\,\text{cm/s} \times \pi \times \sin(0{,}4\pi\,\text{rad/s} \times t - 0{,}72\,\text{rad})\ . \qquad \text{(réponse)}$$

P12 **Décortiquer le problème** On doit écrire l'équation de la position en fonction du temps à partir des données sur l'un des instants du mouvement. On suppose que les positions et les vitesses vers la gauche sont des valeurs négatives.

Connues	Inconnues
$T = 2{,}40\,\text{s}$	ω
$x_{t=0} = -18{,}8\,\text{cm}$	ϕ
$v_{t=0} = -0{,}677\,\text{m/s}$	x_m

Identifier la clé La clé est qu'il faut utiliser les équations de la position et de la vitesse qui contiennent les mêmes deux inconnues (système de deux équations et deux inconnues).
Résoudre le problème Les équations de la position et de la vitesse sont

$$x = x_\text{m}\cos(\omega t + \phi) \qquad \text{et} \qquad v_x = -\omega x_\text{m}\sin(\omega t + \phi)\ .$$

Si on considère que $\omega = \frac{2\pi}{T}$ peut être connu rapidement grâce à la période de 2,40 s, et que l'instant étudié est $t = 0$, les deux équations pourront devenir

x<0 et xm>0 donc cosΦ<0
la soln est dans le 2e ou 3e Quad.

$$x = x_\text{m}\cos(\omega \times 0 + \phi) \qquad \text{et} \qquad v_x = -\frac{2\pi}{T}x_\text{m}\sin(\omega \times 0 + \phi)$$

$$x = x_\text{m}\cos\phi \qquad \text{et} \qquad v_x = -\frac{2\pi}{T}x_\text{m}\sin\phi\ ,$$

vx<0 et T et xm>0 donc sinΦ>0
la soln est dans le 1er ou 2e Quad.

avec

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2{,}40\,\text{s}} = 2{,}62\,\text{rad/s}\ ,$$

où les deux seules inconnues sont x_m et ϕ. La division de la position par la vitesse donne

$$\frac{x}{v_x} = \frac{x_\text{m}\cos\phi}{-\frac{2\pi}{T}x_\text{m}\sin\phi} = \frac{-T}{2\pi\tan\phi}\ .$$

On peut maintenant calculer ϕ :

$$\phi = \arctan\left(\frac{-Tv_x}{2\pi x}\right) = \arctan\left(-\frac{2{,}40\,\text{s} \times -0{,}677\,\text{m/s}}{2\pi \times -0{,}188\,\text{m}}\right) = -0{,}942\,\text{rad}\ .$$

Pour une tangente négative, la calculatrice donne la solution par défaut dans le 4e quadrant.
Il faut calculer la solution dans le 2e quadrant.

Cette valeur (0,942 rad) est la solution par défaut donnée par une calculatrice, mais la fonction arc tangente admet toujours deux solutions, et dans le cas où ~~le numérateur et le dénominateur sont négatifs, on cherche une solution dans le troisième quadrant. Ici, on doit rechercher la seconde solution de l'équation, soit~~

Φ=π+(-0,942 rd)= + 2,20 rd

$$\cancel{\phi' = \phi - \pi = 0{,}942\,\text{rad} - \pi = -2{,}20\,\text{rad}}\ .$$

On peut alors trouver x_m à partir de la valeur connue de ϕ :

$$x = x_\text{m} \cos\phi \qquad \Rightarrow \qquad x_\text{m} = \frac{x}{\cos\phi} = \frac{-0{,}188\,\text{m}}{\cos(+2{,}20\,\text{rad})} = 0{,}320\,\text{m}\ .$$

On peut finalement écrire l'équation de la position en fonction du temps :

$$x = 0{,}320\,\text{m} \times \cos(2{,}62\,\text{rad/s} \times t + 2{,}20\,\text{rad})\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Si on résout cette équation avec $t = 0$, on obtient effectivement 18,8 cm.

P13 **Décortiquer le problème** Il faut retrouver les paramètres du mouvement à partir de deux paires position/instant données.

Connues	Inconnues
$x_{t=0{,}200\,\text{s}} = 0{,}100\,\text{m}$	T
$x_{t=0{,}800\,\text{s}} = -0{,}100\,\text{m}$	x_m

Identifier la clé La clé est que le déphasage ϕ est nul, car l'instant $t = 0$ coïncide avec la position maximale, comme une courbe cosinusoïdale sans déphasage.

a. **Résoudre le problème** L'équation de la position peut être appliquée aux deux paires position/instant :

$$x_1 = x_\text{m}\cos(\omega t_1 + 0) \qquad \text{et} \qquad x_2 = x_\text{m}\cos(\omega t_2 + 0)\ .$$

Le rapport des deux positions données permet de faire disparaître l'une des inconnues :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_\text{m}\cos(\omega t_1)}{x_\text{m}\cos(\omega t_2)} = \frac{\cos(\omega t_1)}{\cos(\omega t_2)}\ .$$

Aucune identité trigonométrique ne semble permettre de dénouer cette impasse, à moins qu'on insère les valeurs des positions pour obtenir une forme simplifiée :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{0{,}100\,\text{m}}{-0{,}100\,\text{m}} = -1 = \frac{\cos(\omega t_1)}{\cos(\omega t_2)}\ .$$

On peut aussi utiliser la forme

$$\cos(\omega t_1) + \cos(\omega t_2) = 0\ .$$

On peut alors reconnaître la forme de l'identité trigonométrique suivante :

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\ .$$

Appliquée à ce problème, l'identité devient

$$0 = 2\cos\left(\frac{\omega t_1 + \omega t_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega t_1 - \omega t_2}{2}\right)$$
$$0 = \cos\left(\frac{\omega}{2} \times (t_1 + t_2)\right)\cos\left(\frac{\omega}{2} \times (t_1 - t_2)\right)\ .$$

Les temps t_1 et t_2 étant connus, on peut simplifier :

$$0 = \cos\left(\frac{\omega}{2} \times (0{,}200\,\mathrm{s} + 0{,}800\,\mathrm{s})\right)\cos\left(\frac{\omega}{2} \times (0{,}200\,\mathrm{s} - 0{,}800\,\mathrm{s})\right)$$
$$0 = \cos\left(\frac{\omega}{2} \times 1\right)\cos\left(\frac{\omega}{2} \times -0{,}600\right) = \cos(\frac{1}{2}\omega)\cos(-0{,}3\omega)\ .$$

Cette égalité se produit lorsque l'un des deux termes cosinus égale zéro, c'est-à-dire lorsque l'argument de l'un des deux cosinus égale $\frac{\pi}{2}$, soit lorsque

$$\frac{1}{2}\omega = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad -0{,}3\omega = \frac{\pi}{2}\ ,$$

ou autrement dit lorsque

$$\omega = \pi \qquad \text{ou} \qquad \omega = -0{,}15\pi\ .$$

La fréquence angulaire étant une valeur positive, liée à une durée positive par $\omega = \frac{2\pi}{T}$, on conserve la solution positive $\omega = \pi$ pour déterminer T :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2{,}00\,\mathrm{s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Résoudre le problème Ayant trouvé la fréquence angulaire, on peut réutiliser l'une ou l'autre des équations initiales pour déterminer l'amplitude facilement :

$$x_1 = x_\mathrm{m}\cos(\omega t_1 + 0) \qquad \Rightarrow \qquad x_\mathrm{m} = \frac{x_1}{\cos(\omega t_1)}$$

$$x_\mathrm{m} = \frac{0{,}100\,\mathrm{m}}{\cos(\pi \times 0{,}200\,\mathrm{s})} = 0{,}124\,\mathrm{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'amplitude est effectivement plus grande que les positions données, et les valeurs trouvées de ω et de x_m permettent de vérifier la validité de l'autre paire de valeurs t_2 et x_2.

P14 **Décortiquer le problème** La hauteur de l'insecte oscille de $\pm 20{,}0\,\mathrm{cm}$ autour du centre de la roue et la durée d'un cycle est liée à la vitesse de la bicyclette et au rayon de la roue.

Connues	Inconnues
$y_\mathrm{m} = 20{,}0\,\mathrm{cm}$	ω
$r_\mathrm{roue} = 35{,}0\,\mathrm{cm}$	ϕ
$v_\mathrm{vélo} = 18{,}0\,\mathrm{km/h}$	
$h_{t=0} = 35{,}0\,\mathrm{cm}$	

a. Identifier la clé La clé pour déterminer la fréquence angulaire est la rotation de la roue, dont la vitesse angulaire est liée à la vitesse de translation et au rayon.

Résoudre le problème On sait que $v_\mathrm{vélo} = \omega r_\mathrm{roue}$, où la vitesse angulaire de la roue coïncide avec la fréquence angulaire du mouvement de l'insecte :

$$\omega = \frac{v_\mathrm{vélo}}{r_\mathrm{roue}} = \frac{18{,}0\,\mathrm{km/h} \times \frac{1\,\mathrm{m/s}}{3{,}6\,\mathrm{km/h}}}{0{,}35\,\mathrm{m}} = 14{,}3\,\mathrm{rad/s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Décortiquer le problème On doit connaître la vitesse angulaire, mais aussi la constante de phase pour exprimer une équation du mouvement en fonction du temps.

Identifier la clé La position à $t = 0$ coïncidant avec la position centrale en descendant verticalement, la vitesse est maximale et négative.

Résoudre le problème La clé suggère l'égalité suivante :

$$v_y = -\omega y_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \phi) = -v_{\mathrm{m}} \qquad \text{avec} \qquad \omega y_{\mathrm{m}} = v_{y_{\mathrm{m}}} \ .$$

Ainsi,

$$\sin\phi = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\pi}{2} \ .$$

L'amplitude du mouvement est la distance de l'insecte par rapport au centre de la roue (20,0 cm). La vitesse maximale peut alors être déterminée numériquement :

$$v_{\mathrm{m}} = \omega y_{\mathrm{m}} = 14{,}3\,\mathrm{rad/s} \times 0{,}200\,\mathrm{m} = 2{,}86\,\mathrm{m/s} \ .$$

L'équation complète de la vitesse est donc

$$v_y = -2{,}86\,\mathrm{m/s} \times \sin(14{,}3\,\mathrm{rad/s} \times t + \frac{\pi}{2}) \ .$$

Si l'on veut, il est possible de simplifier cette équation puisque $\sin(\theta + \pi/2) = \cos\theta$:

$$v_y = -2{,}86\,\mathrm{m/s} \times \cos(14{,}3\,\mathrm{rad/s} \times t) \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Q15 **Décortiquer le problème** Les équations décrivant le mouvement d'un système bloc-ressort permettent d'étudier l'influence d'une variable du système sur les autres variables.

Connues	Inconnues
$x_{1m} = x_{2m}$	m_1/m_2
$T_2 = 2T_1$	a_{1m}/a_{2m}
$k_1 = k_2$	

Identifier la clé La clé est de comparer une équation décrivant le système bloc-ressort écrite pour chacune des deux situations.

a. **Résoudre le problème** La masse des blocs apparaît dans l'équation $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Une période étant le double de l'autre, on peut trouver le rapport entre les fréquences angulaires :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\begin{aligned} T_2 &= 2T_1 \\ \frac{2\pi}{\omega_2} &= 2 \times \frac{2\pi}{\omega_1} \\ \omega_1 &= 2\omega_2 \\ \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} &= 2\sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \ . \end{aligned}$$

Puisque les ressorts sont identiques ($k_1 = k_2$), une simplification est possible :

$$\sqrt{\frac{1}{m_1}} = 2\sqrt{\frac{1}{m_2}} \ .$$

Si on met en évidence le rapport m_1/m_2, on obtient

$$\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La période varie selon l'inverse de la fréquence angulaire, laquelle varie selon l'inverse de la racine de la masse. Il est donc normal que la masse varie avec le carré de la période. Toutes choses étant égales par ailleurs, une période deux fois plus courte est associée à une masse quatre fois plus faible.

b. Résoudre le problème L'accélération d'un système bloc-ressort est associée à la fréquence angulaire et à la position par l'équation $a = -\omega^2 x$. Ce lien est valide également pour les valeurs maximales (positives) : $a_\mathrm{m} = \omega^2 x_\mathrm{m}$. Encore une fois : $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Ainsi,

$$a_{1\mathrm{m}} = \omega_1^2 x_{1\mathrm{m}} = \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 x_{1\mathrm{m}} \qquad \text{et} \qquad a_{2\mathrm{m}} = \omega_2^2 x_{2\mathrm{m}} = \left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 x_{2\mathrm{m}} \; .$$

On peut maintenant traiter et simplifier le rapport $a_{1\mathrm{m}}/a_{2\mathrm{m}}$:

$$\frac{a_{1\mathrm{m}}}{a_{2\mathrm{m}}} = \frac{\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 x_{1\mathrm{m}}}{\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 x_{2\mathrm{m}}} = \frac{T_2^2 x_{1\mathrm{m}}}{T_1^2 x_{2\mathrm{m}}} \; .$$

Sachant que $T_2 = 2T_1$ et que $x_{1\mathrm{m}} = x_{2\mathrm{m}}$, l'équation devient :

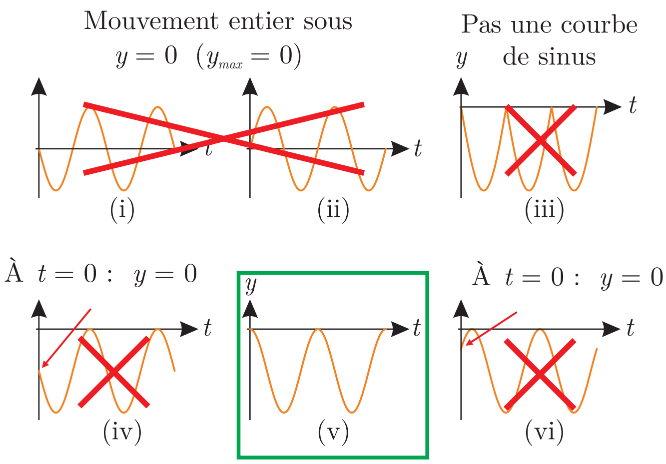
$$\frac{a_{1\mathrm{m}}}{a_{2\mathrm{m}}} = \frac{(2T_1)^2 x_{2\mathrm{m}}}{T_1^2 x_{2\mathrm{m}}} = \frac{4T_1^2 x_{2\mathrm{m}}}{T_1^2 x_{2\mathrm{m}}} = 4 \; . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'accélération variant selon le carré de la fréquence angulaire et celle-ci variant selon l'inverse de la période, il est logique qu'une période deux fois plus petite soit associée à des accélérations quatre fois plus grandes.

Q16 Décortiquer le problème Les conditions connues du ressort permettent de déterminer les paramètres du mouvement et de reconnaître ces paramètres sur l'un des graphiques.

Identifier la clé La clé est d'associer l'information de l'énoncé à une caractéristique précise du système.

Résoudre le problème Si l'extrémité libre du ressort est à la position $y = 0$ lorsque rien n'y est accroché et qu'on laisse tomber de ce point un objet suspendu, la hauteur $y = 0$ sera la hauteur maximale du mouvement. Le mouvement se fera donc entièrement dans $y < 0$, ce qui élimine les graphiques (i) et (ii) ci-dessous.



De plus, si on laisse tomber l'objet à partir de ce point le plus haut à $t = 0$, la courbe de la position doit donc couper l'axe horizontal à $t = 0$, soit l'origine. Ceci écarte les graphiques (iv) et (vi).

Finalement, on pouvait d'emblée éliminer le graphique (iii), car la courbe n'est pas une courbe sinusoïdale et ne peut représenter le mouvement harmonique que l'objet décrit, suspendu à un ressort.

Le graphique est (v). (réponse)

Valider la réponse Le graphique (v) représente bien un mouvement harmonique passant par sa position maximale $y = 0$ à $t = 0$.

E17 **Décortiquer le problème** Les données de l'énoncé permettent de définir tous les paramètres de l'équation de la position en fonction du temps.

Connues	Inconnues
$m = 2{,}00\,\mathrm{kg}$	k
$x_{t=0} = x_\mathrm{m} = 20{,}0\,\mathrm{cm}$	v_m
$t_{x=-20,v=0} = 0{,}800\,\mathrm{s}$	$v_{moy,[0{,}500\,\mathrm{s},2{,}500\,\mathrm{s}]}$
	ω
	ϕ

a. **Identifier la clé** Les deux définitions de la fréquence angulaire pour le système masse-ressort lient la période à la constante de rappel :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \ .$$

Résoudre le problème La clé permet de calculer k à condition de connaître la période T. Celle-ci est donnée indirectement dans l'énoncé, car le temps de parcours entre deux positions immobiles opposées est la moitié d'une période. Ainsi,

$$t_{x=-20,v=0} = 0{,}800\,\mathrm{s} = \frac{1}{2}T = 0{,}800\,\mathrm{s} \qquad \Rightarrow \qquad T = 1{,}60\,\mathrm{s} \ .$$

On isole et on calcule la constante de rappel :

$$k = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 2{,}00\,\mathrm{kg} \times \left(\frac{2\pi}{1{,}60\,\mathrm{s}}\right)^2 = 30{,}8\,\mathrm{N/m} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La vitesse maximale est liée à la fréquence angulaire et à l'amplitude du mouvement.

Résoudre le problème On sait que $v_\mathrm{m} = \omega x_\mathrm{m}$, avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Ainsi,

$$v_\mathrm{m} = \omega x_\mathrm{m} = \frac{2\pi}{T} x_\mathrm{m} = \frac{2\pi}{1{,}60\,\mathrm{s}} \times 0{,}200\,\mathrm{m} = 0{,}785\,\mathrm{m/s} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. **Identifier la clé** Il ne manque que la valeur du déphasage ϕ pour pouvoir exprimer l'équation de la position du bloc en fonction du temps.

Résoudre le problème Le fait que le bloc soit lâché d'un état immobile indique que la vitesse à $t = 0$ est nulle et que la position de départ est la position maximale (positive, qui plus est). Donc le déphasage est nul puisque le mouvement correspond à une courbe cosinusoïdale sans déphasage. Conséquemment,

$$x = x_\mathrm{m}\cos(\omega t + \phi) \qquad \text{avec} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1{,}60\,\mathrm{s}} = 3{,}93\,\mathrm{rad/s}$$

$$x = 0{,}200\,\mathrm{m} \times \cos(3{,}93\,\mathrm{rad/s} \times t) \ . \qquad \text{(réponse)}$$

d. **Identifier la clé** La vitesse moyenne est le déplacement résultant divisé par la durée du déplacement et non la dérivée de la position d'un instant quelconque.

Résoudre le problème L'équation de la vitesse moyenne est

$$v_{\mathrm{moy},x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{t=2{,}500\,\mathrm{s}} - x_{t=0{,}500\,\mathrm{s}}}{2{,}500\,\mathrm{s} - 0{,}500\,\mathrm{s}} \ .$$

On doit alors déterminer les positions initiale et finale de ce mouvement, à partir de l'équation de la position définie en **c.** :

$$x_{t=2{,}500\,\mathrm{s}} = 0{,}200\,\mathrm{m} \times \cos(3{,}93\,\mathrm{rad/s} \times 2{,}500\,\mathrm{s}) = -0{,}185\,\mathrm{m}$$

et

$$x_{t=0{,}500\,\mathrm{s}} = 0{,}200\,\mathrm{m} \times \cos(3{,}93\,\mathrm{rad/s} \times 0{,}500\,\mathrm{s}) = -0{,}077\,\mathrm{m}$$

$$v_{\mathrm{moy,x}} = \frac{(-0{,}185\,\mathrm{m}) - (-0{,}077\,\mathrm{m})}{2{,}500\,\mathrm{s} - 0{,}500\,\mathrm{s}} = -0{,}054\,1\,\mathrm{m/s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur des paramètres est raisonnable, et la vitesse trouvée en **d.** est faible parce que les positions aux limites du déplacement sont près l'une de l'autre, la durée du mouvement ayant presque ramené le bloc à son point initial.

E18 **Décortiquer le problème** Une même masse est impliquée dans deux systèmes bloc-ressort. On a les données suivantes.

Connues	Inconnue
$k_1 = 5{,}00\,\mathrm{N/m}$	$T_{\mathrm{m},k2}$
$x_{\text{allongement-}k1} = 10{,}0\,\mathrm{cm}$	
$k_2 = 10{,}0\,\mathrm{N/m}$	

Identifier la clé La clé est la possibilité de déterminer la masse inconnue dans le système au repos par le traitement de la dynamique à l'équilibre.

Résoudre le problème À l'équilibre, le poids de la masse est compensé par la force de rappel vers le haut du ressort de constante k_1 :

$$\sum F_y = k_1 x - mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m = \frac{k_1 x}{g} = \frac{5{,}00\,\mathrm{N/m} \times 0{,}100\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} = 0{,}051\,0\,\mathrm{g}\ .$$

La masse connue, on peut maintenant traiter le second système où elle oscille sous un ressort de constante $k_2 = 10{,}0\,\mathrm{N/m}$:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{T} \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{où} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\ . \end{aligned}$$

Toutes ces expressions réunies donnent

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k_2}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{(\frac{k_1 x}{g})}{k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{(\frac{5{,}00\,\mathrm{N/m}\times 0{,}100\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}})}{10{,}0\,\mathrm{N/m}}} = 0{,}449\,\mathrm{s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la période est correct, équivalent à une fréquence légèrement supérieure à deux oscillations par seconde.

E19 **Décortiquer le problème** La masse de l'arrière de l'auto et les deux ressorts de la suspension arrière forment un système bloc-ressort.

Connues	Inconnue
$f = \dfrac{4\ \text{oscillations}}{5{,}0\,\mathrm{s}} = 0{,}80\,\mathrm{Hz}$	$m_{\text{arrière}}$
$k_{\text{ressort}} = 10{,}0\,\mathrm{kN/m}$	

Identifier la clé La constante de rappel d'une paire de ressorts en parallèle (reliant les deux mêmes points, soit le sol et la masse arrière de l'auto) est simplement la somme des deux constantes de rappel.

Résoudre le problème Deux définitions de la fréquence angulaire du système bloc-ressort permettent de lier la masse aux données du problème :

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{résultante}}}{m}} = 2\pi f \qquad \text{avec} \qquad k_{\text{résultante}} = 2k_{\text{ressort}}$$

$$m = \frac{k_{\text{résultante}}}{4\pi^2 f^2} = \frac{2k_{\text{ressort}}}{4\pi^2 f^2} = \frac{2 \times 10\,000\,\text{N/m}}{4\pi^2 (0{,}80\,\text{s}^{-1})^2} = 7{,}9 \times 10^2\ \text{kg}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Cette masse est tout à fait plausible puisque la masse totale d'une voiture normale est généralement comprise entre 1 000 kg et 2 000 kg.

E20 **Décortiquer le problème** L'enfant et le trampoline forment un système bloc-ressort dont la masse et la constante de rappel sont connues.

Connues	Inconnues
$m = 25{,}0\,\text{kg}$	x_m
$k = 3\,000\,\text{N/m}$	N_osc en 5,00 s
	v_m
	a_m

a. Identifier la clé Le centre des oscillations est l'endroit où la force de rappel de la toile égale le poids de l'enfant.

Résoudre le problème À l'équilibre au centre de la toile,

$$\sum F_y = kx - mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{mg}{k} = \frac{25{,}0\,\text{kg} \times 9{,}81\,\text{m/s}^2}{3\,000\,\text{N/m}} = 0{,}081\,8\,\text{m}\ .$$

$x_\text{m} = 0{,}081\,8\,\text{m}$, c'est aussi l'enfoncement de l'enfant au repos dans la toile. (réponse)

Valider la réponse 0,081 8 m est une distance d'enfoncement plausible pour un enfant sur un trampoline.

b. Identifier la clé La période permettrait de calculer le nombre d'oscillations effectuées en 5,00 s.

Résoudre le problème La fréquence angulaire relie la période inconnue aux paramètres déjà connus :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \qquad \Rightarrow \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{25{,}0\,\text{kg}}{3\,000\,\text{N/m}}} = 0{,}573\,\text{s}$$

$$N_\text{osc} = 5{,}00\,\text{s} \div T = 5{,}00\,\text{s} \div 0{,}573\,\text{s} = 8{,}72\ \text{oscillations}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse C'est un nombre raisonnable, équivalent au nombre de sautillements en 5,00 s sans quitter la toile.

c. Identifier la clé La vitesse maximale dépend uniquement de l'amplitude et de la fréquence angulaire.

Résoudre le problème La vitesse maximale est donnée entre autres par l'équation

$$v_\text{m} = \omega x_\text{m} \qquad \text{avec} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{et} \qquad x_\text{m} = \frac{mg}{k}\ .$$

Ainsi,

$$v_\text{m} = \sqrt{\frac{k}{m}} \times \frac{mg}{k} = \sqrt{\frac{m}{k}} \times g = \sqrt{\frac{25{,}0\,\text{kg}}{3\,000\,\text{N/m}}} \times 9{,}81\,\text{m/s}^2 = 0{,}896\,\text{m/s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Cette vitesse est plausible, à peine supérieure à 3 km/h.

d. **Identifier la clé** L'accélération maximale dépend uniquement de l'amplitude et de la fréquence angulaire.

Résoudre le problème L'accélération maximale est donnée entre autres par l'équation

$$a_\mathrm{m} = \omega^2 x_\mathrm{m} \qquad \text{avec} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{et} \qquad x_\mathrm{m} = \frac{mg}{k}\ .$$

Le fait de reprendre les expressions algébriques contenant les variables initiales permet de trouver une relation intéressante :

$$a_\mathrm{m} = \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2 \times \frac{mg}{k} = \frac{k}{m} \times \frac{mg}{k} = g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse C'est tout à fait logique : au point le plus haut du mouvement, l'enfant commence à s'enfoncer alors que la toile au repos n'offre aucune résistance. C'est donc l'accélération d'une chute libre, exclusive à ce point le plus haut.

E21 **Décortiquer le problème** Les paramètres du mouvement du piston sont fixés par l'amplitude et l'accélération qu'on peut déduire du phénomène décrit dans l'énoncé.

Connue	Inconnue
$x_\mathrm{m} = 5{,}0\,\mathrm{cm}$	a_m

Identifier la clé La clé est qu'il y a équivalence entre l'accélération gravitationnelle et l'accélération maximale, au point le plus haut, alors que le poids perd contact avec la surface.

Résoudre le problème La clé indique que $a_\mathrm{m} = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Par la suite, le lien entre la fréquence recherchée, d'une part, et l'amplitude et l'accélération du piston, d'autre part, est la fréquence angulaire, contenue dans deux équations distinctes :

$$a_\mathrm{m} = \omega^2 x_\mathrm{m} \qquad \text{et} \qquad \omega = 2\pi f\ .$$

Ces deux équations réunies donnent

$$a_\mathrm{m} = \omega^2 x_\mathrm{m} = (2\pi f)^2 x_\mathrm{m} = 4\pi^2 f^2 x_\mathrm{m}$$

et, après mise en évidence de la fréquence,

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a_\mathrm{m}}{x_\mathrm{m}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}050\,\mathrm{m}}} = 2{,}2\,\mathrm{Hz}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse C'est une valeur raisonnable. Elle ne doit pas être trop élevée, sans quoi le poids serait projeté vers le haut et quitterait réellement la surface.

E22 **Décortiquer le problème** L'énoncé donne de l'information permettant de connaître la période ainsi que de l'information liée à l'équation de la vitesse en fonction du temps.

Connues	Inconnue
$f = \dfrac{7{,}00\,\mathrm{osc}}{4{,}10\,\mathrm{s}} = 1{,}71\,\mathrm{Hz}$	x_m
$v_{x,t=3{,}25\,\mathrm{s}} = -0{,}600\,\mathrm{m/s}$	

Identifier la clé La clé est l'équation de la vitesse en fonction du temps dans laquelle on insère la vitesse pour l'instant indiqué.

Résoudre le problème La fréquence donnée indirectement dans l'énoncé permet de connaître la fréquence angulaire :

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 1{,}71\,\mathrm{Hz} = 10{,}7\,\mathrm{rad/s}\ .$$

Par ailleurs, le fait que le chariot soit libéré de sa position extrême négative à $t = 0$ fait en sorte que le déphasage ϕ est égal à π. Donc,

$$v_x = -\omega x_\mathrm{m} \sin(\omega t + \phi) = -2\pi f x_\mathrm{m} \sin(2\pi f t + \pi) \ .$$

On n'a qu'à isoler x_m dans cette dernière équation :

$$x_\mathrm{m} = \frac{v_x}{-2\pi f \sin(2\pi f t + \pi)} = \frac{-0{,}600\,\mathrm{m/s}}{-2\pi \times 1{,}71\,\mathrm{Hz} \sin(2\pi \times 1{,}71\,\mathrm{Hz} \times 3{,}25\,\mathrm{s} + \pi)} = 0{,}185\,\mathrm{m} \ . \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse C'est une amplitude plausible vu la vitesse et les temps impliqués.

P23 **Décortiquer le problème** Les paramètres du mouvement mettent en relation les trois équations décrivant un mouvement harmonique.

Connues	Inconnues
$x_{t=0} = -4{,}89\,\mathrm{cm}$	k
$v_{x,t=0} = -1{,}42\,\mathrm{m/s}$	x_m
$a_{x,t=0} = 3{,}15\,\mathrm{m/s^2}$	ϕ
$m = 350\,\mathrm{g}$	

a. **Identifier la clé** La clé se trouve dans deux équations indépendantes comprenant la fréquence angulaire.

Résoudre le problème Puisque la masse est connue, il ne manque que la fréquence angulaire pour qu'on puisse calculer la constante de rappel. On peut la trouver en utilisant la relation entre la position et l'accélération :

$$a_x = -\omega^2 x \ .$$

De plus, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$; ainsi,

$$a_x = -\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2 x = -\frac{kx}{m}$$

$$k = -\frac{m a_x}{x} = -\frac{0{,}350\,\mathrm{kg} \times 3{,}15\,\mathrm{m/s^2}}{-0{,}048\,9\,\mathrm{m}} = 22{,}5\,\mathrm{N/m} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** Si on considère deux équations du mouvement de la masse, on aura deux inconnues en x_m et en ϕ.

Résoudre le problème On utilise les équations de la position et de la vitesse :

$$x = x_\mathrm{m} \cos(\omega t + \phi) \qquad \text{et} \qquad v_x = -\omega x_\mathrm{m} \sin(\omega t + \phi) \ .$$

Sachant que $t = 0$, le rapport $\frac{v_x}{x}$ donne

$$\frac{v_x}{x} = \frac{-\omega x_\mathrm{m} \sin(\omega t + \phi)}{x_\mathrm{m} \cos(\omega t + \phi)} = \frac{-\omega x_\mathrm{m} \sin\phi}{x_\mathrm{m} \cos\phi} = -\omega \tan\phi \ .$$

ϕ est la seule inconnue et on peut maintenant déterminer sa valeur :

$$\phi = \arctan\left(\frac{-v_x}{\omega x}\right) \text{avec } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{-m a_x}{x}\right)}{m}} = \sqrt{\frac{-a_x}{x}}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{-v_x}{\sqrt{\frac{-a_x}{x}} \times x}\right) = \arctan\left(\sqrt{\frac{v_x^2}{-a_x x}}\right)$$

$$\phi = \arctan\left(\sqrt{\frac{(-1{,}42\,\mathrm{m/s})^2}{-3{,}15\,\mathrm{m/s^2} \times -0{,}048\,9\,\mathrm{m}}}\right) = \arctan(\pm 3,62) \ .$$

Attention, cette tangente inverse admet quatre solutions ! Une racine carrée offre deux solutions de signes opposés, et chacune offre deux solutions avec la fonction arc tangente :

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \arctan(+3{,}62) = 1{,}30\,\mathrm{rad}\\ \phi_2 &= \arctan(+3{,}62) + \pi = 4{,}44\,\mathrm{rad}\\ \phi_3 &= \arctan(-3{,}62) = -1{,}30\,\mathrm{rad}\\ \phi_4 &= \arctan(-3{,}62) + \pi = 1{,}84\,\mathrm{rad}\ .\end{aligned}$$

Une seule admet à $t = 0$ les bons signes pour x, v et a. Si la position et la vitesse à $t = 0$ sont toutes deux négatives, on cherche la seule des quatre solutions pour laquelle le cosinus est négatif et le sinus, positif :

$$x = x_{\mathrm{m}} \cos\phi < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \cos\phi < 0$$

$$v_x = -\omega x_{\mathrm{m}} \sin\phi < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sin\phi > 0\ .$$

Seul ϕ_4 vérifie ces conditions :

$$\cos(1{,}84\,\mathrm{rad}) = -0{,}266 \qquad \text{et} \qquad \sin(1{,}84\,\mathrm{rad}) = +0{,}964\ .$$

On peut maintenant déterminer x_{m} :

$$x = x_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \phi) = x_{\mathrm{m}} \cos\phi$$

$$x_{\mathrm{m}} = \frac{x}{\cos\phi} = \frac{-0{,}048\,9\,\mathrm{m}}{\cos(1{,}84\,\mathrm{rad})} = 0{,}184\,\mathrm{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. Voir la partie **b**.

$$\phi = 1{,}84\,\mathrm{rad}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

P24 **Décortiquer le problème** Le même ressort est soumis à deux valeurs de masse différentes et l'une entraîne une période 1,5 fois plus grande que l'autre.

Connues	Inconnue
$m_2 = (m_1 + 150\,\mathrm{g})$	m
$T_2 = 1{,}5T_1$	

Identifier la clé La clé est la fréquence angulaire reliée autant à la masse qu'à la période du système.

Résoudre le problème Les deux équations de la fréquence angulaire sont

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \qquad \Rightarrow \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\ .$$

Quand on les applique aux deux situations du problème, on a

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} \qquad \text{et} \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}$$

ou

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} \qquad \text{et} \qquad 1{,}5T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + 150\,\mathrm{g}}{k}}\ .$$

En insérant la valeur de T_1, on trouve

$$1{,}5T_1 = 1{,}5 \times \left(2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}\right) = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + 150\,\mathrm{g}}{k}}\ .$$

m_1 est maintenant la seule inconnue. En simplifiant, on trouve

$$1{,}5\sqrt{m_1} = \sqrt{m_1 + 150\,\text{g}} \qquad \Rightarrow \qquad 2{,}25 m_1 = m_1 + 150\,\text{g} \ .$$

Finalement,

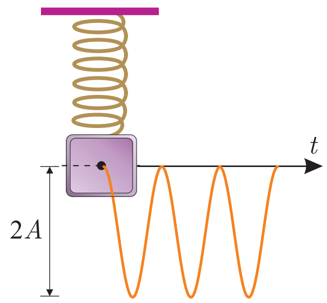
$$m_1 = \frac{150\,\text{g}}{1{,}25} = 120\,\text{g} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse En ajoutant 150 g à une masse de 120 g, on l'augmente d'un facteur de 2,25, et il est tout à fait normal que cela fasse augmenter la période d'un facteur de 1,5, car c'est la racine de 2,25 et c'est bien le lien entre la période et la masse $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

P25 **Décortiquer le problème** Le mouvement du poids se fait du point de départ à un point situé 12,6 cm plus bas.

Connues	Inconnues
$x_m - x_{min} = 12{,}6\,\text{cm}$	x_m
$x_{t=0} = 0$	T

Illustrer la situation La figure ci-contre illustre la situation. On y voit la courbe de la position du bloc en fonction du temps, à partir de l'instant où on libère la masse.



a. **Identifier la clé** La clé est le fait que la distance séparant les deux positions extrêmes est le double de l'amplitude.

Résoudre le problème Le mouvement entier s'effectue sur une distance qui est le double de l'amplitude. Le déplacement d'un extrême à l'autre suffit donc pour évaluer x_m :

$$x_m - x_{min} = 12{,}6\,\text{cm} = 2x_m$$
$$x_m = \frac{12{,}6\,\text{cm}}{2} = 6{,}30\,\text{cm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que si la chute commence en un point où l'étirement du ressort est nul, l'accélération à ce point coïncidera avec l'accélération gravitationnelle.

Résoudre le problème Au point le plus haut, l'accélération est à sa valeur maximale et vaut 9,81 m/s^2 puisque le ressort n'applique aucune force sur le poids, son étirement étant nul. L'amplitude et l'accélération maximale étant connues, on peut alors déterminer la fréquence angulaire :

$$a_m = \omega^2 x_m \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{a_m}{x_m}} = \sqrt{\frac{g}{x_m}} \ .$$

La période du mouvement étant également liée à la fréquence angulaire, on peut écrire

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{x_m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{x_m}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}063\,0\,\text{m}}{9{,}81\,\text{m/s}^2}} = 0{,}504\,\text{s} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la période est plausible, coïncidant avec une fréquence d'environ deux oscillations par seconde.

P26 **Décortiquer le problème** On doit d'abord établir si le mouvement sera harmonique et ensuite déterminer l'expression algébrique de sa période.

Identifier la clé La clé est l'analyse des forces sur le bloc permettant de déterminer l'effet combiné des deux ressorts.

Résoudre le problème En tout point du mouvement du bloc, l'accélération dépend directement de la masse et de la force résultante des deux ressorts :

$$\sum F = ma_x \qquad \Rightarrow \qquad a_x = \frac{\sum F_x}{m} \ . \qquad \text{(i)}$$

On analyse donc la relation entre les deux forces impliquées. Même si les ressorts de gauche et de droite sont fixés aux côtés opposés, en tout point la force résultante peut s'établir ainsi :

$$\sum F_x = k\Delta x_{\mathrm{d}} - k\Delta x_{\mathrm{g}} = k(\Delta x_{\mathrm{d}} - \Delta x_{\mathrm{g}}) \ . \tag{ii}$$

Les deux ressorts n'atteignent pas nécessairement leur position de repos en même temps, mais il est certain qu'à la position centrale du mouvement (équilibre du système), les deux forces sont de même grandeur et qu'alors les étirements (ou compressions) sont les mêmes (les ressorts étant identiques). À l'équilibre, on a

$$\sum F_x = -k\Delta x_{\mathrm{d}} + k\Delta x_{\mathrm{g}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta x_{\mathrm{d,éq}} = \Delta x_{\mathrm{g,éq}} \ . \tag{iii}$$

Tout déplacement du bloc depuis cette position implique une variation d'étirement identique pour les deux ressorts, mais de sens opposés :

$$\Delta x_{\mathrm{d}} = \Delta x_{\mathrm{d,éq}} + \Delta x \qquad \text{et} \qquad \Delta x_{\mathrm{g}} = \Delta x_{\mathrm{g,éq}} - \Delta x \ , \tag{iv}$$

où Δx pourrait être négatif comme positif : c'est le déplacement réel du bloc depuis la position d'équilibre du système. La parenthèse de l'équation (ii) peut donc être réécrite en y intégrant les constats faits dans les équations (iii) et (iv) :

$$\Delta x_{\mathrm{d}} - \Delta x_{\mathrm{g}} = (\Delta x_{\mathrm{d,éq}} + \Delta x) - (\Delta x_{\mathrm{g,éq}} - \Delta x) = 2\Delta x \ . \tag{v}$$

On revient sur l'équation de la force (ii) :

$$\sum F_x = k(\Delta x_{\mathrm{d}} - \Delta x_{\mathrm{g}}) = k(2\Delta x) = 2k\Delta x \ , \tag{vi}$$

et ensuite sur l'expression de l'accélération (i) :

$$a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{2k\Delta x}{m} \ .$$

On a obtenu cette équation en tenant compte du module de l'accélération, mais la force agissant en réalité dans le sens opposé au déplacement, $-x$ remplacera Δx comme position du système en oscillation :

$$a_x = -\frac{2kx}{m} \ . \tag{vii}$$

On reconnaît dans cette dernière équation l'une des relations impliquant la fréquence angulaire, soit $a_x = -\omega^2 x$. On peut alors affirmer que

$$\omega^2 = \frac{2k}{m} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} \ .$$

Ainsi, on peut exprimer la période en fonction de ω :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} \ . \tag{réponse}$$

P27 **Décortiquer le problème** Les deux ressorts identiques se partageront l'étirement requis lors du déplacement du bloc.

Identifier la clé Le bloc n'étant en contact qu'avec l'un des deux ressorts et ceux-ci se partageant à parts égales l'étirement imposé par le déplacement, la force du ressort en contact avec le bloc sera réduite de moitié par rapport à celle d'un ressort seul.

Résoudre le problème L'équation des forces sur le bloc n'est pas directement modifiée par la présence du deuxième ressort, le bloc n'étant toujours en contact qu'avec un seul ressort :

$$\sum F_x = -k\Delta x \ .$$

On peut par ailleurs démontrer que l'étirement de ce ressort sera égal à la moitié du déplacement réel du bloc. Un ressort (sans masse) applique forcément la même force sur ses deux extrémités. L'analyse des forces sur un ressort sans masse le montre :

$$\sum F_x = ma_x = F_{x,\text{gauche}} - F_{x,\text{droite}} = 0 \qquad \text{car} \qquad m = 0$$

$$F_{x,\text{gauche}} = F_{x,\text{droite}} \ .$$

Conséquemment, les deux ressorts appliquent l'un sur l'autre une force égale à celle que la masse subit, et des ressorts de constantes identiques soumis à la même tension subiront un étirement identique. L'étirement est donc réparti également sur les deux ressorts et la force de chacun est deux fois moins grande que celle d'un ressort seul soumis au même déplacement du bloc. Autrement dit,

$$F_x = -\frac{1}{2}kx \ .$$

Le lien entre force et accélération permet d'intégrer cette observation dans les équations du mouvement harmonique :

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{\left(\frac{1}{2}kx\right)}{m} = \frac{k}{2m}x \ .$$

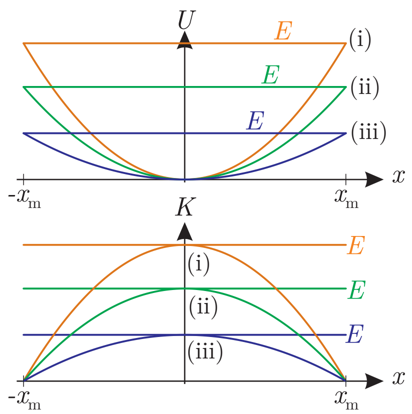
On reconnaît dans cette dernière équation l'une des relations impliquant la fréquence angulaire, soit $a_x = -\omega^2 x$. On peut alors affirmer que

$$\omega^2 = \frac{k}{2m} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{2m}} \ .$$

La période peut alors être exprimée en fonction de ω :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{2m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Q28 **Illustrer la situation** La figure ci-dessous présente les courbes de l'énergie potentielle du système bloc-ressort, qui sont donc liées à l'étirement du ressort et à sa constante de rappel.



a. **Identifier la clé** La clé est que l'étirement maximal x_{max} des trois systèmes est identique. Seule la constante de rappel peut donc rendre différentes les énergies potentielles maximales, et de là l'énergie totale du système (car $E = U_{\text{m}}$).

Résoudre le problème On peut donc classer l'énergie totale des trois systèmes de la façon suivante :

$$E_{\text{iii}} < E_{\text{ii}} < E_{\text{i}} \ .$$

La vitesse maximale se produit au passage à la position centrale, alors qu'il n'y a plus aucune énergie potentielle. Toute l'énergie se retrouve donc sous la forme d'énergie cinétique et une énergie plus élevée entraîne automatiquement une vitesse plus élevée, pour des masses identiques.

Ainsi,

$$K_{\text{iii,m}} < K_{\text{ii,m}} < K_{\text{i,m}}$$
$$v_{\text{iii}} < v_{\text{ii}} < v_{\text{i}} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse On ne fournit pas les courbes de l'énergie cinétique en fonction de la position, mais elles forment des paraboles renversées dont la hauteur maximale (l'énergie totale) est la même que celle de la courbe $U(x)$ correspondante. La hauteur maximale de ces courbes serait associée de la même manière aux vitesses maximales d'une même masse donnée.

b. **Identifier la clé** La clé est que la fréquence angulaire d'un système bloc-ressort varie selon l'inverse de la racine carrée de la constante de rappel du ressort.

Résoudre le problème Les masses et amplitudes étant identiques, seules les constantes de rappel peuvent entraîner une différence dans l'énergie potentielle maximale (donc l'énergie totale) des trois systèmes. Celui qui a le plus d'énergie implique forcément une constante de rappel plus grande, puisque $U = \frac{1}{2}kx^2$. En équations, pour un même étirement maximal, on obtient

$$U_{\text{m,iii}} < U_{\text{m,ii}} < U_{\text{m,i}}$$
$$\frac{1}{2}k_{\text{iii}}x^2 < \frac{1}{2}k_{\text{ii}}x < \frac{1}{2}k_{\text{i}}x^2$$
$$k_{\text{iii}} < k_{\text{ii}} < k_{\text{i}} \ .$$

En appliquant le lien entre l'étirement et la fréquence angulaire,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \Rightarrow \qquad k = \omega^2 m \ ,$$

on obtient

$$\omega_{\text{iii}}^2 m_{\text{iii}} < \omega_{\text{ii}}^2 m_{\text{ii}} < \omega_{\text{i}}^2 m_{\text{i}} \ ,$$

et finalement, pour des masses identiques,

$$\omega_{\text{iii}} < \omega_{\text{ii}} < \omega_{\text{i}} \ .$$

Valider la réponse Nécessairement, un système possédant plus d'énergie qu'un autre pour des masses et amplitudes identiques présentera des oscillations plus rapides, ou plus « violentes », associées à une fréquence (donc fréquence angulaire) plus élevée.

E29 **Décortiquer le problème** Les données fournies permettent de lier l'énergie du système à l'étirement maximal recherché.

Connues	Inconnue
$m = 0{,}400\,\text{kg}$	x_{m}
$f = 1{,}20\,\text{Hz}$	
$E_{\text{méc}} = 2{,}25\,\text{J}$	

Identifier la clé La clé est l'équation de la fréquence angulaire liée à k, m et f, car elle permet de connaître la constante de rappel.

Résoudre le problème On trouve l'expression de la constante de rappel en fonction de variables connues :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{et} \qquad \omega = 2\pi f$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f \qquad \Rightarrow \qquad k = 4\pi^2 f^2 m \ .$$

Lorsqu'on l'intègre à l'équation de l'énergie mécanique du système bloc-ressort, on peut isoler la seule inconnue, x_{m} :

$$E_{\text{méc}} = \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2} \times 4\pi^2 f^2 m \times x_m^2 \qquad \Rightarrow \qquad x_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2\pi f}\sqrt{\frac{2E_{\text{méc}}}{m}}$$

$$x_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2\pi \times 1{,}20\,\mathrm{Hz}}\sqrt{\frac{2 \times 2{,}25\,\mathrm{J}}{0{,}400\,\mathrm{kg}}} = 0{,}445\,\mathrm{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'amplitude est correct.

E30 **Décortiquer le problème** Les données fournies permettent de lier l'énergie du système à l'étirement maximal et, par extension, à l'accélération maximale du bloc.

Connues	Inconnue
$f = 5{,}00\,\mathrm{Hz}$	k
$E_{\text{méc}} = 50{,}0\,\mathrm{J}$	
$a_{\mathrm{m}} = 60{,}0\,\mathrm{m/s^2}$	

Identifier la clé La clé se trouve dans les liens entre la fréquence angulaire et les différents paramètres du système.

Résoudre le problème Les différentes équations de ce système comprenant la vitesse angulaire sont

$$\omega = 2\pi f, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{et} \qquad a_{\mathrm{m}} = \omega^2 x_{\mathrm{m}}\ .$$

Deux de ces équations réunies donnent

$$a_{\mathrm{m}} = \omega^2 x_{\mathrm{m}} \qquad \text{et} \qquad \omega = (2\pi f)$$

$$a_{\mathrm{m}} = (2\pi f)^2 x_{\mathrm{m}} \qquad \Rightarrow \qquad x_{\mathrm{m}} = \frac{a_{\mathrm{m}}}{4\pi^2 f^2}\ .$$

Intégrée à l'équation de l'énergie, cette expression de x_{m} permet de n'avoir qu'une inconnue, la constante de rappel :

$$E_{\text{méc}} = \frac{1}{2}kx_{\mathrm{m}}^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{a_{\mathrm{m}}}{4\pi^2 f^2}\right)^2 = \frac{k a_{\mathrm{m}}^2}{32\pi^4 f^4}$$

$$k = \frac{32E_{\text{méc}}\pi^4 f^4}{a_{\mathrm{m}}^2} = \frac{32 \times (50{,}0\,\mathrm{J})\pi^4(5{,}00\,\mathrm{Hz})^4}{(60{,}0\,\mathrm{m/s^2})^2} = 2{,}71 \times 10^4\,\mathrm{N/m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur peut paraître élevé, mais se voit tout de même couramment pour des ressorts robustes. Par ailleurs, la vérification des unités de l'équation finale confirme les unités d'une constante de rappel, malgré la quatrième puissance de certaines variables.

E31 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$m = 0{,}670\,\mathrm{kg}$	x où $v = 0{,}750\,\mathrm{m/s}$
$k = 35{,}0\,\mathrm{N/m}$	
$x_{\mathrm{m}} = 0{,}320\,\mathrm{m}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 1.19 de l'énergie mécanique d'un système bloc-ressort :

$$E_{\text{méc}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2\ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème On s'intéresse à l'endroit où la vitesse est de 0,750 m/s. Il suffit donc d'isoler la position x dans l'équation (i), car tous les autres paramètres sont connus :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}kx^2 &= \frac{1}{2}2kx_\mathrm{m}^2 - \frac{1}{2}mv^2 \\
x^2 &= \frac{kx_\mathrm{m}^2 \ - \ mv^2}{k} \\
x &= \sqrt{\frac{kx_\mathrm{m}^2 \ - \ mv^2}{k}} \\
x &= \sqrt{x_\mathrm{m}^2 - \frac{mv^2}{k}} \\
x &= \sqrt{(0{,}320 \ \ \mathrm{m})^2 - \frac{(0{,}670, \mathrm{kg}) \ \times \ (0{,}750 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}{35{,}0 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} \\
x &= \pm 0.303 \ \mathrm{m} \ .
\end{aligned}$$

La solution mathématique admet deux valeurs, $x = \pm 0{,}303$ m, et on doit interpréter ce résultat. Cependant, puisque c'est le module de la vitesse qui doit être de 0,750 m/s, la vitesse peut être dans un sens ou dans l'autre. Le mouvement d'oscillation étant symétrique de part et d'autre de la position d'équilibre, c'est bien à 0,303 m de chaque côté du centre que la vitesse a le module indiqué. À chacune de ces positions, la vitesse a un module de 0,750 m/s : une fois en s'éloignant du centre, et une autre fois en revenant vers le centre. Donc :

$$x = \pm 30{,}3 \ \mathrm{cm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Il est tout à fait logique que ce soit à la même distance de chaque côté du centre que les vitesses soient de même module.

E32 **Décortiquer le problème** On cherche à exprimer la position du bloc en fonction de x_m et de ω lorsque l'énergie cinétique est égale à l'énergie potentielle.

Identifier la clé La clé du problème réside dans le fait que quand l'énergie cinétique K est égale à l'énergie potentielle U, l'une comme l'autre sont égales à la moitié de l'énergie mécanique $E_\text{méc}$ du système.

a. **Résoudre le problème** D'après la clé, l'énergie potentielle est égale à la moitié de l'énergie mécanique totale lorsque $K = U$, car

$$E_\text{méc} = K + U \qquad \text{et} \qquad K = U$$

entraînent que

$$E_\text{méc} = U + U = 2U \qquad \Rightarrow \qquad U = \frac{1}{2}E_\text{méc} \ .$$

Sachant que $E_\text{méc} = \frac{1}{2}kx_\mathrm{m}^2$ et que $U = \frac{1}{2}kx^2$, on obtient

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}kx_\mathrm{m}^2$$

$$x^2 = \frac{1}{2}x_\mathrm{m}^2 \ ,$$

et finalement

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}x_\mathrm{m}^2} = \pm\frac{x_\mathrm{m}}{\sqrt{2}} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Résoudre le problème On peut faire un raisonnement semblable à celui de la partie **a.** en prenant l'énergie cinétique au lieu de l'énergie potentielle :

$$E_\text{méc} = K + U \qquad \text{et} \qquad K = U$$

entraînent que

$$E_\text{méc} = K + K = 2K \qquad \Rightarrow \qquad K = \frac{1}{2}E_\text{méc} \ .$$

Sachant que $E_\text{méc} = \frac{1}{2}kx_\mathrm{m}^2$ et que $K = \frac{1}{2}mv^2$, on obtient

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}kx_\mathrm{m}^2$$

$$v = \sqrt{\frac{kx_\mathrm{m}^2}{2m}} \ .$$

Le rapport k/m peut être mis en évidence puisqu'il est lié à la fréquence angulaire par $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Il en découle que

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{x_\mathrm{m}^2}{2}} = \omega\frac{\pm x_\mathrm{m}}{\sqrt{2}} \ .$$

Finalement, puisqu'on cherche seulement le module de la vitesse, on a

$$v = \frac{\omega x_\mathrm{m}}{\sqrt{2}} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Q33 Décortiquer le problème On doit exprimer la période du pendule sur la Lune en fonction de ses propriétés et de la période qu'il a sur Terre. On détermine le rapport $T_\text{Lune}/T_\text{Terre}$.

Identifier la clé La clé se trouve dans les deux équations de la fréquence angulaire pour un pendule harmonique.

Résoudre le problème Les deux expressions de la fréquence angulaire pour un pendule peuvent être réunies pour donner une expression de la période en fonction de g et de L :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{et} \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \ .$$

L étant constante aux deux endroits, l'application de cette équation aux situations sur la Terre et sur la Lune donne

$$T_\text{Lune} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_\text{Lune}}} \qquad \text{avec} \qquad T_\text{Terre} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \text{où} \qquad g_\text{Lune} = \frac{g}{6} \ .$$

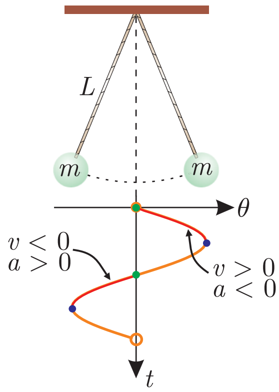
Le rapport $T_\text{Lune}/T_\text{Terre}$ sera

$$\frac{T_\text{Lune}}{T_\text{Terre}} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{L}{g_\text{Lune}}}}{2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{(g/6)}}}{\sqrt{\frac{1}{g}}} = \sqrt{6} = 2{,}45 \ .$$

La période sur la Lune augmentera d'un facteur de $\sqrt{6}$, donc sera 2,45 fois plus longue. (réponse)

Valider la réponse Il est prévisible que la période soit allongée : un pendule retombe moins vite vers sa position la plus basse de la même manière qu'un projectile retombe moins rapidement au sol.

Q34 **Illustrer la situation** La figure ci-dessous illustre le pendule dans ses deux positions maximales. On y voit également la courbe de la position angulaire en fonction du temps pour un cycle du mouvement du pendule.



Décortiquer le problème On doit analyser un cycle complet pour dénombrer les réalisations de conditions particulières.

Identifier la clé Si on considère un cycle complet commençant vis-à-vis la position d'équilibre, il faut éviter de considérer que la position initiale ET la position finale appartiennent au même cycle. En fin de cycle, le pendule retourne à sa position initiale avec une vitesse dans la même direction, et ce point appartient au cycle suivant. Dans la figure, ce fait est représenté par un cercle vide à la fin du mouvement. Ce point ne doit pas être pris en compte dans la courbe du cycle complet illustré.

a. **Décortiquer le problème** On cherche le nombre de fois par cycle complet qu'un pendule passe par sa position la plus basse.

Résoudre le problème En observant sur la figure le parcours du cycle complet ayant commencé à la position d'équilibre, on aperçoit deux passages au point le plus bas (les deux points verts). À noter encore une fois que la fin du mouvement se fait à la position centrale, mais que cet instant appartient au cycle suivant.

Deux fois. (réponse)

b. **Décortiquer le problème** On cherche le nombre de fois par cycle complet qu'un pendule s'immobilise.

Résoudre le problème Un pendule s'immobilise à chacune des positions extrêmes avant d'inverser son mouvement. Puisqu'il atteint une seule fois chacune des deux positions extrêmes durant un cycle complet (les points bleus sur la figure), il s'immobilise deux fois en tout.

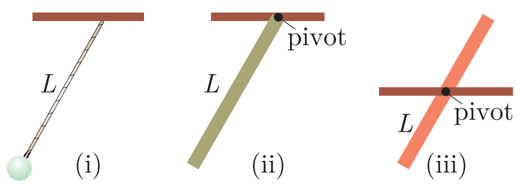
Deux fois. (réponse)

c. **Décortiquer le problème** On cherche la proportion (ou le pourcentage) du temps durant laquelle le pendule subit une accélération angulaire de sens opposé à sa vitesse angulaire.

Résoudre le problème Une accélération en sens opposé à la vitesse correspond à un ralentissement, une diminution du module de la vitesse. Le mouvement du pendule peut se décomposer en quatre phases, chacune présentant une vitesse positive ou négative et une accélération positive ou négative. Pendant que le pendule s'éloigne du centre vers l'une de ses positions extrêmes, il ralentit pour s'immobiliser à la position maximale. Cela se produit de chaque côté du centre, donc durant deux quarts complets de son mouvement entier. Durant les deux autres quarts, sa vitesse augmente de nouveau pour accélérer jusqu'à la position la plus basse. Ainsi, la moitié du déplacement se fait avec une accélération opposée à la vitesse. Par ailleurs, les quatre quarts de cycle ont la même durée (pour un mouvement harmonique), donc la moitié du déplacement coïncide ici avec la moitié de la durée. Cette portion du mouvement est illustrée par les parties en rouge de la courbe du mouvement sur la figure.

$$50\,\% \text{ du temps.} \qquad \text{(réponse)}$$

Q35 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre le pendule simple et les deux pendules composés présentés dans l'énoncé.



Décortiquer le problème Les trois pendules peuvent avoir des périodes différentes en raison de leurs dimensions et caractéristiques. On doit comparer les trois périodes pour les classer en ordre croissant.

Identifier la clé La clé est l'application de la même expression de la fréquence angulaire aux trois pendules.

Résoudre le problème L'équation de la fréquence angulaire pour un pendule composé est $\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}}$. Sachant également que $\omega = \frac{2\pi}{T}$, on peut établir une équation pour chacun des pendules :

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}} = \frac{2\pi}{T} \qquad \Rightarrow \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

$$T_{\mathrm{i}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{i}}gh_{\mathrm{i}}}}, \qquad T_{\mathrm{ii}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\mathrm{ii}}}{m_{\mathrm{ii}}gh_{\mathrm{ii}}}}, \qquad T_{\mathrm{iii}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\mathrm{iii}}}{m_{\mathrm{iii}}gh_{\mathrm{iii}}}}\,. \qquad \text{(i)}$$

La configuration des pendules implique les moments d'inertie suivants :

$$I_{\mathrm{i}} = m_{\mathrm{i}}L_{\mathrm{i}}^2, \qquad I_{\mathrm{ii}} = \frac{1}{3}m_{\mathrm{ii}}L_{\mathrm{ii}}^2, \qquad I_{\mathrm{iii}} = \frac{1}{12}m_{\mathrm{iii}}L_{\mathrm{iii}}^2\,,$$

et les distances suivantes entre le centre de masse et le centre de rotation :

$$h_{\mathrm{i}} = L_{\mathrm{i}}, \qquad h_{\mathrm{ii}} = \frac{L_{\mathrm{ii}}}{2}, \qquad h_{\mathrm{iii}} = 0L_{\mathrm{iii}}\,.$$

Intégrés aux équations (i), ces moments d'inertie et distances h entraînent que

$$T_{\mathrm{i}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_{\mathrm{i}}L_{\mathrm{i}}^2}{m_{\mathrm{i}}g(L_{\mathrm{i}})}}, \qquad T_{\mathrm{ii}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_{\mathrm{ii}}L_{\mathrm{ii}}^2/3}{m_{\mathrm{ii}}g(L_{\mathrm{ii}}/2)}}, \qquad T_{\mathrm{iii}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_{\mathrm{iii}}L_{\mathrm{iii}}^2/12}{m_{\mathrm{iii}}g(0L_{\mathrm{iii}})}}\,. \qquad \text{(ii)}$$

Les longueurs étant toutes identiques, la simplification des trois équations donne

$$T_{\mathrm{i}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}, \qquad T_{\mathrm{ii}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}, \qquad T_{\mathrm{iii}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{12g\times 0}}\,. \qquad \text{(iii)}$$

En mettant en évidence le terme commun dans chaque équation, on voit apparaître l'ordre des grandeurs des périodes :

$$T_{\mathrm{i}} = 1\times(2\pi\sqrt{L/g}), \qquad T_{\mathrm{ii}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\times(2\pi\sqrt{L/g}), \qquad T_{\mathrm{iii}} = \frac{1}{0}\times(2\pi\sqrt{L/g}) = \infty\,. \qquad \text{(iii)}$$

On peut finalement ordonner les périodes en ordre croissant :

$$T_{\mathrm{ii}} \; < \; T_{\mathrm{i}} \; < \; T_{\mathrm{iii}}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Logiquement, il est normal que le pendule 2 ait une période plus courte que le pendule 1, car la répartition de masse plus rapprochée de l'axe de rotation réduit son moment d'inertie (la masse n'ayant pas d'influence). De plus, le pendule 3 a une période infinie dans la mesure où il est en équilibre dans toute orientation, car aucun moment de force résultant ne peut inverser son mouvement pour le mettre en oscillation.

E36 a. **Décortiquer le problème** On cherche la longueur d'un pendule à partir de sa période seulement.

Connues	Inconnue
$T = 1{,}50\,\mathrm{s}$	L
$g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$	

Identifier les clés Les clés sont les équations de la fréquence angulaire d'un pendule simple et la supposition qu'il se trouve à la surface de la Terre.
Résoudre le problème La fréquence angulaire d'un pendule est donnée par

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad \text{ou} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}\ ,$$

ce qui entraîne que

$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \times (1{,}50\,\mathrm{s})^2}{4\pi^2} = 0{,}559\,\mathrm{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Cette longueur est plausible pour un pendule dont la période est de l'ordre de la seconde.

b. **Décortiquer le problème** On cherche l'amplitude angulaire du pendule connaissant sa vitesse maximale en plus de sa période.

Connues	Inconnue
$v_\mathrm{m} = 0{,}250\,\mathrm{m/s}$	θ_m
$T = 1{,}50\,\mathrm{s}$	
$g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$	

Identifier la clé La clé est la conversion de la vitesse linéaire donnée en vitesse angulaire, laquelle est liée à l'amplitude angulaire du pendule.
Résoudre le problème La vitesse angulaire $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ d'un pendule est liée à sa vitesse linéaire par

$$v = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}L \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{L}\ .$$

La vitesse donnée étant la vitesse maximale, on peut préciser la dernière équation et la comparer à la relation entre la vitesse angulaire maximale et l'amplitude angulaire :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{v_\mathrm{m}}{L} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\theta_\mathrm{m}\ .$$

En posant l'égalité des deux expressions de $v_{\theta\mathrm{m}}$, on obtient

$$\frac{v_\mathrm{m}}{L} = \omega\theta_\mathrm{m}, \qquad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{et} \quad L = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

$$\theta_\mathrm{m} = \frac{v_\mathrm{m}}{\sqrt{gL}} = \frac{v_\mathrm{m}}{\sqrt{g \times \frac{gT^2}{4\pi^2}}} = \frac{2\pi \times v_\mathrm{m}}{gT} = \frac{2\pi \times 0{,}250\,\mathrm{m/s}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \times 1{,}50\,\mathrm{s}} = 0{,}107\,\mathrm{rad}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Cet angle équivaut à 6,12°, un ordre de grandeur correct.

E37 **Décortiquer le problème** On cherche la période d'oscillation de la chaudière, connaissant sa longueur et son amplitude angulaire.

Connues	Inconnues
$L = 8{,}00\,\mathrm{m}$	T
$\theta_\mathrm{m} = 0{,}500°$	$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

a. **Identifier les clés** Les clés sont les deux équations de la fréquence angulaire pour un pendule.
Résoudre le problème On peut trouver une expression de la période à partir des fréquences angulaires :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{8{,}00\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}} = 5{,}67\,\mathrm{s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La clé est le lien entre la vitesse maximale et la position maximale d'un système en oscillation :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\theta_\mathrm{m} \qquad \text{avec} \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}\ .$$

Résoudre le problème L'amplitude étant donnée en degrés, on peut faire une conversion en radians à même le calcul de la réponse finale :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{g}{L}} \times \theta_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{8{,}00\,\mathrm{m}}} \times 0{,}500° \times \left(\frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{360°}\right) = 9{,}66 \times 10^{-3}\,\mathrm{rad/s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La période est élevée et la vitesse angulaire maximale bien faible, mais la corde étant très longue, la fréquence est diminuée de façon importante et le pendule est très lent tout au long de son mouvement.

E38 **Décortiquer le problème** On doit trouver l'expression la plus simplifiée de la période d'un pendule, sur Terre, en fonction de sa longueur.
Identifier la clé La clé est l'union des deux équations de la fréquence angulaire pour un pendule simple.
Résoudre le problème Les équations de la fréquence angulaire que l'on peut réunir sont

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\ .$$

En y insérant les valeurs connues pour obtenir une valeur numérique, on trouve

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}} = 2{,}01\sqrt{L} \approx 2{,}0\sqrt{L}\ .$$

E39 **Décortiquer le problème** Un pendule constitué d'une tige homogène pivotant autour d'une extrémité a une fréquence angulaire connue.

Connue	Inconnues
$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0{,}300\,\mathrm{rad/s}$	T
	θ_m

a. **Identifier la clé** La clé est l'union des deux équations de la fréquence angulaire pour un pendule composé.
Résoudre le problème Les équations de la fréquence angulaire que l'on peut réunir sont

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}} \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}\ .$$

Pour un pendule composé constitué d'une tige suspendue par une extrémité, le moment d'inertie et la distance entre le centre de masse et le pivot sont

$$I = \frac{1}{3}mL^2 \qquad \text{et} \qquad h = \frac{1}{2}L\ .$$

L'expression de la période devient donc

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg \times \frac{1}{2}L}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2 \times 1\,\text{m}}{3 \times 9{,}81\,\text{m/s}^2}} = 1{,}64\,\text{s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La clé est le lien entre la vitesse angulaire maximale et l'amplitude angulaire, via la fréquence angulaire.

Résoudre le problème Le lien entre la vitesse angulaire maximale et l'amplitude angulaire est

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\theta_\mathrm{m}, \qquad \text{avec} \qquad \omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}}\ .$$

En utilisant les expressions de I et de h trouvées en **a.**, on peut réunir les deux équations :

$$\theta_\mathrm{m} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sqrt{\frac{I}{mgh}} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg \times \frac{1}{2}L}} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sqrt{\frac{2L}{3g}}\ .$$

Avec la conversion des radians en degrés, on a

$$\theta_\mathrm{m} = 0{,}300\,\text{rad/s} \times \sqrt{\frac{2 \times 1\,\text{m}}{3 \times 9{,}81\,\text{m/s}^2}} \times \frac{360°}{2\pi\ \text{rad}} = 4{,}48°\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Les ordres de grandeur de la période et de l'amplitude angulaire sont corrects pour un pendule de cette dimension.

E40 **Décortiquer le problème** Un disque (de rayon R) percé d'un trou (de rayon r) se comporte comme un pendule composé dont on cherche la période d'oscillation.

Connues	Inconnue
$R_\text{disque} = 60{,}00\,\text{mm}$	T
$r_\text{trou} = 7{,}50\,\text{mm}$	

Identifier les clés Les clés sont l'union des deux équations de la fréquence angulaire pour un pendule composé ainsi que le théorème des axes parallèles pour le pendule composé qui n'oscille pas autour de son centre de masse.

Résoudre le problème Les équations de la fréquence angulaire que l'on peut réunir sont

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}} \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}\ .$$

Pour ce pendule composé constitué d'un disque troué ne pivotant pas autour de son centre, le moment d'inertie fait intervenir le théorème des axes parallèles $I = I_\text{cm} + mh^2$. Le moment d'inertie I_cm par rapport au centre du disque est donné par le moment d'inertie d'un cylindre creux ($I_\text{cm} = \frac{1}{2}m(R_\text{ext}^2 + r_\text{int}^2)$, l'épaisseur étant sans effet).

Par ailleurs, la distance h dans cette situation est le rayon du trou car le clou supporte le disque à cette distance du centre alors que le centre de masse est au centre géométrique : $h = r$. Le moment d'inertie réel devient donc

$$I = I_\text{cm} + mh^2 = \frac{1}{2}m\big(R_\text{disque}^2 + r_\text{trou}^2\big) + m \times r_\text{trou}^2\ ,$$

et l'expression de la période devient

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}m\left(R_{\text{disque}}^2 + r_{\text{trou}}^2\right) + m \times r_{\text{trou}}^2}{mgr_{\text{trou}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}R_{\text{disque}}^2 + \frac{3}{2}r_{\text{trou}}^2}{gr_{\text{trou}}}}$$

En épargnant les unités pour alléger l'écriture, le calcul final est :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2} \times 0{,}060\,00^2 + \frac{3}{2} \times 0{,}007\,50^2}{9{,}81 \times 0{,}007\,50}} = 1{,}01\,\text{s} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la période est réaliste.

P41 **Décortiquer le problème** Une paire de masses dont le centre de masse ne coïncide pas avec le centre de rotation se comporte comme un pendule composé dont on analyse le mouvement d'oscillation.

Connues	Inconnues
$m_1 = 0{,}250\,\text{kg}$	T
$m_2 = 0{,}600\,\text{kg}$	$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
$L = 0{,}400\,\text{m}$	
$\theta_\text{m} = 3{,}0°$	$a_{\theta,\theta=1{,}2°}$

a. Identifier la clé La clé est l'union des deux équations de la fréquence angulaire pour un pendule composé.

Résoudre le problème Les équations de la fréquence angulaire que l'on peut réunir sont

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}} \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} . \qquad \text{(i)}$$

Pour ce pendule, le moment d'inertie est créé par deux masses ponctuelles à des distances de $\frac{L}{2}$ du centre de rotation :

$$I = m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{L^2}{4}(m_1 + m_2) \qquad \text{où} \quad m_1 + m_2 = m_{\text{totale}} = m . \qquad \text{(ii)}$$

Par ailleurs, le centre de masse ne coïncidant pas avec le centre géométrique qui sert de centre de rotation, la distance h est la distance qui les sépare. On peut la déterminer en exprimant la position du centre de masse par rapport au pivot, en considérant les distances vers le bas comme positives pour obtenir automatiquement une valeur positive pour h :

$$h = \frac{\sum m \times d}{m_{\text{totale}}} = \frac{m_2\left(\frac{L}{2}\right) - m_1\left(\frac{L}{2}\right)}{m_2 + m_1} = \frac{L}{2}\frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} . \qquad \text{(iii)}$$

En intégrant I et h à l'équation (i), on obtient :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{L^2}{4}(m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2) \times g \times \frac{L}{2}\frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)}}} .$$

Après de nombreuses simplifications, on obtient

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L(m_2 + m_1)}{2g(m_2 - m_1)}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}400\,\text{m} \times (0{,}600\,\text{kg} + 0{,}250\,\text{kg})}{2 \times 9{,}81\,\text{m/s}^2 \times (0{,}600\,\text{kg} - 0{,}250\,\text{kg})}} = 1{,}40\,\text{s} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Les unités de l'expression finale sont bien des secondes, et l'ordre de grandeur de la période est réaliste vu les dimensions du pendule.

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation qui lie directement la vitesse angulaire maximale à l'amplitude angulaire.

Résoudre le problème La fréquence angulaire est liée à la relation entre la vitesse angulaire maximale et l'amplitude angulaire :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\theta_\mathrm{m}, \qquad \text{où} \qquad \omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}} \ .$$

En ajoutant à ces équations les expressions de I et de h développées en (ii) et en (iii), on obtient

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{mgh}{I}}\theta_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{(m_1+m_2)\times g\times\frac{L}{2}\frac{(m_2-m_1)}{(m_1+m_2)}}{\frac{L^2}{4}(m_1+m_2)}} \times\theta_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{2g(m_2-m_1)}{L(m_1+m_2)}}\times\theta_\mathrm{m} \ . \qquad \text{(iv)}$$

On peut finalement calculer $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ en n'oubliant pas la conversion en radians de l'amplitude angulaire :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2\times 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\times(0{,}600\,\mathrm{kg}-0{,}250\,\mathrm{kg})}{0{,}400\,\mathrm{m}\times(0{,}600\,\mathrm{kg}+0{,}250\,\mathrm{kg})}}\times 3{,}0^\circ\times\frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{360^\circ} = 0{,}24\,\mathrm{rad/s} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de cette vitesse angulaire est réaliste.

c. **Identifier la clé** La clé est l'équation qui lie directement l'accélération angulaire à la position angulaire, via la fréquence angulaire ω.

Résoudre le problème Le lien entre l'accélération angulaire et la position angulaire à utiliser est le suivant :

$$\alpha_\mathrm{z} = -\omega^2\theta \ .$$

ω ayant été défini plus tôt (la racine carrée dans l'équation (iv)), on peut calculer α_z en insérant la position angulaire donnée pour trouver l'accélération :

$$\alpha_\mathrm{z} = -\left(\sqrt{\frac{2g(m_2-m_1)}{L(m_1+m_2)}}\right)^2\theta$$

$$\alpha_\mathrm{z} = -\left(\sqrt{\frac{2\times 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\times(0{,}600\,\mathrm{kg}-0{,}250\,\mathrm{kg})}{0{,}400\,\mathrm{m}\times(0{,}600\,\mathrm{kg}+0{,}250\,\mathrm{kg})}}\right)^2\times 1{,}2^\circ\times\frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{360^\circ} = -0{,}42\,\mathrm{rad/s^2} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur d'une accélération angulaire est difficile à apprécier, mais le signe négatif est cohérent avec une accélération dirigée en sens opposé au déplacement (force de rappel), et les unités de l'expression algébrique sont bien des radians par seconde carrée, après simplification.

P42 **Décortiquer le problème** On cherche différents paramètres du mouvement d'un pendule simple, connaissant ses dimensions et ses conditions de départ.

Connues	Inconnues
$m = 0{,}200\,\mathrm{kg}$	T
$L = 1{,}000\,\mathrm{m}$	$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
$\theta_\mathrm{m} = 10{,}0^\circ$	$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}_{(\theta=5{,}00^\circ)}$
$\theta_{t=0} = 5{,}00^\circ$	$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}_{(\theta=8{,}00^\circ)}$
$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}_{(t=0)} < 0$	$\theta(t)$

a. **Décortiquer le problème** On cherche la période d'oscillation d'un pendule simple, connaissant sa longueur.

Identifier les clés Les clés sont les deux équations de la fréquence angulaire pour un pendule simple.

Résoudre le problème On peut trouver une expression de la période à partir des fréquences angulaires :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}000\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m}}} = 2{,}01\,\mathrm{s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la période est correct.

b. **Décortiquer le problème** On doit exprimer l'équation complète de la position angulaire du pendule en fonction du temps.

Identifier la clé La clé est que l'on peut déterminer le déphasage ϕ faisant partie de l'équation à partir de l'instant pour lequel la position est connue.

Résoudre le problème L'équation générale de la position angulaire a la forme suivante :

$$\theta = \theta_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \phi)\ .$$

En remplaçant ω par son équivalence connue, on peut déterminer la valeur de ϕ à partir de la position connue du pendule à $t = 0$:

$$\theta = \theta_{\mathrm{m}} \cos(\sqrt{\frac{g}{L}} \times t + \phi) \qquad \Rightarrow \qquad \phi = \arccos\left(\frac{\theta}{\theta_{\mathrm{m}}}\right) - \sqrt{\frac{g}{L}} \times t\ .$$

Avec les valeurs du point connu à $t = 0$:

$$\phi = \arccos\left(\frac{\theta_{t=0}}{\theta_{\mathrm{m}}}\right) - \sqrt{\frac{g}{L}} \times 0 = \arccos\left(\frac{5{,}00^\circ}{10{,}0^\circ}\right) = 1{,}05\,\mathrm{rad}\ .$$

Puisque ϕ a été obtenu à l'aide d'une fonction trigonométrique inverse, il faut se méfier de la seconde solution. La masse passe deux fois à l'angle de 5,00° et on veut s'assurer que le déphasage trouvé correspond bien au passage où la vitesse angulaire est négative (car le pendule a une position positive et revient vers sa position d'équilibre). Une manière de le vérifier est d'observer l'équation de la vitesse angulaire pour $t = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\omega\theta_{\mathrm{m}} \sin(\phi)\ .$$

ω et θ_{m} étant des valeurs positives et le sinus de 1,05 rad étant positif, on trouve forcément une valeur négative pour $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ et on peut conserver $\theta = 1{,}05\,\mathrm{rad}$. Avec la conversion en radians de l'amplitude et la détermination de la valeur de ω, on peut maintenant réécrire l'équation générale de la position angulaire :

$$\theta_{\mathrm{m}} = 10{,}0^\circ \times \frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{360^\circ} = 0{,}175\,\mathrm{rad} \qquad \text{et} \qquad \omega = \sqrt{\frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{1{,}000\,\mathrm{m}}} = 3{,}13\,\mathrm{rad/s}$$

$$\theta = 0,175\cos(3{,}13t + 1,05),\ \text{avec } \theta \text{ en radians et } t \text{ en secondes.} \qquad \text{(réponse)}$$

c. **Identifier la clé** La clé est le lien entre la vitesse angulaire maximale et l'amplitude angulaire.

Résoudre le problème Une équation de la vitesse angulaire implique deux autres variables déjà connues :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\theta_{\mathrm{m}}\ .$$

En insérant les valeurs déterminées en **b.** pour la fréquence angulaire et l'amplitude, toutes deux en radians, on trouve :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 3{,}13\,\mathrm{rad/s} \times 0{,}175\,\mathrm{rad} = 0{,}547\,\mathrm{rad/s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse angulaire semble plausible. Par ailleurs, les unités ne sont pas incorrectes, même si les radians apparaissent deux fois. La fréquence angulaire sous-entend des angles en radians mais peut s'exprimer plutôt en secondes à la puissance moins un.

d. **Identifier la clé** La clé est l'équation de la vitesse angulaire qu'on peut construire rapidement avec les paramètres déterminés précédemment.

Résoudre le problème L'équation de la vitesse angulaire est

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\omega\theta_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \phi) \ .$$

Dans l'énoncé, on apprend que $t = 0$ est l'un des instants où la position angulaire est de 5,00°. De plus, le pendule passe à cet angle dans deux directions différentes, et la vitesse y aura alors le même module, mais avec des signes différents. En insérant dans l'équation de $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ les valeurs déterminées en **b.** pour ω, θ_{m} et ϕ, en radians, on trouve

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}_{\theta=5{,}00°} = -3{,}13\,\mathrm{rad/s} \times 0{,}175\,\mathrm{rad} \times \sin(3{,}13\,\mathrm{rad/s} \times 0 + 1{,}05\,\mathrm{rad}) = -0{,}473\,\mathrm{rad/s} \ .$$

Comme mentionné, le pendule a cette vitesse en revenant vers sa position centrale, mais quand il repasse à cet endroit dans l'autre sens, la vitesse est la même. Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}_{\theta=5{,}00°} = \pm 0{,}473\,\mathrm{rad/s} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de cette vitesse est correct.

e. **Identifier la clé** La clé est la relation simple entre l'accélération angulaire et la position angulaire, $\alpha_z = -\omega^2\theta$.

Résoudre le problème ω étant connue, on peut rapidement déterminer α_z en n'oubliant pas la conversion en radians de l'angle de 8,00° :

$$\alpha_{z,\theta=8{,}00°} = -\omega^2\theta = -(3{,}13\,\mathrm{rad/s})^2 \times 8{,}00° \times \frac{2\pi \text{ rad}}{360°} = -1{,}37\,\mathrm{rad/s^2} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Cette accélération est forcément négative lorsque le pendule passe à l'angle de 8,00°, car il accélère toujours vers sa position centrale (force de rappel vers la position d'équilibre). L'accélération ne prend la valeur opposée que lorsque l'angle est de −8,00°.

P43 **Décortiquer le problème** La période d'un pendule est affectée par l'accélération de son point de suspension.

Connue	Inconnue
$L = 40{,}0\,\mathrm{cm}$	T

Identifier la clé La clé est de déterminer une expression générale de la période comportant la variable accélération du système, celle-ci venant modifier la valeur effective de g.

Résoudre le problème Le poids apparent du pendule correspond à la tension dans la corde, car c'est la seule force de contact agissant sur lui. On note ce poids apparent mg', et on pose l'égalité $T = mg'$. L'équation de la somme des forces sur le pendule (on suppose un axe positif vers le haut) permet par ailleurs de trouver une équivalence de g' :

$$\sum F_y = ma_y = T - mg = mg' - mg \qquad \Rightarrow \qquad g' = g + a_y \ .$$

Le lien entre la période et la longueur de la corde peut ensuite incorporer cette valeur de g' :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g + a_y}} \ . \qquad \text{(i)}$$

a. **Résoudre le problème** Une accélération du système vers le haut est négative, vu la définition de g'. L'application de l'équation (i) avec une accélération de $+1{,}10\,\mathrm{m/s^2}$ donne la période suivante :

$$T_{a=+1{,}10\,\mathrm{m/s^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g + a_y}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}400\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2} + 1{,}10\,\mathrm{m/s^2}}} = 1{,}20\,\mathrm{s} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la période est correct.

b. Résoudre le problème L'accélération vers le bas est définie par $-1{,}10\,\mathrm{m/s^2}$, ce qui entraîne

$$T_{a=-1{,}10\,\mathrm{m/s^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g+a_y}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}400\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2} - 1{,}10\,\mathrm{m/s^2}}} = 1{,}35\,\mathrm{s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur est le même qu'en **a.**, ce qui est correct. Par contre, il est encore plus révélateur que la période soit légèrement supérieure, la tension de la corde étant un peu réduite par l'accélération vers le bas.

c. Résoudre le problème Une chute libre de l'ascenseur correspond à une accélération $a_y = -9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Ainsi,

$$T_{-g} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g+a_y}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g-g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{0}}\ .$$

La période ne peut être déterminée. On peut aussi dire qu'elle pourrait tendre vers l'infini si l'accélération en chute libre tendait vers g. Dans les faits, il n'y aura aucune oscillation s'il n'y a aucune tension dans la corde.

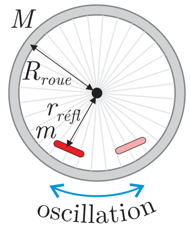
Il n'y a aucune oscillation. (réponse)

P44 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$M_{\text{roue}} = 1{,}10\,\mathrm{kg}$	T
$R_{\text{roue}} = 35{,}0\,\mathrm{cm}$	α, lorsque $\theta = 8{,}0°$
$m_{\text{réflecteur}} = 14{,}0\,\mathrm{g}$	
$r_{\text{réfl}} = 28{,}0\,\mathrm{cm}$	

a. Identifier la clé La clé est l'union des deux équations de la fréquence angulaire pour un pendule.

Illustrer la situation La figure ci-contre montre la roue de vélo dans les deux positions angulaires maximales du réflecteur, par rapport à la position d'équilibre.



Résoudre le problème Les équations de la fréquence angulaire que l'on peut réunir sont

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{(i)}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}\ . \qquad \text{(ii)}$$

Dans cette équation, m est la masse totale ($M_{\text{roue}} + m_{\text{réflecteur}}$) et h est la distance entre le centre de rotation (centre de la roue) et le centre de masse, distance qui est déterminée en considérant l'origine au centre de rotation.
Avec M et R pour la roue, puis m et r pour le réflecteur, on a

$$h = \frac{\sum m_i d}{m_{\text{totale}}} = \frac{M\times 0 + m\times r}{M+m} = \frac{mr}{M+m}\ . \qquad \text{(iii)}$$

Pour ce pendule composé tournant autour du centre de la roue, le moment d'inertie est la somme du moment d'inertie de la roue (MR^2 pour un anneau) et de celui du réflecteur (considéré comme une masse ponctuelle, $I = mr^2$) :

$$I = MR^2 + mr^2\ . \qquad \text{(iv)}$$

La réunion des équations (i), (ii) et (iii) donne

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{MR^2 + mr^2}{(M+m)g \times \frac{mr}{M+m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{MR^2 + mr^2}{mgr}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}10\,\mathrm{kg} \times (35{,}0\,\mathrm{cm})^2 + 0{,}014\,0\,\mathrm{kg} \times (28{,}0\,\mathrm{cm})^2}{(0{,}014\,\mathrm{kg} \times 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \times 0{,}280\,\mathrm{m}}} = 11{,}8\,\mathrm{s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La période peut paraître élevée, mais le déséquilibre provoqué par le réflecteur est très faible, en comparaison avec le moment d'inertie de la roue, alors la longue période est plausible.

b. **Identifier la clé** La clé est le lien direct entre l'accélération angulaire et la position angulaire, via la fréquence angulaire ω.

Résoudre le problème La relation entre l'accélération angulaire et la position angulaire est

$$\alpha = -\omega^2\theta, \qquad \text{avec } \omega \text{ défini à la ligne (i).}$$

I et h ayant été définis en **a.**, en incluant la conversion en radians de la position étudiée, on trouve

$$\alpha_{\theta=8{,}0^\circ} = -\left(\sqrt{\frac{mgh}{I}}\right)^2\theta = -\frac{(M+m)g \times \frac{mr}{M+m}}{MR^2 + mr^2}\theta = -\frac{mgr\theta}{MR^2 + mr^2}$$

$$\alpha_z = -\frac{0{,}014\,\mathrm{kg} \times 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \times 0{,}280\,\mathrm{m} \times 8{,}0^\circ \times \frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{360^\circ}}{1{,}10\,\mathrm{kg} \times (35{,}0\,\mathrm{cm})^2 + 0{,}014\,0\,\mathrm{kg} \times (28{,}0\,\mathrm{cm})^2} = -0{,}040\,\mathrm{rad/s^2}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'accélération angulaire faible est cohérente avec la longue période trouvée en **a.**

P45 **Décortiquer le problème** Le moment d'inertie de la tige est influencé par la distance x entre le centre de masse de la tige et son centre de rotation.

a. **Identifier la clé** La clé est l'union des deux équations de la fréquence angulaire pour un pendule.

Résoudre le problème Les équations de la fréquence angulaire que l'on peut réunir sont

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}} \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}\ . \qquad \text{(i)}$$

Dans cette équation, le moment d'inertie requiert le théorème des axes parallèles, selon lequel $I = I_{\mathrm{cm}} + mh^2$, h étant la distance x définie dans le problème. Pour une tige homogène,

$$I_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{12}mL^2\ ,$$

d'où

$$I = \frac{1}{12}mL^2 + mx^2\ .$$

La période peut alors s'exprimer en fonction de L et de x :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}mL^2 + mx^2}{mgx}} = 2\pi\sqrt{\frac{L^2 + 12x^2}{12gx}}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Les unités simplifiées de cette expression sont bien celles du temps.

b. **Identifier la clé** La clé est le fait qu'à la distance x optimale qui minimise la période, la dérivée de la période par rapport à x sera nulle.

Résoudre le problème Pour la distance x recherchée, on a l'équation

$$\frac{dT}{dx} = 0 = \frac{d}{dx}\left(2\pi\sqrt{\frac{\frac{L^2}{12}+x^2}{gx}}\right) .$$

La solution de cette dérivée est

$$0 = \frac{\pi\sqrt{12}}{g} \times \frac{(x^2 - \frac{1}{12}L^2)}{x^2\sqrt{\frac{L^2+12x^2}{gx}}} .$$

Il n'est pas possible d'isoler x dans cette équation, mais on cherche simplement une solution faisant en sorte que l'égalité à 0 soit valide, qui plus est pour une valeur de x comprise entre 0 et $\frac{L}{2}$ (car le centre de rotation ne peut s'éloigner davantage du centre, et ce, seulement au-dessus du centre de masse). Il suffit donc de trouver les « racines » de l'équation, c'est-à-dire les valeurs de x telles que la portion entre parenthèses soit nulle. Ainsi,

$$x^2 - \frac{1}{12}L^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{L}{\sqrt{12}} = \pm 0{,}289L .$$

Comme il est mentionné, on ne conserve que la solution positive,

$$x = 0{,}289L . \qquad \text{(réponse)}$$

Validater la réponse x est bel et bien compris entre 0 et $\frac{L}{2}$.

c. **Identifier la clé** La clé est l'utilisation de l'expression de x trouvée en **b.** pour évaluer sa valeur lorsque $L = 1{,}000\,\text{m}$.

Résoudre le problème On détermine x :

$$x = 0{,}289L = 0{,}289 \times 1{,}000\,\text{m} = 0{,}289\,\text{m} . \qquad \text{(réponse)}$$

d. **Identifier la clé** La clé est l'utilisation de l'expression de T trouvée en **a.** pour calculer la période.

Résoudre le problème On détermine T :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{L^2}{12}+x^2}{gx}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{L^2}{12}+\left(\frac{L}{\sqrt{12}}\right)^2}{g\frac{L}{\sqrt{12}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \times \sqrt[4]{3} .$$

On aurait pu passer au calcul sans réduire autant l'expression, mais il est intéressant de voir une forme aussi simplifiée qui montre que la forme générale de la période d'un pendule simple est simplement réduite d'un facteur de $\sqrt[4]{3}$ pour le pendule composé dont la période est minimisée par la position du pivot :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \times \sqrt[4]{3} = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}000\,\text{m}}{9{,}81\,\text{m/s}^2}} \times \sqrt[4]{3} = 1{,}52\,\text{s} . \qquad \text{(réponse)}$$

Q46 **Décortiquer le problème** La période d'un circuit LC varie avec les valeurs de L et de C.

Identifier la clé La clé est l'union des deux expressions de la fréquence angulaire pour un circuit LC.

Résoudre le problème Les équations à unir sont

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} .$$

Pour le circuit décrit dans la question, on a

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}\ . \tag{i}$$

On établit l'équation de la période modifiée lorsqu'on utilise une inductance modifiée L' et/ou une capacité modifiée C' :

$$T = 2\pi\sqrt{L'C'}\ . \tag{ii}$$

En **a.**, en **b.** et en **c.**, on cherche le rapport $\frac{T}{T_0}$ tel que

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2\pi\sqrt{L'C'}}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad \Rightarrow \qquad T = \sqrt{\frac{L'C'}{LC}}T_0\ .$$

a. Résoudre le problème $C' = 2C$ et $L' = L$:

$$T = \sqrt{\frac{L'C'}{LC}}T_0 = \sqrt{\frac{L \times 2C}{LC}}T_0 = \sqrt{2}T_0\ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'augmentation de la capacité entraîne logiquement une augmentation de la période, puisque le temps de charge du condensateur est allongé.

b. Résoudre le problème $C' = C$ et $L' = 3L$:

$$T = \sqrt{\frac{L'C'}{LC}}T_0 = \sqrt{\frac{3L \times C}{LC}}T_0 = \sqrt{3}T_0\ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'augmentation de l'inductance entraîne logiquement une augmentation de la période, puisque l'augmentation du courant de charge est retardée et le temps de charge, allongé.

c. Résoudre le problème $C' = 4C$ et $L' = 4L$:

$$T = \sqrt{\frac{L'C'}{LC}}T_0 = \sqrt{\frac{4L \times 4C}{LC}}T_0 = \sqrt{16}T_0 = 4T_0\ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'augmentation de l'inductance et de la capacité retarde le courant de charge et augmente également la charge maximale qui renversera le processus.

E47 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$f = 800\,\mathrm{kHz}$	C
$L = 1{,}05\,\mathrm{mH}$	

Identifier la clé La clé est l'union de deux équations de la fréquence angulaire dont l'une fait intervenir la fréquence f.

Résoudre le problème

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad \text{et} \qquad \omega = 2\pi f$$

$$2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L}$$

$$C = \frac{1}{4\pi^2 \times (800 \times 10^3\,\mathrm{Hz}) \times (1{,}05 \times 10^{-3}\,\mathrm{H})} = 3{,}77 \times 10^{-11}\,\mathrm{F} = 37{,}7\,\mathrm{pF}\ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse Cette capacité a un ordre de grandeur courant pour les condensateurs faisant partie du circuit électronique d'une radio.

E48 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$C = 1{,}00\,\mu\text{F}$	L
$\Delta V = 6{,}00\,\text{V}$	
$T = 2{,}8\,\text{ms}$	

Identifier la clé La clé est l'union des deux expressions de la fréquence angulaire pour un circuit LC.

Résoudre le problème Les équations à unir sont

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \ .$$

Dans ce cas, on cherche à déterminer L. Il ne reste qu'à l'isoler pour passer au calcul. Il est à noter que le potentiel de charge fourni dans l'énoncé n'est pas utile pour déterminer l'inductance. Il n'influence que l'amplitude du mouvement harmonique, laquelle n'influence pas la période qui apparaît dans la résolution :

$$L = \frac{T^2}{4\pi^2 C} = \frac{(2{,}8 \times 10^{-3}\,\text{s})^2}{4\pi^2 \times 1{,}00 \times 10^{-6}\,\text{F}} = 0{,}20\,\text{H} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'inductance est correct.

E49 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$C = 2{,}70\,\mu\text{F}$	$t_{i=0}$
$L = 25{,}0\,\text{mH}$	$\Delta V_{C\text{m}}$
$i_{t=0} = 0{,}043\,0\,\text{A}$	
$Q_{t=0} = 0$	

a. **Identifier la clé** La clé est la détermination du déphasage à partir de la charge initiale nulle.

Résoudre le problème L'équation de la charge en fonction du temps permet d'isoler et de calculer ϕ, même sans connaître la charge maximale :

$$Q = Q_\text{m}\cos(\omega t + \phi) \qquad \Rightarrow \qquad \phi = \arccos(\frac{Q}{Q_\text{m}}) - \omega t$$

$$\phi = \arccos(\frac{0}{Q_\text{m}}) - \omega \times 0 = \arccos 0 = \pm\frac{\pi}{2}\ \text{rad} \ .$$

L'équation du courant peut maintenant donner le moment d'un courant nul :

$$i = i_\text{m}\sin(\omega t + \phi), \qquad \text{avec} \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$t_{i=0} = \frac{\arcsin(\frac{i}{i_\text{m}}) - \phi}{\omega} = \frac{\arcsin(\frac{0}{i_\text{m}}) - \left(\pm\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{LC}}} = \mp\frac{\pi}{2}\sqrt{LC}$$

$$t_{i=0} = \mp\frac{\pi}{2}\ \text{rad} \times \sqrt{(0{,}025\,0\,\text{H}) \times (2{,}70 \times 10^{-6}\,\text{F})} = \mp 408\,\mu\text{s} \ .$$

Évidemment, on ne conserve que la solution positive puisqu'on cherche l'instant après $t = 0$, où le courant est nul. Ainsi,

$$\Delta t = 408\,\mu s \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la période est correct pour des circuits LC pouvant osciller à haute fréquence.

b. Identifier la clé Les clés sont les équations de la capacité et de la relation entre le courant maximal et la charge maximale pour un condensateur.

$$C = \frac{Q}{\Delta V_C} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta V_{C,\mathrm{m}} = \frac{Q_\mathrm{m}}{C} \ ,$$

$$i_\mathrm{m} = \omega Q_\mathrm{m} \qquad \Rightarrow \qquad Q_\mathrm{m} = \frac{i_\mathrm{m}}{\omega} \ .$$

Résoudre le problème En réunissant les équations clé et en considérant que $\omega = 1/\sqrt{LC}$, on trouve

$$\Delta V_{C,\mathrm{m}} = \frac{Q_\mathrm{m}}{C} = \frac{(\frac{i_\mathrm{m}}{\omega})}{C} = \frac{i_\mathrm{m}}{C\omega} = \frac{i_\mathrm{m}}{C}\frac{\sqrt{LC}}{1} i_\mathrm{m}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\Delta V_{C,\mathrm{m}} = 0{,}043\,0\ \mathrm{A} \times \sqrt{\frac{25 \times 10^{-3}\ \mathrm{H}}{2{,}7 \times 10^{-6}\ \mathrm{F}}} = 4{,}14\ \mathrm{V} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la différence de potentiel est correct pour un circuit électronique.

E50 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$C = 10{,}0\ \mu\mathrm{F}$	$Q_C(t)$
$L = 50{,}0\ \mathrm{mH}$	$i_{t=10{,}0\ \mathrm{ms}}$
$\Delta V_{C,t=0} = 15{,}0\ \mathrm{V}$	

Identifier la clé La clé est le fait que le potentiel de 15,0 V est le potentiel maximal aux bornes du condensateur parce que la fermeture de l'interrupteur ne fera que le décharger à travers la bobine. La charge sera donc également maximale à $t = 0$.

a. Décortiquer le problème Pour connaître l'équation de la charge en fonction du temps, on doit déterminer les valeurs de Q_m, ω et ϕ.

Résoudre le problème On détermine d'abord la fréquence angulaire, qui fait partie de l'équation $Q_C(t)$ et qui sera requise pour le calcul en **b.** :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{(0{,}050\,0\ \mathrm{H}) \times (10{,}0 \times 10^{-6}\ \mathrm{F})}} = 1{,}41 \times 10^3\ \mathrm{rad/s} \ .$$

On détermine ensuite Q_m, connaissant la capacité et $\Delta V_{C,\mathrm{m}}$:

$$C = \frac{Q}{\Delta V_C} \qquad \Rightarrow \qquad Q_\mathrm{m} = C\Delta V_{C,\mathrm{m}} = (10{,}0 \times 10^{-6}\ \mathrm{F}) \times 15{,}0\ \mathrm{V} = 150\ \mu\mathrm{C} \ .$$

Troisièmement, on détermine la constante de phase ϕ, connaissant les conditions à $t = 0$ et la charge étant maximale :

$$Q = Q_\mathrm{m}\cos(\omega t + \phi) \qquad \Rightarrow \qquad \phi = \arccos(\frac{Q}{Q_\mathrm{m}}) - \omega t$$

$$\phi = \arccos(\frac{Q_\mathrm{m}}{Q_\mathrm{m}}) - \omega \times 0 = \arccos(1) = 0 \ .$$

On peut réunir les trois valeurs trouvées dans l'équation complète de la charge en fonction du temps :

$$Q = 150\ \mu\mathrm{C} \times \cos\Big((1{,}41 \times 10^3\ \mathrm{rad/s}) \times t\Big) \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Résoudre le problème** On peut insérer les paramètres déterminés en **a.** dans l'équation du courant en fonction du temps :

$$
\begin{aligned}
&i = i_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \phi), \qquad \text{avec} \qquad i_{\mathrm{m}} = \omega Q_{\mathrm{m}} \\
&i = \omega Q_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \phi) \\
&i = (1{,}41 \times 10^{3}\,\mathrm{rad/s}) \times 150 \times 10^{-6}\,\mathrm{C} \times \sin\Big((1{,}41 \times 10^{3}\,\mathrm{rad/s}) \times (0{,}010\,0\,\mathrm{s}) + 0\Big) \\
&i = 0{,}212\,\mathrm{A}\ . \qquad \text{(réponse)}
\end{aligned}
$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du courant est correct.

Q51 **Identifier la clé** La clé est l'union de deux équations de la fréquence angulaire pour le système bloc-ressort amorti, suivie de l'expression de la dérivée de la période par rapport à diverses variables du système.

Résoudre le problème Deux expressions utiles de la fréquence angulaire du système amorti :

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}\ ,$$

sont réunies pour produire une expression de la période :

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}}\ . \tag{i}$$

Une légère transformation (optionnelle) peut simplifier les étapes à venir :

$$T = 2\pi\left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\ . \tag{ii}$$

a. **Décortiquer le problème** Une constante de rappel plus élevée signifie qu'on cherche l'effet sur la période d'une augmentation de k.

Résoudre le problème Dans l'équation (i), la variable k apparaît au dénominateur (dans une racine carrée). L'augmentation de k augmentera la valeur de la racine, donc diminuera la valeur de la période.

Rigoureusement, la dérivée de la période par rapport à k définirait la dépendance de la période en fonction de k :

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}k} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(2\pi\left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \\
&= 2\pi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(\left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right) \\
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}k} &= \frac{-\pi}{m\left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\ .
\end{aligned} \tag{iii}
$$

L'expression $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}k}$ étant forcément négative, cela signifie que la période diminue avec l'augmentation de k.

La période diminue. (réponse)

Valider la réponse Ce résultat est logique : la présence de l'amortissement n'inverse pas l'effet de la constante de rappel sur la période du système.

b. Décortiquer le problème Un liquide plus visqueux signifie qu'on cherche l'effet sur la période d'une augmentation de b.

Résoudre le problème Dans l'équation (i), la variable b apparaît au dénominateur, dans un terme soustrait à l'intérieur d'une racine carrée. L'augmentation de b réduira la valeur de la racine, donc augmentera la valeur de la période.
La dérivée de la période par rapport à b définit la dépendance de la période en fonction de b :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}b} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\left(2\pi\left(\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\\ &= 2\pi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\left(\left(\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\\ &= 2\pi\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\left(\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}\right)\\ \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}b} &= \frac{\pi b}{2m^2\left(\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\ .\end{aligned} \tag{iv}$$

L'expression $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}b}$ étant forcément positive, cela signifie que la période augmente avec l'augmentation de b.

La période augmente. (réponse)

Valider la réponse Ce résultat est logique : la présence de l'amortissement ralentit le bloc en tout point de son parcours et l'augmentation de la viscosité empire ce ralentissement.

c. Décortiquer le problème On cherche l'effet d'une augmentation de la masse du bloc sur la période.

Résoudre le problème Dans l'équation (i), la variable m apparaît à deux endroits dans la racine carrée, une fois additionnée, l'autre fois soustraite. Il est donc difficile sans la dérivée $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}m}$ de percevoir clairement l'effet d'une augmentation de la masse.
La dérivée de la période par rapport à m est donnée par

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}m} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\left(2\pi\left(\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\\ &= 2\pi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\left(\left(\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\\ &= 2\pi\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\left(\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}\right)\\ \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}m} &= \frac{\pi\left(k-\frac{b^2}{2m}\right)}{m^2\left(\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\ .\end{aligned} \tag{v}$$

Ce résultat admet les deux situations (augmentation et diminution de la période avec la masse), mais dans le cas où b est faible, c'est-à-dire dans la plupart des cas concrets, le numérateur de l'expression demeurera positif (le dénominateur étant forcément positif) et $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}m}$ sera positif ; la période augmentera avec l'augmentation de la masse.

La période augmente. (réponse)

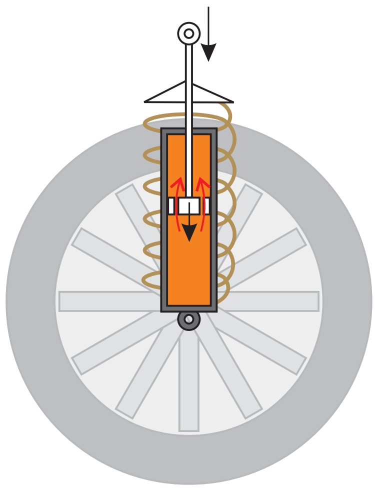
Valider la réponse Ce constat est logique pour un b faible, alors que l'effet de la masse est le même que dans un système non amorti.

d. Décortiquer le problème On cherche l'effet d'une inclinaison de l'axe du mouvement sur la période.

Résoudre le problème Dans l'équation (i), aucune variable ne concerne l'orientation du système, donc une inclinaison de l'axe n'aura aucun effet sur la période. La masse demeure la même, le ressort a la même constante de rappel, et la viscosité est la même dans le milieu qui enveloppe le système. Au plus, la position d'équilibre sera modifiée sous l'effet de la gravité, mais la période demeure la même.

$$\text{La période ne change pas.} \qquad \text{(réponse)}$$

Q52 **Décortiquer le problème** Le fonctionnement des amortisseurs d'automobile repose sur la viscosité d'un fluide à l'intérieur des cylindres d'amortissement (*voir la figure ci-contre*). Lorsque la distance entre les deux extrémités fixées de l'amortisseur est réduite (élévation de la roue par une bosse ou abaissement de l'auto lors d'un chargement), le fluide (par exemple de l'huile, en orange sur la figure) est forcé de se déplacer à travers des ouvertures du piston pour permettre à celui-ci de se déplacer. La viscosité de l'huile rend plus ou moins difficile cette transition et l'énergie cinétique est dissipée par cette contrainte.



Identifier la clé La clé est l'interprétation de l'effet du facteur d'amortissement b sur la diminution de l'amplitude dans le temps.

Résoudre le problème L'équation de l'amplitude des oscillations amorties, pour un système masse-ressort, est

$$x_{\mathrm{m}} = x_{0\mathrm{m}} e^{\frac{-bt}{2m}} \ .$$

Dans cette équation, on voit que pour un même instant t, plus b est faible, plus l'amplitude résiduelle sera grande. D'un autre point de vue, si on considère que les oscillations d'une automobile cessent d'être inconfortables lorsque leur amplitude x_{m} passe sous un certain seuil, on voit dans l'équation que plus b est faible, plus le délai sera long pour que l'amplitude passe sous la valeur « confortable ». À l'extrême, un amortissement nul causerait des oscillations perpétuelles durant toute la durée d'un déplacement en auto. On cherche donc un facteur d'amortissement assez élevé pour réduire rapidement l'amplitude du mouvement.

À l'opposé, un facteur d'amortissement trop élevé fera principalement en sorte que le mouvement des roues sera transféré plus durement à l'habitacle. De plus, on veut que les roues (par rapport à l'auto) retournent rapidement à leur position normale pour pouvoir réagir correctement à nouveau à tout obstacle à venir. À l'extrême, des amortisseurs dont le facteur d'amortissement est très élevé (tend vers l'infini) transféreront à l'habitacle toutes les secousses subies par les roues. Ce ne serait pas seulement inconfortable, mais aussi très dommageable pour l'automobile.

E53 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$m = 100\,\mathrm{g}$	b
$k = 10{,}0\,\mathrm{N/m}$	$n_{\Delta t = 30{,}0\,\mathrm{s}}$
$x_{\mathrm{m},t=30{,}0\,\mathrm{s}} = 0,800 x_{\mathrm{m}}$	$\Delta E_{\Delta t = 30{,}0\,\mathrm{s}}$

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation de la diminution exponentielle de l'amplitude des oscillations dans le temps.

Résoudre le problème L'amplitude des oscillations diminue selon l'équation suivante :

$$x_{\mathrm{m}} = x_{0\mathrm{m}} e^{\frac{-bt}{2m}} \ . \qquad \text{(i)}$$

Si l'amplitude des oscillations est réduite à 80 % après 30 s, on peut écrire

$$x_{\mathrm{m}} = 0,800 x_{0\mathrm{m}} \ .$$

Insérée dans l'équation (i), cette relation amène

$$x_{\mathrm{m}} = x_{0\mathrm{m}} e^{\frac{-bt}{2m}} = 0{,}800 x_{0\mathrm{m}}$$

$$e^{\frac{-bt}{2m}} = 0{,}800\ .$$

On peut alors isoler b pour connaître le coefficient de résistance :

$$b = \frac{-2m\ln(0{,}800)}{t} = \frac{-2\times 0{,}100\,\text{kg}\times\ln(0{,}800)}{30{,}0\,\text{s}} = 1{,}49\times 10^{-3}\,\text{kg/s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Identifier la clé La clé est la détermination de la période de ces oscillations amorties.

Résoudre le problème La période d'oscillation pour un système bloc-ressort amorti est lié à la fréquence angulaire :

$$\omega_\text{a} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}, \qquad \text{où} \qquad \omega_\text{a} = \frac{2\pi}{T_\text{a}} \qquad \text{et} \qquad b = 1{,}49\times 10^{-3}\,\text{kg/s}$$

$$T_\text{a} = \frac{2\pi}{\omega_\text{a}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{10{,}0\,\text{N/m}}{0{,}100\,\text{kg}} - \frac{(1{,}49\times 10^{-3}\,\text{kg/s})^2}{4\times 0{,}100\,\text{kg}^2}}} = 0{,}628\,\text{s}\ .$$

Le nombre d'oscillations est finalement donné par le rapport de la durée totale à la période T_a :

$$N = \frac{30{,}0\,\text{s}}{0{,}628\,\text{s}} = 47{,}7 \text{ oscillations.} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Ce nombre d'oscillations est plausible. Il implique une période d'oscillation inférieure à la seconde, ce qui est un ordre de grandeur correct pour un système comme celui de l'exercice.

c. Identifier la clé La clé est l'équation de l'énergie mécanique résiduelle, utilisée pour comparer l'énergie à deux instants.

Résoudre le problème L'énergie mécanique du système est donnée par l'équation

$$E_\text{méc} = \frac{1}{2}kx_\text{0m}^2 e^{\frac{-bt}{m}}\ . \qquad \text{(ii)}$$

Si l'on compare l'énergie à $t = 30{,}0\,\text{s}$ à l'énergie à $t = 0$, on trouve

$$\frac{E_\text{méc}}{E_\text{méc,0}} = \frac{\frac{1}{2}kx_\text{0m}^2 e^{\frac{-bt}{m}}}{\frac{1}{2}kx_\text{0m}^2 e^{\frac{-b\times 0}{m}}} = \frac{e^{\frac{-bt}{m}}}{e^0} = e^{\frac{-bt}{m}} = e^{\frac{-(1{,}49\times 10^{-3}\,\text{kg/s})\times(30{,}0\,\text{s})}{0{,}100\,\text{kg}}} = 0{,}640\ .$$

Cette quantité, 64,0 %, est la fraction restante de l'énergie initiale. Le pourcentage de l'énergie dissipée est donc

$$\frac{\Delta E}{E_0} = 100{,}0\ \% - 64{,}0\ \% = 36{,}0\ \%\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Ce pourcentage d'énergie dissipée est réaliste : une perte d'amplitude de 20 % occasionnera une perte d'énergie mécanique d'un pourcentage plus élevé que 20 %, puisque l'énergie varie avec le carré de l'amplitude.

E54 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$b_\text{c0} = 200\,\text{kg/s}$	b_c
$m/m_0 = 1,40$	

Identifier la clé La clé est la substitution de la constante de rappel dans l'équation du facteur de résistance, lorsque les conditions produisent un amortissement critique.

Résoudre le problème Le facteur de résistance en amortissement critique, pour les conditions initiales, est

$$b_\text{c0} = \sqrt{4km_0} \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{b_\text{c0}^2}{4m_0}\ .$$

Dans les nouvelles conditions, la masse ayant changé mais le ressort étant le même, on a

$$b_c = \sqrt{4km} = \sqrt{4 \times \frac{b_{c0}^2}{4m_0} \times m} = b_{c0}\sqrt{\frac{m}{m_0}} = 200\,\text{kg/s}\sqrt{1,40} = 237\,\text{kg/s} \;. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse C'est une augmentation de 18 % du facteur de résistance, ce qui est plausible, avec une augmentation de la masse de la porte de 40 %, puisque le facteur d'amortissement critique est lié à la racine carrée de la masse.

P55 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$E_{\text{air},t=5{,}00\,\text{s}} = 0{,}03E_0$	$E_{\text{vide},t=5{,}00\,\text{s}}$
$m = 15{,}0\,\text{kg}$	
$b_{\text{air}} = 8{,}00\,\text{kg/s}$	

Identifier la clé La clé est la détermination de la portion du coefficient d'amortissement due à la structure du satellite, pour l'appliquer dans le vide, seule.

Résoudre le problème On peut déduire le coefficient d'amortissement réel (total) à partir des données du problème :

$$E_{\text{méc}} = \frac{1}{2}kx_{0\text{m}}^2 e^{\frac{-b_{tot}t}{m}}, \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{2}kx_{0\text{m}}^2 = E_{\text{méc,m}}$$

$$E_{\text{méc}} = E_{\text{méc,m}} e^{\frac{-b_{tot}t}{m}} \;. \qquad \text{(i)}$$

La décroissance de l'énergie dans l'air est telle qu'après 5,00 s

$$\frac{E_{\text{méc}}}{E_{\text{méc,m}}} = 0{,}03 \;.$$

Ainsi,

$$\frac{E_{\text{méc}}}{E_{\text{méc,m}}} = e^{\frac{-b_{tot}t}{m}} = 0{,}03$$

$$b_{\text{tot}} = \frac{-m\ln(0{,}03)}{t} = \frac{-15{,}0\,\text{kg} \times \ln(0{,}03)}{5{,}00\,\text{s}} = 10{,}5\,\text{kg/s} \;.$$

Connaissant la valeur du coefficient d'amortissement total dans l'air, on peut déduire la valeur propre à la structure du satellite (b_{sat}) en soustrayant la valeur connue due à l'air :

$$b_{\text{sat}} = b_{\text{tot}} - b_{\text{air}} = 10{,}5\,\text{kg/s} - 8{,}00\,\text{kg/s} = 2{,}5\,\text{kg/s} \;.$$

On peut maintenant déterminer l'énergie mécanique résiduelle après 5,00 s dans le vide en utilisant seulement cette valeur de coefficient d'amortissement dans l'équation (i) :

$$E_{\text{méc}} = E_{\text{méc,m}} e^{\frac{-bt}{m}}$$

$$\frac{E_{\text{méc}}}{E_{\text{méc,m}}} = e^{\frac{-b_{\text{sat}}t}{m}} = e^{\frac{-2{,}5\,\text{kg/s} \times 5{,}00\,\text{s}}{15{,}0\,\text{kg}}} = 0{,}432 \;.$$

Le pourcentage de l'énergie restante après 5,00 s sera de 43,2 %. (réponse)

Valider la réponse L'ordre de grandeur est plausible, dans la mesure où le coefficient d'amortissement est réduit de façon importante. Il restera donc plus d'énergie dans le système après 5,00 s s'il n'y a pas d'air.

E56 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$C = 10{,}2\,\mu\text{F}$	f
$R = 23{,}8\,\Omega$	$Q_{t=1{,}20\,\text{ms}}$
$L = 8{,}90\,\text{mH}$	
$\Delta V_{t=0} = 9{,}00\,\text{V}$	

a. Identifier la clé La clé est l'équation de la fréquence angulaire du circuit RLC amorti.
Résoudre le problème La fréquence angulaire peut être définie de deux manières distinctes que l'on peut relier pour connaître la fréquence f :

$$\omega_\mathrm{a} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \qquad \text{et} \qquad \omega = 2\pi f \qquad \Rightarrow \qquad 2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{0{,}008\,90\,\mathrm{H} \times 10{,}2 \times 10^{-6}\,\mathrm{F}} - \frac{(23{,}8\,\Omega)^2}{4(0{,}008\,90\,\mathrm{H})^2}} = 483\,\mathrm{Hz}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur est réaliste pour un circuit électronique.

b. Identifier la clé La clé est l'équation de la charge du condensateur dans le temps pour un circuit amorti dont l'amplitude est décroissante.
Résoudre le problème L'amplitude de la charge oscillante du condensateur dans le circuit RLC est

$$Q = Q_\mathrm{m0} e^{\frac{-Rt}{2L}} \cos(\omega_\mathrm{a} t + \phi), \qquad \text{avec} \qquad \omega_\mathrm{a} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\ . \qquad \text{(i)}$$

La charge maximale Q_m0 est liée au potentiel initial donné dans l'énoncé ainsi qu'à l'équation définissant la capacité d'un condensateur :

$$C = \frac{Q}{\Delta V_{C,\mathrm{m0}}} \qquad \Rightarrow \qquad Q_\mathrm{m0} = C\Delta V_{C,\mathrm{m0}}\ . \qquad \text{(ii)}$$

Le potentiel maximal initial $V_{C,\mathrm{m0}}$ est le potentiel de 9,00 V donné dans l'énoncé puisqu'on mentionne que le courant initial est nul, ce qui coïncide avec la charge maximale. Pour les mêmes raisons, la constante de phase ϕ est nulle également. Avec les équations des lignes (i) et (ii) réunies, on obtient

$$Q = C\Delta V_\mathrm{m0} e^{\frac{-Rt}{2L}} \cos(\omega_\mathrm{a} t + \phi)$$

$$\text{avec} \qquad \omega_\mathrm{a} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\frac{1}{0{,}089\,0\,\mathrm{H} \times 10{,}2 \times 10^{-6}\,\mathrm{F}} - \frac{(23{,}8\,\Omega)^2}{4(0{,}008\,90\,\mathrm{H})^2}} = 3\,038\,\mathrm{rad/s}$$

$$Q_\mathrm{m} = 10{,}2 \times 10^{-6}\,\mathrm{F} \times 9{,}00\,\mathrm{V} \times e^{\frac{-23{,}8\,\Omega \times 1{,}20\,\times\,10^{-3}\,\mathrm{s}}{2 \times 0{,}008\,90\,\mathrm{H}}} \cos\Big((3\,038\,\mathrm{rad/s}) \times (1{,}20 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}) + 0\Big)$$

$$Q = -16{,}2 \times 10^{-6}\,\mathrm{C} = -16{,}2\,\mu\mathrm{C}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur est réaliste pour la charge d'un condensateur, et demeure inférieur à la valeur maximale initiale qui serait donnée par $C\Delta V_{C,\mathrm{m0}} = 91{,}8\,\mu\mathrm{C}$.

P57 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$m = 80{,}0\,\mathrm{kg}$	d_rebond
$l_0 = 20{,}0\,\mathrm{m}$	
$k = 100\,\mathrm{N/m}$	
$b_\mathrm{air} = 18{,}0\,\mathrm{kg/s}$	
$d_\mathrm{chute} = -37{,}5\,\mathrm{m}$	

Identifier la clé La clé est la détermination de la position d'équilibre à partir de l'analyse des forces.
Résoudre le problème La position d'équilibre (où Patrice finira par se trouver au repos après toutes ses oscillations) est l'endroit où la tension dans l'élastique compense exactement la force gravitationnelle :

$$\sum F_y = F_\text{él} - F_\mathrm{g} = kx - mg = 0$$

$$x = \frac{mg}{k} = \frac{80{,}0\,\mathrm{kg} \times 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{100\,\mathrm{N/m}} = 7{,}848\,\mathrm{m}\ .$$

L'élastique ayant une longueur au repos de 20 m, la position d'équilibre se trouve donc à 27,848 m sous le tremplin, et c'est le centre des oscillations.

On indique que le point le plus bas du mouvement d'oscillation (position extrême de la première oscillation) est à 37,5 m sous le tremplin. Il s'agit donc de l'amplitude à cet instant, et on peut démarrer l'analyse du mouvement d'oscillation à cet instant, faisant en sorte que c'est l'amplitude initiale $x_{0\mathrm{m}}$:

$$x_{0\mathrm{m}} = 37{,}5\,\mathrm{m} - 27{,}848\,\mathrm{m} = 9{,}652\,\mathrm{m}\ .$$

Et puisque la position cherchée est une position extrême, elle coïncide avec l'amplitude à cet instant, amplitude décroissante qui est donnée par

$$x_\mathrm{m} = x_{0\mathrm{m}} e^{-bt/(2m)}\ .$$

Si on cherche la position maximale vers le haut à la deuxième remontée, on cherche donc la position précisément une période et demie plus tard, soit à $t = \frac{3T}{2}$. Pour trouver le temps auquel cela correspond, on doit calculer la période dont la valeur, pour un mouvement amorti, est liée à

$$\omega_\mathrm{a} = \frac{2\pi}{T_\mathrm{a}}$$
$$T_\mathrm{a} = \frac{2\pi}{\omega_\mathrm{a}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{100{,}0\,\mathrm{N/m}}{80{,}0\,\mathrm{kg}} - \frac{(18{,}0\,\mathrm{kg/s})^2}{4\times(80{,}0\,\mathrm{kg})^2}}} = 5{,}649\,\mathrm{s}\ .$$

L'instant de la position recherchée est

$$3T/2 = 3 \times 5{,}649\,\mathrm{s}/2 = 8{,}473\,\mathrm{s}\ .$$

On peut maintenant calculer la position recherchée à l'aide de l'amplitude à $t = 3T/2$:

$$x_\mathrm{m} = x_{0\mathrm{m}} e^{-bt/(2m)} = 9{,}652\,\mathrm{m} \times e^{-18{,}0\,\mathrm{kg/s}\times 8{,}473\,\mathrm{s}/(2\times 80{,}0\,\mathrm{kg})} = 3{,}721\,\mathrm{m}\ .$$

Cette distance est un éloignement de la position d'équilibre. Celle-ci étant à 27,848 m sous le tremplin, la remontée de Patrice sous le tremplin sera donc

$$d = 27{,}848\,\mathrm{m} - 3{,}721\,\mathrm{m} = 24{,}1\,\mathrm{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Cette distance est plausible, alors que Patrice ne remonte pas tout à fait assez pour que la tension de l'élastique revienne à zéro.

Q58 **a.** **Résoudre le problème** Les oscillations d'une voiture doivent être limitées rapidement pour le confort et même la sécurité. Le système doit donc être amorti, et c'est justement le rôle des amortisseurs, qui accompagnent les ressorts supportant la masse de l'auto vis-à-vis les quatre roues.

Le système doit être amorti. (réponse)

b. **Résoudre le problème** Les vagues sur l'eau d'une piscine sont libres. Aucun système n'est utilisé pour les générer volontairement (le vent et les baigneurs les génèrent fortuitement) ni pour les atténuer (la viscosité de l'eau finit par les amortir complètement). Ces vagues ne sont jamais un problème, alors on les laisse libres.

Le système doit être laissé libre. (réponse)

c. **Résoudre le problème** Le pendule d'une horloge grand-père doit être entretenu. Le pendule sert à générer une fréquence précise et constante, mais un système (comme un ressort, anciennement), lui communique de l'énergie en petite quantité pour contrer le faible amortissement que l'air génère, même à très faible vitesse.

Le système doit être volontairement entretenu. (réponse)

d. Résoudre le problème Un pont suspendu est toujours susceptible d'être mis en mouvement par le vent ou certaines conditions de circulation. Il doit donc absolument être amorti pour que les oscillations ne soient jamais problématiques pour la structure ou pour la circulation.

Le système doit être amorti. (réponse)

e. Résoudre le problème Une chaise berçante est entretenue par le berceur, sans quoi elle s'arrêterait généralement après quelques cycles.

Le système doit être volontairement entretenu. (réponse)

f. Résoudre le problème Les cordes d'une guitare sont laissées libres de vibrer. L'amortissement sur quelques secondes est produit par l'air et la résistance à la déformation du matériau, mais cet amortissement suffit pour que les notes jouées aient une durée correcte en musique. Les oscillations ne sont pas entretenues non plus, seule l'excitation initiale leur donne de l'énergie.

Le système doit être laissé libre. (réponse)

g. Résoudre le problème Puisqu'une seule poussée ne suffit pas à dégager une voiture d'un trou où les roues sont embourbées, on la pousse à répétition lors de plusieurs oscillations successives pour ajouter de l'énergie à son mouvement à chaque cycle et en accumuler petit à petit suffisamment pour la dégager complètement.

Le système doit être volontairement entretenu. (réponse)

E59 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$L = 0{,}500\,\mathrm{H}$	f
$C = 2{,}50 \times 10^{-6}\,\mathrm{F}$	
$R = 0{,}800\,\Omega$	

Identifier la clé La clé est le fait que la fréquence de la source doit idéalement converger vers la fréquence naturelle du circuit.

Résoudre le problème La fréquence naturelle d'un circuit RLC amorti est

$$\omega_\mathrm{a} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \qquad \text{et} \qquad \omega = 2\pi f \ .$$

Ainsi,

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{(0{,}500\,\mathrm{H}) \times (2{,}50 \times 10^{-6}\,\mathrm{F})} - \frac{(0{,}800\,\Omega)^2}{4(0{,}500\,\mathrm{H})^2}} = 142\,\mathrm{Hz} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la fréquence est plausible pour un circuit électronique.

E60 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$L_1 = 15\,\mathrm{cm}$	f_{1r}
$L_2 = 25\,\mathrm{cm}$	f_{2r}
$L_3 = 50\,\mathrm{cm}$	f_{3r}
$L_4 = 1{,}00\,\mathrm{m}$	f_{4r}
$L_5 = 2{,}00\,\mathrm{m}$	f_{5r}

Identifier la clé La clé est le fait que la fréquence d'excitation doit être semblable à la fréquence naturelle, ou un multiple entier de cette valeur. Ainsi, la force appliquée serait tout de même toujours dans le sens de l'accélération du pendule.

Résoudre le problème Pour des raisons de simplification, on peut considérer la fréquence au lieu de la fréquence angulaire puisque la condition de résonance demeure la même : les fréquences doivent être semblables. Puisqu'on souffle sur le pendule toutes les deux secondes (c'est-à-dire à une fréquence de 0,5 Hz), on détermine la fréquence de chacun des cinq pendules pour reconnaître ensuite ceux qui pourraient entrer en résonance :

$$\omega_{\mathrm{r}} = 2\pi f_{\mathrm{r}} \qquad \text{et} \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}15\,\mathrm{m}}} = 1{,}29\,\mathrm{Hz}$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}25\,\mathrm{m}}} = 1{,}00\,\mathrm{Hz}$$

$$f_3 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}55\,\mathrm{m}}} = 0{,}705\,\mathrm{Hz}$$

$$f_4 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{1{,}00\,\mathrm{m}}} = 0{,}498\,\mathrm{Hz}$$

$$f_5 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{2{,}00\,\mathrm{m}}} = 0{,}352\,\mathrm{Hz}\ .$$

Le pendule de 1,00 m oscillera de façon continue, car sa fréquence est pratiquement la même que celle des impulsions. Le pendule de 25 cm oscillera lui aussi de façon continue, car il reçoit une poussée toutes les deux oscillations. Les autres suivront un mouvement chaotique en raison de poussées qui sont tantôt dans le sens de la vitesse, tantôt en sens opposé.

Les pendules de 1,00 m et de 25 cm oscilleront de façon continue. (réponse)

E61 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$m = 15{,}0\,\mathrm{g}$	f_{r}
$k = 30{,}0\,\mathrm{N/cm}$	
$\Delta f_{\text{réson}} = \pm 10{,}0\,\%$	

Identifier la clé La clé est l'union des équations de la fréquence angulaire d'un système masse-ressort.

Résoudre le problème Les équations de la fréquence angulaire de ce système masse-ressort, à la fréquence de résonance, sont

$$\omega_{\mathrm{r}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{et} \qquad \omega_{\mathrm{r}} = 2\pi f_{\mathrm{r}}$$

$$f_{\mathrm{r}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 71{,}2\,\mathrm{Hz}\ .$$

On peut maintenant calculer les limites supérieure et inférieure du domaine de résonance efficace du cône du haut-parleur :

$$\text{Fréquence inférieure : } f_{\text{inf}} = f_{\text{r}} \times 0{,}90 = 64{,}1\,\text{Hz}$$

$$\text{Fréquence supérieure : } f_{\text{sup}} = f_{\text{r}} \times 1{,}10 = 78{,}3\,\text{Hz}$$

$$64{,}1\,\text{Hz} \quad < \quad f \quad < \quad 78{,}3\,\text{Hz}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Q1a: Notez toutefois qu'une étude plus approfondie des vagues montre qu'il s'agit d'ondes complexes incluant notamment un roulement qui se traduit en surface par une apparence d'ondes transversales. Dans ce contexte, la réponse «onde mixte» est aussi acceptable.

Physique 3 Ondes et physique moderne - 1re édition

Chapitre 02 Les ondes

Q1 **Identifier la clé** La clé est l'identification du milieu dans lequel l'onde se propage et l'observation du sens du déplacement du milieu par rapport au sens de propagation de l'onde.

a. **Résoudre le problème** L'onde se propage horizontalement à la surface de l'eau. Les points de la surface de l'eau étant soulevés ou abaissés, leur mouvement est transversal.

Il s'agit d'une onde transversale. (réponse)

b. **Résoudre le problème** On peut parler de mouvement harmonique, mais pas à proprement parler d'onde progressive. Il n'y a pas de propagation d'énergie depuis une source dans un milieu environnant. Ce n'est donc pas une onde progressive.

Il ne s'agit pas d'une onde progressive. (réponse)

c. **Résoudre le problème** Le milieu dans lequel se propage l'onde sonore est l'air, l'ensemble des molécules de l'air. Celles-ci sont alternativement poussées vers la direction de propagation ou de retour vers la source, longitudinalement à la direction de propagation. C'est une onde longitudinale.

Il s'agit d'une onde longitudinale. (réponse)

d. **Résoudre le problème** Le milieu où se propage l'onde est la corde, alors que le marteau produit un mouvement transversal de ses points. Le marteau déforme la corde dans le sens de son mouvement en la frappant. Une onde se propage ensuite de part et d'autre de ce point vers les deux extrémités (et rebondira quelques fois). Le déplacement de l'onde dans la corde est donc transversal au mouvement du marteau qui frappe la corde (et vice versa). C'est une onde transversale.

Il s'agit d'une onde transversale. (réponse)

e. **Résoudre le problème** Tout matériau, aussi rigide soit-il, étant plus ou moins élastique, l'augmentation de la tension dans une corde produit inévitablement un éloignement de ses extrémités. Chacun des points de la corde sera donc déplacé durant cet étirement vers l'extrémité déplacée. Le mouvement des points est donc longitudinal à la direction du milieu, à l'axe de la corde. Par contre, l'étirement de la corde étant un mouvement unique, on peut alors parler d'une impulsion unique plutôt que d'une onde continue.

Il s'agit d'une impulsion longitudinale. (réponse)

f. **Résoudre le problème** Le milieu où se propage l'onde est à la fois la surface du sol et le volume du sol. Les deux types d'ondes peuvent alors être observés. Des ondes transversales peuvent se propager en surface à la manière des vagues sur l'eau, à une vitesse cependant beaucoup plus élevée. Des ondes longitudinales peuvent également se propager dans tout le volume du sol, qui oscille alors dans l'axe de propagation de l'onde (de l'épicentre jusqu'au point étudié). On peut alors parler d'une onde mixte.

Il s'agit d'une onde mixte. (réponse)

P2 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$v_{\mathrm{P}} = 7{,}0\,\mathrm{km/s}$	$d_{\text{épicentre}}$
$v_{\mathrm{S}} = 4{,}5\,\mathrm{km/s}$	$t_{\text{parcours-P}}$
$\Delta t_{\mathrm{PS}} = 14\,\mathrm{s}$	

a. **Identifier la clé** La clé est le traitement par la cinématique du fait que la même distance est parcourue par les deux ondes en des temps qui diffèrent de 14 s.

Résoudre le problème À partir de la relation $v = d/t$, on établit les équations du temps de parcours pour chacune des deux ondes :

$$v_{\mathrm{P}} = \frac{d}{t_{\mathrm{P}}} \qquad \text{et} \qquad v_{\mathrm{S}} = \frac{d}{t_{\mathrm{S}}} \ .$$

Ces deux équations comportent au total trois inconnues, mais le délai entre l'arrivée des deux types d'ondes permet d'établir une troisième équation. Puisque les ondes S arrivent après les ondes P, leur temps de parcours est plus long, et alors

$$t_{\mathrm{S}} - t_{\mathrm{P}} = 14\,\mathrm{s} \ .$$

On peut alors fusionner ces équations pour trouver une expression de la distance d. On isole d'abord le temps de parcours (inconnu) pour chaque onde, pour l'insérer dans l'équation de l'écart de temps :

$$t_{\mathrm{P}} = \frac{d}{v_{\mathrm{P}}} \qquad \text{et} \qquad t_{\mathrm{S}} = \frac{d}{v_{\mathrm{S}}}$$

$$\frac{d}{v_{\mathrm{S}}} - \frac{d}{v_{\mathrm{P}}} = d\left(\frac{1}{v_{\mathrm{S}}} - \frac{1}{v_{\mathrm{P}}}\right) = 14\,\mathrm{s}$$

$$d = \frac{14\,\mathrm{s}}{\left(\frac{1}{4{,}5\,\mathrm{km/s}} - \frac{1}{7{,}0\,\mathrm{km/s}}\right)} = 1{,}8 \times 10^2\,\mathrm{km} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance est correct pour une distance entre un sismographe et l'épicentre d'un tremblement de terre.

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que la distance du parcours soit maintenant connue, en plus de la vitesse des ondes P donnée dans l'énoncé.

Résoudre le problème Appliquée au cas des ondes P, la relation cinématique entre la distance et la vitesse devient

$$v = \frac{d}{t} \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{d}{v}$$

$$t_{\mathrm{P}} = \frac{d}{v_{\mathrm{P}}} = \frac{1{,}8 \times 10^2\,\mathrm{km}}{7{,}0\,\mathrm{km/s}} = 25\,\mathrm{s} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du temps de parcours est correct pour une distance de 180 km.

Q3 a. **Identifier la clé** La clé est le fait que la vitesse de l'onde est proportionnelle au terme qui multiplie t lorsqu'on a le terme $(x \pm vt)$ dans l'équation de l'onde, et le signe permet de déterminer le sens de propagation.

Résoudre le problème Dans l'équation (i), l'argument du sinus contient $(6x + 4t + 0{,}4)$. Pour avoir la forme $(x - vt)$, on peut transformer l'argument :

$$(6x + 4t + 0{,}4) = \left(6 \times \left(x + \frac{4}{6}t\right) + 0{,}4\right) \ .$$

Le terme multipliant t est alors la vitesse : $v_{\mathrm{i}} = \frac{2}{3}$ m/s.

Dans l'équation (ii), le dénominateur contient $(2x + 3t + 2)$. Pour avoir la forme $(x - vt)$, on peut transformer la parenthèse :

$$(2x + 3t + 2) = \left(2 \times \left(x + \frac{3}{2}t\right) + 2\right) \ .$$

Le terme multipliant t est alors la vitesse : $v_{\mathrm{ii}} = \frac{3}{2}$ m/s.

Finalement, dans l'équation (iii), l'argument de l'exponentielle contient $(2t - 2x)$. Pour avoir la forme $(x - vt)$, on peut écrire

$$(2t - 2x) = -(2x - 2t) = -2(x - 1t) \ . \tag{i}$$

Le terme multipliant t est alors la vitesse : $v_{\mathrm{iii}} = 1\,\mathrm{m/s}$.
On peut donc placer en ordre croissant les modules des vitesses :

$$\frac{2}{3}\ \mathrm{m/s} < 1\,\mathrm{m/s} < \frac{3}{2}\ \mathrm{m/s}$$

$$v_{\mathrm{i}} < v_{\mathrm{iii}} < v_{\mathrm{ii}} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La clé est que le signe qui précède le terme en t donne le sens de propagation. Un signe négatif signifie que l'onde se propage selon l'axe des x, et un signe négatif indique que l'onde se propage en sens inverse de l'axe des x.

Résoudre le problème Pour les équations (i) et (ii), le terme en t est positif, ce qui indique une vitesse orientée dans la direction opposée à l'axe des x. Seule l'équation (iii) décrivant $s(x;t)$ contient une vitesse orientée selon l'axe des x, en raison de la valeur positive qui multiplie t dans l'argument de l'exponentielle, après transformation de l'équation (*voir ligne (i)*).

$$s(x;t) \qquad \text{(réponse)}$$

E4 **Identifier la clé** La clé est le fait qu'une fonction d'onde doit être une fonction de type $f(x \pm vt)$.

Résoudre le problème L'argument de l'exponentielle (c'est-à-dire $(7t - 4x + 1)^2$) comporte effectivement des termes en x et en t, ce qui suffit à en faire une fonction d'onde. Le fait que ces termes se trouvent dans l'argument de l'exponentielle rendra plus complexe l'évolution de l'onde, mais il n'en demeure pas moins qu'elle obéit au critère principal.

Pour retrouver la forme $y\,(x;t)$, on peut transformer la parenthèse dans l'argument de l'exponentielle pour écrire

$$(7t - 4x + 1) = -(4x - 7t - 1) = -\left(4 \times \left(x - \frac{7}{4}t\right) - 1\right) \ .$$

On aperçoit dans la dernière expression le terme $x - vt$, ce qui satisfait le critère vérifiant une équation d'onde.

Q5 **Identifier la clé** La clé est l'établissement d'une équation unique comportant les trois informations fournies dans le tableau de l'énoncé.

Résoudre le problème Le module de la vitesse de l'onde dans une corde est donnée par

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \ .$$

La densité linéique μ n'étant pas donnée, il faut l'exprimer en fonction de la masse volumique et du rayon qui sont fournis. Ainsi,

$$\mu = \frac{m}{L}, \qquad \text{où} \qquad m = \rho V \qquad \text{et} \qquad V = \pi r^2 L$$

$$\mu = \frac{\rho V}{L} = \frac{\rho \pi r^2 L}{L} = \rho \pi r^2 \ .$$

Ainsi,

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho \pi r^2}} \ .$$

On peut maintenant appliquer cette équation à chacune des quatre cordes décrites afin d'obtenir une expression du module de leurs vitesses :

$$v_1 = \sqrt{\frac{F}{\rho \pi d^2}} \ , \qquad v_2 = \sqrt{\frac{(2F)}{(2\rho)\pi d^2}} \ , \qquad v_3 = \sqrt{\frac{F}{\rho \pi (2d)^2}} \ , \qquad v_4 = \sqrt{\frac{F}{(\frac{\rho}{2})\pi (2d)^2}} \ .$$

En simplifiant, on trouve

$$v_1 = \sqrt{\frac{F}{\rho \pi d^2}}\ , \qquad v_2 = \sqrt{\frac{F}{\rho \pi d^2}}\ , \qquad v_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{\rho \pi d^2}}\ , \qquad v_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{F}{\rho \pi d^2}}\ .$$

L'ordre croissant est

$$v_3 \quad < \quad v_4 \quad < \quad v_1 \quad = \quad v_2\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Q6 **Identifier la clé** La clé est le fait que la tension est la même dans les deux sections de la corde.

Résoudre le problème On exprime le module de la vitesse de l'onde dans les deux sections distinctes, en supposant que la section plus mince a un rayon r et la section plus épaisse, un rayon R (et alors $\mu_r < \mu_R$) :

$$v_r = \sqrt{\frac{F_r}{\mu_r}} \qquad \text{et} \qquad v_R = \sqrt{\frac{F_R}{\mu_R}}\ .$$

Puisque les deux sections de la corde sont attachées l'une à l'autre, le principe d'action-réaction suffit à indiquer que la tension est la même dans les deux sections. Les équations peuvent donc s'écrire

$$v_r = \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{\mu_r}} \qquad \text{et} \qquad v_R = \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{\mu_R}}\ .$$

Puisque $\mu_r < \mu_R$, il devient alors évident que

$$v_r \quad > \quad v_R\ .$$

L'onde se propagera le plus rapidement dans la section la plus mince de la corde. (réponse)

E7 **Identifier la clé** La clé est l'équation liant le module de la vitesse à la tension de la corde et à sa tension linéique.

Résoudre le problème Le module de la vitesse de l'onde dans une corde est donnée par

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}\ .$$

En appliquant cette équation au cas initial et au cas où on triple la tension, on peut poser que

$$v_0 = \sqrt{\frac{F_0}{\mu_0}} \qquad \text{et} \qquad v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}\ .$$

Si on ne modifie pas la longueur de façon appréciable, alors $\mu = \mu_0$. Lorsqu'on triple la tension dans l'un des cas, on peut dire que

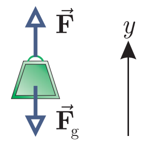
$$v_0 = \sqrt{\frac{F_0}{\mu}} \qquad \text{et} \qquad v = \sqrt{\frac{3F_0}{\mu}}\ .$$

Le rapport $\frac{v}{v_0}$ peut alors être évalué :

$$\frac{v}{v_0} = \frac{\sqrt{\frac{3F_0}{\mu}}}{\sqrt{\frac{F_0}{\mu}}} = \sqrt{3}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Le facteur d'augmentation du module de la vitesse est plausible puisque l'équation de la vitesse indique qu'elle varie selon la racine carrée de sa tension (pour une masse linéique constante).

E8 **Décortiquer le problème**



Connues	Inconnue
$l_{\text{totale}} = 25{,}0\,\text{m}$	v
$m_{\text{corde}} = 90{,}0\,\text{g}$	
$L = 1{,}50\,\text{m}$	
$m_{\text{suspendue}} = 1{,}20\,\text{kg}$	

Identifier les clés La première clé est la relation qui relie la tension et la masse linéique au module de la vitesse et la deuxième clé est la détermination de la masse linéique

Résoudre le problème La vitesse de l'onde dans une corde est donnée par

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}\ .$$

Dans cette équation, la tension dans la corde est produite par le poids de la masse suspendue, et on peut analyser les forces agissant verticalement sur m pour obtenir une expression de cette tension. En considérant pour la masse m (immobile) un axe y orienté vers le haut, on a

$$\sum F_y = 0 = F - mg\ ,$$

d'où le fait que la tension F dans la corde est $F = mg$. De plus, la masse linéique de la section de corde se trouvant entre le point d'attache et la poulie est la même que celle de la corde entière, soit :

$$\mu = \frac{m_{\text{corde}}}{l_{\text{totale}}}\ .$$

L'équation du module de la vitesse devient donc

$$v = \sqrt{\frac{mg}{\left(\frac{m_{\text{corde}}}{l_{\text{totale}}}\right)}} = \sqrt{\frac{mg \times l_{\text{totale}}}{m_{\text{corde}}}} = \sqrt{\frac{1{,}20\,\text{kg} \times 9{,}81\,\text{m/s}^2 \times 25{,}0\,\text{m}}{0{,}090\,0\,\text{kg}}}$$

$$v = 57{,}2\,\text{m/s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du module de la vitesse est correct pour une onde sur une corde.

E9 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$v_1 = 30{,}0\,\text{m/s}$	d_2
$d_1 = 1{,}42\,\text{mm}$	
$v_2 = 36{,}7\,\text{m/s}$	

Identifier les clés Les clés sont la relation entre le module de la vitesse, la tension et la masse linéique, et le fait que les tensions sont identiques.

Résoudre le problème La tension étant la même dans les deux cordes, on peut isoler la tension dans l'équation générale de la vitesse pour établir une relation entre les deux cordes :

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \Rightarrow \qquad F = \mu v^2\ ,$$

d'où

$$F = \mu_1 v_1^2 \qquad \text{et} \qquad F = \mu_2 v_2^2$$

$$\mu_1 v_1^2 = \mu_2 v_2^2 \ . \tag{i}$$

On doit également exprimer la masse linéique en fonction du diamètre, sachant que les deux cordes sont faites du même matériau. Si on passe par la masse volumique ρ de ce matériau, on trouve

$$\mu = \frac{m}{L}, \qquad \text{avec} \qquad m = \rho V \qquad \text{et} \qquad V = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 L \ .$$

Ainsi,

$$\mu = \frac{\rho V}{L} = \frac{\rho\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 L}{L} = \frac{\rho\pi d^2}{4} \ .$$

L'équation (i) devient alors, avec les simplifications possibles,

$$\frac{\rho\pi d_1^2}{4} v_1^2 = \frac{\rho\pi d_2^2}{4} v_2^2$$

$$d_1 v_1 = d_2 v_2 \ ,$$

d'où

$$d_2 = \frac{d_1 v_1}{v_2} = \frac{1{,}42\,\mathrm{mm} \times 30{,}0\,\mathrm{m/s}}{36{,}7\,\mathrm{m/s}} = 1{,}16\,\mathrm{mm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du diamètre de la deuxième corde est correct, légèrement inférieur à celui de la première corde, où une vitesse plus faible correspond à un diamètre plus grand.

E10 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$d = 4{,}50\,\mathrm{mm}$	$\Delta t_{l=5{,}03\,\mathrm{m}}$
$F = 1{,}50\,\mathrm{kN}$	
$\mu = 126\,\mathrm{g/m}$	

Identifier la clé La clé est l'union de l'équation du module de la vitesse d'une onde sur une corde et de la relation entre la vitesse, la distance et le temps.

Résoudre le problème Le module de la vitesse de l'onde dans une corde est donnée par

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \ ,$$

alors que la cinématique indique que

$$v = \frac{l}{\Delta t} \ .$$

Ensemble, appliquées dans ce contexte, ces équations donnent

$$\sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{l}{\Delta t_{l=5{,}03\,\mathrm{m}}} \ .$$

On peut alors isoler et calculer $\Delta t_{l=5{,}03\,\mathrm{m}}$:

$$\Delta t_{l=5{,}03\,\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{\mu d^2}{F}} = \sqrt{\frac{0{,}126\,\mathrm{kg/m} \times (5{,}03\,\mathrm{m})^2}{1\,500\,\mathrm{N}}} = 46{,}1 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} = 46{,}1\,\mathrm{ms} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'intervalle de temps est correct pour une impulsion qui peut être ressentie très rapidement dans tout le filet.

E11 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$L = 43{,}5\,\text{m}$	F
$\Delta t = 1{,}20\,\text{s}$	
$m = 7{,}60\,\text{kg}$	

Identifier la clé La clé est l'union de l'équation du module de la vitesse d'une onde sur une corde et de la relation entre la vitesse, la distance et le temps.

Résoudre le problème Le module de la vitesse de l'onde dans une corde est donnée par

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \qquad \text{avec} \qquad \mu = \frac{m}{L}\ .$$

Selon la cinématique, la vitesse est aussi liée à la distance L et à Δt par

$$v = \frac{L}{\Delta t}\ .$$

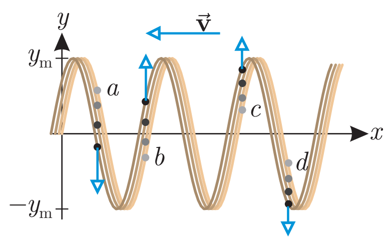
L'équation de la vitesse, où on peut isoler la tension F, devient donc

$$v = \sqrt{\frac{F}{\left(\frac{m}{L}\right)}} = \frac{L}{\Delta t}$$

$$F = \frac{Lm}{\Delta t^2} = \frac{(43{,}5\,\text{m}) \times (7{,}60\,\text{kg})}{(1{,}20\,\text{s})^2} = 230\,\text{N}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la tension est correct, correspondant au poids d'une masse d'environ 23 kg.

Q12 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la corde parcourue par une onde sinusoïdale se déplaçant vers la gauche. On y voit certains points de la corde être soulevés ou abaissés au passage de l'onde.



Décortiquer le problème L'onde se déplace vers la gauche et tous les points de la corde sont en déplacement vertical.

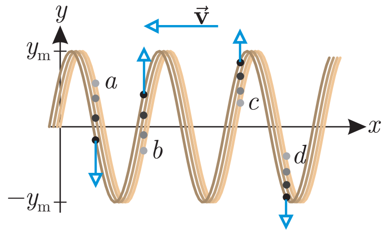
Identifier la clé La clé est le fait que certains points seront soulevés par l'arrivée prochaine d'un sommet de l'onde alors que les autres vont descendre après le passage d'un sommet.

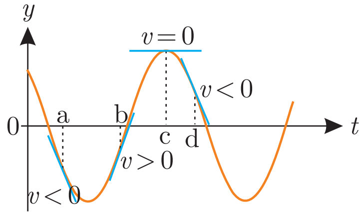
Résoudre le problème Les points a et d, même s'ils ne sont pas du même côté de leur position d'équilibre, sont en train de descendre après le passage d'un sommet de l'onde. Leur vitesse est orientée vers le bas.

Les points b et c, quant à eux, sont soulevés par le sommet qui se dirige vers eux ; leur vitesse est donc orientée vers le haut.

Les points a et d descendent alors que les points b et c montent. (réponse)

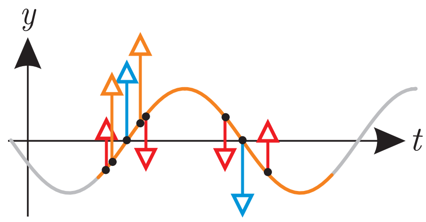
Q13 **Illustrer la situation** La figure ci-contre montre le graphique de la position verticale en fonction du temps.
Décortiquer le problème On doit déterminer la vitesse verticale en fonction du temps.
Identifier la clé La clé est le fait que, sur un graphique de la position en fonction du temps, la vitesse est donnée par la dérivée de la position qui correspond à la pente de la tangente.
Résoudre le problème Selon la clé, on doit déterminer si la pente de la courbe de la position est positive, négative ou nulle pour chacun des points. Les points a et d sont tous les deux sur une section de courbe de pente négative. Ils correspondent donc à des moments où la vitesse est négative et orientée vers y négatif. Le point b est dans une section où la vitesse est positive, donc orientée vers y positif, alors que le point c se trouve au sommet de la courbe, donc possède momentanément une vitesse nulle (aucune direction).





Les points a et d se déplacent vers le bas, le point b, vers le haut, et le point c est immobile.
(réponse)

Q14 **Identifier la clé** La clé est l'observation du graphique de la position verticale d'un point de la corde en fonction du temps (*voir la figure ci-dessous*).



a. **Résoudre le problème** Un point de la corde a une vitesse de module maximal lorsqu'il passe par la position d'équilibre, alors que la pente sur le graphique $y(t)$ est la plus forte (positive ou négative). La vitesse a donc une vitesse de module maximal deux fois par cycle. (*Voir les flèches bleues sur la figure.*)

$$v = v_m : \quad 2 \text{ fois par cycle.} \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Résoudre le problème** Le module de l'accélération est maximal lorsque le point de la corde atteint une position extrême de son mouvement. Cela se produit deux fois par cycle. Par contre, si on s'intéresse à une accélération de module égal à la moitié de sa valeur maximale, cela se produira quatre fois, soit deux fois dans le domaine positif de la position et deux fois dans le domaine négatif, à mi-distance entre la position d'équilibre et les positions extrêmes. (*Voir les flèches rouges sur la figure.*)

$$a = \frac{a_m}{2} : \quad 4 \text{ fois par cycle.} \qquad \text{(réponse)}$$

c. **Résoudre le problème** La vitesse est positive durant la moitié du mouvement, pendant le déplacement de la position maximale négative à la position maximale positive. Durant ce déplacement, la position sera deux fois d'une valeur égale au tiers de l'amplitude, soit une fois avant d'atteindre la position d'équilibre et une fois après l'avoir dépassée. (*Voir les flèches orange sur la figure.*)

$$v > 0 \text{ et } y = \frac{y_m}{3} : \quad 2 \text{ fois par cycle.} \qquad \text{(réponse)}$$

Q15 **Identifier la clé** La clé est la détermination de la vitesse de chacune des quatre ondes à partir des termes de leurs équations.

a. Résoudre le problème La vitesse étant liée à ω et à k, les termes qui multiplient le temps et la position dans chaque équation, on peut établir dans des unités arbitraires que les modules de la vitesse des quatre ondes sont

$$|v_1| = \frac{3}{4}, \qquad |v_2| = \frac{3}{2}, \qquad |v_3| = \frac{2}{4}, \qquad |v_4| = \frac{4}{2} \ ,$$

d'où

$$v_1 = 0{,}75, \qquad v_2 = 1{,}50, \qquad v_3 = 0{,}50, \qquad v_4 = 2{,}00 \ .$$

(v_1 est la seule vitesse orientée vers la droite, étant donné le signe moins placé devant le terme, mais comme on ne s'intéresse qu'au module, c'est sans effet.) Finalement,

$$v_3 \quad < \quad v_1 \quad < \quad v_2 \quad < \quad v_4 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Résoudre le problème Les quatre cordes portant la même tension, le module de la vitesse est inversement proportionnelle à la racine carrée de la masse linéique. Puisque ce sont les masses linéiques que l'on veut ordonner, on trouve l'expression de μ :

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \Rightarrow \qquad \mu = \frac{F}{v^2} \ .$$

On constate alors que la masse linéique est inversement proportionnelle au carré du module de la vitesse. Pour les quatre cas, on peut écrire

$$\mu_1 = \frac{F}{v_1^2}, \qquad \mu_2 = \frac{F}{v_2^2}, \qquad \mu_3 = \frac{F}{v_3^2}, \qquad \mu_4 = \frac{F}{v_4^2}$$

$$\mu_1 = \frac{F}{(0{,}75)^2}, \qquad \mu_2 = \frac{F}{(1{,}50)^2}, \qquad \mu_3 = \frac{F}{(0{,}50)^2}, \qquad \mu_4 = \frac{F}{(2{,}00)^2}$$

$$\mu_1 = \frac{16}{9}F, \qquad \mu_2 = \frac{4}{9}F, \qquad \mu_3 = 4F, \qquad \mu_4 = \frac{1}{4}F \ .$$

On peut finalement placer les masses linéiques en ordre croissant :

$$\frac{1}{4}F \quad < \quad \frac{4}{9}F \quad < \quad \frac{16}{9}F \quad < \quad 4F$$

$$\mu_4 \quad < \quad \mu_2 \quad < \quad \mu_1 \quad < \quad \mu_3 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

E16 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$f_P = 8{,}00\,\text{Hz}$	λ
$\Delta t = 1{,}24\,\text{s}$	
$d = 7\,240\,\text{m}$	

Identifier la clé La clé est la comparaison de la définition de la vitesse en cinématique à l'équation générale de la vitesse d'une onde progressive.

Résoudre le problème La vitesse d'une onde progressive est donnée par l'équation

$$v = \lambda f \ .$$

Selon la cinématique, le module de la vitesse est aussi donnée par l'équation

$$v = \frac{d}{\Delta t} \ .$$

La comparaison de ces deux équations admet

$$v = \lambda f = \frac{d}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{d}{f\Delta t} \ .$$

Finalement,

$$\lambda = \frac{d}{f\Delta t} = \frac{7\,240\,\mathrm{m}}{8{,}00\,\mathrm{Hz} \times 1{,}24\,\mathrm{s}} = 730\,\mathrm{m} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance est correct pour la distance entre deux sismographes installés sur un territoire donné.

E17 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$d_{\mathrm{tot}} = 2{,}10\,\mathrm{cm}$	y_{m}
$\Delta t_d = 0{,}150\,\mathrm{s}$	f
$\lambda = 1{,}75\,\mathrm{m}$	v_{onde}

a. **Identifier la clé** La clé est le fait que l'amplitude est la distance entre la position d'équilibre (centrale) et l'une des positions extrêmes du mouvement.

Résoudre le problème La distance entre les positions extrêmes du mouvement représente le double de l'amplitude, c'est-à-dire que

$$d_{\mathrm{tot}} = 2y_{\mathrm{m}} \qquad \Rightarrow \qquad y_{\mathrm{m}} = \frac{2{,}10\,\mathrm{cm}}{2} = 1{,}05\,\mathrm{cm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que le temps de parcours d'une position extrême à l'autre est la moitié de la période du mouvement.

Résoudre le problème On indique dans l'énoncé que le temps qu'un point de la corde met à aller d'une position extrême de son mouvement à l'autre est de ~~1,50 s~~ 0,150 s. Ainsi, la période et la fréquence peuvent être déterminées, puisque

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\Delta t_d} = \frac{1}{2 \times 0{,}150\,\mathrm{s}} = 3{,}33\,\mathrm{Hz} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. **Identifier la clé** La clé est l'équation liant le module de la vitesse de propagation d'une onde à sa fréquence et à sa longueur d'onde.

Résoudre le problème Le module de la vitesse d'une onde progressive est donnée par l'équation

$$v = \lambda f \ .$$

Ces valeurs étant connues, on trouve

$$v = 1{,}75\,\mathrm{m} \times 3{,}33\,\mathrm{Hz} = 5{,}83\,\mathrm{m/s} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

E18 **Identifier la clé** La clé est la détermination de chacun des termes de l'équation pour reconnaître les paramètres de l'onde contenus dans l'équation 2.17 :

$$y(x;t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$$

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$F = 18{,}0\,\mathrm{N}$	f
$y_{\mathrm{m}} = 1{,}25\,\mathrm{cm}$	l
$k = 0{,}075\,0\,\mathrm{rad/cm}$	v_{onde}
$\omega = 128\,\mathrm{rad/s}$	μ
$\phi = \frac{\pi}{3}$	$y_{x=2\,\mathrm{cm},t=5\,\mathrm{s}}$
	$v_{y,(x=2\,\mathrm{cm},t=5\,\mathrm{s})}$

a. **Résoudre le problème** La fréquence f de l'onde est liée à la fréquence angulaire ω contenue dans l'équation d'onde :

$$\omega = 2\pi f \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{128\,\text{rad/s}}{2\pi} = 20{,}4\,\text{Hz} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la fréquence est plausible pour une corde vibrante.

b. **Résoudre le problème** La longueur d'onde est contenue dans le terme k qui multiplie la position x dans l'équation d'onde :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0{,}075\,0\,\text{rad/cm}} = 83{,}8\,\text{cm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. **Identifier la clé** La clé est l'une ou l'autre des deux équations du module de la vitesse d'une onde progressive, soit en fonction de f et de λ ou en fonction de ω et de k.

Résoudre le problème Si on utilise l'équation la plus courante pour le module de la vitesse d'une onde progressive, on trouve la seconde équation, moins courante, mais que l'on peut résoudre directement à partir des valeurs de l'équation :

$$v = \lambda f = \frac{2\pi}{k} \times \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{k} \ .$$

De plus, un signe négatif précède la fréquence angulaire, ce qui implique que l'onde se déplace vers la droite. Ainsi, son module est

$$v = \frac{128\,\text{rad/s}}{0{,}075\,0\,\text{rad/cm}} = 1\,707\,\text{cm/s} \ .$$

Si on exprime la vitesse sous la forme d'un vecteur, on a

$$\vec{\mathbf{v}} = 17{,}1\,\text{m/s} \quad \overrightarrow{\textsf{vers la droite}} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse est correct.

d. **Identifier la clé** La clé est la relation entre le module de la vitesse d'une onde sur une corde, sa tension et sa masse linéique.

Résoudre le problème Le module de la vitesse de l'onde dans une corde est donnée par l'équation

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \ .$$

On peut donc isoler la masse linéique pour la calculer :

$$\mu = \frac{F}{v^2} = \frac{F}{(\frac{\omega}{k})^2} = \frac{Fk^2}{\omega^2} = \frac{18{,}0\,\text{N} \times (7{,}50\,\text{rad/m})^2}{(128\,\text{rad/s})^2} = 0{,}061\,8\,\text{kg/m} = 61{,}8\,\text{g/m} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la masse linéique est correct pour une corde.

e. **Identifier les clés** Les clés sont l'équation de la position en fonction du temps ainsi que sa dérivée en fonction du temps.

Résoudre le problème Pour la position x et le temps indiqués, l'équation de la position y en fonction du temps donne directement la position recherchée :

$$y(x;t) = 1{,}25\sin(0{,}0750x - 128t + \frac{\pi}{3})$$
$$y(2{,}00\,\text{cm}; 5{,}00\,\text{s}) = 1{,}25\sin\left(0{,}0750 \times 2 - 128 \times 5{,}00 + \frac{\pi}{3}\right) = 1{,}09\,\text{cm} \ ,$$

et la vitesse transversale est la dérivée de la même équation, résolue pour les mêmes position et instant :

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} 1{,}25 \sin\left(0{,}0750x - 128t + \frac{\pi}{3}\right) = -128 \times 1{,}25 \cos\left(0{,}0750x - 128t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$v_y(2{,}00\,\mathrm{cm}; 5{,}00\,\mathrm{s}) = -128 \times 1{,}25 \cos\left(0{,}0750 \times 2 - 128 \times 5{,}00 + \frac{\pi}{3}\right) = 78{,}3\,\mathrm{cm/s}$$

$$y = 1{,}09\,\mathrm{cm} \qquad \text{et} \qquad v_y = 78{,}3\,\mathrm{cm/s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La position est bien incluse dans les limites du mouvement et la vitesse est d'un ordre de grandeur correct.

E19 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\Delta y_{\text{tot}} = 15{,}5\,\mathrm{cm}$	$y(x;t)$
$\lambda = 85{,}0\,\mathrm{cm}$	
$v_{\text{onde}} = 62{,}0\,\mathrm{cm/s}$	
$\phi = 0$	

Identifier la clé La clé est la détermination des paramètres y_{m}, k et ω à partir des informations données.

Résoudre le problème L'équation 2.17 donne la forme générale de l'équation d'onde :

$$y\,(x;t) = y_{\mathrm{m}} \sin\left(kx - \omega t + \phi\right)\ .$$

Le signe négatif dans l'argument du sinus vient du fait que l'onde se déplace vers la direction positive de l'axe suggéré. On mentionne aussi dans la question que la constante de phase ϕ est nulle, car déterminer une origine et un début des oscillations de la surface n'a pas une grande signification. On doit donc déterminer les paramètres y_{m}, k et ω.

L'amplitude y_{m} est la moitié du déplacement total Δy_{tot} entre le sommet des vagues et les creux de vague :

$$y_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta y_{\text{tot}}}{2} = \frac{15{,}5\,\mathrm{cm}}{2} = 7{,}75\,\mathrm{cm}\ .$$

Le nombre d'onde k, selon l'équation 2.15, est donné par l'équation

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{85{,}0\,\mathrm{cm}} = 0{,}073\,9\,\mathrm{cm}^{-1}\ .$$

Finalement, on peut obtenir la fréquence angulaire du mouvement à partir de l'équation 2.20 puisque le module de la vitesse de propagation de l'onde est connue :

$$v = \frac{\omega}{k}$$

$$\omega = kv_{\text{onde}} = \left(0{,}073\,9\,\mathrm{cm}^{-1}\right) \times (62{,}0\,\mathrm{cm/s}) = 4{,}58\,\mathrm{rad/s}$$

$$y\,(x;t) = 7{,}75 \sin\left(0{,}073\,9 - 4{,}58t\right), \qquad \text{avec } x \text{ en centimètres et } t \text{ en secondes}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur des valeurs est correct, la soustraction de ω vient d'une vitesse dans le sens positif de l'axe, et les coefficients de l'équation ont bien été calculés dans les unités indiquées pour la position et le temps.

E20 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$f = 420\,\mathrm{Hz}$	$\Delta\phi_{\Delta x = 8\,\mathrm{cm}}$
$v_{\text{onde}} = 200\,\mathrm{m/s}$	

Identifier la clé La clé est le calcul de l'angle de phase de l'onde pour deux points distants de 8 cm, à un même instant.

Résoudre le problème La différence de phase entre les deux points distants de 8 cm est définie par l'équation

$$\Delta\phi = \Phi_2 - \Phi_1 \ .$$

Pour les deux points impliqués, les phases sont définies par les équations

$$\Phi_1 = kx_1 - \omega t + \phi_1 \qquad \text{et} \qquad \Phi_2 = kx_2 - \omega t + \phi_2 \ .$$

Ainsi,

$$\Delta\phi = \Phi_2 - \Phi_1 = (kx_2 - \omega t + \phi_2) - (kx_1 - \omega t + \phi_1) = kx_2 - kx_1 = k\Delta x \ .$$

Puisqu'il s'agit de la même onde passant par les deux points au même instant, l'angle de phase ϕ est une donnée commune aux deux points, comme ω et t. Le nombre d'onde k est lié à la longueur d'onde, elle-même liée au module de la vitesse de propagation et à la fréquence de l'onde :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad v = \lambda f \ .$$

L'union de ces deux équations donne

$$v = \lambda f = \frac{2\pi}{k} f \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{2\pi f}{v_{\text{onde}}} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

On peut donc passer au calcul de la différence de phase pour deux points pour lesquels $\Delta x = 8{,}00\,\text{cm}$, à partir des valeurs connues :

$$\Delta\phi = k\Delta x = \frac{2\pi f}{v_{\text{onde}}} \times \Delta x = \frac{2\pi \times 420\,\text{Hz}}{200\,\text{m/s}} \times 8{,}00\,\text{cm} = 1{,}06\,\text{rad} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la différence de phase est correct, étant compris entre 0 et 2π, pour une distance inférieure à la longueur d'onde ($\lambda = \frac{v}{f} = 47{,}6\,\text{cm}$).

P21 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$\mu = 1{,}40\,\text{g/m}$	$\Delta x_{\Delta\phi=3\pi/2}$
$F = 33{,}0\,\text{N}$	fonction d'onde
$y_{\text{m}} = 12{,}0\,\text{mm}$	complète
$\omega = 88{,}0\,\text{rad/s}$	
$\phi = \dfrac{\pi}{6}$	

a. **Identifier la clé** La clé est le nombre d'onde, lié à la différence de phase entre deux points distants de 1 m.

Résoudre le problème Le nombre d'onde peut être exprimé à partir du module de la vitesse de l'onde et de sa fréquence angulaire (*voir l'équation 2.20*) :

$$v = \frac{\omega}{k} \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{\omega}{v} \ ,$$

où le module de la vitesse est liée à la masse linéique de la corde et à sa tension :

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \ .$$

On peut donc écrire

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{F}{\mu}}} = \sqrt{\frac{\omega^2 \mu}{F}} = \sqrt{\frac{(88{,}0\,\text{rad/s})^2 \times 0{,}001\,40\,\text{kg/m}}{33{,}0\,\text{N}}} = 0{,}573\,\text{rad/m} \ .$$

Deux points présentant une différence de phase de 0,573 rad sont distants de 1 m. La distance qu'il doit y avoir entre deux points pour que la différence de phase entre eux soit de $\frac{3\pi}{2}$ sera donc

$$\frac{\Delta\phi_{1\,\mathrm{m}}}{1\,\mathrm{m}} = \frac{3\pi/2}{x_{\Delta\phi=3\pi/2}}$$
$$x_{\Delta\phi=3\pi/2} = \frac{3\pi}{2} \times \frac{1\,\mathrm{m}}{\Delta\phi_{1\,\mathrm{m}}} = 8{,}22\,\mathrm{m} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance est correct, d'autant plus petit que la longueur d'onde que $3\pi/2$ est plus petit que 2π rad ($\lambda = \frac{2\pi}{k} = 11{,}0\,\mathrm{m}$).

b. Identifier la clé La clé est la forme de la fonction d'onde, qui tient compte de la position x d'un point étudié.

Résoudre le problème La forme générale de la fonction d'onde est

$$y(x;t) = y_{\mathrm{m}} \sin(kx - \omega t + \phi) \ .$$

La fréquence angulaire est contenue dans l'équation donnée dans l'énoncé : $\omega = 88{,}0\,\mathrm{rad/s}$. La variable k a été évaluée en **a.** : $k = 0{,}573\,\mathrm{rad/m}$.
On doit aussi déterminer la constante de phase ϕ s'appliquant à l'équation $y(x;t)$, puisqu'elle peut être différente de celle de l'équation $y(t)$. En effet, chaque point de la corde présenterait une constante de phase différente dans une équation $y(t)$. L'équation $y(x;t)$ ne contient donc pas nécessairement la constante de phase connue, qui ne s'applique que pour le point $x = 0$. Ainsi, on trouve la position d'un point de la corde à un endroit et un instant connus pour déterminer la constante de phase de l'équation $y(x;t)$. Le traitement le plus simple consiste à considérer à $t = 0$ le point $x = 0$ pour lequel l'équation est connue :

$$y(t) = 12{,}0\,\mathrm{mm} \sin(88{,}0 \times 0 + \pi/6) = 6{,}0\,\mathrm{mm} \ .$$

Dans la fonction d'onde, cette valeur permet d'écrire

$$y(x;t) = 6{,}0\,\mathrm{mm} = 12{,}0\,\mathrm{mm} \sin(kx - \omega t + \phi) = 12{,}0\,\mathrm{mm} \sin(k \times 0 - \omega \times 0 + \phi)$$
$$\frac{1}{2} = \sin(\phi) \qquad \Rightarrow \qquad \phi = \arcsin(\frac{1}{2}) \ .$$

Cette équation admet deux solutions, $\phi_1 = \pi/6$ et $\phi_2 = 5\pi/6$. Une seule de ces deux solutions est la bonne, et on peut la distinguer par le sens de la vitesse du point étudié.
Selon l'équation donnée dans l'énoncé, on sait que la vitesse est positive, car

$$v_y(t) = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(12{,}0\,\mathrm{mm} \sin(88{,}0 \times 0 + \pi/6)\right) = 12{,}0\,\mathrm{mm} \times \omega \cos(88{,}0 \times 0 + \pi/6) > 0 \ .$$

Laquelle des constantes de phase $\phi_1 = \pi/6$ et $\phi_2 = 5\pi/6$ donne une vitesse positive ? C'est ϕ_2, car

$$\begin{aligned} v_y(x;t) = \frac{\mathrm{d}y(x;t)}{\mathrm{d}t} &= -\omega \times (12{,}0\,\mathrm{mm}) \times \cos(k \times 0 - \omega \times 0 + 5\pi/6) \\ &= -\,12{,}0\,\mathrm{mm} \times \omega \cos(5\pi/6) > 0 \ , \end{aligned}$$

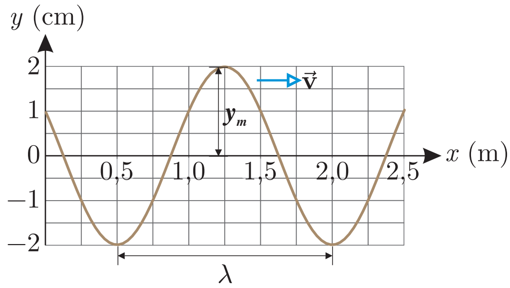
le cosinus de $5\pi/6$ étant négatif. Ainsi,

$$y(x;t) = 12{,}0\,\mathrm{mm} \sin(0{,}573x - 88{,}0t + 5\pi/6), \text{ avec } x \text{ en mètres et } t \text{ en secondes.} \qquad \text{(réponse)}$$

P22 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\mu = 12{,}0\,\mathrm{g/m}$	y_{m}
$F = 40{,}0\,\mathrm{N}$	f
	fonction d'onde complète

a. **Illustrer la situation** La figure ci-contre reproduit la figure fournie avec l'énoncé, représentant une onde se déplaçant vers la droite.
Identifier la clé La clé est l'écart entre la position centrale et les positions verticales extrêmes du mouvement.
Résoudre le problème On voit sur la figure que la courbe s'étend verticalement entre $-2\,\text{cm}$ et $+2\,\text{cm}$. La position d'équilibre se trouve donc à $y = 0$ et l'amplitude sera égale à la moitié de l'écart entre les extrêmes, soit $2{,}0\,\text{cm}$.



$$y_\text{m} = 2{,}0\,\text{cm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La clé est le lien entre le module de la vitesse de propagation de l'onde, la fréquence et la longueur d'onde.
Résoudre le problème Le module de la vitesse de l'onde dans une corde est donnée par l'équation

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \ .$$

De façon générale, le module de la vitesse d'une onde est aussi donnée par l'équation

$$v = \lambda f \ .$$

Ainsi, on peut affirmer que

$$\lambda f = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \Rightarrow \qquad f = \sqrt{\frac{F}{\mu\lambda^2}} \ .$$

La longueur d'onde peut être évaluée d'après la figure. La méthode la plus rapide consiste à évaluer la distance horizontale entre les deux creux de l'onde dont les positions semblent coïncider avec des graduations, à $x = 0{,}5\,\text{m}$ et $x = 2{,}0\,\text{m}$. Ainsi,

$$\lambda = 2{,}0\,\text{m} - 0{,}5\,\text{m} = 1{,}5\,\text{m} \ .$$

Finalement,

$$f = \sqrt{\frac{F}{\mu\lambda^2}} = \sqrt{\frac{40{,}0\,\text{N}}{0{,}012\,0\,\text{kg/m} \times (1{,}5\,\text{m})^2}} = 38{,}5\,\text{Hz} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. **Identifier la clé** La clé est la détermination des paramètres k, ω et ϕ à partir des caractéristiques connues de l'onde.
Résoudre le problème La forme générale de la fonction d'onde est

$$y(x;t) = y_\text{m} \sin(kx - \omega t + \phi) \ .$$

L'amplitude a été déterminée en **a.** Le nombre d'onde k est lié à la longueur d'onde trouvée en **b.** :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1{,}5\,\text{m}} = \frac{4}{3}\pi = 4{,}2\,\text{rad/m} \ .$$

La fréquence angulaire ω est liée à la fréquence f trouvée en **b.** selon l'équation

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 38{,}5\,\text{Hz} = 2{,}4 \times 10^2\,\text{rad/s} \ .$$

Finalement, la constante de phase de l'onde peut être déterminée à partir du fait que la figure montre la position de la corde à $t = 0$, en résolvant l'équation à développer pour un point dont la position est connue. On choisit un point sans ambiguïté comme $x = 1{,}25\,\mathrm{m}$, où $y = 2\,\mathrm{cm}$:

$$y(1{,}25\,\mathrm{m}; 0) = 2{,}0\,\mathrm{cm}\sin(k \times 1{,}25\,\mathrm{m} - \omega \times 0 + \phi)$$

$$\phi = \arcsin\left(\frac{y_{1{,}25\,\mathrm{m};0\,\mathrm{s}}}{2{,}0\,\mathrm{cm}}\right) - kx = \arcsin\left(\frac{2{,}0\,\mathrm{cm}}{2{,}0\,\mathrm{cm}}\right) - (4{,}2\,\mathrm{rad/m} \times 1{,}25\,\mathrm{m}) = \arcsin(1) - 5{,}25 = -3{,}7\,\mathrm{rad}\ .$$

Pour transformer cette constante de phase en une valeur positive, on peut lui ajouter simplement 2π :

$$-3{,}7\,\mathrm{rad} + 2\pi = 2{,}6\,\mathrm{rad}\ .$$

Finalement, l'équation d'onde peut s'écrire

$$y(x;t) = 2{,}0\,\mathrm{cm} \times \sin\Big((4{,}2\,\mathrm{rad/m}) \times x - (2{,}4 \times 10^2\,\mathrm{rad/s}) \times t + 2{,}6\,\mathrm{rad}\Big)\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Q23 **Identifier la clé** La clé est l'équation liant la puissance aux caractéristiques de la corde et de l'onde.

Résoudre le problème L'équation de la puissance transportée sur une corde est

$$P = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 y_{\mathrm{m}}^2\ .$$

On voit dans cette équation que la puissance est proportionnelle au carré de l'amplitude. Ainsi, si l'amplitude double, la puissance transportée, toutes autres choses étant égales par ailleurs, sera donc quadruplée.

La puissance doit quadrupler. (réponse)

Q24 **a.** **Identifier la clé** La clé est l'expression du module de la vitesse de l'onde dans une corde en fonction de sa masse volumique et de son diamètre.

Résoudre le problème L'équation du module de la vitesse d'une onde sur une corde est

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}\ , \qquad \text{(i)}$$

où

$$\mu = \frac{m}{L}, \qquad \text{avec} \qquad m = \rho V \qquad \text{et} \qquad V = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 L\ . \qquad \text{(ii)}$$

On peut donc affirmer que

$$v = \sqrt{\frac{4F}{\rho\pi d^2}}\ . \qquad \text{(iii)}$$

Appliquée à deux cordes différentes, cette équation admet

$$v_1 = \sqrt{\frac{4F_1}{\rho_1\pi d_1^2}} \qquad \text{et} \qquad v_2 = \sqrt{\frac{4F_2}{\rho_2\pi d_2^2}}\ .$$

Le rapport $\frac{v_1}{v_2}$ peut alors être évalué. En tenant compte des équivalences $d_1 = 2d_2$, $F_1 = F_2$ et $\rho_1 = \rho_2$, on a

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{\frac{4F_1}{\rho_1\pi d_1^2}}}{\sqrt{\frac{4F_2}{\rho_2\pi d_2^2}}} = \frac{\sqrt{\frac{4F_1}{\rho_1\pi(2d_2)^2}}}{\sqrt{\frac{4F_1}{\rho_1\pi d_2^2}}} = \sqrt{\frac{4F_1\rho_1\pi d_2^2}{4F_1\rho_1\pi(2d_2)^2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Identifier la clé La clé est l'équation liant la puissance aux caractéristiques de la corde et de l'onde.

Résoudre le problème L'équation de la puissance transportée sur une corde est

$$P = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 y_{\mathrm{m}}^2 \ .$$

En remplaçant μ et v à partir des équations (ii) et (iii), on trouve que

$$\mu = \frac{\rho\pi d^2}{4} \qquad \text{et} \qquad v = \sqrt{\frac{4F}{\rho\pi d^2}} \ .$$

La puissance peut alors s'exprimer par

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{\rho\pi d^2}{4} \times \sqrt{\frac{4F}{\rho\pi d^2}} \times \omega^2 y_{\mathrm{m}}^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\rho\pi F} d\omega^2 y_0^2 \ .$$

Pour les deux situations, avec des fréquences et amplitudes identiques, on peut alors écrire

$$P_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\rho_1\pi F_1} d_1\omega^2 y_{\mathrm{m}}^2 \qquad \text{et} \qquad P_2 = \frac{1}{4}\sqrt{\rho_2\pi F_2} d_2\omega^2 y_{\mathrm{m}}^2 \ .$$

Les cordes étant faites du même matériau, $\rho_1 = \rho_2$, le rapport des puissances peut s'écrire

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{\rho\pi F} d_1\omega^2 y_{\mathrm{m}}^2}{\frac{1}{4}\sqrt{\rho\pi F} d_2\omega^2 y_{\mathrm{m}}^2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{2d_2}{d_2} = 2 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

E25 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\mu = 7{,}23\,\mathrm{g/m}$	$F_{\mathrm{P}=5{,}00\,\mathrm{J/s}}$
$f = 50{,}0\,\mathrm{Hz}$	
$y_{\mathrm{m}} = 12{,}0\,\mathrm{mm}$	

Identifier la clé La clé est l'expression de la puissance en fonction des valeurs données dans l'énoncé.

Résoudre le problème L'équation de la puissance transportée sur une corde est

$$P = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 y_{\mathrm{m}}^2 \ .$$

Les inconnues v et ω peuvent être exprimées en fonction des valeurs fournies :

$$\omega = 2\pi f \qquad \text{et} \qquad v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \ .$$

Ainsi,

$$P = \frac{1}{2}\mu \times \sqrt{\frac{F}{\mu}} \times (2\pi f)^2 y_{\mathrm{m}}^2 = 2\sqrt{F\mu}\pi^2 f^2 y_{\mathrm{m}}^2 \ .$$

Transmettre 5,00 joules par seconde signifie une puissance de 5,00 W, et la tension F est alors l'inconnue à isoler :

$$F = \frac{P^2}{4\mu\pi^4 f^4 y_{\mathrm{m}}^4} = \frac{(5{,}00\,\mathrm{W})^2}{4 \times (0{,}007\,23\,\mathrm{kg/m}) \times \pi^4 (50{,}0\,\mathrm{Hz})^4 \times (0{,}012\,\mathrm{m})^4} = 68{,}5\,\mathrm{N} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la force est correct pour la tension d'une corde.

P26 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\mu = 2{,}80\,\mathrm{g/m}$	y_m
$F = 16{,}0\,\mathrm{N}$	Fonction d'onde
$f = 35{,}0\,\mathrm{Hz}$	complète
$P = 4{,}00\,\mathrm{W}$	$v_y(x = 0, t = 0{,}200\,\mathrm{s})$
$y_{t=0;x=0} = 2{,}50\,\mathrm{cm}$	

a. Identifier la clé La clé est l'équation liant la puissance aux caractéristiques de la corde et de l'onde.

Résoudre le problème L'équation de la puissance transportée sur une corde est

$$P = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 y_\mathrm{m}^2, \qquad \text{où} \qquad v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \text{et} \qquad \omega = 2\pi f\ .$$

Ainsi,

$$P = \frac{1}{2}\mu \times \sqrt{\frac{F}{\mu}} \times (2\pi f)^2 y_\mathrm{m}^2\ .$$

L'amplitude est alors la seule inconnue et peut être calculée :

$$y_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{P}{2\sqrt{\mu F}\pi^2 f^2}} = \sqrt{\frac{4{,}00\,\mathrm{W}}{2\sqrt{(0{,}002\,80\,\mathrm{kg/m}) \times (16{,}0\,\mathrm{N})}\pi^2(35{,}0\,\mathrm{Hz})^2}} = 0{,}028\,0\,\mathrm{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'amplitude est correct pour une corde vibrante.

b. Identifier la clé La clé est la détermination des paramètres inconnus de l'onde à partir des caractéristiques données dans l'énoncé.

Résoudre le problème La forme générale de la fonction d'onde est

$$y(x;t) = y_\mathrm{m}\sin(kx + \omega t + \phi)\ .$$

Le nombre d'onde est donné par l'équation

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad \text{où} \qquad \lambda = \frac{v}{f} \qquad \text{et} \qquad v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$k = \frac{2\pi f\sqrt{\mu}}{\sqrt{F}} = \frac{2\pi \times (35{,}0\,\mathrm{Hz}) \times \sqrt{0{,}002\,80\,\mathrm{kg/m}}}{\sqrt{16{,}0\,\mathrm{N}}} = 2{,}91\,\mathrm{rad/m}\ .$$

La fréquence angulaire ω est donnée par

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 35{,}0\,\mathrm{Hz} = 220\,\mathrm{rad/s}\ ,$$

et la constante de phase peut être évaluée pour l'endroit et l'instant connus pour lesquels $y = 2{,}50\,\mathrm{cm}$, à partir de l'équation d'onde. Pour une onde se déplaçant dans le sens opposé à l'axe des x :

$$y(x;t) = y_\mathrm{m}\sin(kx + \omega t + \phi) \qquad \Rightarrow \qquad \phi = \arcsin\left(\frac{y(x;t)}{y_\mathrm{m}}\right) - k \times 0 - \omega \times 0$$

$$\phi = \arcsin\left(\frac{2{,}50\,\mathrm{cm}}{2{,}80\,\mathrm{cm}}\right) = 1{,}11\,\mathrm{rad}\ .$$

On a maintenant toutes les informations requises pour écrire la fonction d'onde :

$$y(x;t) = (2{,}80\,\mathrm{cm}) \times \sin\Big((2{,}91\,\mathrm{rad/m}) \times x + (220\,\mathrm{rad/s}) \times t + (1{,}11\,\mathrm{rad})\Big)\ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. **Identifier la clé** La clé est la dérivée de l'équation de la position développée en **b.**
Résoudre le problème L'équation de la vitesse est

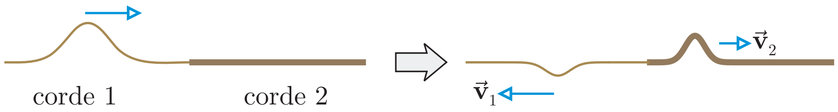
$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_\mathrm{m} \sin(kx + \omega t + \phi) = \omega y_\mathrm{m} \cos(kx + \omega t + \phi) \; .$$

Quand on la résout pour $x = 0$ et $t = 0{,}200\,\mathrm{s}$, on trouve

$$(220\,\mathrm{rad/s}) \times (0{,}028\,0\,\mathrm{m}) \cos\Big(2{,}91\,\mathrm{rad/m} \times 0 + (220\,\mathrm{rad/s}) \times (0{,}200\,\mathrm{s}) + 1{,}11\,\mathrm{rad}\Big)$$

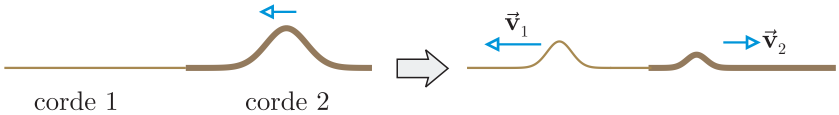
$$v_y = 2{,}75\,\mathrm{m/s} \; . \qquad \text{(réponse)}$$

Q27 a. **Résoudre le problème** En se propageant dans une section de corde plus lourde, une partie de l'énergie est réfléchie en étant inversée, et une autre partie de l'énergie est transmise du même côté que l'impulsion initiale.



(réponse)

b. **Résoudre le problème** En se propageant dans une section de corde plus légère, une partie de l'énergie est réfléchie sans être inversée, et une autre partie de l'énergie est transmise du même côté que l'impulsion initiale.



(réponse)

Q28 **Résoudre le problème** La fréquence d'excitation qui met la seconde section de la corde en oscillation est la même que la fréquence à laquelle les impulsions successives arrivent à la fin de la première section. La fréquence d'oscillation de la seconde section de la corde est donc la même que dans la première section.

La fréquence est la même dans les deux sections. (réponse)

E29 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$L_1 = 5{,}00\,\mathrm{m}$	$\Delta t_{L_1+L_2}$
$\mu_1 = 2{,}18\,\mathrm{g/m}$	
$L_2 = 7{,}00\,\mathrm{m}$	
$\mu_2 = 3{,}44\,\mathrm{g/m}$	
$F = 7{,}20\,\mathrm{N}$	

Identifier la clé La clé est la détermination du module de la vitesse de l'impulsion dans chacune des deux sections de la corde.
Résoudre le problème Le module de la vitesse de l'onde dans les deux sections de la corde sont données par les équations

$$v_1 = \sqrt{\frac{F_1}{\mu_1}} \qquad \text{et} \qquad v_2 = \sqrt{\frac{F_2}{\mu_2}} \; . \qquad \text{(i)}$$

En raison du principe d'action-réaction, la tension est nécessairement la même dans les deux sections, donc $F_1 = F_2$. De plus, le temps de parcours d'une impulsion d'un bout à l'autre est la somme des temps de parcours de l'impulsion dans chacune des deux sections, soit

$$\Delta t_{L_1+L_2} = \Delta t_1 + \Delta t_2 \; . \qquad \text{(ii)}$$

La cinématique permet d'établir la relation entre ces temps et les vitesses de l'impulsion :

$$v = \frac{L}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t_1 = \frac{L_1}{v_1} \qquad \text{et} \qquad \Delta t_2 = \frac{L_2}{v_2}\ .$$

En intégrant ces expressions du temps aux équations (i) et (ii), on trouve

$$\Delta t_{L_1+L_2} = \frac{L_1}{v_1} + \frac{L_2}{v_2} = \frac{L_1}{\sqrt{\frac{F_1}{\mu_1}}} + \frac{L_2}{\sqrt{\frac{F_2}{\mu_2}}} = \frac{L_1\sqrt{\mu_1} + L_2\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{F}}$$

$$\Delta t_{L_1+L_2} = \frac{5{,}00\,\text{m}\sqrt{0{,}002\,18\,\text{kg/m}} + 7{,}00\,\text{m}\sqrt{0{,}003\,44\,\text{kg/m}}}{\sqrt{7{,}20\,\text{N}}} = 0{,}240\,\text{s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du temps de parcours est correct.

P30 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$\Delta t_2 = 0{,}700\,\text{s}$	Δt_{total}
$\mu_2 = 3\mu_1$	
$L_2 = \frac{1}{2}L_1$	

a. **Identifier la clé** La clé est le fait que l'impulsion subira trois interactions avec une interface ou limite du milieu.

Résoudre le problème L'impulsion produite rencontrera en premier lieu l'interface vers la section plus légère de la corde (car $\mu_2 < \mu_1$). Cependant, l'impulsion transmise n'est jamais inversée, peu importe la variation de densité du milieu. L'impulsion principale qui poursuit son chemin rencontre ensuite l'extrémité de la corde, attachée à un point fixe. Une réflexion dure aura lieu et l'impulsion sera inversée une première fois. En revenant vers son point de départ, l'impulsion rencontre à nouveau l'interface, et encore une fois, l'impulsion transmise ne subit pas d'inversion, car la portion transmise de l'onde n'est jamais inversée. L'onde a donc subi une seule inversion durant son aller-retour, et sera donc inversée à son arrivée à son point de départ.

L'impulsion est inversée. (réponse)

b. **Identifier la clé** La clé est l'expression du temps de parcours de l'impulsion dans la seconde section de la corde en fonction du temps de parcours dans la première section.

Résoudre le problème Le temps de parcours aller-retour de l'impulsion est la somme des temps de parcours de l'impulsion dans chacune des deux sections de la corde, deux fois, soit

$$\Delta t_{\text{total}} = 2\Delta t_1 + 2\Delta t_2\ .$$

On connaît déjà le temps de parcours dans la deuxième section (celle qui est tenue par la personne), soit 0,700 s, et à partir des différences de propriétés des deux sections, on peut déterminer le temps de parcours dans la première section.

Le module des vitesses de l'onde dans les deux sections de corde sont données par les équations

$$v_1 = \sqrt{\frac{F_1}{\mu_1}} \qquad \text{et} \qquad v_2 = \sqrt{\frac{F_2}{\mu_2}}\ .$$

En raison du principe d'action-réaction, la tension est nécessairement la même dans les deux sections, donc $F_1 = F_2$. La cinématique permet d'établir la relation entre ces temps et les vitesses de l'impulsion :

$$v = \frac{L}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t_1 = \frac{L_1}{v_1} \qquad \text{et} \qquad \Delta t_2 = \frac{L_2}{v_2}$$

$$\Delta t_1 = \frac{L_1\sqrt{\mu_1}}{F} \qquad \text{et} \qquad \Delta t_2 = \frac{L_2\sqrt{\mu_2}}{F} \ .$$

On exprime Δt_1 en fonction de Δt_2, sachant que $\mu_1 = \frac{1}{3}\mu_2$ et que $L_1 = 2L_2$:

$$\Delta t_1 = \frac{L_1\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{F}} = \frac{(2L_2)\sqrt{(\frac{1}{3}\mu_2)}}{\sqrt{F}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{L_2\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{F}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\Delta t_2 \ .$$

Finalement,

$$\Delta t_{\text{total}} = 2\Delta t_1 + 2\Delta t_2 = 2(\frac{2}{\sqrt{3}}\Delta t_2) + 2\Delta t_2 = \left(2 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)\Delta t_2 = 3{,}02\,\text{s} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du temps de parcours est correct, comparativement au temps donné pour la première section de corde.

Q31 a. **Résoudre le problème** Le principe de superposition des ondes fait en sorte que si elles ont les mêmes dimensions, mais sont simplement inversées l'une par rapport à l'autre, leur addition annulera en tout point le déplacement des points de la corde.

Oui, la corde est droite. (réponse)

b. **Résoudre le problème** L'énergie dans une corde vibrante se trouve sous deux formes distinctes, soit une portion d'énergie cinétique, alors que les points de la corde (ayant une masse) sont en mouvement, et une portion d'énergie potentielle élastique, alors que la section déformée de la corde doit s'étirer un peu pour permettre l'ondulation. (Le tout est analogue au mouvement d'un système bloc-ressort.)

Ainsi, au moment où les deux impulsions se superposent, la corde n'est momentanément plus déformée, mais cet état est temporaire étant donné le mouvement de la corde. Ainsi, toute l'énergie se trouve sous forme d'énergie cinétique, ce qui forcera la déformation de la corde vers un nouvel état ondulé, alors que chaque impulsion poursuit son déplacement le long de la corde.

La puissance transportée n'est pas modifiée. (réponse)

E32 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$L = 50{,}0\,\text{m}$	$y_{\text{centre}\,;\,3{,}25\,\text{s}}$
$y_1 = 0{,}0125\sin\left(2{,}50x - 300t + \frac{\pi}{2}\right)$	
$y_1 = 0{,}0150\sin\left(2(50 - x) - 24t + \pi\right)$	

Identifier la clé La clé est le principe de superposition selon lequel il suffit d'additionner les déplacements indépendants des deux ondes.

Résoudre le problème Le principe de superposition des ondes stipule que

$$y'(x;t) = y_1(x;t) + y_2(x;t) \ .$$

Si on considère $x = 25{,}0\,\text{m}$ pour le centre de la corde et l'instant $t = 3{,}25\,\text{s}$, cette addition devient

$$y'(x;t) = 0{,}0125\sin\left(2{,}50 \times 25{,}0 - 300 \times 3{,}25 + \frac{\pi}{2}\right) + 0{,}0150\sin\left(2 \times (50{,}0 - 25{,}0) - 240 \times 3{,}25 + \pi\right)$$

$$y'(x;t) = 0{,}015\,3\,\text{m} = 15{,}3\,\text{mm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La position du point central de la corde ne dépasse pas l'amplitude additionnée des deux ondes, ce qui est correct.

Q33 **Identifier la clé** La clé est la détermination de la différence de phase de chacune des quatre ondes avec l'onde y_0.

Résoudre le problème La différence de phase entre l'onde y_0 et une autre onde est donnée par l'équation

$$\Delta\phi = \phi_i - \phi_0 \ .$$

L'interférence est constructive lorsque $\Delta\phi$ est un multiple de 2π, elle est destructive lorsque $\Delta\phi$ est multiple impair de π, et intermédiaire dans tous les autres cas.

a.

$$\Delta\phi_1 = \phi_1 - \phi_0 = \frac{-5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = -\pi$$

$\Delta\phi_1$ est un multiple impair de π (même si négatif), donc produit de l'interférence destructive.

Interférence destructive (réponse)

b.

$$\Delta\phi_2 = \phi_2 - \phi_0 = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$$

$\Delta\phi_2$ n'est ni un multiple de π ni un multiple de 2π, donc produit de l'interférence intermédiaire.

Interférence intermédiaire (réponse)

c.

$$\Delta\phi_3 = \phi_3 - \phi_0 = \frac{13\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{12\pi}{6}$$

$\Delta\phi_3$ est un multiple de 2π, donc produit de l'interférence constructive.

Interférence constructive (réponse)

d.

$$\Delta\phi_4 = \phi_4 - \phi_0 = \frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi}{6}$$

$\Delta\phi_4$ n'est ni un multiple de π ni un multiple de 2π, donc produit de l'interférence intermédiaire.

Interférence intermédiaire (réponse)

E34 **Identifier la clé** La clé est l'équation 2.39 qui lie l'amplitude de l'onde résultante au déphasage entre les ondes superposées.

Résoudre le problème Pour deux ondes de même amplitude superposées, l'équation 2.39 stipule que l'amplitude de l'onde résultante (posons Y_m) est

$$Y_\mathrm{m} = 2y_\mathrm{m}\cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) \ .$$

a. Si l'amplitude résultante est $Y_\mathrm{m} = 1{,}5y_\mathrm{m}$, on a

$$\begin{aligned} Y_\mathrm{m} &= 1{,}5y_\mathrm{m} = 2y_\mathrm{m}\cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) \\ 1{,}5 &= 2\cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) \\ \Delta\Phi &= 2\arccos\left(\frac{1{,}5}{2}\right) = 1{,}45\,\mathrm{rad} \ . \end{aligned}$$ (réponse)

Valider la réponse La différence de phase est bien celle d'une interférence intermédiaire, multiple ni de π ni de 2π.

b. Si l'amplitude résultante est $Y_\text{m} = y_\text{m}$, on a

$$\begin{aligned} Y_\text{m} &= y_\text{m} = 2y_\text{m}\cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) \\ 1 &= 2\cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) \\ \Delta\Phi &= 2\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 2{,}09\,\text{rad} \ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La différence de phase est bien celle d'une interférence intermédiaire, multiple ni de π ni de 2π.

E35 a. **Identifier la clé** La clé est le rapport entre le déphasage des deux ondes et les quantités π et 2π.

Résoudre le problème Le déphasage $\frac{5\pi}{4}$ n'est ni un multiple de π ni un multiple de 2π. Il s'agit donc automatiquement d'un cas d'interférence intermédiaire.

Interférence intermédiaire (réponse)

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 2.39 qui lie l'amplitude de l'onde résultante au déphasage entre les ondes superposées.

Résoudre le problème Pour deux ondes de même amplitude superposées, l'équation 2.39 stipule que l'amplitude de l'onde résultante (posons Y_m) est

$$Y_\text{m} = 2y_\text{m}\cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) \ .$$

Ainsi, pour un déphasage de $\frac{5\pi}{4}$, on a

$$Y_\text{m} = 2y_\text{m}\cos\left(\frac{5\pi/4}{2}\right) = -0,765y_\text{m} \ .$$

Évidemment, on ne garde que la valeur absolue de ce résultat puisque l'amplitude est toujours donnée de façon positive.

$$\text{Amplitude} = 0{,}765y_\text{m} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'amplitude de l'onde résultante n'est pas supérieure à $2y_\text{m}$, ce qui est l'amplitude maximale possible pour l'addition de deux ondes identiques.

P36 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$y_\text{m} = 3{,}50\,\text{cm}$	Fonctions d'onde
$y'(x;t) = 5{,}00\,\text{cm} \times \sin(125x - 25t)$	respectives

Identifier la clé La clé est la détermination de la différence de phase entre les deux ondes.

Résoudre le problème Si les deux ondes superposées ont les mêmes amplitude, fréquence et longueur d'onde, seule la constante de phase différera dans leurs fonctions d'onde. L'onde résultante a par ailleurs le même nombre d'onde et la même fréquence angulaire. On peut donc déjà affirmer que les deux ondes distinctes ont une fonction de la forme

$$y(x;t) = 3{,}50\,\text{cm} \times \sin(125x - 25t + \phi) \ .$$

On détermine la différence de phase entre les deux ondes à partir de l'équation 2.39 selon laquelle l'amplitude résultante Y_m est

$$\begin{aligned} Y_\text{m} &= 2y_\text{m}\cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) \\ \Delta\Phi &= 2\arccos\left(\frac{5{,}00\,\text{cm}}{2 \times 3{,}50\,\text{cm}}\right) = 1{,}55\,\text{rad} \ . \end{aligned}$$

On pourrait alors affirmer que l'une des ondes a une constante de phase nulle et l'autre, une constante de phase égale à 1,55 rad. Ou encore, on peut définir leurs constantes de phase par rapport à leur moyenne, les deux étant à égale distance de part et d'autre de cette valeur. Ainsi,

$$\phi = \pm\frac{\Delta\Phi}{2} = 0{,}775\,\text{rad} \ .$$

Finalement,

$$y_1 = 3{,}50\,\text{cm} \times \sin(125x - 25t - 0{,}775)$$
$$y_2 = 3{,}50\,\text{cm} \times \sin(125x - 25t + 0{,}775) \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La différence de phase entre les deux ondes est bien celle d'une interférence intermédiaire, l'amplitude totale étant comprise entre 0 et $2y_\text{m}$.

E37 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$L = 10{,}0\,\text{m}$	f
$v = 14{,}0\,\text{m/s}$	
$d_\text{nœuds} = 2{,}00\,\text{m}$	

Identifier la clé La clé est le fait que la distance entre deux nœuds voisins correspond à la moitié de la longueur d'onde.

Résoudre le problème L'équation générale du module la vitesse d'une onde progressive est

$$v = \lambda f, \qquad \text{où} \qquad \lambda = 2d_\text{nœuds} \ .$$

Il suffit d'isoler f pour procéder au calcul, et l'information de la longueur de la corde n'aura pas été importante :

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2d_\text{nœuds}} = \frac{14{,}0\,\text{m/s}}{2 \times 2{,}00\,\text{m}} = 3{,}50\,\text{Hz} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la fréquence est correct pour une corde vibrante.

E38 **Décortiquer le problème** Les deux fonctions d'onde données correspondent à deux ondes de mêmes amplitude, fréquence et longueur d'onde, et leurs vitesses ont des sens opposés puisque le terme ωt n'est pas de même signe.

Connues	Inconnue
$y_1 = y_2 = 0{,}030$	Fonction d'onde
$k_1 = k_2 = 20{,}9$	résultante
$\omega_1 = \omega_2 = 25{,}1$	

Identifier la clé La clé est la fonction d'onde stationnaire.

Résoudre le problème L'onde résultante de la superposition de deux ondes identiques de sens opposés est une onde stationnaire dont l'amplitude est le double de celle des ondes initiales. L'équation générale d'une onde stationnaire est

$$y'(x;t) = \left[2y_\text{m}\sin(kx)\right]\cos(\omega t) \ .$$

Toutes les variables étant connues (y_m, k et ω), on obtient

$$y'(x;t) = \left[2 \times 0{,}030\sin(20{,}9x)\right]\cos(25{,}1t)$$
$$y'(x;t) = \left[0{,}060\sin(20{,}9x)\right]\cos(25{,}1t) \ . \qquad \text{(réponse)}$$

E39 **Décortiquer le problème** Les valeurs contenues dans l'équation de l'onde stationnaire sont les paramètres utiles pour son analyse.

L'équation d'une onde stationnaire est

$$y'(x;t) = [2y_m \sin(kx)] \cos(\omega t) \ .$$

Connues	Inconnues
$y_\text{m} = 2{,}00\,\text{cm}$	v_onde
$k = 0{,}750\,\text{rad/cm}$	f
$\omega = 25{,}0\,\text{rad/s}$	$d_\text{nœuds}$
	$v_{y;(x=1{,}25\,\text{cm},t=0{,}4\,\text{s})}$
	$a_{m,\text{ventre}}$

a. **Identifier la clé** La clé est le lien entre le module de la vitesse de propagation de l'onde, k et ω.

Résoudre le problème Le module de la vitesse de propagation de l'onde peut être donnée par

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{25{,}0\,\text{rad/s}}{0{,}750\,\text{rad/cm}} = 33{,}3\,\text{cm/s} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La clé est la définition de la fréquence angulaire.

Résoudre le problème La fréquence angulaire connue permet d'isoler et de calculer la fréquence f :

$$\omega = 2\pi f \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{25{,}0\,\text{rad/s}}{2\pi} = 3{,}98\,\text{Hz} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. **Identifier la clé** La clé est le fait que la distance entre deux nœuds voisins correspond à la moitié de la longueur d'onde.

Résoudre le problème Une longueur d'onde sur une onde stationnaire contient deux nœuds :

$$\lambda = 2d_\text{nœuds} \qquad \Rightarrow \qquad d_\text{nœuds} = \frac{\lambda}{2} \ ,$$

la longueur d'onde étant liée au nombre d'onde k par

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} \ .$$

Ainsi,

$$d_\text{nœuds} = \frac{\lambda}{2} = \frac{\left(\frac{2\pi}{k}\right)}{2} = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{0{,}750\,\text{rad/cm}} = 4{,}19\,\text{cm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

d. **Identifier la clé** La clé est la dérivée première de la fonction d'onde, résolue pour l'instant et l'endroit spécifiés.

Résoudre le problème La vitesse transversale d'un point de la corde est donnée par

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{\text{d}y}{\text{d}t} = \frac{\text{d}}{\text{d}t} 2{,}00 \sin(0{,}750x)\cos(25{,}0t) = -25{,}0 \times 2{,}00 \sin(0{,}750x)\sin(25{,}0t) \\ &= -\,50{,}0 \sin(0{,}750x)\sin(25{,}0t) \ . \end{aligned}$$

Résolue pour $x = 1{,}25\,\text{cm}$ et $t = 0{,}400\,\text{s}$, cette équation donne

$$v_y = -50{,}0 \sin(0{,}750 \times 1{,}25)\sin(25{,}0 \times 0{,}400) = 21{,}9\,\text{cm/s} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

e. Identifier la clé La clé est la dérivée seconde de la fonction d'onde.

Résoudre le problème L'accélération transversale d'un point de la corde est donnée par

$$\begin{aligned} a_y &= \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 50{,}00 \sin(0{,}750x)\sin(25{,}0t) \\ &= 25{,}0 \times (-50{,}00)\sin(0{,}750x)\cos(25{,}0t) = (-1250{,}00)\sin(0{,}750x)\cos(25{,}0t) \ . \end{aligned}$$

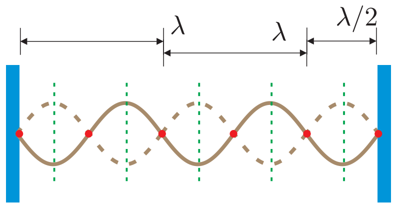
Par ailleurs, c'est vis-à-vis les ventres que l'accélération est la plus grande. L'accélération maximale de ces points est donc l'accélération la plus grande admise par l'équation de l'accélération. Cela survient aux endroits où $\sin(kx) = 1$ et aux instants où $\cos(\omega t) = 1$. On laisse tomber le signe négatif, car l'accélération maximale est donnée de façon positive. Ainsi,

$$a_{\mathrm{m}} = 1\,250 \times 1 \times 1 = 1\,250\,\mathrm{cm/s^2} = 12{,}5\,\mathrm{m/s^2} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Q40 Identifier la clé La clé est le fait que si les points d'attache sont fixes, le numéro d'harmonique correspond directement au nombre de lobes de l'onde stationnaire.

a. Résoudre le problème S'il y a 5 lobes complets sur la corde et qu'on considère que les points d'attache sont des nœuds, alors on compte 6 nœuds (les points rouges sur la figure ci-contre).

6 nœuds (réponse)



b. Résoudre le problème S'il y a 5 lobes complets, on trouve au centre de chacun un ventre, donc 5 ventres (les pointillés verts sur la figure).

5 ventres (réponse)

c. Résoudre le problème La distance entre deux nœuds sur une onde stationnaire correspond à la moitié de la longueur d'onde. Une règle de 3 donne alors

$$\frac{2d_{\text{nœuds}}}{1\lambda} = \frac{5d_{\text{nœuds}}}{n\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad n = \frac{5d_{\text{nœuds}}}{\lambda} \times \frac{1\lambda}{2d_{\text{nœuds}}} = 2{,}5 \ .$$

2,5 longueurs d'onde (réponse)

Q41 Identifier la clé La clé est l'équation 2.47 liant la fréquence harmonique aux propriétés de la corde.

Résoudre le problème La fréquence harmonique d'une corde fixe est

$$f_n = \frac{nv}{2L} \ . \qquad \text{(i)}$$

Dans le troisième mode comme dans le quatrième mode, la tension et la masse linéique de la corde sont les mêmes ; la vitesse est donc la même. L'équation (i) adaptée aux deux situations devient donc

$$f_3 = \frac{3v}{2L} \qquad \text{et} \qquad f_4 = \frac{4v}{2L} \ .$$

Si on cherche le facteur d'accroissement de la fréquence pour passer du troisième mode au quatrième mode, on cherche donc

$$\frac{f_4}{f_3} = \frac{\left(\frac{4v}{2L}\right)}{\left(\frac{3v}{2L}\right)} = \frac{4}{3} \ .$$

On doit augmenter la fréquence d'un facteur de $\frac{4}{3}$. (réponse)

Q42 **Identifier la clé** La clé est l'équation 2.47 liant la fréquence harmonique aux propriétés de la corde.

Résoudre le problème La fréquence harmonique d'une corde fixe est

$$f_n = \frac{nv}{2L} \ .$$

Si on passe du deuxième mode à un mode d'ordre inconnu n, on peut écrire

$$f_2 = \frac{2v_2}{2L} \qquad \text{et} \qquad f_n = \frac{nv_n}{2L} \ .$$

La vitesse est évidemment propre à chaque situation, puisqu'elle dépend de la tension, qui est modifiée. La fréquence et la longueur étant inchangées, on retrouve l'égalité suivante :

$$2v_2 = nv_n \ .$$

Le module de la vitesse d'une onde sur une corde est donnée par l'équation

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \ .$$

La corde étant la même, la densité linéique ne change pas d'un cas à l'autre. Cependant, la force varie ($F_2 = \frac{F_1}{4}$). Ainsi,

$$v_2 = \sqrt{\frac{F_2}{\mu}} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sqrt{\frac{F_n}{\mu}} = \sqrt{\frac{\frac{F_1}{4}}{\mu}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F_2}{\mu}} = \frac{1}{2}v_2 \ .$$

Ainsi,

$$2v_2 = nv_n = n(\frac{1}{2}v_2) \qquad \Rightarrow \qquad n = 2 \times \frac{2v_2}{v_2} = 4 \ .$$

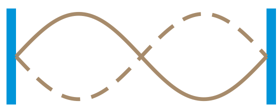
La corde se retrouve donc à vibrer dans son quatrième mode avec sa nouvelle tension.

Le quatrième mode (réponse)

Valider la réponse L'augmentation du mode de vibration est cohérent puisqu'une tension plus basse réduit la vitesse de l'onde, et la même fréquence produira alors plus de lobes le long de la corde.

Q43 **Identifier les clés** Les clés sont l'équation 2.47 liant la fréquence harmonique aux propriétés de la corde ainsi que l'équation de la vitesse d'une onde sur une corde.

Illustrer la situation La figure ci-contre illustre les deux cordes oscillant dans des modes différents.



corde A

corde B

Résoudre le problème La fréquence harmonique d'une corde fixe est

$$f_n = \frac{nv}{2L}, \qquad \text{avec} \qquad v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \ .$$

La fusion de ces deux équations donne

$$f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \ ,$$

d'où

$$\mu_A = \frac{n_A^2 F_A}{4L_A^2 f_A^2} \qquad \text{et} \qquad \mu_B = \frac{n_B^2 F_B}{4L_B^2 f_B^2} \ .$$

Les fréquences, longueurs et tensions étant les mêmes, on peut affirmer que

$$\mu_A = \frac{n_A^2 F}{4L^2 f^2} \qquad \text{et} \qquad \mu_B = \frac{n_B^2 F}{4L^2 f^2}\ .$$

On peut maintenant isoler le rapport μ_A/μ_B :

$$\frac{\mu_A}{\mu_B} = \frac{\frac{n_A^2 F}{4L^2 f^2}}{\frac{n_B^2 F}{4L^2 f^2}} = \frac{n_A^2}{n_B^2}\ .$$

Puisque les cordes A et B ont respectivement deux lobes et trois lobes, elles se trouvent dans leur deuxième et leur troisième mode respectivement. Donc $n_A = 2$ et $n_B = 3$. Ainsi,

$$\frac{\mu_A}{\mu_B} = \frac{n_A^2}{n_B^2} = \frac{2^2}{3^3} = \frac{4}{9} = 0,444\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Une densité linéique μ_A plus faible est cohérente puisqu'une même fréquence peut faire vibrer une corde dans un mode plus élevé à condition qu'elle soit plus légère.

E44 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$L = 4{,}00\,\text{m}$	n
$v_{y,x=50\,\text{cm}} = 0$	

Identifier la clé La clé est le fait que les points de la corde dont la vitesse est nulle sont des nœuds de l'onde stationnaire.

Résoudre le problème On veut qu'il y ait un nœud à $x = 50{,}0\,\text{cm}$, soit le huitième de la longueur de la corde (car $\frac{50}{400} = \frac{1}{8}$). La corde entière comporte donc 8 fois plus de lobes que sur les 50 premiers centimètres. Pour qu'il y ait un nœud, la portion de corde entre l'extrémité et cet endroit (entre $x = 0$ et $x = 50{,}0\,\text{cm}$) doit donc contenir un nombre entier de lobes. On obtient l'équation

$$n_{\text{total}} = 8 \times n_{50\,\text{cm}}, \qquad \text{avec} \qquad n_{50\,\text{cm}} = 1, 2, 3, ...$$

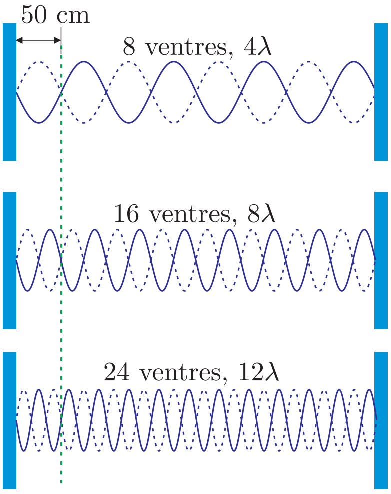
Ainsi,

$$n_{\text{total}} = 8 \times n_{50\,\text{cm}}, \qquad \text{avec} \qquad n_{50\,\text{cm}} = 1, 2, 3, ...$$

$$n_{\text{total}} = 8, 16, 24, ...$$

$$n = 8(i), \quad \text{avec} \quad i = 1, 2, 3, ... \qquad \text{(réponse)}$$

La figure ci-contre illustre la corde dans les trois premiers modes dans lesquels on retrouve un nœud à $x = 50$ cm.



E45 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$L = 641\,\text{mm}$	f_2
$f_1 = 196\,\text{Hz}$	f_3

Identifier la clé La clé est la détermination du module de la vitesse de l'onde à partir des données du mode fondamental.

Résoudre le problème Le module de la fréquence harmonique d'une corde fixe est

$$f_n = \frac{nv}{2L} \ .$$

Le module de la vitesse de l'onde peut être isolée et calculée puisqu'on connaît la fréquence du mode fondamental :

$$v = \frac{2Lf_n}{n} = \frac{2Lf_1}{1} = 2Lf_1 \ .$$

On peut alors calculer la fréquence des harmoniques supérieures :

$$f_n = \frac{nv}{2L} = \frac{n \times (2Lf_1)}{2L} = nf_1 \ .$$

Pour les deuxième et troisième modes, on aura

$$f_2 = 2f_1 = 2 \times 196\,\text{Hz} = 392\,\text{Hz}$$

$$f_3 = 3f_1 = 3 \times 196\,\text{Hz} = 588\,\text{Hz}$$

$$f_2 = 392\,\text{Hz} \qquad \text{et} \qquad f_3 = 588\,\text{Hz} \ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur des fréquences trouvées est correct, puisqu'elles sont supérieures à la fréquence fondamentale.

E46 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$f_{\text{do}} = 65{,}4\,\text{Hz}$	F
$d = 3{,}00\,\text{mm}$	
$L = 1{,}10\,\text{m}$	
$\rho = 7{,}90 \times 10^3\,\text{kg/m}^3$	

Identifier la clé La clé est l'expression du module de la vitesse en fonction des propriétés physiques de la corde.

Résoudre le problème Le module de la vitesse d'une onde sur une corde est donnée par l'équation

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \qquad \text{où} \qquad \mu = \frac{m}{L}, \qquad m = \rho V \qquad \text{et} \qquad V = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 L \ .$$

Réunies, ces équations admettent

$$v = \sqrt{\frac{4F}{\rho\pi d^2}} \ . \tag{i}$$

Par ailleurs, la fréquence harmonique d'une corde vibrante est donnée par l'équation

$$f_n = \frac{nv}{2L} \ . \tag{ii}$$

L'union des équations (i) et (ii) donne

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{4F}{\rho\pi d^2}} = \frac{n}{Ld}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}} \ .$$

On peut maintenant isoler la tension F et déterminer sa valeur :

$$F = \sqrt{\left(\frac{Ldf}{n}\right)}\rho\pi = \left(\frac{(1{,}10\,\mathrm{m}) \times (0{,}003\,00\,\mathrm{m}) \times (65{,}4\,\mathrm{Hz})}{1}\right) \times (7{,}90 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}) \times \pi$$

$$F = 1{,}16 \times 10^3\,\mathrm{N} = 1{,}16\,\mathrm{kN}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la tension est correct pour une corde de piano.

E47 **Décortiquer le problème** Les valeurs contenues dans l'équation de l'onde stationnaire sont les paramètres utiles pour son analyse.

Connues	Inconnue
$n = 3$	L
$y_\mathrm{m} = 0{,}052\,5\,\mathrm{m}$	
$k = \pi 4{,}00\,\mathrm{rad/m}$	
$\omega = 4{,}00\,\mathrm{rad/s}$	

Identifier les clés Les clés sont les deux équations liant la fréquence au module de la vitesse de l'onde sur la corde et le fait que dans son troisième harmonique, la corde porte une onde stationnaire avec trois lobes entre ses deux extrémités.

Résoudre le problème Les deux équations utiles comportant f et v sont

$$v = \lambda f \qquad \text{et} \qquad f_n = \frac{nv}{2L}\ .$$

Ces deux équations permettent de trouver que

$$\lambda = \frac{2L}{n} \qquad \Rightarrow \qquad L = \frac{n\lambda}{2}\ .$$

La longueur d'onde peut être déterminée à partir du nombre d'onde compris dans la fonction d'onde, $k = \pi 4{,}00\,\mathrm{rad/m}$:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k}\ .$$

On peut maintenant obtenir une équation pour calculer la longueur de la corde :

$$L = \frac{n\lambda}{2} = \frac{n}{2}\frac{2\pi}{k} = \frac{n\pi}{k} = \frac{3\pi}{\pi \times 4{,}00\,\mathrm{rad/m}} = 0{,}750\,\mathrm{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur est correct pour un montage de laboratoire.

E48 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$\Delta t_{20\mathrm{T}} = 62{,}5\,\mathrm{s}$	F
$\mu = 194\,\mathrm{g/m}$	
$L = 33{,}7\,\mathrm{m}$	

Identifier la clé La clé est l'union des deux équations comportant le module de la vitesse de l'onde sur le câble.

Résoudre le problème Les deux équations utiles comportant le module de la vitesse de l'onde sont

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \text{et} \qquad f_n = \frac{nv}{2L}\ .$$

De plus, la durée des 20 oscillations permet de déterminer la période, et de là la fréquence f :

$$\Delta t_{20\text{T}} = 20T \qquad \text{et} \qquad f = \frac{1}{T}$$

$$\frac{1}{f} = T = \frac{\Delta t_{20\text{T}}}{20} \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{20}{\Delta t_{20\text{T}}} \ .$$

Cette expression de la fréquence peut être intégrée à l'équation de la fréquence harmonique, pour le mode fondamental du câble :

$$f_1 = \frac{20}{\Delta t_{20\text{T}}} = \frac{1v}{2L} \ .$$

Le module de la vitesse étant liée à la tension F, on a

$$\frac{20}{\Delta t_{20\text{T}}} = \frac{1v}{2L} = \frac{1\sqrt{\frac{F}{\mu}}}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \ .$$

On peut maintenant isoler la tension et trouver sa valeur :

$$F = \left(\frac{2L \times 20}{\Delta t_{20\text{T}}}\right)^2 \mu = \left(\frac{2 \times (33{,}7\,\text{m}) \times 20}{62{,}5\,\text{s}}\right)^2 \times 0{,}194\,\text{kg/m} = 90{,}2\,\text{N} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la tension est correct.

P49 **Décortiquer le problème** Le fait que la corde soit droite toutes les 6,00 ms fournit de l'information sur la demi-période, car la corde passe par cette position deux fois par cycle.

Connues	Inconnues
$L = 1{,}20\,\text{m}$	v_{onde}
$n_{\text{nœuds}} = 5$	$x_{(1^{\text{er}}\text{ventre})}$
$\frac{T}{2} = 6{,}00\,\text{ms}$	$y'(x;t)$
$y_{x=0{,}2\,\text{m},t=14\,\text{ms}} = 1{,}6\,\text{mm}$	

a. **Identifier la clé** La clé est la détermination de la fréquence et de la longueur d'onde à partir des données fournies.

Résoudre le problème Comme il y a cinq nœuds d'un bout à l'autre de la corde, l'onde stationnaire présente quatre lobes (quatre ventres). Il s'agit donc du quatrième harmonique. La longueur d'onde étant égale au double de la distance entre deux nœuds consécutifs, on peut alors trouver que

$$\lambda = 2d_{\text{nœuds}} = 2 \times \frac{L}{4} = 2 \times \frac{1{,}20\,\text{m}}{4} = 0{,}600\,\text{m} \ .$$

La fréquence, quant à elle, est l'inverse de la période, laquelle peut être évaluée à partir du temps donné dans l'énoncé, qui correspond à la demi-période, car la corde passe deux fois par cycle par sa position droite :

$$T = 2 \times 6{,}00\,\text{ms} = 12{,}0\,\text{ms}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}0120\,\text{s}} = 83{,}3\,\text{Hz} \ .$$

On peut alors déterminer le module de la vitesse de l'onde à partir de l'équation générale de la vitesse pour les ondes :

$$v = \lambda f = 0{,}600\,\text{m} \times 83{,}3\,\text{Hz} = 50{,}0\,\text{m/s} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse est correct.

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que le premier ventre se trouve à une distance de $x = 0$ égale à la moitié de la distance entre deux nœuds.

Résoudre le problème La distance entre deux nœuds étant le quart de la longueur de la corde (*voir en* ***a.***), on peut dire que

$$d_{\text{nœuds}} = \frac{L}{4} = \frac{1{,}20\,\text{m}}{4} = 0{,}300\,\text{m} \ .$$

Le ventre le plus près de $x = 0$ est à la mi-longueur du premier lobe :

$$x_{1^{\text{er}}\ \text{ventre}} = \frac{d_{\text{nœuds}}}{2} = \frac{0{,}300\,\text{m}}{2} = 0{,}150\,\text{m} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. **Résoudre le problème** La forme générale de l'équation d'onde stationnaire est

$$y'(x;t) = \Big[2y_{\text{m}} \sin(kx)\Big] \cos(\omega t) \ .$$

Les valeurs de k et de ω peuvent être déterminées à partir des fréquence et longueur d'onde connues :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}600\,\text{m}} = \frac{10\pi}{3}\ \text{rad/m}$$
$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 83{,}3\,\text{Hz} = \frac{500\pi}{3}\ \text{rad/s} \ .$$

On peut déterminer l'amplitude y_{m} en résolvant l'équation d'onde avec les données maintenant connues :

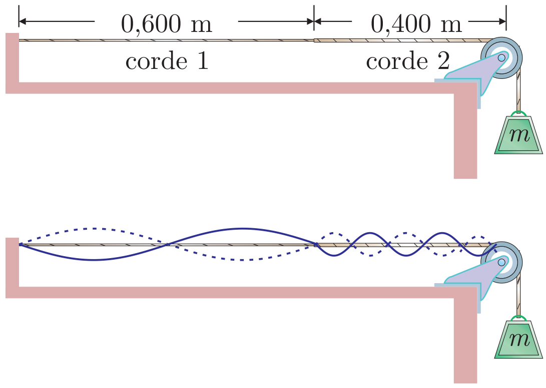
$$\begin{aligned} y'(x;t) &= \Big[2y_{\text{m}} \sin(kx)\Big] \cos(\omega t) \\ 2y_{\text{m}} &= \frac{y'(x;t)}{\sin(kx)\cos(\omega t)} \\ &= \frac{0{,}001\,6\,\text{m}}{\sin\Big((\frac{10\pi}{3}\text{rad/m}) \times (0{,}2\,\text{m})\Big)\cos\Big((\frac{500\pi}{3}\text{rad/s}) \times (0{,}014\,\text{s})\Big)} = 0{,}003\,7\,\text{m} \ . \end{aligned}$$

On peut donc écrire la fonction d'onde complète :

$$y'(x;t) = 0{,}003\,7\,\text{m} \sin\left(\frac{10\pi}{3}\ \text{rad/m} \times x\right) \cos\left(\frac{500\pi}{3}\ \text{rad/s} \times t\right) \ . \qquad \text{(réponse)}$$

P50 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$L_1 = 0{,}600\,\text{m}$	f_n
$\mu_1 = 2{,}40\,\text{g/m}$	
$L_2 = 0{,}400\,\text{m}$	
$\mu_2 = 33{,}75\,\text{g/m}$	
$m = 0{,}700\,\text{kg}$	



Illustrer la situation La figure ci-contre illustre le montage dans le cas où la corde est au repos ainsi que dans le cas où la corde oscille à la fréquence recherchée, comme démontré dans le raisonnement qui suit.

Identifier la clé La clé est le fait que la fréquence d'oscillation (la même pour les deux sections de la corde) doit correspondre à une fréquence harmonique pour chacune des sections.

Résoudre le problème On établit une relation valide pour chacune des deux sections tenant compte de la fréquence, de la tension et de la densité linéique. Pour une onde stationnaire sur une corde, on peut dire que

$$v = \frac{nv}{2L} \qquad \text{et} \qquad v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}\ .$$

Pour chaque section de la corde, on peut donc dire que

$$f_1 = \frac{n_1}{2L_1}\sqrt{\frac{F_1}{\mu_1}} \qquad \text{et} \qquad f_2 = \frac{n_2}{2L_2}\sqrt{\frac{F_2}{\mu_2}}\ .$$

Les tensions étant égales (principe d'action-réaction appliqué au point de liaison des deux cordes) et les fréquences étant les mêmes également (la fréquence se transmet d'une corde à l'autre sans variation), on peut affirmer que

$$\frac{n_1}{2L_1}\sqrt{\frac{F_1}{\mu_1}} = f = \frac{n_2}{2L_2}\sqrt{\frac{F_2}{\mu_2}} \tag{i}$$

$$\frac{n_1}{L_1\sqrt{\mu_1}} = \frac{n_2}{L_2\sqrt{\mu_2}}\ .$$

On peut alors trouver une expression du rapport des modes d'oscillation (qui peuvent différer) des deux cordes :

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{L_1\sqrt{\mu_1}}{L_2\sqrt{\mu_2}} = \frac{0{,}600\,\mathrm{m} \times \sqrt{0{,}002\,40\,\mathrm{kg/m}}}{0{,}400\,\mathrm{m} \times \sqrt{0{,}033\,75\,\mathrm{kg/m}}} = 0{,}4\ .$$

Toute combinaison de valeurs entières de n_1 et de n_2 respectant cette condition fera en sorte qu'un nœud se trouvera au point de jonction entre les deux cordes. Cependant, on s'intéresse à la plus faible fréquence qui vérifie cette condition, donc on peut rapidement déterminer que les valeurs de n_1 et de n_2 sont respectivement 2 et 5.

Ainsi, l'une ou l'autre de ces deux valeurs permet de revenir trouver la fréquence commune à partir de l'équation (i), la tension étant égale au poids de la masse suspendue :

$$f = \frac{n_1}{2L_1}\sqrt{\frac{F_1}{\mu_1}} = \frac{n_1}{2L_1}\sqrt{\frac{mg}{\mu_1}} = \frac{2}{2 \times 0{,}600\,\mathrm{m}}\sqrt{\frac{(0{,}700\,\mathrm{kg}) \times (9{,}81\,\mathrm{m/s^2})}{0{,}002\,40\,\mathrm{kg/m}}} = 89{,}2\,\mathrm{Hz}\ . \tag{réponse}$$

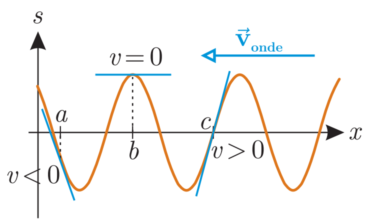
Valider la réponse L'ordre de grandeur de la fréquence est correct, et de plus, le calcul de la fréquence à partir des propriétés de la deuxième corde (dans son cinquième mode de vibration) donne la même valeur.

Physique 3 Ondes et physique moderne - 1re édition

Chapitre 03 Les ondes sonores

Q1 **Identifier la clé** La clé est le fait que le graphique présenté permet d'entrevoir ce qui arrivera aux points a, b et c lors du déplacement vers la gauche de l'onde.

Illustrer la situation La figure ci-contre illustre la courbe du déplacement en fonction de la position, le long de la direction de propagation de l'onde, pour des molécules agitées par une onde sonore. Vis-à-vis des trois points étudiés, on aperçoit la pente de la courbe.



Résoudre le problème Les molécules d'air sont poussées alternativement dans la direction de la propagation de l'onde et en direction inverse, lors du passage des impulsions. Le point a est en train de descendre vers un creux de l'onde alors que l'onde se déplace vers la gauche. Il se dirige vers s négatif, donc vers la gauche.

Le point b se trouve momentanément à sa position extrême, donc sera immobile durant cet instant sans durée.

Finalement, le point c sur le graphique est soulevé par l'arrivée d'un sommet de l'onde. Cela correspond à une molécule déplacée vers s positif, donc vers la droite.

a : vers la gauche, b : immobile et c : vers la droite. (réponse)

Q2 **a.** **Résoudre le problème** La vitesse du son est indépendante de la fréquence d'excitation et demeure donc inchangée.

Le module de la vitesse de l'onde va rester inchangé. (réponse)

b. **Résoudre le problème** La fréquence angulaire est proportionnelle à la fréquence, selon l'équation $\omega = 2\pi f$. Elle doublera, comme la fréquence elle-même.

La fréquence angulaire va doubler. (réponse)

c. **Résoudre le problème** La longueur d'onde est tributaire de la fréquence et de la vitesse de l'onde selon l'équation $v = \lambda f$. Ainsi, elle doit varier selon l'inverse de la fréquence, car leur produit (la vitesse de l'onde) doit demeurer constant.

$$\lambda = \frac{v}{f} \ .$$

Si la fréquence double, la longueur d'onde sera divisée par 2.

La longueur d'onde va diminuer de moitié. (réponse)

d. **Résoudre le problème** Le nombre d'onde varie selon l'inverse de la longueur d'onde, donc proportionnellement à la fréquence :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\left(\frac{v}{f}\right)} = \frac{2\pi f}{v} \ .$$

Si la fréquence double, le nombre d'onde doublera aussi.

Le nombre d'onde va doubler. (réponse)

e. **Résoudre le problème** Le module de compressibilité est une propriété du milieu dans lequel se propage l'onde, c'est donc une constante à l'origine de la vitesse de propagation. Il n'est pas changé par les propriétés de l'onde générée.

Le module de compressibilité va rester inchangé. (réponse)

f. Résoudre le problème L'amplitude de pression dépend du module de compressibilité, du nombre d'onde et de l'amplitude du déplacement des molécules, selon l'équation 3.5 :

$$\Delta p_{\mathrm{m}} = Bks_{\mathrm{m}} \ .$$

On a démontré en **e.** que le module de compressibilité demeure inchangé et en **d.** que le nombre d'onde double, et l'énoncé indique que l'amplitude de déplacement demeure constante. Le produit Bks_{m} doublera donc en même temps que la fréquence.

L'amplitude de pression va doubler. (réponse)

E3 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$f_{\mathrm{min}} = 20\,\mathrm{Hz}$	λ_{min}
$f_{\mathrm{m}} = 20\,000\,\mathrm{Hz}$	λ_{m}

Identifier la clé La clé est l'équation de la vitesse d'une onde, appliquée à l'air.

Résoudre le problème Le module de la vitesse du son dans l'air est donné par

$$v = \lambda f = 343\,\mathrm{m/s} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{343\,\mathrm{m/s}}{f} \ .$$

Si on applique cette équation aux limites du domaine d'audition de l'oreille, on trouve

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathrm{min}} &= \frac{343\,\mathrm{m/s}}{f_{\mathrm{min}}} = \frac{343\,\mathrm{m/s}}{20\,\mathrm{Hz}} = 17\,\mathrm{m} \\ \lambda_{\mathrm{m}} &= \frac{343\,\mathrm{m/s}}{f_{\mathrm{m}}} = \frac{343\,\mathrm{m/s}}{20\,000\,\mathrm{Hz}} = 17\,\mathrm{mm} \ . \end{aligned}$$

Le domaine des longueurs d'onde audibles est donc

$$17\,\mathrm{mm} \quad \leq \quad \lambda \quad \leq \quad 17\,\mathrm{m} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

E4 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$f = 30\,\mathrm{kHz}$	λ_{eau}
$v_{\text{son-eau}} = 1{,}52 \times 10^3\,\mathrm{m/s}$	

Identifier la clé La clé est l'équation de la vitesse d'une onde, appliquée à l'eau.

Résoudre le problème L'équation générale du module de la vitesse d'une onde progressive est

$$v = \lambda f \ .$$

On calcule la longueur d'onde dans l'eau :

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{v_{\text{son-eau}}}{f} = \frac{1{,}52 \times 10^3\,\mathrm{m/s}}{30\,\mathrm{kHz}} = 5{,}07\,\mathrm{cm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde est correct.

E5 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$f = 4{,}5\,\mathrm{MHz}$	λ_{air}
$v_{\text{son-tissus}} = 1{,}5\,\mathrm{km/s}$	$\lambda_{\mathrm{tissus}}$

Identifier la clé La clé est l'équation du module de la vitesse d'une onde progressive.

Résoudre le problème L'équation générale du module de la vitesse d'une onde progressive est

$$v = \lambda f \ .$$

On peut donc établir une équation générale pour la longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{v}{f} \ .$$

a. Dans l'air :

$$\lambda_{\text{air}} = \frac{v_{\text{air}}}{f} = \frac{343\,\text{m/s}}{4{,}5 \times 10^{6}\,\text{Hz}} = 7{,}6 \times 10^{-5}\,\text{m} = 76\,\mu\text{m} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde est correct, vu la vitesse élevée du son dans l'air.

b. Dans les tissus :

$$\lambda_{\text{tissus}} = \frac{v_{\text{tissus}}}{f} = \frac{1\,500\,\text{m/s}}{4{,}5 \times 10^{6}\,\text{Hz}} = 0{,}33\,\text{mm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Le fait que la longueur d'onde dans les tissus soit plus élevée que dans l'air est cohérent puisque la vitesse du son y est également plus grande.

E6 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$f = 500\,\text{Hz}$	Δp_{m}
$v_{\text{eau}} = 1{,}48\,\text{km/s}$	
$s_{\text{m}} = 76\,\text{nm}$	

Identifier la clé La clé est la relation entre la variation de pression et le déplacement des molécules.

Résoudre le problème L'équation de l'onde de pression d'une onde sonore est

$$\Delta p = -Bks_{\text{m}} \cos(kx - \omega t + \phi) \ .$$

L'amplitude de pression est donc

$$\Delta p = Bks_{\text{m}} \ .$$

Le module de compressibilité de l'eau est donné dans le tableau 3.1 ($B_{\text{eau}} = 2{,}2\,\text{GPa}$), alors que le nombre d'onde est lié à la longueur d'onde connue par

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad \text{avec} \qquad \lambda = \frac{v}{f} \ .$$

L'amplitude de pression est donc

$$\Delta p = B_{\text{eau}} k s_{\text{m}} = B_{\text{eau}} \frac{2\pi}{\lambda} s_{\text{m}} = B_{\text{eau}} k s_{\text{m}} = B_{\text{eau}} \frac{2\pi}{\frac{v}{f}} s_{\text{m}} = \frac{2\pi B_{\text{eau}} f s_{\text{m}}}{v}$$

$$\Delta p = \frac{2\pi(2{,}2\,\text{GPa}) \times (500\,\text{Hz})(76\,\text{nm})}{1\,480\,\text{m/s}} = 0{,}35\,\text{kPa} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la variation de pression est correct.

E7 **Décortiquer le problème** Les paramètres de l'onde sont contenus dans la fonction d'onde donnée.

Connues	Inconnues
$\Delta p_{\text{m}} = 0{,}90\,\text{Pa}$	f
$k = 2{,}11\pi \ \text{rad/m}$	λ
$\omega = 700\pi \ \text{rad/s}$	v_{onde}
$\phi = \pi/4 \ \text{rad}$	s_{m}
$B = 142\,\text{kPa}$	

a. **Identifier les clés** Les clés sont les paramètres ω et k contenus dans la fonction d'onde.
Résoudre le problème La fréquence f est liée à ω par

$$\omega = 2\pi f \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{700\pi \text{ rad/s}}{2\pi} = 350\,\text{Hz} .$$

La longueur d'onde λ est liée à k par

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2{,}11\pi \text{ rad/m}} = 0{,}948\,\text{m}$$

$$f = 350\,\text{Hz} \qquad \text{et} \qquad \lambda = 0{,}948\,\text{m} . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation de la vitesse d'une onde progressive.
Résoudre le problème L'équation générale du module de la vitesse d'une onde progressive est

$$v = \lambda f .$$

f et λ étant connues, on a

$$v = (0{,}948\,\text{m}) \times (350\,\text{Hz}) = 332\,\text{m/s} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du module de la vitesse est correct, très semblable à la vitesse du son dans l'air (même si le contexte n'est pas précisé).

c. **Identifier la clé** La clé est le lien entre l'amplitude de pression et l'amplitude de déplacement.
Résoudre le problème Les amplitudes de pression et de déplacement sont liées par

$$\Delta p_\text{m} = Bks_\text{m} .$$

L'amplitude de pression étant contenue dans la fonction d'onde, on peut isoler s_m et trouver sa valeur :

$$s_\text{m} = \frac{\Delta p_\text{m}}{Bk} = \frac{0{,}90\,\text{Pa}}{(142 \times 10^3\,\text{Pa}) \times (2{,}11\pi \text{ rad/m})} = 0{,}96\,\mu\text{m} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'amplitude est correct.

P8 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$v_\text{son} = 338\,\text{m/s}$	λ
$s_\text{m} = 3{,}6\,\mu\text{m}$	Δp_m
$f = 1{,}30\,\text{kHz}$	Fonction d'onde de déplacement
$B = 142\,\text{kPa}$	
$s_{\text{t}=0,\text{x}=0} = 2{,}5\,\mu\text{m}$	Fonction d'onde de pression

a. **Identifier les clés** Les clés sont la vitesse et la fréquence de l'onde.
Résoudre le problème La longueur d'onde est liée au module de la vitesse de propagation et à la fréquence d'excitation par

$$v = \lambda f \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{v}{f} = \frac{338\,\text{m/s}}{1\,300\,\text{Hz}} = 0{,}260\,\text{m} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde est correct.

b. **Identifier la clé** La clé est la détermination de k et de ω à partir des paramètres connus.
Résoudre le problème On détermine k et ω à partir de λ et de f :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}260\,\text{m}} = 7{,}69\pi \text{ rad/m}$$
$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 1{,}30\,\text{kHz} = 2\,600\pi \text{ rad/s} .$$

Chapitre 3, problème 8.

On doit aussi déterminer la constante de phase ϕ à partir des données sur la position connue durant le mouvement, avec $x = 0$ et $t = 0$:

$$s(x;t) = s_{\mathrm{m}} \sin(kx - \omega t + \phi) \qquad \Rightarrow \qquad \phi = \arcsin\left(\frac{s(x;t)}{s_{\mathrm{m}}}\right) - kx + \omega t \ .$$

sinus >0
1 er 2 quad

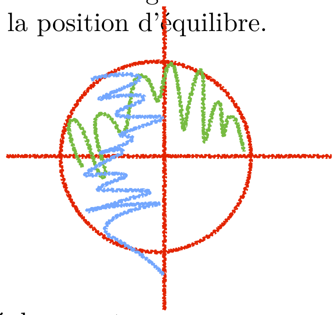
$$\phi = \arcsin\left(\frac{2{,}5\ \mu\mathrm{m}}{3{,}6\ \mu\mathrm{m}}\right) - (7{,}69\pi\ \mathrm{rad/m}) \times 0 + (2\ 600\pi\ \mathrm{rad/s}) \times 0 = 0{,}77\,\mathrm{rad} \ .$$

Si s>0 et qu'on retourne vers 0, alors vx<0.

Cette solution est la première que donne une calculatrice, mais une fonction arcsin admet deux solutions et celle-ci n'est pas la bonne, car elle correspondrait à une vitesse s'éloignant de la position d'équilibre, alors que l'énoncé mentionne un déplacement vers la position d'équilibre.

cosinus <0
2 et 3 quad

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = +\omega s_{\mathrm{m}} \cos(k \times 0 - \omega \times 0 + \phi)$$
$$= +\omega \cos 0{,}77\ \mathrm{rad} < 0$$



La seconde solution d'une fonction arcsin est donnée par

$$\theta_2 = \pi - \theta_1 = \pi - 0{,}77\,\mathrm{rad} = 2{,}4\,\mathrm{rad} \ .$$

On connaît maintenant tous les paramètres de la fonction d'onde de déplacement :

$$s(x;t) = s_{\mathrm{m}} \sin(kx - \omega t + \phi) \ .$$

Avec des distances en mètres et des temps en secondes, on a finalement

$$s(x;t) = (3{,}6\ \mu\mathrm{m}) \times \sin(7{,}69\pi x - 2{,}60 \times 10^3 \times \pi t + 2{,}4) \ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. **Identifier la clé** La clé est le lien entre l'amplitude de pression et l'amplitude de déplacement.

Résoudre le problème L'équation de l'onde de pression d'une onde sonore est

$$\Delta p = -Bks_{\mathrm{m}} \cos(kx - \omega t + \phi) \ .$$

L'amplitude de pression est donc

$$\Delta p = Bks_{\mathrm{m}} \ .$$

Dans le cas présent, on trouve

$$\Delta p = (142 \times 10^3\,\mathrm{Pa}) \times (7{,}69\pi\ \mathrm{rad/m}) \times (3{,}6 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}) = 12\,\mathrm{Pa} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'amplitude de pression est correct.

d. **Résoudre le problème** La forme générale de la fonction d'onde de pression est

$$\Delta p(x;t) = -\Delta p_{\mathrm{m}} \cos(kx - \omega t + \phi) \ .$$

Les paramètres étant tous connus, avec des distances en mètres et des temps en secondes, on peut écrire

$$\Delta p(x;t) = -(12\,\mathrm{Pa}) \times \cos(7{,}69\pi x - 2{,}60 \times 10^3 \times \pi t + 2{,}4) \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Q9 **Identifier la clé** La clé est l'équation 3.10 liant la vitesse du son aux propriétés du gaz dans lequel il se propage.

Résoudre le problème Un son plus aigu correspond à une fréquence plus élevée. Les cordes vocales sont en réalité des membranes, mais elles obéissent à des modes de vibration de la même manière que des cordes. Les vibrations qui produisent un son se font principalement dans le mode naturel des cordes vocales, c'est-à-dire le monde fondamental. La longueur d'onde est donc la même qu'avec l'air. Une fréquence plus élevée, si les cordes vocales sont immergées dans l'hélium plutôt que dans

l'air, doit correspondre à un module de vitesse du son plus élevé dans l'hélium, ce qui doit être démontré.
L'équation 3.10 donnant le module de la vitesse du son dans un gaz est

$$v = \frac{\gamma RT}{M} \ .$$

Pour une même température (celle du corps pour un gaz expiré), seule la masse molaire a une influence, puisque R est une constante et que l'hélium est un gaz diatomique, tout comme la plupart des molécules dans l'air (donc $\gamma_{\text{He}} = \gamma_{\text{air}}$). La masse molaire de l'hélium (He_2) étant plus faible que n'importe quel gaz de l'air, le module de la vitesse est donc nécessairement plus élevé, la variable M étant au dénominateur de l'expression du module de la vitesse :

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \ .$$

E10 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$\Delta V = +25\ \%$	v'/v
$\Delta B = +15\ \%$	

Identifier la clé La clé est l'équation 3.6 liant le module de la vitesse du son à la densité et au module de compressibilité.
Résoudre le problème Le module de la vitesse du son dans un gaz peut être donné par

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}, \qquad \text{avec} \qquad \rho = \frac{m}{V}$$
$$= \sqrt{\frac{B}{m/V}} = \sqrt{\frac{BV}{m}} \ .$$

Pour comparer deux situations où B et V ont varié, on peut écrire

$$v = \sqrt{\frac{BV}{m}} \qquad \text{et} \qquad v' = \sqrt{\frac{B'V'}{m}} \ ,$$

d'où

$$\frac{v'}{v} = \frac{\sqrt{\frac{B'V'}{m}}}{\sqrt{\frac{BV}{m}}} = \sqrt{\frac{B'V'}{BV}} \ .$$

L'énoncé indique que le module de compressibilité a augmenté de 15 %, donc $B' = 1{,}15B$, et que le volume a augmenté de 25 %, $V' = 1{,}25V$. On trouve donc

$$\frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{1{,}15B \times 1{,}25V}{BV}} = \sqrt{1{,}15 \times 1{,}25} = 1{,}20 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'augmentation du module de la vitesse est plausible.

E11 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$p_1 = 100\,\text{kPa}$	B
$p_2 = 120\,\text{kPa}$	ρ
$\Delta V = -79{,}1\ \%$	
$v_{\text{son}} = 440\,\text{m/s}$	

a. Identifier la clé La clé est l'équation 3.3 liant les variations de pression et de volume au module de compressibilité.

Résoudre le problème La variation de pression peut être exprimée par

$$\Delta p = -B\frac{\Delta V}{V} \ .$$

Dans le cas présent, le rapport $\Delta V/V$ est

$$\Delta V/V = \frac{0{,}791 - 1}{1} = -0{,}209 \ .$$

La variation de pression étant de $20\,\mathrm{kPa}$, on peut maintenant calculer B :

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} = -\frac{20\,\mathrm{kPa}}{-0{,}209} = 95{,}7\,\mathrm{kPa} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du module de compressibilité est correct pour un gaz.

b. Identifier la clé La clé est l'équation 3.6 liant le module de la vitesse du son à la densité et au module de compressibilité.

Résoudre le problème La vitesse du son dans un gaz peut être donnée par

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \ .$$

Il n'y a qu'à isoler ρ pour connaître la masse volumique :

$$\rho = \frac{B}{v^2} = \frac{95{,}7\,\mathrm{kPa}}{(440\,\mathrm{m/s})^2} = 0{,}494\,\mathrm{kg/m^3} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la masse volumique est correct pour un gaz.

E12 Décortiquer le problème La membrane d'un haut-parleur oscille selon l'équation

$$s(t) = 1{,}35\,\mathrm{mm} \times \sin(320\pi t + \pi) \ .$$

Connues	Inconnues
$s_\mathrm{m} = 1{,}35\,\mathrm{mm}$	f
$\omega = 320\pi$	v_son
$\phi = \pi$	λ
$T_\mathrm{air} = 26{,}0\,^\circ\mathrm{C}$	Δp_m
$B = 141{,}9\,\mathrm{kPa}$	Fonction d'onde $s(x;t)$

a. Identifier la clé La clé est le lien entre la fréquence et la fréquence angulaire.

Résoudre le problème La définition de la fréquence angulaire permet de calculer la fréquence f :

$$\omega = 2\pi f \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{320\pi}{2\pi} = 160\,\mathrm{Hz} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la fréquence est correct.

b. Identifier la clé La clé est l'équation donnant le module de la vitesse du son dans l'air en fonction de la température.

Résoudre le problème Le module de la vitesse du son dans l'air, en fonction de la température en kelvins, est donné par

$$v_\mathrm{air} = 20{,}05\sqrt{T} = 20{,}05\sqrt{26{,}0 + 273{,}15} = 347\,\mathrm{m/s} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse est correct, légèrement supérieur au module de la vitesse donnée généralement pour $20\,^\circ\mathrm{C}$.

c. **Identifier la clé** La clé est l'équation générale du module de la vitesse d'une onde progressive.
Résoudre le problème Le module de la vitesse du son est lié à la fréquence et à la longueur d'onde par

$$v = \lambda f \qquad \Rightarrow \qquad \lambda \frac{v}{f} = \frac{347\,\mathrm{m/s}}{160\,\mathrm{Hz}} = 2{,}17\,\mathrm{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde est correct.

d. **Identifier la clé** La clé est la relation entre les amplitudes de déplacement et de pression.
Résoudre le problème L'amplitude de pression est liée à l'amplitude de déplacement par

$$\Delta p_{\mathrm{m}} = Bks_{\mathrm{m}}\ .$$

Le nombre d'onde est lié à la longueur d'onde :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}\ .$$

Ainsi,

$$\Delta p_{\mathrm{m}} = B\frac{2\pi}{\lambda}s_{\mathrm{m}} = \frac{2B\pi s_{\mathrm{m}}}{\lambda} = \frac{2 \times (141{,}9\,\mathrm{kPa}) \times \pi \times (1{,}35\,\mathrm{mm})}{2{,}17\,\mathrm{m}} = 555\,\mathrm{Pa}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'amplitude de pression est correct.

e. **Identifier la clé** La clé est le fait que devant le haut-parleur, les molécules oscillent avec la même amplitude que la membrane.
Résoudre le problème L'équation générale du déplacement des molécules est

$$s(x;t) = s_{\mathrm{m}} \sin(kx - \omega t + \phi)\ .$$

La fréquence angulaire ω est donnée par l'équation fournie dans l'énoncé. Elle est la même puisque la fréquence des ondes émises par la surface du haut-parleur est celle qui génère les ondes progressives. Cependant, la constante de phase ϕ n'est pas nécessairement la même, car le terme ωt lui-même n'a pas le même rôle dans l'équation d'une onde progressive. On peut le vérifier à partir des conditions aux limites pour la fonction d'onde dans l'air.
Sachant que les molécules d'air tout juste devant le haut-parleur (en contact avec la surface) oscillent de la même manière, on compare l'équation de l'oscillation du haut-parleur et la fonction d'onde des molécules à $x = 0$.
Pour le haut-parleur, on a

$$s(t) = 1{,}35\,\mathrm{mm} \times \sin(\omega t + \pi)\ . \qquad \text{(i)}$$

Les molécules d'air dont la position d'équilibre est $x = 0$ doivent avoir la même position que la surface du haut-parleur. En supposant que l'onde se déplace dans la direction positive de l'axe des x, on obtient

$$s(x,t) = 1{,}35\,\mathrm{mm} \times \sin(k \times 0 - \omega t + \phi) = 1{,}35\,\mathrm{mm} \times \sin(-\omega t + \phi)\ . \qquad \text{(ii)}$$

Les positions étant définies par les équations (i) et (ii), on peut écrire

$$s(t) = s(x,t)$$
$$1{,}35\,\mathrm{mm} \times \sin(\omega t + \pi) = 1{,}35\,\mathrm{mm} \times \sin(-\omega t + \phi)$$
$$\sin(\omega t + \pi) = \sin(-\omega t + \phi)$$

La seule valeur de ϕ qui assure cette égalité à tous les instants est 0. En effet, $\sin(\omega t + \pi) = \sin(-\omega t)$. La constante de phase est donc nulle (ou absente) dans l'équation recherchée. Finalement, le nombre d'onde k peut être calculé à partir de l'expression écrite en **d.** :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2{,}17\,\mathrm{m}} = 2{,}90\,\mathrm{rad/m}\ .$$

La fonction d'onde du déplacement des molécules devant le haut-parleur est donc

$$s(x;t) = (1{,}35\,\mathrm{mm}) \sin\Big((2{,}90\,\mathrm{rad/m})x - (320\pi\ \mathrm{rad/s})t\Big)\ . \qquad \text{(réponse)}$$

E13 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$s_\mathrm{m} = 0{,}644\,\mathrm{mm}$	Fonction d'onde $s(x;t)$
$f = 60{,}5\,\mathrm{Hz}$	
$T_\mathrm{air} = 25{,}0\,°\mathrm{C}$	

Identifier la clé La clé est la détermination de k et de ω à partir de la fréquence et de la température fournies.

Résoudre le problème On détermine ω rapidement à partir de la fréquence donnée :

$$\omega = 2\pi f \qquad \Rightarrow \qquad \omega = 2\pi \times 60{,}5\,\mathrm{Hz} = 380\,\mathrm{rad/s}\ .$$

On peut déterminer le nombre d'onde k à partir de la fréquence angulaire et du module de la vitesse. Le module de la vitesse doit d'abord être évalué à partir de la température de l'air :

$$v = \frac{\omega}{k} \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{\omega}{v}\ , \qquad \text{où} \qquad v = 20{,}05\sqrt{T_k}$$

$$k = \frac{\omega}{20{,}05\sqrt{T_k}} = \frac{380\,\mathrm{rad/s}}{20{,}05\sqrt{25{,}0 + 273{,}15}} = 1{,}10\,\mathrm{rad/m}\ .$$

Ainsi,

$$s(x;t) = s_\mathrm{m}\sin(kx - \omega t + 0) = 0{,}644\,\mathrm{mm}\sin(1{,}10x - 380t)\ . \qquad \text{(réponse)}$$

E14 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$T = 20{,}0\,°\mathrm{C}$	T'
$\Delta v_\mathrm{son} = +5\ \%$	

Identifier la clé La clé est la relation entre le module de la vitesse du son dans l'air et sa température en kelvins.

Résoudre le problème Le module de la vitesse du son dans l'air est donné par

$$v = 20{,}05\sqrt{T} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{v^2}{402{,}0}\ .$$

Après que l'air s'est réchauffé, on a

$$T' = \frac{v'^2}{402{,}0}\ .$$

Le module de la vitesse ayant augmenté de 5 % ($v' = 1{,}05v$), on peut écrire

$$T' = \frac{(1{,}05v)^2}{402{,}0} = \frac{(1{,}05 \times 20{,}05\sqrt{T})^2}{402{,}0} = 1{,}05^2 T = 1{,}05^2 \times (20{,}0 + 273{,}15) = 323{,}2\,\mathrm{K}\ .$$

Quand on convertit cette température en degrés Celsius, on obtient

$$T_{°\mathrm{C}} = T_\mathrm{K} - 273{,}15 = 323{,}2\,\mathrm{K} - 273{,}15\,\mathrm{K} = 50{,}0\,°\mathrm{C}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la nouvelle température est correct.

E15 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$T = 30\,°\mathrm{C}$	d_foudre
$\Delta t = 5{,}45\,\mathrm{s}$	

Identifier les clés La première clé est le fait que la lumière voyage extrêmement vite, et on peut négliger le temps de parcours de la lumière pour des distances de l'ordre de quelques kilomètres. La deuxième clé est la relation cinématique entre la distance, la vitesse et le temps.
Résoudre le problème En cinématique, la définition de la vitesse est

$$v = \frac{d}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad d = v\Delta t \ .$$

Le module de la vitesse du son dans l'air, selon la température en vigueur, est

$$v = 20{,}05\sqrt{T} \ .$$

On peut donc calculer la distance :

$$d = v\Delta t = 20{,}05\sqrt{T} \times \Delta t = 20{,}05\sqrt{30 + 273{,}15} \times 5{,}45\,\mathrm{s} = 1{,}90\,\mathrm{km} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance est correct. On peut confirmer que le temps de parcours de la lumière sur cette distance est négligeable. On trouverait 6,3 µs.

E16 **Décortiquer le problème**

Connue	Inconnue
$T = -143\,°\mathrm{C}$	v_{son}

Identifier la clé La clé est le fait que le dioxyde de carbone est une molécule polyatomique.
Résoudre le problème L'équation 3.10 indique que le module de la vitesse du son dans un gaz est

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \ .$$

Pour une molécule polyatomique, $\gamma = 4/3$ (selon le tableau 3.3). La masse molaire du dioxyde de carbone, dont la molécule est composée d'un atome de carbone lié à deux atomes d'oxygène, est

$$M_{\mathrm{CO_2}} = M_{\mathrm{C}} + 2M_{\mathrm{O}} = 12{,}011\,\mathrm{g/mol} + 2 \times 15{,}999\,\mathrm{g/mol} = 44{,}009\,\mathrm{g/mol} \ .$$

On peut alors calculer le module de la vitesse du son :

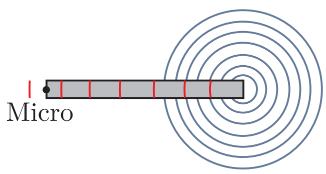
$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{\frac{4}{3} \times (8{,}314\,\mathrm{J/mol \cdot K}) \times (-143 + 273{,}15)}{44{,}009 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg/mol}}} = 181\,\mathrm{m/s} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du module de la vitesse est correct.

P17 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$L = 8{,}90\,\mathrm{m}$	v_{tige}
$\Delta t = 24{,}5\,\mathrm{ms}$	
$v_{\mathrm{air}} = 343\,\mathrm{m/s}$	

Identifier la clé La clé est le traitement par la cinématique des deux temps de parcours du son.
Illustrer la situation La figure ci-contre illustre la tige métallique frappée à son extrémité droite. On voit que les fronts d'onde sont plus espacés dans la tige que dans l'air, car le son y voyage plus rapidement.



Résoudre le problème La vitesse est définie par

$$v = \frac{L}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{L}{v} \ .$$

L'intervalle de temps mesuré est la différence des temps de parcours du son dans les deux milieux.

De plus, le temps de parcours dans l'air est le plus grand, car le son se propage plus rapidement dans tout métal que dans l'air. Ainsi,

$$\Delta t = t_{\text{air}} - t_{\text{tige}} = \frac{L}{v_{\text{air}}} - \frac{L}{v_{\text{tige}}} = L \times \left(\frac{1}{v_{\text{air}}} - \frac{1}{v_{\text{tige}}}\right) .$$

La vitesse du son dans la tige est la seule inconnue, donc

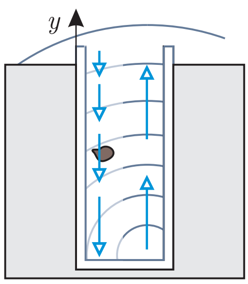
$$v_{\text{tige}} = \frac{1}{\frac{1}{v_{\text{air}}} - \frac{\Delta t}{L}} = \frac{1}{\frac{1}{343\,\text{m/s}} - \frac{0{,}024\,5\,\text{s}}{8{,}90\,\text{m}}} = 6{,}1\,\text{km/s} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse est correct pour un matériau comme le métal.

P18 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\Delta t_{\text{total}} = 1{,}99\,\text{s}$	h_{puits}
$T = 12{,}0\,°\text{C}$	

Identifier la clé La clé est le fait que le délai total comprend la chute accélérée du caillou ainsi que le retour du son à vitesse constante.



Illustrer la situation La figure ci-contre illustre le puits où le caillou tombe de plus en plus vite (illustré à gauche), ainsi que des fronts d'onde sonore qui remontent à vitesse constante (à droite).

Résoudre le problème Le temps total peut être séparé de la façon suivante :

$$\Delta t_{\text{total}} = t_{\text{chute}} + t_{\text{retour-son}} .$$

La durée de la chute est liée à la cinématique, et si on ne peut pas la calculer, on peut au moins en obtenir une expression liée à la profondeur h :

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at_x^2 .$$

Pour obtenir un temps positif, on note 0 la position initiale et $-h$ la position du fond du puits. La vitesse initiale étant nulle et $a_x = -g$, on trouve

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \qquad \Rightarrow \qquad t_{\text{chute}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} .$$

Le retour du son se fait à vitesse constante, la vitesse du son dans l'air. Le temps de parcours est donc

$$v_{\text{son}} = \frac{h}{t_{\text{retour-son}}} \qquad \Rightarrow \qquad t_{\text{retour-son}} = \frac{h}{v_{\text{son}}} .$$

De là, on peut exprimer le temps total en fonction de la seule inconnue h, qu'on peut isoler afin d'en trouver la valeur :

$$\Delta t_{\text{total}} = t_{\text{chute}} + t_{\text{retour-son}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v_{\text{son}}} = \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{h} + \frac{h}{v_{\text{son}}} .$$

On constate qu'on ne peut pas isoler directement la profondeur h. On obtient plutôt une équation du second degré de $\sqrt{h}$. On pose alors $x = \sqrt{h}$ et on écrit l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$:

$$\Delta t_{\text{total}} = \sqrt{\frac{2}{g}}x + \frac{1}{v_{\text{son}}}x^2$$

$$\left(\frac{1}{v_{\text{son}}}\right)x^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{g}}\right)x - \Delta t_{\text{total}} = 0$$

$$\left(\frac{1}{\cancel{343}\,\text{m/s}}\right)x^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{9{,}81\,\text{m/s}^2}}\right)x - 1{,}99\,\text{s} = 0$$

339

Le signe de x n'influe pas sur le signe de h puisqu'on l'élève au carré, c'est plutôt que tel que posé, x est positif.

-157,2

Les deux solutions admises par cette équation sont $x_1 = 4{,}29$ et $x_2 = \cancel{-159{,}2}$. ~~Puisqu'on cherche une hauteur positive, on conserve la solution positive.~~

Cependant, x n'est pas la profondeur du puits, mais sa racine carrée, car on a posé $x = \sqrt{h}$. Donc la hauteur sera

$$h = x^2 = (4{,}29)^2 = 18{,}4\,\text{m} \,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la profondeur du puits est tout à fait correct.

Q19 **Identifier la clé** La clé est le fait que les directions des vitesses minimale et maximale définissent des axes perpendiculaires dont l'origine est le point d'impact.

Résoudre le problème À chaque instant, la distance parcourue par les ondes dans la direction de la vitesse la plus grande sera d'autant plus grande que la vitesse est plus grande dans cette direction. Dans toutes les directions intermédiaires, on aura des vitesses intermédiaires entre les vitesses minimale et maximale. Les axes des vitesses extrêmes s'apparentent donc aux axes d'une ellipse, ellipse qui représentera à chaque instant la forme des ondes.

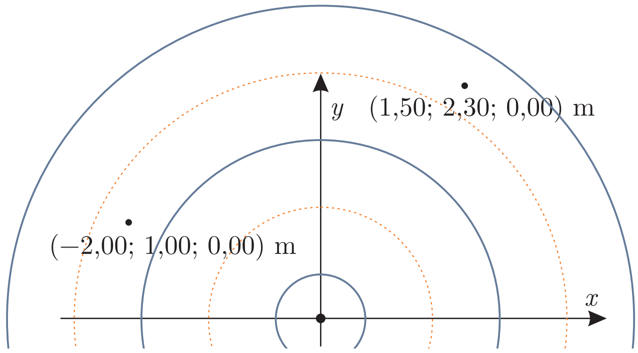
Les ondes auraient une forme elliptique, le petit axe des ellipses étant parallèle à l'axe des y. (réponse)

E20 **Décortiquer le problème** L'onde atteignant les points $(1{,}50; 2{,}30; 0{,}00)$ m et $(-2{,}00; 1{,}00; 0{,}00)$ m n'est pas à la même phase de son cycle, pour un instant donné. On cherche la différence de phase $\Delta\phi$ entre ces deux points.

Connues	Inconnue
$f = 300\,\text{Hz}$	$\Delta\phi$
$\vec{\mathbf{r}}_1 = (1{,}50\vec{\imath} + 2{,}30\vec{\jmath} + 0{,}00\vec{k})$ m	
$\vec{\mathbf{r}}_2 = (-2{,}00\vec{\imath} + 1{,}00\vec{\jmath} + 0{,}00\vec{k})$ m	

Identifier la clé La clé est le fait que seule la distance entre la source et chacun des deux points suffit à calculer la différence de phase des ondes atteignant ces points.

Illustrer la situation La figure ci-contre illustre les deux points analysés ainsi que quelques fronts d'onde centrés sur la source et qui montrent que l'onde n'arrive pas en même temps aux deux points.



Résoudre le problème La différence de phase entre les deux ondes est liée à la différence entre les distances parcourues par les ondes pour y parvenir, selon la relation

$$\frac{\Delta\Phi}{2\pi} = \frac{\Delta r}{\lambda} \; .$$

La longueur d'onde doit être obtenue à partir du module de la vitesse du son dans l'air et de la fréquence donnée :

$$v = \lambda f \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{v_{\text{son}}}{f} .$$

Si on calcule d'abord la distance depuis la source jusqu'aux deux points étudiés, on pourra connaître Δr puis isoler et déterminer $\Delta\Phi$:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{1{,}50^2 + 2{,}30^2 + 0^2} = \sqrt{7{,}54}\ \text{m} \\ r_2 &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = \sqrt{(-2{,}00)^2 + 1{,}00^2 + 0^2} = \sqrt{5}\ \text{m} \\ \Delta r &= |r_2 - r_1| \; . \end{aligned}$$

Finalement

$$\Delta\Phi = 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} = 2\pi \frac{|r_2 - r_1|}{\frac{v_{\text{son}}}{f}} = 2\pi \frac{|r_2 - r_1| \times f}{v_{\text{son}}}$$

$$\Delta\Phi = 2\pi \frac{|\sqrt{5}\ \text{m} - \sqrt{7{,}54}\ \text{m}| \times 300\ \text{Hz}}{343\ \text{m/s}} = 2{,}8\ \text{rad} \; . \qquad \text{(réponse)}$$

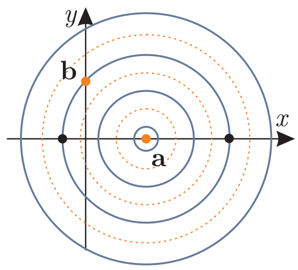
Valider la réponse L'ordre de grandeur ne peut pas réellement être évalué ici. La différence de phase aurait pu être supérieure à 2π si la différence entre les distances impliquées avait été supérieure à la longueur d'onde. Cela aurait indiqué que plusieurs cycles de distance diffèrent entre les deux points.

E21 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$x_1 = -1{,}20\ \text{m}$	$\vec{\mathbf{r}}_S$
$x_2 = 7{,}40\ \text{m}$	y_3

a. Identifier la clé La clé est le fait que si deux points reçoivent le même front d'onde en même temps, c'est qu'ils sont tous deux à égale distance de la source.

Illustrer la situation La figure ci-contre illustre les deux points qui reçoivent le même front d'onde en même temps ainsi que la source qui se trouve nécessairement à égale distance des deux points.



Résoudre le problème Les points x_1 et x_2 étant à égale distance de la source et la source étant elle aussi située sur l'axe des x, elle se trouve nécessairement précisément entre les deux points. La distance entre la source et chacun des points est

$$d = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{7{,}40\ \text{m} - (-1{,}20\ \text{m})}{2} = 4{,}30\ \text{m} \; .$$

La position de la source, depuis la position x_1, est donc

$$x_S = x_1 - d = 7{,}40\,\text{m} - 4{,}30\,\text{m} = 3{,}10\,\text{m}\ .$$

Cette position exprimée vectoriellement donne

$$\vec{\mathbf{r}}_S = 3{,}10\,\text{m}\vec{\boldsymbol{\imath}}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que le point sur l'axe des y qui reçoit les fronts d'onde en même temps que les points x_1 et x_2 est situé à la même distance de la source.

Résoudre le problème Deux points de l'axe des y se trouvent à la même distance de la source que les points x_1 et x_2, soit $d = 4{,}30\,\text{m}$. Par le théorème de Pythagore, on peut calculer l'élévation au-dessus (ou en dessous) de l'axe des x :

$$y_3 = \sqrt{(4{,}30\,\text{m})^2 - (3{,}10\,\text{m})^2} = \pm 2{,}98\,\text{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

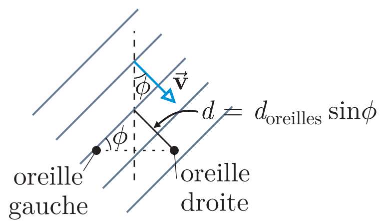
Valider la réponse L'ordre de grandeur de la position en y est correct, comparativement aux distances fournies pour les points x_1 et x_2.

P22 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$d_{\text{oreilles}} = 17{,}0\,\text{cm}$	ϕ
$\Delta t = 0{,}38\,\text{ms}$	

Identifier la clé La clé est le fait que la distance à considérer est la composante de la distance entre les oreilles qui est parallèle à la direction de propagation du son.

Illustrer la situation La figure ci-contre illustre les fronts d'onde atteignant les deux oreilles ainsi que la distance supplémentaire que les fronts d'onde doivent parcourir pour atteindre l'oreille la plus éloignée de la source.



Résoudre le problème La composante de distance entre les oreilles qui est parallèle à la vitesse de l'onde est définie par

$$d = d_{\text{oreilles}} \times \sin\phi\ .$$

La même distance d est liée au module de la vitesse du son dans l'air et au délai observé par le cerveau :

$$v = \frac{d}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad d = v_{\text{son}}\Delta t\ .$$

En posant égales ces deux expressions de la distance, on peut trouver une expression de l'angle ϕ :

$$d_{\text{oreilles}} \times \sin\phi = v_{\text{son}}\Delta t$$

$$\phi = \arcsin\left(\frac{v_{\text{son}} \times \Delta t}{d_{\text{oreilles}}}\right) = \arcsin\left(\frac{343\,\text{m/s} \times (0{,}38 \times 10^{-3}\,\text{s})}{0{,}0170\,\text{m}}\right) = 50°\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'angle est correct, compris entre 0 et 90°.

Q23 **Identifier la clé** Pour chaque cas, la clé est la détermination du milieu où l'onde se propage.

a. **Résoudre le problème** Les ondes dans l'eau se déplacent sur la surface. L'énergie se répartit donc sur la circonférence des ondes et varie proportionnellement à l'inverse du rayon, selon la relation suivante :

$$I = \frac{P}{2\pi r} = \frac{P}{2\pi}\frac{1}{r}\ .$$

Une diminution selon $1/r$ (réponse)

b. Résoudre le problème Sur une corde, l'énergie est confinée à la dimension le long de laquelle s'étend la corde. Il n'y a donc aucun étalement de l'intensité, et sans perte ou amortissement l'intensité ne variera pas.

Aucune diminution (réponse)

c. Résoudre le problème Le milieu portant l'énergie est l'air, et l'onde s'étend dans les trois dimensions. L'intensité est distribuée sur la surface d'une sphère centrée sur la source. L'intensité est donc proportionnelle à l'inverse de la surface en r^2 :

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{P}{4\pi}\frac{1}{r^2} \; .$$

Une diminution selon $1/r^2$ (réponse)

d. Résoudre le problème La lumière émise par le Soleil s'étend dans les trois dimensions de l'espace autour du Soleil et l'intensité se distribue alors sur une sphère centrée sur le Soleil. On a donc, comme en **c.**, une diminution en $1/r^2$:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{P}{4\pi}\frac{1}{r^2} \; .$$

Une diminution selon $1/r^2$ (réponse)

e. Résoudre le problème Le milieu qui porte l'onde est linéaire et aucun étalement de l'énergie ne se produit, comme pour une corde. Il n'y a donc aucune diminution de l'intensité.

Aucune diminution (réponse)

Q24 Identifier la clé La clé est l'équation du niveau sonore.

Résoudre le problème Le niveau de 0 dB a été déterminé arbitrairement à partir du seuil d'audition de l'oreille humaine. Il existe cependant des niveaux inférieurs d'intensité correspondant à des ondes sonores. L'intensité correspondant à 0 dB est $I_0 = 1 \times 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$. Toute valeur inférieure à cette quantité mais toujours supérieure à 0 est un son inaudible dont le niveau sonore peut être calculé. À titre d'exemple, on calcule le niveau sonore de l'intensité $1 \times 10^{-13}\,\mathrm{W/m^2}$:

$$\beta = 10\,\mathrm{dB}\log\frac{I}{I_0} = 10\,\mathrm{dB}\log\frac{1\times10^{-13}\,\mathrm{W/m^2}}{1\times10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}} = -10\,\mathrm{dB} \; . \qquad \text{(réponse)}$$

E25 Décortiquer le problème

Connue	Inconnue
$s_{\mathrm{m,d}} = 12{,}4\,\mu\mathrm{m}$	$s_{\mathrm{m,2d}}$

Identifier la clé La clé est le fait que l'intensité varie selon le carré de l'amplitude de déplacement des molécules d'air.

Résoudre le problème L'intensité est liée à la distance parcourue par

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

et liée à l'amplitude de déplacement par :

$$I = \frac{1}{2}\rho v \omega^2 s_{\mathrm{m}}^2 \; .$$

Ainsi, le lien entre l'éloignement de la source et l'amplitude est

$$\frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1}{2}\rho v\omega^2 s_{\mathrm{m}}^2 \qquad \Rightarrow \qquad s_{\mathrm{m}} r = \sqrt{\frac{P}{2\pi\rho v\omega^2}} \; .$$

ρ, v et ω sont des propriétés du milieu et de l'onde qui ne changent pas, alors l'amplitude varie selon l'inverse de la distance à la source. Pour un éloignement de l'onde entre des instants t_1 et t_2, on a

$$s_{\mathrm{m},1} r_1 = \sqrt{\frac{P}{2\pi\rho v\omega^2}} \qquad \text{et} \qquad s_{\mathrm{m},2} r_2 = \sqrt{\frac{P}{2\pi\rho v\omega^2}}$$

$$s_{\mathrm{m},1} r_1 = s_{\mathrm{m},2} r_2 \qquad \Rightarrow \qquad s_{\mathrm{m},2} = s_{\mathrm{m},1}\frac{r_1}{r_2}\ .$$

Puisque $r_2 = 2r_1$, on trouve

$$s_{\mathrm{m},2} = s_{\mathrm{m},1}\frac{r_1}{2r_1} = \frac{s_{\mathrm{m},1}}{2} = \frac{12{,}4\,\mu\mathrm{m}}{2} = 6{,}20\,\mu\mathrm{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Le fait que l'amplitude diminue avec l'éloignement est cohérent.

E26 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$A = 56{,}0\,\mathrm{mm}^2$	I_r
$r = 5{,}00\,\mathrm{m}$	β
$P = 75{,}0\,\mathrm{W}$	P_{tympan}

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation de l'intensité sonore en fonction de la puissance émise et de la distance depuis la source.

Résoudre le problème L'intensité sonore à une distance r est liée à la puissance par

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{75{,}0\,\mathrm{W}}{4\pi(5{,}00\,\mathrm{m})^2} = 0{,}239\,\mathrm{W/m^2}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur est correct pour une intensité sonore.

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation du niveau sonore en décibels.

Résoudre le problème Le niveau sonore est donné par

$$\beta = 10\,\mathrm{dB}\log\frac{I}{I_0} = 10\,\mathrm{dB}\log\frac{0{,}239\,\mathrm{W/m^2}}{1\times10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}} = 114\,\mathrm{dB}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Il s'agit d'un son très fort, mais compris dans le domaine des niveaux sonores possibles.

c. **Identifier la clé** La clé est la surface du tympan qui reçoit l'intensité calculée en **a.**

Résoudre le problème La puissance totale reçue par une surface est donnée par

$$P = IA = 0{,}239\,\mathrm{W/m^2}\times 56{,}0\,\mathrm{mm^2}\times\left(\frac{1\,\mathrm{m}}{1\,000\,\mathrm{mm}}\right)^2 = 13{,}4\,\mu\mathrm{W}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la puissance sur le tympan est le bon, alors qu'une très faible puissance suffit pour faire vibrer le tympan.

E27 **Identifier la clé** La clé est l'expression du niveau sonore pour deux cas où r varie d'un facteur de 2.

Résoudre le problème Le niveau sonore est donné par

$$\beta = 10\,\mathrm{dB}\log\frac{I}{I_0}\ .$$

Si on exprime le niveau sonore pour deux cas tels que $r_2 = 2r_1$, on a

$$\beta_1 = 10\,\mathrm{dB}\log\frac{I_1}{I_0} \qquad \text{et} \qquad \beta_2 = 10\,\mathrm{dB}\log\frac{I_2}{I_0}\ .$$

On exprime l'intensité en fonction de la distance à la source :

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \ .$$

Les expressions des niveaux sonores deviennent

$$\beta_1 = 10\,\text{dB}\log\frac{\frac{P}{4\pi r_1^2}}{I_0} \qquad \text{et} \qquad \beta_2 = 10\,\text{dB}\log\frac{\frac{P}{4\pi r_2^2}}{I_0}$$

$$\beta_1 = 10\,\text{dB}\log\frac{P}{4\pi r_1^2 I_0} \qquad \text{et} \qquad \beta_2 = 10\,\text{dB}\log\frac{P}{4\pi r_2^2 I_0} \ .$$

Afin de déterminer la différence de niveau sonore pour les deux points, le niveau β_1 étant plus élevé (car plus près de la source), on écrit

$$\beta_1 - \beta_2 = 10\,\text{dB}\log\frac{P}{4\pi r_1^2 I_0} - 10\,\text{dB}\log\frac{P}{4\pi r_2^2 I_0} \ .$$

Les propriétés des logarithmes permettent de simplifier ainsi :

$$\beta_1 - \beta_2 = 10\,\text{dB}\left(\log\frac{P}{4\pi r_1^2 I_0} - \log\frac{P}{4\pi r_2^2 I_0}\right) = 10\,\text{dB}\left(\log\frac{\frac{P}{4\pi r_1^2 I_0}}{\frac{P}{4\pi r_2^2 I_0}}\right) = 10\,\text{dB}\left(\log\frac{r_2^2}{r_1^2}\right) \ .$$

Avec $r_2 = 2r_1$, on trouve

$$\beta_1 - \beta_2 = 10\,\text{dB}\left(\log\frac{(2r_1)^2}{r_1^2}\right) = 10\,\text{dB}\log 4 = 6{,}02\,\text{dB} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

E28 Décortiquer le problème

Connue	Inconnues
$\Delta\beta = -23\,\text{dB}$	I_p/I
	$\Delta p_\text{pm}/\Delta p_\text{m}$

a. Identifier la clé La clé est l'expression de l'intensité sonore en fonction du niveau en décibels.

Résoudre le problème Le niveau sonore est donné par

$$\beta = 10\,\text{dB}\log\frac{I}{I_0} \ .$$

On peut alors avoir une expression de l'intensité en watts par mètre carré pour chacun des deux cas :

$$I_\text{p} = I_0 \times 10^{\left(\frac{\beta_p}{10}\right)} \qquad \text{et} \qquad I = I_0 \times 10^{\left(\frac{\beta}{10}\right)} \ .$$

Le rapport I_p/I est donc

$$I_\text{p}/I = \frac{I_0 \times 10^{\left(\frac{\beta_p}{10}\right)}}{I_0 \times 10^{\left(\frac{\beta}{10}\right)}} \ .$$

Les propriétés des exposants admettent la simplification suivante :

$$I_\text{p}/I = 10^{\left(\frac{\beta_p}{10}\right)-\left(\frac{\beta}{10}\right)} = 10^{\frac{\beta_p-\beta}{10}} \ .$$

On sait que les bouchons réduisent l'intensité de 23 dB. Par conséquent,

$$\Delta\beta = \beta_p - \beta = -23\,\text{dB} \ .$$

On peut alors calculer le rapport I_p/I :

$$I_\text{p}/I = 10^{\frac{-23\,\text{dB}}{10}} = 0{,}005\,0 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'intensité sonore est réduite d'un facteur de 200 ; c'est une réduction réaliste vu les propriétés logarithmiques de l'échelle du niveau sonore.

b. **Identifier la clé** La clé est la possibilité de lier le rapport des intensités sonores au rapport des intensités des amplitudes de pression à l'aide de l'équation 3.7, qui met en relation l'amplitude de pression et l'amplitude de déplacement.

Résoudre le problème L'intensité sonore est liée à l'amplitude de déplacement par

$$I = \frac{1}{2}\rho v\omega^2 s_{\mathrm{m}}^2 \ ,$$

l'amplitude de déplacement étant liée à l'amplitude de pression par

$$\Delta p_{\mathrm{m}} = v\rho\omega s_{\mathrm{m}} \qquad \Rightarrow \qquad s_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta p_{\mathrm{m}}}{v\rho\omega} \ .$$

On peut donc affirmer que

$$I = \frac{1}{2}\rho v\omega^2 s_{\mathrm{m}}^2 = \frac{1}{2}\rho v\omega^2\left(\frac{\Delta p_{\mathrm{m}}}{v\rho\omega}\right)^2 = \frac{\Delta p_{\mathrm{m}}^2}{2\rho v} \ .$$

Puisque ρ, v et ω sont des constantes pour le milieu et l'onde, le rapport I_{p}/I pourra mener à l'expression du rapport $\Delta p_{\mathrm{pm}}/\Delta p_{\mathrm{m}}$:

$$I_{\mathrm{p}}/I = \frac{\left(\frac{\Delta p_{\mathrm{pm}}^2}{2\rho v}\right)}{\left(\frac{\Delta p_{\mathrm{m}}^2}{2\rho v}\right)} = \left(\frac{\Delta p_{\mathrm{pm}}}{\Delta p_{\mathrm{m}}}\right)^2 \ .$$

Finalement,

$$\frac{\Delta p_{\mathrm{pm}}}{\Delta p_{\mathrm{m}}} = \sqrt{\frac{I_{\mathrm{p}}}{I}} = \sqrt{0{,}005\,0} = 0{,}071 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'amplitude de pression est réduite de façon importante, d'où la réduction de l'impact sonore sur le tympan.

E29 **Décortiquer le problème**

Connue	Inconnue
$\beta_n = 58{,}3\,\mathrm{dB}$	β_{3n}

Identifier la clé La clé est le fait qu'une foule trois fois plus nombreuse produit une intensité sonore trois fois plus grande, en watts par mètre carré.

Résoudre le problème On peut déterminer l'intensité sonore correspondant à un niveau de 58,3 dB à partir de l'équation du niveau sonore :

$$\beta = 10\,\mathrm{dB}\log\frac{I}{I_0} \qquad \Rightarrow \qquad I = I_0 \times 10^{\left(\frac{\beta}{10}\right)} \ .$$

Sans calculer cette intensité, on peut étudier le cas où I est triplé pour trouver le niveau modifié β', en considérant $I' = 3I$:

$$\beta' = 10\,\mathrm{dB}\log\frac{I'}{I_0} = 10\,\mathrm{dB}\log\frac{3I}{I_0} = 10\,\mathrm{dB}\log\left(\frac{3(I_0 \times 10^{\left(\frac{\beta}{10}\right)})}{I_0}\right) \ .$$

En simplifiant, on obtient

$$\beta' = 10\,\mathrm{dB}\log(3 \times 10^{\left(\frac{\beta}{10}\right)}) = 10\,\mathrm{dB}\left(\log 3 + \log 10^{\left(\frac{\beta}{10}\right)}\right)$$

$$\beta' = 10\,\mathrm{dB}\left(\log 3 + \frac{\beta}{10}\right) = 10\,\mathrm{dB}\left(\log 3 + \frac{58{,}3\,\mathrm{dB}}{10}\right) = 63{,}1\,\mathrm{dB} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du niveau sonore est correct, légèrement augmenté par le triplement de l'auditoire.

E30 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$f = 100\,\text{Hz}$	I
$\beta = 73{,}0\,\text{dB}$	s_m

a. Identifier la clé La clé est l'équation du niveau sonore en décibels.

Résoudre le problème Le niveau sonore est donné par

$$\beta = 10\,\text{dB} \log \frac{I}{I_0}\ ,$$

d'où

$$I = I_0 \times 10^{\left(\frac{\beta}{10}\right)} = 1 \times 10^{-12}\,\text{W/m}^2 \times 10^{\left(\frac{73{,}0\,\text{dB}}{10}\right)} = 20{,}0\,\mu\text{W/m}^2\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'intensité est correct.

b. Identifier la clé La clé est l'équation 3.16 qui met en relation l'intensité sonore et l'amplitude de déplacement.

Résoudre le problème L'équation 3.16 permet de trouver une expression de l'amplitude de déplacement :

$$I = \frac{1}{2}\rho v \omega^2 s_\text{m}^2 \qquad \Rightarrow \qquad s_\text{m} = \sqrt{\frac{2I}{\rho v \omega^2}}\ .$$

La densité de l'air est $1{,}21\,\text{kg/m}^3$, le module de la vitesse du son est $343\,\text{m/s}$ et la fréquence angulaire ω peut être exprimée en fonction de la fréquence :

$$\omega = 2\pi f\ .$$

Ainsi,

$$s_\text{m} = \sqrt{\frac{2I}{\rho v (2\pi f)^2}} = \sqrt{\frac{2 \times 20{,}0\,\mu\text{W/m}^2}{1{,}21\,\text{kg/m}^3 \times 343\,\text{m/s} \times (2\pi \times 100\,\text{Hz})^2}} = 494\,\text{nm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'amplitude est correct, le déplacement des molécules étant très faible.

P31 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$r = 3{,}00\,\text{m}$	$r_{\beta'=90\,\text{dB}}$
$\beta = 120\,\text{dB}$	

Identifier la clé La clé est la propriété des logarithmes selon laquelle $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$.

Résoudre le problème La diminution de $30\,\text{dB}$ peut être liée à la relation entre les deux distances impliquées au moyen de la différence entre les deux niveaux sonores. Le niveau sonore étant donné par

$$\beta = 10\,\text{dB} \log \frac{I}{I_0}\ ,$$

la différence des deux niveaux est

$$\beta - \beta' = 30\,\text{dB} = 10\,\text{dB} \log \frac{I}{I_0} - 10\,\text{dB} \log \frac{I'}{I_0}\ .$$

Les propriétés des logarithmes admettent alors

$$30\,\text{dB} = 10\,\text{dB}\left(\log \frac{I}{I_0} - \log \frac{I'}{I_0}\right) = 10\,\text{dB} \log\left(\frac{\left(\frac{I}{I_0}\right)}{\left(\frac{I'}{I_0}\right)}\right) = 10\,\text{dB} \log\left(\frac{I}{I'}\right)\ .$$

L'intensité I étant donnée par $I = \frac{P}{4\pi r^2}$, on trouve

$$30\,\mathrm{dB} = 10\,\mathrm{dB}\log\left(\frac{\frac{P}{4\pi r^2}}{\frac{P}{4\pi r'^2}}\right) = 10\,\mathrm{dB}\log\frac{r'^2}{r^2}\ .$$

Il ne reste qu'à isoler la nouvelle distance r', la seule inconnue :

$$r' = r\sqrt{10^{\frac{\beta-\beta'}{10}}} = 3{,}00\,\mathrm{m}\times\sqrt{10^{\frac{120\,\mathrm{dB}-90\,\mathrm{dB}}{10}}} = 94{,}9\,\mathrm{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la nouvelle distance est correct, la distance devant doubler environ cinq fois pour une réduction de 30 dB.

P32 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\beta_\mathrm{v} = 85{,}0\,\mathrm{dB}$	$I_\text{rés}$
$\beta_\mathrm{p} = 82{,}0\,\mathrm{dB}$	Δp_m
	$\beta_\text{rés}$

a. Identifier la clé La clé est l'addition de l'intensité sonore des deux sources, après calcul depuis leur niveau sonore.

Résoudre le problème Le niveau sonore est donné par

$$\beta = 10\,\mathrm{dB}\log\frac{I}{I_0}\ .$$

On peut alors trouver l'intensité sonore en watts par mètre carré des deux sources pour les additionner :

$$I_\mathrm{v} = I_0\times 10^{\left(\frac{\beta_\mathrm{v}}{10}\right)} \qquad \text{et} \qquad I_\mathrm{p} = I_0\times 10^{\left(\frac{\beta_\mathrm{p}}{10}\right)}$$

$$\begin{aligned} I_\text{rés} =& I_\mathrm{v} + I_\mathrm{p} = I_0\times 10^{\left(\frac{\beta_\mathrm{v}}{10}\right)} + I_0\times 10^{\left(\frac{\beta_\mathrm{p}}{10}\right)} = I_0\times\left(10^{\left(\frac{\beta_\mathrm{v}}{10}\right)} + 10^{\left(\frac{\beta_\mathrm{p}}{10}\right)}\right) \\ I_\text{rés} =& 1\times 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}\times\left(10^{\left(\frac{85{,}0\,\mathrm{dB}}{10}\right)} + 10^{\left(\frac{82{,}0\,\mathrm{dB}}{10}\right)}\right) = 475\,\mu\mathrm{W/m^2}\ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'intensité est correct.

b. Identifier la clé La clé est l'équation 3.16 qui relie l'intensité sonore à l'amplitude de déplacement.

Résoudre le problème L'intensité sonore est liée à l'amplitude par

$$I = \frac{1}{2}\rho v\omega^2 s_\mathrm{m}^2\ .$$

L'amplitude de pression est également liée à l'amplitude de déplacement par

$$\Delta p_\mathrm{m} = v\rho\omega s_\mathrm{m} \qquad \Rightarrow \qquad s_\mathrm{m} = \frac{\Delta p_\mathrm{m}}{v\rho\omega}\ .$$

Ainsi, on peut relier l'intensité sonore à l'amplitude de pression :

$$I = \frac{1}{2}\rho v\omega^2\left(\frac{\Delta p_\mathrm{m}}{v\rho\omega}\right)^2 = \frac{\Delta p_\mathrm{m}^2}{2\rho v}\ .$$

Les propriétés de l'air étant connues, il n'y a maintenant qu'à isoler Δp_m pour connaître l'amplitude de pression :

$$\Delta p_\mathrm{m} = \sqrt{2I\rho v} = \sqrt{2\times(475\times 10^{-6}\,\mathrm{W/m^2})\times(1{,}21\,\mathrm{kg/m^3})\times(343\,\mathrm{m/s})} = 0{,}628\,\mathrm{Pa}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'amplitude de pression est correct.

c. Identifier la clé La clé est l'équation du niveau sonore dans laquelle on insère l'intensité trouvée en **a.**

Résoudre le problème Le niveau sonore est donné par

$$\beta = 10\,\text{dB}\log\frac{I}{I_0} = 10\,\text{dB}\log\frac{475\,\mu\text{W/m}^2}{1\times10^{-12}\,\text{W/m}^2} = 86{,}8\,\text{dB}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de ce niveau sonore est correct, légèrement supérieur au niveau sonore de chacune des deux sources superposées.

Q33 Identifier la clé La clé est le fait que le dispositif sert à produire de l'interférence destructive pour annuler en tout point l'énergie du son initial.

a. Résoudre le problème Les deux ondes doivent être de même amplitude, de même fréquence, et se déplacer dans la même direction pour annuler l'onde initiale. La longueur d'onde est donc la même également.

Même amplitude, même longueur d'onde et même sens de propagation (réponse)

b. Résoudre le problème L'intensité perçue est minimale quand l'interférence est parfaitement destructive. Cela se produit lorsque la différence de phase est un multiple impair de π. La plus simple expression de la différence de phase permettant l'interférence destructive est donc 1π.

$$\Phi = \pi \text{ rad} \qquad \text{(réponse)}$$

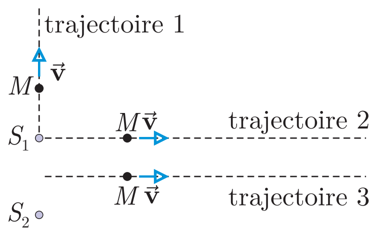
Q34 Identifier la clé La clé est la comparaison des distances entre le microphone et chacune des sources.

a. Résoudre le problème Tous les points de la trajectoire 1 sont plus près de S_1 que de S_2 d'une distance égale à la distance entre les sources, $3\lambda/2$. La différence de marche est donc en tout point $\Delta r = 3\lambda/2$. La condition de l'interférence destructive est satisfaite, condition stipulant que

$$\Delta r = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \qquad \text{avec} \qquad m = 1\ .$$

Interférence destructive (réponse)

b. Illustrer la situation La figure ci-contre illustre les deux sources ainsi que les trois trajectoires du microphone.



Résoudre le problème La différence de marche des ondes provenant des deux sources pour les points de la trajectoire 2 est comprise entre d (pour les points très près de S_1) et 0 (pour les points à une distance infinie des sources). Dans tout le domaine de positions sur cette trajectoire, la différence de marche évolue donc graduellement entre $d = 3\lambda/2$ et 0.

À l'emplacement même de la source S_1, l'interférence est destructive si on considère ce point dans la trajectoire, car $\Delta r = 3\lambda/2$.

En s'éloignant de S_1, l'interférence est intermédiaire tant que la distance à S_1 est telle que la différence de marche Δr est supérieure à λ ($3\lambda/2 > \Delta r > \lambda$).

L'interférence est constructive précisément à la distance de S_1 telle que la différence de marche est $\Delta r = \lambda$.

L'interférence redevient intermédiaire dans le domaine où la différence de marche est inférieure à λ et supérieure à $\lambda/2$ ($\lambda > \Delta r > \lambda/2$).

Il y a à nouveau interférence destructive à la distance de S_1 telle que la différence de marche est $\Delta r = \lambda/2$.

L'interférence redevient intermédiaire dans le domaine où la différence de marche est inférieure à $\lambda/2$ et supérieure à 0 ($\lambda/2 > \Delta r > 0$).

L'interférence tend vers l'interférence constructive lorsque la distance à S_1 tend vers l'infini et que la différence de marche tend vers 0.

Il y a donc alternance entre interférence destructive, intermédiaire, constructive, intermédiaire, destructive, intermédiaire et constructive.

Succession d'interférences constructives, intermédiaires et destructives (réponse)

c. Résoudre le problème Tous les points de la trajectoire 3 sont à égale distance des deux sources. La différence de marche est donc nulle pour tous ces points, et la condition de l'interférence constructive est satisfaite, la différence de marche étant un multiple de la longueur d'onde : $\Delta r = m\lambda$ (avec $m = 0$).

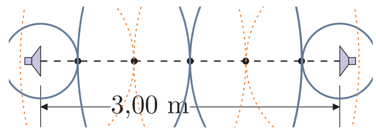
Interférence constructive (réponse)

E35 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$d = 3{,}00\,\mathrm{m}$	$x_{\text{const.}}$
$f = 250\,\mathrm{Hz}$	

Identifier la clé La clé est le fait que l'interférence constructive se produit quand la différence de marche est un multiple de la longueur d'onde.

Illustrer la situation La figure ci-contre illustre les deux haut-parleurs ainsi que les fronts d'onde qu'ils émettent. On y montre des points de rencontre des fronts d'onde de haute pression ainsi que des points de rencontre des fronts d'onde de basse pression.



Résoudre le problème La longueur d'onde peut être déterminée à partir de la fréquence indiquée et du module de la vitesse du son dans l'air :

$$v = \lambda f \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{v}{f} = \frac{343\,\mathrm{m/s}}{250\,\mathrm{Hz}} = 1{,}372\,\mathrm{m}\ .$$

On cherche tous les points à une distance r_1 du haut-parleur de gauche telle que $\Delta r = r_2 - r_1 = m\lambda = m \times (1{,}372\,\mathrm{m})$. De plus, dans tous les cas, la distance entre les haut-parleurs est $r_1 + r_2 = 3{,}00\,\mathrm{m}$:

$$r_1 - r_2 = m\lambda, \qquad \text{avec} \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$$

$$r_1 + r_2 = 3{,}00\,\mathrm{m} \qquad \Rightarrow \qquad r_2 = 3 - r_1\ .$$

Ces deux équations réunies donnent

$$\begin{aligned} r_1 - (3 - r_1) &= m\lambda \\ r_1 &= \frac{m\lambda + 3}{2}, \qquad \text{avec} \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ... \qquad \text{et} \qquad r_1 < 3{,}00\,\mathrm{m}\ . \end{aligned}$$

Les valeurs possibles de r_1 sont

$$\begin{aligned} m = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad r_1 = \frac{0 \times \lambda + 3}{2} = 1{,}50\,\mathrm{m} \\ m = 1 \qquad &\Rightarrow \qquad r_1 = \frac{1 \times \lambda + 3}{2} = 2{,}19\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m &= 2 && \Rightarrow && r_1 = \frac{2\times\lambda+3}{2} = 2{,}87\,\mathrm{m} \\
m &= 3 && \Rightarrow && r_1 = \frac{3\times\lambda+3}{2} = 3{,}56\,\mathrm{m} && \text{Rejetée !} \\
m &= -1 && \Rightarrow && r_1 = \frac{-1\times\lambda+3}{2} = 0{,}814\,\mathrm{m} \\
m &= -2 && \Rightarrow && r_1 = \frac{-2\times\lambda+3}{2} = 0{,}128\,\mathrm{m} \\
m &= -3 && \Rightarrow && r_1 = \frac{-3\times\lambda+3}{2} = -0{,}558\,\mathrm{m} && \text{Rejetée !}
\end{aligned}$$

Dans l'ordre, les positions entre les deux haut-parleurs sont

$$d = 0{,}128\,\mathrm{m},\quad 0{,}814\,\mathrm{m},\quad 1{,}50\,\mathrm{m},\quad 2{,}19\,\mathrm{m},\quad 2{,}87\,\mathrm{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

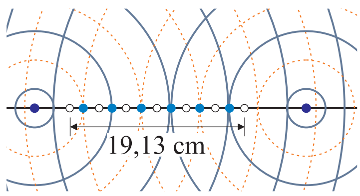
Valider la réponse Il est correct d'obtenir plusieurs distances, ce sont plusieurs endroits où la différence de marche est un multiple de λ.

E36 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$f = 32{,}50\,\mathrm{kHz}$	v_{son}
$\Delta x = 19{,}13\,\mathrm{cm}$	
$n_{\text{min}} = 6$	

Identifier la clé La clé est le fait que la variation de différence de marche entre deux minimums consécutifs équivaut à la longueur d'onde.

Illustrer la situation La figure ci-contre illustre les deux sources ainsi que leurs fronts d'onde. On y montre également des positions du micro correspondant aux sites d'interférence constructive (les cercles pleins) et d'interférence destructive (les cercles vides).



Résoudre le problème Si le point de départ de l'expérience (soit le point A) coïncide avec un minimum, c'est qu'il y a interférence destructive. La différence de marche entre les deux ondes reçues par le microphone est donc un demi-multiple de lambda. Soit $\Delta r = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$.

Le fait de rencontrer six autres endroits d'interférence destructive jusqu'au point final (soit le point B) signifie que la valeur de Δr a varié d'une quantité lui faisant rencontrer six valeurs demi-multiples de λ. À partir de la quantité $\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$, les six minimums rencontrés entraînent une différence de marche finale de $\Delta r = (m+6+\frac{1}{2})\lambda$ (dans le cas d'une augmentation de Δr).

La variation de la différence de marche des ondes atteignant le microphone mobile correspond donc à

$$\Delta r_B - \Delta r_A = 13\lambda - 1\lambda = 12\lambda\ .$$

Pour les deux positions extrêmes du déplacement, on exprime les différences de marche Δr_B et Δr_A en fonction des distances r_1 et r_2 aux microphones 1 et 2 :

$$\Delta r_B - \Delta r_A = (r_{1B} - r_{2B}) - (r_{1A} - r_{2A})\ .$$

Puisque les distances r_1 et r_2 sont liées à la distance entre les sources d_S, on peut trouver une expression du déplacement du microphone :

$$d_S = r_1 + r_2 \qquad \Rightarrow \qquad r_2 = d_S - r_1$$

$$\begin{aligned}
\Delta r_B - \Delta r_A &= \Big(r_{1B} - (d_S - r_{1B})\Big) - \Big(r_{1A} - (d_S - r_{1A})\Big) \\
&= (2r_{1B} - d_S) - (2r_{1A} - d_S) = 2(r_{1B} - r_{1A}) = 2\Delta x\ .
\end{aligned}$$

On se rend compte que la variation de différence de marche correspond au double du déplacement du microphone :

$$\Delta r_B - \Delta r_A = 12\lambda = 2\Delta x \ .$$

Le déplacement Δx étant connu, on peut maintenant déterminer la longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{2\Delta x}{12} = \frac{2 \times 19{,}13\,\text{cm}}{12} \ .$$

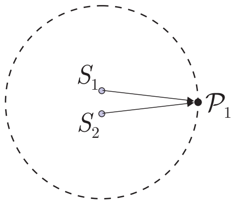
On peut enfin trouver le module de la vitesse, puisque la fréquence de l'onde est également donnée :

$$v = \lambda f = \frac{2\Delta x}{12} \times f = \frac{2 \times 0{,}191\,3\,\text{m}}{12} \times 32\,500\,\text{Hz} = 1\,036\,\text{m/s} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du module de la vitesse du son est correct, quoiqu'il soit trois fois plus élevé que dans l'air.

P37 **Identifier la clé** La clé est la détermination de la distance entre chacune des sources et certains points de la figure.

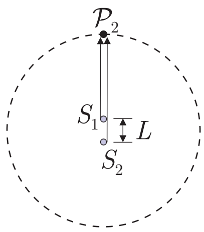
a. **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre le point P_1 ainsi que la trajectoire des deux ondes qui atteignent ce point.



Résoudre le problème Le point P_1 se trouve à la même distance des sources S_1 et S_2. La différence de marche entre les deux ondes sera donc nulle.

$$\Delta r_1 = 0 \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre le point P_2 ainsi que la trajectoire des deux ondes qui atteignent ce point.



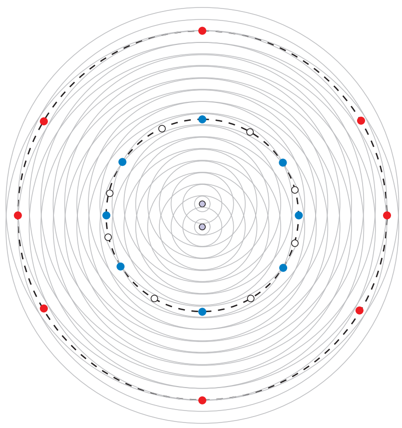
Résoudre le problème Le point se trouvant sur le même axe que les deux sources, la distance L entre les sources est aussi la différence de marche entre les deux ondes. L'onde provenant de S_2 doit parcourir la distance L avant de rejoindre l'onde de S_1 et parcourir ensuite la même distance.

$$\Delta r_2 = L = 2\lambda \qquad \text{(réponse)}$$

c. **Résoudre le problème** Les points P_1 et P_2 traités en **a.** et en **b.** représentent les valeurs minimale et maximale de différence de marche. Par symétrie, les points opposés à P_1 et à P_2 présentent respectivement les mêmes différences de marche, alors que tous les endroits entre ces quatre points particuliers présentent une différence de marche comprise entre 0 et 2λ :

$$0 \leq \Delta r \leq \lambda \ .$$

S'il y a interférence constructive partout où Δr est un multiple de λ, alors les points P_1, P_2 et leurs opposés (à gauche et en bas) sont quatre points d'interférence constructive. De plus, sur chaque quart de cercle entre ces points, on trouve un endroit où la différence de marche correspond à 1λ. Il y a ainsi quatre autres points d'interférence constructive, et en tout huit points d'interférence destructive (les huit points bleus ci-contre).



Huit maximums d'intensité (réponse)

d. **Résoudre le problème** Par symétrie, les quatre quarts de cercle présentent la même configuration de points d'interférence constructive et destructive. On traite le quart de cercle compris entre P_1 et P_2, et la quantité de minimums trouvée pourra être multipliée par 4 pour donner la réponse.

Entre les points P_1 et P_2, la différence de marche prend toutes les valeurs entre 0 et 2λ. Puisqu'il y a interférence destructive pour toutes les valeurs de multiples demi-entiers de λ, on trouvera deux minimums d'intensité, là où $\Delta r = \frac{1}{2}\lambda$ et où $\Delta r = \frac{3}{2}\lambda$. On trouvera ainsi deux minimums d'intensité dans chacun des quatre quarts de cercle, pour un total de huit minimums d'intensité (les huit points blancs de la figure ci-dessus).

Huit minimums d'intensité (réponse)

e. Résoudre le problème Le rayon du cercle n'est pas une donnée considérée dans les raisonnements précédents. Ainsi, la différence de marche sur tous les points du cercle sera toujours comprise entre 0 et 2λ et les quantités de maximums et de minimums le long du cercle demeureront inchangées. (Voir les huit points rouges sur l'image ci-dessus.)

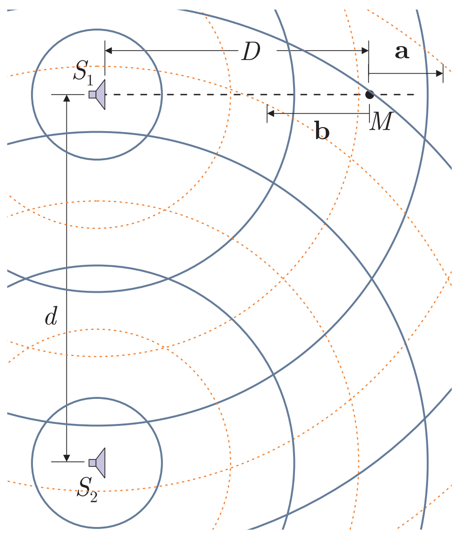
Huit maximums d'intensité (réponse)

P38 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$D = 0{,}50\,\mathrm{m}$	Δx_{min}
$d = 0{,}70\,\mathrm{m}$	Δx_{max}
$f = 1{,}50\,\mathrm{kHz}$	

a. Identifier la clé La clé est le fait qu'on cherche un endroit où la différence de marche est un multiple demi-entier de λ inférieur à la différence de marche initiale.

Illustrer la situation La figure ci-contre illustre les deux haut-parleurs ainsi que la droite sur laquelle le micro est déplacé.



Résoudre le problème À l'endroit où se trouve le microphone au départ, on peut deviner que l'interférence ne sera pas déjà destructive. Il y a donc un endroit à une distance $L = D + \Delta x$ du premier haut-parleur tel que la différence de marche pour les deux ondes reçues correspond au multiple demi-entier voisin de la différence de marche du point de départ. Il faut donc d'abord évaluer cette différence de marche initiale.

La différence de marche initiale (soit Δr_A) est la différence des distances à chacun des haut-parleurs :

$$\Delta r_A = r_{2A} - r_{1A}, \qquad \text{la distance au deuxième haut-parleur étant plus grande.}$$

À l'aide du théorème de Pythagore, on trouve

$$r_{1A} = D = 0{,}50\,\mathrm{m} \qquad \text{et} \qquad r_{2A} = \sqrt{D^2 + d^2} = \sqrt{(0{,}50\,\mathrm{m})^2 + (0{,}70\,\mathrm{m})^2} = 0{,}86\,\mathrm{m}\ .$$

La différence de marche initiale est donc

$$\Delta r_A = r_{2A} - r_{1A} = 0{,}86\,\mathrm{m} - 0{,}50\,\mathrm{m} = 0{,}36\,\mathrm{m}\ .$$

Pour la comparer à la longueur d'onde, on évalue la longueur d'onde à partir du module de la vitesse du son et de la fréquence :

$$v = \lambda f \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{v_{\text{son}}}{f} = \frac{343\,\mathrm{m/s}}{1\,500\,\mathrm{Hz}} = 0{,}23\,\mathrm{m}\ .$$

On peut alors évaluer le rapport $\Delta r_A/\lambda$ et connaître le multiple demi-entier de λ que l'on devra atteindre en déplaçant le microphone :

$$\frac{\Delta r_A}{\lambda} = \frac{0{,}36\,\mathrm{m}}{0{,}23\,\mathrm{m}} = 1{,}57 \ .$$

On est donc tout près d'un point minimum d'intensité, et les deux minimums d'intensité voisins se trouvent aux endroits où $\Delta r_B/\lambda = 1{,}5$ et $\Delta r_B/\lambda = 2{,}5$.
Il est important de constater, avant d'aller plus loin, que si on éloigne le microphone, la différence de marche diminuera, car les deux distances impliquées tendent à être égales lorsque $D = \infty$. La différence de marche diminue donc lorsqu'on s'éloigne ; on s'attardera alors à l'endroit où la différence de marche est inférieure à la valeur initiale, c'est-à-dire lorsque

$$\Delta r_B = 1{,}5\lambda = 1{,}5 \times 0{,}23\,\mathrm{m} = 0{,}343\,\mathrm{m} \ .$$

On peut maintenant insérer le déplacement Δx dans une expression permettant de calculer le déplacement :

$$\Delta r_B = r_{2B} - r_{1B} = \sqrt{(D+\Delta x)^2 + d^2} - (D + \Delta x) \ . \tag{i}$$

Il est possible d'isoler Δx avec un peu d'algèbre :

$$\begin{aligned}
(\Delta r_B + (D+\Delta x))^2 &= \sqrt{(D+\Delta x)^2 + d^2}^2 \\
\Delta r_B^2 + 2D\Delta r_B + 2\Delta r_B\Delta x + D^2 + 2D\Delta x + \Delta x^2 &= (D+\Delta x)^2 + d^2 \\
\Delta r_B^2 + 2D\Delta r_B + 2\Delta r_B\Delta x + D^2 + 2D\Delta x + \Delta x^2 &= D^2 + 2D\Delta x + \Delta x^2 + d^2 \\
\Delta r_B^2 + 2D\Delta r_B + 2\Delta r_B\Delta x &= d^2 \\
\Delta x &= \frac{d^2 - \Delta r_B^2 - 2D\Delta r_B}{2\Delta r_B} \qquad \text{(ii)} \\
\Delta x &= \frac{(0{,}70\,\mathrm{m})^2 - (0{,}343\,\mathrm{m})^2 - (2 \times 0{,}50\,\mathrm{m} \times 0{,}343\,\mathrm{m})}{2 \times 0{,}343\,\mathrm{m}} \\
\Delta x &= 4{,}3\,\mathrm{cm} \ . \qquad \text{(réponse)}
\end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du déplacement est correct.

b. **Identifier la clé** La clé est le fait qu'on cherche un point où Δr est un multiple de λ.

Résoudre le problème On a déterminé en **a.** que la différence de marche au point initial est telle que $\Delta r_A/\lambda = 1{,}57$. Si on approche le microphone du premier haut-parleur, cette différence de marche augmentera et il y a aura interférence constructive pour la première fois (disons au point C) lorsque $\Delta r_C/\lambda = 2$. Autrement dit,

$$\Delta r_C = 2\lambda = 2 \times 0{,}23\,\mathrm{m} = 0{,}457\,\mathrm{m} \ .$$

De la même manière qu'en **a.**, on peut établir une équation comparable à l'équation (i) à la seule différence que le déplacement Δx est soustrait de D plutôt qu'y être ajouté :

$$\Delta r_C = r_{2C} - r_{1C} = \sqrt{(D-\Delta x)^2 + d^2} - (D - \Delta x) \ .$$

Le même processus algébrique que celui qui a mené à l'équation (ii) donnera :

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \frac{-d^2 + \Delta r_C^2 + 2D\Delta r_C}{2\Delta r_C} \\
\Delta x &= \frac{-(0{,}70\,\mathrm{m})^2 + (0{,}457\,\mathrm{m})^2 + (2 \times 0{,}50\,\mathrm{m} \times 0{,}457\,\mathrm{m})}{2 \times 0{,}457\,\mathrm{m}} \\
\Delta x &= 19{,}3\,\mathrm{cm} \ . \qquad \text{(réponse)}
\end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du déplacement est correct puisqu'il ne dépasse pas la position du haut-parleur.

Il faut corriger d dans l'énoncé du manuel. d=1,45 m

P39 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$f = 440\,\text{Hz}$	x_{minimums}
$d = 1{,}45\,\cancel{\text{c}}\text{m}$	x_{maximums}

Identifier la clé La clé est la détermination des différences de marche aux extrémités du déplacement décrit.

Résoudre le problème À une distance infinie, les deux distances entre le microphone et les haut-parleurs sont perpendiculaires à l'axe reliant les haut-parleurs. Les deux distances tendent donc vers l'égalité et la différence de marche tend alors vers 0 (sans jamais l'atteindre). Donc $\Delta r_\infty = 0$.
En se rapprochant de l'endroit même où se trouve le premier haut-parleur, la différence de marche coïncide avec la distance entre les haut-parleurs, donc $\Delta r_{S1} = d$.
Toutes les positions le long de ce déplacement (excluant l'infini) présentent donc une différence de marche comprise entre 0 et d ($0 < \Delta r \leq d$). Il y aura interférence constructive là où Δr est un multiple entier de λ et interférence destructive là où Δr est un multiple demi-entier de λ.
On doit connaître la longueur d'onde pour la comparer à la valeur maximale de différence de marche le long du déplacement :

$$v = \lambda f \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{v_{\text{son}}}{f} = \frac{343\,\text{m/s}}{440\,\text{Hz}} = 0{,}780\,\text{m} \ .$$

a. Résoudre le problème Le rapport d/λ indiquera combien de multiples demi-entiers de λ se trouvent dans le domaine de différences de marche établi :

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{1{,}45\,\cancel{\text{c}}\text{m}}{0{,}780\,\text{m}} = 1{,}86 \ . \tag{i}$$

Il y a donc deux endroits où il y a interférence destructive le long du déplacement, là où $\Delta r = 0{,}5\lambda$ et où $\Delta r = 1{,}5\lambda$, et à ces endroits la différence de marche est donnée par la différence des distances impliquées (le théorème de Pythagore sera utilisé) :

$$\Delta r = r_2 - r_1, \qquad \text{la distance au deuxième haut-parleur étant plus grande}$$

$$r_1 = D \qquad \text{et} \qquad r_2 = \sqrt{D^2 + d^2} \ .$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \Delta r &= \sqrt{D^2 + d^2} - D \\ (\Delta r + D)^2 &= D^2 + d^2 \\ \Delta r^2 + 2D\Delta r + D^2 &= D^2 + d^2 \\ \Delta r^2 + 2D\Delta r &= d^2 \\ D &= \frac{d^2 - \Delta r^2}{2\Delta r} \ . \end{aligned}$$

On peut donc trouver les valeurs de D pour les deux valeurs admises de Δr.
Pour $\Delta r = 0{,}5\lambda$:

$$D = \frac{d^2 - (0{,}5\lambda)^2}{2 \times 0{,}5\lambda} = \frac{(1{,}45\,\cancel{\text{c}}\text{m})^2 - (0{,}5 \times 0{,}780\,\text{m})^2}{2 \times 0,5 \times 0{,}780\,\text{m}} = 2{,}50\,\text{m} \ ,$$

et pour $\Delta r = 1{,}5\lambda$:

$$D = \frac{d^2 - (1{,}5\lambda)^2}{2 \times 1{,}5\lambda} = \frac{(1{,}45\,\cancel{\text{c}}\text{m})^2 - (1{,}5 \times 0{,}780\,\text{m})^2}{2 \times 1{,}5 \times 0{,}780\,\text{m}} = 0{,}314\,\text{m} \ .$$

$$D = 2{,}50\,\text{m} \quad \text{et} \quad D = 0{,}314\,\text{m} \ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de ces deux positions est correct, elles sont comprises entre 0 et l'infini.

b. Résoudre le problème Le rapport d/λ trouvé en **a.** (équation (i)) indique combien de multiples de λ se trouvent dans le domaine de différences de marche établi :

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{1{,}45\,\text{cm}}{0{,}780\,\text{m}} = 1{,}86 \ .$$

Il n'y a qu'un seul endroit où il y a interférence constructive le long du déplacement, là où $\Delta r = 1\lambda$, et à cet endroit la différence de marche est donnée par la différence des distances impliquées (le théorème de Pythagore sera utilisé) :

$$\Delta r = 1\lambda = r_2 - r_1, \qquad \text{la distance au deuxième haut-parleur étant plus grande}$$

$$r_1 = D \qquad \text{et} \qquad r_2 = \sqrt{D^2 + d^2} \ .$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{D^2 + d^2} - D \\ (\lambda + D)^2 &= D^2 + d^2 \\ \lambda^2 + 2D\lambda + D^2 &= D^2 + d^2 \\ \lambda^2 + 2D\lambda &= d^2 \\ D &= \frac{d^2 - \lambda^2}{2\lambda} = \frac{(1{,}45\,\text{cm})^2 - (0{,}780\,\text{m})^2}{2 \times 0{,}780\,\text{m}} = 0{,}959\,\text{m} \ . \qquad \text{(réponse)} \end{aligned}$$

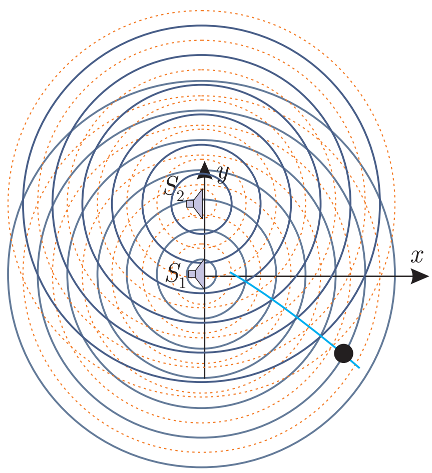
Valider la réponse L'ordre de grandeur de cette position est correct, elle est comprise entre 0 et l'infini.

P40 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\vec{\mathbf{r}}_1 = \vec{\mathbf{0}}$	f_{const}
$\vec{\mathbf{r}}_2 = 2{,}40\vec{\boldsymbol{\jmath}}\text{m}$	
$\vec{\mathbf{r}}_p = (4{,}50\vec{\boldsymbol{\imath}} - 2,30\vec{\boldsymbol{\jmath}})$ m	
$100\,\text{Hz} \le f \le 1\,000\,\text{Hz}$	

Identifier la clé La clé est l'expression de la différence de marche entre les deux ondes en fonction de la fréquence.

Illustrer la situation La figure ci-contre illustre les deux haut-parleurs ainsi que l'emplacement de la personne, dans l'espace où se propagent les fronts d'onde.



Résoudre le problème En unités de distance, la différence de marche pour les deux ondes est (avec $r_2 > r_1$)

$$\begin{aligned} \Delta r = r_2 - r_1 &= \sqrt{(4{,}50)^2 + (2{,}40 - (-2{,}30))^2} \\ &\quad - \sqrt{(4{,}50)^2 + (2{,}30)^2} = 1{,}45\,\text{m} \ . \end{aligned}$$

Cette différence de marche produit un maximum d'intensité pour toutes les fréquences telles que

$$\Delta r = m\lambda, \qquad \text{avec } m \text{ entier.}$$

Cependant, puisque les sources sont en opposition de phase (différence de phase de π), il y a inversion des emplacements d'interférence constructive et destructive. Au lieu de trouver des maximums d'intensité là où $\Delta r = m\lambda$, on en trouvera plutôt là où $\Delta r = (m + \frac{1}{2})\lambda$. On exprime la longueur d'onde en fonction de la fréquence en tenant compte de ce fait :

$$v_{\text{son}} = f\lambda \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{v_{\text{son}}}{f} \ .$$

On a donc

$$\Delta r = (m + \frac{1}{2})\lambda = (m + \frac{1}{2})\frac{v_{\text{son}}}{f}$$

$$f = \frac{(m + \frac{1}{2})v_{\text{son}}}{\Delta r} \ .$$

Il y a donc un maximum d'intensité pour toutes les fréquences entre 100 Hz et 1 000 Hz respectant cette équation pour une valeur entière de m. En vérifiant toutes les valeurs de m à partir de 0, on trouve

$$m = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{(0 + \frac{1}{2}) \times v_{\text{son}}}{\Delta r} = \frac{0 + \frac{1}{2} \times 343\,\text{m/s}}{1{,}45\,\text{m}} = 118\,\text{Hz}$$

$$m = 1 \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{(1 + \frac{1}{2}) \times v_{\text{son}}}{\Delta r} = \frac{1 + \frac{1}{2} \times 343\,\text{m/s}}{1{,}45\,\text{m}} = 354\,\text{Hz}$$

$$m = 2 \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{(2 + \frac{1}{2}) \times v_{\text{son}}}{\Delta r} = \frac{2 + \frac{1}{2} \times 343\,\text{m/s}}{1{,}45\,\text{m}} = 590\,\text{Hz}$$

$$m = 3 \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{(3 + \frac{1}{2}) \times v_{\text{son}}}{\Delta r} = \frac{3 + \frac{1}{2} \times 343\,\text{m/s}}{1{,}45\,\text{m}} = 826\,\text{Hz}$$

$$m = 4 \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{(4 + \frac{1}{2}) \times v_{\text{son}}}{\Delta r} = \frac{4 + \frac{1}{2} \times 343\,\text{m/s}}{1{,}45\,\text{m}} = 1\,062\,\text{Hz} \qquad \text{Rejetée !}$$

Il y a donc quatre fréquences entre 100 Hz et 1 000 Hz produisant un son très fort :

$$f_1 = 118\,\text{Hz}, \quad f_2 = 354\,\text{Hz}, \quad f_3 = 590\,\text{Hz}, \quad f_4 = 826\,\text{Hz} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Il est cohérent de trouver plusieurs fréquences vérifiant la condition.

Q41 **Identifier la clé** La clé est le fait que la fréquence de battements est la différence des fréquences des deux sons perçus.

Résoudre le problème Lorsque la corde vibre à la même fréquence que le diapason, la fréquence de battements tendra vers 0 puisque

$$f_{\text{batt}} = |f_1 - f_2|, \qquad \text{avec} \qquad f_1 = f_{-2}$$

$$f_{\text{batt}} = 0 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

E42 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$f_1 = 800\,\text{Hz}$	f_{batt}
$f_2 = 803\,\text{Hz}$	

Identifier la clé La clé est l'équation de la fréquence de battements.

Résoudre le problème La fréquence de battements est donnée par

$$f_{\text{batt}} = |f_1 - f_2| \ .$$

Les deux fréquences individuelles étant connues, on trouve

$$f_{\text{batt}} = |f_1 - f_2| = |800\,\text{Hz} - 803\,\text{Hz}| = 3\,\text{Hz} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la fréquence de battements est correct, cette fréquence pouvant diminuer jusqu'à 0 et devenant imperceptible à quelques dizaines de hertz.

P43 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$f_{\text{dia}} = 440{,}0\,\text{Hz}$	$f_{\text{i,corde}}$
$f_{\text{batt}} = 2{,}5\,\text{Hz}$	

Identifier la clé La clé est le fait que si la tension dans la corde augmente, la fréquence fondamentale de la corde augmente également.

Résoudre le problème La fréquence de battements est donnée par

$$f_{\text{batt}} = |f_{\text{dia}} - f_{\text{corde}}| \ .$$

La valeur absolue contenue dans cette équation admet deux cas possibles, soit

$$f_{\text{dia}} > f_{\text{corde}} \qquad \Rightarrow \qquad f_{\text{dia}} - f_{\text{corde}} = f_{\text{batt}} \ , \tag{i}$$

où

$$f_{\text{dia}} < f_{\text{corde}} \qquad \Rightarrow \qquad f_{\text{corde}} - f_{\text{dia}} = f_{\text{batt}} \ . \tag{ii}$$

Si la fréquence de battements augmente quand la tension augmente, c'est que l'écart entre les deux fréquences perçues augmente. L'augmentation de la tension faisant augmenter la valeur de f_{corde}, la fréquence de la corde devait nécessairement être déjà supérieure à celle du diapason si son augmentation fait augmenter la valeur absolue de la différence. C'est donc le cas (ii) qui était présent dès le début. On peut alors continuer à évaluer la fréquence initiale de la corde à partir de l'équation (ii) :

$$f_{\text{corde}} - f_{\text{dia}} = f_{\text{batt}}$$

$$f_{\text{corde}} = f_{\text{batt}} + f_{\text{dia}} = 2{,}5\,\text{Hz} + 440{,}0\,\text{Hz} = 442{,}5\,\text{Hz} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la fréquence est correct, elle est tout juste voisine de celle du diapason.

Q44 **a.** **Identifier la clé** La clé est le fait que l'air n'intervient pas dans les facteurs qui déterminent la fréquence de vibration des cordes.

Résoudre le problème La fréquence de vibration des cordes est liée à la vitesse des ondes dans le matériau de la corde, laquelle est liée à sa tension et à sa masse linéique. La fréquence transmise à l'air est celle de la corde, et celle-ci n'a pas été influencée par un refroidissement de l'air.

La fréquence ne change pas. (réponse)

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation du module de la vitesse du son dans l'air.

Résoudre le problème Dans un instrument à vent, un tuyau ou une caisse de résonance remplis d'air intervient nécessairement lors de la production d'une note (fréquence résonante). L'air à l'intérieur de l'instrument joue donc un rôle alors que sa température influence le module de la vitesse des ondes parcourant l'instrument. Le module de la vitesse du son dans l'air étant donné par

$$v_{\text{son}} = 20{,}05\sqrt{T_{\text{K}}} \ ,$$

une baisse de la température produira donc une baisse du module de la vitesse du son dans le volume de l'instrument. La longueur d'onde des ondes résonantes dans l'instrument étant liée aux dimensions de celui-ci, elle ne change pas. La fréquence est donc tributaire de la température, car

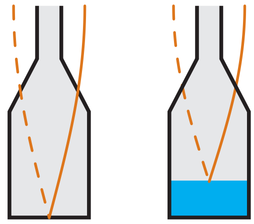
$$v = f\lambda \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{v}{\lambda} = \frac{20{,}05\sqrt{T_{\text{K}}}}{\lambda} \ .$$

La baisse de la température de l'air entraîne donc une diminution de la fréquence émise.

La fréquence diminue. (réponse)

Q45 Identifier la clé La clé est le fait que l'eau dans la bouteille raccourcit la longueur de la cavité d'air.

Illustrer la situation La figure ci-contre illustre les deux situations étudiées avec le tracé de l'onde de déplacement des molécules d'air dans le mode fondamental.



Résoudre le problème La cavité d'air dans la bouteille se comporte comme l'air dans un tuyau ouvert-fermé, pour lequel la fréquence harmonique d'ordre n est donnée par

$$f_{2n-1} = (2n-1)\frac{v}{4L} \; .$$

Le module de la vitesse du son dans l'air est constant malgré l'ajout d'eau dans la bouteille, et même si la variation se fait dans le même sens tous pour les harmoniques, celui qu'on entend le mieux est la fréquence fondamentale pour laquelle $n = 1$. On peut donc établir la relation entre f et L :

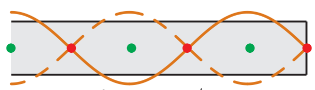
$$f = (2 \times 1 - 1)\frac{v}{4L} = \frac{v}{4} \times \frac{1}{L} \; .$$

Cette relation montre que la fréquence varie comme l'inverse de la hauteur L de la colonne d'air. Donc, quand on ajoute de l'eau, la colonne d'air qui raccourcit fait augmenter la fréquence du son produit.

La fréquence augmente. (réponse)

Q46 a. Identifier la clé La clé est le fait qu'une onde résonante a nécessairement à ses extrémités un nœud ou un ventre.

Résoudre le problème À une extrémité quelconque, si on trouve un nœud, l'autre extrémité doit absolument être de l'autre type, car les nœuds et les ventres sont nécessairement disposés en alternance sur une onde résonante. Autrement, il faudrait qu'il y ait des quantités inégales de nœuds et de ventres, pour trouver la même chose aux deux extrémités. Si la quantité de nœuds et de ventres est la même (les points rouges et les points verts sur la figure ci-contre), les deux extrémités sont donc de nature différente et seul le tuyau ouvert-fermé présente cette caractéristique.



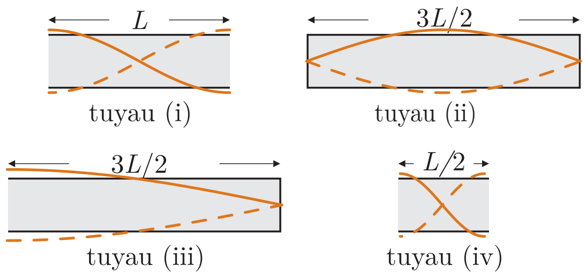
Un tuyau ouvert-fermé (réponse)

b. Identifier la clé La clé est le fait que le numéro d'harmonique correspond pour un tuyau ouvert-fermé au nombre de quarts de longueurs d'onde qu'on trouve d'un bout à l'autre du tuyau.

Résoudre le problème Le mode fondamental d'un tuyau ouvert-fermé comporte un seul quart de longueur d'onde, et le mode suivant (le deuxième mode), comporte trois quarts de longueur d'onde. C'est le troisième harmonique. Le troisième mode comporte cinq quarts de longueur d'onde, c'est le cinquième harmonique.

Le cinquième harmonique (réponse)

Q47 Identifier les clés Les clés sont les équations de la fréquence harmonique pour les différents types de tuyaux.



Illustrer la situation La figure ci-contre illustre les quatre tuyaux avec l'onde fondamentale admise pour chaque cas.
Résoudre le problème Le tuyau (iii) est un tuyau ouvert-fermé pour lequel la fréquence fondamentale est

$$f_1 = \frac{v}{4L} \,.$$

Les trois autres tuyaux sont de types ouvert-ouvert ou fermé-fermé, pour lesquels la fréquence fondamentale est

$$f_1 = \frac{v}{2L} \,.$$

On peut alors exprimer la fréquence fondamentale de ces quatre tuyaux en fonction de L et de v_{son}, la vitesse du son étant une constante pour tous les tuyaux :

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} && f = \frac{v}{2L_1} = \frac{v}{2(L)} = \frac{v}{L} \times \frac{1}{2} \\
&\text{(ii)} && f = \frac{v}{2L_2} = \frac{v}{2(3L/2)} = \frac{v}{L} \times \frac{1}{3} \\
&\text{(iii)} && f = \frac{v}{4L_3} = \frac{v}{4(3L/2)} = \frac{v}{L} \times \frac{1}{6} \\
&\text{(iv)} && f = \frac{v}{2L_4} = \frac{v}{2(L/2)} = \frac{v}{L} \times 1 \,.
\end{aligned}$$

L'ordre croissant des fréquences est

$$f_{\text{(iii)}} < f_{\text{(ii)}} < f_{\text{(i)}} < f_{\text{(iv)}} \,. \qquad \text{(réponse)}$$

E48 Décortiquer le problème

Connue	Inconnue
$L = 26{,}5\,\text{mm}$	f_1

Identifier la clé La clé est l'équation de la fréquence harmonique pour un tube ouvert-ouvert.
Résoudre le problème La fréquence harmonique pour un tube ouvert-ouvert est

$$f_n = \frac{nv}{2L} \,.$$

Le module de la vitesse du son étant connu et la fréquence étant la fondamentale, on peut écrire

$$f_1 = \frac{1v_{\text{son}}}{2L} = \frac{1v_{\text{son}}}{2L} = \frac{1 \times 343\,\text{m/s}}{2 \times 0{,}026\,5\,\text{m}} = 6{,}47\,\text{kHz} \,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la fréquence est correct, elle se trouve à l'intérieur du domaine des fréquences audibles, même si elle est très aigüe.

E49 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$L_{\text{min}} = 2{,}15\,\text{m}$	f_{min}
$L_{\text{max}} = 2{,}95\,\text{m}$	f_{max}

Identifier la clé La clé est l'équation de la fréquence pour un tuyau ouvert-ouvert.
Résoudre le problème La fréquence harmonique pour un tube ouvert-ouvert est

$$f_n = \frac{nv}{2L} \,.$$

La fréquence la plus basse accessible correspond à la fréquence fondamentale dans la longueur la plus grande du conduit d'air. Elle se trouve donc par

$$f_1 = \frac{1v}{2L_{\text{max}}} = \frac{1 \times 343\,\text{m/s}}{2 \times 2{,}95\,\text{m}} = 58{,}1\,\text{Hz}\ .$$

La fréquence la plus élevée accessible correspond à la fréquence du huitième harmonique dans la longueur la plus faible du conduit d'air. Elle se trouve donc par

$$f_8 = \frac{8v}{2L_{\text{min}}} = \frac{8 \times 343\,\text{m/s}}{2 \times 2{,}15\,\text{m}} = 638\,\text{Hz}\ .$$

$$58{,}1\,\text{Hz} < f < 638\,\text{Hz} \qquad \text{(réponse)}$$

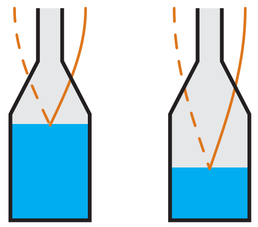
Valider la réponse L'ordre de grandeur des fréquences limites du trombone est correct, cet instrument ayant un registre assez grave.

E50 Décortiquer le problème

Connue	Inconnue
$f_{1;L/2} = 661\,\text{Hz}$	$f_{1;3L/4}$

Identifier la clé La clé est la détermination de la profondeur totale de la bouteille à partir de la fréquence connue.

Illustrer la situation La figure ci-contre illustre les deux bouteilles considérées dans l'énoncé, ainsi que l'onde fondamentale de déplacement des molécules d'air pour chaque situation.



Résoudre le problème Une bouteille ouverte qu'on fait résonner se comporte comme un tuyau ouvert-fermé. Sa fréquence harmonique est

$$f_{2n-1} = (2n-1)\frac{v}{4L}\ .$$

Dans son mode fondamental de vibration, la fréquence d'une bouteille remplie à moitié devient

$$f_{1;L/2} = (2 \times 1 - 1)\frac{v}{4L_{1/2}} = \frac{v}{4L_{1/2}}, \qquad \text{avec} \qquad L_{1/2} = \frac{1}{2}L\ .$$

On peut alors déterminer la profondeur réelle de la bouteille L :

$$f_{1;L/2} = \frac{v}{4(\frac{1}{2}L)} \qquad \Rightarrow \qquad L = \frac{v}{2f_{1;L/2}}\ .$$

Le calcul de L n'est pas nécessaire. On peut réutiliser cette expression pour déterminer la fréquence fondamentale de la bouteille remplie au quart, $f_{1;3L/4}$ (attention : si la bouteille est remplie au quart, la colonne d'air occupe donc les trois quarts de sa profondeur) :

$$f_{1;3L/4} = (2 \times 1 - 1)\frac{v}{4L_{3/4}} = \frac{v}{4L_{3/4}}, \qquad \text{avec} \qquad L_{3/4} = \frac{3}{4}L$$

$$f_{1;3L/4} = \frac{v}{4(\frac{3}{4}L)}, \qquad \text{où} \qquad L = \frac{v}{2f_{1;L/2}}\ .$$

Ainsi,

$$f_{1;3L/4} = \frac{v}{4(\frac{3}{4} \times \frac{v}{2f_{1;L/2}})} = \frac{2}{3}f_{1;L/2} = \frac{2}{3} \times 661\,\text{Hz} = 441\,\text{Hz}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la fréquence trouvée est correct, on a une fréquence plus faible alors que la colonne d'air est allongée par rapport à la situation initiale.

P51 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$f = 500\,\text{Hz}$	v_{son}
$L_{f1} = 17{,}4\,\text{cm}$	T_{air}

a. **Identifier la clé** La clé est le fait que la plus faible longueur produisant une onde stationnaire indique que la fréquence donnée est la fréquence fondamentale.

Résoudre le problème Le tuyau contenant de l'eau constitue un tuyau ouvert-fermé. Sa fréquence harmonique est

$$f_{2n-1} = (2n-1)\frac{v}{4L} \ .$$

La fréquence donnée est la fréquence fondamentale f_1, car si ce n'était pas le cas, on pourrait encore raccourcir la colonne d'air pour atteindre le mode fondamental, ce qui est exclu par la condition donnée dans l'énoncé. Ainsi,

$$f_1 = \frac{v}{4L} \ ,$$

d'où

$$v = 4Lf_1 = 4 \times 0{,}174\,\text{m} \times 500\,\text{Hz} = 348\,\text{m/s} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du module de la vitesse est correct, il se compare à la vitesse de référence du son dans l'air.

b. **Identifier la clé** La clé est la relation entre le module de la vitesse du son dans l'air et la température en kelvins.

Résoudre le problème Le module de la vitesse du son dans l'air obéit à

$$v = 20{,}05\sqrt{T_{\text{K}}} \ .$$

On peut donc dire que

$$T_{\text{K}} = \left(\frac{v_{\text{son}}}{20{,}05}\right)^2 = \left(\frac{348\,\text{m/s}}{20{,}05}\right)^2 = 301\,\text{K} \ .$$

Si on convertit cette température en degrés Celsius, on a

$$T_{\text{C}} = T_{\text{K}} - 273{,}15 = 28\,^\circ\text{C} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la température est correct.

P52 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$f_A = 110\,\text{Hz}$	L
$f_B = 154\,\text{Hz}$	n_A
	n_B

Identifier la clé La clé est le fait que les fréquences des deux modes n_A et n_B sont telles que $n_B > n_A$.

a. **Résoudre le problème** La fréquence harmonique d'un tuyau ouvert-fermé est

$$f_{2n-1} = (2n-1)\frac{v}{4L} \ .$$

On peut écrire l'expression de la fréquence pour les deux modes rencontrés en fonction de n_A et de n_B :

$$f_A = (2n_A - 1)\frac{v}{4L} \qquad \text{et} \qquad f_B = (2n_B - 1)\frac{v}{4L} \ . \qquad \text{(i)}$$

On sait que n_A et n_B sont deux modes consécutifs, et la forme générale de l'équation de la fréquence indique que la fréquence la plus élevée correspond à un mode plus élevé. On peut donc affirmer que

$$n_B = n_A + 1 \ . \tag{ii}$$

Les équations (i) et (ii) forment un système de trois équations et trois inconnues, qu'on peut résoudre comme suit pour déterminer d'abord la longueur du tuyau.
On exprime les deux équations (i) de manière à isoler n_A et n_B :

$$n_A = \frac{2Lf_A}{v} + \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad n_B = \frac{2Lf_B}{v} + \frac{1}{2} \ . \tag{iii}$$

Ces expressions de n_A et de n_B peuvent être insérées dans l'équation (ii) :

$$\left(\frac{2Lf_B}{v} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2Lf_A}{v} + \frac{1}{2}\right) + 1 \ .$$

La longueur est maintenant la seule inconnue et :

$$L = \frac{v}{2(f_B - f_A)} = \frac{343\,\text{m/s}}{154\,\text{Hz} - 110\,\text{Hz}} = 3{,}90\,\text{m} \ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur est correct.

b. **Résoudre le problème** On pourrait résoudre le même système de trois équations et trois inconnues pour déterminer les modes n_A et n_B, mais comme on connaît maintenant la longueur, on peut réutiliser les équations (i) pour les calculer directement :

$$n_A = \frac{2Lf_A}{v} + \frac{1}{2} = \frac{2 \times (3{,}90\,\text{m}) \times (110\,\text{Hz})}{343\,\text{m/s}} + \frac{1}{2} = 3$$

$$n_B = \frac{2Lf_B}{v} + \frac{1}{2} = \frac{2 \times (3{,}90\,\text{m}) \times (154\,\text{Hz})}{343\,\text{m/s}} + \frac{1}{2} = 4 \ .$$

$$n_A = 3 \quad \text{et} \quad n_B = 4 \ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse Les numéros de modes sont cohérents, étant des entiers consécutifs et d'un ordre de grandeur correct.

P53 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$m_c = 61{,}4\,\text{g}$	$f_{4,t}$
$L_c = 1{,}10\,\text{m}$	$f_{1,c}$
$n_c = 6$	F_c
$L_t = 76{,}0\,\text{cm}$	
$n_t = 4$	

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation de la fréquence pour un tuyau ouvert-ouvert.

Résoudre le problème Le quatrième harmonique n'existant pas pour un tuyau ouvert-fermé, le traitement à faire est celui d'un tuyau ouvert-ouvert (ou fermé-fermé, moins courant mais identique). La fréquence du tuyau ouvert-ouvert est donnée par

$$f_n = \frac{nv_{\text{son}}}{2L} \ .$$

On connaît toutes les valeurs requises pour calculer f_n, pour le quatrième mode :

$$f_{t,4} = \frac{4v_{\text{son}}}{2L_t} = \frac{4 \times 343\,\text{m/s}}{2 \times 0{,}760\,\text{m}} = 903\,\text{Hz} \ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la fréquence est correct.

b. Identifier la clé La clé est le fait que la fréquence de la corde et la fréquence du tuyau sont les mêmes.

Résoudre le problème La fréquence harmonique d'une corde fixée à ses deux extrémités est comparable à celle d'un tuyau ouvert-ouvert. Puisque la vibration de la corde fait osciller le tuyau, les deux fréquences sont égales. On trouve alors

$$f_{c,6} = \frac{n_c v_c}{2L_c} = f_{t,4} \ . \qquad \text{(i)}$$

On peut alors trouver une expression de la longueur de la corde et l'utiliser pour déterminer sa fréquence fondamentale (le module de la vitesse de l'onde sur la corde étant constant mais inconnu) :

$$L_c = \frac{n_c v_c}{2f_{t,4}} = \frac{6v_c}{2f_{t,4}} = \frac{3v}{f_{t,4}} \ .$$

Le mode fondamental de la corde peut être exprimé par la même équation (i) :

$$f_{c,1} = \frac{1 \times v_c}{2L_c}, \qquad \text{avec} \qquad L_c = \frac{3v_c}{f_{t,4}}$$

$$f_{c,1} = \frac{1 \times v_c}{2 \times \frac{3v_c}{f_{t,4}}} = \frac{f_{t,4}}{6} \ .$$

La fréquence du tuyau dans son quatrième mode ayant été calculée en **a.**, on a

$$f_{c,1} = \frac{903\,\text{Hz}}{6} = 150\,\text{Hz} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la fréquence est correct.

c. Identifier la clé La clé est l'équation liant le module de la vitesse des ondes sur une corde à sa tension et à sa densité linéique.

Résoudre le problème Le module de la vitesse des ondes parcourant une corde est donné par

$$v_c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \qquad \text{avec} \qquad \mu = \frac{m_c}{L_c} \ .$$

La tension est donc

$$F = v_c^2 \mu = \frac{v_c^2 m_c}{L_c} \ .$$

Le module de la vitesse des ondes sur la corde peut être obtenu par l'équation (i) :

$$v_c = \frac{2L_c f_{c,6}}{n_{c,6}} \ ,$$

et l'équation de la tension peut alors être modifiée pour procéder au calcul :

$$F = \frac{v_c^2 m_c}{L_c} = \frac{(\frac{2L_c f_{c,6}}{n_{c,6}})^2 m_c}{L_c} = \frac{4L_c f_{c,6}^2 m_c}{n_6^2} = \frac{4 \times (1{,}10\,\text{m}) \times (903\,\text{Hz})^2 \times (0{,}061\,4\,\text{kg})}{6^2} = 6{,}11\,\text{kN} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Cette tension peut paraître élevée, mais elle demeure possible pour la tension d'une corde d'un certain diamètre.

P54 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$L_c = 0{,}700\,\text{m}$	$f_{\text{min,rés}}$
$\mu = 4{,}82\,\text{g/m}$	
$F = 850\,\text{N}$	
$L_t = 0{,}429\,\text{m}$	

Identifier la clé La clé est l'expression du rapport des modes de vibration pour la corde et le tuyau.

Résoudre le problème On établit pour chacun des deux systèmes l'équation de la fréquence en fonction des paramètres détaillés. Pour la corde, fixe à ses deux extrémités, la fréquence harmonique est

$$f_{c,n} = \frac{n_c v_c}{2L_c}, \qquad \text{avec} \qquad v_c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \ ,$$

d'où

$$f_{c,n} = \frac{n_c\sqrt{\frac{F}{\mu}}}{2L_c} = \frac{n_c\sqrt{F}}{2L_c\sqrt{\mu}} \ . \tag{i}$$

Pour le tuyau ouvert-fermé, la fréquence harmonique est

$$f_{t,n} = (2n_t - 1)\frac{v_{son}}{4L_t} \ . \tag{ii}$$

La fréquence unique faisant résonner les deux systèmes permet de poser l'égalité des équations (i) et (ii) :

$$\frac{n_c\sqrt{F}}{2L_c\sqrt{\mu}} = (2n_t - 1)\frac{v_{son}}{4L_t} \ .$$

La simplification des deux membres par le calcul des valeurs connues donne

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{850\,\text{N}}}{2 \times 0{,}700\,\text{m}\sqrt{0{,}004\,82\,\text{kg/m}}}n_c &= \frac{2 \times 343\,\text{m/s}}{4 \times 0{,}429\,\text{m}}n_t - \frac{343\,\text{m/s}}{4 \times 0{,}429\,\text{m}} \\ 300n_c &= 400n_t - 200 \\ n_c &= \frac{4}{3}n_t - \frac{2}{3} \ . \end{aligned}$$

On cherche une solution de cette équation telle que n_c et n_t sont tous deux des entiers. On peut essayer différentes valeurs entières de n_t à partir de $n_t = 1$ (mode fondamental) jusqu'à trouver une solution entière pour n_c.

$$\begin{aligned} \text{Pour } n_t = 1 : \qquad n_c &= \frac{4}{3}n_t - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \times 1 - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \\ \text{Pour } n_t = 2 : \qquad n_c &= \frac{4}{3}n_t - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \times 2 - \frac{2}{3} = 2 \end{aligned}$$

On sait maintenant que les deux systèmes sont dans leur second mode de vibration, et donc que les deux systèmes seront en résonance en même temps avec la fréquence la plus faible.

Chacune des équations (i) et (ii) permet de trouver la fréquence commune correspondante. À partir des propriétés du tuyau, on a

$$f_{t,n} = (2n_t - 1)\frac{v_{son}}{4L_t} = (2 \times 2 - 1)\frac{343\,\text{m/s}}{4 \times 0{,}429\,\text{m}} = 600\,\text{Hz} \ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la fréquence est correct.

Q55 **Identifier la clé** La clé est le fait que pour une même vitesse de l'observateur, celui qui s'approche le plus rapidement de la source entend une fréquence plus aiguë.

Résoudre le problème On trouve les fréquences perçues par les deux observateurs à partir de l'équation

$$f' = \frac{v_x - v_{D,x}}{v_x - v_{S,x}}f_0 \ .$$

Pour l'observateur de gauche, l'axe utilisé est dirigé vers la gauche, dans la même orientation que le son. Ainsi, la composante de la vitesse du son est positive, la composante x de la vitesse de la source est négative ($v_{S,x} = -8\,\text{m/s}$) et celle de l'observateur, négative également ($v_{D,x} = -4\,\text{m/s}$). La fréquence f_g perçue sera :

$$f_{\text{g}} = \frac{v_x - v_{D,x}}{v_x - v_{S,x}} f_0 = \frac{343\,\text{m/s} - (-4\,\text{m/s})}{343\,\text{m/s} - (-8\,\text{m/s})} f_0 = 0{,}988 f_0 \ .$$

Pour l'observateur de droite, l'axe est orienté vers la droite. La source a donc une vitesse positive ($v_{S,x} = 8\,\text{m/s}$) et l'observateur, une vitesse négative ($v_{S,x} = -4\,\text{m/s}$). La fréquence $f_{\text{d},x}$ perçue sera

$$f_{\text{g}} = \frac{v_x - v_{D,x}}{v_x - v_{S,x}} f_0 = \frac{343\,\text{m/s} - (-4\,\text{m/s})}{343\,\text{m/s} - (8\,\text{m/s})} f_0 = 1{,}036 f_0 \ .$$

L'ordre croissant des fréquences est

$$f_{\text{g}} < f_0 < f_{\text{d}} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

E56 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$f = 925\,\text{Hz}$	v_{train}
$f' = 976\,\text{Hz}$	

Identifier la clé La clé est l'équation de l'effet Doppler dans laquelle on isole la vitesse de la source.

Résoudre le problème L'équation générale de l'effet Doppler est

$$f' = \frac{v_x - v_{D,x}}{v_x - v_{S,x}} f \ . \qquad \text{(i)}$$

Puisque la source est le train immobile au loin devant l'observateur, l'axe utilisé est dirigé dans le sens de la vitesse du son, en sens opposé à la vitesse de l'observateur (le détecteur). Ainsi, la composante x de la vitesse du détecteur est négative. Le module de la vitesse du son étant nul, l'équation (i) devient

$$f' = \frac{v_{\text{son},x} - (-v_{\text{train},x})}{v_{\text{son},x} - 0} f \ .$$

La fréquence de la source est la même que celle du train de l'observateur telle qu'il la perçoit, et on suppose que le train au loin a un sifflet identique. Donc $f = 925\,\text{Hz}$. On peut isoler la vitesse du train (dont le module est v_{train}) et déterminer sa valeur :

$$v_{\text{train}} = \frac{f'}{f} \times v_{\text{son},x} - v_{\text{son},x} = v_{\text{son},x} \times \left(\frac{f'}{f} - 1\right) = 343\,\text{m/s} \times \left(\frac{976\,\text{Hz}}{925\,\text{Hz}} - 1\right) = 18{,}9\,\text{m/s} \ .$$

Convertie en kilomètres par heure, cette vitesse équivaut à

$$18{,}9\,\text{m/s} \times \frac{3{,}6\,\text{km/h}}{1\,\text{m/s}} = 68{,}1\,\text{km/h} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse est correct.

E57 **Décortiquer le problème**

Connue	Inconnue
$f' = 2f$	$\vec{\mathbf{v}}_{\text{source}}$

Identifier la clé La clé est le fait que si la fréquence perçue est plus élevée que la fréquence réelle, la source se dirige vers l'observateur.

Résoudre le problème L'équation générale de l'effet Doppler est

$$f' = \frac{v_x - v_{D,x}}{v_x - v_{S,x}} f \ . \qquad \text{(i)}$$

L'axe utilisé pour définir le signe de chaque terme est dirigé vers l'observateur comme la vitesse du son, comme également la vitesse de la source elle-même. La composante x de la vitesse du son et de la source est donc positive. L'observateur étant immobile, et la fréquence modifiée valant le double de la fréquence réelle, l'équation (i) devient

$$\begin{aligned} f' &= \frac{v_{\text{son},x} - 0}{v_{\text{son},x} - v_{S,x}} f = 2f \\ &\frac{v_{\text{son},x}}{v_{\text{son},x} - v_{S,x}} = 2 \\ v_{S,x} &= \frac{v_{\text{son},x}}{2} = \frac{343\,\text{m/s}}{2} = 171{,}5\,\text{m/s}\ . \end{aligned}$$

Puisqu'on a réalisé que la vitesse de la source devait être dirigée vers l'observateur, on a

$$\vec{\mathbf{v}}_S = 171{,}5\,\text{m/s}\ \overrightarrow{\textsf{vers l'observateur}}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse est correct, elle est élevée mais le doublement de la fréquence est également extrême.

E58 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$f_1 - f_2 = 100\,\text{Hz}$	v_S
$f'_1 - f'_2 = 120\,\text{Hz}$	

Identifier la clé La clé est le fait que si la différence des fréquences perçues augmente, le haut-parleur s'approche du micro.

Résoudre le problème L'équation générale de l'effet Doppler est

$$f' = \frac{v_x - v_{D,x}}{v_x - v_{S,x}} f\ .$$

Appliquée aux deux fréquences produites, pour un détecteur immobile, cette équation admet

$$f'_1 = \frac{v_x - 0}{v_x - v_{S,x}} f_1 \qquad \text{et} \qquad f'_2 = \frac{v_x - 0}{v_x - v_{S,x}} f_2\ . \qquad \text{(i)}$$

Les différences des fréquences émises et perçues permettent d'écrire les équations suivantes :

$$f_1 - f_2 = 100\,\text{Hz} \qquad \text{et} \qquad f'_1 - f'_2 = 120\,\text{Hz}\ . \qquad \text{(ii)}$$

On considère un axe x orienté dans la direction de la vitesse du son. De plus, la composante x de la vitesse de la source est positive puisque, le facteur d'augmentation des deux fréquences initiales étant le même, l'augmentation de la valeur des fréquences est compatible avec une augmentation de l'écart entre elles. Comme c'est une vitesse de rapprochement qui fait augmenter les fréquences perçues par un observateur immobile, la vitesse de la source est orientée dans le même sens que le son lui-même.

On a donc un système de quatre équations comportant cinq inconnues, mais un traitement très simple permet de trouver une équation où $v_{S,x}$ est la seule inconnue. On développe la différence $f'_1 - f'_2$ à partir des équations (i) :

$$f'_1 - f'_2 = \frac{v_x}{v_x - v_{S,x}} f_1 - \frac{v_x}{v_x - v_{S,x}} f_2 = \frac{v_x}{v_x - v_{S,x}} (f_1 - f_2)\ .$$

Les deux différences de fréquences $f'_1 - f'_2$ et $f_1 - f_2$ étant connues, il s'agit déjà d'une forme où $v_{S,x}$ est la seule inconnue, même si les fréquences individuelles sont inconnues :

$$v_{S,x} = v_{\text{son},x} \frac{(f'_1 - f'_2) - (f_1 - f_2)}{(f'_1 - f'_2)} = 343\,\text{m/s} \left(\frac{120\,\text{Hz} - 100\,\text{Hz}}{120\,\text{Hz}} \right) = 57{,}2\,\text{m/s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

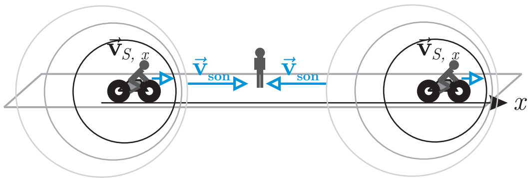
Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse est correct, pour une telle expérience (équivaut tout de même à 206 km/h).

P59 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$f_{\text{app}} = 942\,\text{Hz}$	v_{moto}
$f_{\text{él}} = 823\,\text{Hz}$	

Identifier la clé La clé est l'application de l'équation de l'effet Doppler pour la fréquence d'approche et pour la fréquence d'éloignement.

Illustrer la situation La figure ci-contre illustre la moto durant son approche et durant son éloignement. On y montre aussi les fronts d'onde qui sont rapprochés devant la moto et espacés derrière elle.



Résoudre le problème L'équation générale de l'effet Doppler est

$$f' = \frac{v_x - v_{D,x}}{v_x - v_{S,x}} f \ . \qquad \text{(i)}$$

L'observateur est immobile ($v_{D,x} = 0$), et la fréquence la plus élevée se produit nécessairement lorsque la moto s'approche de l'observateur. De plus, durant l'approche, la composante x de la vitesse de la moto est positive (car dans le même sens que le son qui atteint l'observateur), alors qu'elle devient négative durant l'éloignement (car en sens opposé au son qui se dirige vers l'observateur). En considérant le module de la vitesse de la moto (v_S), l'équation (i) appliquée à ces deux cas devient

$$\text{Approche : } f_{\text{app}} = \frac{v_x - 0}{v_x - v_{S,x}} f = \frac{v_x}{v_x - v_{S,x}} f$$

$$\text{Éloignement : } f_{\text{él}} = \frac{v_x - 0}{v_x - (-v_S)} f = \frac{v_x}{v_x + v_S} f \ .$$

Ces deux équations forment un système de deux équations à deux inconnues (f et v_S). En isolant la fréquence réelle f dans chacune, on pourra faire disparaître celle-ci et calculer le module de la vitesse de la moto :

$$f = \frac{f_{\text{app}}(v_x - v_{S,x})}{v_x} \qquad \text{et} \qquad f = \frac{f_{\text{él}}(v_x + v_{S,x})}{v_x}$$

$$\frac{f_{\text{app}}(v_x - v_{S,x})}{v} = \frac{f_{\text{él}}(v_x + v_{S,x})}{v}$$

$$f_{\text{app}} v_x - f_{\text{app}} v_{S,x} = f_{\text{él}} v_x + f_{\text{él}} v_{S,x}$$

$$v_{S,x} = \frac{f_{\text{app}} - f_{\text{él}}}{f_{\text{app}} + f_{\text{él}}} v_{\text{son}} = \frac{942\,\text{Hz} - 823\,\text{Hz}}{942\,\text{Hz} + 823\,\text{Hz}} \times 343\,\text{m/s} = 23{,}1\,\text{m/s} = 83\,\text{km/h} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

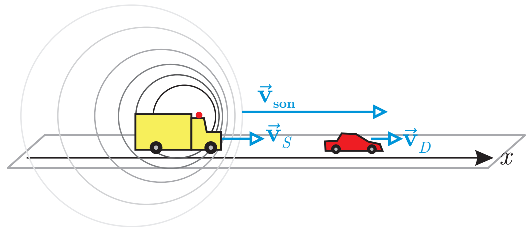
Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse de la moto est correct.

P60 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$v_{S,x} = 70{,}0\,\text{km/h}$	$f'_{\text{derrière}}$
$v_{D,x} = 50{,}0\,\text{km/h}$	f'_{devant}
$f = 2{,}00\,\text{kHz}$	

Identifier la clé La clé est la détermination du sens de l'axe utilisé pour le sens des vitesses.

a. **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la situation où l'ambulance se déplace derrière la voiture, dans la même direction.



Résoudre le problème L'équation générale de l'effet Doppler est

$$f' = \frac{v_x - v_{D,x}}{v_x - v_{S,x}} f \ . \qquad \text{(i)}$$

Lorsque l'ambulance est derrière la voiture (*voir la figure ci-dessus*), le son atteignant la voiture se déplace dans le même sens que les deux véhicules. C'est le sens de l'axe utilisé et toutes les vitesses sont positives. De plus, il faut convertir ces vitesses en mètres par seconde, car la vitesse du son est exprimée en mètres par seconde :

$$v_{\mathrm{a}} = 70{,}0\,\mathrm{km/h} \times \frac{1\,\mathrm{m/s}}{3{,}6\,\mathrm{km/h}} = 19{,}4\,\mathrm{m/s}$$

et

$$v_{\mathrm{v}} = 50{,}0\,\mathrm{km/h} \times \frac{1\,\mathrm{m/s}}{3{,}6\,\mathrm{km/h}} = 13{,}9\,\mathrm{m/s} \ .$$

La fréquence perçue est alors

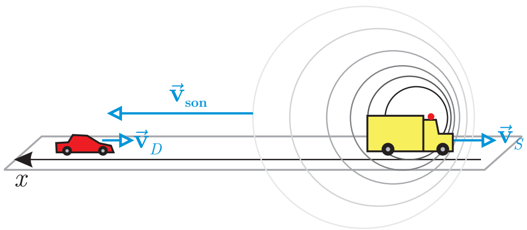
$$f' = \frac{v_x - v_{D,x}}{v_x - v_{S,x}} f \ .$$

$$f'_{\text{derrière}} = \frac{v_{\text{son}} - v_D}{v_{\text{son}} - v_S} f = \frac{343\,\mathrm{m/s} - 13{,}9\,\mathrm{m/s}}{343\,\mathrm{m/s} - 19{,}4\,\mathrm{m/s}} \times 2\,000\,\mathrm{Hz} = 2{,}03\,\mathrm{kHz} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la fréquence est correct, elle est légèrement augmentée par l'effet Doppler en raison du rapprochement de l'ambulance.

b. **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la situation où l'ambulance roule devant la voiture, après l'avoir dépassée.

Identifier la clé La clé est la bonne détermination du sens de l'axe utilisé pour le sens des vitesses.



Résoudre le problème Lorsque l'ambulance est devant la voiture (*voir la figure ci-dessus*), le son atteignant la voiture se déplace dans le sens opposé à celui des deux véhicules. C'est le sens de l'axe utilisé et toutes les vitesses sont négatives. La fréquence perçue est alors

$$f' = \frac{v_x - (-v_{D,x})}{v_x - (-v_{S,x})} f = \frac{v_x + v_{D,x}}{v_x + v_{S,x}} f$$

$$f'_{\text{devant}} = \frac{v_{\text{son}} + v_{D,x}}{v_{\text{son}} + v_{S,x}} f = \frac{343\,\mathrm{m/s} + 13{,}9\,\mathrm{m/s}}{343\,\mathrm{m/s} + 19{,}4\,\mathrm{m/s}} \times 2\,000\,\mathrm{Hz} = 1{,}97\,\mathrm{kHz} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la fréquence est correct, elle est légèrement réduite par l'effet Doppler en raison de l'éloignement de l'ambulance.

P61 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre la situation pour l'ultrason qui se déplace vers le mur, puis pour l'ultrason qui revient vers la chauve-souris.

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$v_{\mathrm{CS},x} = 8{,}00\,\mathrm{m/s}$	f''
$f = 40{,}00\,\mathrm{kHz}$	$\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{ins}}$

a. Identifier la clé La clé est le fait que le mur se comporte d'abord comme un détecteur immobile et émet à son tour une fréquence correspondant à celle qu'il a perçue.

Résoudre le problème L'équation générale de l'effet Doppler est

$$f' = \frac{v_x - v_{D,x}}{v_x - v_{S,x}} f \ .$$

Le mur fait office d'observateur immobile pour la première moitié du traitement. La chauve-souris se dirigeant vers le mur, sa vitesse est dans le même sens que le son émis vers le mur et est donc positive. La fréquence à laquelle les ondes frappent le mur est alors

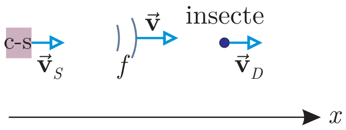
$$f' = \frac{v_{\mathrm{son},x} - 0}{v_{\mathrm{son},x} - v_S} f = \frac{343\,\mathrm{m/s}}{343\,\mathrm{m/s} - 8{,}00\,\mathrm{m/s}} \times 40\,000\,\mathrm{Hz} = 40{,}96\,\mathrm{kHz} \ .$$

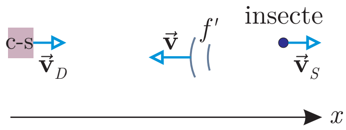
Lorsque le mur (devenant une source immobile) réémet le son vers la chauve-souris, l'axe considéré est dirigé vers la chauve-souris et la vitesse de celle-ci ($v_{D,x}$) est alors négative ($v_{D,x} = -8{,}00\,\mathrm{m/s}$) :

$$f'' = \frac{v_{\mathrm{son},x} - v_{D,x}}{v_{\mathrm{son},x} - 0} f' = \frac{343\,\mathrm{m/s} - (-8{,}00\,\mathrm{m/s})}{343\,\mathrm{m/s}} \times 40{,}96\,\mathrm{kHz} = 41{,}91\,\mathrm{kHz} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la fréquence est correct, elle est légèrement augmentée par le double effet Doppler causé par une faible vitesse.

b. Illustrer la situation La figure suivante illustre le schéma de la situation pour l'ultrason qui se déplace vers l'insecte, puis pour l'ultrason réfléchi, qui revient vers la chauve-souris.





Identifier la clé La clé est l'union des équations des deux sens du déplacement des ondes en une seule équation.

Résoudre le problème L'équation de l'effet Doppler appliqué à l'émission du son vers l'insecte est

$$f' = \frac{v_x - v_{\mathrm{ins},x}}{v_x - v_{\mathrm{CS},x}} f \ .$$

A priori, on ignore le sens du déplacement de l'insecte, donc on ignore le signe devant sa composante x de vitesse. Mais on sait tout de même que pour la deuxième partie du traitement, ce signe est inversé. La vitesse de la chauve-souris est inversée par rapport au sens de déplacement des ondes sonores. (On peut cependant deviner, à partir du résultat obtenu en **a.**, que l'insecte fuit la chauve-souris, car la fréquence que celle-ci reçoit est plus faible que celle de l'écho sur le mur.) Pour la seconde partie du traitement, les symboles v_S et v_D représentant le module des vitesses, la fréquence modifiée une seconde fois est

$$f'' = \frac{v_x - (-v_{\mathrm{CS},x})}{v_x - (-v_{\mathrm{ins},x})} f'$$

$$f'' = \frac{v_x + v_{\mathrm{CS},x}}{v_x + v_{\mathrm{ins},x}} \times \frac{v_x - v_{\mathrm{ins},x}}{v_x - v_{\mathrm{CS},x}} f \ .$$

Cette dernière équation ne comporte qu'une inconnue, v_{ins}, qu'on peut isoler algébriquement :

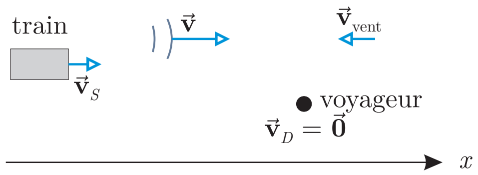
$$
\begin{aligned}
f''(v_x + v_{\text{ins},x})(v_x - v_{\text{CS},x}) &= f(v_x + v_{\text{CS},x})(v_x - v_{\text{ins},x}) \\
v_{\text{ins},x} &= \frac{f v_x(v_x + v_{\text{CS},x}) + f'' v_x(v_{\text{CS},x} - v_x)}{f(v_x + v_{\text{CS},x}) + f''(v_x - v_{\text{CS},x})} \\
v_{\text{ins},x} &= \frac{40\,000 \times 343(343+8) + 41\,000 \times 343(8-343)}{40\,000(343+8) + 41\,000(343-8)} \\
v_{\text{ins},x} &= 3{,}77\,\text{m/s} \ .
\end{aligned}
$$

Cette valeur étant positive, cela confirme que la composante x de la vitesse de l'insecte est orientée vers le mur. L'autre hypothèse de départ aurait donné la même valeur, mais avec un signe négatif.

$$\vec{\mathbf{v}} = 3{,}77\,\text{m/s}\ \overrightarrow{\text{vers le mur}} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse de l'insecte est correct.

P62 **Illustrer la situation** La figure suivante présente le schéma de la situation.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$f'_{\text{quai}} = 2\,082\,\text{Hz}$	f
$v_{S,x} = v_{\text{train}} = 13{,}0\,\text{m/s}$	
$v_{\text{vent}} = 11{,}0\,\text{m/s}$	

Identifier la clé La clé est le fait que le vent qui souffle dans la direction opposée aux ondes sonores réduit la vitesse du son d'une quantité égale à sa vitesse.

Résoudre le problème L'équation générale de l'effet Doppler est

$$f' = \frac{v_x - v_{D,x}}{v_x - v_{S,x}} f \ .$$

Dans le cas du voyageur sur le quai, l'observateur est immobile ($v_{D,x} = 0$). De plus, la vitesse des ondes v est réduite par la vitesse du vent :

$$v_x = v_{\text{son},x} - v_{\text{vent},x} = 343\,\text{m/s} - 11{,}0\,\text{m/s} = 332\,\text{m/s} \ .$$

En considérant un axe dans le sens de la vitesse du son, la vitesse du train qui approche est positive, car de même sens que le son qu'il émet vers le quai. On peut donc calculer la fréquence réelle de la source :

$$
\begin{aligned}
f' &= \frac{v_x - 0}{v_x - v_{S,x}} f \\
f &= \frac{v_x - v_{S,x}}{v_x} f' = \frac{332\,\text{m/s} - 13{,}0\,\text{m/s}}{332\,\text{m/s}} \times 2\,082\,\text{Hz} = 2\,000\,\text{Hz} \ .
\end{aligned}
$$

C'est la fréquence réelle de la source, et les passagers du train qui l'émet entendent la même fréquence parce qu'ils se déplacent avec la source. (L'application de l'effet Doppler contiendrait une annulation de l'effet des vitesses du sifflet et des passagers.)

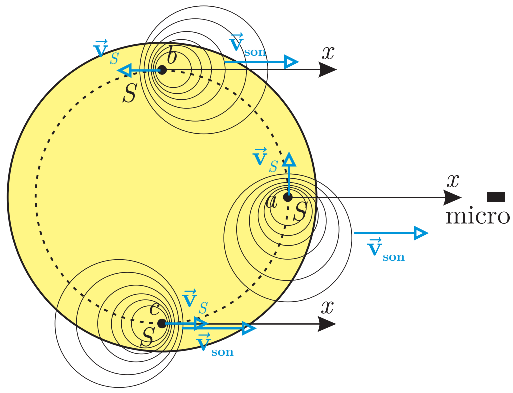
$$f = 2\,000\,\text{Hz} \qquad \text{(réponse)}$$

P63 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$f_{\text{rot}} = 78{,}00\,\text{tr/min}$	f_a
$f = 1\,500\,\text{Hz}$	f_b
$d = 40{,}00\,\text{cm}$	f_c
$r = 25{,}00\,\text{cm}$	

Identifier la clé La clé est le fait que la composante de la vitesse à considérer pour la source est la composante de la vitesse réelle orientée vers le détecteur.

Illustrer la situation La figure suivante illustre trois positions de la source sonore durant sa rotation sur la table tournante. On y voit que les fronts d'onde sont rapprochés devant la source et espacés derrière elle.



a. Résoudre le problème Dans la position a, la vitesse de la source est parfaitement perpendiculaire à l'axe reliant la source et le détecteur. La composante en x de la vitesse de la source est donc égale à 0. Le micro étant immobile, l'équation de l'effet Doppler est réduite à une équivalence entre la fréquence produite et la fréquence perçue :

$$f' = \frac{v - v_{D,x}}{v - v_{S,x}} f = \frac{v_x - 0}{v - 0} f \qquad \Rightarrow \qquad f' = f \ .$$

Le micro enregistrera la même fréquence que la fréquence réelle de la source :

$$f_a = 1\,500\,\text{Hz} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Cette égalité est logique puisqu'à la position a, la source ne se rapproche ni ne s'éloigne du micro.

b. Résoudre le problème Dans la position b, la source s'éloigne du micro. On évalue la composante de vitesse parallèle à l'axe reliant la source et le micro.

D'abord, la vitesse tangentielle de la source est liée à sa vitesse de rotation et à son rayon de rotation :

$$v_{\text{t}} = \omega r = 2\pi f_{\text{rot}} r = 2\pi \times 78{,}00\,\text{tr/min} \times \frac{1\,\text{min}}{60\,\text{s}} \times 0{,}250\,0\,\text{m} = 2{,}04\,\text{m/s} \ .$$

Pour trouver la composante de cette vitesse parallèle à l'axe des x, on doit déterminer l'angle que forme cet axe avec l'horizontale :

$$\tan\theta = \frac{r}{d} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arctan\left(\frac{r}{d}\right) = \arctan\left(\frac{25{,}00\,\text{cm}}{40{,}00\,\text{cm}}\right) = 32{,}0^\circ \ .$$

La composante $v_{S,x}$ est alors donnée par

$$\cos\theta = \frac{v_{\text{t}}}{v_{S,x}} \qquad \Rightarrow \qquad v_{S,x} = v_{\text{t}} \cos\theta = 2{,}04\,\text{m/s} \times \cos(32{,}0^\circ) = 1{,}73\,\text{m/s} \ .$$

La composante x de cette vitesse est en éloignement du micro et est donc négative, car en sens opposé aux ondes atteignant le micro (donc $v_{S,x} = -1{,}73\,\text{m/s}$). On peut maintenant calculer la fréquence perçue par le micro avec cette composante de vitesse de la source :

$$f' = \frac{v - v_{D,x}}{v - v_{S,x}} f = \frac{v_x - 0}{v - v_{S,x}} f$$

$$f' = \frac{343\,\text{m/s}}{343\,\text{m/s} - (-1{,}73\,\text{m/s})} \times 1\,500\,\text{Hz} = 1\,492\,\text{Hz} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la fréquence est correct, elle est très légèrement réduite par l'éloignement de la source.

c. Résoudre le problème Dans la position c, la source s'approche du micro, et la composante de vitesse parallèle à l'axe reliant la source et le micro est la même qu'en **b.**, mais positive, car dans le même sens que les ondes qui atteignent le micro (donc $v_{S,x} = 1{,}73\,\text{m/s}$).

On peut alors calculer immédiatement la fréquence perçue par le micro avec cette composante de vitesse de la source :

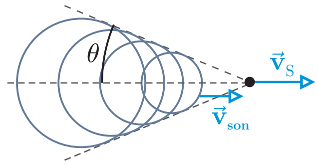
$$f' = \frac{v - v_{D,x}}{v - v_{S,x}} f = \frac{v - 0}{v - v_{S,x}} f$$

$$f' = \frac{343\,\text{m/s}}{343\,\text{m/s} - 1{,}73\,\text{m/s}} \times 1\,500\,\text{Hz} = 1\,508\,\text{Hz}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la fréquence est correct, elle est très légèrement augmentée par le rapprochement de la source.

E64 Décortiquer le problème

Connue	Inconnue
$\theta = 40°$	v_{balle}



Identifier la clé La clé est l'équation de l'angle du cône de Mach.
Illustrer la situation La figure ci-contre illustre les fronts d'onde émis par la source ainsi que le cône de Mach délimité par l'ensemble des fronts d'onde.
Résoudre le problème L'angle du cône de Mach est donné par

$$\sin\theta = \frac{v}{v_S}\ .$$

La source étant la balle de fusil, on peut isoler la vitesse et trouver sa valeur :

$$v_{\text{balle}} = \frac{v_{\text{son}}}{\sin\theta} = \frac{343\,\text{m/s}}{\sin(40°)} = 534\,\text{m/s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse est correct pour une balle de fusil.

P65 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$h = 4{,}00\,\text{km}$	θ_{Mach}
$v_{\text{avion}} = 530\,\text{m/s}$	Δx_{avion}
$v_{\text{son}} = 330\,\text{m/s}$	Δt_{choc}

a. Identifier la clé La clé est l'équation de l'angle du cône de Mach.
Résoudre le problème L'angle du cône de Mach est donné par

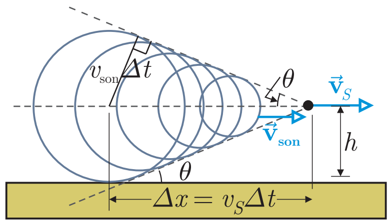
$$\sin\theta = \frac{v}{v_S} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arcsin\left(\frac{v}{v_S}\right)\ .$$

Avec les valeurs spécifiées pour les modules de vitesse de la source (l'avion) et du son, on trouve

$$\theta = \arcsin\left(\frac{v_{\text{son}}}{v_{\text{avion}}}\right) = \arcsin\left(\frac{330\,\text{m/s}}{530\,\text{m/s}}\right) = 38{,}5°\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'angle du cône de Mach est correct, il est inférieur à 45° puisque l'avion va plus vite que le son.

b. **Identifier la clé** La clé est l'utilisation de l'angle trouvé en **a.** pour déterminer par géométrie la distance parcourue par l'avion.



Résoudre le problème L'angle de 38,5° trouvé en **a.** met en relation la hauteur h de l'avion et la distance qu'il parcourt alors que l'onde de choc atteint le sol verticalement. C'est l'analyse du triangle sous le cône de Mach (*voir la figure ci-contre*) :

$$\tan\theta = \frac{h}{\Delta x_{\text{avion}}}$$

$$\Delta x_{\text{avion}} = \frac{h}{\tan\theta} = \frac{4{,}00\,\text{km}}{\tan(38{,}5°)} = 5{,}03\,\text{km}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance est correct, elle est comparable à l'altitude pour un angle avoisinant 45°.

c. **Identifier la clé** La clé est le traitement par cinématique de la distance trouvée en **b.** et de la vitesse de l'avion.

Résoudre le problème L'avion suit un mouvement rectiligne uniforme défini par l'équation de la cinématique :

$$x = x_0 + v_x\Delta t \qquad \Rightarrow \qquad \Delta x = v_x\Delta t\ .$$

Δx est la distance trouvée en **b.** : 5,03 km. La durée du parcours de l'avion est donc

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_{\text{avion}}} = \frac{5{,}03\,\text{km}}{530\,\text{m/s}}$$

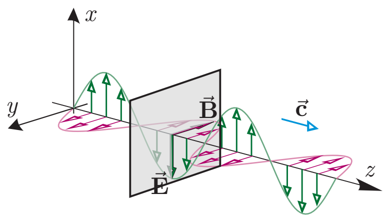
$$\Delta t = 9{,}48\,\text{s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'intervalle de temps est correct, le son ayant une très grande distance à parcourir.

Physique 3 Ondes et physique moderne - 1re édition

Chapitre 04 Les ondes électromagnétiques

Q1 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la situation. Le plan illustré contient les vecteurs champ électrique et champ magnétique à l'instant décrit dans l'énoncé.



Identifier la clé La clé est le fait que la direction de l'onde est liée au produit vectoriel du champ électrique et du champ magnétique.

Résoudre le problème Le produit vectoriel $\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$ est simple ici, car les vecteurs $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{c}}$ sont parallèles à des axes du référentiel. $\vec{\mathbf{E}}$ est orienté dans le sens opposé à l'axe des x, et la vitesse de l'onde, dans le sens de l'axe des z. Par déduction, le champ magnétique doit donc être orienté selon le troisième axe, et le sens de $\vec{\mathbf{B}}$ sur cet axe peut être déterminé par la règle de la main droite. Ainsi, on trouve que $\vec{\mathbf{B}}$ doit être orienté dans le sens opposé à l'axe des y. Dans la figure, l'instant choisi est représenté par le plan qui contient un champ $\vec{\mathbf{E}}$ dans le sens opposé à l'axe des x et un champ $\vec{\mathbf{B}}$ dans le sens opposé à l'axe des y.

$\vec{\mathbf{B}}$ est orienté dans le sens opposé à l'axe des y. (réponse)

Valider la réponse La règle de la main droite est respectée dans le produit $\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$ si on vérifie le sens de propagation de l'onde.

Q2 **a.** **Identifier la clé** La clé est l'argument du sinus qui contient la variable de la position y ainsi qu'un signe positif devant le terme ωt.

Résoudre le problème Le fait que le champ magnétique soit défini pour différentes positions y indique que l'onde atteint toutes les positions y, et donc qu'elle se dirige parallèlement à cet axe. Par ailleurs, il s'agit de l'équation d'une onde progressive dans laquelle un signe positif devant le terme ωt est associé à une vitesse en sens inverse de l'axe impliqué. La direction de l'onde est donc le sens opposé à l'axe des y.

Dans le sens opposé à l'axe des y. (réponse)

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que la direction de l'onde est liée au produit vectoriel du champ électrique et du champ magnétique.

Résoudre le problème On connaît l'orientation de la vitesse de l'onde, et l'équation fournie permet de déterminer la direction du champ magnétique à la position et à l'instant indiqués :

$$\vec{\mathbf{B}} = B_{\mathrm{m}} \sin(ky + \omega t)\vec{\boldsymbol{k}}, \qquad \text{avec} \qquad y = 0 \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

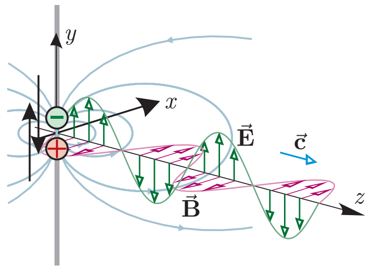
$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{B}} &= B_{\mathrm{m}} \sin(0 + \frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{4})\vec{\boldsymbol{k}} \\ &= B_{\mathrm{m}} \sin(\frac{\pi}{2})\vec{\boldsymbol{k}} \\ &= B_{\mathrm{m}} \times 1\vec{\boldsymbol{k}}\ .\end{aligned}$$

Le champ magnétique est orienté dans le sens de l'axe des z. Par déduction et selon la règle de la main droite, le champ électrique doit donc nécessairement être orienté dans le sens de l'axe des x.

$\vec{\mathbf{E}}$ est orienté dans le sens de l'axe des x. (réponse)

Valider la réponse La règle de la main droite est respectée dans le produit $\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$ si on vérifie le sens de propagation de l'onde.

Q3 a. **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la situation.



Identifier la clé La clé est la figure 4.5 du manuel, montrant le champ électrique produit par un champ oscillant.

Résoudre le problème À partir de l'origine, les points sur l'axe des z sont éclairés par une onde se déplaçant dans le sens de cet axe. De plus, l'orientation de l'oscillation des charges dans l'antenne indique le sens d'oscillation du champ électrique partout autour de l'antenne (dans le plan xz). Comme le montre la figure 4.5 du manuel, le champ électrique oscille autour de l'antenne parallèlement au champ à l'intérieur même de l'antenne (orienté dans le sens de l'axe des y).

$\vec{\mathbf{E}}$ oscille parallèlement à l'axe des y (parallèlement à l'antenne). (réponse)

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que la direction de l'onde est liée au produit vectoriel du champ électrique et du champ magnétique.

Résoudre le problème Les vecteurs $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{c}}$ sont parallèles à des axes du référentiel. $\vec{\mathbf{E}}$ est parallèle à l'axe des y, et la vitesse de l'onde est parallèle à l'axe des z (peu importe de quel côté de l'origine on se trouve). Par déduction, le champ magnétique doit donc être orienté selon le troisième axe, c'est-à-dire l'axe des x.

$\vec{\mathbf{B}}$ oscille parallèlement à l'axe des x . (réponse)

Q4 **Identifier les clés** Les clés sont les unités de ϵ_0 et de μ_0.

Résoudre le problème En remplaçant chacune des deux constantes par ses unités (données dans l'annexe du manuel), on a

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \times \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}}} \; .$$

Sachant que

$$1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{C/V}, \qquad \text{où} \qquad 1\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{J/C} \qquad \text{et} \qquad 1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{Nm}\;,$$

et que

$$1\,\mathrm{A} = 1\,\mathrm{C/s}\;,$$

on trouve

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\mathrm{C/V}}{\mathrm{m}} \times \frac{\mathrm{N}}{(\mathrm{C/s})^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mathrm{C^2/J}}{\mathrm{m}} \times \frac{\mathrm{Ns^2}}{\mathrm{C^2}}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mathrm{C^2/Nm}}{\mathrm{m}} \times \frac{\mathrm{Ns^2}}{\mathrm{C^2}}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{Nm^2}} \times \frac{\mathrm{Ns^2}}{\mathrm{C^2}}}} \; .$$

Après simplification, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\mathrm{m}^2} \times \frac{\mathrm{s}^2}{1}}} = \frac{1}{\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \; . \qquad \text{(réponse)}$$

E5 **Décortiquer le problème**

Connue	Inconnue
$f = 2{,}44\,\mathrm{MHz}$	λ

Identifier la clé La clé est l'équation de la vitesse de la lumière qui relie la fréquence d'une onde à sa longueur d'onde.

Résoudre le problème Le lien entre la longueur d'onde et la fréquence d'une onde est défini par

$$c = \lambda f \; .$$

La mise en évidence de λ donne

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}}{2{,}44 \times 10^6\,\mathrm{Hz}} = 123\,\mathrm{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La longueur d'onde trouvée fait bien partie du domaine des ondes radio.

E6 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$E_\mathrm{m} = 3{,}5\,\mathrm{V/m}$	f
$k = 30\pi$ rad/m	λ
$\omega = 9 \times 10^9\pi$ rad/s	Sens de propagation
	B_m

a. **Identifier la clé** La clé est le lien entre la fréquence angulaire ω et la fréquence f.
Résoudre le problème La fréquence angulaire est entre autres définie par l'équation

$$\omega = 2\pi f\ ,$$

d'où

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{9 \times 10^9\pi}{2\pi} = 4{,}5 \times 10^9\,\mathrm{Hz}$$
$$f = 4{,}5\,\mathrm{GHz}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La fréquence trouvée est plausible, puisqu'elle fait partie du domaine des micro-ondes.

b. **Identifier la clé** La clé est le lien entre le nombre d'onde k et la longueur d'onde λ.
Résoudre le problème Le nombre d'onde est défini par l'équation

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}\ ,$$

d'où

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{30\pi} = 0{,}067\,\mathrm{m}$$
$$\lambda = 6{,}7\,\mathrm{cm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La longueur d'onde trouvée appartient également au domaine des micro-ondes, ce qui est cohérent avec la fréquence trouvée en **a.**

c. **Identifier la clé** La clé est le signe devant le terme ωt dans l'argument du sinus.
Résoudre le problème Le fait que le champ magnétique soit défini pour différentes positions y indique que l'onde atteint toutes les positions y, et donc qu'elle se déplace parallèlement à cet axe. Par ailleurs, il s'agit de l'équation d'une onde progressive dans laquelle un signe négatif devant le terme ωt est associé à une vitesse dans le sens de l'axe impliqué. La propagation de l'onde est donc orientée dans le sens de l'axe des y.

Dans le sens de l'axe des y. (réponse)

d. **Identifier la clé** La clé est le lien entre l'amplitude du champ magnétique et l'amplitude du champ électrique.
Résoudre le problème Les amplitudes des champs électrique et magnétique sont liées par l'équation

$$E_\mathrm{m} = cB_\mathrm{m} \qquad \Rightarrow \qquad B_\mathrm{m} = \frac{E_\mathrm{m}}{c}\ .$$

$$B_\mathrm{m} = \frac{3{,}5\,\mathrm{V/m}}{3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}} = 1{,}2 \times 10^{-8}\,\mathrm{T} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du champ magnétique est correct.

P7 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$f = 13{,}5\,\mathrm{GHz}$	λ
$B_{t=0} = 3{,}24 \times 10^{-9}\,\mathrm{T}$	E
$\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} > 0$	$\vec{\mathbf{E}}(t)$

a. Identifier la clé La clé est la vitesse de la lumière qui relie la fréquence d'une onde à sa longueur d'onde.

Résoudre le problème Le lien entre la longueur d'onde et la fréquence d'une onde est défini par l'équation

$$c = \lambda f \ .$$

La mise en évidence de λ donne

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}}{13{,}5 \times 10^9\,\mathrm{Hz}} = 2{,}22\,\mathrm{cm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La longueur d'onde trouvée est plausible, puisqu'elle fait partie du domaine des micro-ondes.

b. Identifier la clé La clé est le lien entre l'amplitude du champ magnétique et l'amplitude du champ électrique.

Résoudre le problème Les amplitudes des champs électrique et magnétique sont liées par l'équation

$$E = cB = 3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m/s} \times 3{,}24 \times 10^{-9}\,\mathrm{T} = 0{,}972\,\mathrm{V/m} \ .$$

De plus, au sujet de l'orientation de $\vec{\mathbf{E}}$, on sait qu'il est à la fois perpendiculaire aux vecteurs vitesse de l'onde et champ magnétique. Ceux-ci étant orientés vers le sud et vers l'est, on peut déduire par la règle de la main droite que le champ électrique au même moment sera orienté vers le sol. Le champ électrique trouvé peut donc s'exprimer par

$$\vec{\mathbf{E}} = 0{,}972\,\mathrm{V/m}\ \overrightarrow{\text{vers le bas}} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du champ électrique est correct.

c. Identifier la clé La clé est le lien entre le champ magnétique et le champ électrique.

Résoudre le problème En posant arbitrairement que l'est correspond à l'axe des x et le nord à l'axe des y, on peut déterminer les directions des champs électrique et magnétique. Si le champ magnétique est orienté vers l'est alors que l'onde se déplace vers le sud, la règle de la main droite indique que le champ électrique est orienté vers le bas.

Le champ électrique de l'onde obéit donc à l'équation

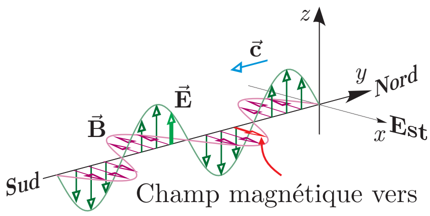
$$\vec{\mathbf{E}} = E_\mathrm{m} \sin(ky + \omega t)\vec{\boldsymbol{k}} \ .$$

(Le signe « + » dans la parenthèse indique que l'onde se déplace dans le sens opposé à l'axe des y.)

Dans cette équation, on doit déterminer les valeurs de E_m, de k et de ω :

$$E_\mathrm{m} = cB_\mathrm{m} \ , \qquad k = \frac{\omega}{v} \ , \qquad \omega = 2\pi f \ .$$

On ignore encore à quelle position y on étudie $\vec{\mathbf{E}}$, mais on sait qu'à cet endroit le module du champ magnétique vaut $3{,}24 \times 10^{-9}$ T, soit la moitié de l'amplitude B_m donnée dans l'énoncé de la question. On peut donc trouver une position y quelconque satisfaisant cette relation à $t = 0$, à partir de l'équation du champ magnétique (de même forme que l'équation du champ électrique) :



Champ magnétique vers l'est, en augmentation

$$\vec{\mathbf{B}} = B_\mathrm{m} \sin(ky + \omega t)\vec{\boldsymbol{\imath}}$$
$$y = \frac{\arcsin(\frac{B}{B_\mathrm{m}})}{k} \; .$$

En insérant cette expression de la position dans l'équation détaillée du champ électrique, on obtient
$$\vec{\mathbf{E}} = cB_\mathrm{m} \sin\left(k \times \frac{\arcsin(\frac{B}{B_\mathrm{m}})}{k} + 2\pi f t\right)\vec{\boldsymbol{k}} \; .$$

En simplifiant, on trouve

$$\vec{\mathbf{E}} = 3{,}00 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s} \times 6{,}48 \times 10^{-9}\ \mathrm{T} \times \sin\left(\arcsin\left(\frac{3{,}24 \times 10^{-9}\ \mathrm{T}}{6{,}48 \times 10^{-9}\ \mathrm{T}}\right) + 2\pi \times 13{,}5 \times 10^{9}\ \mathrm{Hz} \times t\right)\vec{\boldsymbol{\imath}}$$
$$= (1{,}94\ \mathrm{V/m}) \sin\left(8{,}48 \times 10^{10} t + 0{,}524\right) \overrightarrow{\text{vers le bas}} \; .$$

Pour tenir compte du fait que le champ magnétique augmente, on doit vérifier si la solution de l'inverse sinus retenue par défaut est la bonne. Si le champ B augmente, le champ E augmente également. La dérivée de E en fonction du temps est-elle positive selon l'équation trouvée pour $t = 0$?

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1{,}94\ \mathrm{V/m}) \sin\left(8{,}48 \times 10^{10} t + 0{,}524\right)$$
$$= (1{,}94\ \mathrm{V/m}) \cos\left(8{,}48 \times 10^{10} t + 0{,}524\right) \times 8{,}48 \times 10^{10}$$
$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} > 0 \; .$$

La dérivée de E étant positive pour $t = 0$, $\arcsin(B/B_\mathrm{m})$ est bien égal à $0{,}524$ rad et non à $\pi - 0{,}524$ rad. L'expression de $\vec{\mathbf{E}}$ trouvée précédemment est donc la bonne :

$$\vec{\mathbf{E}} = (1{,}94\ \mathrm{V/m}) \sin\left(8{,}48 \times 10^{10} t + 0{,}524\right) \overrightarrow{\text{vers le bas}} \; . \qquad \text{(réponse)}$$

P8 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\vec{\mathbf{B}} = (1{,}20\vec{\boldsymbol{\imath}} - 2{,}50\vec{\boldsymbol{\jmath}}) \times 10^{-8}$ T	$\vec{\mathbf{E}}$
$\vec{\mathbf{A}}_E = (-\vec{\boldsymbol{\imath}} - 0{,}48\vec{\boldsymbol{\jmath}} + 0{,}26\vec{\boldsymbol{k}})$	$\vec{\mathbf{c}}$

a. Identifier la clé La clé est la détermination d'un vecteur unitaire parallèle à $\vec{\mathbf{A}}_E$.

Résoudre le problème On peut trouver le module du champ électrique à partir du champ magnétique connu. Cependant, ses composantes sont des multiples des composantes du vecteur unitaire parallèle à $\vec{\mathbf{A}}_E$. Ce vecteur unitaire est défini par l'équation

$$\vec{\mathbf{u}}_A = \frac{A_x}{A}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \frac{A_y}{A}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{A_z}{A}\vec{\boldsymbol{k}}, \qquad \text{où} \qquad A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \; .$$

Donc, on a

$$A = \sqrt{(-1)^2 + (-0{,}48)^2 + (0{,}26)^2} = \sqrt{1{,}298}$$
$$\vec{\mathbf{u}}_A = \frac{-1}{\sqrt{1{,}298}}\vec{\imath} + \frac{-0{,}48}{\sqrt{1{,}298}}\vec{\jmath} + \frac{0{,}26}{\sqrt{1{,}298}}\vec{k}\ .$$

Le module du champ électrique est lié au module du champ magnétique par l'équation

$$E = cB, \qquad \text{où} \qquad B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$
$$= cB = 3{,}00 \times 10^8\,\text{m/s} \times \sqrt{(1{,}20 \times 10^{-8}\,\text{T})^2 + (-2{,}50 \times 10^{-8}\,\text{T})^2} = 8{,}32\,\text{V/m}\ .$$

Les composantes de $\vec{\mathbf{E}}$ sont alors données par $E \times \vec{\mathbf{u}}_A$:

$$\vec{\mathbf{E}} = E \times \vec{\mathbf{u}}_A = 8{,}32\,\text{V/m} \times \frac{-1}{\sqrt{1{,}298}}\vec{\imath} + \frac{-0{,}48}{\sqrt{1{,}298}}\vec{\jmath} + \frac{0{,}26}{\sqrt{1,298}}\vec{k}$$
$$\vec{\mathbf{E}} = (-7{,}30\vec{\imath} - 3{,}51\vec{\jmath} + 1{,}90\vec{k})\ \text{V/m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur des composantes du champ électrique est correct.

b. **Identifier la clé** La clé est la détermination d'un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{\mathbf{E}}$ et à $\vec{\mathbf{B}}$.

Résoudre le problème Puisque la vitesse de l'onde est perpendiculaire à $\vec{\mathbf{E}}$ et à $\vec{\mathbf{B}}$, on trouve un vecteur perpendiculaire (posons $\vec{\mathbf{b}}_c$) à ces deux champs par leur produit vectoriel :

$$\vec{\mathbf{b}}_c = \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}} = (-7{,}30\vec{\imath} - 3{,}51\vec{\jmath} + 1{,}90\vec{k}) \times (1{,}20\vec{\imath} - 2{,}50\vec{\jmath} + 0\vec{k})$$
$$= (4{,}75\vec{\imath} - 2{,}28\vec{\jmath} + 22{,}46\vec{k})\ .$$

Le vecteur unitaire lié à $\vec{\mathbf{b}}_c$ (parallèle à $\vec{\mathbf{c}}$) est donc

$$\vec{\mathbf{u}}_b = \frac{b_x}{b}\vec{\imath} + \frac{b_y}{b}\vec{\jmath} + \frac{b_z}{b}\vec{k}, \qquad \text{où} \qquad b = \sqrt{(b_x)^2 + (b_y)^2 + (b_z)^2} = 23{,}07$$
$$= \frac{4{,}75}{23{,}07}\vec{\imath} + \frac{-2{,}28}{23{,}07}\vec{\jmath} + \frac{22{,}46}{23{,}07}\vec{k} = (0{,}206\vec{\imath} - 0{,}099\vec{\jmath} + 0{,}974\vec{k})\ .$$

On peut finalement trouver les composantes du vecteur $\vec{\mathbf{c}}$:

$$\vec{\mathbf{c}} = c \times \vec{\mathbf{u}}_c = 3{,}00 \times 10^8\,\text{m/s} \times (0{,}206\vec{\imath} - 0{,}099\vec{\jmath} + 0{,}974\vec{k})$$
$$= (0{,}617 \times 10^8\vec{\imath} - 0{,}296 \times 10^8\vec{\jmath} + 2{,}92 \times 10^8\vec{k})\ \text{m/s}$$
$$\vec{\mathbf{c}} = (0{,}617\vec{\imath} - 0{,}296\vec{\jmath} + 2{,}92\vec{k}) \times 10^8\ \text{m/s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

E9 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$\lambda_{\text{min}} = 380\,\text{nm}$	f_{min}
$\lambda_{\text{max}} = 800\,\text{nm}$	f_{max}

Identifier la clé La clé est l'équation reliant la longueur d'onde, la fréquence et la vitesse de la lumière.

Résoudre le problème La longueur d'onde et la fréquence d'une onde électromagnétiques sont liées par l'équation $c = \lambda f$. On a donc

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_{\text{min}}} = \frac{3{,}00 \times 10^8\,\text{m/s}}{380 \times 10^{-9}\,\text{m}} = 7{,}89 \times 10^{14}\,\text{Hz}$$

et

$$f_2 = \frac{c}{\lambda_{\text{max}}} = \frac{3{,}00 \times 10^8\,\text{m/s}}{800 \times 10^{-9}\,\text{m}} = 3{,}75 \times 10^{14}\,\text{Hz}\ .$$

La fréquence maximale du domaine visible est donc liée à la longueur d'onde minimale, et vice versa (c'est logique, l'une étant liée à l'inverse de l'autre). Ainsi,

$$7{,}89 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz} > f > 3{,}75 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Les fréquences trouvées sont bien celles qui délimitent le domaine visible.

Q10 a. Identifier la clé La clé est l'équation liant l'irradiance en un point à l'éloignement de la source.

Résoudre le problème L'irradiance est donnée par l'équation

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}\ .$$

L'irradiance produite par les deux sources, au point étudié, est donc respectivement

$$I_1 = \frac{P_1}{4\pi d_1^2} \qquad \text{et} \qquad I_2 = \frac{P_2}{4\pi d_2^2}\ .$$

Sachant que $d_2 = 2d_1$ et que $P_2 = 3P_1$, on peut exprimer à nouveau I_2 en conséquence :

$$I_2 = \frac{3P_1}{4\pi(2d_1)^2} = \frac{3P_1}{4\pi \times 4d_1^2} = \frac{3}{4} \times \frac{P_1}{4\pi \times d_1^2} = \frac{3}{4} \times I_1\ .$$

On peut alors évaluer le rapport I_1/I_2 :

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{I_1}{\frac{3}{4} \times I_1} = \frac{4}{3}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Identifier la clé La clé est le lien entre l'irradiance d'une source et l'amplitude du champ électrique des ondes qu'elle émet.

Résoudre le problème L'irradiance est liée à l'amplitude du champ électrique d'une onde par l'équation

$$I = \frac{1}{2\mu_0 c} E_{\mathrm{m}}^2\ .$$

Appliquée aux ondes des sources I_1 et I_2, cette équation donne

$$I_1 = \frac{1}{2\mu_0 c} E_{1\mathrm{m}}^2 \qquad \Rightarrow \qquad E_{1\mathrm{m}} = \sqrt{2I_1\mu_0 c}$$
$$I_2 = \frac{1}{2\mu_0 c} E_{2\mathrm{m}}^2 \qquad \Rightarrow \qquad E_{2\mathrm{m}} = \sqrt{2I_2\mu_0 c}\ .$$

Le rapport $E_{1\mathrm{m}}/E_{2\mathrm{m}}$ peut alors être évalué :

$$\frac{E_{1\mathrm{m}}}{E_{2\mathrm{m}}} = \frac{\sqrt{2I_1\mu_0 c}}{\sqrt{2I_2\mu_0 c}} = \sqrt{\frac{2I_1\mu_0 c}{2I_2\mu_0 c}} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}\ .$$

Le rapport I_1/I_2 ayant été trouvé en **a.**, on peut écrire :

$$\frac{E_{1\mathrm{m}}}{E_{2\mathrm{m}}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

E11 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$P = 100\,\mathrm{W}$	I_{visible}
$I_{\text{visible}}/I_{\text{totale}} = 4{,}1\,\%$	
$r = 3{,}00\,\mathrm{m}$	

Identifier la clé La clé est l'équation liant l'irradiance en un point à l'éloignement de la source.
Résoudre le problème L'irradiance totale d'une source est donnée par l'équation

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \ .$$

Si 4,1 % de cette puissance est produite en lumière visible, on peut donc affirmer que

$$I_{\text{visible}} = 4{,}1\,\% \times I_{\text{totale}} = 0{,}041 \times \frac{P}{4\pi r^2}$$

$$I_{\text{visible}} = 0{,}041 \times \frac{100\,\text{W}}{4\pi(3{,}00\,\text{m})^2} = 0{,}036\,\text{W/m}^2 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur est correct, la puissance reçue en lumière visible étant réduite de façon importante par l'éloignement ainsi que par l'étalement spectral.

E12 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$r = 4{,}00\,\text{m}$	P
$P_{\text{reçue}} = 6{,}00\,\text{W}$	
$A_{\text{corps}} = 0{,}420\,\text{m}^2$	

Identifier la clé La clé est la distinction entre la puissance émise par la source (P) et la puissance reçue par la personne (P').
Résoudre le problème L'irradiance à une distance r d'une source est donnée par l'équation

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \ .$$

C'est la puissance reçue par mètre carré de surface, pour une source produisant une puissance P. La puissance reçue P' sur une surface d'aire A, à la même distance, est donnée par l'équation

$$P' = IA = \frac{P}{4\pi r^2} \times A \ .$$

Pour trouver la puissance que la chaufferette doit produire pour que la personne reçoive $P' = 6{,}00\,\text{W}$, on doit isoler P :

$$P = \frac{4\pi r^2 P'}{A} = \frac{4\pi \times (4{,}00\,\text{m})^2 \times 6{,}00\,\text{W}}{0{,}420\,\text{m}^2} = 2{,}87\,\text{kW} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la puissance de la chaufferette est correct, on obtient une valeur semblable aux puissances de certaines chaufferettes portatives.

E13 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$r = 5{,}00\,\text{cm}$	E_m
$I = 5{,}00\,\text{mW/cm}^2$	B_m

Identifier la clé La clé est l'équation liant l'irradiance à l'amplitude du champ électrique.
Résoudre le problème L'irradiance est liée à l'amplitude du champ électrique d'une onde par l'équation

$$I = \frac{1}{2\mu_0 c} E_\text{m}^2 \ .$$

Sans égard à la distance de 5,00 cm, une irradiance de $5{,}00\,\text{mW/cm}^2$ est donc liée à un champ électrique d'amplitude déterminée :

$$\begin{aligned} E_\text{m} &= \sqrt{2I\mu_0 c} \\ &= \sqrt{2 \times 5{,}00\,\text{mW/cm}^2 \times \left(\frac{100\,\text{cm}}{1\,\text{m}}\right)^2 \times (4\pi \times 10^{-7}\ \text{N/A}^2) \times 3{,}00 \times 10^8\,\text{m/s}} = 194\,\text{V/m} \ . \end{aligned}$$

Le champ magnétique, quant à lui, est lié au champ électrique par l'équation

$$E_{\rm m} = cB_{\rm m} \qquad \Rightarrow \qquad B_{\rm m} = \frac{E_{\rm m}}{c}$$

$$B_{\rm m} = \frac{194\,{\rm V/m}}{3{,}00 \times 10^{8}\,{\rm m/s}} = 6{,}47 \times 10^{-7}\,{\rm T}\ .$$

Ainsi,

$$E_{\rm m} = 194\,{\rm V/m} \qquad \text{et} \qquad B_{\rm m} = 6{,}47 \times 10^{-7}\,{\rm T}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Les ordres de grandeur des amplitudes des champs électrique et magnétique sont élevés, mais cohérents avec une source assez puissante pour réchauffer une masse non négligeable.

E14 **Décortiquer le problème**

Connue	Inconnue
$E = 0{,}075\,2\,{\rm V/m}$	u

Identifier la clé La clé est l'équation 4.27 du manuel liant la densité d'énergie au module du champ électrique.

Résoudre le problème La densité d'énergie électromagnétique en un point est donnée par l'équation

$$u = \epsilon_0 E^2 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,{\rm F/m} \times (0{,}075\,2\,{\rm V/m})^2 = 5{,}00 \times 10^{-14}\,{\rm J/m^3}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la densité d'énergie est difficile à évaluer, mais il est tout de même normal qu'il soit petit, surtout dans la mesure où le champ électrique est lui-même assez faible.

E15 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$P = 0{,}225\,{\rm W}$	I_r
$r = 3{,}25\,{\rm km}$	E_r

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation liant l'irradiance en un point à l'éloignement de la source.

Résoudre le problème L'irradiance d'une source est donnée par l'équation

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}\ .$$

En un point à une distance de 3,25 km de la source, on a

$$\begin{aligned} I &= 0{,}225\ {\rm W}/(4\pi(3\ 250\ {\rm m})^2) \\ I &= 1{,}70 \times 10^{-9}\,{\rm W/m^2}\ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'irradiance est correct pour une telle distance par rapport à la source.

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation liant l'irradiance à l'amplitude du champ électrique.

Résoudre le problème L'irradiance est liée à l'amplitude du champ électrique d'une onde par :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\mu_0 c} E_{\rm m}^2 \\ E_{\rm m} &= \sqrt{2I\mu_0 c} \\ &= \sqrt{2 \times 1{,}70 \times 10^{-9}\,{\rm W/m^2} \times (4\pi \times 10^{-7}\ {\rm N/A^2}) \times 3{,}00 \times 10^{8}\,{\rm m/s}} \\ E_{\rm m} &= 1{,}13 \times 10^{-3}\,{\rm V/m}\ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'amplitude du champ électrique est faible, mais en accord avec l'irradiance trouvée en **a.**

E16 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$P = 0{,}100\,\mathrm{W}$	r
$E_r = 0{,}120\,\mathrm{V/m}$	

Identifier les clés Les clés sont les équations liant l'irradiance à la puissance émise, d'une part, et à l'amplitude du champ électrique, d'autre part.

Résoudre le problème L'irradiance est liée aux deux équations suivantes :

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \qquad \text{et} \qquad I = \frac{1}{2\mu_0 c}E_\mathrm{m}^2 \ .$$

On peut donc affirmer que

$$\frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1}{2\mu_0 c}E_\mathrm{m}^2 \ ,$$

équation où la distance r est la seule inconnue. On peut donc mettre r en évidence pour connaître la distance maximale, là où le champ électrique atteindra la valeur la plus faible permettant encore d'armer le système :

$$r = \sqrt{\frac{2\mu_0 cP}{4\pi E_\mathrm{m}^2}} = \sqrt{\frac{2 \times (4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}) \times 3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m/s} \times 0{,}100\,\mathrm{W}}{4\pi \times (0{,}120\,\mathrm{V/m})^2}} = 20{,}4\,\mathrm{m} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

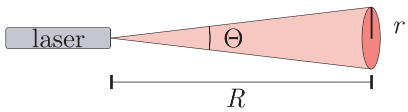
Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance est correct.

P17 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$P = 0{,}800\,\mathrm{mW}$	r_cercle
$\Theta = 1{,}20\,\mathrm{mrad}$	$I_\text{écran}$
$r = 10{,}00\,\mathrm{m}$	

a. **Identifier la clé** La clé est le calcul par géométrie du rayon du cercle éclairé, à l'aide de la distance et de l'angle de divergence.

Illustrer la situation La figure ci-contre illustre la situation.



Résoudre le problème Puisqu'on cherche le rayon du cercle éclairé, on peut utiliser la moitié de l'angle de divergence du cône. La tangente de cet angle est donc liée au rayon recherché et à la distance de l'écran :

$$\Theta_r = \frac{\Theta}{2} = \frac{1{,}20\,\mathrm{mrad}}{2} = 6{,}00 \times 10^{-4}\,\mathrm{rad}$$

$$\tan(\Theta_r) = \frac{r}{d}$$

$$r = d\tan(\Theta_r) = 10{,}00\,\mathrm{m} \times \tan(6{,}00 \times 10^{-4}\,\mathrm{rad}) = 6{,}00\,\mathrm{mm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du rayon du cercle est correct pour la dimension d'un point éclairé par un laser.

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que la puissance du laser n'est répartie que sur le cercle analysé en **a.**, et non partout autour de la source comme pour une source conventionnelle.

Résoudre le problème L'irradiance en un point est liée à la puissance reçue et à l'aire de la zone éclairée :

$$I = \frac{P}{A_\mathrm{cercle}} = \frac{P}{\pi r^2} \ .$$

Toute la puissance du laser est répartie sur ce cercle de rayon r, donc

$$I = \frac{0{,}800 \times 10^{-3}\,\mathrm{W}}{\pi \times (6{,}00 \times 10^{-3}\,\mathrm{m})^2} = 7{,}07\,\mathrm{W/m^2}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'irradiance est correct. Toute la puissance du laser étant concentrée sur une petite superficie, l'irradiance produite correspond à une puissance par mètre carré beaucoup plus grande que la puissance réelle du laser.

Q18 **Identifier la clé** La clé est l'équation 4.37 du manuel, qui définit la pression de radiation.

a. **Résoudre le problème** La pression de radiation est donnée par l'équation

$$p_{\mathrm{rad}} = \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right) I, \qquad \text{avec} \qquad I = \frac{P}{4\pi r^2}\ .$$

Ainsi,

$$p_{\mathrm{rad}} = \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right) \frac{P}{4\pi r^2}\ .$$

Si on double la distance (c'est-à-dire $r' = 2r$), on peut exprimer une valeur modifiée de pression de radiation ainsi :

$$\begin{aligned} p'_{\mathrm{rad}} &= \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right) \frac{P}{4\pi r'^2} = \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right) \frac{P}{4\pi (2r)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right) \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1}{4} p_{\mathrm{rad}} \\ &= \frac{1}{4} p_{\mathrm{rad}}\ . \end{aligned}$$

p_{rad} est divisée par 4. (réponse)

b. **Résoudre le problème** On a

$$p_{\mathrm{rad}} = \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right) \frac{P}{4\pi r^2}\ .$$

Cette équation ne contient pas la variable de la superficie éclairée, ce qui suggère que la pression de radiation n'est pas modifiée. Une autre équation définissant la pression de radiation, $F_{\mathrm{rad}}/A_{\text{éclairée}}$, est cohérente avec ce fait : l'aire éclairée doublée impliquera une force radiative également doublée, laissant la pression de radiation inchangée.

La pression de radiation ne change pas. (réponse)

c. **Résoudre le problème** L'équation de la pression de radiation contient le coefficient de réflexion $\mathcal{R}$ qui passe de 0 à 1 si on remplace l'écran noir par un miroir idéal. La comparaison de la pression de radiation dans les deux cas permet de trouver le facteur de variation :

$$p_{\mathrm{rad}} = \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right) I \qquad \text{et} \qquad p'_{\mathrm{rad}} = \left(\frac{1+\mathcal{R}'}{c}\right) I\ .$$

Avec les valeurs respectives de $\mathcal{R}$, on obtient

$$p_{\mathrm{rad}} = \left(\frac{1+0}{c}\right) I = \frac{I}{c} \qquad \text{et} \qquad p'_{\mathrm{rad}} = \left(\frac{1+1}{c}\right) I = \frac{2I}{c}\ .$$

Le rapport $p'_{\mathrm{rad}}/p_{\mathrm{rad}}$ est alors

$$\begin{aligned} \frac{p'_{\mathrm{rad}}}{p_{\mathrm{rad}}} &= \frac{\left(\frac{2I}{c}\right)}{\left(\frac{I}{c}\right)} = 2 \\ p'_{\mathrm{rad}} &= 2p_{\mathrm{rad}}\ . \end{aligned}$$

p_{rad} est multipliée par 2. (réponse)

E19 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$l = 90\,\text{cm}$	F_{rad}
$I = 800\,\text{W/m}^2$	
$\mathcal{R} = 1$	

Identifier la clé La clé est l'équation 4.37 du manuel, qui relie la pression de radiation à la force de radiation, d'une part, et à l'irradiance, d'autre part.

Résoudre le problème L'équation 4.37 permet d'écrire

$$\frac{F_{\text{rad}}}{A_{\text{éclairée}}} = \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right) I, \qquad \text{avec} \qquad A = l^2 \ .$$

Le coefficient de réflexion est à sa valeur maximale (1) puisque le miroir réfléchit parfaitement. Il n'y a alors qu'à isoler F_{rad} :

$$F_{\text{rad}} = \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right) Il^2 = \left(\frac{1+1}{3{,}00 \times 10^8\ \text{m/s}}\right) \times 800\,\text{W/m}^2 \times (0{,}90\,\text{m})^2 = 4{,}32 \times 10^{-6}\,\text{N} \ . \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la force est difficile à apprécier, mais elle est évidemment faible, en accord avec l'ampleur du phénomène.

E20 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$P = 150\,\text{W}$	p_{rad}
$r = 50{,}0\,\text{cm}$	
$\mathcal{R} = 0$	

Identifier la clé La clé est l'équation 4.37 du manuel, qui définit la pression de radiation.

Résoudre le problème La pression de radiation est donnée par l'équation

$$p_{\text{rad}} = \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right) I, \qquad \text{avec} \qquad I = \frac{P}{4\pi r^2} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{R} = 0 \ .$$

Ainsi,

$$p_{\text{rad}} = \frac{P}{4\pi r^2 c} = \frac{150\,\text{W}}{4\pi \times (0{,}500\,\text{m})^2 \times 3{,}00 \times 10^8\,\text{m/s}} = 1{,}59 \times 10^{-7}\,\text{Pa} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la pression de radiation est correct.

P21 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\mathcal{R} = 12\ \%$	m/A
$P_{\text{Soleil}} = 3{,}8 \times 10^{26}\,\text{W}$	

Identifier les clés Les clés sont les équations de la pression de radiation et de la force gravitationnelle.

Résoudre le problème À une distance r du Soleil, la pression de radiation est donnée par l'équation

$$p_{\text{rad}} = \frac{F_{\text{rad}}}{A_{\text{éclairée}}} = \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right) I, \qquad \text{avec} \qquad I = \frac{P}{4\pi r^2} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{R} = 0,12 \ ,$$

et le module de la force gravitationnelle, par l'équation

$$F_g = \frac{GM_S m}{r^2} \; .$$

Les deux forces impliquées étant égales dans la situation étudiée, on peut affirmer que

$$\frac{F_{\text{rad}}}{A_{\text{éclairée}}} = \frac{\frac{GM_S m}{r^2}}{A_{\text{éclairée}}} = \left(\frac{1+0{,}12}{c}\right)\frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1{,}12P}{4\pi r^2 c}$$

$$\frac{m}{A_{\text{éclairée}}} = \frac{1{,}12Pr^2}{4\pi r^2 cGM_S} = \frac{1{,}12P}{4\pi cGM_S} \; .$$

Avec les valeurs connues, on trouve

$$\frac{m}{A_{\text{éclairée}}} = \frac{1{,}12 \times 3{,}8 \times 10^{26}\,\text{W}}{4\pi \times (3{,}00 \times 10^{8}\,\text{m/s}) \times 6{,}674 \times 10^{-11}\,\text{Nm}^2/\text{kg}^2 \times 1{,}99 \times 10^{30}\,\text{kg}} = 8{,}5 \times 10^{-4}\,\text{kg/m}^2 \; .$$

$$0{,}85\,\text{g/m}^2 \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de cette valeur indique, de façon prévisible, qu'il est peu probable que la force de radiation équilibre la force gravitationnelle. La masse d'un corps opposant une aire d'un mètre carré devrait avoir une masse de l'ordre du gramme pour que la force gravitationnelle ne surpasse pas la force de radiation.

P22 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$A_{\text{pan}} = 23{,}5\,\text{m}^2$	F_{rad}
$\%_{\text{abs}} = 80\,\%$	
$P_{\text{Soleil}} = 3{,}8 \times 10^{26}\,\text{W}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 4.37 du manuel, qui définit la pression de radiation.

Résoudre le problème La pression de radiation est donnée par l'équation

$$p_{\text{rad}} = \frac{F_{\text{rad}}}{A_{\text{éclairée}}} = \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right)I, \qquad \text{avec} \qquad I = \frac{P}{4\pi r^2} \; .$$

De plus, le coefficient d'absorption de 80 % indique que le coefficient de réflexion $\mathcal{R}$ est de 0,20. À l'annexe D, on retrouve le rayon de l'orbite de Mars, qui est de $2{,}28 \times 10^{11}$ m ; la force de radiation peut donc être mise en évidence :

$$F_{\text{rad}} = \frac{1+\mathcal{R}}{c} \times \frac{P}{4\pi r^2} A_{\text{éclairée}} = \frac{1{,}2PA_{\text{éclairée}}}{4\pi r^2 c}$$

$$F_{\text{rad}} = \frac{1{,}20 \times 3{,}8 \times 10^{26}\,\text{W} \times (2 \times 23{,}5\,\text{m}^2)}{4\pi \times (2{,}28 \times 10^{11}\,\text{m})^2 \times 3{,}00 \times 10^{8}\,\text{m/s}} = 1{,}09 \times 10^{-4}\,\text{N} \; . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du module de la force est plausible, relativement faible même pour la grande surface des capteurs solaires.

P23 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$t = 24\,\text{h}$	Δp
$\mathcal{R} = 0{,}3$	
$I = 1{,}36\,\text{kW/m}^2$	

Identifier la clé La clé est l'équation $\Delta p = F\Delta t$ liant la force appliquée à la variation de quantité de mouvement.

Résoudre le problème La pression de radiation est donnée par l'équation

$$p_{\text{rad}} = \frac{F_{\text{rad}}}{A_{\text{éclairée}}} = \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right) I \ . \tag{i}$$

La quantité de mouvement transmise exclusivement par la force de radiation est donnée par $\Delta p = F_{\text{rad}}\Delta t$. On doit donc isoler F_{rad} dans l'équation (i) :

$$F_{\text{rad}} = \frac{1+\mathcal{R}}{c} \times I A_{\text{éclairée}} \ ,$$

où $A_{\text{éclairée}}$ est l'aire de la plus grande section de la Terre, un cercle dont le diamètre est le diamètre de la Terre :

$$A_{\text{éclairée}} = \pi R_{\text{T}}^2 \ .$$

Toutes réunies, ces équations admettent

$$\Delta p = F_{\text{rad}}\Delta t = \frac{1+\mathcal{R}}{c} \times I A_{\text{éclairée}}\Delta t = \frac{(1+\mathcal{R}) I \pi R_{\text{T}}^2 \Delta t}{c} \ .$$

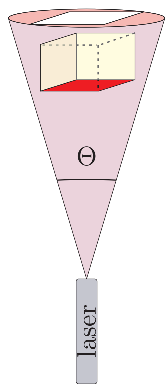
Finalement, on obtient

$$\Delta p = \frac{(1+0{,}3) \times (1{,}36 \times 10^3\ \text{W/m}^2)\pi \times (6{,}378 \times 10^6\ \text{m})^2 \times 24\ \text{h} \times \left(\frac{3\,600\ \text{s}}{1\ \text{h}}\right)}{3{,}00 \times 10^8\ \text{m/s}}$$

$$\Delta p = 6{,}5 \times 10^{13}\ \text{kg} \cdot \text{m/s} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la quantité de mouvement transféré est évidemment impossible à évaluer. Mais le fait qu'il soit très grand est tout de même cohérent avec le fait que la surface qu'oppose la Terre au rayonnement solaire est très grande.

P24 **Identifier la clé** La clé est le fait que la puissance du laser n'est pas dispersée.



a. **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la situation. Le laser qui éclaire le cube par en dessous éclaire en totalité la face inférieure du cube.

Résoudre le problème Si $a < r$, alors la face exposée est entièrement éclairée par le laser. La force de radiation sur le cube sera donc liée à la pression de radiation sur l'ensemble de la surface de cette face.

Par ailleurs, la lumière du laser ne se dispersant pas, on peut considérer que l'irradiance est la même sur la face du cube qu'à la source même, et donc que la puissance du laser est répartie sur la seule surface d'un cercle de rayon r, d'où

$$I = \frac{P}{\pi r^2} \ ,$$

Le lien entre la force de radiation et la puissance du laser est donc le suivant, lié aussi à la pression de radiation :

$$p_{\text{rad}} = \frac{F_{\text{rad}}}{A_{\text{éclairée}}} = \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right) I = \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right) \frac{P}{\pi r^2} \ .$$

De plus, la masse du cube (à supporter avec la force de radiation) est liée à son volume et à sa masse volumique :

$$F_g = mg = \rho V g = \rho a^3 g \ . \tag{i}$$

Finalement, l'aire éclairée est celle d'une face du cube :

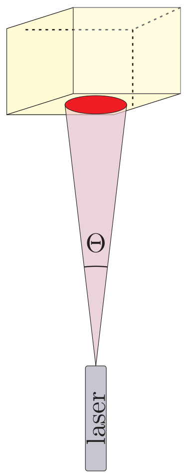
$$A_{\text{éclairée}} = a^2 \ .$$

Puisqu'à l'équilibre $F_g = F_{\text{rad}}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\rho a^3 g}{a^2} &= \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right)\frac{P_{\text{laser}}}{\pi r^2} \\ \rho a g &= \frac{(1+\mathcal{R})P_{\text{laser}}}{\pi r^2 c}\ .\end{aligned}$$

L'isolation de P_{laser} donnera l'expression de la puissance requise du laser :

$$P_{\text{laser}} = \frac{\rho a g c \pi r^2}{1+\mathcal{R}}\ . \qquad \text{(réponse)}$$



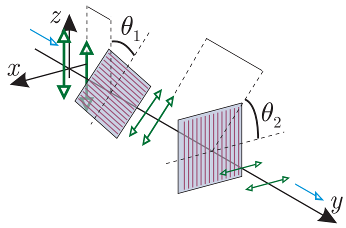
b. **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la situation. La lumière du laser est entièrement captée par la face inférieure du cube.
Résoudre le problème Si $a > 2r$, la lumière du laser frappe entièrement la face éclairée. Dans ces conditions, l'aire éclairée générant une force de pression coïncide avec l'aire sur laquelle se répartit la puissance d'éclairement :

$$\begin{aligned} p_{\text{rad}} &= \frac{F_{\text{rad}}}{A_{\text{éclairée}}} = \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right) I = \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right)\frac{P}{A_{\text{éclairée}}} \\ F_{\text{rad}} &= \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right) P_{\text{laser}}\ .\end{aligned}$$

On veut à nouveau compenser le poids du cube. Pour ce faire, on peut réutiliser l'équation (i) :

$$\begin{aligned} F_{\text{rad}} &= \rho a^3 g = \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right) P_{\text{laser}}\ . \\ P_{\text{laser}} &= \frac{\rho a^3 g c}{1+\mathcal{R}} \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

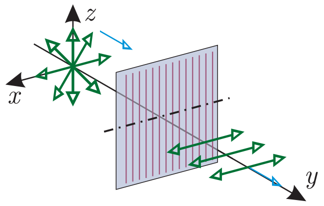
Q25 **Identifier la clé** La clé est le fait qu'un polariseur seul devant un rayon de lumière polarisée a pour effet de modifier l'angle de polarisation.

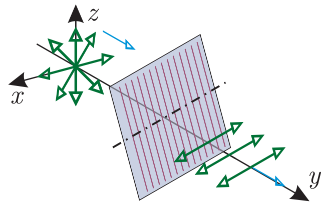


Illustrer la situation La figure ci-contre illustre la situation.
Résoudre le problème En plaçant devant le faisceau de lumière un premier polariseur à un angle θ_1 autre que 0° et 90° par rapport au plan de polarisation de la lumière, on aura un faisceau lumineux dont le plan de polarisation fait un angle θ_1 avec le faisceau initial. (Sur la figure, le premier polariseur fait un angle de 45,0° avec le plan de polarisation de la lumière.)
En plaçant par la suite un second polariseur à un angle θ_2 complémentaire à θ_1 et dans le même sens de rotation devant le faisceau modifié, on fera tourner le plan de polarisation d'un angle supplémentaire θ_2. On aura donc un faisceau sortant dont le plan de polarisation sera incliné de 90° par rapport au faisceau initial.
Pour limiter la perte d'irradiance, on peut utiliser des angles de 45° à chacune des étapes, comme le montre approximativement la figure.

Q26 a. **Identifier la clé** La clé est le fait que l'effet d'un polariseur seul devant une lumière non polarisée réduit son irradiance d'un facteur de 2.

Illustrer la situation La figure ci-contre illustre la situation. La lumière non polarisée qui atteint le polariseur est atténuée, seule la lumière polarisée horizontalement le traverse.





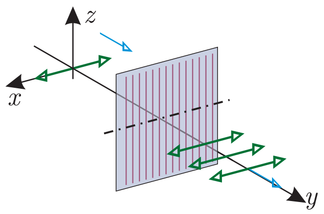
Résoudre le problème Selon l'équation 4.40 du manuel, la lumière non polarisée dont l'irradiance est I_0 est atténuée d'un facteur de 2 en traversant un premier polariseur, et ce, peu importe son orientation.

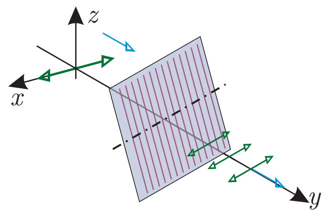
Avant la rotation décrite, la lumière traverse déjà le polariseur pour voir son irradiance réduite d'un facteur de 2. Le fait de placer le polariseur dans une autre orientation n'aura pas un effet différent sur l'irradiance de la lumière.

L'irradiance ne change pas. (réponse)

b. **Identifier la clé** La clé est le fait qu'un polariseur dont l'axe de transmission est parallèle au plan de polarisation de la lumière n'a aucun effet.

Illustrer la situation La figure ci-contre illustre la situation. Initialement, la lumière déjà polarisée qui atteint le polariseur n'est pas atténuée si l'axe de transmission du polariseur est parallèle à l'axe de polarisation de la lumière.



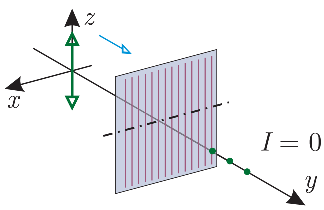


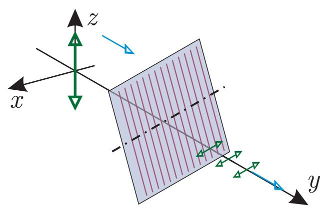
Résoudre le problème Avant la rotation du polariseur, la lumière polarisée horizontalement traverse entièrement le polariseur (aucune atténuation). Le fait de tourner légèrement le polariseur fera en sorte que l'irradiance transmise diminuera légèrement. Elle diminuera jusqu'à devenir nulle lorsque l'axe de transmission du polariseur devient perpendiculaire au plan de polarisation de la lumière incidente.

L'irradiance diminue. (réponse)

c. **Identifier la clé** La clé est le fait que la lumière dont le plan de polarisation initial est vertical est entièrement atténuée par le polariseur dont l'axe de transmission est horizontal.

Illustrer la situation La figure ci-contre illustre la situation. Initialement, la lumière déjà polarisée qui atteint le polariseur est entièrement atténuée si l'axe de transmission du polariseur est perpendiculaire à l'axe de polarisation de la lumière.





Résoudre le problème Le fait d'éloigner de la verticale l'axe de transmission du polariseur permettra à la lumière de traverser le polariseur avec de plus en plus d'intensité.

L'irradiance augmente. (réponse)

E27 Identifier la clé La clé est la loi de Malus, selon laquelle $I = I_0 \cos^2 \theta$.

a. Décortiquer le problème

Connue	Inconnue
$\theta = 0°$	I/I_0

Résoudre le problème L'axe de propagation du polariseur étant parallèle au plan de polarisation de la lumière, la loi de Malus donne

$$I = I_0 \cos^2 \theta = I_0 \cos^2(0°) = I_0 \times 1 = I_0$$

$$I_0/I = 100~\% \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse En effet, un polariseur parallèle à la polarisation de la lumière ne change pas son irradiance.

b. Décortiquer le problème

Connue	Inconnue
$\theta = 90°$	I/I_0

Résoudre le problème L'axe de propagation du polariseur étant perpendiculaire au plan de polarisation de la lumière, la loi de Malus donne

$$I = I_0 \cos^2 \theta = I_0 \cos^2(90°) = I_0 \times 0 = 0$$

$$I_0/I = 0~\% \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse En effet, un polariseur perpendiculaire à la polarisation de la lumière atténue entièrement son irradiance.

c. Décortiquer le problème

Connue	Inconnue
$\theta = 30°$	I/I_0

Résoudre le problème La loi de Malus donne

$$I = I_0 \cos^2 \theta = I_0 \cos^2(30°) = I_0 \times \frac{3}{4} = 0,75 I_0$$

$$I_0/I = 75~\% \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La proportion restante de l'irradiance initiale est bel et bien comprise entre 0 et 1.

d. Identifier la clé La clé est le fait que l'effet d'un polariseur seul devant une lumière non polarisée réduit son irradiance d'un facteur de 2.

Résoudre le problème Selon l'équation 4.40 du manuel, la lumière non polarisée dont l'irradiance est I_0 est atténuée d'un facteur de 2 en traversant un premier polariseur, et ce, peu importe son orientation :

$$I_0/I = \frac{1}{2} = 50~\% \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La proportion restante de l'irradiance initiale est bel et bien comprise entre 0 et 1.

E28 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$P_{\text{Soleil}} = 3{,}8 \times 10^{26}\ \text{W}$	I_{pol}
$\%_{\text{att}} = 65\,\%$	

Identifier la clé La clé est le fait que l'effet d'un polariseur seul devant une lumière non polarisée réduit son irradiance d'un facteur de 2.

Résoudre le problème La lumière atteignant le sol ne sera pas encore polarisée. Cependant, son irradiance a déjà été atténuée par la distance entre le Soleil et la Terre (r_{TS}) ainsi que par l'absorption de l'atmosphère. D'abord, l'irradiance atteignant la haute atmosphère est donnée par l'équation

$$I_0 = \frac{P_{\mathrm{Soleil}}}{4\pi r_{\mathrm{TS}}^2} \ .$$

On indique que 65 % de cette lumière est absorbée quand elle traverse l'atmosphère, donc que 35 % atteint le sol :

$$I_{\mathrm{sol}} = 0{,}35 I_0 = \frac{0{,}35 P_{\mathrm{Soleil}}}{4\pi r_{\mathrm{TS}}^2} \ .$$

Cette lumière n'étant pas polarisée, un polariseur atténuera son irradiance par un facteur de 2 :

$$I_{\mathrm{pol}} = \frac{I_{\mathrm{sol}}}{2} = \frac{\frac{0{,}35 P_{\mathrm{Soleil}}}{4\pi r_{\mathrm{TS}}^2}}{2} = \frac{0{,}35 P_{\mathrm{Soleil}}}{8\pi r_{\mathrm{TS}}^2}$$

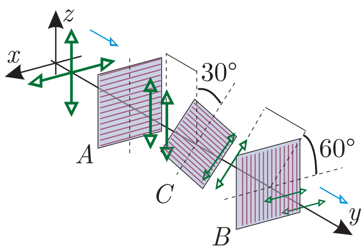
$$I_{\mathrm{pol}} = \frac{0{,}35 \times 3{,}8 \times 10^{26}\ \mathrm{W}}{8\pi (1{,}50 \times 10^{11}\ \mathrm{m})^2} = 2{,}4 \times 10^2\ \mathrm{W/m^2} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'irradiance traversant le polariseur est correct, après atténuation de l'atmosphère et du polariseur.

E29 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$\theta_B = 30°$	I_A
$\theta_C = 60°$	I_C
	I_B

a. **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la situation.



Identifier la clé La clé est le fait que l'effet d'un polariseur seul devant une lumière non polarisée réduit son irradiance d'un facteur de 2.

Résoudre le problème Selon l'équation 4.40 du manuel, la lumière non polarisée dont l'irradiance est I_0 est atténuée d'un facteur de 2 en traversant un premier polariseur, et ce, peu importe son orientation. À la sortie du premier polariseur (A), on a donc

$$I_A = \frac{I_0}{2} = 0{,}500 I_0 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La clé est la loi de Malus, selon laquelle $I = I_0 \cos^2\theta$.

Résoudre le problème L'axe de transmission du polariseur C faisant un angle de 30° avec l'axe de transmission du polariseur A, l'irradiance de la lumière émergeant du polariseur C est

$$I_C = I_A \cos^2\theta_B = 0{,}500 I_0 \cos^2 30° = 0{,}375 I_0 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La proportion restante de l'irradiance initiale est bel et bien comprise entre 0 et 1 et elle est inférieure à l'irradiance émergeant du polariseur A.

c. **Identifier la clé** La clé est la loi de Malus, selon laquelle $I = I_0 \cos^2\theta$.

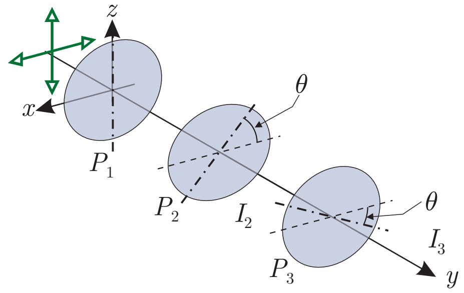
Résoudre le problème Si les polariseurs A et C font entre eux un angle de 30° et que les polariseurs A et B sont perpendiculaires, il y a donc 60° entre les polariseurs B et C.

L'axe de transmission du polariseur B faisant un angle de 60° avec l'axe de transmission du polariseur C, l'irradiance de la lumière émergeant du polariseur B est

$$I_B = I_C \cos^2\theta_C = 0{,}375 I_0 \cos^2 60° = 0{,}0938 I_0 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La proportion restante de l'irradiance initiale est bel et bien comprise entre 0 et 1 et elle est inférieure à l'irradiance émergeant du polariseur C.

P30 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la situation.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$I_0 = 0{,}780\,\mathrm{W/m^2}$	I_3
$\theta_1 = 90°$	
$\theta_2 = 25°$	
$\theta_3 = -25°$	

Identifier les clés Les clés sont la loi de Malus et le fait que l'effet d'un polariseur seul devant une lumière non polarisée réduit son irradiance d'un facteur de 2.

Résoudre le problème Le premier polariseur réduit l'irradiance I_0 d'un facteur de 2 puisque la lumière initiale n'est pas polarisée :

$$I_1 = \frac{I_0}{2} = 0{,}5I_0 \ .$$

Le second polariseur atténue l'irradiance du faisceau lumineux en raison de l'angle de 65° que fait son axe de transmission avec celui du polariseur 1 ($90° - 25° = 65°$). La loi de Malus donne

$$I_2 = I_1 \cos^2\theta_2 = 0{,}5I_0\cos^2\theta_2 = 0{,}5I_0\cos^2\theta_2 \ .$$

L'axe du troisième polariseur atténue à nouveau l'irradiance de la lumière en raison d'un angle de 50° entre les axes de transmission des deux polariseurs ($25° - (-25°)$) :

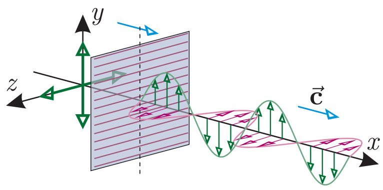
$$I_3 = I_2\cos^2\theta_3 = 0{,}5I_0\cos^2\theta_2\cos^2\theta_3$$

$$I_3 = 0{,}5 \times 0{,}780\,\mathrm{W/m^2}\cos^2 65°\cos^2 50° = 0{,}028\,8\,\mathrm{W/m^2} \ .$$

$$I_3 = 28{,}8\,\mathrm{mW/m^2} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'irradiance émergeant des trois polariseurs est correct.

P31 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la situation. La lumière non polarisée atteignant le polariseur en ressort avec une polarisation parallèle à l'axe des y.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\lambda = 632\,\mathrm{nm}$	$\vec{\mathbf{E}}$
$I = 4{,}70\,\mathrm{W/m^2}$	$\vec{\mathbf{B}}$

a. **Identifier les clés** Les clés sont l'équation du champ électrique et le fait que l'effet d'un polariseur seul devant une lumière non polarisée réduit son intensité d'un facteur de 2.

Résoudre le problème Dans un cas où l'onde se propage dans le sens de l'axe des x et où le champ électrique est orienté dans le sens de l'axe des y, l'équation du champ électrique avant la traversée du polariseur est de la forme

$$\vec{\mathbf{E}} = E_\mathrm{m}\sin(kx - \omega t)\vec{\jmath}, \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad \omega = 2\pi f = 2\pi\frac{c}{\lambda} \ .$$

L'amplitude du champ électrique est liée à l'irradiance par

$$I = \frac{1}{2\mu_0 c}E_\mathrm{m}^2 \quad \Rightarrow \quad E_\mathrm{m} = \sqrt{2\mu_0 c I} \ . \qquad \text{(i)}$$

L'union de toute ces expressions en vue d'isoler $\vec{\mathbf{E}}_\mathrm{m}$ donne

$$\vec{\mathbf{E}} = \sqrt{2\mu_0 c I}\,\sin(\frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi\frac{c}{\lambda}t)\vec{\boldsymbol{\jmath}}\ .$$

L'insertion des valeurs connues donne l'équation du champ électrique en fonction du temps et de la position :

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}} &= \sqrt{2 \times (4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}) \times 3{,}00 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s} \times 4{,}70\,\mathrm{W/m^2}} \\ &\quad \times \sin\left(\frac{2\pi}{632 \times 10^{-9}\ \mathrm{m}}x \ -\ 2\pi\frac{3{,}00 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}}{632 \times 10^{-9}\ \mathrm{m}}t\right)\vec{\boldsymbol{\jmath}} \\ &= 59{,}5\,\mathrm{V/m}\sin\left(9{,}94 \times 10^{6}x - 2{,}98 \times 10^{15}t\right)\vec{\boldsymbol{\jmath}}\ .\end{aligned}$$

Ce champ électrique sera atténué par la traversée du polariseur. Puisque c'est l'irradiance qui est réduite d'un facteur de 2, l'amplitude du champ électrique sera réduite en accord avec l'équation (i) déjà utilisée :

$$E_\mathrm{m} = \sqrt{2\mu_0 c I} \qquad \Rightarrow \qquad E'_\mathrm{m} = \sqrt{2\mu_0 c I'} = \sqrt{2\mu_0 c\frac{I}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\mu_0 c I} = \frac{1}{\sqrt{2}}E_\mathrm{m}\ .$$

L'équation du champ électrique de l'onde polarisée est donc

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}}' &= \frac{1}{\sqrt{2}}59{,}5\,\mathrm{V/m}\sin\left(9{,}94 \times 10^{6}x - 2{,}98 \times 10^{15}t\right)\vec{\boldsymbol{\jmath}} \\ \vec{\mathbf{E}}' &= (42{,}1\,\mathrm{V/m})\sin\left(9{,}94 \times 10^{6}x - 2{,}98 \times 10^{15}t\right)\vec{\boldsymbol{\jmath}}\ . \qquad \text{(réponse)}\end{aligned}$$

b. Identifier les clés Les clés sont le lien entre les modules des champs électrique et magnétique et le fait que le champ électrique, le champ magnétique et la direction de propagation de la lumière sont tous trois perpendiculaires l'un à l'autre.

Résoudre le problème Le module de l'amplitude du champ magnétique est lié au module de l'amplitude du champ électrique par l'équation

$$B_\mathrm{m} = \frac{E_\mathrm{m}}{c} = \frac{42{,}1\,\mathrm{V/m}}{3{,}00 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}} = 1{,}40 \times 10^{-7}\ \mathrm{T}\ .$$

Il faut encore déterminer l'orientation de ce champ magnétique. Puisque l'onde se propage dans le sens de l'axe des x et que le champ électrique est orienté dans le sens de l'axe des y, le champ magnétique sera orienté selon le troisième axe, soit z (et dans le sens positif pour respecter la règle de la main droite) (*voir la figure à la page précédente*). Ainsi,

$$\vec{\mathbf{B}}' = (1{,}40 \times 10^{-7}\ \mathrm{T})\sin\left(9{,}94 \times 10^{6}x - 2{,}98 \times 10^{15}t\right)\vec{\boldsymbol{k}}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

P32 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$l = 10{,}0\,\mathrm{cm}$	$C_{\theta_2=1{,}2^\circ}$
$\alpha_\mathrm{sucrose} = 6{,}65\,\dfrac{\text{degrés}}{\mathrm{cm}\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mL}}}$	

Identifier la clé La clé est le fait qu'un maximum de lumière est transmis lorsque l'axe de transmission du second polariseur est parallèle au plan de polarisation de la lumière émergeant du contenant de sucrose.

Résoudre le problème Le premier polariseur fait en sorte que la lumière qui entre dans la solution de sucrose est polarisée linéairement. Si le second polariseur doit faire un angle de 1,2° avec le premier pour qu'un maximum de lumière émerge du système, il faut qu'à la sortie des 10,0 cm de solution le plan de polarisation de la lumière ait tourné de cet angle, 1,2°, en traversant la solution. Ainsi, le second polariseur n'atténue aucunement l'irradiance lumineuse l'atteignant.

En supposant que l'effet de rotation du plan de polarisation est proportionnel à la concentration, on cherche la concentration qui modifiera de 1,2° le plan de polarisation de la lumière sur une distance totale de 10,0 cm dans la solution.

Le taux de rotation du plan de polarisation par unité de concentration et par unité de longueur, α_{sucrose}, est le lien entre la rotation que le liquide doit produire ($\Delta\theta = 1{,}2°$), la longueur du cylindre ($l = 10{,}0\,\text{cm}$) et la concentration recherchée, $C_{1{,}2°}$:

$$\alpha = \frac{\Delta\theta}{LC}$$

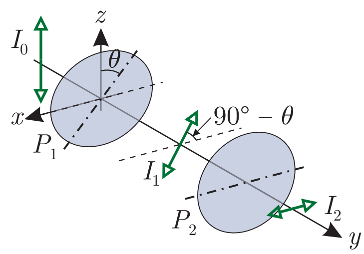
$$C_{\theta_2=1{,}2°} = \frac{\Delta\theta}{L\alpha} = \frac{1{,}2°}{10{,}0\,\text{cm} \times 6,65\frac{\text{degrés}}{\text{cm}\frac{\text{g}}{\text{ml}}}} = 18{,}0 \times 10^{-3}\,\text{g/mL} \ .$$

Dans 1,00 L de la solution, la masse dissoute sera alors

$$m = CV = (18{,}0 \times 10^{-3}\,\text{g/mL}) \times (1\,000\,\text{mL}) = 18{,}0\,\text{g} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de cette masse de sucrose est correct, pour un volume de solution de 1,00 L.

P33 **Illustrer la situation** La figure ci-contre montre le schéma de la situation.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\theta_1 = \theta$	$\theta_{I_2=15\%I_0}$
$\theta_2 = (90° - \theta)$	

Identifier la clé La clé est la loi de Malus, selon laquelle $I = I_0 \cos^2\theta$.

Résoudre le problème On établit une expression de l'irradiance émergeant du système de deux polariseurs en fonction de l'angle du premier avec la verticale (le second faisant un angle de 90° avec la verticale puisque son axe de transmission est horizontal). Pour le premier polariseur, on a

$$I_1 = I_0 \cos^2\theta \ .$$

Le second polariseur forme un angle avec le premier polariseur. L'angle en question est le complément de θ :

$$I_2 = I_1 \cos^2(90° - \theta) = (I_0 \cos^2\theta) \times \cos^2(90° - \theta) \ .$$

Pour une irradiance $I_2 = 15\,\%I_0$, cette équation devient

$$I_2 = 15\,\%I_0 = (I_0 \cos^2\theta) \times \cos^2(90° - \theta) \qquad \Rightarrow \qquad 0{,}15 = \cos^2\theta \cos^2(90° - \theta) \ .$$

L'angle θ étant dans deux fonctions trigonométriques différentes, sa mise en évidence nécessite l'utilisation d'une identité trigonométrique permettant d'abord de changer l'angle $(90° - \theta)$ en θ :

$$\cos(90° - \theta) = \sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad 0{,}15 = \cos^2\theta \sin^2\theta = (\sin\theta\cos\theta)^2 \ .$$

Ensuite, une autre identité trigonométrique permet de réunir en un seul terme les deux apparitions de θ :

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta), \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{2}\sin(2\theta) = \sin(\theta)\cos(\theta) \ .$$

On peut alors écrire

$$0{,}15 = (\sin\theta\cos\theta)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right)^2 = \frac{\sin^2(2\theta)}{4} \ .$$

Finalement, on obtient

$$\theta = \frac{\arcsin\sqrt{4\times 0{,}15}}{2} \ .$$

La fonction arcsinus admet deux solutions, qui sont des angles supplémentaires, et les réponses finales sont deux angles complémentaires puisqu'on divise le résultat par 2 :

$$\theta = 25{,}4° \qquad \text{et} \qquad \theta = 64{,}6° \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Les deux solutions trouvées sont plausibles, avec un premier polariseur se trouvant entre les orientations verticale et horizontale de la lumière incidente et du second polariseur.

P34 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$I_{\text{max}} = 6{,}5 I_{\text{min}}$	I_{p}/I_0

Identifier la clé La clé est le fait que l'atténuation de la lumière polarisée d'irradiance I_{p} sera tantôt nulle (lorsque $I' = I_{\text{min}}$), tantôt totale (lorsque $I' = I_{\text{max}}$), car toutes les orientations du polariseur sont occupées durant la rotation de 180°.

Résoudre le problème La lumière non polarisée, d'irradiance I_{np}, émergera du polariseur avec une irradiance constante, puisque pour toute orientation du polariseur, $I'_{\text{np}} = \frac{1}{2} I_{\text{np}}$. La lumière déjà polarisée, d'irradiance I_{p}, sera entièrement transmise lorsque l'irradiance qui émerge du polariseur est maximale ($I'_{\text{p}} = I_{\text{p}}$), ou ne sera aucunement transmise lorsque l'irradiance qui émerge du polariseur est minimale ($I'_{\text{p}} = 0$). L'irradiance totale transmise peut alors s'exprimer par l'équation

$$I' = I'_{\text{p}} + I'_{\text{np}} \ .$$

Appliquée à chaque situation, cette équation devient

$$I_{\text{max}} = I_{\text{p}} + \frac{1}{2} I_{\text{np}} \qquad \text{et} \qquad I_{\text{min}} = 0 + \frac{1}{2} I_{\text{np}} \ .$$

Et puisque $I_{\text{max}} = 6{,}5 I_{\text{min}}$, on a

$$\frac{I_{\text{max}}}{I_{\text{min}}} = 6{,}5 = \frac{I_{\text{p}} + \frac{1}{2} I_{\text{np}}}{\frac{1}{2} I_{\text{np}}} \ .$$

L'énoncé du problème définit l'irradiance incidente totale par $I_0 = I_{\text{p}} + I_{\text{np}}$. On obtient alors

$$I_{\text{np}} = I_0 - I_{\text{p}} \qquad \Rightarrow \qquad 6{,}5 = \frac{I_{\text{p}} + \frac{1}{2}(I_0 - I_{\text{p}})}{\frac{1}{2}(I_0 - I_{\text{p}})} \ .$$

La simplification de cette dernière équation donne

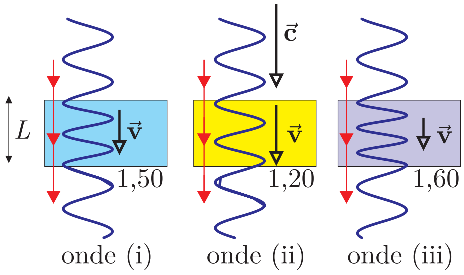
$$\frac{I_{\text{p}}}{I_0} = \frac{11}{15} = 0{,}73 = 73\ \% \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du rapport I_{p}/I_0 est correct, compris entre 0 et 100 %.

Physique 3 Ondes et physique moderne - 1re édition

Chapitre 05 La propagation de la lumière

Q1 a. Illustrer la situation La figure ci-contre montre les trois ondes lumineuses et leur longueur d'onde qui est modifiée différemment en traversant chacun des trois milieux.



Identifier la clé La clé est que la longueur d'onde dans un milieu d'indice n est réduite d'un facteur n.

Résoudre le problème L'équation de la longueur d'onde dans un milieu d'indice n est

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n} .$$

Pour les trois milieux présentés, les longueurs d'onde modifiées sont

$$\lambda_{(i)} = \frac{\lambda}{1{,}50}, \qquad \lambda_{(ii)} = \frac{\lambda}{1{,}20} \qquad \text{et} \qquad \lambda_{(iii)} = \frac{\lambda}{1{,}60} .$$

Par ordre croissant, ces longueurs d'onde sont

$$\lambda_{(iii)} < \lambda_{(i)} < \lambda_{(ii)} . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Identifier la clé La clé est que la fréquence d'oscillation d'une onde est indépendante du milieu dans lequel elle se propage.

Résoudre le problème La fréquence étant indépendante du milieu de propagation, elle est la même dans les trois milieux :

$$f_{(i)} = f_{(ii)} = f_{(iii)} . \qquad \text{(réponse)}$$

c. Identifier la clé La clé est l'équation de la vitesse de la lumière en fonction de l'indice de réfraction du milieu.

Résoudre le problème Le temps de parcours dans le milieu est lié à la longueur parcourue et à la vitesse par l'expression

$$v = \frac{L}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t = \frac{L}{v} , \qquad \text{(i)}$$

où la vitesse d'une onde électromagnétique dans un milieu d'indice n est

$$v = \frac{c}{n} . \qquad \text{(ii)}$$

Réunies, les équations (i) et (ii) donnent

$$\Delta t = \frac{L}{\frac{c}{n}} = \frac{nL}{c} .$$

En tenant compte des indices des trois milieux, on a

$$\Delta t_{(i)} = \frac{1{,}50L}{c}, \qquad \Delta t_{(ii)} = \frac{1{,}20L}{c} \qquad \text{et} \qquad \Delta t_{(iii)} = \frac{1{,}60L}{c} .$$

Finalement, par ordre croissant, on obtient

$$\Delta t_{(ii)} < \Delta t_{(i)} < \Delta t_{(iii)} .$$

E2 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$\kappa = 2{,}02$	v
$f = 5{,}09 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz}$	

Identifier la clé La clé est que l'indice de réfraction d'un milieu est égal à la racine carrée de sa constante diélectrique.

Résoudre le problème L'équation 5.1 établit le lien entre le module de la vitesse d'une onde dans un milieu et la constante diélectrique de ce milieu :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} c \ .$$

La fréquence n'est pas une variable qui influe sur la vitesse de l'onde. Dans un milieu de constante diélectrique $\kappa = 2{,}02$, le module de la vitesse de l'onde est donc

$$v = \frac{1}{\sqrt{2{,}02}} \times 3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m/s} = 2{,}11 \times 10^8\,\mathrm{m/s} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse trouvée est correct, celle-ci étant inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide.

E3 **Décortiquer le problème**

Connue	Inconnues
$\lambda = 589{,}0\,\mathrm{nm}$	λ_{eau}
	$\lambda_{\text{plexiglas}}$
	λ_{diamant}

Identifier la clé La clé est l'équation 5.3 qui établit le lien entre la longueur d'onde modifiée dans un milieu d'indice n à la longueur d'onde dans le vide : $\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$.

a. **Résoudre le problème** Dans l'eau, où l'indice de réfraction est de 1,333 (*voir le tableau 5.1*), la longueur d'onde est

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n} = \frac{589{,}0\,\mathrm{nm}}{1{,}333} = 441{,}9\,\mathrm{nm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Résoudre le problème** Dans le plexiglas, où l'indice de réfraction est de 1,51, la longueur d'onde est

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n} = \frac{589{,}0\,\mathrm{nm}}{1{,}51} = 390\,\mathrm{nm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. **Résoudre le problème** Dans le diamant, où l'indice de réfraction est de 2,419, la longueur d'onde est

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n} = \frac{589{,}0\,\mathrm{nm}}{2{,}419} = 243{,}5\,\mathrm{nm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur des trois longueurs d'onde trouvées est correct. Dans les trois cas, la longueur d'onde est réduite d'un certain facteur, l'onde étant ralentie par le milieu.

E4 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$L_{\text{air}} = 5{,}25\,\mathrm{cm}$	Δt
$L_{\text{cr}} = 2{,}40\,\mathrm{cm}$	

Identifier la clé La clé est l'équation de la vitesse de la lumière en fonction de l'indice de réfraction du milieu.

Résoudre le problème Le temps de parcours Δt dans un milieu d'indice n est lié à la distance parcourue d et à la vitesse par l'expression

$$v = \frac{d}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t = \frac{d}{v} \ , \tag{i}$$

où la vitesse de l'onde électromagnétique est

$$v = \frac{c}{n} \ . \tag{ii}$$

Réunies, les équations (i) et (ii) donnent

$$\Delta t = \frac{d}{\frac{c}{n}} = \frac{nd}{c} \ .$$

Dans le cas présent, l'onde parcourt une certaine distance dans deux milieux distincts, l'air et le verre crown. Le temps de parcours total est donc la somme des temps de parcours dans les deux milieux :

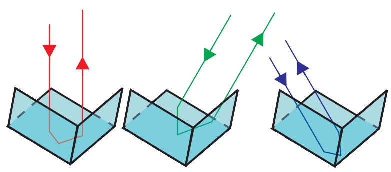
$$\Delta t = \Delta t_{\text{air}} + \Delta t_{\text{cr}} = \frac{n_{\text{air}} d_{\text{air}}}{c} + \frac{n_{\text{cr}} d_{\text{cr}}}{c} \ .$$

L'indice de réfraction du verre crown indiqué au tableau 5.1 est de 1,52. On trouve alors

$$\Delta t = \frac{1 \times 0{,}052\,5\ \text{m}}{3{,}00 \times 10^{8}\ \text{m/s}} + \frac{1{,}52 \times 0{,}024\,0\ \text{m}}{3{,}00 \times 10^{8}\ \text{m/s}} = 2{,}97 \times 10^{-10}\ \text{s} \ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du temps de parcours trouvé est correct, la lumière voyageant très rapidement malgré le milieu.

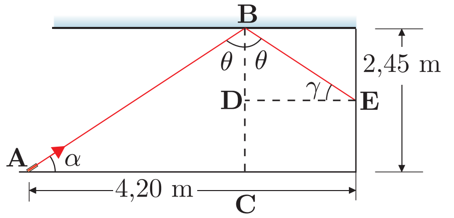
Q5 **Illustrer la situation** La figure ci-contre montre l'un des miroirs décrits ainsi que les réflexions subies par des rayons de différentes provenances.



Résoudre le problème Chaque miroir (composé de trois miroirs plans) permet de retourner tout rayon lumineux exactement dans la direction de sa provenance. Un rayon atteignant l'une des trois surfaces réfléchissantes est forcément dirigé vers l'une des deux autres faces, et ensuite vers la troisième. La conséquence des trois réflexions, en trois dimensions, lorsque les trois faces forment l'intérieur du coin d'un cube, est systématiquement une inversion parfaite de la direction du rayon lumineux, peu importe la direction de sa provenance.

On pouvait ainsi envoyer un rayon lumineux vers la Lune et observer le retour du rayon réfléchi à partir d'un même endroit, et procéder alors à diverses expériences, dont une mesure de la distance entre la Terre et la Lune au décimètre près.

E6 **Illustrer la situation** La figure ci-contre montre le parcours du rayon qui réfléchit au plafond pour atteindre le mur à la moitié de sa hauteur.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$h = 2{,}45\,\text{m}$	α
$l = 4{,}20\,\text{m}$	

Identifier la clé La clé est l'identification de triangles semblables de part et d'autre de la réflexion, sans égard à la distance qui les sépare du mur.

Résoudre le problème Si on trace une bissectrice à l'angle produit par la réflexion au plafond (le segment BC sur l'illustration), on peut déjà affirmer que l'angle θ est le même de part et d'autre, puisque la réflexion sur le miroir se fait de façon symétrique.
Si le rayon frappe le mur à mi-hauteur, on peut tracer un segment DE qui ferme un triangle avec le rayon lui-même. Les triangles ABC et BDE sont donc nécessairement des triangles semblables puisqu'ils comportent tous deux un angle droit et un angle θ. Ainsi, l'angle γ illustré est forcément égal à α. On peut alors établir l'égalité suivante :

$$\tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DE}} \ .$$

À cause de la condition portant sur la hauteur du rayon sur le mur, on a

$$\overline{BD} = \frac{\overline{BC}}{2} \ .$$

Du fait que les triangles sont semblables, on sait aussi que

$$\overline{DE} = \frac{\overline{AC}}{2} \ .$$

La largeur et la hauteur connues du montage permettent d'établir que

$$\overline{BC} = 2{,}45\,\mathrm{m}$$

et que

$$\overline{AC} + \overline{DE} = 4{,}20\,\mathrm{m} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AC} + \frac{\overline{AC}}{2} = 4{,}20\,\mathrm{m}$$

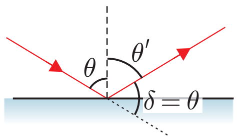
$$\overline{AC} = \frac{2}{3} \times 4{,}20\,\mathrm{m} = 2{,}80\,\mathrm{m} \ .$$

On peut finalement évaluer l'angle α :

$$\tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \arctan\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \arctan\frac{2{,}45\,\mathrm{m}}{2{,}80\,\mathrm{m}} = 41{,}2^\circ \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'angle trouvé est correct.

E7 **Illustrer la situation** La figure ci-contre montre le rayon incident et le rayon réfléchi tels que la déviation réelle du rayon initial est Δ.



Décortiquer le problème On cherche à faire en sorte que l'angle de déviation du rayon après la réflexion coïncide avec l'angle d'incidence normal au miroir.

Identifier la clé La clé est le schéma du rayon incident et de sa continuité qui permet de déterminer l'angle de déviation δ du rayon réfléchi par rapport au rayon incident.

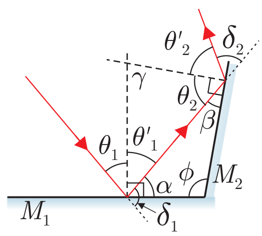
Résoudre le problème D'après la figure, l'angle d'incidence, l'angle d'émergence du rayon réfléchi et l'angle de déviation résultant du rayon incident forment un angle de 180°. Autrement dit,

$$\theta + \theta' + \delta = 180^\circ \ .$$

La réflexion symétrique sur le miroir entraîne que $\theta' = \theta$, et on souhaite trouver la condition telle que $\delta = \theta$. Ainsi,

$$\theta + \theta + \theta = 180^\circ \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ \ . \qquad \text{(réponse)}$$

E8 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre le rayon incident les deux rayons réfléchis par l'ensemble de deux miroirs. Les angles utilisés dans le développement de la solution y sont illustrés.



Décortiquer le problème Dans un contexte comme celui de l'exemple 5.2, on s'intéresse à la position relative des deux miroirs lorsque l'angle de déviation total du miroir est de 180°.

Identifier la clé La clé est que pour revenir dans sa direction d'origine, un rayon doit subir une déviation totale de 180°.

Résoudre le problème Les angles identifiés δ_1 et δ_2 sont les deux déviations successives que le rayon a subies. Le rayon incident sera réfléchi dans la direction opposée lorsque

$$\delta_1 + \delta_2 = 180^\circ \ .$$

Les deux réflexions sur les miroirs plans entraînent que

$$\theta_1' = \theta_1 \qquad \text{et} \qquad \theta_2' = \theta_2 \ .$$

On peut donc affirmer que chaque angle de déviation δ est la différence entre 180° et 2θ :

$$\delta_1 = 180^\circ - 2\theta_1 \qquad \text{et} \qquad \delta_2 = 180^\circ - 2\theta_2 \ . \tag{i}$$

L'angle entre les normales des deux miroirs, identifié γ sur la figure, se retrouve également à l'intérieur du triangle dont les deux autres angles sont θ_1' et θ_2. On peut évaluer ces deux angles à partir des équations (i) :

$$\theta_1' = \theta_1 = \frac{180^\circ - \delta_1}{2} \qquad \text{et} \qquad \theta_2 = \frac{180^\circ - \delta_2}{2} \ . \tag{ii}$$

Puisque la somme des angles intérieurs d'un triangle est de 180°, on peut affirmer que

$$\gamma + \theta_1' + \theta_2 = 180^\circ \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = 180^\circ - (\theta_1' + \theta_2) \ .$$

À partir des équations (ii), on peut trouver une expression de $(\theta_1' + \theta_2)$:

$$\theta_1' + \theta_2 = \frac{180^\circ - \delta_1}{2} + \frac{180^\circ - \delta_2}{2} = 180^\circ - \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2) \ . \tag{iii}$$

Tel qu'on l'a mentionné plus tôt, la somme $(\delta_1 + \delta_2)$ est de 180° lorsqu'un rayon est réfléchi parfaitement sur lui-même. L'équation (iii) devient donc

$$\theta_1' + \theta_2 = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ) = 90^\circ \ .$$

On peut évaluer l'angle γ à partir de la somme des angles intérieurs d'un triangle :

$$\gamma = 180^\circ - (\theta_1' + \theta_2) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \ .$$

Finalement, l'angle ϕ recherché appartient au quadrilatère formé par les deux normales des miroirs (en pointillés) et les deux miroirs eux-mêmes. Puisque $\gamma = 90^\circ$ et que les normales sont, par définition, perpendiculaires aux miroirs, l'angle ϕ vaut nécessairement 90° aussi (ces directions forment un quadrilatère, et la somme des angles intérieurs d'un quadrilatère est de 360°).

$$\phi = 360^\circ - \gamma - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

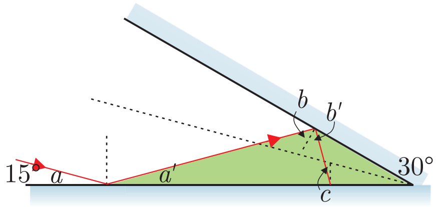
On peut donc affirmer que

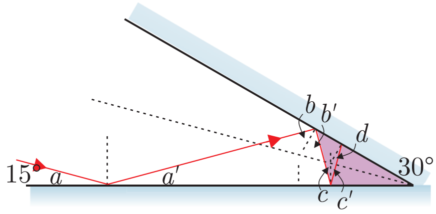
$$\phi = 90^\circ \ . \tag{réponse}$$

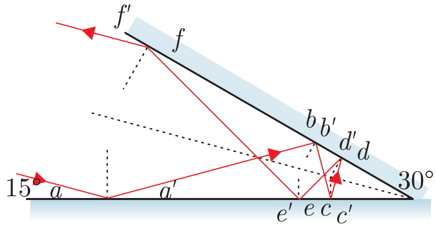
Valider la réponse Deux miroirs perpendiculaires provoquent effectivement la réflexion d'un rayon sur lui-même, peu importe l'angle d'incidence θ_1.

P9 **Identifier la clé** La clé consiste à évaluer tous les angles d'incidence et de réflexion à partir d'un schéma du parcours.

Résoudre le problème À l'entrée entre les deux miroirs, le rayon est parallèle à l'axe de symétrie du montage. Sur la figure, cet axe forme 15° avec l'horizontale puisque le miroir incliné fait 30° avec l'horizontale. En étant parallèle à cet axe, le rayon forme lui-même un angle a de 15° avec l'horizontale. La symétrie de la réflexion entraîne par ailleurs pour la première réflexion que $a' = a$.







Pour analyser la deuxième réflexion, on peut analyser le triangle formé de l'angle a', de l'angle de 30° et de la somme $b + 90°$ (*voir le triangle vert sur la figure du haut, ci-contre*). Ainsi :

$$a' + 30° + (b + 90°) = 180°$$

$$b = 180° - (a' + 30° + 90°) = 45° \ .$$

La symétrie de la réflexion entraîne alors que $b' = b = 45°$. On procède de la même manière pour déterminer les angles c et c'. Le triangle rose sur la figure du milieu ci-contre est formé d'un angle de 30°, du complément de l'angle b', soit $90° - b' = 45°$, et de la somme $c + 90°$. Ainsi,

$$30° + 45° + (90° + c) = 180°$$

$$c = 180° - (30° + 45° + 90°) = 15° \ .$$

La symétrie de la réflexion entraîne alors que $c' = c = 15°$. À partir d'ici, on peut constater qu'il se forme un triangle isocèle à la pointe des deux miroirs. Le complément de l'angle c' est $90° - 15° = 75°$. Le triangle formé par l'angle de 30° et cet angle de 75° a un troisième angle défini par

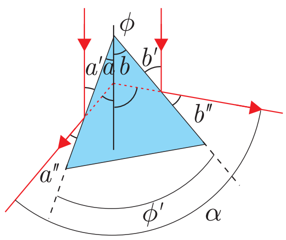
$$180° - (30° + 75°) = 75° \ .$$

Les trois premières réflexions mènent donc à une situation symétrique où le rayon ressortira du coin avec un tracé semblable à celui de son entrée, soit avec trois autres réflexions. Les angles d et d' de la troisième figure valent 15° chacun, les angles e et e' valent 45° chacun, et les angles f et f' valent 15°. On a après six réflexions un rayon lumineux qui ne converge plus vers aucun des deux miroirs. Il y a donc six réflexions en tout.

$$N = 6 \text{ réflexions} \qquad \text{(réponse)}$$

P10 **Illustrer la situation** La figure ci-contre identifie tous les angles formés par les surfaces du prisme et les rayons lumineux, ces angles étant impliqués dans la solution.

Identifier la clé La clé est de diviser l'angle au sommet du prisme en deux angles.



Résoudre le problème Soit a et b, les angles obtenus à la suite de la division de l'angle ϕ par une droite parallèle aux rayons incidents :

$$a + b = \phi \ .$$

Les rayons incidents forment respectivement des angles $a' = a$ et $b' = b$ avec les surfaces du prisme, puisque a et a' sont des angles alternes-internes.

La symétrie lors de la réflexion fait en sorte que les angles a'' et b'' sont respectivement égaux aux angles a' et b'. Ainsi,

$$a'' = a \qquad \text{et} \qquad b'' = b \ .$$

L'angle α de la figure est donc la somme des angles a'', $\phi' = \phi$ et b'' :

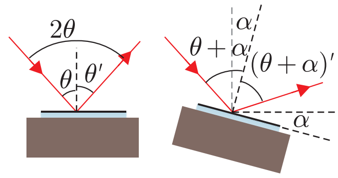
$$\alpha = a'' + \phi' + b'' = \phi + a + b, \qquad \text{avec} \qquad a + b = \phi \ .$$

Donc,

$$\alpha = \phi + (a + b) = \phi + (\phi) = 2\phi$$
$$\phi = \frac{\alpha}{2} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Visuellement, l'angle α semble être le double de l'angle ϕ.

P11 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre l'objet en rotation dans deux positions différentes, ainsi que les angles d'incidence et de réflexion.



Identifier la clé La clé est que, lors de la rotation du miroir d'un angle α, sa normale tourne également d'un même angle α.

Résoudre le problème Soit un miroir, dans une orientation quelconque, frappé par un rayon formant un angle θ avec la perpendiculaire au miroir. Le rayon réfléchi formera alors un angle avec le rayon incident qui sera défini par

$$\theta + \theta' = 2\theta \ .$$

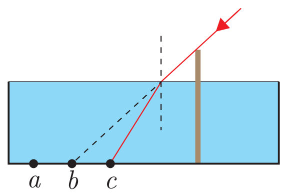
Si on fait pivoter le miroir d'un angle α, la perpendiculaire au miroir pivote également d'un angle α, et l'angle d'incidence, qui était θ, devient $\theta + \alpha$ pour un même rayon incident. L'angle de réflexion devient alors $(\theta + \alpha)'$ et l'angle entre les rayons incident et réfléchi est

$$(\theta + \alpha) + (\theta + \alpha)' = 2\theta + 2\alpha \ .$$

On constate que la variation d'orientation des rayons réfléchis entre les deux situations est

$$(2\theta + 2\alpha) - 2\theta = 2\alpha \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Q12 **Illustrer la situation** La figure ci-contre montre le rayon incident et le rayon réfracté lorsque le second milieu (l'eau) a un indice plus élevé que le premier milieu.



Identifier la clé La clé est qu'en passant dans un milieu d'indice de réfraction plus élevé, un rayon lumineux se rapproche de la normale.

Résoudre le problème Sur la figure 5.45, le rayon incident est dirigé vers le point b. Lorsque le rayon frappera la surface, de l'eau (horizontale), il se rapprochera de la normale à la surface, car l'indice de réfraction de l'eau est plus élevé que celui de l'air. Il se rapprochera donc de la verticale et ne sera plus dirigé vers le point b, mais plutôt vers un point à droite de b, par exemple le point c.

Le rayon se dirigera vers le point c. (réponse)

Q13 **Identifier la clé** La clé est que, dans un milieu d'indice plus élevé, un rayon lumineux forme un angle plus petit avec la normale à la surface d'entrée dans le milieu, selon la loi de la réfraction $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$.

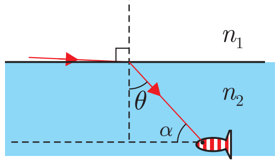
Résoudre le problème Pour chaque interface, on pourrait déterminer si le rayon subit une augmentation ou une diminution de l'indice de réfraction lorsqu'il se rapproche ou s'éloigne de la normale. Cependant, pour comparer les indices de deux milieux non contigus, on doit nécessairement comparer l'inclinaison dans chaque milieu du rayon par rapport à la normale, les interfaces étant toutes parallèles (avec des normales horizontales).

Pour ordonner les indices par ordre croissant, on doit d'abord déterminer celui qui est le plus faible, c'est-à-dire celui du milieu où le rayon est le plus éloigné de l'horizontale. Il s'agit de n_4, suivi de n_2, de n_1 et de n_3 :

$$n_4 < n_2 < n_1 < n_3 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Les trois réfractions observées confirment que $n_2 < n_1$, que $n_3 > n_2$ et que $n_4 < n_3$.

E14 **Illustrer la situation** La figure ci-contre montre le rayon incident provenant du Soleil et rencontrant la surface à un angle rasant avant d'être réfracté dans l'eau.



Décortiquer le problème La lumière du Soleil dévie en pénétrant dans l'eau (à travers une surface horizontale). On cherche l'angle que forme un rayon avec l'horizontale une fois dans l'eau s'il a frappé la surface de l'eau avec un angle minime.

Identifier la clé La clé est la loi de la réfraction appliquée à un angle d'incidence dans l'air de 90°.

Résoudre le problème La loi de la réfraction stipule que

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \ .$$

Si le rayon se déplace d'abord dans l'air en rasant l'eau (à 90,00° de la normale), on cherche la valeur de θ_2 :

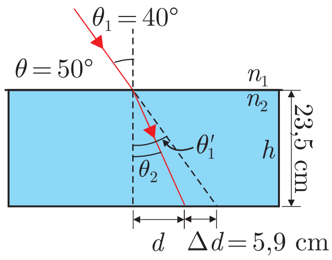
$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_1 \sin\theta_1}{n_2}\right)$$
$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{1{,}000 \times \sin 90{,}00°}{1{,}333}\right) = 48{,}61° \ .$$

Il s'agit de l'angle que forme le rayon avec la verticale. Par rapport à l'horizontale, son orientation est

$$\alpha = 90{,}00° - \theta_2 = 90{,}00° - 48{,}6° = 41{,}39° \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Le rayon s'approche bel et bien de la perpendiculaire à la surface en pénétrant dans un milieu d'indice plus élevé.

E15 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre le rayon réfracté qui atteint le fond du bassin à un endroit différent du scénario où le rayon incident ne serait pas dévié. La distance entre ces deux positions est Δd.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\Delta d = 5{,}9\,\text{cm}$	n
$\theta = 50{,}0°$	
$h = 23{,}5\,\text{cm}$	

Identifier la clé La clé consiste à déterminer les distances à partir des conditions énoncées lorsque le bassin est vide.

Résoudre le problème D'abord, on convertit l'angle donné pour connaître l'angle que forme le rayon avec la verticale, et non l'horizontale, car c'est l'angle que l'on doit utiliser avec la loi de la réfraction :

$$\theta_1 = 90{,}0° - \theta = 90{,}0° - 50{,}0° = 40{,}0° \ .$$

Lorsque le bassin est vide, le rayon ne subit aucune déviation jusqu'au fond du bassin et $\theta'_1 = \theta$. Alors, la tangente de l'angle θ_1 est liée aux distances h, d et Δd :

$$\tan\theta'_1 = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{d + \Delta d}{h} \ .$$

On veut trouver une expression de d seul pour s'en servir ensuite dans le cas de θ_2 :

$$d = h\tan\theta'_1 - \Delta d, \qquad \text{avec} \qquad \Delta d = 5{,}9\,\text{cm} \ .$$

Lorsque le bassin est rempli, la déviation du rayon fait en sorte qu'il parcourt dans le liquide une distance horizontale d telle que

$$\tan\theta_2 = \frac{d}{h} \qquad \Rightarrow \qquad \theta_2 = \arctan\left(\frac{d}{h}\right) .$$

Si on l'insère dans la loi de la réfraction, cet angle θ_2 permet d'évaluer l'indice du milieu :

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \qquad \Rightarrow \qquad n_2 = \frac{n_1 \sin\theta_1}{\sin\theta_2}$$

$$n_2 = \frac{n_1 \sin\theta_1}{\sin \arctan\left(\frac{d}{h}\right)} = \frac{n_1 \sin\theta_1}{\sin \arctan\left(\frac{(h\tan\theta_1' - \Delta d)}{h}\right)}$$

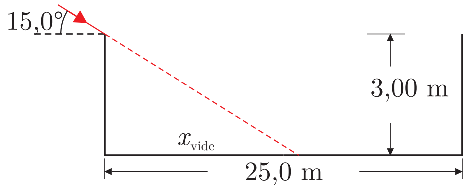
$$n_2 = \frac{1{,}00 \times \sin 40°}{\sin\left(\arctan\left(\frac{(23{,}5\,\text{cm} \tan 40{,}0° - 5{,}9\,\text{cm})}{23{,}5\,\text{cm}}\right)\right)} = 1{,}27 . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'indice de réfraction trouvé est correct, celui-ci étant légèrement inférieur à celui de l'eau.

E16 Décortiquer le problème

Connues		Inconnues
$\theta = 15{,}0°$	$h = 3{,}00\,\text{m}$	x_{vide}
$l = 25{,}0\,\text{m}$		$x_{1/2}$
		x_{pleine}

a. Illustrer la situation La figure ci-contre montre le parcours du rayon lumineux lorsque la piscine est vide.



Identifier la clé La clé est que le rayon ne subira aucune déviation jusqu'au fond si la piscine est vide.

Résoudre le problème L'angle de 15° permet de connaître l'angle du rayon avec la verticale, soit l'angle à utiliser dans les calculs de réfraction :

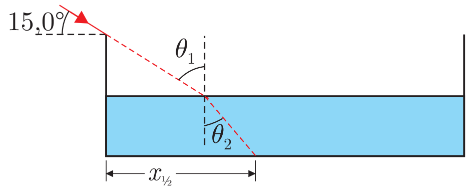
$$\theta_1 = 90{,}0° - 15{,}0° = 75{,}0° .$$

Cet angle se trouve à l'intérieur du triangle formé avec la hauteur h et la distance x_{vide}. On fait alors un simple calcul de trigonométrie pour trouver la distance au fond de la piscine :

$$\tan\theta_1 = \frac{x_{\text{vide}}}{h}$$

$$x_{\text{vide}} = h\tan\theta_1 = 3{,}00\,\text{m} \tan 75{,}0° = 11{,}2\,\text{m} . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Illustrer la situation La figure ci-contre montre le parcours du rayon lumineux lorsque la piscine est remplie à moitié d'eau.



Identifier la clé La clé est la loi de la réfraction appliquée à une distance donnée de la paroi du bassin.

Résoudre le problème La réfraction à la surface de l'eau se produira à une distance a de la paroi du bassin. On peut déterminer cette distance a de la même manière que la distance x_{vide} trouvée en **a.**, mais à partir d'une hauteur $h/2$:

$$\tan\theta_1 = \frac{a}{h/2} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{h\tan\theta_1}{2} = \frac{3{,}00\,\text{m} \tan 75{,}0°}{2} = 5{,}60\,\text{m} .$$

À partir de cet endroit, le rayon lumineux prendra une nouvelle orientation θ_2 définie par la réfraction à la surface de l'eau :

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_1 \sin\theta_1}{n_2}\right) .$$

L'indice de l'eau étant connu, on peut déterminer θ_2 :

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{1{,}00 \times \sin\theta_1}{1{,}333}\right) = 46{,}4^\circ .$$

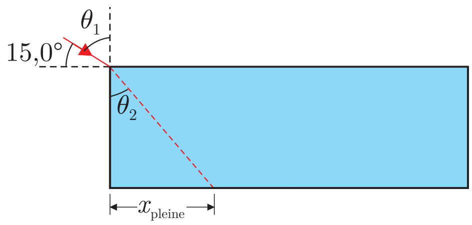
La distance b peut ensuite être déterminée avec l'angle θ_2 et la hauteur de 1,50 m qu'il reste à parcourir :

$$\tan\theta_2 = \frac{b}{h/2} \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{h\tan\theta_2}{2} = \frac{3{,}00\,\mathrm{m}\tan 46{,}4^\circ}{2} = 1{,}58\,\mathrm{m} .$$

Finalement, la distance horizontale totale parcourue dans le bassin est la somme des distances a et b :

$$x_{1/2} = a + b = 5{,}60\,\mathrm{m} + 1{,}58\,\mathrm{m} = 7{,}18\,\mathrm{m} . \qquad \text{(réponse)}$$

c. Identifier la clé La clé est la loi de la réfraction appliquée à une distance donnée de la paroi du bassin.

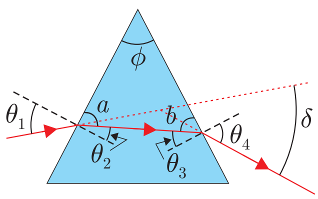


Résoudre le problème La déviation ayant lieu à une hauteur h du fond de la piscine, le rayon n'aura qu'une seule orientation jusqu'au fond. L'angle du rayon réfracté est le même que celui qu'on a trouvé en **b.**, soit 46,4°, puisque la surface est orientée de la même manière (elle est horizontale). Avec cet angle, on trouve la distance horizontale parcourue ainsi :

$$\tan\theta_2 = \frac{x_{\text{pleine}}}{h} \quad \Rightarrow \quad x_{\text{pleine}} = h\tan\theta_2 = 3{,}00\,\mathrm{m}\tan 46{,}4^\circ = 3{,}15\,\mathrm{m} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur des trois distances trouvées est correct. De plus, les distances sont ordonnées logiquement selon le niveau de l'eau.

E17 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre le prisme ainsi que les différents angles produits par le tracé sur rayon lumineux.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\phi = 55{,}0^\circ$	θ_2
$\theta_1 = 38{,}0^\circ$	θ_3
	θ_4
	δ

a. Identifier la clé La clé est la loi de la réfraction avec un angle d'incidence θ_1.

Résoudre le problème La loi de la réfraction stipule que

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 .$$

Le tableau 5.1 indique que l'indice n_2 du verre crown est de 1,52. L'angle θ_1 étant déjà donné par rapport à la normale, on a

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_1 \sin\theta_1}{n_2}\right) = \arcsin\left(\frac{1{,}00 \times \sin 38{,}0^\circ}{1{,}52}\right) = 23{,}9^\circ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de θ_2 est correct puisque le rayon se rapproche de la normale à la surface.

b. **Identifier la clé** La clé est l'analyse d'un triangle comprenant l'angle ϕ et les compléments des angles θ_1 et θ_2.

Résoudre le problème Pour évaluer θ_3, on trouve la valeur de b, qu'il est possible de déterminer si on connaît ϕ et a. L'angle a étant le complément de θ_1, on a

$$a = 90° - \theta_2 \qquad \text{et} \qquad a + b + \phi = 180°$$

$$\begin{aligned} b &= 180° - \phi - a = 180° - \phi - (90° - \theta_2) \\ &= 180{,}0° - 55{,}0° - (90{,}0° - 23{,}9°) = 58{,}9° \ . \end{aligned}$$

On peut alors calculer θ_3, le complément de b :

$$\begin{aligned} \theta_3 &= 90° - b = 90° - 58{,}9° \\ \theta_3 &= \phi - \theta_2 = 55{,}0° - 23{,}9° = 31{,}1° \ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Visuellement, l'ordre de grandeur de θ_3 semble correct, celui-ci étant sensiblement à l'échelle.

c. **Identifier la clé** La clé est la loi de la réfraction avec un angle d'incidence θ_3.

Résoudre le problème Selon la loi de la réfraction adaptée à la sortie du prisme, on a

$$n_2 \sin\theta_3 = n_1 \sin\theta_4 \ .$$

On peut immédiatement isoler et calculer θ_4 :

$$\theta_4 = \arcsin\left(\frac{n_2 \sin\theta_3}{n_1}\right) = \arcsin\left(\frac{1{,}52 \times \sin 31{,}1°}{1{,}00}\right) = 51{,}7° \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de θ_2 est correct puisque le rayon se rapproche de la normale à la surface.

d. **Identifier la clé** La clé consiste à évaluer les deux déviations successives à partir des angles déjà définis.

Résoudre le problème La première déviation δ_1 est la différence entre l'angle θ_1 et l'angle θ_2 :

$$\delta_1 = \theta_1 - \theta_2 = 38{,}0° - 23{,}9° = 14{,}1° \ .$$

Sur l'autre surface, la deuxième déviation δ_2 est la différence entre l'angle θ_4 et l'angle θ_3 :

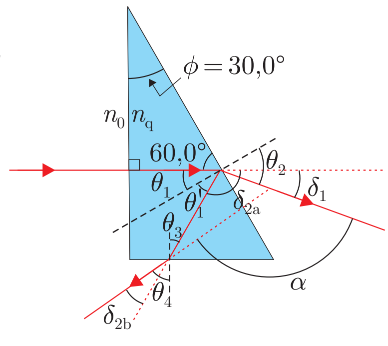
$$\delta_2 = \theta_4 - \theta_3 = 51{,}7° - 31{,}1° = 20{,}6° \ .$$

Finalement, la déviation totale est la somme des deux déviations :

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 14{,}1° + 20{,}6° = 34{,}7° \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de δ est correct, selon le schéma.

P18 **Illustrer la situation** La figure ci-contre montre le parcours du rayon lumineux et illustre les différents angles impliqués dans la solution.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\phi = 30{,}0°$	α
$n_{(q)} = 1{,}47$	

Identifier la clé La clé consiste à évaluer les déviations totales subies par les deux rayons émergents.

Résoudre le problème Puisque le rayon incident entre dans le prisme à angle droit, il ne subit aucune déviation avant d'atteindre la deuxième face, qu'il frappe à un angle de 30,0° par rapport à la normale (car il forme un angle de 60,0° par rapport à la surface).

Le rayon réfracté émergeant de la face inclinée ne subit qu'une déviation, définie par la loi de la réfraction :

$$n_{(q)} \sin\theta_1 = n_0 \sin\theta_2 \ .$$

L'indice de réfraction du quartz, selon le tableau 5.1, étant de 1,47, on a

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_{(q)}\sin\theta_1}{n_0}\right) = \arcsin\left(\frac{1{,}47 \times \sin 30{,}0^\circ}{1{,}00}\right) = 47{,}3^\circ \ .$$

La déviation du rayon réfracté est la différence entre θ_2 et 30,0° :

$$\delta_1 = \theta_2 - 30{,}0^\circ = 47{,}3^\circ - 30{,}0^\circ = 17{,}3^\circ \ .$$

Le rayon réfléchi subit quant à lui deux déviations, la première se produisant lors de la réflexion interne :

$$\delta_{2a} = 180^\circ - \theta_1 - \theta_1' = 180^\circ - 2\theta_1 = 180^\circ - 2 \times 30{,}0^\circ = 120^\circ \ .$$

Ensuite, en sortant du prisme, le rayon réfléchi frappe la surface de l'air avec un angle θ_3 que l'on peut déterminer grâce au triangle rectangle dont l'autre angle est égal à $\theta_1 + \theta_1' = 2\theta_1$:

$$\theta_3 = 180^\circ - 90^\circ - 2\theta_1 = 180^\circ - 90^\circ - 2 \times 30{,}0^\circ = 30{,}0^\circ \ .$$

On peut alors appliquer la loi de la réfraction pour connaître θ_4 et, de là, δ_{2b} :

$$n_{(q)} \sin\theta_3 = n_0 \sin\theta_4$$
$$\theta_4 = \arcsin\left(\frac{n_{(q)}\sin\theta_3}{n_0}\right) = \arcsin\left(\frac{1{,}47 \times \sin 30{,}0^\circ}{1{,}00}\right) = 47{,}3^\circ \ .$$

Puisque la position relative de ce rayon par rapport à la surface est la même que pour le premier rayon (c'est-à-dire que $\theta_3 = \theta_1$), la déviation δ_{2b} est la même que la déviation δ_1, soit $\delta_{2b} = 17{,}3^\circ$. La déviation totale du deuxième rayon est alors

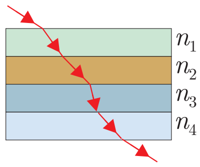
$$\delta_2 = \delta_{2a} + \delta_{2b} = 120^\circ + 17{,}3^\circ = 137{,}3^\circ \ .$$

L'angle α entre les deux rayons émergents est la différence des déviations δ_1 et δ_2 :

$$\alpha = |\delta_2 - \delta_1| = |137{,}3^\circ - 17{,}3^\circ| = 120^\circ \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'angle α est correct, plus grand qu'un angle droit et plus petit qu'un angle plat.

P19 **Illustrer la situation** La figure ci-contre montre un rayon lumineux subissant plusieurs déviations par réfraction en rencontrant une suite de lames de verre parallèles.



Identifier la clé La clé est que l'angle de réfraction d'un rayon sortant de l'une des lames de verre est également l'angle d'incidence sur la lame suivante.

Résoudre le problème À l'entrée du rayon dans la première couche de verre, l'application de la loi de la réfraction donne

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \ ,$$

ce qui permet de déterminer l'angle θ_2 si on connaît les indices de réfraction et l'angle d'incidence θ_1. À l'arrivée sur la deuxième face, l'angle d'incidence est précisément le même que θ_2 puisque les faces sont parallèles et que les normales des deux surfaces créent des triangles semblables. On aurait alors

$$n_2 \sin\theta_2 = n_3 \sin\theta_3 \ .$$

On a donc une double égalité :

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = n_3 \sin\theta_3 \qquad \Rightarrow \qquad n_1 \sin\theta_1 = n_3 \sin\theta_3 \ .$$

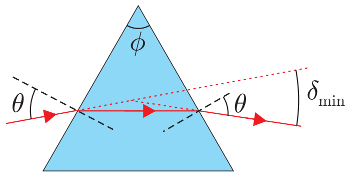
Avec toute nouvelle interface parallèle, on refait le même raisonnement et on ajoute une étape à l'égalité multiple, jusqu'au retour dans l'air après un nombre d'interfaces N, où l'indice de réfraction n_N est le même que n_1. L'angle d'émergence ne peut donc qu'être le même angle que θ_1 :

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = n_3 \sin\theta_3 = \ldots = n_{N-1} \sin\theta_{N-1} = n_N \sin\theta_N$$

$$n_1 \sin\theta_1 = n_N \sin\theta_N, \qquad \text{avec} \qquad n_N = n_1$$

$$n_1 \sin\theta_1 = n_1 \sin\theta_N \qquad \Rightarrow \qquad \theta_N = \arcsin\left(\frac{n_1 \sin\theta_1}{n_1}\right) = \arcsin \sin\theta_1 = \theta_1 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

P20 **Illustrer la situation** La figure ci-contre montre le rayon lumineux traversant le prisme et formant un tracé symétrique par rapport à celui-ci. Ses angles avec la normale de chacune des surfaces sont identiques.



Identifier la clé La clé est le fait que le parcours du rayon est symétrique par rapport à l'axe de symétrie du prisme.

Résoudre le problème Sur chaque face, si on nomme θ l'angle du rayon dans l'air et θ' l'angle du rayon dans le prisme (par rapport à la surface), l'application de la loi de réfraction avec un indice de l'air égale à 1 donne

$$\sin\theta = n \sin\theta' \ . \qquad \text{(i)}$$

Pour chacune des deux réfractions, la déviation (δ_1 et δ_2) est la différence entre θ et θ', et la déviation totale δ_{min} est alors la somme des deux déviations partielles :

$$\delta_{\text{min}} = \delta_1 + \delta_2 = (\theta - \theta') + (\theta - \theta') = 2(\theta - \theta') \ . \qquad \text{(ii)}$$

De plus, pour obtenir l'expression à démontrer, on doit établir une relation entre ϕ et les angles θ et θ'. On peut y parvenir en analysant le triangle isocèle formé au sommet par l'angle ϕ et à la base par deux angles de $90° - \theta'$. Puisque la somme des angles intérieurs d'un triangle est de $180°$, on a

$$\phi + (90° - \theta') + (90° - \theta') = 180° \qquad \Rightarrow \qquad \theta' = \frac{\phi}{2} \ . \qquad \text{(iii)}$$

On peut maintenant réunir les équations (i), (ii) et (iii) afin d'établir une expression de n. À partir de l'équation (i), on a

$$n = \frac{\sin\theta}{\sin\theta'} \ . \qquad \text{(iv)}$$

L'équation (ii) permet de trouver une expression de θ en fonction de θ' et de ϕ :

$$\delta_{\text{min}} = 2(\theta - \theta') \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \frac{\delta_{\text{min}}}{2} + \theta' \ .$$

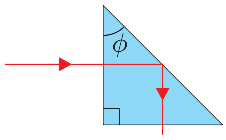
Cette expression de θ peut être insérée dans l'équation (iv) :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\delta_{\text{min}}}{2} + \theta'\right)}{\sin\theta'} \ . \qquad \text{(v)}$$

Finalement, on peut remplacer θ' par $\frac{\phi}{2}$ selon l'équation (v) :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\delta_{\text{min}}}{2} + \frac{\phi}{2}\right)}{\sin\frac{\phi}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\delta_{\text{min}}+\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

E21 **Illustrer la situation** La figure ci-contre montre le prisme à angle droit et le parcours du rayon lumineux analysé.



Décortiquer le problème

Connue	Inconnue
$\phi = 45{,}0°$	n_{min}

Identifier la clé La clé est l'équation 5.10 de l'angle critique en réfraction.

Résoudre le problème Si le rayon entre perpendiculairement dans la face verticale, il frappera la face inclinée avec un angle d'incidence de 45,0° exactement. On cherche donc l'indice de réfraction du verre tel que cet angle correspond à l'angle critique de réflexion totale interne θ_c :

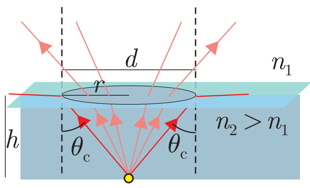
$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1}, \qquad \text{avec} \qquad \theta_c = 45° \ .$$

Dans cette équation, l'indice n_2 est celui de l'air, que le rayon ne doit pas traverser, ou dont ne peut émerger qu'avec un angle rasant à 90,0°. L'indice $n_1 = n_{\text{min}}$ est celui du verre, soit celui qu'on cherche à déterminer :

$$n_{\text{min}} = \frac{n_2}{\sin\theta_c} = \frac{1{,}00}{\sin 45°} = 1{,}41 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'indice de réfraction trouvé est correct.

E22 **Illustrer la situation** La figure ci-contre montre la lampe au fond de la piscine ainsi que les rayons se dirigeant vers la surface pour en émerger. Les rayons faisant un angle θ_c avec la normale sont ceux qui délimitent, à la surface, le cercle d'où la lumière émerge.



Décortiquer le problème

Connue	Inconnue
$h = 2{,}400\,\text{m}$	d_{cercle}

Identifier la clé La clé est le fait que l'angle à partir duquel les rayons émergent de l'eau coïncide avec l'angle critique.

Résoudre le problème On considère d'abord la sortie du rayon de l'eau pour déterminer θ_c :

$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1} \qquad \Rightarrow \qquad \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arcsin\left(\frac{1{,}000}{1{,}333}\right) = 48{,}6° \ .$$

Cet angle permet de déterminer le rayon du cercle à la surface de l'eau, à l'aide de la profondeur h :

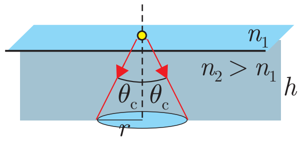
$$\tan\theta_c = \frac{r}{h} \qquad \Rightarrow \qquad r = h\tan\theta_c = 2{,}400\,\text{m} \ \times \ \arctan 48{,}61°$$
$$= 2{,}723\,\text{m} \ .$$

Finalement, le diamètre est le double de ce rayon :

$$d = 2r = 2 \times 2{,}723\,\text{m} = 5{,}446\,\text{m} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du diamètre est correct, si on le compare à la profondeur de l'eau.

E23 **Illustrer la situation** La figure ci-contre montre la source à la surface de la piscine ainsi que les rayon se dirigeant vers le fond. Les rayons faisant un angle θ_c avec la normale sont ceux qui délimitent au fond la surface éclairée.



Décortiquer le problème

Connue	Inconnue
$h = 1{,}45\,\mathrm{m}$	A_{cercle}

Identifier la clé La clé est que les rayons rasant la surface de l'eau entrent dans l'eau immédiatement sous la source avec l'angle critique de réflexion totale interne.

Résoudre le problème On suppose que les rayons rasants touchent l'eau avec un angle de 90,0° par rapport à la verticale dès qu'ils quittent la source. Leur direction de propagation dans l'eau forme donc un angle θ_c avec la verticale :

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2, \qquad \text{avec} \qquad n_1 = 1{,}00 \qquad \text{et} \qquad \theta_1 = 90{,}0°$$

$$\theta_2 = \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_1 \sin\theta_1}{n_2}\right) = \arcsin\left(\frac{1{,}00 \times \sin 90{,}0°}{1{,}333}\right) = 48{,}6° \ .$$

Cet angle permet de calculer le déplacement horizontal du rayon lorsque celui-ci atteint le fond de la piscine :

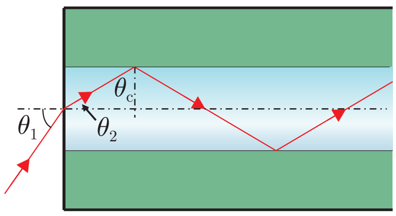
$$\tan\theta_2 = \frac{r}{h} \qquad \Rightarrow \qquad r = h\tan\theta_2 = 1{,}45\,\mathrm{m} \times \arctan 48{,}6° = 1{,}64\,\mathrm{m} \ .$$

La superficie du cercle éclairé est alors

$$A_{\mathrm{cercle}} = \pi r^2 = \pi \times (1{,}64\,\mathrm{m})^2 = 8{,}50\,\mathrm{m}^2 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la superficie trouvée est correct.

P24 **Illustrer la situation** La figure ci-contre montre la fibre optique (munie d'une gaine) ainsi que le rayon lumineux qui y entre et y subit quelques réflexions totales internes.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$n_{\mathrm{fibre}} = 1{,}64$	θ_c
$n_{\mathrm{gaine}} = 1{,}36$	θ_i

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 5.10 de l'angle critique en réfraction.

Résoudre le problème À la rencontre de la gaine protectrice, l'angle critique est

$$\sin\theta_c = \frac{n_{\mathrm{gaine}}}{n_{\mathrm{fibre}}} \qquad \Rightarrow \qquad \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_{\mathrm{gaine}}}{n_{\mathrm{fibre}}}\right) = \arcsin\left(\frac{1{,}36}{1{,}64}\right) = 56{,}0° \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Résoudre le problème L'ordre de grandeur de l'angle critique trouvé est correct.

b. **Identifier la clé** La clé consiste à évaluer l'angle d'entrée du rayon lumineux dans la fibre à partir de l'angle critique trouvé en **a.**

Résoudre le problème L'angle critique θ_c ayant été déterminé en **a.**, on peut voir sur la figure que cet angle est complémentaire à θ_2 :

$$\theta_2 = 90{,}0° - \theta_c = 90{,}0° - 56{,}0° = 34{,}0° \ .$$

Cet angle permet ensuite de déterminer l'angle d'incidence θ_1 correspondant, à partir de la loi générale de la réfraction :

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{n_2 \sin\theta_2}{n_1}\right) = \arcsin\left(\frac{1{,}64 \times \sin 34{,}0^\circ}{1{,}00}\right) = 66{,}4^\circ \ .$$

S'il s'agit de l'angle correspondant à l'angle critique de la fibre avec sa gaine, il s'agit aussi de l'angle d'incidence maximal du rayon de l'air à la fibre :

$$\theta_m = 66{,}4^\circ \ . \qquad \text{(réponse)}$$

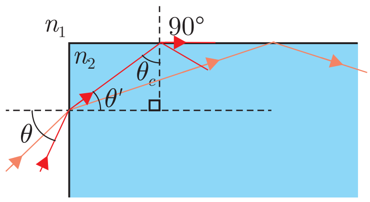
Résoudre le problème L'ordre de grandeur de l'angle trouvé est correct.

P25 Décortiquer le problème

Connue	Inconnue
$n = 1{,}39$	θ

Identifier la clé La clé est le fait que la deuxième réfraction se produit à l'angle critique lorsqu'on se trouve à la valeur minimale de θ.

Résoudre le problème La deuxième réfraction étant la contrainte principale du parcours du rayon, on la traite en premier. Les premiers rayons émergent du verre à partir de θ_c avec un angle rasant, à 90° de la normale. L'angle d'incidence coïncide donc avec l'angle critique de réflexion totale interne θ_c :



$$\sin\theta_c = \frac{n_1}{n_2} \quad \Rightarrow \quad \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1{,}39}\right) = 46{,}0^\circ \ .$$

L'angle θ' est alors un angle complémentaire à θ_c :

$$\theta' = 90{,}0^\circ - \theta_c = 90{,}0^\circ - 46{,}0^\circ = 44{,}0^\circ \ .$$

On peut finalement évaluer θ à partir de la loi générale de la réfraction :

$$n_1 \sin\theta = n_2 \sin\theta'$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{n_2 \sin\theta'}{n_1}\right) = \arcsin\left(\frac{1{,}39 \times \sin 44{,}0^\circ}{1{,}00}\right) = 74{,}9^\circ \ .$$

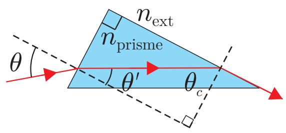
À cet angle, le rayon émerge tout juste du bloc sur une face adjacente. Tous les angles d'incidence supérieurs à 74,9° laissent également le rayon sortir. Ainsi,

$$\theta > 74{,}9^\circ \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'angle minimal trouvé est correct.

P26 Illustrer la situation

La figure ci-contre montre le rayon lumineux parcourant le prisme et illustre les angles impliqués dans la solution.



Décortiquer le problème

Connue	Inconnue
$n = 1{,}40$	θ

Identifier la clé La clé consiste à établir une équation unique de l'angle θ en fonction de l'indice de réfraction du milieu.

Résoudre le problème Le rayon lumineux émerge du côté droit du prisme lorsque l'angle d'incidence sous la surface du milieu extérieur est supérieur à l'angle critique. On commence par exprimer cet angle critique et on détermine l'angle initial correspondant à cet angle critique :

$$\sin\theta_c = \frac{n_{\text{ext}}}{n_{\text{prisme}}} \quad \Rightarrow \quad \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_{\text{ext}}}{n_{\text{prisme}}}\right) = \arcsin\left(\frac{n_{\text{ext}}}{1{,}40}\right) \ .$$

L'angle θ' est par ailleurs un angle complémentaire à θ_c puisque ces deux angles font partie d'un triangle rectangle :

$$\theta' = 90{,}0° - \theta_c = 90{,}0° - \arcsin\left(\frac{n_{ext}}{1{,}40}\right) .$$

On peut finalement évaluer θ à partir de la loi générale de la réfraction appliquée à ce contexte :

$$n_{ext} \sin\theta = n_{prisme} \sin\theta'$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{n_{prisme} \sin\theta'}{n_{ext}}\right) = \arcsin\left(\frac{1{,}40 \sin\left(90{,}0° - \arcsin(\frac{n_{ext}}{1{,}40})\right)}{n_{ext}}\right) .$$

a. Résoudre le problème Dans l'air, l'indice de réfraction est $n_{ext} = 1{,}00$. L'angle θ auquel le rayon traverse le prisme et en émerge est donc défini par

$$\theta > \arcsin\left(\frac{1{,}40 \sin\left(90{,}0° - \arcsin(\frac{1}{1{,}40})\right)}{1}\right) = 78{,}5° . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Résoudre le problème Le prisme étant dans l'eau, on a $n_{ext} = 1{,}333$. L'angle θ auquel le rayon traverse le prisme et en émerge est donc défini par

$$\theta > \arcsin\left(\frac{1{,}40 \sin\left(90{,}0° - \arcsin(\frac{1{,}333}{1{,}40})\right)}{1{,}333}\right) = 18{,}7° . \qquad \text{(réponse)}$$

c. Résoudre le problème Selon le tableau 5.1, l'indice de réfraction de la glycérine est de 1,473. Conséquemment,

$$\theta > \arcsin\left(\frac{1{,}40 \sin\left(90{,}0° - \arcsin(\frac{1{,}473}{1{,}40})\right)}{1{,}473}\right) = \text{calcul impossible} .$$

On constate, avec le terme arcsin(1,473/1,40) qu'il n'est pas possible de calculer θ. Cependant, cela ne signifie pas qu'il n'y a aucun angle d'incidence permettant au rayon de sortir du prisme. C'est la situation limite où un rayon émerge avec une orientation rasante qui ne se calcule pas. En effet, le milieu extérieur ayant un indice de réfraction plus élevé, la réflexion totale interne et l'angle critique n'existent plus pour la deuxième face et tout rayon qui l'atteint la traversera (en se rapprochant même de la normale). Ainsi, tout rayon entrant dans le prisme pourra en sortir par la face opposée s'il la rencontre et c'est l'entrée du rayon dans le prisme qui est sujette à une réflexion totale interne. De la glycérine au prisme, l'angle critique est

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_{prisme}}{n_{gly}}\right) = 71{,}9° .$$

Ainsi, tout angle d'incidence inférieur ou égal à 71,9° sur le prisme permet au rayon d'entrer dans le prisme et traversera nécessairement la seconde surface s'il la rencontre.

$$\theta \leq 71{,}9° \qquad \text{(réponse)}$$

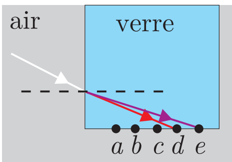
(Remarque : Les dimensions du prisme et le point d'entrée du rayon dans le prisme peuvent faire en sorte que le rayon rencontre la face sous le prisme avant la deuxième face inclinée, mais tout angle $\theta \leq 71{,}9°$ permettra au rayon de sortir si les dimensions du prisme sont assez grandes pour qu'il croise d'abord la face opposée.)

Valider la réponse L'ordre de grandeur des angles trouvés en **a.** et en **b.** est correct, et la réponse en **c.** est cohérente avec le fait que le milieu environnant aurait alors un indice de réfraction plus élevé.

Q27 **Identifier la clé** La clé est le fait que la lumière à des fréquences élevées (longueurs d'onde faibles) subit une déviation plus forte lors de la réfraction.

a. **Résoudre le problème** La lumière passant de l'air au verre, elle passe vers un milieu d'indice plus grand. La lumière se rapprochera donc de la normale à la surface, et de façon plus prononcée pour les longueurs d'onde plus faibles comme le violet.

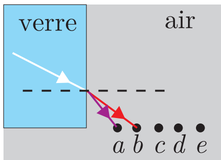
Le rayon incident semble se diriger vers le point c. Aucune couleur n'atteindra ce point, car toutes les couleurs seront plus ou moins déviées, le violet plus que le rouge, en s'approchant de la normale à la surface (en s'approchant de l'horizontale). Ainsi, la lumière rouge atteindra le point d et la lumière violette, le point e.



Rouge : point d ; violet : point e (réponse)

b. **Résoudre le problème** Il se produit en **b.** l'inverse de la situation décrite en **a.** La lumière passant du verre à l'air, elle passe vers un milieu d'indice moins élevé. Elle s'éloignera donc de la normale à la surface, et de façon plus prononcée pour les longueurs d'onde plus faibles comme le violet.

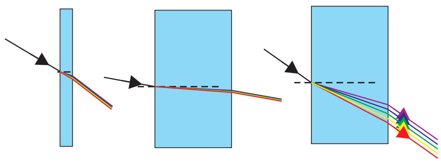
Le rayon incident semble se diriger vers le point c. Aucune couleur n'atteindra ce point, car toutes les couleurs seront plus ou moins déviées, le violet plus que le rouge, en s'éloignant de la normale à la surface (en s'éloignant de l'horizontale). Ainsi, la lumière rouge atteindra le point b et la lumière violette, le point a.



Rouge : point b ; violet : point a (réponse)

Q28 **Identifier la clé** La clé est la faible épaisseur du verre dans les fenêtres.

Résoudre le problème La séparation des couleurs se produit effectivement lorsque la lumière blanche entre dans le verre d'une fenêtre avec une orientation autre que la perpendiculaire, mais la séparation angulaire ne se produit que sur une très courte distance (l'épaisseur de la vitre), et le décalage latéral est très faible lorsque les rayons divergents atteignent la seconde surface du verre. En ressortant du verre, les rayons de différentes longueurs d'onde retrouvent des orientations parallèles et le décalage latéral est encore trop faible pour être perçu (*voir l'image A sur la figure ci-contre*).

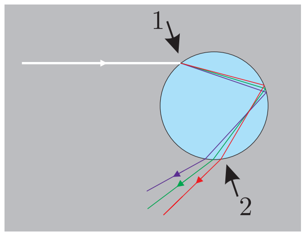


Qui plus est, on regarde généralement à travers une fenêtre selon une visée près de la perpendiculaire, orientation selon laquelle la séparation latérale des différentes longueurs d'onde est encore plus faible (*voir l'image B sur la figure ci-dessus*).

Si la vitre était plus épaisse (beaucoup plus que l'épaisseur régulière du verre d'une fenêtre), on pourrait atteindre une situation où la séparation des couleurs devient observable (*voir l'image C sur la figure ci-dessus*).

L'épaisseur trop faible rend le phénomène imperceptible. (réponse)

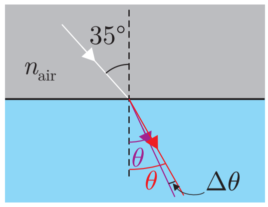
Q29 **Identifier la clé** La clé est le fait que trois interactions avec la surface de la goutte impliquent nécessairement deux réfractions et une réflexion totale interne.



Résoudre le problème Le rayon lumineux subit une première réfraction en entrant dans la goutte d'eau. La dispersion agit nécessairement à ce moment-là (*voir la figure 5.35 reproduite ci-contre*). La deuxième interaction ne peut être une réfraction puisque le rayon quitterait la goutte sans produire une troisième interaction. Il s'agit donc d'une réflexion totale interne, où la dispersion n'agit pas (l'angle de réflexion ne dépend pas de la longueur d'onde). La troisième interaction est une réfraction, alors que la lumière traverse à nouveau la surface de la goutte pour en sortir. La dispersion agit donc une deuxième fois à cette occasion.
Remarque : La réflexion inverse la position relative des couleurs dans le faisceau incident qui rencontre la deuxième surface, faisant en sorte que la dispersion se produisant lors de la deuxième réfraction est de nature à amplifier la divergence des couleurs plutôt qu'à l'annuler (comme le ferait une fenêtre plane), à la différence du parcours de la lumière à travers une fenêtre. De plus, la courbure de la surface amplifie elle aussi la divergence des couleurs qui ne se réfléchissent ou ne se réfractent pas sur des points de la surface de même orientation. Toutefois, ce phénomène est indépendant de la dispersion.

La dispersion agit deux fois, à l'entrée et à la sortie de la goutte d'eau. (réponse)

E30 **Illustrer la situation** La figure ci-contre montre le rayon de lumière blanche atteignant la surface. On aperçoit les rayons rouge et violet faisant partie de la lumière réfractée et ayant des orientations différentes.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\theta_{\text{blanc}} = 35{,}00°$	$\Delta\theta$
$n_{\text{rouge}} = 1{,}331$	
$n_{\text{bleu}} = 1{,}336$	

Identifier la clé La clé est la loi de la réfraction, appliquée à chacune à des deux couleurs.
Résoudre le problème On trouve l'angle de réfraction des deux rayons lumineux dans l'eau pour calculer la différence entre les deux. D'abord, pour le rouge, en considérant un indice de réfraction de l'air n_{air} identique pour les deux couleurs, on obtient

$$n_{\text{air}} \sin\theta_{\text{blanc}} = n_{\text{rouge}} \sin\theta_{\text{rouge}}$$

$$\begin{aligned}\theta_{\text{rouge}} &= \arcsin\left(\frac{n_{\text{air}}\sin\theta_{\text{blanc}}}{n_{\text{rouge}}}\right)\\ &= \arcsin\left(\frac{1{,}000\times\sin 35{,}0°}{1{,}331}\right) = 25{,}53°\ .\end{aligned}$$

On procède de la même façon pour le bleu :

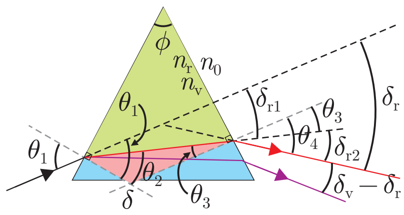
$$\theta_{\text{bleu}} = \arcsin\left(\frac{n_{\text{air}}\sin\theta_{\text{blanc}}}{n_{\text{bleu}}}\right) = \arcsin\left(\frac{1{,}000\times\sin 35{,}0°}{1{,}336}\right) = 25{,}42°\ .$$

La différence entre le rayon rouge et le rayon bleu est donc

$$\Delta\theta = \theta_{\text{rouge}} - \theta_{\text{bleu}} = 25{,}53° - 25{,}42° = 0{,}10°\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la différence d'angle est correct, la dispersion ne produisant qu'une faible divergence des couleurs.

E31 **Illustrer la situation** La figure ci-contre montre les rayons rouge et violet produits par la dispersion lorsque la lumière incidente frappe le prisme. Les angles utilisés dans la solution y sont illustrés.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\phi = 60{,}00°$	$\delta_v - \delta_r$
$n_v = 1{,}691$	
$n_r = 1{,}659$	
$\theta_1 = 55{,}20°$	

Identifier la clé La clé consiste à évaluer séparément les déviations totales des couleurs traitées.

Résoudre le problème Chacun des deux rayons subit deux déviations en raison des deux réfractions qui se produisent lors des changements de milieu. On établit une expression générale de la déviation totale d'un rayon à partir des angles nommés sur la figure pour le rayon rouge. La déviation totale pour le rayon rouge est nommée δ_r et est donnée par la somme des deux déviations :

$$\delta_r = \delta_{r1} + \delta_{r2} \ .$$

Il faut donc décortiquer chaque déviation. La première réfraction obéit à la loi de Snell-Descartes :

$$n_0 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \qquad \Rightarrow \qquad \theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_0 \sin\theta_1}{n_r}\right) \ .$$

La déviation produite par cette réfraction est la différence entre θ_1 et θ_2 :

$$\delta_{r1} = \theta_1 - \theta_2 = \theta_1 - \arcsin\left(\frac{n_0 \sin\theta_1}{n_r}\right) \ . \tag{i}$$

Le rayon traverse ensuite le prisme et atteint l'autre face avec un angle θ_3 que l'on doit déterminer par géométrie. Les angles θ_2 et θ_3 appartiennent à un triangle (le triangle rose sur la figure) dont le troisième angle est δ :

$$\theta_2 + \theta_3 + \delta = 180° \ .$$

Cet angle δ appartient également à un quadrilatère (rose et vert) dont les autres angles sont ϕ et deux angles droits. On peut donc connaître δ :

$$\delta = 360° - (2 \times 90° + \phi) = 180° - \phi \ .$$

θ_3 est donc égal à

$$\theta_3 = 180° - (\theta_2 + \delta) = 180° - (\theta_2 + (180° - \phi))$$
$$\theta_3 = \phi - \theta_2 = \phi - \arcsin\left(\frac{n_0 \sin\theta_1}{n_r}\right) \ . \tag{ii}$$

On peut alors traiter la seconde réfraction, selon laquelle

$$n_r \sin\theta_3 = n_0 \sin\theta_4 \qquad \Rightarrow \qquad \theta_4 = \arcsin\left(\frac{n_r \sin\theta_3}{n_0}\right) \ . \tag{iii}$$

La seconde déviation est

$$\delta_{r2} = \theta_4 - \theta_3 \tag{iv}$$

et la déviation totale,

$$\delta_{\mathrm{r}} = \delta_{\mathrm{r}1} + \delta_{\mathrm{r}2} \ . \tag{v}$$

On travaille en parallèle avec les calculs des angles de déviation totaux des deux longueurs d'onde. D'abord, selon l'équation (i), on a

$$\delta_{\mathrm{r}1} = 55{,}20° - \arcsin\left(\frac{1{,}000 \sin 55{,}20°}{1{,}659}\right) = 25{,}532°$$

$$\delta_{\mathrm{v}1} = 55{,}20° - \arcsin\left(\frac{1{,}000 \sin 55{,}20°}{1{,}691}\right) = 26{,}148° \ .$$

Les angles d'incidence θ_3 sont, selon l'équation (ii),

$$\theta_{3\mathrm{r}} = 60{,}00° - \arcsin\left(\frac{1{,}000 \sin 55{,}20°}{1{,}659}\right) = 30{,}332°$$

$$\theta_{3\mathrm{v}} = 60{,}00° - \arcsin\left(\frac{1{,}000 \sin 55{,}20°}{1{,}691}\right) = 30{,}948° \ .$$

La seconde réfraction entraîne des angles émergents donnés par l'équation (iii) :

$$\theta_{4\mathrm{r}} = \arcsin\left(\frac{1{,}659 \sin 30{,}332°}{1{,}000}\right) = 56{,}911°$$

$$\theta_{4\mathrm{v}} = \arcsin\left(\frac{1{,}691 \sin 30{,}948°}{1{,}000}\right) = 60{,}414° \ .$$

Les déviations produites par la seconde réfraction sont alors, selon l'équation (iv),

$$\delta_{\mathrm{r}2} = 56{,}911° - 30{,}332° = 26{,}578° \qquad \text{et} \qquad \delta_{\mathrm{v}2} = 60{,}414° - 30{,}948° = 29{,}466° \ .$$

Finalement, les déviations totales, pour les deux rayons, sont donnés par l'équation (v) :

$$\delta_{\mathrm{r}} = 25{,}532° + 26{,}578° = 52{,}111° \qquad \text{et} \qquad \delta_{\mathrm{v}} = 26{,}148° + 29{,}466° = 55{,}614° \ .$$

L'angle entre le rayon émergent violet et le rayon émergent rouge est donc

$$\delta_{\mathrm{v}} - \delta_{\mathrm{r}} = 55{,}61° - 52{,}11° = 3{,}50° \ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'angle trouvé est correct pour la dispersion produite par un prisme.

P32 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$n_1 = 1{,}532\,7$	A
$n_2 = 1{,}541\,4$	B
$\lambda_1 = 656{,}3\,\mathrm{nm}$	n_3
$\lambda_2 = 486{,}1\,\mathrm{nm}$	
$\lambda_3 = 589{,}3\,\mathrm{nm}$	

Identifier la clé La clé consiste à établir un système de deux équations et deux inconnues avec les données fournies pour les deux longueurs d'onde.

a. Résoudre le problème La loi de Cauchy réduite à ses deux premiers termes et appliquée aux deux longueurs d'onde est

$$n_1 = A + \frac{B}{\lambda_1^2} \qquad \text{et} \qquad n_2 = A + \frac{B}{\lambda_2^2} \ .$$

En comparant l'expression de A obtenue à partir de ces deux équations, on peut déterminer B d'abord :

$$n_1 - \frac{B}{\lambda_1^2} = A \qquad \text{et} \qquad A = n_2 - \frac{B}{\lambda_2^2}$$

$$\begin{aligned}
n_1 - \frac{B}{\lambda_1^2} &= n_2 - \frac{B}{\lambda_2^2} \\
n_1 - n_2 &= B\left(\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2}\right) \\
B = \frac{n_1 - n_2}{\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2}} &= \frac{1{,}532\,7 - 1{,}541\,4}{\frac{1}{(656{,}3\,\text{nm})^2} - \frac{1}{(486{,}1\,\text{nm})^2}} \\
&= 4{,}6 \times 10^3\,\text{nm}^2 \ .
\end{aligned}$$

On peut ensuite déterminer A avec l'une des deux équations de départ :

$$n_1 = A + \frac{B}{\lambda_1^2} \qquad \Rightarrow \qquad A = n_1 - \frac{B}{\lambda_1^2} = 1{,}532\,7 - \frac{4{,}6 \times 10^3\,\text{nm}^2}{(656{,}3\,\text{nm})^2} = 1{,}522 \ .$$

$$A = 1{,}522 \qquad \text{et} \qquad B = 4{,}6 \times 10^3\,\text{nm}^2 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

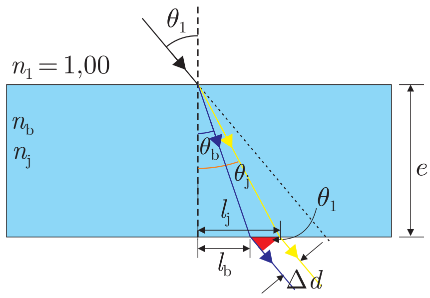
Valider la réponse On peut vérifier avec la deuxième équation que ces coefficients permettent de retrouver le deuxième indice de réfraction.

b. **Résoudre le problème** Il suffit d'utiliser l'équation de la loi de Cauchy avec la longueur d'onde donnée pour trouver l'indice de réfraction correspondant :

$$n_3 = A + \frac{B}{\lambda_3^2} = 1{,}522 + \frac{4{,}6 \times 10^3\,\text{nm}^2}{(589{,}3\,\text{nm})^2} = 1{,}535 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'indice de réfraction trouvé est correct, celui-ci étant compris entre les indices n_1 et n_2 utilisés en **a.**

P33 **Illustrer la situation** La figure ci-contre montre le bloc en verre de quartz ainsi qu'un rayon de lumière blanche séparé, entre autres, en un rayon jaune et un rayon bleu. Ceux-ci frappent la seconde surface du bloc en des points différents.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\theta_i = 45{,}0°$	n_b
$e = 5{,}25\,\text{cm}$	
$\Delta d = 0{,}15\,\text{mm}$	
$n_j = 1{,}468$	

Identifier la clé La clé est la loi de la réfraction appliquée à chaque face du bloc pour chacune des deux longueurs d'onde.

Résoudre le problème La loi de la réfraction permet de connaître l'angle de réfraction dans le milieu pour les deux longueurs d'onde traitées :

$$n_1 \sin\theta_1 = n_b \sin\theta_b \qquad \text{et} \qquad n_1 \sin\theta_1 = n_j \sin\theta_j$$

$$\theta_b = \arcsin\frac{n_1 \sin\theta_1}{n_b} \qquad \text{et} \qquad \theta_j = \arcsin\frac{n_1 \sin\theta_1}{n_j} \ . \qquad \text{(i)}$$

On peut se servir de ces angles de réfraction pour exprimer les distances horizontales parcourues par chaque rayon durant la traversée du bloc de verre. Le triangle rectangle formé par l'épaisseur e et l'angle du rayon réfracté admet, pour chaque couleur,

$$\tan\theta_\mathrm{b} = \frac{l_\mathrm{b}}{e} \qquad \text{et} \qquad \tan\theta_\mathrm{j} = \frac{l_\mathrm{j}}{e}$$

$$l_\mathrm{b} = e\tan\theta_\mathrm{b} \qquad \text{et} \qquad l_\mathrm{j} = e\tan\theta_\mathrm{j}\ . \tag{ii}$$

Pour chaque couleur, avec l'union des équations (i) et (ii), on a

$$l_\mathrm{b} = e\tan\left(\arcsin\frac{n_1\sin\theta_1}{n_\mathrm{b}}\right) \qquad \text{et} \qquad l_\mathrm{j} = e\tan\left(\arcsin\frac{n_1\sin\theta_1}{n_\mathrm{j}}\right)\ . \tag{iii}$$

Puisqu'on connaît l'indice de réfraction pour la couleur jaune, on peut calculer directement l_j :

$$l_\mathrm{j} = 5{,}25\,\mathrm{cm}\times\tan\left(\arcsin\frac{1{,}00\times\sin(45{,}0^\circ)}{1{,}468}\right) = 2{,}885\,6\,\mathrm{cm}\ .$$

On sait que le rayon bleu a parcouru une moins grande distance horizontale (*voir la figure précédente*), car les longueurs d'onde plus faibles subissent une plus forte déviation. On peut alors connaître la distance l_b à partir du déplacement latéral des deux couleurs (*Δd sur la figure précédente*). Le triangle illustré en rouge met en relation Δd et $(l_\mathrm{j} - l_\mathrm{b})$, et l'un de ses angles est le même que θ_1, car les rayons ont retrouvé leur orientation initiale en sortant du verre (les faces du bloc de verre étant parallèles). Selon ce triangle, on a

$$\cos\theta_1 = \frac{\Delta d}{l_\mathrm{j} - l_\mathrm{b}}$$

$$l_\mathrm{b} = l_\mathrm{j} - \frac{\Delta d}{\cos\theta_1} = 2{,}885\,6\,\mathrm{cm} - \frac{0{,}015\,\mathrm{cm}}{\cos(45^\circ)} = 2{,}864\,4\,\mathrm{cm}\ .$$

L'expression de l_b donnée à la ligne (iii) permet alors d'isoler n_b :

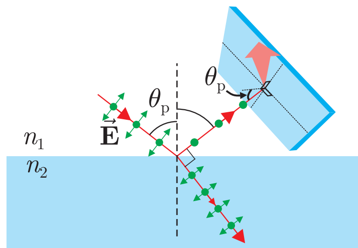
$$n_\mathrm{b} = \frac{n_1\sin\theta_1}{\sin\left(\arctan\left(\frac{l_\mathrm{b}}{e}\right)\right)} = \frac{1{,}00\times\sin(45{,}0^\circ)}{\sin\left(\arctan\left(\frac{2{,}864\,4\,\mathrm{cm}}{5{,}25\,\mathrm{cm}}\right)\right)} = 1{,}476$$

$$n_\mathrm{b} = 1{,}48\ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'indice de réfraction est correct, celui-ci étant légèrement plus élevé que pour le jaune.

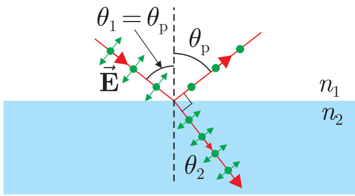
Q34 **Illustrer la situation** La figure ci-contre montre un rayon lumineux frappant d'abord une surface en verre horizontale et ensuite une surface en verre inclinée. L'orientation du second rayon réfléchi sort du plan de la feuille.

Identifier la clé La clé est la loi de Brewster.



Résoudre le problème La loi de Brewster stipule qu'il existe un angle de réflexion pour un rayon lumineux tel que l'irradiance sera entièrement atténuée selon l'un des plans de polarisation de la lumière. On peut donc faire en sorte qu'après une première réflexion la lumière soit polarisée linéairement (la première réflexion sur la figure, sur la surface horizontale), puis atténuer entièrement l'irradiance restante avec une seconde réflexion, dans un plan perpendiculaire à la première, à l'angle de Brewster θ_p.

Pour la première réflexion, si l'angle d'incidence est égal à l'angle de polarisation θ_p, le rayon réfléchi est polarisé parallèlement à la première surface. Si on place la deuxième surface pour que son plan d'incidence soit perpendiculaire à la première, de telle sorte que l'angle d'incidence soit de nouveau égal à l'angle de polarisation, il n'y a pas de lumière réfléchie (la flèche rose sur la figure ci-dessus est en fait un rayon émergent dont l'amplitude du champ électrique est réduite à zéro selon les deux axes perpendiculaires à la direction de propagation).



E35 **Illustrer la situation** La figure ci-contre montre le rayon incident sur une surface d'eau produisant un rayon réfléchi et un rayon réfracté perpendiculaires.

Décortiquer le problème

Connue	Inconnues
$n_2 = 1{,}333$	θ_p
	$\theta_{réf}$

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation de la loi de Brewster.

Résoudre le problème L'équation de la loi de Brewster est

$$\tan\theta_p = \frac{n_2}{n_1} .$$

Le rayon incident dans l'air (n_1) sur la surface de l'eau (n_2) doit coïncider avec l'angle de polarisation θ_p pour que le rayon réfléchi soit parfaitement polarisé. On cherche donc θ_p :

$$\theta_p = \arctan\frac{n_2}{n_1} = \arctan\frac{1{,}333}{1{,}000} = 53{,}12° . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'angle d'incidence est correct.

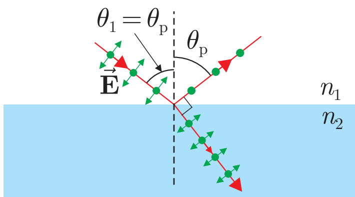
b. **Identifier la clé** La clé est l'équation de la loi de la réfraction.

Résoudre le problème L'angle d'incidence trouvé en **a.** donne lieu à une réfraction pour une partie de l'énergie lumineuse incidente. La loi de la réfraction permet de connaître l'angle de réfraction θ_2 :

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2, \qquad \text{avec} \qquad \theta_1 = \theta_p$$

$$\theta_2 = \arcsin\frac{n_1 \sin\theta_1}{n_2} = \arcsin\frac{1{,}000 \times \sin 53{,}12°}{1{,}333} = 36{,}88° . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'angle de réfraction est correct, celui-ci étant inférieur à l'angle d'incidence.



E36 **Illustrer la situation** La figure ci-contre montre les rayons incidents réfléchis et réfractés sur une surface réfléchissante de telle sorte que le rayon réfléchi fait un angle de 56,5° avec la normale à la surface.

Décortiquer le problème

Connue	Inconnue
$\theta_p = 56{,}5°$	n_2

Identifier la clé La clé est l'équation de la loi de Brewster.

Résoudre le problème La loi de Brewster stipule que

$$\tan\theta_p = \frac{n_2}{n_1} .$$

Dans le cas présent, l'angle d'incidence correspond à l'angle de polarisation, et on suppose que le rayon se déplace dans l'air avant de frapper un milieu d'indice inconnu n_2. On peut donc déterminer n_2 à partir de l'équation de Brewster :

$$n_2 = n_1 \tan\theta_p = 1{,}00 \times \tan 56{,}5° = 1{,}51 . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'indice de réfraction est correct pour un matériau réfléchissant.

Physique 3 Ondes et physique moderne - 1re édition

Chapitre 06 La formation des images

E1 **Décortiquer le problème**

Connue	Inconnue
$p = 1{,}60\,\mathrm{m}$	$d_{\text{objet-image}}$

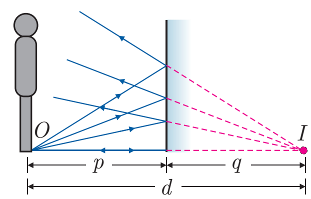
Identifier la clé La clé est l'équation 6.1 selon laquelle $q = -p$.

Résoudre le problème La distance donnée de 1,60 m est la distance objet p. La distance qui semble séparer une personne de son image dans un miroir plan est la distance totale entre la position objet et la position image : $d = |p| + |q|$. La distance image, pour un miroir plan, est

$$q = -p \ .$$

Donc,

$$d = |q| + |p| = |-p| + |p| = 2|p| = 2 \times (1{,}60\,\mathrm{m}) = 3{,}20\,\mathrm{m} \ .$$

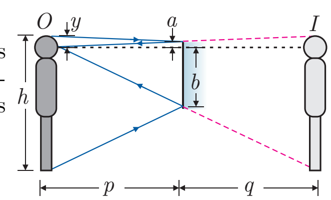


La figure ci-contre illustre le tracé de quelques rayons dont les rayons réfléchis ont un prolongement qui converge en un point, la position de l'image. On y voit la distance d qui équivaut à $|q|+|p|$:

$$d = 3{,}20\,\mathrm{m} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance est correct, celle-ci étant égale au double de la distance entre la personne et le miroir. Sur la figure ci-dessus, si la personne regarde ses pieds, elle en voit l'image I qui semble être derrière le miroir.

E2 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la réflexion des rayons atteignant les deux extrémités verticales du miroir, permettant à la personne d'apercevoir le sommet de sa tête et ses pieds.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$p = 3{,}50\,\mathrm{m}$	d
$h = 1{,}74\,\mathrm{m}$	

Identifier la clé La clé est le fait que l'angle de réflexion dans un miroir plan est le même que l'angle incident.

Résoudre le problème Dans le processus détaillé de la détermination de la dimension verticale du miroir, on doit manipuler la valeur de la position des yeux de l'observateur, quelque part entre ses pieds et le sommet de sa tête. Cette valeur étant inconnue, on pose une variable y, soit la distance entre les yeux et le sommet de la tête. On pourra alors calculer la longueur de miroir requise au-dessus et en dessous des yeux, soit là où la personne voit ses propres yeux. On appelle ces distances les longueurs a et b.

Pour voir le sommet de sa tête, la personne devant le miroir doit regarder dans le miroir au-dessus de ses yeux à une hauteur égale à la moitié de la distance entre ses yeux et le sommet de sa tête. Cette longueur a est

$$a = \frac{y}{2} \ .$$

De la même manière, pour voir ses pieds, la personne doit regarder dans le miroir en dessous de ses yeux à une distance égale à la moitié de la distance entre ses yeux et ses pieds. Cette longueur b est

$$b = \frac{h-y}{2} \ .$$

La distance totale dans le miroir comprise entre les deux points considérés, sans égard à la position des yeux, est

$$d = a + b = \frac{y}{2} + \frac{h-y}{2} = \frac{y}{2} + \frac{h}{2} - \frac{y}{2} = \frac{h}{2}$$
$$d = \frac{1{,}74\,\text{m}}{2} = 0{,}870\,\text{m} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance trouvée est correct. Par ailleurs, la distance entre la personne et le miroir n'est pas une variable du problème.

E3 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$AB = 4{,}00\,\text{m}$	d_1
$OA = 1{,}50\,\text{m}$	d_2
	d_3

Identifier les clés Les clés sont l'équation 6.1 et le fait que l'image produite par l'un des miroirs devient un objet pour le second miroir.

Résoudre le problème Pour déterminer la position des trois images les plus rapprochées dans le miroir à 1,50 m, on définit les quelques premières images produites par chacun des miroirs et on reporte les images trouvées sur un axe dont l'origine est vis-à-vis de l'observateur.

Si l'observateur se trouve à 1,50 m d'un miroir (miroir A), il est donc à 2,50 m du second miroir (miroir B). Ces deux distances sont les positions objet pour les deux miroirs :

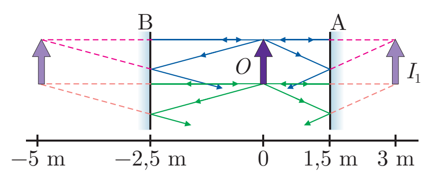
$$p_{\text{A}} = 1{,}50\,\text{m} \qquad \text{et} \qquad p_{\text{B}} = 2{,}50\,\text{m} \ .$$

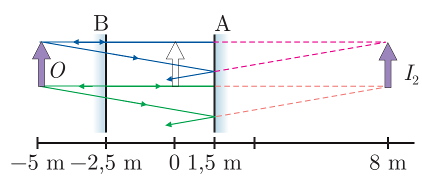
Chacun des miroirs produit une image telle que $q = -p$, et la distance entre l'observateur et les deux images de premier ordre est

$$d_{\text{A1}} = |p| + |q| = 2 \times 1{,}50\,\text{m} = 3{,}00\,\text{m} \qquad \text{et} \qquad d_{\text{B1}} = |p| + |q| = 2 \times 2{,}50\,\text{m} = 5{,}00\,\text{m} \ .$$

Dans le miroir que l'observateur regarde, la distance de 3,00 m correspond à la première image la plus rapprochée de l'observateur (*voir I_1 sur la figure du haut ci-contre*).

L'image dans le miroir B, située à 5,00 m de l'observateur (donc à 6,50 m du miroir A) devient un objet pour le miroir A, pour lequel la distance objet est $p = 6{,}50\,\text{m}$. Puisque $q = -p$, le miroir en fait une image située à 6,50 m derrière lui, donc à 8,00 m de l'observateur. La distance de 8,00 m correspond à la deuxième image la plus rapprochée (*voir I_2 sur la figure du bas ci-contre*).





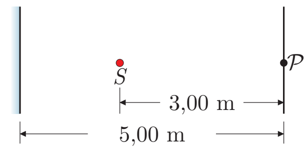
Selon la même démarche, la première image trouvée, à 3,00 m de l'observateur derrière le miroir A, est aussi un objet pour le miroir B. La distance p de cet objet est $p = 3{,}00\,\text{m} + 2{,}50\,\text{m} = 5{,}50\,\text{m}$. Le miroir B en fera une image située à $q = -p$, soit 5,50 m derrière lui. Cette nouvelle image sert à son tour d'objet pour le miroir A. La distance objet est alors $p = 5{,}50\,\text{m} + 4{,}00\,\text{m} = 9{,}50\,\text{m}$. Le miroir A fait ensuite une nouvelle image de cet objet, visible par l'observateur. Cette image se trouve à la même distance derrière le miroir A, soit 9,50 m. Elle est donc à une distance de

9,50 m + 1,50 m = 11,00 m de l'observateur. C'est la troisième image la plus rapprochée que peut voir l'observateur :

$$d_1 = 3{,}00\,\text{m}, \qquad d_2 = 8{,}00\,\text{m}, \qquad d_3 = 11{,}0\,\text{m} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur des distances trouvées est correct.

P4 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la source S, le miroir et le point P, ainsi que les distances impliquées.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$d_{SP} = 3{,}00\,\text{m}$	I_P
$d_{MP} = 5{,}00\,\text{m}$	
$P_S = 1{,}20\,\text{W}$	

Identifier la clé La clé est le fait que l'irradiance au point P est la somme de l'irradiance directe de la source (I_S) et l'irradiance de l'image (I_I) produite par le miroir.

Résoudre le problème D'abord, le calcul de l'irradiance directe de la source au point P donne

$$I_S = \frac{P}{4\pi d_{SP}^2} .$$

Ensuite, la lumière émise par la source vers le miroir se réfléchit pour éclairer davantage le point P. Le point P est donc éclairé par l'image de la source dans le miroir et reçoit l'irradiance d'une source supplémentaire qui serait située à la position image de la source dans ce miroir. Puisque pour un miroir plan on a $q = -p$, l'image de la source faite par le miroir se trouve à 2,00 m derrière lui (car $p = d_{MP} - d_{SP} = 5{,}00\,\text{m} - 3{,}00\,\text{m}$). La distance totale entre l'écran et l'image de la source dans le miroir (d_{IP}) est donc

$$d_{IP} = 2{,}00\,\text{m} + 5{,}00\,\text{m} = 7{,}00\,\text{m} ,$$

et l'irradiance de cette image sur le point P est alors

$$I_I = \frac{P}{4\pi d_{IP}^2} .$$

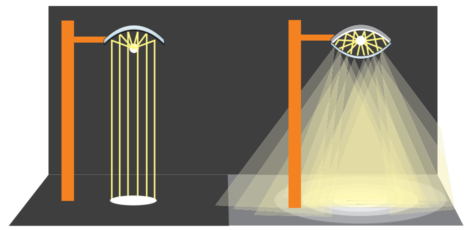
L'irradiance totale au point P est donc

$$I = I_S + I_I = \frac{P}{4\pi d_{SP}^2} + \frac{P}{4\pi d_{IP}^2} = \frac{P}{4\pi}\left(\frac{1}{d_{SP}^2} + \frac{1}{d_{IP}^2}\right)$$
$$I = \frac{1{,}20\,\text{W}}{4\pi}\left(\frac{1}{(3{,}00\,\text{m})^2} + \frac{1}{(7{,}00\,\text{m})^2}\right) = 12{,}6\,\text{mW/m}^2 . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'irradiance trouvée est correct, la puissance trouvée par mètre carré étant passablement inférieure à la puissance produite par la source.

Q5 **Identifier la clé** La clé est le fait qu'une source située au foyer d'un miroir sphérique produit un faisceau de lumière parallèle.

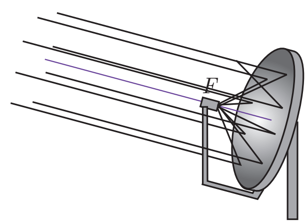
Résoudre le problème D'après la clé, la configuration suggérée par Jérémie produirait un faisceau étroit et n'éclairerait donc qu'une petite surface sous le lampadaire, ce qui n'est pas l'objectif de l'éclairage de rue (*voir le lampadaire de gauche sur la figure ci-contre*). Le verre devant la source est plutôt un diffuseur, un verre constitué de multiples facettes non parallèles destinées à faire dévier également la lumière dans toutes les directions, alors qu'à l'arrière de la source se trouve un miroir dont le foyer ne coïncide pas avec la source, ayant pour rôle lui aussi de rediriger la lumière dans toutes les directions sous le lampadaire. Cela évite de perdre de l'énergie lumineuse ailleurs qu'au sol (*voir le lampadaire de droite sur la figure ci-dessus*).



Jérémie n'a pas raison. (réponse)

Q6 **Identifier la clé** La clé est le fait que des rayons parallèles à l'axe optique d'un miroir sphérique sont déviés vers le foyer.

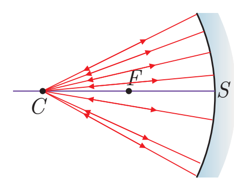
Résoudre le problème Les satellites étant hauts dans le ciel, la distance entre l'antenne et le satellite visé est nécessairement très grande. Les ondes provenant du satellite forment donc des rayons parallèles à l'axe si l'antenne est bien dirigée, et les rayons frappant l'antenne sont alors tous réfléchis vers le foyer de la coupole. C'est là que le capteur recevra le plus d'intensité radiative (intensité lumineuse, en parlant de longueurs d'onde non visibles). Le capteur doit donc être situé au foyer (*voir la configuration de l'antenne sur la figure ci-contre*).



À une distance égale au foyer. (réponse)

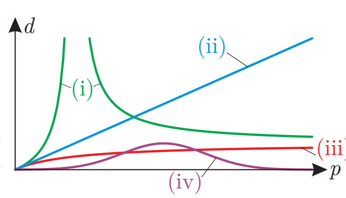
Q7 **Identifier la clé** La clé est le fait que les rayons passant par le centre de courbure d'un miroir sont réfléchis sur eux-mêmes.

Résoudre le problème Les rayons incidents émanant du centre de courbure du miroir ou passant par ce point sont réfléchis sur eux-mêmes parce qu'ils frappent en tout point le miroir de façon perpendiculaire (de façon radiale, donc perpendiculaire à la surface sphérique). Si l'objet observé par Caroline est sa propre pupille, c'est son œil qui doit se trouver au centre de courbure du miroir. La lumière émise dans toutes les directions vers le miroir reviendra alors à la position de son œil. Ainsi, la distance où Caroline doit placer son œil est le rayon de courbure R du miroir. La figure ci-dessus illustre un tel miroir sphérique où les rayons émanant du centre rencontrent la surface du miroir de façon perpendiculaire. Ainsi,



$$d = R \ . \quad \text{(réponse)}$$

Q8 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre les quatre courbes parmi lesquelles on doit reconnaître celles qui représentent la relation entre p et d pour un miroir concave et pour un miroir convexe.



Décortiquer le problème On doit déterminer la courbe de la valeur absolue de la position image d'un miroir en fonction de la distance objet.

Identifier la clé La clé est l'équation 6.5 dans laquelle relie les positions objet et image à la distance focale d'un miroir.

Résoudre le problème L'équation 6.5, dans laquelle on peut isoler la distance image q, est

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$
$$d = |q| = \left|\frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p}}\right| . \qquad \text{(i)}$$

Pour reconnaître la courbe qui décrit la distance d en fonction de p (pour le domaine positif de p), on peut déterminer quelques points particuliers.

a. **Résoudre le problème** La distance focale d'un miroir convexe est positive. On peut donc vérifier rapidement s'il est possible que la courbe recherchée tende vers l'infini, comme la courbe (i), pour une certaine valeur de p. Cela se produit effectivement lorsque $p = |f| = f$. La courbe (i) étant la seule qui tende vers l'infini pour une valeur finie de p, elle est la solution.

La courbe (i) (réponse)

Valider la réponse La courbe (i) qui tend vers une valeur constante lorsque $p \to \infty$ est cohérente avec la forme de l'équation où $d \to f$ lorsque $p \to \infty$.

b. **Résoudre le problème** La distance focale d'un miroir convexe est négative. Il n'existe donc aucune valeur de p (positive) faisant en sorte que le dénominateur de l'équation tend vers zéro ($d \to \infty$). On doit donc écarter la courbe (i).

On peut alors choisir parmi les trois autres courbes en observant ce qui arrive lorsque p tend vers l'infini. Est-ce que d tend vers l'infini (courbe (ii)), vers une valeur constante (courbe (iii)) ou vers zéro (courbe (iv)) ?

$$d = |q| = \left|\frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{\infty}}\right| = \left|\frac{1}{\frac{1}{f} - 0}\right| = |f|$$

La valeur absolue de la focale est une valeur finie, positive et non nulle, ce qui correspond à la courbe (iii).

La courbe (iii) (réponse)

Valider la réponse La valeur de la focale étant positive, la soustraction du terme $1/p$ dans le dénominateur est cohérente avec la courbe (iii), où d augmente jusqu'à une valeur constante.

E9 **Décortiquer le problème** Le miroir décrit étant concave, sa distance focale est positive.

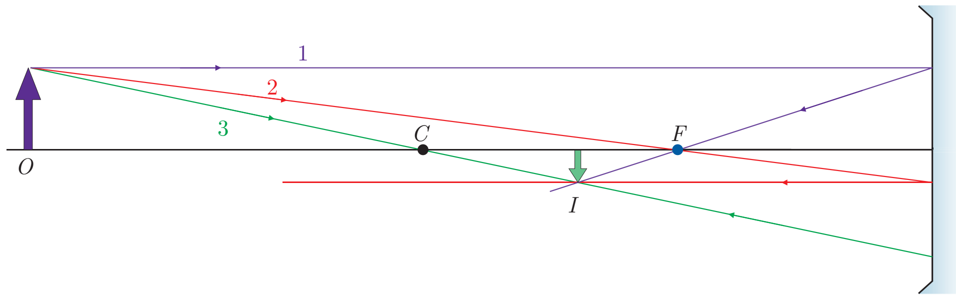
Connues	Inconnues
$f = 25{,}0\,\text{cm}$	q
$y = 35\,\text{mm}$	m
$p = 88{,}0\,\text{cm}$	y'

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 6.5 qui relie les positions objet et image à la distance focale d'un miroir.

Résoudre le problème L'équation 6.5, dans laquelle on peut isoler la distance image q, est

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$
$$q = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{1}{25{,}0\,\text{cm}} - \frac{1}{88{,}0\,\text{cm}}} = 34{,}9\,\text{cm} . \qquad \text{(réponse)}$$

La figure suivante illustre le tracé des rayons principaux dans cette situation.



Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance image est correct.

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 6.6 qui relie le grandissement aux distances de l'objet et de l'image ainsi qu'à leurs dimensions.

Résoudre le problème Selon l'équation 6.6, le grandissement est donné entre autres par

$$m = \frac{-q}{p} = \frac{-(34{,}9\,\text{cm})}{88{,}0\,\text{cm}} = -0{,}397\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du grandissement est correct, l'image étant réduite à 39,7 % de sa taille initiale.

c. **Identifier la clé** La clé est l'équation 6.6 qui relie le grandissement aux distances de l'objet et de l'image ainsi qu'à leurs dimensions.

Résoudre le problème Selon l'équation 6.6,

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{-q}{p}\ .$$

On peut donc affirmer que

$$y' = \frac{-qy}{p} = \frac{-(34{,}9\,\text{cm}) \times (35\,\text{mm})}{88{,}0\,\text{cm}} = -13{,}9\,\text{mm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

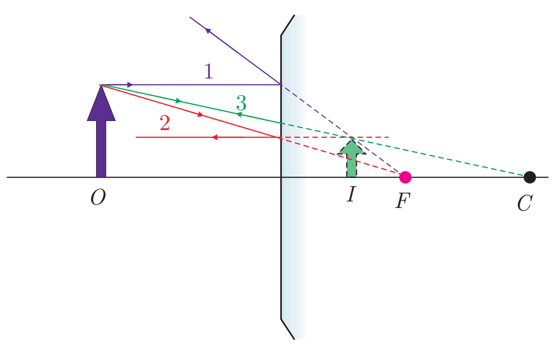
Valider la réponse L'ordre de grandeur de la hauteur de l'image est correct.

d. **Identifier la clé** La clé est le fait que le signe du grandissement est relié à l'inversion de l'image.

Résoudre le problème Le grandissement trouvé en **b.** étant négatif, on sait que l'image est inversée.

L'image est inversée. (réponse)

E10 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre le tracé des rayons principaux dans cette situation.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\lvert q\rvert = 15{,}2\,\text{cm}$	p
$\lvert m\rvert = 1/2{,}45$	f

a. Identifier la clé La clé est l'équation 6.6 qui relie le grandissement aux distances de l'objet et de l'image ainsi qu'à leurs dimensions.

Résoudre le problème Selon l'équation 6.6, le grandissement est donné entre autres par

$$m = \frac{-q}{p} \,. \qquad \text{(i)}$$

Puisque l'image obtenue est droite, on sait que le grandissement est positif (m > 0). Par ailleurs, puisqu'il s'agit d'un miroir convexe, on sait que l'image d'un objet réel est nécessairement virtuelle (q < 0). On peut donc écrire

$$q = -15{,}2\,\text{cm} \qquad \text{et} \qquad m = +\frac{1}{2{,}45} \,.$$

Ainsi, l'équation (i) admet

$$p = \frac{-q}{m} = \frac{-(-15{,}2\,\text{cm})}{+\frac{1}{2{,}45}} = 37{,}2\,\text{cm} \,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance objet est correct, et cette distance est positive, en accord avec un objet réel.

b. Identifier la clé La clé est l'équation 6.5 qui relie les positions objet et image à la distance focale d'un miroir.

Résoudre le problème En isolant la distance focale dans l'équation 6.5, on trouve

$$f = \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} = \frac{1}{\frac{1}{37{,}2\,\text{cm}} + \frac{1}{-15{,}2\,\text{cm}}} = -25{,}7\,\text{cm} \,. \qquad \text{(réponse)}$$

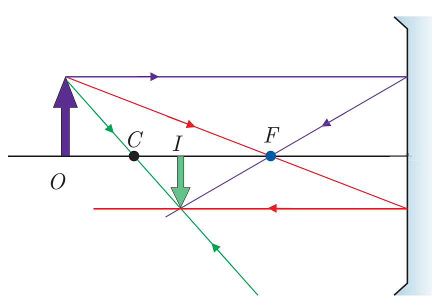
Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance focale est correct, et celle-ci est négative, en accord avec un miroir convexe.

E11 Décortiquer le problème

Connue	Inconnues
$d = 2{,}5\lvert f\rvert$	$q_{f>0}$
	$q_{f<0}$

Identifier la clé La clé est la technique 6.1, qui décrit le parcours des trois rayons principaux d'un miroir.

a. Résoudre le problème La figure suivante illustre le tracé des rayons principaux dans le cas d'un miroir concave.



(réponse)

Le rayon se déplaçant parallèlement à l'axe optique (rayon violet) est réfléchi vers le foyer F du miroir.

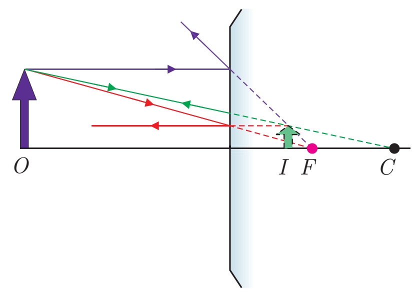
Le rayon passant par le foyer F du miroir (rayon rouge) est réfléchi parallèlement à l'axe optique.
Le rayon passant par le centre de courbure C du miroir (rayon vert) est réfléchi sur lui-même.
Les trois rayons réfléchis se rencontrent en un point, qui définit la position de l'extrémité de l'image.

Valider la réponse On aurait pu procéder par calculs pour déterminer l'emplacement de l'image. Dans le cas d'un miroir concave, on a $f > 0$, donc un objet réel sera à la position $p = 2{,}5f$. Selon l'équation 6.5,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$
$$q = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{2{,}5f}} = \frac{f}{\frac{1}{1} - \frac{1}{2{,}5}} = \frac{5}{3}f = 1{,}7f\ .$$

1,7 f est cohérent avec l'image I illustrée sur la figure à la page précédente.

b. **Résoudre le problème** La figure suivante illustre le tracé des rayons principaux dans le cas d'un miroir convexe.



(réponse)

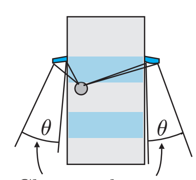
Le rayon se déplaçant parallèlement à l'axe optique (rayon violet) est réfléchi de telle sorte que son prolongement passe par le foyer F du miroir
Le rayon dont le prolongement passe par le foyer F du miroir (rayon rouge) est réfléchi parallèlement à l'axe optique.
Le rayon dont le prolongement passe par le centre de courbure C du miroir (rayon vert) est réfléchi sur lui-même.
Les prolongements des trois rayons réfléchis se rencontrent en un point, qui définit la position de l'extrémité de l'image.

Valider la réponse On aurait pu procéder par calculs pour déterminer l'emplacement de l'image. Dans le cas d'un miroir convexe, on a $f < 0$, donc un objet réel sera à la position $p = -2{,}5f$. Selon l'équation 6.5,

$$q = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{-2{,}5f}} = \frac{f}{\frac{1}{1} - \frac{1}{-2{,}5}} = \frac{5}{7}f = 0{,}71f\ .$$

0,71 f est cohérent avec l'image I illustrée sur la figure précédente.

E12 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre une vue de haut d'une voiture, avec les rétroviseurs donnant au conducteur un champ de vision d'un angle θ de chaque côté, vers l'arrière.



Décortiquer le problème Un miroir concave possède une distance focale négative.

Connues	Inconnue
$R = -1{,}800\,\mathrm{m}$	q
$p = 5{,}50\,\mathrm{m}$	

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 6.5 qui relie les positions objet et image à la distance focale d'un miroir.

Résoudre le problème L'équation 6.5, dans laquelle on peut isoler la distance image q, est

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \qquad \text{où} \qquad f = \frac{R}{2}$$

$$q = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{2}{R} - \frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{2}{-1{,}800\,\text{m}} - \frac{1}{5{,}50\,\text{m}}} = -0{,}773\,\text{m}\ .$$

L'image semble être située à 77,3 cm derrière le miroir.

Donc,

$$d = 0{,}773\,\text{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Puisque q est négatif, l'image est virtuelle, comme c'est toujours le cas pour un miroir convexe devant un objet réel.

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que le grandissement produit par un miroir convexe est toujours inférieur à 1 pour un objet réel.

Résoudre le problème Si on a l'impression qu'une automobile est plus éloignée lorsqu'on la regarde dans un rétroviseur, c'est en raison de la taille de son image, qui est nécessairement réduite (grandissement inférieur à 1). La distance image, plus faible que la distance réelle de l'objet, demande à l'œil de s'ajuster pour une distance inférieure comparativement à une vue directe de l'objet. Mais à quelques mètres de distance, on ne perçoit plus la différence d'accommodation de l'œil. En revanche, la connaissance des dimensions réelles d'une automobile donne l'illusion qu'une automobile plus petite est plus éloignée. L'image étant plus petite que l'objet, la vision est déjouée.

L'utilité des miroirs convexes est d'offrir un champ angulaire de vision plus grand que si le miroir était plan, pour compenser le fait que l'automobiliste est plus éloigné du miroir de droite que de celui de gauche. Cependant, cela se fait au détriment de l'équivalence dans la taille des images.

E13 **Décortiquer le problème** Le miroir décrit étant convexe, son rayon de courbure R est négatif.

Connues	Inconnues
$R = -35{,}0\,\text{cm}$	$d_{\text{image-caisse}}$
$p = 6{,}40\,\text{m}$	m
$d_{\text{caisse}} = 13{,}5\,\text{m}$	

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 6.5 qui relie les positions objet et image à la distance focale d'un miroir.

Résoudre le problème L'équation 6.5, dans laquelle on peut isoler la distance image q, est

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \qquad \text{où} \qquad f = \frac{R}{2}$$

$$q = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{2}{R} - \frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{2}{-0{,}35\,\text{m}} - \frac{1}{6{,}40\,\text{m}}} = -0{,}170\,\text{m}\ .$$

L'image que voit le caissier se trouve donc à 0,170 m derrière le miroir. Si on ajoute cette distance aux 13,5 m qu'il y a entre le miroir et la caisse, la distance recherchée est donc

$$d_{\text{image-caisse}} = |q| + d_{\text{caisse}} = 0{,}170\,\text{m} + 13{,}5\,\text{m} = 13{,}7\,\text{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance trouvée est correct, du même ordre que la distance d_{caisse}.

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 6.6 qui relie le grandissement aux distances de l'objet et de l'image.

Résoudre le problème Selon l'équation 6.6, le grandissement est donné entre autres par

$$m = \frac{-q}{p} \ .$$

Le grandissement est donc

$$m = \frac{-(-0{,}170\,\text{m})}{6{,}40\,\text{m}} = 0{,}026\,6 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Le grandissement est très inférieur à 1, ce qui suggère ici une image dont les dimensions atteignent 2,66 % des dimensions de l'objet. C'est une image très petite, mais l'avantage du miroir est en réalité le champ de vision angulaire qui s'étend à presque toute la surface de plancher, même lorsqu'on est loin du miroir.

P14 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$\lvert p\rvert = 75{,}0\,\text{cm}$	$f_{q<0}$
$\lvert m\rvert = 1{,}26$	$f_{q>0}$

Identifier les clés Les clés sont les équations 6.5 et 6.6 concernant les distances focale, objet et image, ainsi que le grandissement.

a. **Résoudre le problème** En **a.** on mentionne que l'image est virtuelle, ce qui signifie que $q < 0$. Si on place un objet devant un miroir, il s'agit donc d'un objet réel pour lequel $p > 0$. L'équation du grandissement permet alors de déterminer la valeur de q, en considérant que m doit être positif pour s'accorder avec $p > 0$ et $q < 0$:

$$m = \frac{-q}{p}$$
$$q = -mp = -1{,}26 \times 75{,}0\,\text{cm} = -94{,}5\,\text{cm} \ .$$

On peut maintenant déterminer la distance focale à partir de l'équation 6.5 :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$
$$f = \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} = \frac{1}{\frac{1}{75{,}0\,\text{cm}} + \frac{1}{-94{,}5\,\text{cm}}} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance focale trouvée est correct. Aussi, le signe positif de la distance focale confirme qu'il s'agit d'un miroir concave, car seul un miroir concave peut produire une image agrandie d'un objet réel.

b. **Résoudre le problème** Une image réelle entraîne que $q > 0$. Le grandissement doit alors être négatif :

$$m = \frac{-q}{p} \qquad \Rightarrow \qquad q = -mp = -(-1,26) \times 75{,}0\,\text{cm} = 94{,}5\,\text{cm} \ .$$

On obtient la distance focale ainsi :

$$f = \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} = \frac{1}{\frac{1}{75{,}0\,\text{cm}} + \frac{1}{94{,}5\,\text{cm}}} = 41{,}8\,\text{cm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance focale trouvée est correct.

P15 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$q = 15{,}0\,\text{m} + p$	R
$p = f + 5{,}0\,\text{mm}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 6.5 qui relie les positions objet et image à la distance focale d'un miroir.

Résoudre le problème L'équation 6.5, dans laquelle on peut isoler la distance focale f, est

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \qquad \text{où} \qquad f = \frac{R}{2} \ .$$

On indique que l'ampoule se trouve à 5,0 mm *devant* le foyer, donc du même côté que l'image, d'où

$$p = f + 5{,}0\,\text{mm} = \frac{R}{2} + 5{,}0\,\text{mm} \ .$$

Puisque l'image (l'endroit où le miroir focalise la lumière) se trouve à 15,0 m devant l'ampoule (qui est à 5,0 mm devant le foyer), la distance image depuis le miroir est

$$q = f + 5{,}0\,\text{mm} + 15{,}0\,\text{m} = \frac{R}{2} + 5{,}0\,\text{mm} + 15{,}0\,\text{m} \ .$$

En insérant ces expressions de p et de q dans l'équation principale, on trouve

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{\frac{R}{2} + 5{,}0\,\text{mm}} + \frac{1}{\frac{R}{2} + 5{,}0\,\text{mm} + 15{,}0\,\text{m}} \ .$$

On simplifie cette équation en isolant R en quelques étapes et on obtient

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{R}{2} + 0{,}005\,0\,\text{m}\right)\left(\frac{R}{2} + 15{,}005\,0\,\text{m}\right) &= R\left(\frac{R}{2} + 0{,}005\,0\,\text{m}\right) + R\left(\frac{R}{2} + 15{,}005\,0\,\text{m}\right) \\ \frac{R^2}{2} + (15{,}01\,\text{m}) \times R + 0{,}150\,05\,\text{m}^2 &= R^2 + (15{,}01\,\text{m}) \times R \\ R &= \sqrt{0{,}300\,1\,\text{m}^2} = 0{,}548\,\text{m} \ . \qquad \text{(réponse)} \end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du rayon de courbure est correct si on pense aux dimensions et à la courbure de ces miroirs qu'on peut observer sur la plupart des automobiles.

P16 **Décortiquer le problème** Le miroir M_1 est convexe et possède donc une distance focale négative, alors que le miroir concave M_2 possède une distance focale positive.

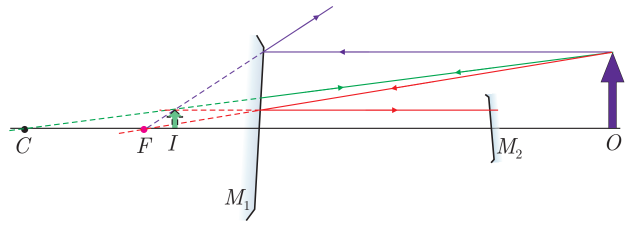
Connues	Inconnues
$f_1 = -30{,}0\,\text{cm}$	q_1
$p = 1{,}00\,\text{m}$	p_2
$f_2 = 20{,}0\,\text{cm}$	$x_{\text{image-2}}$

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 6.5 qui relie les positions objet et image à la distance focale d'un miroir.

Résoudre le problème L'équation 6.5, dans laquelle on peut isoler la distance image pour le premier miroir q_1, est

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ q_1 &= \frac{1}{\frac{1}{f_1} - \frac{1}{p_1}} = \frac{1}{\frac{1}{-30{,}0\,\text{cm}} - \frac{1}{100{,}0\,\text{cm}}} = -23{,}1\,\text{cm} \ . \qquad \text{(réponse)} \end{aligned}$$

La figure suivante illustre le tracé des rayons principaux lors de la formation de la première image.



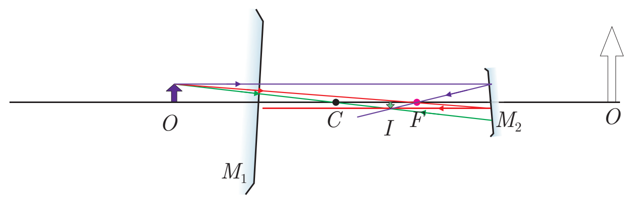
Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance image trouvée est correct, celle-ci étant négative, car un miroir convexe forme toujours une image virtuelle d'un objet réel.

b. Identifier la clé La clé est le fait que l'image du premier miroir est à 23,1 cm derrière celui-ci alors que le second miroir se trouve à 60,0 cm devant lui.

Résoudre le problème La distance objet pour le second miroir est la somme de $|q_1|$ et de la distance entre les miroirs :

$$p_2 = |q_1| + 60{,}0\,\text{cm} = |-23{,}1\,\text{cm}| + 60{,}0\,\text{cm} = 83{,}1\,\text{cm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

La figure suivante illustre le tracé des rayons principaux lors de la formation de la deuxième image. Puisque l'objet est devant la surface réfléchissante du deuxième miroir, on a alors un objet réel.



Valider la réponse Cette distance objet fait de l'image un objet réel pour le second miroir.

c. Résoudre le problème L'équation 6.5, dans laquelle on peut isoler la distance image pour le second miroir q_1, est

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2}$$
$$q_2 = \frac{1}{\frac{1}{f_2} - \frac{1}{p_2}} = \frac{1}{\frac{1}{20{,}0\,\text{cm}} - \frac{1}{83{,}1\,\text{cm}}} = 26{,}3\,\text{cm}\ .$$

C'est la distance image depuis le second miroir. La position de cette image, sur le mètre, est donc plus proche de 26,3 cm que la position du miroir, puisque le miroir projette cette image dans la direction de l'origine du mètre :

$$x_{\text{image-2}} = x_{\text{miroir-2}} - 26{,}3\,\text{cm} = 60{,}0\,\text{cm} - 26{,}3\,\text{cm} = 33{,}7\,\text{cm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La position de l'image finale en fait une image réelle, et cette valeur est plausible, située à l'intérieur des limites de la règle.

P17 Décortiquer le problème

Connue	Inconnue
$v_{\text{objet}} = \vec{\mathbf{v}}_O$	$\vec{\mathbf{v}}_I$

Identifier la clé La clé est le fait que la vitesse de l'image est la dérivée de sa position par rapport au temps, dans la mesure où elle change en raison du déplacement du miroir.

Résoudre le problème La vitesse de la position de l'image peut être définie par

$$v_I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\ .$$

La position image q peut être exprimée à partir de l'équation 6.5 :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \qquad \Rightarrow \qquad q_1 = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p}}\ .$$

Si on insère q dans l'expression de la dérivée, on trouve

$$v_I = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{p}\right)^{-1}\ .$$

En quelques étapes, on obtient

$$\begin{aligned} v_I &= (-1) \times \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{p}\right)^{-2} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{p}\right) \\ &= -\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{p}\right)^{-2} \times \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{p}\right) \\ &= -\left(\frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p}}\right)^{2} \times \left(0 - (-1) \times \frac{1}{p^2} \times \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right)\ . \end{aligned}$$

Le terme $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$ correspond à la vitesse de l'objet, comme il est indiqué dans l'énoncé. L'expression précédente devient alors

$$v_I = -\left(\frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p}}\right)^{2} \times \left(\frac{1}{p^2} \times v_O\right) = -\left(\frac{1}{\frac{p}{f} - \frac{p}{p}}\right)^{2} v_O = -\left(\frac{1}{\frac{p}{f} - 1}\right)^{2} v_O\ .$$

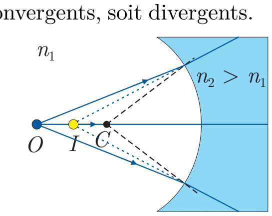
En multipliant le numérateur et le dénominateur par f pour simplifier et en incluant l'aspect vectoriel de $\vec{\mathbf{v}}_O$ pour tenir compte de la direction de la vitesse, on trouve

$$\vec{\mathbf{v}}_I = -\left(\frac{f}{f} \times \frac{1}{\frac{p}{f} - 1}\right)^{2} \vec{\mathbf{v}}_O = -\left(\frac{f}{p - f}\right)^{2} \vec{\mathbf{v}}_O\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Q18 **Décortiquer le problème** On doit déterminer pour chaque cas si l'image se forme du côté des rayons émergents (image réelle) ou du côté des rayons incidents (image virtuelle).

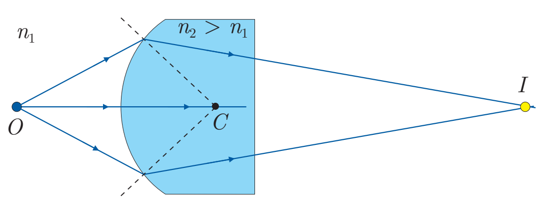
Identifier la clé La clé est le tracé des rayons émergents, qui sont soit convergents, soit divergents.

a.i. Les rayons incidents frappent une surface d'indice plus élevé ($n_2 > n_1$). Les rayons se rapprocheront donc de la perpendiculaire à la surface et ne pourront que diverger davantage par rapport aux rayons incidents (*voir la figure ci-contre*). Ils ne se rencontreront donc pas du côté émergent de la surface et l'image est virtuelle.



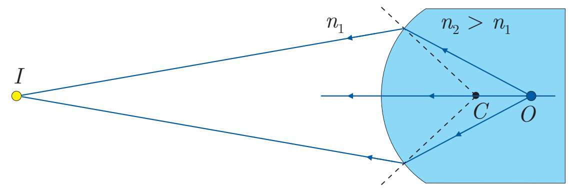
(i)

ii. Les rayons tracés convergent après avoir traversé la surface de la gauche vers la droite (*voir la figure suivante*). L'image se forme de l'autre côté de la surface, ce qui constitue une image réelle.



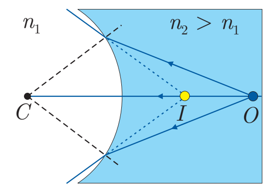
(ii)

iii. Les rayons tracés convergent après avoir traversé la surface de la droite vers la gauche (*voir la figure suivante*). L'image se forme de l'autre côté de la surface, ce qui constitue une image réelle.



(iii)

iv. Les rayons incidents frappent une surface d'indice plus faible ($n_1 < n_2$). S'ils émergent, les rayons s'éloigneront donc de la perpendiculaire à la surface et ne pourront que diverger davantage par rapport aux rayons incidents (*voir la figure ci-contre*). Ils ne se rencontreront donc pas du côté émergent de la surface et l'image est virtuelle.



(iv)

a.

L'image est réelle dans les cas (ii) et (iii). (réponse)

b.

L'image est virtuelle dans les cas (i) et (iv). (réponse)

On peut aussi trouver la réponse en déterminant le signe de la position image q pour chaque cas, comme indiqué ci-après.

Identifier la clé La clé est l'équation 6.10 pour les dioptres sphériques.

Résoudre le problème L'équation 6.10 contient la distance image q dont on doit déterminer le signe dans chaque cas :

$$\frac{n_A}{p} + \frac{n_B}{q} = \frac{n_B - n_A}{R} \ ,$$

où n_A sera l'indice de réfraction du milieu d'incidence et n_B, l'indice de réfraction du milieu d'émergence des rayons. Ainsi, pour chacun des quatre cas, on peut établir une expression de q dont il restera à déterminer le signe à partir des propriétés du montage :

$$q = \frac{n_B}{\frac{n_B - n_A}{R} - \frac{n_A}{p}} \ .$$

L'indice n_B étant nécessairement positif, le signe de q sera le même que le signe du dénominateur du terme de droite. On peut donc se limiter à déterminer ce signe, qui sera positif si

$$\frac{n_B - n_A}{R} - \frac{n_A}{p} > 0 \ ,$$

c'est-à-dire si

$$\frac{n_B - n_A}{R} > \frac{n_A}{p}$$

(car n_A/p est forcément positif).

i. Le sens de la courbure en (i) fait que le rayon de courbure R est négatif. Le milieu incident étant le milieu d'indice n_1, on doit vérifier si

$$\frac{n_2 - n_1}{R} > \frac{n_1}{p}, \qquad \text{où} \qquad n_2 - n_1 > 0 \ .$$

Le terme de gauche est nécessairement négatif et l'inégalité exprimée est fausse. Le signe de q est donc négatif et l'image est virtuelle.

ii. Le sens de la courbure en (ii) fait que le rayon de courbure R est positif. Le milieu incident étant le milieu d'indice n_1, on doit vérifier si

$$\frac{n_2 - n_1}{R} > \frac{n_1}{p} \ .$$

Puisque tous les termes sont positifs, on peut aussi écrire

$$\frac{n_2 - n_1}{n_1} > \frac{R}{p} \ .$$

Dans ce cas, les valeurs impliquées ont une incidence sur la vérification de l'inégalité. Sur la figure, on peut voir que p est légèrement supérieur à R ; le terme de droite est donc légèrement inférieur à 1. Ainsi, l'inégalité est vérifiée lorsque $(n_2 - n_1)/n_1 \geq 1$, ce qui se produit lorsque $n_2 \geq 2n_1$. Cependant, les rayons tracés donnent à penser qu'il y a convergence des rayons émergents et qu'alors l'image se forme de l'autre côté de la surface, ce qui confirme une image réelle.

iii. Le sens de la courbure en (iii) fait que le rayon de courbure R est négatif. Le milieu incident étant le milieu d'indice n_2, on doit vérifier si

$$\frac{n_1 - n_2}{R} > \frac{n_2}{p} \ .$$

$(n_1 - n_2)$ étant négatif (puisque $n_2 > n_1$) et R étant négatif également, le terme de gauche est positif. Le terme de droite est également positif, alors les valeurs impliquées ont une incidence sur la vérification de l'inégalité.

On doit alors se fier aux rayons tracés sur la figure, où les rayons émergents convergent, même si on ne voit pas le point de rencontre. L'image se forme donc du côté émergent et l'image est réelle.

iv. Le sens de la courbure en (iv) fait que le rayon de courbure R est positif. Le milieu incident étant le milieu d'indice n_2, on doit vérifier si

$$\frac{n_1 - n_2}{R} > \frac{n_2}{p} \ .$$

R étant positif et $n_2 > n_1$, le terme de gauche est forcément négatif et l'inégalité est par conséquent forcément fausse, car les deux variables de droite sont positives et de ce fait le rapport demeure positif.

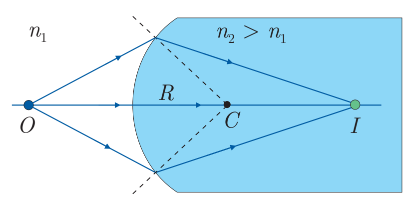
a.

L'image est réelle dans les cas (ii) et (iii). (réponse)

b.

L'image est virtuelle dans les cas (i) et (iv). (réponse)

Q19 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la situation.



Identifier la clé La clé est l'équation 6.10 pour des dioptres sphériques, dans laquelle on peut isoler la distance image et observer son comportement en fonction de la variation des autres paramètres.

Résoudre le problème D'après l'équation 6.10, l'expression de la distance image est

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$$q = \frac{n_2}{\frac{n_2 - n_1}{R} - \frac{n_1}{p}} \ . \qquad \text{(i)}$$

Dans la situation, l'image est réelle, car les rayons convergent après avoir traversé la surface ; q est donc positif. Rapprocher l'image de la surface correspond donc à réduire la valeur de q. De plus, R est positif. On peut donc conclure au sujet du dénominateur de l'équation (i) que $(n_2 - n_1)/R > n_1/p$. On établit ensuite comment q varie dans chaque cas.

i. L'augmentation de R réduira le premier terme du dénominateur, $(n_2 - n_1)/R$, ce qui fera augmenter la valeur de la fraction entière, d'où une augmentation de q.

ii. La diminution de R augmentera le premier terme du dénominateur, $(n_2 - n_1)/R$, ce qui fera diminuer la valeur de la fraction entière, d'où une diminution de q.

iii. Le rapprochement de l'objet correspond à une réduction de p (qui est positif). Le second terme du dénominateur (n_1/p) augmentera donc, ce qui fera augmenter la valeur de la fraction entière, d'où une augmentation de q.

iv. L'éloignement de l'objet correspond à une augmentation de p. Le second terme du dénominateur (n_1/p) diminuera donc, ce qui fera diminuer la valeur de la fraction entière, d'où une diminution de q.

v. L'augmentation de n_2 a un effet plus complexe puisque n_2 apparaît à deux endroits dans l'équation. Son effet dépend donc des valeurs des autres paramètres. Cependant, la figure permet de déterminer logiquement l'effet de n_2 sur q.

En frappant la surface, les rayons incidents inclinés se rapprochent de la perpendiculaire à la surface en la traversant (selon la loi de la réfraction). Une augmentation de n_2 accentuera donc ce rapprochement de la perpendiculaire et les rayons réfractés convergeront plus rapidement, ce qui réduira la distance image. L'augmentation de n_2 provoque donc le rapprochement de l'image.

vi. On a ici la réciproque au cas discuté en **v.** En frappant la surface, les rayons incidents inclinés se rapprochent de la perpendiculaire à la surface en la traversant (selon la loi de la réfraction). Une diminution de n_2 réduira donc ce rapprochement de la perpendiculaire et les rayons réfractés convergeront moins rapidement, ce qui augmentera la distance image. L'augmentation de n_2 provoque donc l'éloignement de l'image.

Les énoncés produisant un rapprochement de l'image sont donc

les énoncés (ii), (iv) et (v). (réponse)

E20 **Décortiquer le problème**

Connue	Inconnue
$p = 3{,}10\,\text{m}$	q

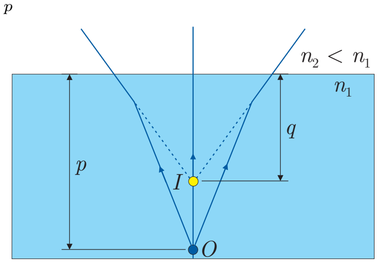
Identifier la clé La clé est le fait qu'un dioptre plan est considéré comme une surface dont le rayon de courbure est l'infini.

Résoudre le problème D'après l'équation 6.10, l'expression de la distance image est

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$
$$q = \frac{n_2}{\frac{n_2 - n_1}{R} - \frac{n_1}{p}} \ .$$

L'eau a un indice de réfraction de $n_1 = 1{,}33$ et l'air, le milieu émergent, a un indice de $n_2 = 1{,}00$:

$$q = \frac{1{,}00}{\frac{1{,}00 - 1{,}33}{\infty} - \frac{1{,}33}{3{,}10\,\text{m}}} = -2{,}33\,\text{m} \ .$$



La figure ci-contre illustre la situation, avec deux rayons émanant de l'objet O et dirigés vers la surface de l'eau, vers le haut.

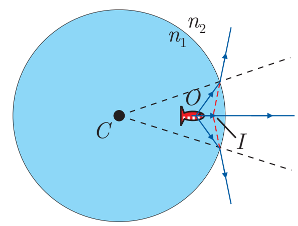
Le plongeur semble être à une profondeur $h = 2{,}33\,\text{m}$. (réponse)

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la profondeur trouvée est correct, celle-ci étant légèrement inférieure à la profondeur réelle (la distance image est négative, car l'image du plongeur se trouve dans l'eau, le milieu d'incidence).

E21 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\lvert R\rvert = 20{,}0\,\text{cm}$	q_{poisson}
$p_{\text{poisson}} = 5{,}0\,\text{cm}$	$q_{\text{observateur}}$
$p_{\text{observateur}} = 30{,}0\,\text{cm}$	

a. **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre deux rayons émanant du poisson et réfractés par la surface du bocal.



Identifier la clé La clé est l'équation 6.10 pour les dioptres sphériques.

Résoudre le problème D'après l'équation 6.10, l'expression de la distance image est

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$
$$q = \frac{n_2}{\frac{n_2 - n_1}{R} - \frac{n_1}{p}} \ .$$

Si on considère que l'objet est le poisson, le milieu incident est l'eau et le rayon de courbure est négatif (le centre de courbure étant dans le milieu incident) :

$$q = \frac{1{,}000}{\frac{1{,}000 - 1{,}333}{-20{,}0\,\text{cm}} - \frac{1{,}333}{5{,}0\,\text{cm}}} = -4{,}0\,\text{cm} \ .$$

Le poisson semble être à 4,0 cm derrière la paroi du bocal.

Donc,

$$d = \lvert q\rvert = 4{,}0\,\text{cm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance image trouvée est correct, le poisson semblant légèrement plus près de la paroi qu'il ne l'est en réalité.

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 6.11 qui relie le grandissement aux distances de l'objet et de l'image pour un dioptre.

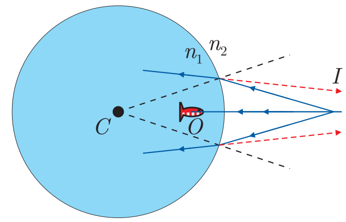
Résoudre le problème Selon l'équation 6.11, le grandissement est donné entre autres par

$$m = \frac{-n_1 q}{n_2 p} \ .$$

Si on considère la distance image de $-4{,}0\,\text{cm}$ trouvée en **a.**, le grandissement est

$$m = \frac{-(1{,}333 \times -4{,}0\,\text{cm})}{1{,}000 \times 5{,}0\,\text{cm}} = 1{,}1 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du grandissement est correct, celui-ci étant légèrement supérieur à 1.



c. Illustrer la situation La figure ci-contre illustre deux rayons émanant d'un point extérieur au bocal (l'observateur) et réfractés par la surface du bocal.

Identifier la clé La clé est l'équation 6.10 pour les dioptres sphériques.

Résoudre le problème Du point de vue du poisson, l'objet étant l'observateur, on doit modifier légèrement le traitement fait en **a.** Le milieu incident est l'air et le rayon de courbure est positif (le centre de courbure étant dans l'eau, le milieu émergent). De plus, les indices incident et émergent sont inversés parce que la lumière passe de l'air à l'eau :

$$q = \frac{n_1}{\frac{n_1 - n_2}{R} - \frac{n_2}{p}}$$

$$q = \frac{1{,}333}{\frac{1{,}333 - 1{,}00}{20{,}0\,\mathrm{cm}} - \frac{1{,}00}{30{,}0\,\mathrm{cm}}} = -79{,}9\,\mathrm{cm}\ .$$

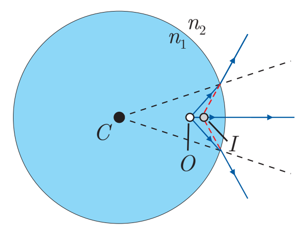
Pour le poisson, la personne semble être à 79,9 cm de la paroi du bocal.

Donc,

$$d = |q| = 79{,}9\,\mathrm{cm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance image trouvée est correct.

E22 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la sphère de plastique ainsi que la bulle dont proviennent deux rayons dirigés vers la surface.



Décortiquer le problème Le miroir décrit étant convexe, son rayon de courbure R est donc négatif.

Connues	Inconnue
$R = -25{,}0\,\mathrm{cm}$	n
$p = 10{,}0\,\mathrm{cm}$	
$q = -8{,}0\,\mathrm{cm}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 6.10 pour les dioptres sphériques.

Résoudre le problème On peut déterminer l'expression de l'indice de réfraction à partir de l'équation 6.10 :

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$$n_1 = \frac{\frac{n_2}{R} - \frac{n_2}{q}}{\frac{1}{p} + \frac{1}{R}}\ .$$

Le milieu incident est le verre, pour lequel on cherche n, et le milieu émergent est l'air, avec $n_2 = 1{,}00$. En outre, le rayon de courbure est négatif puisque le centre de la sphère est dans le milieu d'incidence :

$$n_1 = \frac{\left(\frac{1{,}00}{-25{,}0\,\mathrm{cm}} - \frac{1{,}00}{-8{,}0\,\mathrm{cm}}\right)}{\left(\frac{1}{10{,}0\,\mathrm{cm}} + \frac{1}{-25{,}0\,\mathrm{cm}}\right)} = 1{,}4\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'indice de réfraction du plastique est correct.

P23 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$e = 5{,}25\,\mathrm{cm}$	q
$n = 1,60$	
$p = 60{,}0\,\mathrm{cm}$	

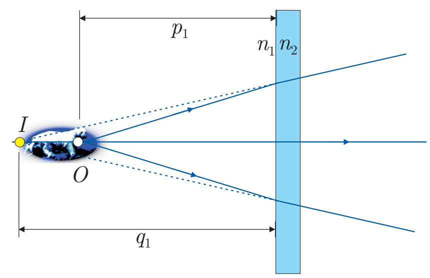
Identifier la clé La clé est l'équation 6.10 pour les dioptres sphériques, appliquée aux deux surfaces de la paroi de verre.

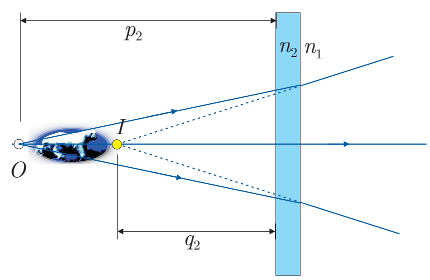
Résoudre le problème La lumière émise par l'ours se déplace dans l'eau jusqu'à la face intérieure de la paroi de verre. La face plane a un rayon de courbure équivalent à l'infini :

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}, \qquad \text{où} \qquad R = \infty$$

$$q_1 = \frac{n_2}{\frac{n_2 - n_1}{\infty} - \frac{n_1}{p_1}} = \frac{-p_1 n_2}{n_1}$$

$$q_1 = \frac{-(60{,}0\,\mathrm{cm}) \times 1{,}60}{1{,}333} = -72{,}0\,\mathrm{cm}\ .$$





La figure du haut ci-contre illustre le tracé des rayons pour le calcul de la position de la première image, produite par la première surface de la paroi. Cette image, à 72,18 cm derrière la face intérieure du verre, devient l'objet pour la face extérieure, située à 5,25 cm plus loin. La distance objet pour cette deuxième face est donc $72{,}0\,\mathrm{cm} + 5{,}25\,\mathrm{cm} = 77{,}3\,\mathrm{cm}$. La distance de l'image faite par cette seconde surface, alors que le milieu incident a un indice $n_2 = 1{,}60$ et le milieu émergent, $n_1 = 1{,}00$, est

$$q_2 = \frac{n_1}{\frac{n_1 - n_2}{\infty} - \frac{n_2}{p_2}} = \frac{-p_2 n_1}{n_2}$$

$$q_2 = \frac{-(77{,}3\,\mathrm{cm}) \times 1{,}00}{1{,}60} = -48{,}3\,\mathrm{cm}\ .$$

La figure du bas illustre le tracé des rayons pour le calcul de la position de la deuxième image, produite par la deuxième surface de la paroi, alors que l'image de la première étape devient l'objet pour la seconde.

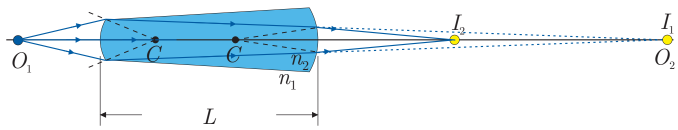
L'image de l'ours apparaît donc à 48,3 cm derrière la surface du verre.

Donc,

$$d = 48{,}3\,\mathrm{cm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La position de l'image de l'ours est cohérente. Il est normal que le verre réduise la distance apparente de tout ce qui est vu à travers cette épaisseur.

P24 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre le morceau de plastique ainsi que le tracé des rayons traversant les deux extrémités.



Décortiquer le problème Le premier dioptre étant convexe, son rayon de courbure R_1 est positif. Le second dioptre étant concave, son rayon de courbure R_2 est négatif.

Connues	Inconnues
$p = 12{,}0\,\mathrm{cm}$	q_2
$n = 1,43$	m_{total}
$R_1 = 5{,}00\,\mathrm{cm}$	
$R_2 = -8{,}00\,\mathrm{cm}$	
$L = 25{,}0\,\mathrm{cm}$	

a. Identifier la clé La clé est l'équation 6.10 pour les dioptres sphériques.

Résoudre le problème D'après l'équation 6.10, l'expression de la distance image pour la première surface est

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \ .$$

La première face étant convexe, le rayon de courbure donné est positif :

$$q = \frac{n_2}{\frac{n_2-n_1}{R} - \frac{n_1}{p}} = \frac{1{,}43}{\frac{1{,}43-1{,}00}{5{,}00\,\mathrm{cm}} - \frac{1{,}00}{12{,}0\,\mathrm{cm}}} = 536{,}3\,\mathrm{cm} \ .$$

Cette image, à 536 cm de la première surface, se trouve donc à $(536{,}3\,\mathrm{cm} - 25{,}0\,\mathrm{cm}) = 511{,}3\,\mathrm{cm}$ au-delà de la seconde surface, pour devenir l'objet de la seconde réfraction, où le rayon de courbure R_2 est négatif, et où l'indice du plastique est n_1. La distance objet p_2 est donc négative $(-511{,}3\,\mathrm{cm})$:

$$q = \frac{n_2}{\frac{n_2-n_1}{R} - \frac{n_1}{p}} = \frac{1{,}00}{\frac{1{,}00-1{,}43}{-8{,}00\,\mathrm{cm}} - \frac{1{,}43}{-511{,}3\,\mathrm{cm}}} = 18\,\mathrm{cm} \ .$$

L'image finale se trouve à 18 cm à droite de la seconde face. (réponse)

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance image finale est correct.

b. Identifier la clé La clé est l'équation 6.6 concernant le grandissement, appliquée deux fois aux deux réfractions successives.

Résoudre le problème Selon l'équation 6.11, le grandissement est donné entre autres par

$$m = \frac{n_1 q}{n_2 p} \ .$$

Le grandissement total produit par les effets consécutifs de deux dioptres est le produit des deux grandissements :

$$m_{\text{total}} = m_1 \times m_2 = \frac{-n_1 q_1}{n_2 p_1} \times \frac{-n_2 q_2}{n_1 p_1} = \frac{-q_1}{p_1} \times \frac{-q_2}{p_2}$$

$$m_{\text{total}} = \frac{-(536{,}3\,\mathrm{cm})}{12{,}0\,\mathrm{cm}} \times \frac{-(17{,}7\,\mathrm{cm})}{-511{,}3\,\mathrm{cm}} = -1{,}5 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du grandissement est correct. L'image est renversée et plus grande que l'objet.

P25 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$R = 28{,}0\,\text{cm}$	q_{finale}
$y_O = 1{,}2\,\text{cm}$	y_I
$p = 20{,}0\,\text{cm}$	
$h = 60{,}0\,\text{cm}$	

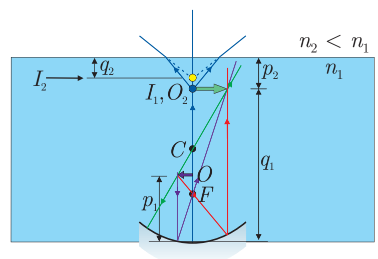
a. Identifier les clés Les clés sont les équations 6.5 et 6.10 permettant de trouver les images produites par un miroir sphérique d'abord et par un dioptre ensuite.

Résoudre le problème La lumière émise vers le miroir produira une première image. Le miroir étant concave, son rayon de courbure est considéré comme positif. De plus, il n'est pas nécessaire de considérer l'indice de réfraction de l'eau puisque le miroir produit une réflexion obéissant strictement à la géométrie. L'équation 6.5 donne alors

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1}, \qquad \text{où} \qquad f = \frac{R}{2}$$

$$q_1 = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p_1}} = \frac{1}{\frac{2}{R} - \frac{1}{p_1}} = \frac{1}{\frac{2}{28{,}0\,\text{m}} - \frac{1}{20{,}0\,\text{cm}}} = 46{,}7\,\text{cm} \ .$$

La figure ci-contre illustre la situation entière, où on aperçoit cette distance image q_1 depuis le miroir au fond du bassin. Cette image, à 46,7 cm devant le miroir, se trouve donc à une distance de la surface de l'eau égale à



$$p_2 = 60{,}0\,\text{cm} - 46{,}7\,\text{cm} = 13{,}3\,\text{cm} \ .$$

Cette image devient l'objet pour la réfraction produite par la surface plane du bassin d'eau. Soit un rayon de courbure infini et n_1 est l'indice de réfraction de l'eau (le milieu d'incidence), l'équation 6.10 donne

$$\frac{n_1}{p_2} + \frac{n_2}{q_2} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$$q = \frac{n_2}{\frac{n_2 - n_1}{\infty} - \frac{n_1}{p}} = \frac{1{,}000}{\frac{1{,}000 - 1{,}333}{\infty} - \frac{1{,}333}{13{,}3\,\text{cm}}} = -10{,}0\,\text{cm} \ .$$

Le signe négatif indique une image virtuelle, c'est-à-dire une image du côté des rayons incidents, soit dans l'eau.

À 10,0 cm sous la surface de l'eau. (réponse)

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance image est correct, et il est cohérent que l'image demeure sous l'eau, la surface étant plane.

b. Identifier la clé La clé est le fait que la taille de l'image finale est déterminée par le grandissement total (produit des deux grandissements successifs) et par la taille de l'objet.

Résoudre le problème Le grandissement produit par la réflexion sur le miroir est

$$m_1 = \frac{-q_1}{p_1} = \frac{-(46{,}7\,\text{cm})}{20{,}0\,\text{cm}} = -2{,}33 \ .$$

Le grandissement produit par la réfraction à la surface de l'eau est

$$m_2 = \frac{-n_{\text{eau}} q_2}{n_{\text{air}} p_2} = \frac{-(1{,}333 \times -10{,}0\,\text{cm})}{1{,}000 \times 13{,}3\,\text{cm}} = 0{,}9998 \ ,$$

et le grandissement total est

$$m_{\text{total}} = m_1 \times m_2 = -2{,}33 \times 0{,}9998 = -2{,}333 \ .$$

Puisque le grandissement est aussi le rapport y_I/y_O, le grandissement total est

$$m_{\text{total}} = \frac{y_{I1}}{y_{O1}} \times \frac{y_{I2}}{y_{O2}} \ .$$

Comme la première image est aussi le deuxième objet, on a $y_{O2} = y_{I1}$, et alors

$$m_{\text{total}} = \frac{y_{I1}}{y_{O1}} \times \frac{y_{I2}}{y_{I1}} = \frac{y_{I2}}{y_{O1}} \ .$$

On peut finalement isoler y_{I2} puisque la largeur de l'objet est connue :

$$y_{I2} = y_{O1} \times m_{\text{total}} = 1{,}2\,\text{cm} \times (-2{,}333) = -2{,}8\,\text{cm} \ .$$

L'image finale mesure $-2{,}8\,\text{cm}$, inversée.

Donc,

$$y = 2{,}8\,\text{cm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la taille de l'image est correct ; ses dimensions ont presque doublé.

Q26 **Identifier la clé** La clé est le fait que la focale de la lentille est modifiée, car la réfraction dépend de l'indice du milieu environnant autant que de l'indice du verre.

Résoudre le problème Le miroir impliquant des réflexions dictées par la géométrie, sa focale ne change pas.

Pour la lentille, en revanche, le changement est lié au fait que l'indice de réfraction de l'eau se rapproche davantage de l'indice de réfraction du verre de la lentille (1,33 contre 1,52) que l'indice de l'air (1,00 contre 1,52). Ainsi, si on immerge la lentille dans l'eau, les deux réfractions subies par un rayon lumineux à l'entrée et à la sortie de la lentille seront affectées par des déviations moins fortes à chacune des faces. Par conséquent, la puissance de la lentille est réduite et sa distance focale, augmentée ($f_{\text{lent}} = \frac{1}{V_{\text{lent}}}$).

La distance focale de la lentille sera plus grande que celle du miroir. (réponse)

Q27 **Identifier la clé** La clé est l'équation 6.20 qui donne la vergence d'une lentille à partir des rayons de courbure de ses faces.

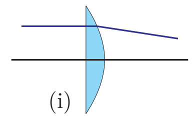
Résoudre le problème Pour comparer les quatre lentilles, on trouve l'expression de la vergence de chaque lentille à partir de l'équation

$$V = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \ .$$

Illustrer la situation La figure suivante illustre les quatre lentilles ainsi que deux rayons principaux qui les traversent.

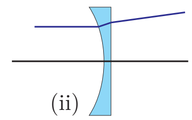
Pour la lentille (i), $R_1 = \infty$, $R_2 = -R$:

$$V_{(\mathrm{i})} = (n-1)\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-R}\right) = (n-1)\left(\frac{1}{R}\right) .$$


(i)

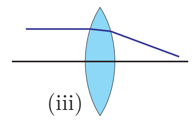
Pour la lentille (ii), $R_1 = -R$, $R_2 = \infty$:

$$V_{(\mathrm{ii})} = (n-1)\left(\frac{1}{-R} - \frac{1}{\infty}\right) = (n-1)\left(\frac{-1}{R}\right) .$$


(ii)

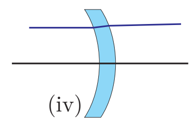
Pour la lentille (iii), $R_1 = R$, $R_2 = -R$:

$$V_{(\mathrm{iii})} = (n-1)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{-R}\right) = (n-1)\left(\frac{2}{R}\right) .$$


(iii)

Pour la lentille (iv), $R_1 = -R$, $R_2 = -R$:

$$V_{(\mathrm{iv})} = (n-1)\left(\frac{1}{-R} - \frac{1}{-R}\right) = (n-1)\left(0\right) = 0 .$$


(iv)

Le terme $(n-1)$ étant le même pour toutes les lentilles, l'ordre croissant de la vergence est

$$V_{(\mathrm{ii})} < V_{(\mathrm{iv})} < V_{(\mathrm{i})} < V_{(\mathrm{iii})}. \qquad \text{(réponse)}$$

Q28 a. Identifier la clé La clé est l'équation 6.21 :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} .$$

Résoudre le problème À partir de l'équation 6.21, on isole p :

$$p = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{q}}, \qquad \text{où} \qquad q = \infty$$

et on obtient

$$p = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{\infty}} = f . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Identifier la clé La clé est à nouveau l'équation 6.21 :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} .$$

Résoudre le problème À partir de l'équation 6.21, on analyse la condition $q > 0$:

$$q = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p}} > 0$$
$$\frac{1}{f} - \frac{1}{p} > 0 .$$

Il y a deux cas possibles : soit $p > 0$, soit $p < 0$. On examine les deux cas.
Lorsque $p > 0$:

$$-\frac{1}{p} > -\frac{1}{f}$$
$$-p < -f$$
$$p > f .$$

Si p est positif, alors $p > f$.
Lorsque $p < 0$:

$$-\frac{1}{-|p|} > -\frac{1}{f}$$
$$\frac{1}{|p|} > -\frac{1}{f} \ .$$

Si f est positif, toutes les valeurs non nulles de p telles que $p < 0$ vérifient cette inégalité.
L'ensemble des solutions est donc l'union des deux domaines définis :

$$p > f \qquad \text{ou} \qquad p < 0 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. **Identifier la clé** La clé est l'équation 6.6 concernant le lien entre le grandissement et les distances objet et image.
Résoudre le problème L'équation 6.6 permet d'écrire

$$m = \frac{-q}{p} = -1 \qquad \Rightarrow \qquad p = q \ .$$

Avec l'équation 6.5, on peut lier la valeur de p à la distance focale f de la lentille :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \qquad \text{où} \qquad p = q$$
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p} \ .$$

Cela implique que

$$p = 2f \ . \qquad \text{(réponse)}$$

d. **Identifier la clé** La clé est l'équation 6.21 :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ .$$

Résoudre le problème À partir de l'équation 6.21, on analyse la condition $q < 0$:

$$q = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p}} < 0$$
$$\frac{1}{f} - \frac{1}{p} < 0 \ .$$

Comme en **b.**, il y a deux cas possibles : soit $p > 0$, soit $p < 0$. On examine les deux cas.
Lorsque $p > 0$:

$$-\frac{1}{p} < -\frac{1}{f}$$
$$-p > -f$$
$$p < f \ .$$

Si p est positif, alors $p < f$ vérifie l'inégalité, admettant une première partie de la solution, soit $0 < p < f$.
Lorsque $p < 0$:

$$-\frac{1}{-|p|} < -\frac{1}{f}$$
$$\frac{1}{|p|} < -\frac{1}{f} \ .$$

Si f est positif, aucune valeur de p ne vérifie l'inégalité.
L'ensemble des solutions est donc l'union des deux domaines définis :

$$0 < p < f \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Q29 a. Identifier la clé La clé est l'équation 6.21 :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ .$$

Résoudre le problème À partir de l'équation 6.21, on isole p :

$$p = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{q}}, \qquad \text{où} \qquad q = \infty$$

et on obtient

$$p = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{\infty}} = f \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Identifier la clé La clé est à nouveau l'équation 6.21 :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ .$$

Résoudre le problème À partir de l'équation 6.21, on analyse la condition $q > 0$:

$$q = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p}} > 0$$

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{p} > 0 \ .$$

Il y a deux cas possibles : soit $p > 0$, soit $p < 0$. On examine les deux cas.
Lorsque $p > 0$:

$$\frac{1}{f} > \frac{1}{p}$$

$$\frac{p}{f} > 1 \ .$$

Si p est positif et f, négatif, aucune valeur de p ne vérifie l'inégalité.
Lorsque $p < 0$:

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{-|p|} > 0$$

$$\frac{1}{f} > -\frac{1}{|p|}$$

$$\frac{|p|}{f} > -1 \ .$$

Si f est négatif, on peut continuer en écrivant

$$\frac{|p|}{-|f|} > -1$$

$$-|p| > -|f|$$

$$|p| < |f| \ .$$

Si $p < 0$, cette inégalité est vérifiée lorsque $f < p < 0$.
L'ensemble des solutions est donc l'union des deux domaines définis :

$$f < p < 0 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. Identifier la clé La clé est l'équation 6.22 qui établit le lien entre le grandissement et les distances objet et image.

Résoudre le problème L'équation 6.6 permet d'écrire :

$$m = \frac{-q}{p} = -1 \qquad \Rightarrow \qquad p = q\ .$$

Avec l'équation 6.5, on peut lier la valeur de p à la distance focale f de la lentille :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \qquad \text{où} \qquad p = q$$
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p}\ .$$

Nonobstant les signes des variables, cela implique que

$$p = 2f\ . \qquad \text{(réponse)}$$

d. Identifier la clé La clé est l'équation 6.21 :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\ .$$

Résoudre le problème À partir de l'équation 6.21, on analyse la condition $q < 0$:

$$q = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p}} < 0$$
$$\frac{1}{f} - \frac{1}{p} < 0\ .$$

Comme en **b.**, il y a deux cas possibles : soit $p > 0$, soit $p < 0$. On examine les deux cas.
Lorsque $p > 0$ et $f < 0$:

$$-\frac{1}{|f|} - \frac{1}{p} < 0$$
$$\frac{1}{|f|} + \frac{1}{p} > 0$$
$$|f| + p > 0$$
$$p > -|f|\ .$$

Si p est positif, toutes les valeurs de p vérifient l'inégalité, admettant une première partie de la solution, soit $p > 0$.
Lorsque $p < 0$ et $f < 0$:

$$\frac{1}{-|f|} - \frac{1}{-|p|} < 0$$
$$-\frac{1}{|f|} < -\frac{1}{|p|}$$
$$-|p| < -|f|\ .$$

Si p et f sont négatifs, on peut écrire

$$p < f\ .$$

L'ensemble des solutions est donc l'union des deux domaines définis :

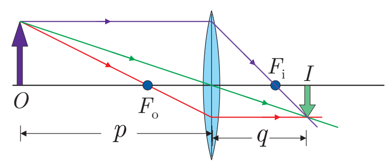
$$p < f \qquad \text{ou} \qquad p > 0\ . \qquad \text{(réponse)}$$

E30 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$p = 3f$	m
$f > 0$	

a. Identifier la clé La clé est la technique 6.2 qui décrit le tracé des trois rayons principaux pour une lentille mince.

Résoudre le problème La figure suivante illustre la situation avec les rayons principaux, alors que l'objet se trouve à la distance $p = 3f$ de la lentille convergente.



(réponse)

Valider la réponse L'équation 6.21 permet de valider ce résultat de façon mathématique :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$
$$q = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{3f}} = \frac{3f}{2} \ .$$

Le tracé de rayon réalisé montre bien une distance image de l'ordre de $1{,}5f$.

b. Identifier les clés Les clés sont les équations 6.21 et 6.22.

Résoudre le problème Selon l'équation 6.22, le grandissement est donné par

$$m = \frac{-q}{p}, \qquad \text{avec} \qquad p = 3f$$

$$m = \frac{-q}{3f} \ .$$

De plus, l'équation 6.21 permet d'écrire une expression de q en fonction de f :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$
$$q = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{3f}} = \frac{3f}{2} \ .$$

Quand on insère cette expression dans l'équation du grandissement, on obtient

$$m = \frac{-\frac{3f}{2}}{3f} = -\frac{1}{2} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

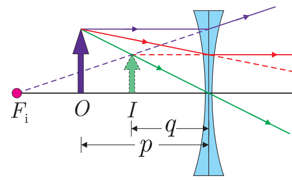
Valider la réponse L'ordre de grandeur du grandissement trouvé est correct et est cohérent avec le tracé de rayon fait en **a.**

E31 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$p = 20{,}0\,\text{cm}$	q
$f = -30{,}0\,\text{cm}$	

Identifier la clé La clé est la technique 6.2 qui décrit le tracé des trois rayons principaux pour une lentille mince.

Résoudre le problème La figure suivante illustre la situation avec les rayons principaux, alors que l'objet se trouve à 20,0 cm de la lentille divergente.



(réponse)

Valider la réponse L'équation 6.21 permet de valider ce résultat de façon mathématique :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$q = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{1}{-30{,}0\,\text{cm}} - \frac{1}{20{,}0\,\text{cm}}} = -12{,}0\,\text{cm}\ .$$

E32 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$y_O = 4{,}1\,\text{cm}$	q
$p = 7{,}80\,\text{cm}$	m
$f = +18{,}0\,\text{cm}$	y_I

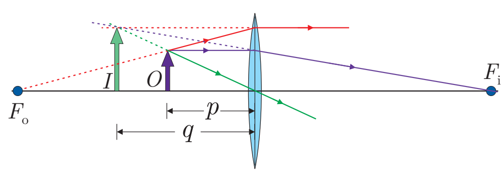
a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 6.21.

Résoudre le problème Selon l'équation 6.21,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$q = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{1}{18{,}0\,\text{cm}} - \frac{1}{7{,}80\,\text{cm}}} = -13{,}8\,\text{cm}\ .$$

La figure suivante illustre la situation.



L'image est virtuelle et se forme à 13,8 cm de la lentille, donc du côté gauche. (réponse)

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance image est correct et est confirmé par le tracé des rayons.

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 6.22.

Résoudre le problème Selon l'équation 6.22, le grandissement est égal à

$$m = \frac{-q}{p}\ .$$

En utilisant la distance image trouvée en **a.**, on obtient

$$m = \frac{-(-13{,}8\,\text{cm})}{7{,}80\,\text{cm}} = 1{,}76\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du grandissement trouvé est correct.

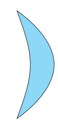
c. **Identifier la clé** La clé est l'équation 6.22 qui relie le grandissement aux dimensions de l'objet et de l'image.

Résoudre le problème Selon l'équation 6.22, le grandissement est aussi donné par

$$m = \frac{y'}{y}$$
$$y' = my = 1{,}76 \times 4{,}1\,\text{cm} = 7{,}2\,\text{cm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la dimension de l'image est correct, celle-ci ayant presque doublé, comme le suggère le grandissement trouvé en **b.**

E33 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la lentille **a.** possédant une face concave et une face convexe.



Décortiquer le problème Les deux dioptres étant concaves (lorsque regardés par le côté d'incidence), leurs rayons de courbure R_1 et R_2 sont négatifs.

Connues	Inconnues
$n = 1{,}52$	V
$R_1 = -8{,}24\,\text{cm}$	q
$R_2 = -4{,}50\,\text{cm}$	
$p = 25{,}0\,\text{cm}$	

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 6.20 qui relie la vergence aux rayons de courbure de la lentille et à son indice de réfraction.

Résoudre le problème Selon l'équation 6.20, la vergence est

$$V = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$V = (1{,}52-1)\left(\frac{1}{-8{,}24\,\text{cm}} - \frac{1}{-4{,}50\,\text{cm}}\right) = 0{,}052\,4\,\text{cm}^{-1}\ .$$

Convertie en mètres à la puissance moins un (donc en dioptries), cette vergence devient

$$V = 5{,}24\,\text{m}^{-1} = 5{,}24\,\text{D}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vergence est correct, soit de quelques unités.

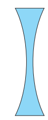
b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 6.21 qui relie la vergence aux distances objet et image.

Résoudre le problème Selon l'équation 6.21,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = V$$
$$q = \frac{1}{V - \frac{1}{p}} = \frac{1}{5{,}24\,\text{D} - \frac{1}{0{,}250\,\text{m}}} = 0{,}803\,\text{m}$$
$$q = 80{,}3\ \text{cm, à droite de la lentille.} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance image est correct.

E34 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la lentille **a.** possédant deux faces concaves.



Décortiquer le problème Le premier dioptre étant concave (lorsque regardé du côté d'incidence), son rayon de courbure R_1 est négatif. Le second dioptre étant convexe, son rayon de courbure R_2 est positif.

Connues	Inconnues
$n = 1{,}460$	f
$R_1 = -6{,}50\,\text{cm}$	q
$R_2 = +6{,}50\,\text{cm}$	y'
$p = 20{,}0\,\text{cm}$	
$y = 1{,}8\,\text{cm}$	

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 6.20 qui relie la distance focale aux rayons de courbure de la lentille et à son indice de réfraction.

Résoudre le problème Selon l'équation 6.20, la focale est

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$f = \frac{1}{(1{,}460-1)\left(\frac{1}{-6{,}50\,\text{cm}} - \frac{1}{6{,}50\,\text{cm}}\right)} = -7{,}07\,\text{cm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance focale est correct.

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 6.21 dans laquelle on peut isoler la distance image q.

Résoudre le problème L'équation 6.21 est

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$q = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{1}{-7{,}07\,\text{cm}} - \frac{1}{20{,}0\,\text{cm}}} = -5{,}22\,\text{cm}\ .$$

L'image se forme à 5,22 cm à droite de la lentille (du même côté que l'objet). (réponse)

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance image est correct.

c. **Résoudre le problème** La distance image trouvée en **b.** étant négative, on sait que l'image est virtuelle.

Virtuelle (réponse)

d. **Identifier la clé** La clé est l'équation 6.22 qui définit le grandissement.

Résoudre le problème Selon l'équation 6.22, le grandissement est

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{-q}{p}\ .$$

On peut alors isoler y' :

$$y' = \frac{-qy}{p} = \frac{(-5{,}22\,\text{cm}) \times (1{,}8\,\text{cm})}{20{,}0\,\text{cm}}$$

$$y' = 0{,}47\,\text{cm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la hauteur de l'image est correct.

E35 **Décortiquer le problème** Une image formée du même côté qu'un objet réel (donc du côté opposé aux rayons émergents) est une image virtuelle, donc la distance image q est négative.

Connues	Inconnue
$q = -27{,}6\,\text{cm}$	f
$p = 19{,}2\,\text{cm}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 6.21 dans laquelle on peut isoler la distance focale f.
Résoudre le problème L'équation 6.21 est

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$
$$f = \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} = \frac{1}{\frac{1}{19{,}2\,\text{cm}} + \frac{1}{-27{,}6\,\text{cm}}} = 63{,}1\,\text{cm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance focale est correct ; la lentille est une lentille convergente.

E36 Décortiquer le problème

Connue	Inconnues
$f = +12{,}5\,\text{cm}$	$p_{m=\pm 1{,}4}$
	$p_{m=\pm 0{,}6}$

Identifier la clé La clé est l'équation 6.21 dans laquelle on peut isoler la distance image q.
Résoudre le problème L'équation 6.21 est

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ . \qquad \text{(i)}$$

Il y a deux cas possibles, puisque le grandissement suggéré peut se produire dans le cas d'une image droite ($m = +1{,}4$) et dans le cas d'une image inversée ($m = -1{,}4$).
Dans tous les cas, le grandissement est donné par l'équation 6.22 :

$$m = \frac{-q}{p} \qquad \Rightarrow \qquad q = -mp \ .$$

Quand on insère cette expression de q dans l'équation (i), on obtient

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{-mp}$$
$$p = f \times \left(1 - \frac{1}{m}\right) \ .$$

a. Résoudre le problème Pour une image droite 40 % plus grande, $m = +1{,}4$:

$$p = (12{,}5\,\text{cm}) \times \left(1 - \frac{1}{+1{,}4}\right) = 3{,}57\,\text{cm} \ .$$

Pour une image inversée 40 % plus grande, $m = -1{,}4$:

$$p = (12{,}5\,\text{cm}) \times \left(1 - \frac{1}{-1{,}4}\right) = 21{,}4\,\text{cm}$$

$$p_{\text{im.droite}} = 3{,}57\,\text{cm} \quad \text{et} \quad p_{\text{im.inversée}} = 21{,}4\,\text{cm}. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur des distances trouvées est correct.

b. Résoudre le problème Pour une image droite 40 % plus petite, $m = +0{,}6$:

$$p = (12{,}5\,\text{cm}) \times \left(1 - \frac{1}{+0{,}6}\right) = -8{,}33\,\text{cm} \ .$$

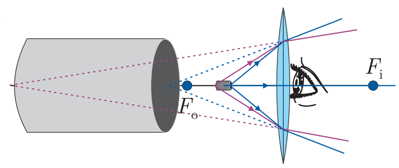
Pour une image inversée 40 % plus petite, $m = -0{,}6$:

$$p = (12{,}5\,\text{cm}) \times \left(1 - \frac{1}{-0{,}6}\right) = 33{,}3\,\text{cm}$$

$$p_{\text{im.droite}} = -8{,}33\,\text{cm} \quad \text{et} \quad p_{\text{im.inversée}} = 33{,}3\,\text{cm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur des distances trouvées est correct.

P37 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre le cylindre, dont les deux extrémités apparaissent plus près de l'œil qu'elle ne le sont en réalité lorsque regardées à travers une lentille convergente.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$f = +6{,}85\,\text{cm}$	L'
$L = 13{,}5\,\text{mm}$	
$p_1 = 3{,}50\,\text{cm}$	

Identifier la clé La clé consiste à déterminer la position de l'image de chacune des extrémités du tube.

Résoudre le problème À partir de l'équation des lentilles minces, on détermine la distance image de l'extrémité du tube la plus rapprochée de la loupe :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$
$$q_1 = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p_1}} = \frac{1}{\frac{1}{6{,}85\,\text{cm}} - \frac{1}{3{,}50\,\text{cm}}} = -7{,}16\,\text{cm}\ .$$

De la même manière, on peut déterminer la position de l'image de l'extrémité la plus éloignée. Cependant, il faut d'abord déterminer la distance objet de cette deuxième extrémité, celle-ci étant plus éloignée de la loupe que la première par une distance $L = 13{,}5\,\text{mm}$. Ainsi,

$$p_2 = p_1 + L = 3{,}50\,\text{cm} + 1{,}35\,\text{cm} = 4{,}85\,\text{cm}\ .$$

Donc,

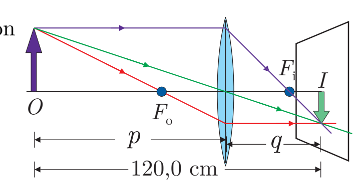
$$q_2 = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p_2}} = \frac{1}{\frac{1}{6{,}85\,\text{cm}} - \frac{1}{4{,}85\,\text{cm}}} = -16{,}61\,\text{cm}\ .$$

Ainsi, la longueur apparente du tube est la distance entre les images de ses extrémités :

$$L' = |q_1 - q_2| = -7{,}16\,\text{cm} - (-16{,}61\,\text{cm}) = 9{,}5\,\text{cm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur apparente est correcte, le tube apparaissant considérablement plus long sous la loupe.

P38 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la situation avec le tracé des rayons principaux.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$d = 120{,}0\,\text{cm}$	p
$f = 25{,}0\,\text{cm}$	

Identifier la clé La clé est le fait que la somme des distances objet et image doit correspondre à la distance totale entre l'ampoule et l'écran.

Résoudre le problème Selon l'équation des lentilles minces, on a

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ . \qquad \text{(i)}$$

Lorsque l'image se forme sur l'écran, la distance entre l'objet et l'image est la distance de 120,0 cm mentionnée. On peut donc écrire

$$p + q = d = 120{,}0\,\text{cm} \ . \qquad \text{(ii)}$$

On a alors un système de deux équations et deux inconnues. Si on isole d'abord q dans l'équation (ii) pour le remplacer dans l'équation (i), on obtient

$$\begin{aligned} q &= d - p \\ \frac{1}{f} &= \frac{1}{p} + \frac{1}{d-p} \\ \frac{p(d-p)}{f} &= (d-p) + p \\ p^2 - dp + fd &= 0 \ . \end{aligned}$$

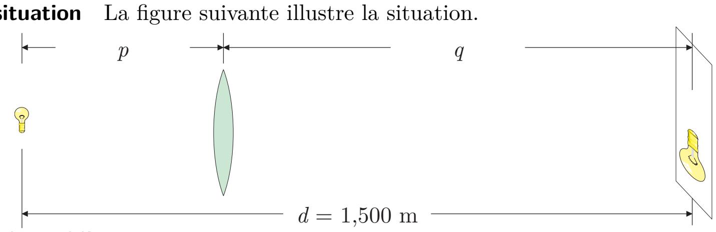
Cette équation admet deux solutions pour p :

$$p = \frac{d \pm \sqrt{(-d)^2 - 4 \times 1 \times fd}}{2 \times 1} = \frac{120{,}0 \pm \sqrt{(-120{,}0)^2 - 4 \times 1 \times 25{,}0 \times 120{,}0}}{2 \times 1}$$

$$p = 84{,}5\,\text{cm} \qquad \text{et} \qquad p = 35{,}5\,\text{cm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Les deux distances trouvées sont plausibles, étant toutes deux inférieures à 120 cm, et même complémentaires par rapport à la distance totale. Il y a donc symétrie dans les tracés de rayons de ces deux solutions.

P39 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre la situation.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$d = 1{,}500\,\text{m}$	p
$\lvert m \rvert = 2{,}80$	f

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation du grandissement exprimée en fonction de la distance d.

Résoudre le problème L'équation 6.22 du grandissement est

$$m = \frac{-q}{p} \ . \qquad \text{(i)}$$

En produisant l'image d'une ampoule sur un écran, on sait que l'objet et l'image seront réels. Puisque la distance entre l'ampoule et l'écran est fixée à 1,500 m, on peut affirmer que

$$d = p + q \ . \qquad \text{(ii)}$$

La distance q étant inconnue et présente dans les deux équations établies jusqu'à maintenant, on peut la faire disparaître par substitution :

$$d = p + q \qquad \Rightarrow \qquad q = d - p \ .$$

En remplaçant q dans l'équation (i), on obtient

$$m = \frac{-q}{p} = \frac{-(d-p)}{p}$$

$$p = \frac{d}{1-m} \ .$$

L'image étant agrandie ($|m| > 1$), m doit être négatif pour admettre un objet réel ($p > 0$) :

$$p = \frac{1{,}500\,\text{m}}{1-(-2{,}80)} = 0{,}395\,\text{m} = 39{,}5\,\text{cm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La distance objet trouvée correspond bien à un endroit compris entre l'ampoule et l'écran.

b. Identifier la clé La clé est l'équation 6.21 pour les lentilles minces.

Résoudre le problème La distance objet p étant trouvée, on peut également déterminer la distance image q à partir de l'équation (ii), et ensuite trouver la distance focale à partir de l'équation des lentilles minces :

$$d = p + q \qquad \Rightarrow \qquad q = d - p$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{d-p}$$

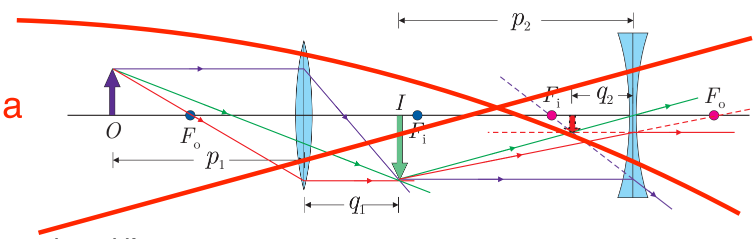
$$f = \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{d-p}}$$

$$f = \frac{1}{\frac{1}{0{,}395\,\text{m}} + \frac{1}{1{,}500\,\text{m} - 0{,}395\,\text{m}}} = 0{,}291\,\text{m} = 29{,}1\,\text{cm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance focale est correct.

P40 Illustrer la situation La figure suivante illustre la situation avec les rayons principaux issus de l'objet pour les deux étapes de formation de l'image.

Ce schéma est faux



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$y_O = 2{,}10\,\text{cm}$	q_1
$d_{\text{lentilles}} = 50{,}0\,\text{cm}$	p_2
$p_1 = 36{,}5\,\text{cm}$	$d_{\text{obj-im}}$
$f_1 = 22{,}5\,\text{cm}$	m_{total}
$f_2 = -15{,}0\,\text{cm}$	

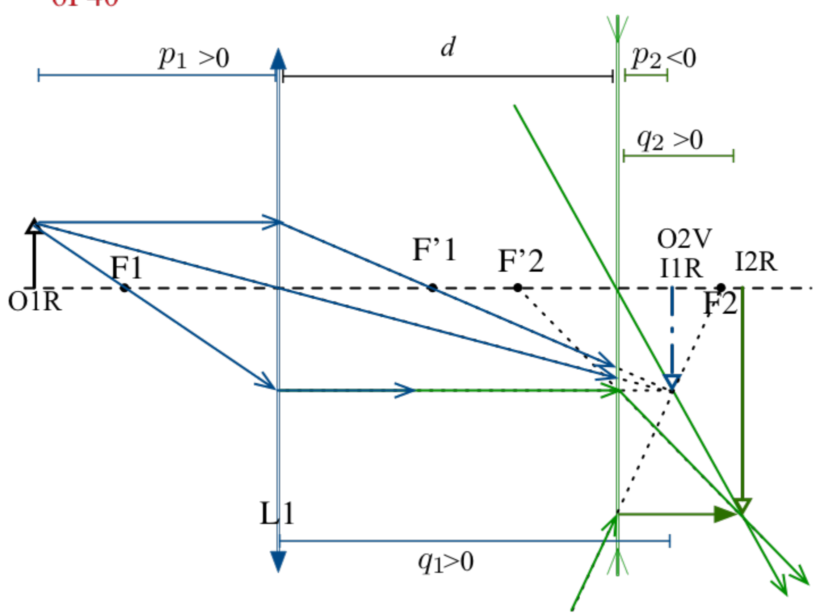
a. Identifier la clé La clé est l'équation 6.21 pour les lentilles minces

Résoudre le problème En isolant la distance image q_1 dans l'équation 6.21, on trouve

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1}$$

$$q_1 = \frac{1}{\frac{1}{f_1} - \frac{1}{p_1}} = \frac{1}{\frac{1}{22{,}5\,\text{cm}} - \frac{1}{36{,}5\,\text{cm}}} = 58{,}7\,\text{cm} \ .$$

6P40



L'image finale se trouve à 58,7 cm à droite de la première lentille. (réponse)

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance image trouvée est correct, même si le domaine de valeurs possibles est infini.

b. Identifier la clé La clé est le fait que l'image de la première lentille devient l'objet pour la seconde lentille, en tenant compte de la distance séparant les lentilles.

Résoudre le problème On a trouvé en **a.** que l'image de la première lentille se forme 58,7 cm à sa droite. La seconde lentille n'étant qu'à 50,0 cm à droite de la première, l'image 1 est donc à une distance $q_1 - d_{\text{lentilles}}$ au-delà de la seconde lentille. Elle devient alors un objet virtuel pour la seconde lentille. Rigoureusement, la distance objet p_2 est

$$p_2 = d_{\text{lentilles}} - q_1 = 50{,}0\,\text{cm} - 58{,}7\,\text{cm} = -8{,}7\,\text{cm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'objet de la seconde lentille est donc virtuel.

c. Identifier la clé La clé est l'équation 6.21 pour les lentilles minces.

Résoudre le problème En isolant la distance image q_2 dans l'équation 6.21, on trouve

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2}$$

$$q_2 = \frac{1}{\frac{1}{f_2} - \frac{1}{p_2}} = \frac{1}{\frac{1}{-15{,}0\,\text{cm}} - \frac{1}{-8{,}7\,\text{cm}}} = 20{,}5\,\text{cm} \ .$$

L'image finale se forme donc 20,5 cm au-delà de la seconde lentille. Pour trouver la distance entre cette image et l'objet initial, il suffit d'ajouter à cette distance la distance objet de la première lentille ainsi que la distance entre les lentilles :

$$D_{\text{obj-im}} = p_1 + d_{\text{lentilles}} + q_2 = 36{,}5\,\text{cm} + 50{,}0\,\text{cm} + 20{,}5\,\text{cm} = 107\,\text{cm} = 1{,}07\,\text{m} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La grandeur trouvée est d'un ordre de grandeur courant, même si mathématiquement le domaine possible est infini.

d. Identifier la clé La clé est le fait que le grandissement total produit par une paire de lentilles est le produit des deux grandissements successifs.

Résoudre le problème Le grandissement produit par chacune des lentilles est

$$m = \frac{-q}{p} \ .$$

Le grandissement total est donc

$$m_{\text{total}} = m_1 \times m_2 = \frac{-q_1}{p_1} \times \frac{-q_2}{p_2}$$

$$m_{\text{total}} = \frac{-58{,}7\,\text{cm}}{36{,}5\,\text{cm}} \times \frac{-20{,}5\,\text{cm}}{-8{,}7\,\text{cm}} = -3{,}8 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du grandissement trouvé est correct.

P41 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$f_1 = +20{,}0\,\text{cm}$	q_2
$p_1 = 10{,}0\,\text{cm}$	y_{I2}
$y_{O1} = 1{,}4\,\text{cm}$	
$f_2 = 30{,}0\,\text{cm}$	
$d_{\text{lentilles}} = 24{,}0\,\text{cm}$	

a. **Identifier la clé** La clé consiste à appliquer l'équation 6.21 à chacune des lentilles.

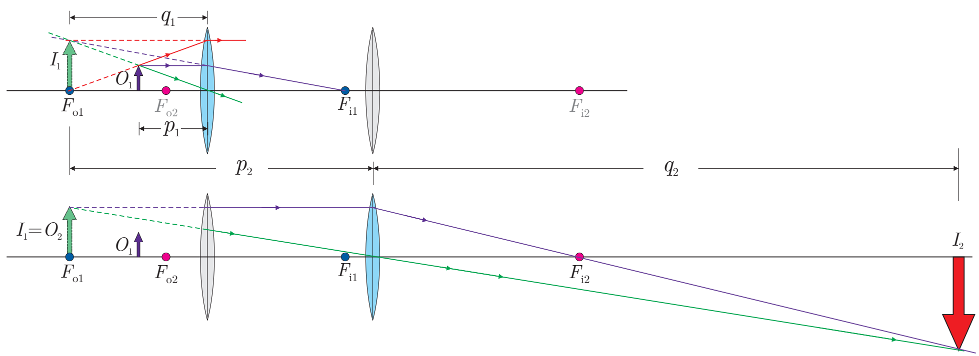
Résoudre le problème La position image résultant de la première lentille est

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1}$$
$$q_1 = \frac{1}{\frac{1}{f_1} - \frac{1}{p_1}} = \frac{1}{\frac{1}{20{,}0\,\mathrm{cm}} - \frac{1}{10{,}0\,\mathrm{cm}}} = -20{,}0\,\mathrm{cm}\ .$$

Cette image, à 20,0 cm à gauche de la première lentille, est donc à gauche de la seconde lentille d'une distance déterminée par

$$p_2 = d_{\mathrm{lentilles}} - q_1 = 24{,}0\,\mathrm{cm} - (-20{,}0\,\mathrm{cm}) = 44{,}0\,\mathrm{cm}\ .$$

La partie du haut de la figure suivante illustre la formation de la première image.



On peut utiliser cette distance objet pour déterminer la position de l'image finale :

$$q_2 = \frac{1}{\frac{1}{f_2} - \frac{1}{p_2}} = \frac{1}{\frac{1}{30{,}0\,\mathrm{cm}} - \frac{1}{44{,}0\,\mathrm{cm}}} = 94{,}3\,\mathrm{cm}\ .$$

La partie du bas de la figure illustre la formation de l'image finale.

L'image finale est donc à 94,3 cm à droite de la seconde lentille. (réponse)

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la position image de la seconde lentille est correct.

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que le grandissement total produit par une paire de lentilles est le produit des deux grandissements successifs.

Résoudre le problème Le grandissement produit par chacune des lentilles est

$$m = \frac{-q}{p}\ .$$

Le grandissement total est donc

$$m_{\mathrm{total}} = m_1 \times m_2 = \frac{-q_1}{p_1} \times \frac{-q_2}{p_2}$$
$$= \frac{-(-20{,}0\,\mathrm{cm})}{10{,}0\,\mathrm{cm}} \times \frac{-94{,}3\,\mathrm{cm}}{44{,}0\,\mathrm{cm}} = -4{,}3\ .$$

La taille de l'image est déterminée par le grandissement total, appliqué à la taille de l'objet :

$$m = \frac{y'}{y} \qquad \Rightarrow \qquad y' = my = -4{,}3 \times 1{,}4\,\mathrm{cm} = -6{,}0\,\mathrm{cm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la taille de l'image finale est correct.

c. Résoudre le problème Le signe du grandissement total détermine si l'image finale est inversée par rapport à l'objet initial. Ici, $m_{\text{total}} = -4{,}3$,

donc l'image finale est effectivement inversée. (réponse)

P42 **Identifier la clé** La clé est le fait que deux lentilles minces collées peuvent être considérées comme une seule lentille dont la distance objet est unique et dont la distance image est unique.

Résoudre le problème L'équation des lentilles minces peut être appliquée à chacune des lentilles, et la distance nulle entre les lentilles fait en sorte que la distance objet de la seconde lentille est l'opposé de la distance image de la première lentille. Selon l'équation 6.21, pour la première lentille, on a

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = V_1 \ . \tag{i}$$

Pour la seconde lentille, on obtient

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = V_2 \ . \tag{ii}$$

L'objet p_2 étant l'image de la première lentille, une image dont q_1 serait positive serait un objet virtuel pour la seconde lentille, à la même distance, avec $p_2 < 0$. On peut donc affirmer que

$$p_2 = -q_1 \ .$$

L'équation (ii) devient alors

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{-q_1} + \frac{1}{q_2} \ . \tag{iii}$$

On détermine à partir de l'équation (i) une expression de q_1 que l'on peut insérer dans l'équation (iii) :

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{\frac{1}{f_1} - \frac{1}{p_1}} \\ \frac{1}{f_2} &= \frac{1}{-q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{-\left(\frac{1}{\frac{1}{f_1} - \frac{1}{p_1}}\right)} + \frac{1}{q_2} \\ &= -\left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{p_1}\right) + \frac{1}{q_2} \ . \end{aligned}$$

Finalement, on peut écrire

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_2} \ ,$$

où on constate que la paire de lentilles (collées) impliquant un objet initial de position p_1 et une image finale de position q_2 a une focale équivalente définie par

$$\frac{1}{f_{\text{éq}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_2} \ .$$

L'équation 6.21 permet d'associer l'inverse des focales impliquées à des valeurs de vergence, dont une vergence équivalente :

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_{\text{éq}}} &= V_{\text{éq}} \\ \frac{1}{f_{\text{éq}}} &= V_{\text{éq}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = V_1 + V_2 \ , \end{aligned}$$

d'où

$$V_{\text{éq}} = V_1 + V_2 \ . \tag{réponse}$$

P43 **Décortiquer le problème**

Connue	Inconnue
$p_1 = 4f$	d

Identifier la clé La clé consiste à déterminer une expression du grandissement en fonction de la distance d recherchée.

Résoudre le problème Le grandissement produit par une lentille mince est

$$m = \frac{-q}{p} \ .$$

Pour l'effet composé de deux lentilles, le grandissement total est

$$m = m_1 \times m_2 = \frac{-q_1}{p_1} \times \frac{-q_2}{p_2} = \frac{q_1 q_2}{p_1 p_2} \ .$$

L'équation 6.21 des lentilles minces permet d'exprimer les distances image en fonction des distances objet. On sait déjà que $p_1 = 4f$, donc

$$q_1 = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p_1}} = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{4f}} = \frac{4f}{3} \ .$$

Cette image devenant l'objet pour la seconde lentille, la distance objet p_2 est

$$p_2 = d - q_1 \ .$$

Finalement, la distance image q_2 est

$$q_2 = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p_2}} = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{d-q_1}} = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{d-\frac{4f}{3}}} \ .$$

Le grandissement total est donc

$$m = \frac{\frac{4f}{3} \times \frac{1}{\frac{1}{f}-\frac{1}{d-\frac{4f}{3}}}}{4f \times (d - \frac{4f}{3})} = \frac{1}{\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{d-\frac{4f}{3}}\right)\left(3d - 4f\right)} = \frac{1}{\frac{3d}{f} - 7} \ .$$

Le grandissement total est donc maximisé lorsque le dénominateur de l'expression trouvée est minimal. On vérifie si on peut poser qu'il est égal à zéro pour trouver un cas d'image de taille infinie. Cela se produit lorsque $\frac{3d}{f} - 7$ tend vers zéro :

$$\frac{3d}{f} - 7 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad d = \frac{7f}{3} = 2{,}33f \ . \qquad \text{(réponse)}$$

P44 **Décortiquer le problème**

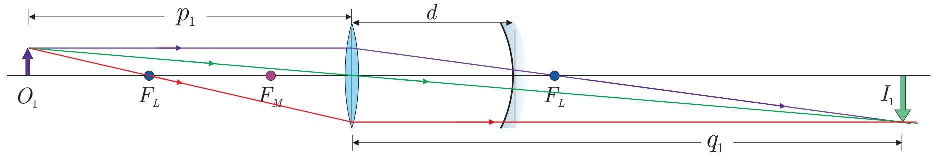
Connues	Inconnue
$f_l = 25{,}0\,\mathrm{cm}$	q_3
$R_m = +30{,}0\,\mathrm{cm}$	
$d = 20{,}0\,\mathrm{cm}$	
$p_1 = 40{,}0\,\mathrm{cm}$	

Identifier la clé La clé est le fait que les rayons lumineux subissent trois déviations avant de retourner vers la gauche. On doit alors traiter les trois interactions successives alors que l'image produite par un élément optique devient l'objet pour le suivant.

a. **Résoudre le problème** La première interaction se produit alors que la lumière provenant de l'objet rencontre la lentille (de focale f_l). Selon l'équation des lentilles minces, on a

$$\frac{1}{f_l} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1}$$
$$q_1 = \frac{1}{\frac{1}{f_l} - \frac{1}{p_1}} = \frac{1}{\frac{1}{25{,}0\,\text{cm}} - \frac{1}{40{,}0\,\text{cm}}} = 66{,}7\,\text{cm} .$$

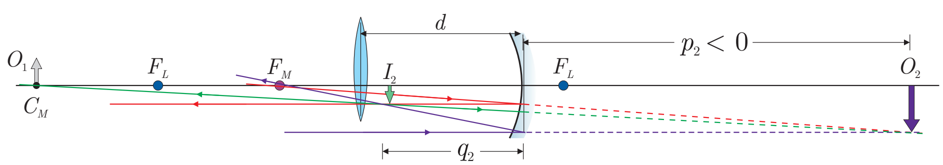
La figure suivante illustre la formation de la première image par la lentille.



Cette image réelle, formée 66,7 cm à droite de la lentille, devient un objet virtuel pour le miroir, à 66,7 cm − 20,0 cm = 46,7 cm à sa droite. Donc, $p_2 = -46{,}7\,\text{cm}$:

$$\frac{1}{f_m} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{2}{R_m}$$
$$q_2 = \frac{1}{\frac{2}{R_m} - \frac{1}{p_2}} = \frac{1}{\frac{2}{30{,}0\,\text{cm}} - \frac{1}{-46{,}7\,\text{cm}}} = 11{,}4\,\text{cm} .$$

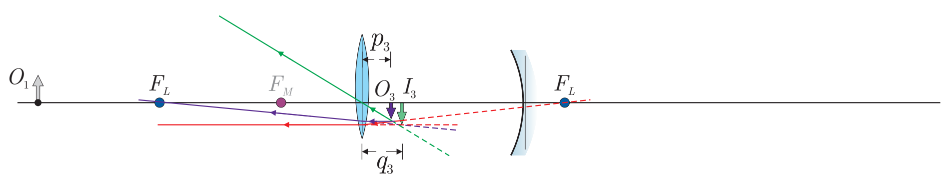
La figure suivante illustre la formation de la deuxième image par le miroir.



Il s'agit d'une image réelle située à 11,4 cm à gauche du miroir, alors que la lumière retourne vers la lentille. C'est donc un objet réel pour la lentille et $p_3 = 20{,}0\,\text{cm} - 11{,}4\,\text{cm} = 8{,}6\,\text{cm}$:

$$\frac{1}{f_l} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{q_3}$$
$$q_3 = \frac{1}{\frac{1}{f_l} - \frac{1}{p_3}} = \frac{1}{\frac{1}{25{,}0\,\text{cm}} - \frac{1}{8{,}6\,\text{cm}}} = -13{,}2\,\text{cm} .$$

La figure suivante illustre la formation de l'image finale par la lentille.



C'est une image virtuelle, donc située à 13 cm à droite de la lentille. (réponse)

Valider la réponse L'emplacement de l'image finale est plausible. La soustraction fait perdre un chiffre significatif.

b. **Résoudre le problème** La position image produite par la lentille lorsque la lumière retourne vers la gauche est négative. Il s'agit donc d'une image virtuelle.

L'image est virtuelle. (réponse)

c. Résoudre le problème Le caractère droit ou inversé de l'image finale est lié au nombre d'inversions subies dans l'ensemble des trois interactions. Le signe du grandissement m de chaque interaction renseigne sur l'inversion de chaque image partielle. Pour la première image, on a

$$m_1 = \frac{-q_1}{p_1} = \frac{-66{,}7\,\text{cm}}{40{,}0\,\text{cm}} \qquad \Rightarrow \qquad m_1 < 0 \;.$$

La première image est inversée une première fois. Pour l'effet du miroir, on trouve

$$m_2 = \frac{-q_2}{p_2} = \frac{-11{,}4\,\text{cm}}{-46{,}7\,\text{cm}} \qquad \Rightarrow \qquad m_2 > 0 \;.$$

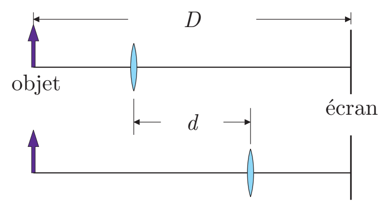
La seconde image est droite. Pour le second effet de la lentille, on trouve

$$m_3 = \frac{-q_3}{p_3} = -\frac{-13{,}2\,\text{cm}}{8{,}6\,\text{cm}} \qquad \Rightarrow \qquad m_3 > 0 \;.$$

La troisième image est droite elle aussi. L'ensemble des trois interactions optiques produit donc une seule inversion, ce qui donne une image finale inversée par rapport à l'objet initial.

L'image finale est inversée. (réponse)

P45 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la situation.



Identifier la clé La clé est l'expression de la distance image en fonction de la distance D.

Résoudre le problème La lentille se trouvant entre la source (à une distance p) et l'écran (à une distance q), on peut affirmer que

$$p + q = D \qquad \Rightarrow \qquad q = D - p \;.$$

L'équation des lentilles minces, dans laquelle on peut remplacer q par $D - p$, donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &= \frac{1}{p} + \frac{1}{D-p} \\ (D-p)p &= f(D-p) + fp \\ p^2 - Dp + fD &= 0 \;. \end{aligned}$$

Cette équation du second degré admet deux solutions, les deux positions illustrées, symétriquement distribuées de part et d'autre du centre du montage :

$$p = \frac{1}{2}D \pm \frac{1}{2}\sqrt{D^2 - 4fD} \;.$$

La distance d est la différence entre les deux solutions :

$$\begin{aligned} d &= \left(\frac{1}{2}D + \frac{1}{2}\sqrt{D^2 - 4fD}\right) - \left(\frac{1}{2}D - \frac{1}{2}\sqrt{D^2 - 4fD}\right) \\ &= \sqrt{D^2 - 4fD} \;. \end{aligned}$$

On peut finalement isoler f pour retrouver l'expression à démontrer :

$$d^2 = D^2 - 4fD$$

$$f = \frac{D^2 - d^2}{4D} \;. \qquad \text{(réponse)}$$

E46 **Décortiquer le problème**

Connue	Inconnue
$d_{\mathrm{PP}} = 65{,}0\,\mathrm{cm}$	V_C

a. **Résoudre le problème** L'œil décrit est hypermétrope. Au repos, il forme derrière la rétine l'image d'un objet à l'infini et ne parvient pas à former d'image nette d'un objet au PP d'un œil normal (25 cm).

La personne est hypermétrope. (réponse)

b. **Identifier la clé** La clé consiste à déterminer une lentille qui formera, à 65 cm de l'œil, l'image des objets se trouvant à 25 cm.

Résoudre le problème L'équation des lentilles minces permet de déterminer la vergence de la lentille requise :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = V_C \ .$$

Pour un objet à 25,0 cm qu'on veut faire apparaître à 65,0 cm devant l'œil, l'image doit être virtuelle ($q = -65{,}0\,\mathrm{cm}$) :

$$V_C = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{25{,}0\,\mathrm{cm}} + \frac{1}{-65{,}0\,\mathrm{cm}} = 0{,}024\,6\,\mathrm{cm}^{-1}$$
$$V_C = 2{,}46\,\mathrm{m}^{-1} = 2{,}46\,\mathrm{D} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vergence trouvée est correct.

E47 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$V_C = -3{,}25\,\mathrm{D}$	f
$d_{\mathrm{PP}} = 19{,}5\,\mathrm{cm}$	$d_{\mathrm{PR.s.lunettes}}$
	$d_{\mathrm{PP.av.lunettes}}$

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 6.21 qui lie la vergence d'une lentille à sa distance focale.

Résoudre le problème Selon l'équation 6.21, entre autres,

$$\frac{1}{f} = V_C$$
$$f = \frac{1}{V_C} = \frac{1}{-3{,}25\,\mathrm{D}} = -0{,}308\,\mathrm{m} = -30{,}8\,\mathrm{cm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance focale trouvée est correct pour des verres correcteurs.

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que les verres correcteurs d'une personne myope produiront, pour un objet à l'infini, une image virtuelle à son PR.

Résoudre le problème L'équation 6.21 permet de déterminer l'endroit où apparaîtra, pour Étienne portant ses lunettes, l'image d'un objet à l'infini. Cette distance image est le *punctum remotum* que l'on cherche :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$
$$q = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{1}{-30{,}8\,\mathrm{cm}} - \frac{1}{\infty}} = -30{,}8\,\mathrm{cm} \ .$$
$$d_{\mathrm{PR}} = 30{,}8\,\mathrm{cm} \ .$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance trouvée est correct pour le PR d'une personne myope.

c. Identifier la clé La clé est le fait que les lentilles portées par Étienne ne modifient pas que son PR, mais affectent aussi son PP.

Résoudre le problème Le PP se trouvant à 19,5 cm d'Étienne sans ses lunettes, on détermine l'endroit où doit se trouver un objet pour apparaître à cette distance. Considérant qu'on aura une image virtuelle telle que $q = -19{,}5\,\text{cm}$, on obtient

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$p = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{q}} = \frac{1}{\frac{1}{-30{,}8\,\text{cm}} - \frac{1}{-19{,}5\,\text{cm}}} = 53{,}2\,\text{cm}\ .$$

Étienne pourra apercevoir nettement avec ses lunettes les objets se trouvant à 53,2 cm et au-delà :

$$d_{\text{PP.av.lunettes}} = 53{,}2\,\text{cm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La position trouvée pour le PP, modifiée par les lunettes d'Étienne, est plausible, légèrement éloignée par des verres divergents (pour personne myope).

P48 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$d_{\text{PP}} = 17{,}4\,\text{cm}$	A_{acc}
$d_{\text{PR}} = 26{,}7\,\text{cm}$	V_{sup}
	$d_{\text{PP}'}$
	V_{inf}

a. Identifier la clé La clé est l'équation 6.27 définissant l'amplitude d'accommodation,

Résoudre le problème Selon l'équation 6.27,

$$A_{\text{acc}} = \frac{1}{d_{\text{PP}}} - \frac{1}{d_{\text{PR}}}$$

$$A_{\text{acc}} = \frac{1}{17{,}4\,\text{cm}} - \frac{1}{26{,}7\,\text{cm}} = 0{,}020\,0\,\text{cm}^{-1} = 2{,}00\,\text{D}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'amplitude d'accommodation est correct pour une personne ayant besoin de verres correcteurs.

b. Identifier la clé La clé est l'équation 6.21 liant la vergence d'une lentille aux distances objet et image pour une lentille.

Résoudre le problème Selon l'équation 6.21,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = V\ .$$

On veut qu'un objet se trouvant à l'infini apparaisse au PR de la personne pour qu'elle le voie nettement. On a donc $p = \infty$ et $q = -26{,}7\,\text{cm}$ (puisque l'image doit être virtuelle). Ainsi,

$$V_C = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{-26{,}7\,\text{cm}} = -3{,}75\,\text{D}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vergence trouvée est correct pour les verres correcteurs d'une personne myope.

c. Identifier la clé La clé est le fait que les verres correcteurs pour la myopie ne modifient pas que le PR, mais affectent aussi le PP.

Résoudre le problème Le PP se trouvant à 17,4 cm de la personne sans ses lunettes, on détermine l'endroit où doit se trouver un objet pour apparaître à cette distance. Considérant qu'on aura une image virtuelle telle que $q = -17{,}4\,\text{cm}$, on obtient

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{f} = V$$

$$p = \frac{1}{V - \frac{1}{q}} = \frac{1}{-0{,}037\,5\,\text{cm}^{-1} - \frac{1}{-17{,}4\,\text{cm}}} = 50{,}0\,\text{cm}\ .$$

La personne portant ces verres pourra apercevoir nettement les objets se trouvant à 50,0 cm et au-delà :

$$d_{\text{PP.av.lunettes}} = 50{,}0\,\text{cm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La position trouvée pour le PP, modifiée par les lunettes, est plausible, légèrement éloignée par des verres divergents (pour personne myope).

d. **Identifier la clé** La clé est le fait que l'image formée d'un objet situé à 25,0 cm doit se trouver à une distance $d_{\text{PP}} = 17{,}4$ cm.

Résoudre le problème Selon l'équation 6.21, avec $q = -17{,}4$ cm, on obtient

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = V$$

$$V_{C'} = \frac{1}{25{,}0\,\text{cm}} + \frac{1}{-17{,}4\,\text{cm}} = -1{,}75\,\text{D}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vergence trouvée est correct pour des verres correcteurs.

E49 **Identifier la clé** La clé est le fait que la lumière provenant de l'infini (le Soleil étant très éloigné) converge vers le foyer image d'une lentille convergente.

Résoudre le problème L'équation 6.30 lie le grossissement commercial à la distance focale d'une loupe :

$$G_{\text{com}} = \frac{0{,}250\,\text{m}}{f}$$

$$f = \frac{0{,}250\,\text{m}}{G_{\text{com}}} = \frac{0{,}250\,\text{m}}{2{,}25} = 11{,}1\,\text{cm}\ .$$

Il faut placer la loupe 11,1 cm au-dessus de l'objet pour focaliser les rayons du Soleil et allumer un feu.

$$d = 11{,}1\,\text{cm} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance trouvée est correct.

E50 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$G_{\text{com}} = 2{,}50$	G
$\lvert q\rvert = 25{,}0\,\text{cm}$	

Identifier la clé La clé consiste à déterminer d'abord la focale de la lentille à partir du grossissement commercial donné et de l'équation 6.30.

Résoudre le problème Selon l'équation 6.30,

$$G_{\text{com}} = \frac{0{,}250\,\text{m}}{f}$$

$$f = \frac{0{,}250\,\text{m}}{G_{\text{com}}} = \frac{0{,}250\,\text{m}}{2{,}50} = 10{,}0\,\text{cm}\ .$$

L'équation 6.21 permet ensuite de déterminer la distance objet à partir de la focale trouvée et de la distance image fournie. L'image se forme à 25,0 cm de la lentille, et il s'agit d'une image virtuelle que l'œil pourra voir. Donc $q = -25{,}0$ cm et

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$p = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{q}} = \frac{1}{\frac{1}{10{,}0\,\text{cm}} - \frac{1}{-25{,}0\,\text{cm}}} = 7{,}14\,\text{cm}\ .$$

On trouve par la suite le grossissement à partir de l'équation 6.29 et de cette distance objet :

$$G = \frac{0{,}250\,\mathrm{m}}{p} = \frac{0{,}250\,\mathrm{m}}{0{,}071\,4\,\mathrm{m}} = 3{,}50\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du grossissement trouvé est correct pour une loupe.

E51 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$f_{\mathrm{ob}} = 2{,}400\,\mathrm{m}$	G
$f_{\mathrm{oc}} = 12{,}5\,\mathrm{cm}$	$L_{\text{télescope}}$

a. **Identifier les clés** Les clés sont l'équation 6.34 qui donne le grossissement d'un télescope ainsi que le fait qu'une image finale apparaissant à l'infini indique un objet se trouvant au foyer objet de l'oculaire.

Résoudre le problème L'équation 6.34 donnant le grossissement d'un télescope est

$$G = \frac{-f_{\mathrm{ob}}}{p_{\mathrm{oc}}}\ .$$

On doit déterminer d'abord la distance objet de l'oculaire, sachant que l'image finale apparaît à l'infini :

$$\frac{1}{f_{\mathrm{oc}}} = \frac{1}{p_{\mathrm{oc}}} + \frac{1}{q_{\mathrm{oc}}}$$
$$p_{\mathrm{oc}} = \frac{1}{\frac{1}{f_{\mathrm{oc}}} - \frac{1}{q_{\mathrm{oc}}}} = \frac{1}{\frac{1}{12{,}5\,\mathrm{cm}} - \frac{1}{\infty}} = 12{,}5\,\mathrm{cm}\ .$$

Le grossissement est donc

$$G = \frac{-f_{\mathrm{ob}}}{p_{\mathrm{oc}}} = \frac{-2{,}400\,\mathrm{m}}{0{,}125\,\mathrm{m}} = -19{,}2\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du grossissement trouvé est correct pour un télescope, et l'image est inversée.

Ou encore, on aurait pu constater que si l'image finale apparaît à l'infini, le grossissement coïncide avec le grossissement commercial, directement donné par $-f_{\mathrm{ob}}/f_{\mathrm{oc}} = -19{,}2$.

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que pour une image finale apparaissant à l'infini, la longueur du télescope est la somme des deux distances focales.

Résoudre le problème La distance entre les deux lentilles (aussi considérée comme la longueur du télescope) est

$$L = f_{\mathrm{ob}} + f_{\mathrm{oc}} = 2{,}400\,\mathrm{m} + 12{,}5\,\mathrm{cm} = 2{,}525\,\mathrm{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur trouvée est correct pour un télescope.

E52 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$G = 9{,}50$	f_{ob}
$f_{\mathrm{oc}} = -8{,}25\,\mathrm{cm}$	

Identifier la clé La clé est le fait que pour une image finale apparaissant à l'infini, le grossissement donné coïncide avec le grossissement commercial donné par l'équation 6.35.

Résoudre le problème Selon l'équation 6.35 du grossissement commercial,

$$G = G_{\mathrm{com}} = \frac{-f_{\mathrm{ob}}}{f_{\mathrm{oc}}}\ .$$

Il suffit alors d'isoler f_{ob} :

$$f_{\text{ob}} = -Gf_{\text{oc}} = -9{,}50 \times -8{,}25\,\text{cm} = 78{,}4\,\text{cm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la focale de l'objectif est correct, les télescopes étant fabriqués avec des objectifs de longue focale.

P53 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$f_{\text{ob}} = 650\,\text{mm}$	θ'
$f_{\text{oc}} = 6{,}0\,\text{mm}$	
$dist_{\text{Jupiter}} = 630 \times 10^6\,\text{km}$	
$dia_{\text{Jupiter}} = 143 \times 10^3\,\text{km}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 6.34 liant le rapport des angles θ et θ' au rapport des focales des composantes du télescope.

Résoudre le problème Selon l'équation 6.34,

$$G = \frac{\theta'}{\theta} \ .$$

Puisqu'on précise que l'image finale se trouve à l'infini, le grossissement mentionné dans l'équation 6.34 est également le grossissement commercial, qui est aussi donné par $-f_{\text{ob}}/f_{\text{oc}}$. Le miroir concave étant l'objectif du télescope utilisé, on peut alors isoler l'angle θ' en fonction des focales et de l'angle θ qu'on peut déterminer à partir des distances fournies :

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = G_{\text{com}} = \frac{-f_{\text{ob}}}{f_{\text{oc}}}$$

$$\theta' = \frac{-f_{\text{ob}}\theta}{f_{\text{oc}}} \ .$$

L'angle sous-tendu par le diamètre de Jupiter, θ, sans l'aide du télescope, se calcule à partir de la distance à Jupiter et de son diamètre, en utilisant l'approximation selon laquelle la distance à Jupiter est pratiquement perpendiculaire au diamètre perçu, dans un triangle rectangle où

$$\tan\theta = \frac{dia_{\text{Jupiter}}}{dist_{\text{Jupiter}}} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arctan\left(\frac{dia_{\text{Jupiter}}}{dist_{\text{Jupiter}}}\right) \ .$$

On insère cette expression de l'angle dans l'équation de l'angle θ' :

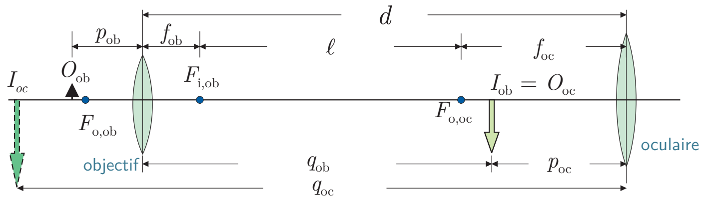
$$\theta' = \frac{-f_{\text{ob}} \times \arctan\left(\frac{dia_{\text{Jupiter}}}{dist_{\text{Jupiter}}}\right)}{f_{\text{oc}}} = \frac{-650\,\text{mm} \times \arctan\left(\frac{143 \times 10^3\,\text{km}}{630 \times 10^6\,\text{km}}\right)}{6{,}0\,\text{mm}} = -1{,}4^\circ \ .$$

Le signe négatif obtenu avec la réponse indique que l'image est renversée. Physiquement, l'angle sous-tendu par l'image (pour l'observateur) est la valeur absolue de ce résultat :

$$\theta' = 1{,}4^\circ \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'angle trouvé est correct ; l'angle minuscule que représente Jupiter dans le ciel devient un angle observable.

P54 **Illustrer la situation** La figure suivante montre le schéma de l'objectif et de l'oculaire, avec l'objet initial, l'image intermédiaire, qui devient l'objet pour l'oculaire, et l'image finale.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$f_{ob} = 7{,}50\,\text{mm}$	l
$f_{oc} = 36{,}5\,\text{mm}$	G
$p_{ob} = 8{,}0\,\text{mm}$	
$q_{oc} = -250\,\text{mm}$	

a. **Identifier la clé** La clé consiste à déterminer la distance entre les lentilles sachant que l'image de l'objectif est l'objet de l'oculaire.

Résoudre le problème À partir de l'équation des lentilles minces et des valeurs connues, on peut déterminer la distance image de l'objectif ainsi que la distance objet de l'oculaire :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$
$$q_{ob} = \frac{1}{\frac{1}{f_{ob}} - \frac{1}{p_{ob}}} = \frac{1}{\frac{1}{7{,}50\,\text{mm}} - \frac{1}{8{,}0\,\text{mm}}} = 120\,\text{mm}$$
$$p_{oc} = \frac{1}{\frac{1}{f_{oc}} - \frac{1}{q_{oc}}} = \frac{1}{\frac{1}{36{,}5\,\text{mm}} - \frac{1}{-250\,\text{mm}}} = 31{,}8\,\text{mm}\ .$$

Ces deux distances trouvées renseignent sur la distance entre les lentilles :

$$d = 120\,\text{mm} + 31{,}8\,\text{mm} = 151{,}8\,\text{mm}\ .$$

Cette distance est aussi égale à la somme $f_{ob} + l + f_{oc}$:

$$d = f_{ob} + l + f_{oc}$$
$$l = d - f_{ob} - f_{oc} = 151{,}8\,\text{mm} - 7{,}50\,\text{mm} - 36{,}5\,\text{mm} = 108\,\text{mm} = 10{,}8\,\text{cm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur optique est correct pour un microscope.

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 6.33 qui donne le grossissement du microscope à partir de sa longueur optique et de la focale des lentilles.

Résoudre le problème Selon l'équation 6.33, le grossissement du microscope est

$$G = -\frac{l}{f_{ob}}\frac{250\,\text{mm}}{f_{oc}} = -\frac{108\,\text{mm}}{7{,}50\,\text{mm}}\frac{250\,\text{mm}}{36{,}5\,\text{mm}} = -98{,}5\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du grossissement est correct pour un microscope, l'image étant inversée et agrandie près de 100 fois.

Physique 3 Ondes, optique et physique moderne - 1re édition

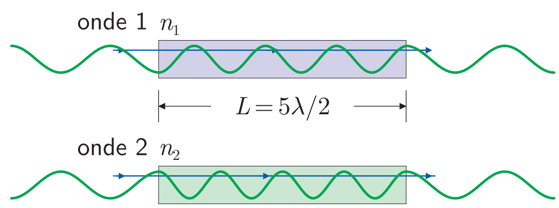
Chapitre 07 L'interférence de la lumière

Q1 **Identifier la clé** La clé est le fait que des sources doivent être cohérentes pour produire de l'interférence.

Résoudre le problème Les chandelles sont des sources non ponctuelles, mais surtout des sources de lumière non polarisée. Même dirigés à travers des fentes, les rayons issus des deux chandelles ne seront pas polarisés de la même manière et en phase de façon continue, mais au mieux de façon instantanée et désordonnée, donc non observable.

Il est impossible d'observer l'interférence produite par deux chandelles. (réponse)

Q2 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre les lames et les rayons de même longueur d'onde qui les traversent et en ressortent en phase.



Identifier la clé La clé est le fait que pour émerger en phase, les deux rayons doivent avoir des longueurs de marche qui diffèrent de la moitié d'un cycle (ou un multiple demi-entier).

Résoudre le problème Le nombre de longueurs d'onde N contenues dans une longueur L d'un milieu d'indice n est donné par

$$N = \frac{nL}{\lambda} .$$

L'indice de réfraction étant plus élevé dans le deuxième milieu, la longueur d'onde y sera plus réduite, et N_2 sera donc plus élevé que N_1. Si on produit une différence de marche d'une demi-longueur d'onde entre les deux rayons, alors

$$N_2 - N_1 = \frac{1}{2} .$$

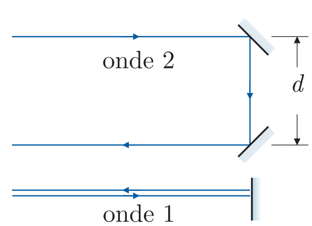
On peut donc affirmer que

$$\begin{aligned} N_2 - N_1 &= \frac{n_2 L}{\lambda} - \frac{n_1 L}{\lambda} = \frac{1}{2} \\ L &= \frac{\lambda}{2 \times (n_2 - n_1)} = \frac{\lambda}{2 \times (1{,}6 - 1{,}4)} \\ L &= \frac{5}{2}\lambda . \end{aligned}$$ (réponse)

Valider la réponse La longueur trouvée est telle que l'onde 1 effectuera 3,5 cycles complets et que l'onde 2 en effectuera 4.

Q3 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la situation.

Identifier la clé La clé est le fait que la différence de marche est strictement liée à la distance d supplémentaire parcourue par l'onde 1.



a. **Résoudre le problème** La différence de marche Δr est la distance supplémentaire parcourue par le rayon ayant le chemin le plus long. C'est donc directement la distance d :

$$\Delta r = d = \lambda .$$ (réponse)

b. Résoudre le problème Le déphasage, exprimé en fonction de la longueur d'onde, est lié au nombre de longueurs d'onde supplémentaires contenues sur la distance supplémentaire d, en plus du déphasage produit lors de chaque réflexion. Selon l'équation 7.6,

$$N = \frac{nr}{\lambda} \ .$$

Pour le rayon 1, les deux réflexions produisent deux déphasages d'une demi-longueur d'onde, et la distance supplémentaire parcourue $d = \lambda$ produit un autre déphasage d'une longueur d'onde complète 1λ :

$$N_1 = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2 \ .$$

Pour le rayon 2, la seule réflexion produit un déphasage d'une demi-longueur d'onde :

$$N_2 = \frac{1}{2} \ .$$

Le déphasage, exprimé en nombre de cycles, est

$$N_2 - N_1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. Résoudre le problème L'interférence produite lorsque le déphasage est un multiple demi-entier de la longueur d'onde est une interférence destructive.

De l'interférence destructive (réponse)

E4 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\lambda = 2{,}90\,\text{cm}$	$\Delta\Phi_{L_2=75{,}00\,\text{cm}}$
$L_1 = 75{,}00\,\text{cm}$	$\Delta\Phi_{L_2=80{,}00\,\text{cm}}$
	$\Delta\Phi_{L_2=105{,}45\,\text{cm}}$
	$\Delta\Phi_{L_2=133{,}00\,\text{cm}}$

Identifier la clé La clé est l'équation 7.6 déterminant le nombre de longueurs d'onde d'un chemin optique.

Résoudre le problème Les deux ondes se déplaçant dans l'air, $n = 1$ pour les deux ondes et la longueur d'onde est la même. En outre, aucune réflexion ne vient modifier le déphasage des deux ondes. Seule la différence de distance parcourue peut alors générer un déphasage.

Pour la source à une distance fixe, on a

$$N_1 = \frac{nL_1}{\lambda} = \frac{L_1}{\lambda} = \frac{75{,}00\,\text{cm}}{2{,}90\,\text{cm}} = 25{,}86 \ .$$

Il reste à déterminer N_2 pour évaluer la différence $N_2 - N_1$. Une valeur entière signifie une interférence constructive, une valeur demi-entière signifie une interférence destructive, alors que les autres valeurs signifient une interférence intermédiaire.

a. Résoudre le problème Si $L_2 = 75{,}00\,\text{cm}$, on trouve

$$N_2 = \frac{L_2}{\lambda} = \frac{75{,}00\,\text{cm}}{2{,}90\,\text{cm}} = 25{,}86$$

$$N_2 - N_1 = 25{,}86 - 25{,}86 = 0 \ .$$

Interférence constructive (réponse)

Valider la réponse Une distance identique pour les deux ondes signifie nécessairement un déphasage nul.

b. Résoudre le problème Si $L_2 = 80{,}00\,\text{cm}$, on trouve

$$N_2 = \frac{L_2}{\lambda} = \frac{80{,}00\,\text{cm}}{2{,}90\,\text{cm}} = 27{,}58$$

$$N_2 - N_1 = 27{,}58 - 25{,}86 = 1{,}72\ .$$

Interférence intermédiaire (réponse)

c. Résoudre le problème Si $L_2 = 105{,}45\,\text{cm}$, on trouve

$$N_2 = \frac{L_2}{\lambda} = \frac{105{,}45\,\text{cm}}{2{,}90\,\text{cm}} = 36{,}36$$

$$N_2 - N_1 = 36{,}36 - 25{,}86 = 10{,}5\ .$$

Interférence destructive (réponse)

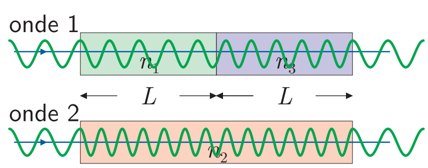
d. Résoudre le problème Si $L_2 = 133{,}00\,\text{cm}$, on trouve

$$N_2 = \frac{L_2}{\lambda} = \frac{133{,}00\,\text{cm}}{2{,}90\,\text{cm}} = 45{,}86$$

$$N_2 - N_1 = 45{,}86 - 25{,}86 = 20{,}00\ .$$

Interférence constructive (réponse)

E5 Illustrer la situation La figure suivante illustre la traversée des deux lames par les rayons de même longueur d'onde.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$L = 2{,}50\,\mu\text{m}$	N_1
$\lambda = 650\,\text{nm}$	N_2
$n_1 = 1{,}20$	$N_2 - N_1$
$n_2 = 1{,}69$	
$n_3 = 1{,}40$	

a. Identifier la clé La clé est l'équation 7.6 permettant de calculer le nombre de longueurs d'onde dans un milieu.

Résoudre le problème L'onde 1 parcourt la longueur L dans un milieu d'indice n_1. Le nombre de longueurs d'onde à l'intérieur de ce milieu est

$$N_1 = \frac{n_1 L}{\lambda}\ .$$

L'onde parcourt ensuite une longueur L dans un milieu d'indice n_3, pour un nombre de longueurs d'onde supplémentaires de

$$N_3 = \frac{n_3 L}{\lambda}\ .$$

L'onde 1 parcourt donc un nombre total de longueurs d'onde de

$$N_{\text{onde 1}} = N_1 + N_3 = \frac{n_1 L}{\lambda} + \frac{n_3 L}{\lambda} = \frac{(n_1 + n_3)L}{\lambda}$$

$$= \frac{(1{,}20 + 1{,}40) \times 2{,}50\,\mu\text{m}}{650\,\text{nm}}$$

$$N_{\text{onde 1}} = 10{,}00\ .$$ (réponse)

Valider la réponse Il n'y a pas d'ordre de grandeur recherché pour un tel calcul, mais on constate que la longueur d'onde est d'un ordre de grandeur comparable à la longueur L et qu'alors N sera une faible quantité.

b. **Résoudre le problème** L'onde 2 parcourt de son côté la distance $2L$ dans un milieu d'indice n_2 pour un nombre de longueurs d'onde de

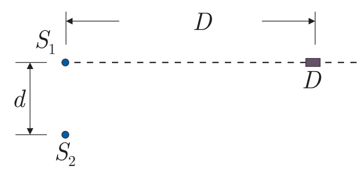
$$N_{\text{onde } 2} = N_2 = \frac{n_2(2L)}{\lambda} = \frac{1{,}69 \times 2 \times 2{,}50\,\mu\text{m}}{650\,\text{nm}}$$
$$N_{\text{onde } 2} = 13{,}00\ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. **Résoudre le problème** Le déphasage entre les deux ondes, en fonction de la longueur d'onde, est la différence du nombre de longueurs d'onde des deux ondes :

$$N_2 - N_1 = 13{,}0 - 10{,}0 = 3{,}00\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de déphasage trouvé est correct ; ce déphasage donnera lieu à de l'interférence constructive.

P6 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre les deux sources séparées d'une distance d et la droite sur laquelle on peut déplacer un détecteur pour répondre aux conditions d'interférence.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$f = 5{,}00\,\text{GHz}$	D_{const}
$d = 15{,}00\,\text{cm}$	D_{dest}

Identifier la clé La clé est le calcul des valeurs D admettant une différence de marche multiple de la longueur d'onde.

Résoudre le problème La longueur d'onde, à partir de la fréquence donnée, est

$$c = \lambda f$$
$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3{,}00 \times 10^8\,\text{m/s}}{5{,}00 \times 10^9\,\text{Hz}} = 6{,}00\,\text{cm}\ .$$

Entre 0 et l'infini, plusieurs valeurs de D produiront un déphasage entier et, de là, de l'interférence constructive. La distance à S_1 est toujours D, et la distance à S_2 est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés d et D.

Dans le cas extrême où $D = 0$, la différence de marche est d, c'est-à-dire 15,00 cm. La différence de marche pour des ondes dans l'air est alors

$$\Delta N = N_2 - N_1 = \frac{r_2}{\lambda} - \frac{r_1}{\lambda} = \frac{r_2 - r_1}{\lambda} \qquad \text{(i)}$$
$$= \frac{d - 0}{\lambda} = \frac{15{,}00\,\text{cm} - 0{,}00\,\text{cm}}{6{,}00\,\text{cm}} = 2{,}5\ .$$

Ce serait déjà une valeur admettant de l'interférence destructive si on la considérait.

À l'autre extrême, à une distance infinie, la distance r_2 tendrait à égaler D, et alors la différence de marche deviendrait nulle ($N_2 - N_1 = 0$). On cherche donc des distances D telles que $0 < \Delta N < 2{,}5$.

Dans tous les cas, on a

$$\Delta N = \frac{\sqrt{d^2 + D^2} - D}{\lambda}$$
$$D = \frac{d^2 - \Delta N^2 \lambda^2}{2\Delta N \lambda}\ . \qquad \text{(i)}$$

a. **Résoudre le problème** On observera de l'interférence constructive lorsque ΔN est entier, soit pour les valeurs $\Delta N = 1$ et $\Delta N = 2$.
Pour $\Delta N = 2$, selon l'équation (i),

$$D = \frac{d^2 - \Delta N^2 \lambda^2}{2\Delta N \lambda} = \frac{(15{,}00\,\text{cm})^2 - 2^2 \times (6{,}00\,\text{cm})^2}{2 \times 2 \times (6{,}00\,\text{m})} = 3{,}4\,\text{cm} .$$

Pour $\Delta N = 1$,

$$D = \frac{d^2 - \Delta N^2 \lambda^2}{2\Delta N \lambda} = \frac{(15{,}00\,\text{cm})^2 - 1^2 \times (6{,}00\,\text{cm})^2}{2 \times 1 \times (6{,}00\,\text{m})} = 15{,}8\,\text{cm} .$$

Ensuite, aucune valeur inférieure à l'infini ne donne de l'interférence constructive.

$$D = 15{,}8\,\text{cm} \qquad \text{et} \qquad D = 3{,}4\,\text{cm} . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Résoudre le problème** On observera de l'interférence destructive lorsque ΔN est demi-entier, soit pour les valeurs $\Delta N = 0{,}5$ et $\Delta N = 1{,}5$ (on exclut le cas $\Delta N = 2{,}5$, car il coïncide avec $D = 0$).
Pour $\Delta N = 1{,}5$,

$$D = \frac{d^2 - \Delta N^2 \lambda^2}{2\Delta N \lambda} = \frac{(15{,}00\,\text{cm})^2 - 1{,}5^2 \times (6{,}00\,\text{cm})^2}{2 \times 1{,}5 \times (6{,}00\,\text{m})} = 8{,}0\,\text{cm} .$$

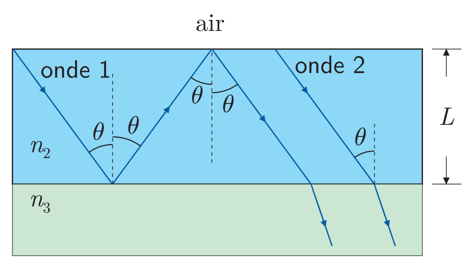
Pour $\Delta N = 0{,}5$,

$$D = \frac{d^2 - \Delta N^2 \lambda^2}{2\Delta N \lambda} = \frac{(15{,}00\,\text{cm})^2 - 0{,}5^2 \times (6{,}00\,\text{cm})^2}{2 \times 0{,}5 \times (6{,}00\,\text{m})} = 36{,}0\,\text{cm} .$$

$$D = 36{,}0\,\text{cm} \qquad \text{et} \qquad D = 8{,}0\,\text{cm} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Les grandeurs trouvées sont correctes et bien ordonnées ; il y a alternance entre les positions d'interférences constructive et destructive.

P7 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre les deux ondes interagissant avec l'eau et le verre.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\lambda = 446{,}5\,\text{nm}$	N_1
$n_2 = 1{,}333$	N_2
$n_3 = 1{,}52$	$N_2 - N_1$
$L = 3{,}40\,\mu\text{m}$	
$\theta = 40{,}0°$	

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 7.6 permettant de calculer le nombre de longueurs d'onde dans un milieu, en plus du fait qu'il y a une réflexion dure dans le parcours de l'onde 1.

Résoudre le problème L'onde 1 parcourt trois fois la même distance dans le verre, distance liée à l'épaisseur L et à l'angle θ :

$$\Delta r = 3 \times \frac{L}{\cos\theta} .$$

Le nombre de longueurs d'onde à l'intérieur de ce milieu est

$$N_1 = \frac{n_2 \Delta r}{\lambda} = \frac{n_2 (3 \times \frac{L}{\cos\theta})}{\lambda} = \frac{1{,}333 \times (3 \times \frac{3{,}40\,\mu\text{m}}{\cos 40{,}0°})}{446{,}5\,\text{nm}} = 39{,}8 .$$

Il faut ajouter une demi-longueur d'onde, car la réflexion sur la face supérieure du verre est une réflexion dure (puisque $n_3 > n_2$) :

$$N_1 = 39{,}8 + 0{,}5 = 40{,}3 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Le nombre de longueurs d'onde dans l'eau est plausible pour une couche si mince.

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 7.6.

Résoudre le problème L'onde 2 parcourt une seule fois la distance dans le verre, distance liée à l'épaisseur L et à l'angle θ :

$$\Delta r = \frac{L}{\cos\theta} \ .$$

Le nombre de longueurs d'onde à l'intérieur de ce milieu est

$$N_2 = \frac{n_2 \Delta r}{\lambda} = \frac{n_2 (1 \times \frac{L}{\cos\theta})}{\lambda}$$

$$N_2 = \frac{1{,}333 \times (3 \times \frac{3{,}40\ \mu\text{m}}{\cos 40{,}0^\circ})}{446{,}5\,\text{nm}} = 13{,}3 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse C'est logiquement environ le tiers de la quantité trouvée en **a.** puisque l'inclinaison est la même.

c. **Identifier la clé** La clé est le fait que le déphasage exprimé en longueurs d'onde est la différence des quantités trouvées en **a.** et en **b.**

Résoudre le problème Le déphasage est

$$N_2 - N_1 = 13{,}3 - 40{,}3 = -27{,}0 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Le déphasage est de l'ordre de grandeur des quantités de longueurs d'onde trouvées, mais surtout, il est inférieur à l'une et à l'autre.

d. **Identifier la clé** La clé est le fait qu'il y a interférence constructive lorsque le déphasage est un nombre entier de longueurs d'onde.

Résoudre le problème Le déphasage exprimé en longueurs d'onde est de $27{,}0\lambda$, donc un entier. Ainsi, il y a interférence constructive.

Interférence constructive (réponse)

Valider la réponse En réalité, le déphasage de $27{,}0\lambda$ est la valeur arrondie du déphasage trouvé avec les valeurs fournies. Avant arrondissement, la valeur n'est pas un entier parfait, mais la différence est négligeable, pour les mêmes raisons qui font que l'on peut arrondir à l'entier.

Q8 **Identifier la clé** La clé est l'équation 7.17 pour l'interférence constructive dans l'expérience de Young.

Résoudre le problème Selon l'équation 7.17,

$$d \sin\theta = m_c \lambda \ .$$

L'angle θ est lié à la position y et à la distance L par

$$\tan\theta = \frac{y}{L} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arctan\frac{y}{L} \ .$$

Aucune valeur n'étant indiquée, on ignore si on peut appliquer l'approximation des petits angles. Cependant, pour connaître simplement le sens des effets d'une variable sur une autre, aucune « précision » n'est requise. L'approximation permet donc de simplifier la forme de l'équation sans modifier les réponses qualitatives. Les équations précédentes deviennent alors

$$d\theta = m_c \lambda, \qquad \text{avec} \qquad \theta = \frac{y}{L}$$

$$\frac{dy}{L} = m_c\lambda$$
$$y = \frac{Lm_c\lambda}{d} \ .$$

On peut ainsi voir rapidement si la variation de y est proportionnelle ou inversement proportionnelle à chacune des autres variables. La question demande de plus d'analyser la distance entre les franges Δy, mais celle-ci varie de la même manière que la position de la première frange (pour laquelle $m_c = 1$). On peut donc réduire l'équation à

$$\Delta y = \frac{L\lambda}{d} \ .$$

a. **Résoudre le problème** Une augmentation de la distance L entre les fentes et l'écran (au numérateur) causera une augmentation de Δy.

Δy augmente. (réponse)

b. **Résoudre le problème** Une augmentation de la distance d entre les fentes (au dénominateur) causera une diminution de Δy.

Δy diminue. (réponse)

c. **Résoudre le problème** Une augmentation de la longueur d'onde λ (au numérateur) causera une augmentation de Δy.

Δy augmente. (réponse)

d. **Résoudre le problème** Le fait de réaliser l'expérience dans l'eau entraîne une réduction de la longueur d'onde (due à l'indice de réfraction de l'eau, par un facteur $\frac{1}{n}$). La réduction de la longueur d'onde interagissant avec les fentes (λ étant au numérateur) produit une diminution de Δy.

Δy diminue. (réponse)

E9 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$d = 0{,}250\,\text{mm}$	λ
$L = 1{,}28\,\text{m}$	
$\Delta y = 3{,}35\,\text{mm}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 7.17 pour l'interférence constructive dans l'expérience de Young.

Résoudre le problème Selon l'équation 7.17,

$$d\sin\theta = m_c\lambda \ .$$

L'angle θ est lié à la position y et à la distance L par

$$\tan\theta = \frac{y}{L} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arctan\frac{y}{L} \ .$$

Sans supposer la validité de l'approximation des petits angles, on peut donc affirmer avec précision que

$$d\sin\left(\arctan\frac{y}{L}\right) = m_c\lambda$$
$$\lambda = \frac{d}{m_c}\sin\left(\arctan\frac{y}{L}\right) \ .$$

Des franges brillantes voisines étant distantes de 3,35 mm, on comprend que, pour $\Delta m_c = 1$, $\Delta y = 3{,}35$ mm. On peut alors réduire l'équation obtenue :

$$\lambda = \frac{d}{\Delta m_c} \sin\left(\arctan \frac{\Delta y}{L}\right) \tag{7.1}$$

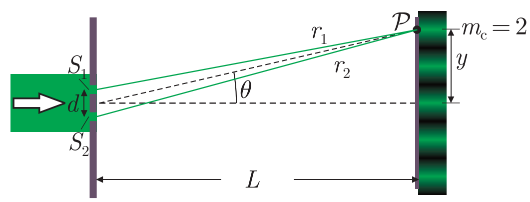
$$\lambda = \frac{0{,}250 \times 10^{-3}\,\text{m}}{1} \sin\left(\arctan \frac{3{,}35 \times 10^{-3}\,\text{m}}{1{,}28\,\text{m}}\right) = 654\,\text{nm} \;. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est correct, celle-ci faisant partie du domaine visible.

E10 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\lambda = 532\,\text{nm}$	L
$d = 1{,}00\,\text{mm}$	θ_2
$y_{m=2} = 5{,}00\,\text{mm}$	

a. Illustrer la situation La figure ci-contre illustre la situation où l'interférence est produite avec un laser vert.



Identifier la clé La clé est l'équation 7.17 pour l'interférence constructive dans l'expérience de Young.

Résoudre le problème Selon l'équation 7.17,

$$d \sin\theta = m_c \lambda \;.$$

L'angle θ est lié à la position y et à la distance L par

$$\tan\theta = \frac{y}{L} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arctan\frac{y}{L} \;. \tag{i}$$

Sans supposer la validité de l'approximation des petits angles, on peut affirmer avec précision que

$$d \sin\left(\arctan\frac{y}{L}\right) = m_c \lambda$$

$$L = \frac{y}{\tan\left(\arcsin\frac{m\lambda}{d}\right)}$$

$$L = \frac{5{,}00 \times 10^{-3}\,\text{m}}{\tan\left(\arcsin\frac{2 \times (532 \times 10^{-9}\,\text{m})}{1{,}00 \times 10^{-3}\,\text{m}}\right)} = 4{,}70\,\text{m} \;. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance trouvée est correct pour cette expérience.

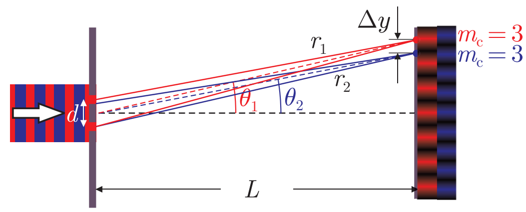
b. Identifier la clé La clé est l'utilisation de l'une des équations contenant θ en **a.**

Résoudre le problème L'équation (i) utilisée en **a.** permet de calculer directement l'angle θ :

$$\theta = \arctan\frac{y}{L} = \arctan\frac{5{,}00 \times 10^{-3}\,\text{m}}{4{,}70\,\text{m}} = 0{,}061\,0^\circ \;. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'angle trouvé est correct, celui-ci étant très faible pour les premiers ordres d'interférence en lumière visible.

E11 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la situation où l'interférence est produite avec deux types de lumière. Les deux figures d'interférence se superposent, mais n'ont pas les mêmes dimensions.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$d = 0{,}425\,\text{mm}$	$\Delta y_{(m_1=3,m_2=3)}$
$\lambda_1 = 468\,\text{nm}$	
$\lambda_2 = 634\,\text{nm}$	
$L = 1{,}82\,\text{m}$	

Identifier la clé La clé est le calcul, à l'aide de l'équation 7.17, de la position des maximums d'ordre 3 pour les deux ondes.

Résoudre le problème Selon l'équation 7.17,

$$d \sin\theta = m_c\lambda \ .$$

Si on utilise l'approximation des petits angles, l'angle θ peut aussi être exprimé en fonction de y et de L pour chaque onde :

$$d\theta = m_c\lambda, \qquad \text{où} \qquad \theta = \frac{y}{L} \ ,$$

d'où

$$\frac{dy}{L} = m_c\lambda \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{m_c\lambda L}{d} \ .$$

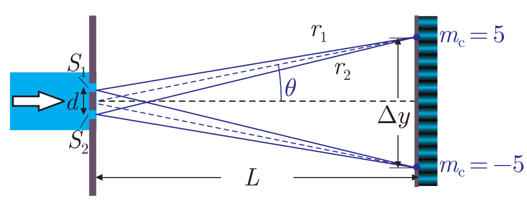
On perçoit ici qu'une longueur d'onde plus grande entraîne une position y plus grande. Ainsi, pour des maximums du même ordre, $y_{\text{rouge}} > y_{\text{bleu}}$, et alors la distance Δy cherchée sera donnée par $y_{2,m=3} - y_{1,m=3}$:

$$\Delta y = y_{2,m=3} - y_{1,m=3} = \frac{m_c\lambda_2 L}{d} - \frac{m_c\lambda_1 L}{d} = \frac{m_c L}{d}(\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$\Delta y = \frac{3 \times 1{,}82\,\text{m}}{0{,}425 \times 10^{-3}\,\text{m}}(634\,\text{nm} - 468\,\text{nm}) = 2{,}13\,\text{mm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance trouvée est correct et confirme la validité de l'approximation des petits angles, puisque θ est nécessairement très faible à cette distance du centre.

E12 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la situation où l'interférence est produite avec une source de longueur d'onde inconnue.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$d = 0{,}500\,\text{mm}$	λ
$L = 1{,}50\,\text{m}$	
$\Delta y_{-5,5} = 1{,}54\,\text{cm}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 7.17 pour l'interférence constructive dans l'expérience de Young.

Résoudre le problème Selon l'équation 7.17,

$$d \sin\theta = m_c\lambda \ .$$

Puisque $y <<< L$, l'approximation des petits angles est valide, et on peut simplifier :

$$d\theta = m_c\lambda, \qquad \text{avec} \qquad \theta = \frac{y}{L}$$

$$d\frac{y}{L} = m_c\lambda \ . \tag{i}$$

L'écart connu entre les maximums d'ordre -5 et 5 peut s'exprimer ainsi :

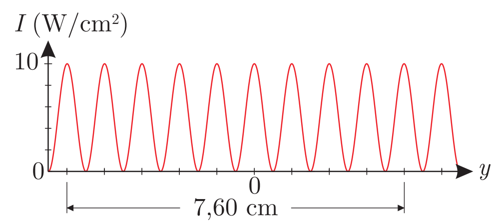
$$\Delta y_{-5,5} = y_5 - y_{-5} \ .$$

L'équation (i) peut alors être modifiée pour isoler y :

$$y = \frac{m_c\lambda L}{d}$$
$$\Delta y_{-5,5} = y_5 - y_{-5} = \frac{m_{c,5}\lambda L}{d} - \frac{m_{c,-5}\lambda L}{d} = \frac{\lambda L}{d}(m_{c,5} - m_{c,-5})$$
$$\lambda = \frac{d\Delta y_{-5,5}}{L(m_{c,5} - m_{c,-5})} = \frac{(0{,}500\,\text{mm}) \times (1{,}54\,\text{cm})}{(1{,}50\,\text{m}) \times (5 - (-5))}$$
$$\lambda = 513\,\text{nm} \ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est correct, celle-ci appartenant au domaine visible.

E13 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre l'irradiance en fonction de la position sur l'écran.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$L = 2{,}000\,\text{m}$	λ
$d = 0{,}150\,\text{mm}$	$I_{1,\text{centre}}$

a. **Identifier la clé** La clé est le dénombrement, sur la figure, du nombre d'ordres d'interférence séparés par une distance de 7,60 cm.

Résoudre le problème Selon la figure, la distance de 7,60 cm sépare les maximums d'ordre -5 d'ordre 4. L'équation 7.17 permet d'établir un lien entre cet écart Δm et la distance Δy à l'aide de l'équation 7.11. En utilisant l'approximation des petits angles (puisque $y <<< L$), on obtient

$$d\theta = m\lambda, \qquad \text{avec} \qquad \theta = \frac{y}{L}$$

$$\lambda = \frac{dy}{mL} \ .$$

L'écart entre les maximums étant constant, on peut associer une distance Δy entre deux maximums à leur différence d'ordres Δm :

$$\lambda = \frac{d\Delta y}{\Delta m L} = \frac{0{,}150 \times 10^{-3}\,\text{m} \times 7{,}60 \times 10^{-2}\,\text{m}}{(4 - (-5)) \times 2{,}000\,\text{m}} = 633\,\text{nm} \ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est correct, celle-ci appartenant au domaine visible.

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 7.27 sur l'irradiance dans la figure d'interférence.

Résoudre le problème L'irradiance produite par deux fentes est donnée par

$$I_{(2)} = 4I_{(1)}\cos^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) \ . \tag{i}$$

Puisqu'on s'intéresse à l'irradiance au centre de la figure, on parle d'un endroit où le déphasage est nul. L'équation (i) devient

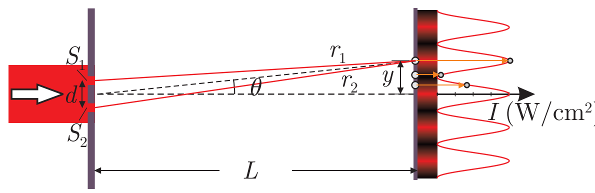
$$I_{(2)} = 4I_{(1)}\cos^2\left(\frac{0}{2}\right) = 4I_{(1)} \ .$$

L'irradiance produite par une seule fente est donc le quart de l'irradiance observée avec deux fentes. Selon la figure 7.32, l'irradiance avec deux fentes est de $10\,\mathrm{W/cm^2}$. Ainsi,

$$I_{(1)} = \frac{I_{(2)}}{4} = \frac{10\,\mathrm{W/cm^2}}{4} = 2{,}5\,\mathrm{W/cm^2}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'irradiance trouvée est le quart de l'irradiance produite par deux fentes, ce qui est cohérent avec l'irradiance d'un maximum dans l'expérience de Young.

E14 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la figure d'interférence produite, avec la courbe de l'irradiance en fonction de la position.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$d = 0{,}150\,\mathrm{mm}$	$I_{5{,}00\,\mathrm{mm}}$
$\lambda = 625\,\mathrm{nm}$	$I_{10{,}55\,\mathrm{mm}}$
$L = 4{,}30\,\mathrm{m}$	$I_{17{,}92\,\mathrm{mm}}$

a. Identifier la clé Les clés sont les équations 7.27 et 7.28 permettant d'exprimer l'irradiance.

Résoudre le problème L'irradiance en un point de la figure, par rapport à l'irradiance au centre, est

$$I_{(2)} = 4I_{(1)}\cos^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)\ .$$

Le pourcentage d'irradiance, par rapport à l'irradiance au centre, est alors

$$\frac{I}{I_{\text{centre}}} = \frac{I_{(2)}}{4I_{(1)}} = \cos^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)\ ,$$

où

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda} = \frac{2\pi d\theta}{\lambda}, \qquad \text{car} \qquad \sin\theta\approx\theta\ ,$$

et

$$\tan\theta = \frac{y}{L}\approx\theta\ .$$

Le rapport d'irradiance est donc

$$\frac{I}{I_{\text{centre}}} = \cos^2\left(\frac{\left(\frac{2\pi d(\frac{y}{L})}{\lambda}\right)}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi dy}{\lambda L}\right) \qquad \text{(i)}$$

$$= \cos^2\left(\frac{\pi\times(0{,}150\times10^{-3}\,\mathrm{m})\times(5{,}00\times10^{-3}\,\mathrm{m})}{(625\times10^{-9}\,\mathrm{m})\times(4{,}30\,\mathrm{m})}\right) = 0,409$$

$$\frac{I}{I_{\text{centre}}} = 40{,}9\,\%\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du pourcentage trouvé est correct, compris entre 0 % et 100 %.

b. Résoudre le problème L'équation (i) développée en **a.** sert à trouver le pourcentage d'irradiance en tout autre point :

$$\frac{I}{I_{\text{centre}}} = \cos^2\left(\frac{\pi dy}{\lambda L}\right)$$

$$= \cos^2\left(\frac{\pi\times(0{,}150\times10^{-3}\,\mathrm{m})\times(10{,}55\times10^{-3}\,\mathrm{m})}{(625\times10^{-9}\,\mathrm{m})\times(4{,}30\,\mathrm{m})}\right) = 0{,}075\,9$$

$$\frac{I}{I_{\text{centre}}} = 7{,}59\,\%\ . \qquad \text{(réponse)}$$

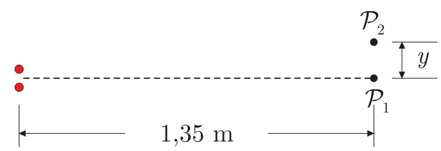
Valider la réponse Le pourcentage trouvé est compris entre 0 % et 100 %.

c. Résoudre le problème Selon l'équation (i) développée en **a.**, on a

$$
\begin{aligned}
\frac{I}{I_{\text{centre}}} &= \cos^2\left(\frac{\pi d y}{\lambda L}\right) \\
&= \cos^2\left(\frac{\pi \times (0{,}150 \times 10^{-3}\,\text{m}) \times (17{,}92 \times 10^{-3}\,\text{m})}{(625 \times 10^{-9}\,\text{m}) \times (4{,}30\,\text{m})}\right) = 1{,}000 \\
\frac{I}{I_{\text{centre}}} &= 100\,\% \ . \qquad \text{(réponse)}
\end{aligned}
$$

Valider la réponse Le pourcentage trouvé est compris entre 0 % et 100 %.

P15 Illustrer la situation La figure ci-contre illustre les deux sources et les deux points analysés.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$P = 55{,}0\,\text{mW}$	$I_{y=0}$
$d = 1{,}20\,\text{cm}$	$I_{y=20{,}0\,\text{cm}}$
$f = 58{,}8\,\text{GHz}$	
$L = 1{,}35\,\text{m}$	

a. Identifier la clé La clé est l'équation 4.26 de l'irradiance en fonction de la distance à une source.

Résoudre le problème En un point situé à 1,35 m de chacune des deux sources, l'interférence sera parfaitement constructive, car les sources émettent en phase et les longueurs de marche sont identiques. Le déphasage étant nul entre les deux ondes, l'irradiance est donnée par l'équation 7.27 :

$$I_{(2)} = 4I_{(1)} \cos^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) = 4I_{(1)} \cos^2\left(\frac{0}{2}\right) = 4I_{(1)} \ .$$

L'irradiance d'une seule source à la distance de 1,35 m est donnée par l'équation 4.26 :

$$
\begin{aligned}
I_{(1)} &= \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{P}{4\pi L^2} \qquad \text{(i)} \\
I_{(2)} &= 4I_{(1)} = 4 \times \frac{P}{4\pi L^2} = \frac{P}{\pi L^2} \\
I_{(2)} &= \frac{55{,}0\,\text{mW}}{\pi \times (1{,}35\,\text{m})^2} = 9{,}61\,\text{mW/m}^2 \ . \qquad \text{(réponse)}
\end{aligned}
$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'irradiance trouvée est correct, la valeur étant inférieure à la puissance d'une source après répartition de l'énergie dans l'espace.

b. Identifier la clé La clé est l'équation 7.28 du déphasage entre deux ondes.

Résoudre le problème L'équation 7.27 requiert qu'on détermine le déphasage $\Delta\Phi$ entre les deux ondes à une distance $y = 20{,}0\,\text{cm}$, ce qui demande également la détermination de la position angulaire θ. Selon l'équation 7.11,

$$\tan\theta = \frac{y}{L} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arctan\frac{y}{L} \ .$$

Considérant que $\lambda = \frac{c}{f}$, le déphasage est alors

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin\left(\arctan\frac{y}{L}\right)}{\left(\frac{c}{f}\right)} = \frac{2\pi f d \sin\left(\arctan\frac{y}{L}\right)}{c} \ .$$

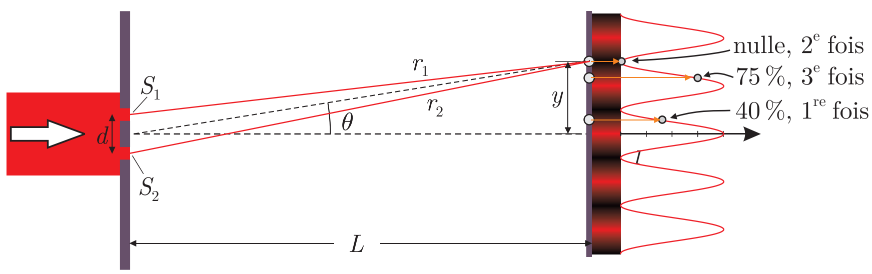
On peut insérer cette expression du déphasage dans l'équation 7.27, en utilisant également l'irradiance d'une source seule, développée en **a.** à la ligne (i) :

$$
\begin{aligned}
I_{(2)} &= 4I_{(1)}\cos^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) = 4\times\left(\frac{P}{4\pi L^2}\right)\times\cos^2\left(\frac{\left(\frac{2\pi f d\sin\left(\arctan\frac{y}{L}\right)}{c}\right)}{2}\right)\\
&= \frac{P}{\pi L^2}\times\cos^2\left(\frac{\pi f d\sin\left(\arctan\frac{y}{L}\right)}{c}\right)\\
&= \left(\frac{0{,}055\,\mathrm{W}}{\pi\times(1{,}35\,\mathrm{m})^2}\right)\times\cos^2\left(\frac{\pi\times(58{,}8\times10^9\,\mathrm{Hz})\times(0{,}012\,0\,\mathrm{m})\times\sin\left(\arctan\frac{0{,}200\,\mathrm{m}}{1{,}35\,\mathrm{m}}\right)}{3{,}00\times10^8\,\mathrm{m/s}}\right)
\end{aligned}
$$

$$I_{(2)} = 2{,}11\,\mathrm{mW/m^2}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'irradiance trouvée est correct ; sa valeur se trouve effectivement sous la valeur maximale possible qui est la valeur au centre, trouvée en **a.**

P16 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre la figure d'interférence produite, avec la courbe de l'irradiance en fonction de la position.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\lambda = 578\,\mathrm{nm}$	$y_{40\,\%}$
$d = 0{,}400\,\mathrm{mm}$	$y_{75\,\%}$
$L = 1\,950\,\mathrm{cm}$	$y_{0\%,\ \mathrm{m}=2}$

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 7.27 de l'irradiance de la figure d'interférence.

Résoudre le problème L'irradiance en un point où le déphasage est Φ est

$$I_{(2)} = 4I_{(1)}\cos^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right), \qquad \text{avec} \qquad \Delta\Phi = \frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda}\ .$$

La fraction d'éclairement en un point correspond à

$$\frac{I_{(2)}}{4I_{(1)}}\ ,$$

donc

$$\frac{I_{(2)}}{4I_{(1)}} = \cos^2\left(\frac{1}{2}\frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda}\right)\ .$$

θ est donné par

$$\tan\theta = \frac{y}{L} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arctan\frac{y}{L}\ .$$

Toutes ces équations réunies admettent

$$\frac{I_{(2)}}{4I_{(1)}} = \cos^2\left(\frac{\pi d\sin(\arctan\frac{y}{L})}{\lambda}\right)\ .$$

On peut alors isoler la position y pour évaluer l'endroit où le pourcentage d'éclairement prend une valeur donnée (on trouvera par défaut le premier endroit où cela se produit, si on considère la première solution du terme $\arctan\theta$) :

$$y = L \tan \arcsin\left(\frac{\lambda}{\pi d} \arccos\sqrt{\frac{I_{(2)}}{4I_{(1)}}}\right) . \tag{i}$$

De là, on peut calculer la position où la proportion d'éclairement est de 40 %, soit 0,4 :

$$y = 1{,}950\,\mathrm{m} \times \tan \arcsin\left(\frac{578 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}}{\pi \times 0{,}400 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}} \arccos\sqrt{0{,}40}\right) = 0{,}795\,\mathrm{mm} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la position trouvée est correct pour cette figure d'interférence.

b. Identifier la clé La clé est le fait que l'angle de déphasage correspondant au troisième endroit où l'irradiance est de 75 % de celle au centre est 2π plus grand que le déphasage produisant cette fraction d'irradiance pour la première fois.

Résoudre le problème Le premier endroit où l'irradiance tombe à 75 % est sur l'épaulement du premier pic d'intensité. Le deuxième endroit se trouve donc sur l'augmentation précédant le deuxième pic, et le troisième endroit se trouve sur la diminution qui suit le deuxième pic. Ainsi, c'est un déphasage supérieur de 2π précisément au déphasage correspondant au premier point. On peut donc écrire

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda} + 2\pi ,$$

et alors l'équation 7.27 s'adapte légèrement :

$$I_{(2)} = 4I_{(1)} \cos^2\left(\frac{\Delta\Phi + 2\pi}{2}\right) .$$

Un traitement similaire à celui qu'on a fait en **a.** donne

$$\frac{I_{(2)}}{4I_{(1)}} = \cos^2\left(\frac{\pi d \sin(\arctan\frac{y}{L})}{\lambda} + \pi\right) ,$$

d'où

$$y = L \tan \arcsin\left(\frac{\lambda}{\pi d}\left(\arccos\sqrt{\frac{I_{(2)}}{4I_{(1)}}} - \pi\right)\right) .$$

On peut alors calculer la position pour la troisième occurrence de la proportion d'éclairement de 75% :

$$y = 1{,}950\,\mathrm{m} \times \tan \arcsin\left(\frac{578 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}}{\pi \times 0{,}400 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}}\left(\arccos\sqrt{0{,}75} - \pi\right)\right) = 3{,}29\,\mathrm{mm} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la position trouvée est correct. Cette position est plus éloignée que la position trouvée en **a.**, ce qui est cohérent.

c. Identifier la clé La clé est le fait qu'une irradiance nulle correspond à un endroit où le déphasage est un multiple demi-entier de π.

Résoudre le problème Le premier endroit où l'irradiance est nulle correspond à un déphasage de π entre les deux ondes. Le deuxième endroit où l'irradiance est nulle se trouve lorsque le déphasage est de 2π plus élevé que pour le premier endroit, c'est-à-dire lorsque

$$\Delta\Phi = \pi + 2\pi = 3\pi .$$

L'équation 7.28 permet de déterminer l'angle θ auquel cette condition est satisfaite :

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda} + 2\pi = 3\pi$$

$$\theta = \arcsin \frac{3\lambda}{2d} \ .$$

La position y est liée à cet angle par

$$\tan\theta = \frac{y}{L} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arctan \frac{y}{L} \ ,$$

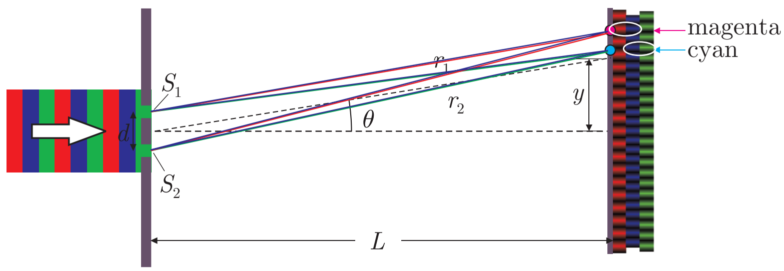
donc

$$\arcsin \frac{3\lambda}{2d} = \arctan \frac{y}{L}$$

$$y = L \tan \arcsin \frac{3\lambda}{2d} = 1{,}950\,\text{m} \times \tan \arcsin \left(\frac{3 \times 578 \times 10^{-9}\,\text{m}}{2 \times 0{,}400 \times 10^{-3}\,\text{m}} \right) = 4{,}23\,\text{mm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la position trouvée est correct, celle-ci étant au-delà du deuxième pic d'intensité (dont l'un des points a été trouvé en **b.**).

P17 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre simultanément la figure d'interférence produite par les trois types de lumière, avec les endroits où la superposition génère les couleurs magenta et cyan.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\lambda_B = 480\,\text{nm}$	y_{cyan}
$\lambda_V = 540\,\text{nm}$	y_{magenta}
$\lambda_R = 660\,\text{nm}$	
$d = 0{,}240\,\text{mm}$	
$L = 1{,}150\,\text{m}$	

a. **Identifier la clé** La clé consiste à déterminer le premier endroit où les longueurs d'onde du vert et du bleu produisent toutes deux un maximum.

Résoudre le problème Les équations 7.11 et 7.17, appliquées dans un cas où l'approximation des petits angles est possible (acceptable pour les premiers ordres du visible), donnent

$$d\theta \approx d \sin\theta = m\lambda \qquad \text{et} \qquad \theta \approx \tan\theta = \frac{y}{L} \ .$$

On peut donc affirmer que

$$\frac{dy}{L} = m\lambda \ . \qquad \text{(i)}$$

Le bleu et le vert ne produisent pas le même espacement entre les pics d'intensité sur la figure d'interférence, et l'équation (i) permet de déduire qu'en un point donné, une longueur d'onde plus faible produit un ordre d'interférence m plus élevé, c'est-à-dire que $m_B > m_V$. On cherche donc un endroit où le bleu et le vert produisent un maximum alors que $m_B = m_V + 1$:

$$\frac{dy}{L} = m_B\lambda_B \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{L} = m_V\lambda_V$$

$$m_V\lambda_V = m_B\lambda_B = (m_V + 1)\lambda_V$$

$$m_V = \frac{\lambda_B}{\lambda_V - \lambda_B} = \frac{480}{540 - 480} = 8 \ .$$

Ainsi, le 8^e maximum du vert est superposé au 9^e maximum du bleu, et si le rouge n'est pas à son maximum, on voit la couleur cyan. On peut déterminer l'endroit où cela se produit en réutilisant l'équation (i) pour l'une des deux longueurs d'onde :

$$y = \frac{m_V \lambda_V L}{d} = \frac{8 \times 540 \times 10^{-9}\,\mathrm{m} \times 1{,}150\,\mathrm{m}}{0{,}240 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 20{,}7\,\mathrm{mm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la position trouvée est correct. De plus, si on calcule l'irradiance du rouge à cet endroit, on trouve une irradiance de 2 % (à l'aide des équations 7.27 et 7.28). L'intensité du rouge n'altère donc pratiquement pas la couleur cyan.

b. **Identifier la clé** La clé consiste à déterminer le premier endroit où les longueurs d'onde du rouge et du bleu produisent toutes deux un maximum.

Résoudre le problème On peut reprendre l'équation (i) développée en **a.** pour trouver l'endroit recherché :

$$\frac{dy}{L} = m_R \lambda_R \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{L} = m_B \lambda_B\ .$$

Pour les mêmes raisons qu'en **a.**, on peut établir que le bleu sera encore à un ordre plus élevé que le rouge à tout endroit de la figure d'interférence, $m_B > m_R$. On cherche donc un endroit où le bleu et le vert produisent un maximum alors que $m_B = m_R + 1$:

$$\begin{aligned} m_R \lambda_R = m_B \lambda_B &= (m_R + 1)\lambda_R \\ m_R &= \frac{\lambda_B}{\lambda_R - \lambda_B} = \frac{480}{660 - 480} = 2{,}67\ . \end{aligned}$$

Les ordres du bleu et du rouge ne sont donc pas voisins. On vérifie le cas $m_B = m_V + 2$:

$$\begin{aligned} m_R \lambda_R &= (m_R + 2)\lambda_R \\ m_R &= \frac{2\lambda_B}{\lambda_V - \lambda_B} = \frac{2 \times 480}{660 - 480} = 5{,}33\ . \end{aligned}$$

On doit l'exclure également. On entrevoit que le cas $m_B = m_V + 3$ sera le bon :

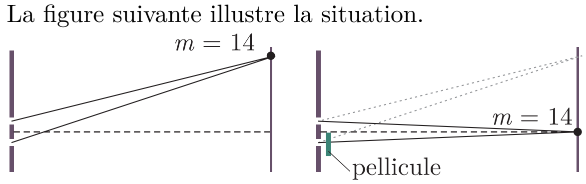
$$\begin{aligned} m_R \lambda_R &= (m_R + 3)\lambda_R \\ m_R &= \frac{3\lambda_B}{\lambda_V - \lambda_B} = \frac{2 \times 480}{660 - 480} = 8\ . \end{aligned}$$

Ainsi, le 8^e maximum du rouge est superposé au 11^e maximum du bleu, et si le vert n'est pas à son maximum, on voit la couleur magenta. On peut déterminer l'endroit où cela se produit en réutilisant l'équation (i) pour l'une des deux longueurs d'onde :

$$y = \frac{m_R \lambda_R L}{d} = \frac{8 \times 660 \times 10^{-9}\,\mathrm{m} \times 1{,}150\,\mathrm{m}}{0{,}240 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 25{,}3\,\mathrm{mm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la position trouvée est correct. De plus, si on calcule l'irradiance du vert à cet endroit, on trouve une irradiance de 59 % (à l'aide des équations 7.27 et 7.28). L'intensité du vert rend la couleur magenta plus pâle, mais la teinte est la même.

P18 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre la situation.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\lambda = 632{,}8\,\text{nm}$	l
$n = 1{,}43$	
$m = 14$	

Identifier la clé La clé est le fait que la longueur de marche pour l'une des deux ondes est allongée de 14λ.

Résoudre le problème Si l'une des deux ondes effectue 14 cycles de plus que l'autre, c'est que le nombre total de longueurs d'onde entre les fentes et l'écran diffère de cette quantité, c'est-à-dire que la quantité $N_{\text{pell}} - N_{\text{air}} = 14$ sur une distance correspondant à l'épaisseur l de la pellicule. En tenant compte de la longueur d'onde dans un milieu d'indice n, on trouve

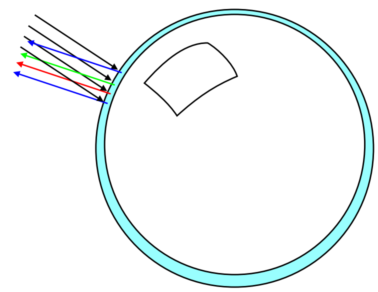
$$N_{\text{pell}} - N_{\text{air}} = \frac{nl}{\lambda} - \frac{1l}{\lambda} = 14$$

$$l = \frac{14\lambda}{n-1} = \frac{14 \times 632{,}8 \times 10^{-9}\,\text{m}}{1{,}43 - 1} = 21\,\mu\text{m} \;. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'épaisseur trouvée est correct.

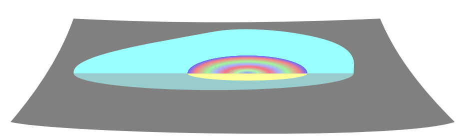
Q19 **Résoudre le problème** Les différentes couleurs des franges d'interférence produites par une bulle de savon sont dues à l'épaisseur variable de la pellicule d'eau savonneuse. L'eau étant un fluide, les différentes forces (dont la force gravitationnelle) produisent des variations dans l'épaisseur de la pellicule, et ainsi des variations dans la position des franges d'une couleur donnée.

Par exemple, pour une bulle flottant dans l'air, la force gravitationnelle fait en sorte que la pellicule de la partie supérieure de la bulle s'amincit au profit de la partie inférieure, comme l'illustre la figure ci-contre. On y voit quelques rayons de lumière blanche qui sont réfléchis en produisant de l'interférence (des rayons de couleurs différentes).



Q20 **Résoudre le problème** Tous les points formant un cercle de même couleur dans la figure colorée qu'on aperçoit sur une flaque d'eau sont des points de même épaisseur de la pellicule. Si les franges sont circulaires, on devine alors que la forme de la pellicule présente une symétrie circulaire.

Finalement, la logique permet aussi de déduire que la pellicule est plus épaisse au centre et de plus en plus mince vers la périphérie : une certaine quantité d'un liquide plus léger que l'eau s'étend à partir d'un centre. La forme de la pellicule est donc celle qui est représentée sur la figure ci-contre, où on voit une vue en coupe du volume d'eau dans une flaque.



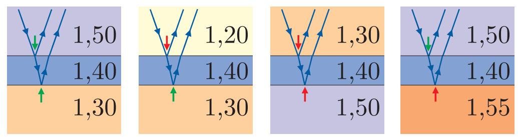
Q21 **Identifier la clé** La clé est le fait qu'une réflexion dure produit un déphasage supplémentaire de π.

Résoudre le problème Une réflexion dure se produit lorsque le rayon frappe un milieu d'indice plus élevé. Dans le milieu d'indice 1,40, la longueur d'onde est $L/1{,}40$ et le nombre de longueurs d'onde parcourues par le rayon faisant l'aller-retour dans la pellicule pour réfléchir sur sa surface inférieure est précisément 2 :

$$N = \frac{nr}{\lambda} = \frac{1{,}40(2L)}{\lambda} = \frac{1{,}40(2\frac{\lambda}{1{,}40})}{\lambda} = 2 \;.$$

Si on ne considère que la distance supplémentaire parcourue par l'une des deux ondes, l'interférence entre les ondes réfléchies sera constructive. Le seul facteur pouvant causer une interférence destructive sera un déphasage produit par une réflexion dure sur l'une des surfaces. Puisque chaque réflexion dure entraîne un déphasage supplémentaire de π, l'interférence destructive n'apparaît que s'il ne se produit qu'une réflexion dure sur les deux réflexions présentes.

Dans le cas (i), les deux réflexions se font à la rencontre d'une surface d'indice plus faible ($1{,}40 < 1{,}50$ et $1{,}30 < 1{,}40$). Ce sont donc deux réflexions molles (flèches vertes sur la figure i). L'interférence demeure donc constructive.



(i) (ii) (iii) (iv)

Dans le cas (ii), seule la première réflexion est dure ($1{,}40 > 1{,}20$, flèche rouge sur la figure (ii)), ce qui ajoute 1π au déphasage pour produire de l'interférence destructive.

Dans le cas (iii), les deux réflexions sont dures ($1{,}40 < 1{,}30$ et $1{,}50 < 1{,}40$, flèches vertes sur la figure iii). L'ajout de 2π au déphasage produit à nouveau de l'interférence constructive.

Dans le cas (iv), seule la seconde réflexion est dure ($1{,}55 > 1{,}40$, flèche rouge sur la figure (iv)), ce qui ajoute 1π au déphasage et produit de l'interférence destructive.

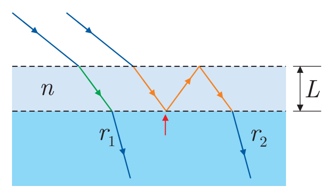
Les situations (ii) et (iv). (réponse)

Q22 **a.** **Identifier la clé** La clé est l'équation 7.6 du nombre de longueurs d'onde dans un milieu.

Résoudre le problème Le nombre N de longueurs d'onde recherché est

$$N_1 = \frac{nr}{\lambda} ,$$

où la distance r parcourue dans le milieu est l'épaisseur L (la section verte du rayon r_1 sur la figure ci-contre) :



$$N_1 = \frac{nL}{\lambda} . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier les clés** Les clés sont l'équation 7.30 et le fait que le rayon r_2 parcourt trois fois l'épaisseur L.

Résoudre le problème Pour le rayon r_2, la distance r parcourue dans le milieu est égale à $3L$ (la section orange du rayon r_2 sur la figure ci-dessus) et, durant l'aller-retour, deux réflexions se produisent, dont l'une est dure (vis-à-vis la flèche rouge sur la figure, la réflexion sur l'eau après la première des trois traversées) :

$$N_2 = \frac{nr}{\lambda} + N_{\text{réfl}} = \frac{n \times 3L}{\lambda} + \frac{1}{2} = \frac{3Ln}{\lambda} + \frac{1}{2} . \qquad \text{(réponse)}$$

c. **Identifier la clé** La clé est la différence entre N_1 et N_2.

Résoudre le problème Le déphasage entre les deux ondes est

$$N_2 - N_1 = \left(\frac{3Ln}{\lambda} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{nL}{\lambda}\right) = \frac{2Ln}{\lambda} + \frac{1}{2} . \qquad \text{(réponse)}$$

E23 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$n_{\text{Li}} = 1{,}36$	$(N_2 - N_1)_{\text{violet}}$
$n_{\text{verre}} = 1{,}58$	$(N_2 - N_1)_{\text{vert}}$
$l = 101\,\text{nm}$	$(N_2 - N_1)_{\text{rouge}}$
$\lambda_1 = 400\,\text{nm}$	
$\lambda_1 = 550\,\text{nm}$	
$\lambda_1 = 680\,\text{nm}$	

Identifier les clés Les clés sont les équations 7.29 et 7.30 du nombre de longueurs d'onde de déphasage entre deux ondes.

Résoudre le problème Peu importe la longueur d'onde, les deux rayons réfléchis subissent deux réflexions dures puisque $n_{\text{Li}} > n_{\text{air}}$ et $n_{\text{verre}} > n_{\text{Li}}$. Pour les trois longueurs d'onde, on sait alors que $N_1 = \frac{1}{2}$.

Pour le deuxième rayon, l'équation 7.30 permet de déterminer N_2 :

$$N_2 = \frac{n_2 r_2}{\lambda} + N_{\text{réfl}} \; .$$

La distance r_2 parcourue dans le fluorure de lithium avant d'en émerger est le double de l'épaisseur de la pellicule, et la réflexion subie est une réflexion dure :

$$N_2 = \frac{n_{\text{Li}} \times 2l}{\lambda} + \frac{1}{2} \; .$$

Le déphasage entre les deux ondes est donc

$$N_2 - N_1 = \left(\frac{n_{\text{Li}} \times 2l}{\lambda} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2n_{\text{Li}}l}{\lambda} \; .$$

On peut utiliser cette équation pour déterminer le déphasage pour chacune des trois longueurs d'onde données.

a. Résoudre le problème Pour $\lambda = 400\,\text{nm}$, on a

$$(N_2 - N_1)_{\text{violet}} = \frac{2n_{\text{Li}}l}{\lambda} = \frac{2 \times 1{,}36 \times 101\,\text{nm}}{400\,\text{nm}} = 0{,}687 \; . \qquad \text{(réponse)}$$

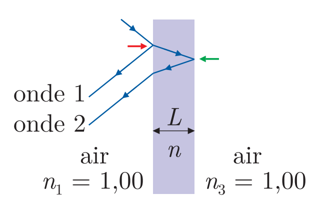
b. Résoudre le problème Pour $\lambda = 400\,\text{nm}$, on a

$$(N_2 - N_1)_{\text{vert}} = \frac{2n_{\text{Li}}l}{\lambda} = \frac{2 \times 1{,}36 \times 101\,\text{nm}}{550\,\text{nm}} = 0{,}499 \; . \qquad \text{(réponse)}$$

c. Résoudre le problème Pour $\lambda = 400\,\text{nm}$, on a

$$(N_2 - N_1)_{\text{rouge}} = \frac{2n_{\text{Li}}l}{\lambda} = \frac{2 \times 1{,}36 \times 101\,\text{nm}}{680\,\text{nm}} = 0{,}404 \; . \qquad \text{(réponse)}$$

E24 Illustrer la situation La figure ci-contre illustre la pellicule produisant de l'interférence.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$l = 800\,\text{nm}$	n
$\lambda = 626\,\text{nm}$	$m_{487\,\text{nm}}$
$m_{626\,\text{nm}} = 3$	

a. Identifier les clés Les clés sont les équations 7.29 et 7.30 du nombre de longueurs d'onde des deux ondes interagissant avec le milieu.

Résoudre le problème Pour la lumière réfléchissant sur la première face, la réflexion subie est dure (car l'indice de tout milieu solide est supérieur à celui de l'air). Ainsi, on sait que $N_1 = \frac{1}{2}$.
Pour la lumière faisant un aller-retour dans la pellicule, la réflexion subie n'est pas une réflexion dure, car le rayon frappe l'air en se déplaçant dans la pellicule d'indice plus élevé. Ainsi, selon l'équation 7.30,

$$N_2 = \frac{n_2 r_2}{\lambda} + N_{\text{réfl}} = \frac{n \times 2l}{\lambda} + 0 = \frac{2nl}{\lambda} \ .$$

Le déphasage exprimé en nombre de longueurs d'onde est donc

$$N_2 - N_1 = \frac{2nl}{\lambda} - \frac{1}{2} \ . \qquad \text{(i)}$$

Par ailleurs, si on indique que la lumière orange est amplifiée au troisième ordre, cela signifie qu'il y a une différence de trois longueurs d'onde dans les deux chemins parcourus :

$$N_2 - N_1 = \frac{2nl}{\lambda} - \frac{1}{2} = 3$$

$$n = \frac{3{,}5\lambda}{2l} = \frac{3{,}5 \times 626\,\text{nm}}{2 \times 800\,\text{nm}} = 1{,}37 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'indice de réfraction trouvé est correct.

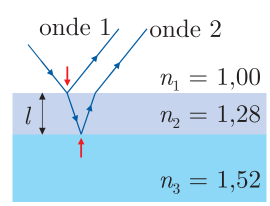
b. Identifier la clé La clé est l'équation (i) développée en **a.**

Résoudre le problème L'ordre d'interférence auquel est amplifiée une autre longueur d'onde est directement le déphasage exprimé en nombre de longueurs d'onde à l'aide de l'indice de réfraction trouvé en **a.** :

$$m_c = N_2 - N_1 = \frac{2nl}{\lambda} - \frac{1}{2} = \frac{2 \times 1{,}37 \times 800\,\text{nm}}{487\,\text{nm}} - \frac{1}{2} = 4 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La valeur de l'ordre d'interférence trouvée est correcte, car elle est un entier voisin de la valeur traitée en **a.**

E25 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la couche de silice produisant de l'interférence.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$n_{\text{verre}} = 1{,}52$	λ_{m_d}
$n_{\text{silice}} = 1{,}28$	λ_{m_c}

a. Identifier la clé La clé est le fait que chaque rayon réfléchi subit une réflexion dure.

Résoudre le problème Le rayon réfléchissant sur la première surface de la pellicule subit une réflexion dure, ce qui entraîne $N_1 = \frac{1}{2}$.
Le rayon traversant la pellicule de silice aller-retour subit une réflexion dure en plus de parcourir deux fois son épaisseur :

$$N_2 = \frac{n_2 r_2}{\lambda} + N_{\text{réfl}} = \frac{n_2(2l)}{\lambda} + \frac{1}{2}, \qquad \text{avec} \qquad n_2 = n_{\text{silice}} \ .$$

Pour une longueur d'onde absente, la différence $N_2 - N_1$ doit être un demi-entier :

$$N_2 - N_1 = m_d + \frac{1}{2} \ .$$

Pour déterminer m_d, on peut trouver les valeurs qui correspondraient aux extrémités du domaine visible (400 à 700 nm) :

$$N_2 - N_1 = m_d + \frac{1}{2} = \left(\frac{2nl}{\lambda} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2nl}{\lambda}$$

$$m_d = \frac{2nl}{\lambda} - \frac{1}{2} \ .$$

Erratum

Solutions détaillées, p. 20, P25, en lien avec manuel, p.264, E25. La solution présentée est rédigée comme si l'énoncé du manuel disait :

> «a. Déterminez la longueur d'onde **visible** qui est absente de la lumière réfléchie.
> b. Quelles sont les longueurs d'onde **visibles** présentant une ...»

Ainsi, il faudrait soit modifier l'énoncé du manuel, soit corriger la solution où, plutôt que de chercher les valeurs qui correspondraient aux extrémités du domaine, il faudrait écrire :

en a.

$$N_2 - N_1 = m_d + \frac{1}{2} = \left(\frac{n_2(2\ell)}{\lambda} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{n_2(2\ell)}{\lambda} \qquad m_d \in \mathbb{N}$$

$$\lambda = \frac{n_2(2\ell)}{m_d + \frac{1}{2}} = \frac{1}{m_d + \frac{1}{2}}(2 \cdot 1,28 \cdot 500 \text{ nm})$$

$$\lambda = \frac{1}{m_d + \frac{1}{2}} 1280 \text{ nm} = \{2560, 853, 512, 365, ...\}$$

en b.

$$\Delta N = \frac{n_2(2\ell)}{\lambda} = m_c \qquad \Delta N \text{ défini précédemment, } m_c \in \mathbb{N}^*$$

$$\lambda = \frac{n_2(2\ell)}{m_c} = \frac{1}{m_c}(2 \cdot 1,28 \cdot 500 \text{ nm})$$

$$\lambda = \frac{1}{m_c} 1280 \text{ nm} = \{1280, 640, 427, 320, ...\}$$

Aux extrémités du visible, cette équation donne

$$m_{d,400\,\text{nm}} = 2{,}7 \qquad \text{et} \qquad m_{d,700\,\text{nm}} = 1{,}32\ .$$

Le seul ordre d'interférence destructive compris entre ces deux valeurs inexactes est l'ordre 2. On sait donc que

$$m_d = \frac{2n_2 l}{\lambda} - \frac{1}{2} = 2$$
$$\lambda = \frac{2n_2 l}{2{,}5} = 512\,\text{nm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La longueur d'onde trouvée fait bel et bien partie du domaine visible.

b. Résoudre le problème Si on applique un traitement semblable à ce qui est fait en **a.** pour l'interférence constructive, à l'aide de l'équation 7.31, on obtient :

$$N_2 - N_1 = m_c = \left(\frac{2n_2 l}{\lambda} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2n_2 l}{\lambda}$$
$$m_c = \frac{2n_2 l}{\lambda}\ .$$

On peut à nouveau déterminer les ordres compris dans le domaine visible en traitant les extrémités du domaine :

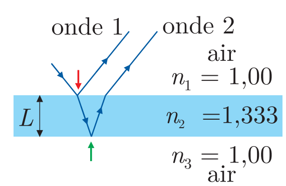
$$m_{c,400\,\text{nm}} = 3{,}2 \qquad \text{et} \qquad m_{c,700\,\text{nm}} = 1{,}8\ .$$

Les ordres d'interférence constructive 2 et 3 sont compris dans le domaine visible. On trouve donc

$$m_{d,1} = \frac{2n_2 l}{\lambda} = 3 \qquad \text{et} \qquad m_{d,2} = \frac{2n_2 l}{\lambda} = 2$$
$$\lambda_1 = \frac{2n_2 l}{3} = \frac{2 \times 1{,}28 \times 500\,\text{nm}}{3} = 427\,\text{nm}$$
$$\lambda_2 = \frac{2n_2 l}{2} = \frac{2 \times 1{,}28 \times 500\,\text{nm}}{2} = 640\,\text{nm}$$
$$\lambda_1 = 427\,\text{nm} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = 640\,\text{nm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Les longueurs d'onde trouvées font bel et bien partie du domaine visible.

P26 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la pellicule d'eau savonneuse produisant de l'interférence.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$n_2 = 1{,}333$	L
$\lambda_c = 640\,\text{nm}$	
$\lambda_d = 480\,\text{nm}$	

Identifier la clé La clé est le fait que les longueurs d'onde mentionnées présentent de l'interférence pour des ordres voisins, car aucune autre longueur d'onde ne produit d'interférence constructive ou destructive.

Résoudre le problème L'onde de 480 nm étant plus courte, elle présente une plus grande quantité de longueurs d'onde à l'intérieur de la pellicule que l'onde de 640 nm. Ainsi, l'ordre de l'interférence pour λ_c est le même que pour λ_d, l'ajout de $\frac{1}{2}$ suffisant à distinguer les deux types d'interférence.

Pour les deux longueurs d'onde, le rayon réfléchissant sur la première surface subit une réflexion dure :

$$N_1 = \frac{1}{2}\ .$$

Pour les deux ondes également, le rayon réfléchissant sur la seconde surface subit aussi une réflexion dure :

$$N_2 = \frac{n_2 r_2}{\lambda} + N_{\text{réfl}} = \frac{n_2(2L)}{\lambda} + \cancel{\frac{1}{2}} .$$

Le déphasage peut être exprimé en nombre de longueurs d'onde pour λ_1 :

$$N_2 - N_1 = m_c = \frac{2n_2L}{\lambda_1} - \frac{1}{2} , \qquad \text{(i)}$$

et pour λ_2 :

$$N_2 - N_1 = m_d + \frac{1}{2} = \frac{2n_2L}{\lambda_2} - \frac{1}{2} . \qquad \text{(ii)}$$

L'égalité des ordres d'interférence $m_c = m_d = m$ permet de réduire les équations (i) et (ii) à un système de deux équations et deux inconnues :

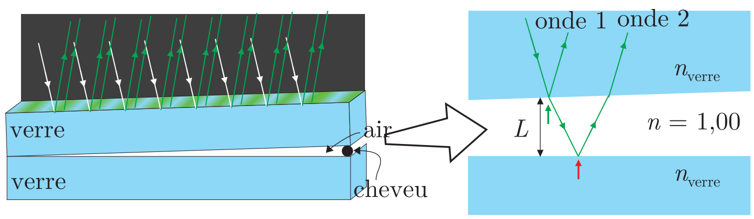
$$m = \frac{2n_2L}{\lambda_1} - \cancel{\frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad m = \frac{2n_2L}{\lambda_2} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{2n_2L}{\lambda_1} - \cancel{\frac{1}{2}} = \frac{2n_2L}{\lambda_2} - \frac{1}{2}$$

$$L = \frac{1}{4n\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)} = \frac{1}{4 \times 1{,}333\left(\frac{1}{480\,\text{nm}} - \frac{1}{640\,\text{nm}}\right)} = 360\,\text{nm} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'épaisseur trouvée est correct.

P27 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre le coin d'air produisant de l'interférence.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$l = 6{,}50\,\text{cm}$	d
$N = 87$	
$\lambda = 546\,\text{nm}$	

Identifier la clé La clé consiste à déterminer la différence d'épaisseur du coin d'air sur la distance horizontale entre deux franges voisines.

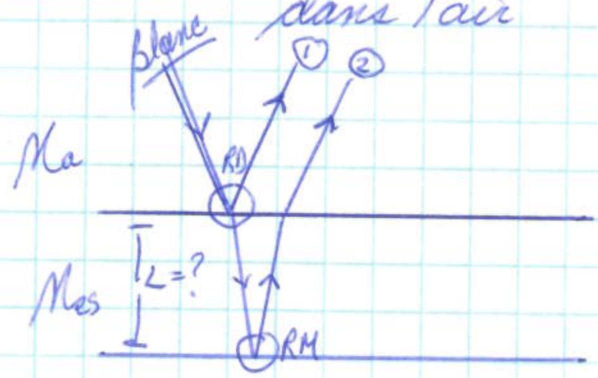
Résoudre le problème À l'extrémité où les lames se touchent, l'onde 1 réfléchie a frappé l'air et a subi une réflexion molle (flèche verte sur le schéma) et l'onde 2 réfléchie a frappé le verre et a subi une réflexion dure (flèche rouge), ce qui donne les relations suivantes :

$$N_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad N_2 = \frac{2Ln}{\lambda} + \frac{1}{2} .$$

Puisque les lames se touchent, la distance L à cet endroit est nulle, et le déphasage résultant est

$$N_2 - N_1 = \left(\frac{2Ln}{\lambda} + \frac{1}{2}\right) - 0 = \left(\frac{2 \times 0 \times n}{\lambda} + \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{1}{2} .$$

4F26 Pellicule d'eau savonneuse $n = 1.333$
dans l'air



i) ① + ② = ICC si $\lambda = 640$ nm

ii) ① + ② = IDC si $\lambda' = 480$ nm

$$\Delta N = \begin{cases} m_c \text{ si ICC} \\ m_d + \frac{1}{2} \text{ si IDC} \end{cases}$$ Voir * $m_c - m_d = 0$

m_c & $m_d \in \mathbb{Z}$

et $|m_c - (m_d + \frac{1}{2})| = \frac{1}{2}$ car interf intermédiaire pr les autres λ.

$\Delta N = N_2 - N_1$

$N_1 = \frac{1}{2}$ (RD)
$N_2 = 2 \cdot L \cdot \frac{n_{es}}{\lambda}$

$$\Delta N = \frac{2 n_{es} L}{\lambda \uparrow}\Big\downarrow - \frac{1}{2} = m_c \quad *$$

$$\text{et } \Delta N' = \frac{2 n_{es} L}{\lambda'} - \frac{1}{2} = m_d + \frac{1}{2}$$

$\lambda > \lambda'$
$\Delta N < \Delta N'$
$m_c < m_d + \frac{1}{2}$
$m_c = m_d$
$0 < \frac{1}{2}$
$1 \quad 1\frac{1}{2}$

$$m_c = m_d \Leftrightarrow 2\frac{n_{es} L}{\lambda'} - 1 = 2\frac{n_{es} L}{\lambda} - \frac{1}{2}$$

$$2 n_{es} L \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{2}$$

$$L = \frac{1}{4 n_{es}} \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{4 \cdot 1{,}333} \cdot \left(\frac{1}{480\text{nm}} - \frac{1}{640\text{nm}}\right)^{-1}$$

$$\boxed{L = 360 \text{ nm}}$$

* Si $\lambda \downarrow$ alors $\Delta N \uparrow$

Comme $\lambda > \lambda'$,
$\Delta N < \Delta N'$
$m_c < m_d + \frac{1}{2}$

donc $\boxed{m_c = m_d}$
pour avoir des ordres consécutifs tel que
$1 < 1{,}5$
$2 < 2{,}5$
$3 < 3{,}5$ etc.

C'est donc une frange sombre que l'on trouve au point de contact des lames.
À l'autre bout, si 87 franges brillantes s'étendent le long des lames (la 87^e vis-à-vis du cheveu), le déphasage est de 86,5 unités plus élevé, soit

$$N_2 - N_1 = \frac{1}{2} + 86{,}5 = 87\ .$$

La distance $L = d$ entre les lames produisant ce déphasage est trouvée à partir des longueurs de marche N_1 et N_2 :

$$N_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad N_2 = \frac{2dn}{\lambda} + \frac{1}{2}\ ,$$

où n est l'indice de réfraction de l'air, 1,00 :

$$N_2 - N_1 = \frac{2dn}{\lambda} + \frac{1}{2} - 0 = 87$$

$$d = \frac{86{,}5\lambda}{2n} = \frac{86{,}5 \times 546\,\text{nm}}{2 \times 1{,}00} = 23{,}6\,\mu\text{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

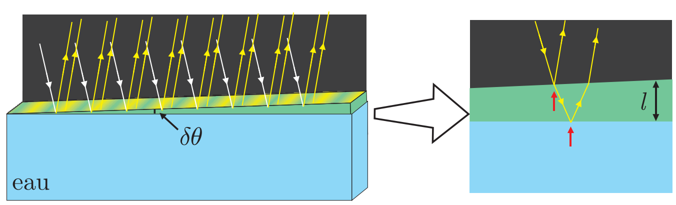
Valider la réponse L'ordre de grandeur du diamètre trouvé est correct pour un objet aussi mince qu'un cheveu.

P28 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$n = 1{,}27$	θ_{surfaces}
$\lambda = 589\,\text{nm}$	
$(N_2 - N_1)_{1\,\text{cm}} = 17$	

a. **Identifier la clé** La clé est le fait que les variations dans l'interférence sont dues à la variation de la différence de marche entre deux ondes.

Résoudre le problème À certains endroits de la surface, l'épaisseur est telle que de l'interférence constructive se produit entre les ondes réfléchissant sur les deux faces du film de liquide, alors qu'à d'autres endroits, l'épaisseur produit plutôt de l'interférence destructive. Des franges brillantes et sombres apparaissent alors en alternance, selon l'épaisseur variable du film de liquide. La figure suivante illustre la configuration.



L'épaisseur du film n'est pas constante. (réponse)

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que, sur la distance de 1 cm, l'onde traversant aller-retour le film de liquide parcourt une distance variant de 17 longueurs d'onde.

Résoudre le problème Le nombre de réflexions dures ne change pas selon l'emplacement où le rayon lumineux interagit. Seule la variation d'épaisseur sur 1 cm entraîne une différence de marche de $17\lambda_n$. Puisque l'épaisseur l du film est parcourue deux fois (aller-retour), on a

$$17\lambda_n = 2l$$

$$l = \frac{17\lambda_n}{2} = \frac{17(\frac{\lambda}{n})}{2} = \frac{17\lambda}{2n}$$

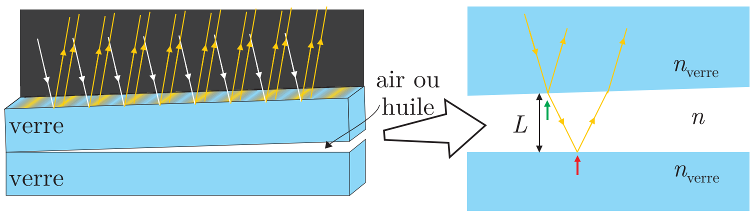
$$l = \frac{17 \times 589\,\text{nm}}{2 \times 1{,}27} = 5{,}00 \times 10^{-6}\,\text{m}\ .$$

L'angle entre les deux faces du liquide (et faisant en sorte que la différence d'épaisseur observée sur une distance de 1 cm est de 17λ) est donné par

$$\delta\theta = \arctan\frac{l}{1\,\text{cm}} = \arctan\frac{5{,}00\times10^{-6}\,\text{m}}{0{,}01\,\text{m}} = 0{,}022\,6^\circ\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'angle trouvé est correct, cet angle devant être très faible pour que les franges soient observables avec une longueur d'onde aussi faible.

P29 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre le coin d'air produisant de l'interférence.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\lambda = 580\,\text{nm}$	n
$(N_2 - N_1)_{\text{air},1\,\text{cm}} = 5$	
$(N_2 - N_1)_{\text{huile},4{,}7\,\text{cm}} = 32$	

Identifier la clé La clé consiste à déterminer la différence d'épaisseur par centimètre du coin d'air à partir des conditions d'interférence.

Résoudre le problème La différence d'épaisseur entre deux endroits distants de 1 cm le long des lames est liée au déphasage entre les ondes, qui varie de 5λ sur cette distance. Puisque l'épaisseur du coin d'air est parcourue deux fois par un rayon, on peut affirmer que

$$2l = 5\lambda \qquad \Rightarrow \qquad l = \frac{5\lambda}{2}\ .$$

La différence d'épaisseur l sur 1 cm permet d'établir la différence d'épaisseur l' sur une distance de 4,7 cm :

$$\frac{l}{1\,\text{cm}} = \frac{l'}{4{,}7\,\text{cm}}$$
$$l' = 4{,}7\,\text{cm}\times\frac{l}{1\,\text{cm}} = 4{,}7\times\frac{5\lambda}{2}\ .$$

Cette différence d'épaisseur l' entraîne un déphasage de 32λ lorsque le milieu entre les lames présente un indice n à déterminer. L'épaisseur l' étant toujours parcourue deux fois, on peut écrire

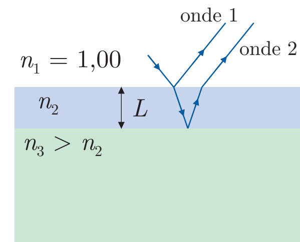
$$2l' = 32\lambda_n \qquad \Rightarrow \qquad l' = \frac{32(\frac{\lambda}{n})}{2} = \frac{32\lambda}{2n}\ ,$$

et alors

$$\frac{32\lambda}{2n} = 4{,}7\times\frac{5\lambda}{2}$$
$$n = \frac{32}{4{,}7\times5} = 1{,}36\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'indice de réfraction trouvé est correct.

P30 **Illustrer la situation** La figure suivante montre la lumière incidente qui est divisée en deux lors de la réflexion et la réfraction.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$L = 350\,\text{nm}$	n
$\lambda_c = 510\,\text{nm}$	$\lambda_{d,2}$
$\lambda_{d,1} = 680\,\text{nm}$	

a. Identifier la clé La clé est le fait que les deux longueurs d'onde mentionnées présentent des déphasages différents de π rad.

Résoudre le problème La longueur d'onde amplifiée étant plus faible que la longueur d'onde atténuée, le déphasage exprimé en nombre de longueurs d'onde est plus grand d'une quantité $\frac{\lambda}{2}$. Ainsi, pour λ_c, on a

$$N_1 = N_{\text{réfl},1} \qquad \text{et} \qquad N_2 = \frac{2Ln}{\lambda_c} + N_{\text{réfl},2} \ .$$

On ignore les valeurs N impliquées, mais c'est leur différence qui compte et qui permet de déterminer l'indice de réfraction. On peut exprimer le déphasage par

$$(N_2 - N_1)_c = \frac{2Ln}{\lambda_c} + N_{\text{réfl},2} - N_{\text{réfl},1} \ .$$

Pour $\lambda_{d,1}$, on a

$$N_1 = N_{\text{réfl},1} \qquad \text{et} \qquad N_2 = \frac{2Ln}{\lambda_{d,1}} + N_{\text{réfl},2} \ ,$$

et le déphasage est

$$(N_2 - N_1)_{d,1} = \frac{2Ln}{\lambda_{d,1}} + N_{\text{réfl},2} - N_{\text{réfl},1} \ .$$

Comme il est mentionné, puisque les longueurs d'onde considérées produisent de l'interférence au même ordre, on peut affirmer que nullement mentionné dans l'énoncé de la question.

$$(N_2 - N_1)_{d,1} = (N_2 - N_1)_c + \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{2Ln}{\lambda_c} + N_{\text{réfl},2} - N_{\text{réfl},1}\right) = \left(\frac{2Ln}{\lambda_{d,1}} + N_{\text{réfl},2} - N_{\text{réfl},1}\right) + \frac{1}{2}$$

$$\frac{2Ln}{\lambda_c} = \frac{2Ln}{\lambda_{d,1}} + \frac{1}{2}$$

$$n = \frac{1}{4L\left(\frac{1}{\lambda_c} - \frac{1}{\lambda_{d,1}}\right)} = \frac{1}{4 \times 350\,\text{nm}\left(\frac{1}{510\,\text{nm}} - \frac{1}{680\,\text{nm}}\right)} = 1{,}46 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'indice de réfraction trouvé est correct.

b. Identifier la clé La clé est l'expression de la différence $N_2 - N_1$ pour une longueur d'onde inférieure à $510\,\text{nm}$.

Résoudre le problème Puisque les longueurs d'onde de $510\,\text{nm}$ et de $680\,\text{nm}$ produisent de l'interférence au même ordre, une longueur d'onde produisant de l'interférence à un ordre différent permet de deviner que ce sera à une longueur d'onde inférieure à $510\,\text{nm}$, puisqu'au-delà de $680\,\text{nm}$ on est déjà à la frontière supérieure du domaine visible, et qu'on rencontrerait d'ailleurs de l'interférence constructive avant de rencontrer une seconde longueur d'onde d'interférence destructive. Pour une longueur d'onde inférieure à $510\,\text{nm}$, le nombre de longueurs d'onde dans le milieu sera supérieur d'une unité, d'où

$$(N_2 - N_1)_{d,2} = (N_2 - N_1)_{d,1} + 1$$

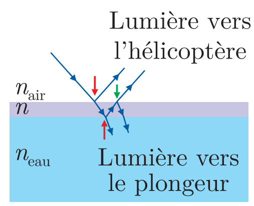
$$\left(\frac{2Ln}{\lambda_{d,2}} + N_{\text{réfl},2} - N_{\text{réfl},1}\right) = \left(\frac{2Ln}{\lambda_{d,1}} + N_{\text{réfl},2} - N_{\text{réfl},1}\right) + 1$$

$$\frac{2Ln}{\lambda_{d,2}} = \frac{2Ln}{\lambda_{d,1}} + 1$$

$$\lambda_{d,2} = \frac{2Ln}{\frac{2Ln}{\lambda_{d,1}} + 1} = \frac{2 \times 350\,\text{nm} \times 1{,}46}{\frac{2\times 350\,\text{nm}\times 1{,}46}{680\,\text{nm}} + 1} = 408\,\text{nm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est correct, celle-ci étant tout près de la limite inférieure des longueurs d'onde visibles.

P31 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la couche d'huile produisant de l'interférence à la surface de l'eau.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$n = 1{,}25$	$\lambda_{\text{c,réfl}}$
$l = 1{,}05\,\mu\text{m}$	$\lambda_{\text{c,trans}}$

a. **Identifier la clé** La clé est le fait que la lumière réfléchie et ayant traversé la couche d'huile a parcouru deux fois l'épaisseur de la couche.

Résoudre le problème Pour la lumière réfléchissant directement sur la couche d'huile (une réflexion dure), on a

$$N_1 = N_{\text{réfl}} = \frac{1}{2}\ .$$

Pour la lumière traversant la couche d'huile aller-retour et subissant une réflexion dure, on a

$$N_2 = \frac{n_2 r_2}{\lambda} + N_{\text{réfl}} = \frac{2nl}{\lambda} + \frac{1}{2}\ ,$$

d'où

$$N_2 - N_1 = \frac{2nl}{\lambda} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2nl}{\lambda} = m_c\ .$$

Afin de connaître toutes les longueurs d'onde du domaine visible produisant de l'interférence constructive, on peut résoudre cette équation pour toutes les valeurs $m_c = 1, 2, 3$, etc. On trouve parmi les solutions les longueurs d'onde suivantes dans le domaine visible, pour $m_c = 4, 5, 6$:

$$\lambda = 656\,\text{nm},\ \lambda = 525\,\text{nm et } \lambda = 438\,\text{nm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que pour la lumière transmise, on analyse les deux premiers rayons : l'un a parcouru une fois l'épaisseur sans réflexion et l'autre a parcouru trois fois l'épaisseur avec une réflexion dure.

Résoudre le problème Pour la lumière directement transmise à travers la couche d'huile :

$$N_1 = \frac{n_1 r_1}{\lambda} = \frac{nl}{\lambda}\ .$$

Pour la lumière réfléchissant deux fois sur les surfaces de la couche d'huile, on a

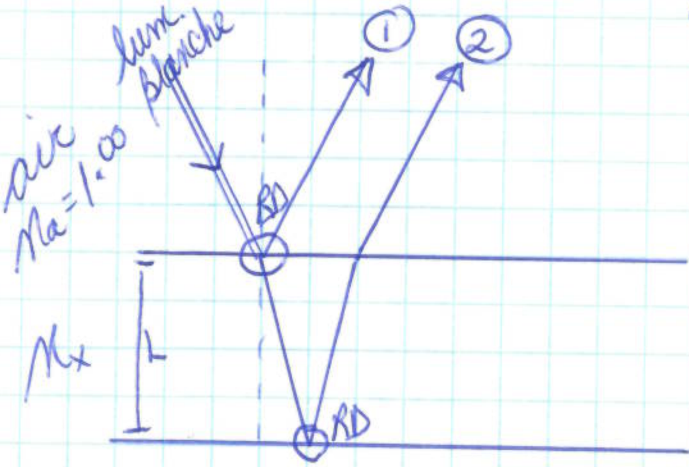
$$N_2 = \frac{n_2 r_2}{\lambda} + N_{\text{réfl}} = \frac{n(3l)}{\lambda} + \frac{1}{2}\ ,$$

d'où

$$N_2 - N_1 = \frac{3nl}{\lambda} + \frac{1}{2} - \frac{nl}{\lambda} = \frac{2nl}{\lambda} + \frac{1}{2} = m_c$$

$$\frac{2nl}{\lambda} + \frac{1}{2} = m_c\ .$$

Couche d'un liquide inconnu $n_x = ?$



$n_{air} < n_x < n_v \quad L = 350\ nm$

On observe

i) ① + ② = ICC si $\lambda = 510\ nm$

ii) ① + ② = IDC si $\lambda' = 680\ nm$

Conditions d'interférence

n_v verre

$\Delta N = N_2 - N_1$

Ici $N_1 = 1/2$ (R. Dure)

$$\begin{cases} ICC : \Delta N = m_c & m_c \in \mathbb{Z} \\ IDC : \Delta N' = m_d + \frac{1}{2} & m_d \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{et } N_2 = 1/2 + 2 \cdot n_x L/\lambda \longrightarrow \Delta N = \dfrac{2 n_x L}{\lambda} = m_c & (1) \\ \text{ou } N_2' = 1/2 \cdot 2 n_x L/\lambda' \longrightarrow \Delta N' = \dfrac{2 n_x L}{\lambda'} = m_d + \dfrac{1}{2} & (2) \end{array}\right\}$$

En prenant le rapport $\frac{\Delta N}{\Delta N'}$ on trouve

$$\frac{m_c}{m_d + \frac{1}{2}} = \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{680\ nm}{510\ nm} = \frac{68}{51} \overset{\div 17}{=} \frac{4}{3} \overset{\div 2}{=} \frac{2}{1.5}$$

* On réduit la fraction pour obtenir $m_c \in \mathbb{Z}$ et $(m_d + \frac{1}{2}) \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$

d'où $m_c = 2 \longrightarrow n_x = \dfrac{m_c \lambda}{2L} = \dfrac{2 \cdot 510\ nm}{2 \cdot 350\ nm} = 1,46$

ou encore $m_d + \frac{1}{2} = 1,5 \longrightarrow$

$$n_x = (m_d + \tfrac{1}{2})\frac{\lambda'}{2L} = \frac{1.5 \cdot 680\ nm}{2 \cdot 350\ nm} = 1,46$$

$\therefore \underline{n_x = 1.46}$

7P30 b) On cherche autre λ invisible.

Avec $\Delta N = \dfrac{2n_x L}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \dfrac{2n_x L}{\Delta N} = \dfrac{2n_x L}{m_d + 1/2}$ si IDC

Pour les frontières du visibles $\lambda_{min} = 400\,nm$ et $\lambda_{max} = 700\,nm$

$$\Delta N_{max} = \frac{2n_x L}{\lambda_{min}} = \frac{2 \cdot 1{,}46 \cdot 350\,nm}{400\,nm} = 2{,}555$$

$$\Delta N_{min} = \frac{2n_x L}{\lambda_{max}} = \frac{2 \cdot 1{,}46 \cdot 350\,nm}{700\,nm} = 1{,}46$$

~~Les~~ Puisqu'en IDC $\Delta N = m_d + \frac{1}{2}$ $m_d \in \mathbb{Z}$

les valeurs possible de $m_d + \frac{1}{2}$ dans le visible sont $m_d + \frac{1}{2} = \{1{,}5 ; 2{,}5\}$

On sait déjà que pour $m_d + \frac{1}{2} = 1{,}5$ $\lambda = 680\,nm$

alors λ'' est pour $m_d + \frac{1}{2} = 2{,}5$

$$\lambda'' = \frac{2n_x L}{2{,}5} = \frac{2 \cdot 1{,}46 \cdot 350\,nm}{2{,}5} = \cancel{408}\ \underset{404{,}8}{}\ nm$$

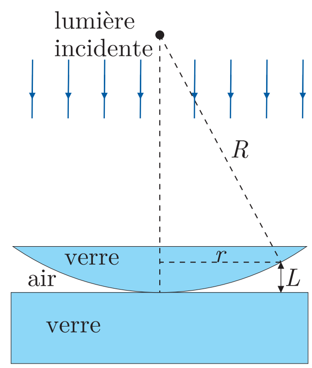
$\therefore$ L'autre λ invisible est ~~408~~ 404,8 nm

Afin de connaître toutes les longueurs d'onde du domaine visible produisant de l'interférence constructive, on peut résoudre cette équation pour toutes les valeurs $m_c = 1, 2, 3$, etc. On trouve parmi les solutions les longueurs d'onde suivantes dans le domaine visible, pour $m_c = 3, 4, 5, 6$:

$$\lambda = 750\,\text{nm},\ \lambda = 583\,\text{nm},\ \lambda = 477\,\text{nm et } \lambda = 404\,\text{nm} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Les longueurs d'onde trouvées font partie du domaine visible et sont également intercalées entre les longueurs d'onde visibles trouvées en **a.**

P32 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la situation.



a. **Identifier la clé** La clé est l'analyse strictement géométrique de l'épaisseur L.

Résoudre le problème L'épaisseur L est la différence entre le rayon de courbure R et le côté vertical du triangle rectangle illustré en pointillé sur la figure 7.37. Cette hauteur est donnée par

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} .$$

L'épaisseur L est alors

$$L = R - h = R - \sqrt{R^2 - r^2} . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que l'interférence se produit entre un rayon subissant une réflexion molle et un autre subissant une réflexion dure après avoir traversé deux fois la distance L dans l'air.

Résoudre le problème Le rayon réfléchi à l'intérieur de la surface sphérique en verre subit une réflexion molle :

$$N_1 = N_{\text{réfl}} = 0 .$$

Le rayon traversant dans l'air et réfléchissant sur la surface du bloc de verre plat subit une réflexion dure :

$$N_2 = \frac{2n_{\text{air}}L}{\lambda} + N_{\text{réfl}} = \frac{2(R - \sqrt{R^2 - r^2})}{\lambda} + \frac{1}{2} .$$

Le déphasage entre les deux rayons est

$$N_2 - N_1 = \frac{2(R - \sqrt{R^2 - r^2})}{\lambda} + \frac{1}{2} - 0 = m_c .$$

Le rayon r d'un anneau peut alors s'exprimer ainsi :

$$\begin{aligned} R - \sqrt{R^2 - r^2} &= (m_c - \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2} \\ R - R\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} &= (m_c - \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2} \\ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} &= (m_c - \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2R} . \end{aligned}$$

Puisque $r <<< R$, l'approximation du binôme admet

$$\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 .$$

Donc,

$$1-\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)=(m_c-\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2R}$$
$$\frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}=(m_c-\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2R}$$
$$r=\sqrt{\left(m_c-\frac{1}{2}\right)\lambda R},\qquad \text{avec}\qquad m_c=1,2,3,... \qquad \text{(réponse)}$$

c. Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$R = 10{,}0\,\text{cm}$	r_1
$\lambda = 589\,\text{nm}$	

Identifier la clé La clé est l'utilisation de l'équation développée en **b.** pour déterminer r.

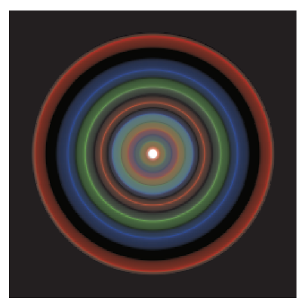
Résoudre le problème Selon l'équation trouvée, r est donné par

$$r_1=\sqrt{\left(m_c-\frac{1}{2}\right)\lambda R}=\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)\times 589\,\text{nm}\times 0{,}100\,\text{m}}=172\,\mu\text{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du rayon trouvé est correct, quoique celui-ci soit un peu petit et donc presque imperceptible à l'œil nu.

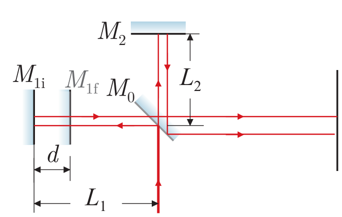
Q33 **Résoudre le problème** L'indice de réfraction augmentant graduellement dans l'un des bras, la longueur d'onde de l'onde parcourant ce bras de l'interféromètre diminue, ce qui modifie le déphasage entre cette onde et l'onde parcourant l'autre bras. Une variation du déphasage entre les ondes à la sortie de l'interféromètre produit un déplacement de chaque frange d'interférence, et alors les franges d'interférence (des anneaux, comme sur la figure 7.38) se déplacent vers le centre ou en s'éloignant du centre. En d'autres termes, chaque point fixe sur l'écran est le siège, alternativement, d'une interférence constructive et d'une interférence destructive (en passant par l'interférence intermédiaire), à mesure que le nouveau gaz remplace l'air.

Q34 **Résoudre le problème** La lumière blanche contient plusieurs longueurs d'onde (ou toutes, s'il s'agit de lumière naturelle ou issue d'une source d'éclairage conventionnelle). Chaque longueur d'onde donne lieu au phénomène d'interférence, mais dans une figure dont les dimensions lui sont propres. Il y a donc superposition de figures d'interférence du même genre que sur la figure 7.38, mais où chaque couleur présente des anneaux de rayons différents. Seul le centre de la figure est éclairé également par toutes les couleurs (car le centre est un point d'interférence de même nature pour toutes les longueurs d'onde à la fois). On a donc un point central blanc entouré d'anneaux colorés, comme sur la figure ci-contre.



(Le point central peut aussi être sombre ou noir, mais pas coloré, puisque toutes les longueurs d'onde y produisent une interférence du même type, mais pas nécessairement constructive.)

Q35 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre l'interféromètre dont le miroir M_1 est déplacé d'une distance d.



Identifier la clé La clé est l'équation 7.12 liant le déphasage entre deux ondes (en nombre de longueurs d'onde) et la différence de marche Δr.

Résoudre le problème Pour inverser la position des franges claires et sombres sur l'écran, on doit modifier le déphasage d'une demi-longueur d'onde ou d'un multiple demi-entier de longueurs d'onde. Ainsi,

$$(N_f - N_i) = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$$

On veut donc réduire le parcours optique d'une distance $\Delta r = (N_f - N_i)\lambda$, soit $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{3\lambda}{2}$, $\frac{5\lambda}{2}$, etc. La variation de distance du parcours dans le bras est

$$\Delta r = (2m-1)\frac{\lambda}{2}, \qquad \text{où} \qquad m = 1, 2, 3, \ \ldots \tag{i}$$

Puisque chaque bras de l'interféromètre est parcouru deux fois par un rayon lumineux (aller et retour), modifier la longueur du parcours optique d'une distance Δr équivaut à allonger ou à raccourcir le bras de l'interféromètre d'une distance d telle que

$$d = \frac{\Delta r}{2} \ . \tag{ii}$$

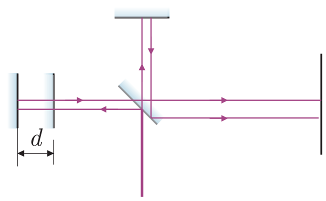
On peut relier les équations (i) et (ii) pour exprimer d en fonction de λ :

$$d = \frac{\Delta r}{2}, \qquad \text{avec} \qquad \Delta r = (2m-1)\frac{\lambda}{2}$$

$$d = \frac{(2m-1)\frac{\lambda}{2}}{2}$$

$$d = (2m-1)\frac{\lambda}{4}, \qquad \text{où} \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \qquad \text{(réponse)}$$

E36 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre l'interféromètre dont le miroir M_1 est déplacé d'une distance d.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$d = 10{,}1\ \mu\text{m}$	λ
$\Delta m = 50$	

Identifier la clé La clé est l'équation 7.33 liant la longueur d'onde, le déplacement du miroir et le nombre de franges de décalage.

Résoudre le problème Selon l'équation 7.33,

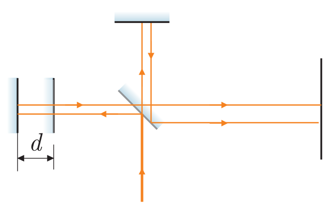
$$\Delta m = \frac{2d}{\lambda} \ .$$

On cherche à déterminer la longueur d'onde λ, qu'il suffit d'isoler :

$$\lambda = \frac{2d}{\Delta m} = \frac{2 \times 10{,}1\ \mu\text{m}}{50} = 404\ \text{nm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est correct.

E37 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre l'interféromètre dont le miroir M_1 est déplacé d'une distance d.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$n_1 = 120$	n_2
$\lambda_1 = 589\ \text{nm}$	
$\lambda_2 = 497\ \text{nm}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 7.33 liant la longueur d'onde, le déplacement du miroir et le nombre de franges de décalage.

Résoudre le problème On peut trouver une expression du déplacement d à partir de λ_1 et de Δm_1 :

$$\Delta m = \frac{2d}{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad d = \frac{\Delta m_1 \lambda_1}{2} \ .$$

La même équation 7.33 permet de déterminer Δm_2 à partir de la distance d déterminée :

$$\Delta m_2 = \frac{2d}{\lambda_2} = \frac{2 \times \left(\frac{\Delta m_1 \lambda_1}{2}\right)}{\lambda_2}$$

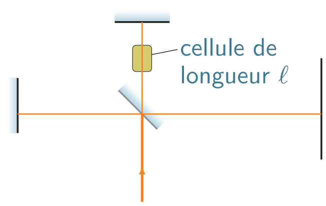
$$\Delta m_2 = \frac{\Delta m_1 \lambda_1}{\lambda_2} = \frac{120 \times 589\,\mathrm{nm}}{497\,\mathrm{nm}} = 142 \ .$$

Il y a donc 142 franges qui défilent lors du déplacement du miroir.

$$n = 142 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du nombre de franges qui défilent est correct, la quantité étant semblable à Δm_1.

E38 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre l'interféromètre. Dans l'un des bras, on insère une cellule de longueur ℓ.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\ell = 10{,}5\,\mathrm{cm}$	n
$\lambda = 589{,}29\,\mathrm{nm}$	
$(N_\mathrm{f} - N_\mathrm{i}) = 13$	

Identifier la clé La clé est l'équation 7.35 liant le décalage de franges et l'indice de réfraction du milieu dans la cellule.

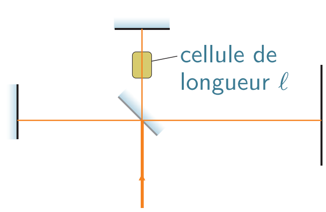
Résoudre le problème L'équation 7.35 permet d'isoler directement l'indice de réfraction du fluide étudié :

$$\Delta m = \frac{2\ell(n-1)}{\lambda}$$

$$n = 1 + \frac{13\lambda}{2\ell} = 1 + \frac{13 \times 589{,}29 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}}{2 \times 0{,}105\,\mathrm{m}} = 1{,}000\,036 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'indice de réfraction trouvé est correct pour un gaz (l'air ayant un indice précis de 1,000 29).

E39 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre l'interféromètre. Dans l'un des bras, on insère une cellule de longueur ℓ.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\ell = 1{,}000\,\mathrm{cm}$	Δn
$\lambda = 589{,}29\,\mathrm{nm}$	
$(N_{20} - N_{100}) = 475$	

Identifier la clé La clé est la comparaison du nombre de longueurs d'onde parcourues dans l'eau aux deux températures indiquées.

Résoudre le problème On pose l'hypothèse que l'indice de réfraction diminue avec la température qui augmente, puisque l'eau est plus dense à faible température. Le nombre de longueurs d'onde dans chaque cas est

$$N_{20} = \frac{n_{20} r}{\lambda} = \frac{n_{20}(2\ell)}{\lambda}$$

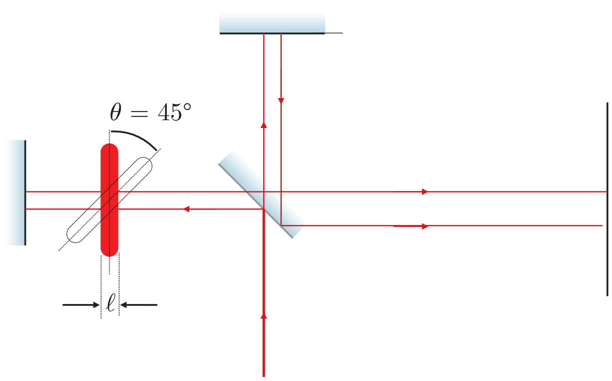
$$N_{100} = \frac{n_{100} r}{\lambda} = \frac{n_{100}(2\ell)}{\lambda}$$

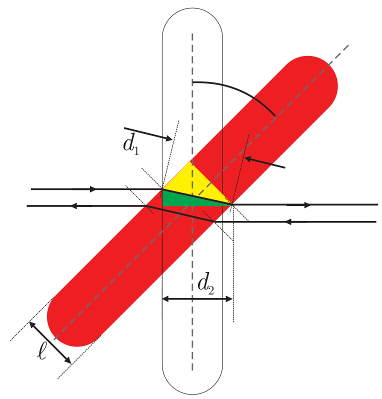
$$N_{20} - N_{100} = \frac{n_{20}(2\ell)}{\lambda} - \frac{n_{100}(2\ell)}{\lambda} = 475$$

$$|\Delta n| = |(n_{100} - n_{20})| = \frac{475\lambda}{2\ell} = \frac{475 \times 589{,}29 \times 10^{-9}\,\text{m}}{2 \times 0{,}010\,00\,\text{m}} = 0{,}014\,0 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la variation d'indice de réfraction trouvée est correct, cette variation étant tout de même faible (de l'ordre de 1 %).

P40 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre la situation où une lame de rubis est inclinée de 45° dans l'un des bras de l'interféromètre.





Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\lambda = 656\,\text{nm}$	ℓ
$n_r = 1{,}76$	
$\Delta\theta = 45°$	
$(N_\text{f} - N_\text{i}) = 118$	

Identifier la clé La clé est le fait que la distance parcourue dans le rubis est liée à la loi de la réfraction.

Résoudre le problème Alors que la lame est perpendiculaire au rayon (la lame étant traversée deux fois par celui-ci), on a

$$N_\text{i} = \frac{n_r r}{\lambda} = \frac{n_r(2\ell)}{\lambda} \ .$$

Après inclinaison de la lame, la distance parcourue dans le rubis augmente, et le parcours est dévié en raison de la réfraction. On doit donc d'abord déterminer l'angle de réfraction :

$$n_\text{air} \sin\theta_1 = n_r \sin\theta_2 \qquad \Rightarrow \qquad \theta_2 = \arcsin\left(\frac{1 \times \sin\theta_1}{n_r}\right) = 23{,}7° \ .$$

À cet angle par rapport à la perpendiculaire de la lame, le rayon doit parcourir une distance plus grande pour la traverser (l'hypoténuse d_1 du triangle jaune) :

$$\cos\theta_2 = \frac{\ell}{d_1} \qquad \Rightarrow \qquad d_1 = \frac{\ell}{\cos\theta_2} \ .$$

Cette distance étant parcourue deux fois lors de l'aller-retour dans le bras, on trouve

$$N_\mathrm{f} = \frac{n_2 r_2}{\lambda} = \frac{n_r(2d_1)}{\lambda} = \frac{2n_r\ell}{\lambda\cos\theta_2}\ .$$

On doit alors réaliser que la composante de d_2 parallèle au bras de l'interféromètre est plus grande que ℓ (*voir le triangle vert sur la figure*), faisant en sorte que la différence initialement parcourue dans l'air doit faire partie de la quantité N_i. La figure montre que cette distance d_2 peut être représentée par

$$\cos(45° - \theta_2) = \frac{d_2}{d_1}$$

$$d_2 = d_1\cos(45° - \theta_2) = \frac{\ell}{\cos\theta_2} \times \cos(45° - \theta_2)\ .$$

Lorsque le rubis n'est pas incliné, la différence entre ℓ et d_2 est parcourue dans l'air par la lumière et s'ajoute au nombre de longueurs d'onde N_i :

$$N_\mathrm{i} = \frac{n_r(2\ell)}{\lambda} + \frac{2(d_2 - \ell)n_\mathrm{air}}{\lambda}$$

$$N_\mathrm{i} = \frac{n_r(2\ell)}{\lambda} + \frac{2(\frac{\ell}{\cos\theta_2} \times \cos(45° - \theta_2) - \ell)}{\lambda}\ .$$

La différence de marche du rayon dans les deux situations est

$$(N_\mathrm{f} - N_\mathrm{i}) = \left(\frac{2n_r\ell}{\lambda\cos\theta_2}\right) - \left(\frac{n_r(2\ell)}{\lambda} + \frac{2(\frac{\ell}{\cos\theta_2} \times \cos(45° - \theta_2) - \ell)}{\lambda}\right) = 118$$

$$\ell = \frac{118\lambda}{2\left(n_r(\frac{1}{\cos\theta_2} - 1) - \frac{\cos(45° - \theta_2)}{\cos\theta_2} + 1\right)}$$

$$\ell = \frac{118 \times 656\,\mathrm{nm}}{2\left(1{,}76(\frac{1}{\cos 23{,}7°} - 1) - \frac{\cos(45° - 23{,}7°)}{\cos 23{,}7°} + 1\right)} = 268\,\mu\mathrm{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'épaisseur de la lame est correct pour produire un décalage de 118 longueurs d'onde d'une lumière visible.

Physique 3 Ondes, optique et physique moderne - 1re édition

Chapitre 08 La diffraction de la lumière

Q1 **Résoudre le problème** Théoriquement, les figures de diffraction sont présentes, mais cela est imperceptible en raison des dimensions de la source et de la présence de toutes les longueurs d'onde dans la lumière du Soleil. Les minces figures d'interférence présentes dans les contours de l'ombre sont largement voilées par le fait que les contours de l'ombre sont flous (zone de pénombre due au fait que la source n'est pas parfaitement ponctuelle) et que l'éventail de longueurs d'onde présentes dans la lumière blanche produisent des figures superposées de différentes dimensions, les zones claires des unes éclairant les zones sombres des autres. Aucun maximum ou minimum d'éclairement ne peut alors être bien distingué.

Q2 **a.** **Identifier la clé** La clé est l'équation 8.1 reliant la position y d'un point de la figure à la distance à l'écran L :

$$\tan\theta = \frac{y}{L} \qquad \Rightarrow \qquad y = L\tan\theta \ . \tag{i}$$

Résoudre le problème Cette relation montre qu'une diminution de L provoque une diminution de y (puisque les angles sont toujours inférieurs à 90° et que $\tan\theta$ est alors toujours positif).

Cela réduit les dimensions du pic central. (réponse)

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 8.5 :

$$a\sin\theta = p\lambda \ . \tag{ii}$$

Résoudre le problème La position d'un point de la figure, y, ne fait pas partie de cette équation. Cependant, pour une distance fixe à l'écran, cette distance varie de la même manière que l'angle θ que forme un point de la figure depuis la fente par rapport à l'axe du montage. Comme l'indique l'équation (i) utilisée en **a.** :

$$y = L\tan\theta \ .$$

Pour de petits angles, l'approximation $\tan\theta \approx \theta$ permet d'écrire

$$y = L\theta \ . \tag{iii}$$

On cherche alors à observer l'effet d'un facteur sur l'angle θ. Si on isole $\sin\theta$ dans l'équation (ii), on trouve

$$\sin\theta = \frac{p\lambda}{a} \ .$$

L'approximation des petits angles permet à nouveau d'écrire

$$\theta = \frac{p\lambda}{a} \ . \tag{iv}$$

L'union des équations (iii) et (iv) donne

$$y = \frac{p\lambda L}{a} \ . \tag{v}$$

On constate alors que l'augmentation de la largeur de la fente provoquera une diminution de θ (et donc de $\sin\theta$) et ainsi une diminution des dimensions de la figure.

Cela réduit les dimensions du pic central. (réponse)

c. Identifier les clés Les clés sont les équations 8.1 et 8.5, dont l'union donne l'équation (v) développée en **b.** :

$$y = \frac{p\lambda L}{a} \ .$$

Résoudre le problème On voit dans cette équation que la largeur du pic central (caractérisé par la position y de la première frange sombre) est proportionnelle à la longueur d'onde λ. Si la lumière passe du bleu au rouge, la longueur d'onde est donc augmentée, ce qui fait augmenter également la largeur du premier pic.

Cela augmente les dimensions du pic central. (réponse)

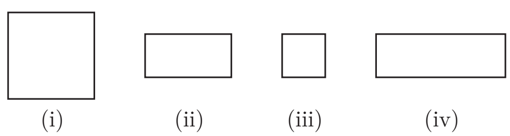
d. Identifier les clés Les clés sont les équations 8.1 et 8.5, dont l'union donne l'équation (v) développée en **b.** :

$$y = \frac{p\lambda L}{a} \ .$$

Résoudre le problème Si l'expérience est réalisée dans l'eau, la seule variable affectée dans l'équation (v) est la longueur d'onde, qui sera réduite par l'indice de réfraction, plus élevé pour l'eau que pour l'air. Ainsi, la largeur du pic central sera réduite également (et proportionnellement).

Cela réduit les dimensions du pic central. (réponse)

Q3 Illustrer la situation La figure suivante illustre les quatre ouvertures éclairées par la même lumière.



Décortiquer le problème La fente étant limitée en dimensions dans les deux axes (largeur et hauteur de la fente rectangulaire), la diffraction se produira dans les deux axes et le pic central aura à la fois une largeur et une hauteur.

Identifier la clé La clé est le fait que la largeur de la fente rectangulaire affecte la largeur du pic central, alors que la hauteur de la fente affecte la hauteur du pic central. De plus, pour une même position d'un ordre de diffraction, la dimension du pic central varie inversement à la dimension de la fente, selon l'équation 8.5 : $a \sin\theta = p\lambda$ (sachant que $\sin\theta$ varie dans le même sens que θ).

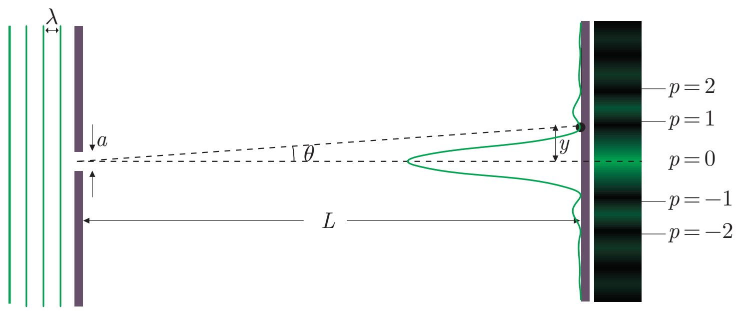
a. Résoudre le problème La largeur du pic central étant inversement proportionnelle à la largeur du rectangle, on doit placer les rectangles par ordre décroissant de largeur :

$$\text{(iv)} < \text{(i)} = \text{(ii)} < \text{(iii)} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Résoudre le problème La hauteur du pic central étant inversement proportionnelle à la hauteur du rectangle, on doit placer les rectangles par ordre décroissant de hauteur :

$$\text{(i)} < \text{(ii)} = \text{(iii)} = \text{(iv)} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

E4 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre la situation avec l'angle θ (qui définit le pic central).



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$a = 40{,}0\,\mu\text{m}$	θ
$\lambda = 553\,\text{nm}$	Δy
$L = 75{,}0\,\text{cm}$	

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 8.5 permettant d'isoler θ.

Résoudre le problème L'équation 8.5 est

$$a \sin\theta = p\lambda \ .$$

L'angle θ isolé dans cette équation donne, pour le premier minimum ($p = 1$) :

$$\theta = \arcsin\frac{p\lambda}{a} = \arcsin\frac{1 \times 553 \times 10^{-9}\,\text{m}}{40{,}0 \times 10^{-6}\,\text{m}} = 0{,}792^\circ \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'angle trouvé est correct, cet angle étant très fin vu les distances impliquées.

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 8.1 liant l'angle θ à la position y sur la figure de diffraction.

Résoudre le problème Selon l'équation 8.1,

$$\tan\theta = \frac{y}{L} \qquad \Rightarrow \qquad y = L\tan\theta \ .$$

À partir de l'angle trouvé en **a.**, on a

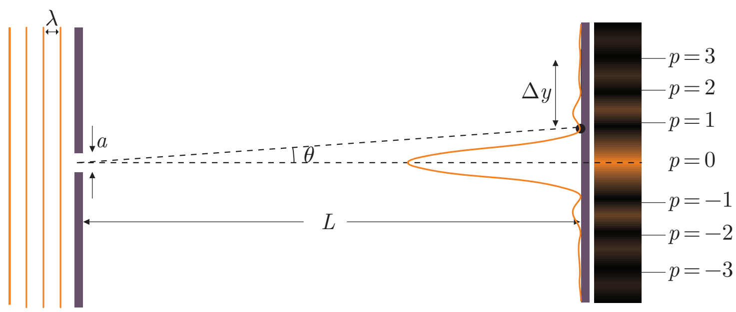
$$y = L\tan\theta = 75{,}0\,\text{cm} \times \tan 0{,}792^\circ = 1{,}037\,\text{cm} \ .$$

Cette distance est la position du premier minimum, de chaque côté du centre. La largeur totale du pic central est donc le double de cette distance :

$$\Delta y = 2 \times 1{,}037\,\text{cm} = 2{,}07\,\text{cm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance trouvée est correct, à cette distance de la fente.

E5 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre la situation et les trois premiers minimums de chaque côté du centre sont identifiés.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\lambda = 589\,\text{nm}$	a
$L = 1{,}70\,\text{m}$	
$y_3 - y_1 = 6{,}7\,\text{mm}$	

Identifier la clé La clé est l'union des équations 8.1 et 8.5.

Résoudre le problème On peut utiliser l'approximation des petits angles puisque les positions y considérées sont visiblement beaucoup plus faibles que la distance à l'écran L. Ainsi, les équations 8.1 et 8.5 sont

$$\theta \approx \tan\theta = \frac{y}{L} \qquad \text{et} \qquad a\theta \approx a\sin\theta = p\lambda \ ,$$

dont l'union donne, pour un point quelconque de la figure de diffraction :

$$y = \frac{p\lambda L}{a} \ .$$

La distance donnée entre le premier et le troisième minimum indique que

$$\Delta y = y_3 - y_1 = 6{,}7\,\text{mm} = \frac{3\lambda L}{a} - \frac{1\lambda L}{a} = \frac{2\lambda L}{a} \ .$$

On peut donc isoler la largeur a et déterminer sa valeur :

$$a = \frac{2\lambda L}{\Delta y} = \frac{2 \times 589\,\text{nm} \times 1{,}70\,\text{m}}{6{,}7\,\text{mm}}$$

$$a = 0{,}30\,\text{mm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la fente est correct, pour un montage de diffraction avec de la lumière visible.

E6 **Identifier la clé** La clé est le fait que le premier minimum ($p = 1$) fait partie de la figure de diffraction lorsque l'angle θ de sa position est inférieur à 90°.

Résoudre le problème En étudiant le cas limite où $\theta_1 = 90°$, on peut trouver la largeur a de la fente telle que

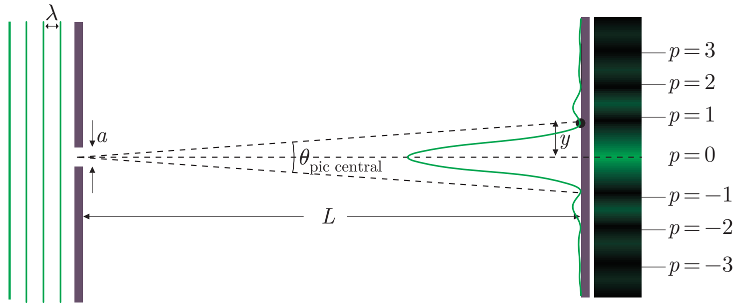
$$a\sin\theta = p\lambda = 1\lambda$$

$$\lambda = \frac{a\sin\theta}{1} = \frac{a\sin 90°}{1} = a \ .$$

Ainsi, pour toute longueur d'onde supérieure à a, le premier minimum de diffraction est absent de la figure :

$$\lambda_{\text{min}} = a \ . \qquad \text{(réponse)}$$

E7 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre la fente produisant une figure de diffraction dans laquelle le pic central a une largeur de 28,7°.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\lambda = 550\,\text{nm}$	a
$\theta_{\text{pic central}} = 28{,}7°$	

Identifier la clé La clé est le fait que la largeur totale du pic central de diffraction est le double de la position angulaire du premier minimum : $\theta_1 = \frac{\theta_{\text{pic central}}}{2}$.

Résoudre le problème L'équation 8.5 lie la largeur de la fente à la position angulaire du premier minimum de diffraction :

$$a \sin \theta_1 = p_1 \lambda \ .$$

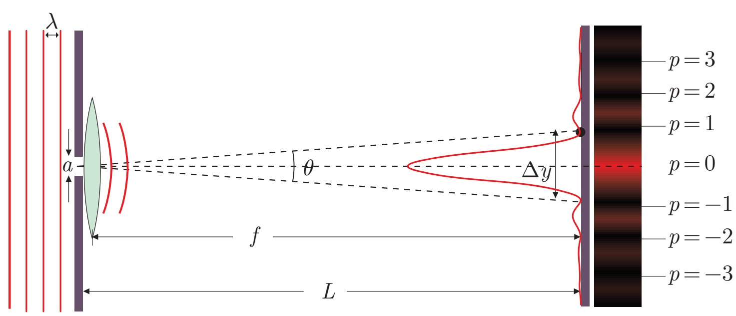
Ainsi, en utilisant $\theta_1 = \frac{\theta_{\text{pic central}}}{2}$, on trouve

$$a = \frac{p_1 \lambda}{\sin \frac{\theta_{\text{pic central}}}{2}} = \frac{1\lambda}{\sin \frac{28{,}7°}{2}}$$

$$a = 2{,}22\,\mu\text{m} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la largeur trouvée est correct.

P8 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre la situation : une lentille est placée tout juste derrière la fente et modifie la figure de diffraction.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$a = 4{,}60\,\mu\text{m}$	L
$\lambda = 656\,\text{nm}$	Δy_1
$f = +50{,}0\,\text{cm}$	

a. **Identifier la clé** La clé consiste à supposer que la lumière traversant la fente et ayant subi la diffraction est composée de rayons parallèles.

Résoudre le problème Si la lumière émergeant de la fente est faite de rayons parallèles, le calcul de la position de l'image derrière la lentille requiert l'équation des lentilles minces, selon laquelle

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$
$$q = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{p}} .$$

Si les rayons atteignent la lentille en se déplaçant parallèlement, c'est donc dire que la lumière se comporte comme si la distance objet était infinie. Ainsi,

$$q = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{\frac{1}{f} - 0} = f = 50{,}0\,\text{cm} .$$

On doit placer l'écran là où l'image se forme, à 50,0 cm de la lentille.

$$L = 50{,}0\,\text{cm} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Cette réponse est logique, puisque quand la lumière atteint la lentille en un faisceau parallèle, elle converge vers le foyer image.

b. **Identifier la clé** La clé est l'union des équations 8.1 et 8.5.

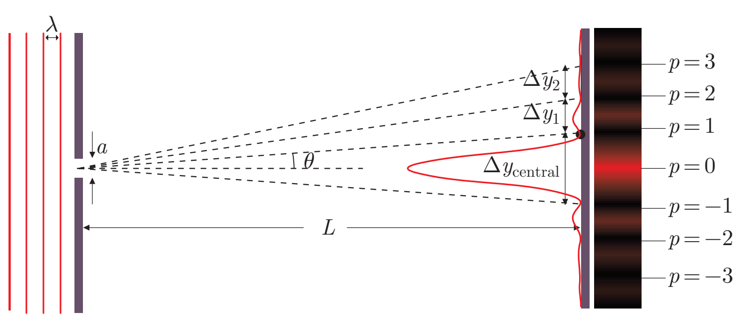
Résoudre le problème La largeur Δy_1 du pic central est donnée par le double de la position du premier minimum : $\Delta y = 2y_{p=1}$. Selon les équations 8.1 et 8.5,

$$\tan\theta = \frac{y}{L} \qquad \text{et} \qquad a\sin\theta = p\lambda$$

$$\Delta y_1 = 2y = 2 \times L\tan\left(\arcsin\frac{p\lambda}{a}\right)$$
$$\Delta y_1 = 2 \times 0{,}500\,\text{m} \times \tan\left(\arcsin\frac{1 \times 656 \times 10^{-9}\,\text{m}}{4{,}60 \times 10^{-6}\,\text{m}}\right) = 14{,}4\,\text{cm} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la dimension trouvée est correct.

P9 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre la situation où une fente de largeur connue est éclairée en lumière rouge (632 nm).



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\lambda = 632\,\text{nm}$	$\Delta y_{\text{central}}$
$a = 3{,}00\,\mu\text{m}$	Δy_1
$L = 2{,}00\,\text{m}$	Δy_2

a. **Identifier la clé** La clé est le fait que la largeur totale du pic central de diffraction est le double de la distance du centre au premier minimum : $\Delta y_{\text{central}} = 2y_1$.

Résoudre le problème L'union des équations 8.1 et 8.5 donne une relation entre les paramètres connus et la position du premier minimum :

$$\tan\theta = \frac{y}{L} \qquad \text{et} \qquad a\sin\theta = p\lambda$$

$$y = L\tan\left(\arcsin\frac{p\lambda}{a}\right) . \tag{i}$$

Le premier minimum peut avoir pour position

$$y_1 = L\tan\left(\arcsin\frac{p_1\lambda}{a}\right) = 2{,}00\,\text{m} \times \tan\left(\arcsin\frac{1 \times 632 \times 10^{-9}\,\text{m}}{3{,}00 \times 10^{-6}\,\text{m}}\right) = 0{,}431\,\text{m} .$$

La largeur du pic central étant le double de cette distance, on obtient

$$\Delta y_{\text{central}} = 2y_1 = 2 \times 0{,}431\,\text{m} = 0{,}862\,\text{m} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la largeur trouvée est correct. Le pic central est du même ordre de grandeur que la distance L, ce qui empêche d'utiliser l'approximation des petits angles.

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que le premier pic secondaire, de chaque côté, se trouve entre les distances y_1 et y_2 des premier et deuxième minimums de diffraction.

Résoudre le problème L'équation (i) développée en **a.** permet de retrouver rapidement la position de tout minimum de diffraction. On a déjà déterminé $y_1 = 0{,}431\,\text{m}$. Ainsi,

$$y_2 = L\tan\left(\arcsin\frac{p_2\lambda}{a}\right) = 2{,}00\,\text{m} \times \tan\left(\arcsin\frac{2 \times 632 \times 10^{-9}\,\text{m}}{3{,}00 \times 10^{-6}\,\text{m}}\right) = 0{,}929\,\text{m} .$$

La largeur du premier pic secondaire est

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 0{,}929\,\text{m} - 0{,}431\,\text{m} = 0{,}498\,\text{m} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la largeur trouvée est correct, ce pic secondaire étant presque deux fois moins large que le pic central (l'approximation des petits angles étant non valide, on ne trouve pas un facteur 2 entre les largeurs trouvées en **a.** et en **b.**).

c. **Identifier la clé** La clé est le fait que le deuxième pic secondaire, de chaque côté, se trouve entre les distances y_2 et y_3 des deuxième et troisième minimums de diffraction.

Résoudre le problème La même équation (i) permet de retrouver la position du troisième minimum :

$$y_3 = L\tan\left(\arcsin\frac{p_3\lambda}{a}\right) = 2{,}00\,\text{m} \times \tan\left(\arcsin\frac{3 \times 632 \times 10^{-9}\,\text{m}}{3{,}00 \times 10^{-6}\,\text{m}}\right) = 1{,}631\,\text{m} .$$

La largeur du premier pic secondaire est

$$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = 1{,}631\,\text{m} - 0{,}929\,\text{m} = 0{,}702\,\text{m} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la largeur trouvée est correct. Par ailleurs, le deuxième pic secondaire n'a pas la même dimension que le premier pic secondaire parce que c'est la valeur de $\Delta\sin\theta$ qui est constante d'un pic à l'autre, et non les dimensions sur l'écran. L'écran étant plat, les pics sont de plus en plus étalés à mesure qu'on s'éloigne du centre.

P10 **Décortiquer le problème**

Connue	Inconnues
$a = 5{,}1\lambda$	Nombre de minimums observés
	Nombre de maximums observés

Identifier la clé La clé est l'ordre maximal p se trouvant entre le centre de la figure et la position angulaire $\theta = 90°$.

Résoudre le problème L'équation 8.5 permet de trouver la valeur p maximale correspondant à la position la plus éloignée sur la figure :

$$a \sin\theta = p\lambda = 1\lambda$$
$$p = \frac{a\sin\theta}{\lambda} = \frac{5{,}1\lambda \sin 90°}{\lambda} = 5{,}1 \ .$$

La figure de diffraction comprend donc tous les minimums et les maximums compris entre $p = 5{,}1$ et $p = -5{,}1$.

a. **Résoudre le problème** Les minimums correspondent aux endroits où p est entier, excluant $p = 0$. Il y a donc cinq minimums de chaque côté de la figure : $p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$.

10 minimums (réponse)

b. **Résoudre le problème** Les maximums correspondent à des valeurs intermédiaires entre les valeurs entières de p au-delà de 1, le maximum central s'étendant à lui seul de $p = -1$ à $p = 1$ (l'équation 8.11 montre qu'il s'agit de valeurs approximativement demi-entières, mais pas exactement). Entre $p = 1$ et $p = 5{,}1$, on trouve quatre valeurs demi-entières, donc quatre maximums : $p \approx \pm 1{,}5, \pm 2{,}5, \pm 3{,}5, \pm 4{,}5$. Au total, il y a neuf maximums, avec celui du centre.

Huit maximums secondaires et un maximum central (réponse)

E11 **Identifier la clé** La clé est l'équation 8.8 reliant le déphasage α aux dimensions du montage de diffraction.

Résoudre le problème L'équation 8.7 étant le point de départ de la démonstration, on y insère la condition d'irradiance nulle, soit $I = 0$:

$$I = I_{\text{max}}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 = 0$$
$$\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 = 0$$
$$\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) = 0, \qquad \text{où} \qquad \alpha \neq 0 \ .$$

Pour toute valeur $\alpha \neq 0$, la seule condition de vérification de l'égalité précédente se trouve lorsque

$$\sin\alpha = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \arcsin 0 \ .$$

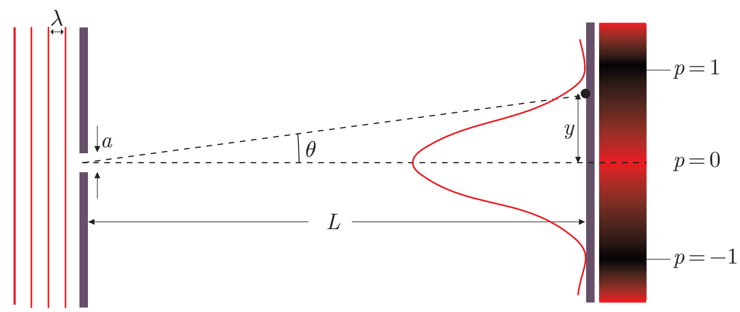
Les premières solutions de cette condition sont

$$\alpha = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \text{etc.}$$

La solution liée à $\alpha = 0$ correspond au centre de la figure de diffraction. La deuxième solution qu'on rencontre en s'éloignant du centre est donc la solution où $\alpha = 2\pi$. L'équation 8.8 permet alors de retrouver l'expression recherchée en considérant $\alpha = 2\pi$:

$$\alpha = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} = 2\pi$$
$$\theta = \arcsin\frac{2\lambda}{a} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

E12 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre la situation où l'angle θ correspond à un point se trouvant à 22,0 mm du centre de la figure.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$a = 0{,}050\,\text{mm}$	θ
$\lambda = 656\,\text{nm}$	α
$L = 2{,}20\,\text{m}$	$\dfrac{I}{I_{\text{max}}}$
$y = 22{,}0\,\text{mm}$	

a. Identifier la clé La clé est l'équation 8.1.

Résoudre le problème L'équation 8.1 permet d'isoler directement l'angle θ recherché :

$$\tan\theta = \frac{y}{L} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arctan\frac{y}{L}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{22{,}0 \times 10^{-3}\,\text{m}}{2{,}20\,\text{m}}\right) = 0{,}573^\circ \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'angle trouvé est correct pour une figure de diffraction et confirme que l'approximation des petits angles est valide.

b. Identifier la clé La clé est l'équation 8.8 définissant le déphasage α.

Résoudre le problème Selon l'équation 8.8,

$$\alpha = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} = \frac{\pi \times 0{,}050 \times 10^{-3}\,\text{m} \times \sin 0{,}573^\circ}{656 \times 10^{-9}\,\text{m}} = 2{,}39\,\text{rad} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du déphasage trouvé est correct, cette quantité correspondant à une position comprise dans le pic central.

c. Identifier la clé La clé est l'équation 8.7 liant l'irradiance en un point de la figure de diffraction à l'irradiance au centre.

Résoudre le problème Selon l'équation 8.7,

$$\begin{aligned} I &= I_{\text{max}}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\sin 2{,}39\,\text{rad}}{2{,}39\,\text{rad}}\right)^2 = 0{,}080\,6 \\ \frac{I}{I_{\text{max}}} &= 8{,}06\,\% \ . \qquad \text{(réponse)} \end{aligned}$$

Valider la réponse Le pourcentage trouvé est correct, compris entre 0 et 100 %.

P13 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\alpha_{\mathrm{m1}} = 1{,}430\pi$	$\left(\dfrac{I_{\mathrm{m1}}}{I_{\max}}\right)$
$\alpha_{\mathrm{m1}} = 2{,}459\pi$	$\left(\dfrac{I_{\mathrm{m2}}}{I_{\max}}\right)$
	$\left(\dfrac{I_{\mathrm{m2}}}{I_{\mathrm{m1}}}\right)$

Identifier la clé La clé est l'équation 8.7 qui donne l'irradiance en un point de la figure en fonction de l'irradiance maximale au centre.

De plus, les déphasages $\alpha = 1{,}430\pi$ et $\alpha = 2{,}459\pi$ correspondent aux premier et deuxième maximums secondaires (*voir l'équation 8.11*).

a. Résoudre le problème L'équation 8.7 donne l'irradiance en un point de la figure :

$$I = I_{\max}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 . \tag{i}$$

Pour I_{m1}, on a

$$\begin{aligned}
\frac{I_{\mathrm{m1}}}{I_{\max}} &= \left(\frac{\sin\alpha_{\mathrm{m1}}}{\alpha_{\mathrm{m1}}}\right)^2 && \text{(i)}\\
&= \left(\frac{\sin(1{,}430\pi)}{1{,}430\pi}\right)^2 = 0{,}047\,2\\
\frac{I_{\mathrm{m1}}}{I_{\max}} &= 4{,}72\,\% . && \text{(réponse)}
\end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'irradiance trouvée est correct pour un maximum secondaire (beaucoup plus faible que le maximum principal).

b. Résoudre le problème L'équation (i) développée en **a.** permet de calculer le rapport $\frac{I_{\mathrm{m2}}}{I_{\max}}$:

$$\begin{aligned}
\frac{I_{\mathrm{m2}}}{I_{\max}} &= \left(\frac{\sin\alpha_{\mathrm{m2}}}{\alpha_{\mathrm{m2}}}\right)^2\\
&= \left(\frac{\sin(2{,}459\pi)}{2{,}459\pi}\right)^2 = 0{,}016\,5\\
\frac{I_{\mathrm{m2}}}{I_{\max}} &= 1{,}65\,\% . && \text{(réponse)}
\end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'irradiance trouvée est correct pour un second maximum secondaire (plus faible encore que le premier maximum secondaire).

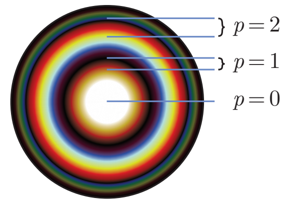
c. Identifier la clé La clé est la comparaison des deux pourcentages trouvés en **a.** et en **b.**

Résoudre le problème La comparaison de α_{m2} et de α_{m1} à la même référence $\alpha_{\max}$ permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\frac{I_{\mathrm{m2}}}{I_{\mathrm{m1}}} &= \frac{\left(\frac{I_{\mathrm{m2}}}{I_{\max}}\right)}{\left(\frac{I_{\mathrm{m1}}}{I_{\max}}\right)}\\
&= \frac{0{,}016\,5}{0{,}047\,2} = 0{,}349\,2\\
\frac{I_{\mathrm{m2}}}{I_{\mathrm{m1}}} &= 34{,}9\,\% . && \text{(réponse)}
\end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du rapport trouvé est correct, le second maximum secondaire étant plus sombre que le premier.

Q14 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la figure de diffraction produite lorsque de la lumière blanche éclaire une petite ouverture circulaire. Les différentes franges de couleurs sont concentriques et de dimensions différentes.



Identifier la clé La clé est le fait que, selon l'équation 8.12, les longueurs d'onde tendant vers le rouge sont davantage déviées que celles qui tendent vers le violet.

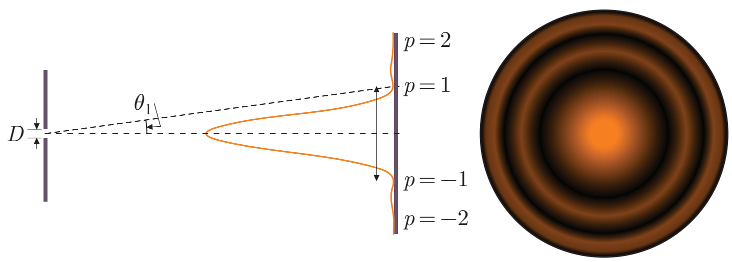
a. **Résoudre le problème** Le disque central est composé de toutes les couleurs. Cependant, puisque le violet est moins dévié que le rouge, le premier minimum de la couleur violet, en s'éloignant du centre, apparaîtra alors que le rouge produit encore de l'éclairement. L'extérieur du disque central apparaîtra donc

rouge. (réponse)

b. **Résoudre le problème** Le premier anneau secondaire apparaît lorsque le premier minimum de l'une des couleurs du spectre visible est dépassé. Puisque l'extrémité violette du spectre est moins déviée que l'extrémité rouge, le second maximum du violet commence à apparaître alors que le rouge décroît encore vers son premier minimum. L'intérieur du premier anneau secondaire apparaît donc

violet. (réponse)

E15 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre la figure de diffraction produite lorsque de la lumière blanche éclaire une petite ouverture circulaire. Les différentes franges de couleurs sont concentriques et de dimensions différentes.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\lambda = 605\,\text{nm}$	D_{pic}
$L = 5{,}40\,\text{m}$	D'
$D = 0{,}30\,\text{mm}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 8.12 permettant de calculer l'angle du premier minimum :

$$\sin\theta_1 = \frac{1{,}22\lambda}{D} \ .$$

a. **Résoudre le problème** On calcule l'angle du premier minimum pour évaluer sa distance depuis le centre de la tache :

$$\theta_1 = \arcsin\frac{1{,}22\lambda}{D} \qquad \text{(i)}$$
$$= \arcsin\left(\frac{1{,}22\times 605\times 10^{-9}\,\text{m}}{0{,}30\times 10^{-3}\,\text{m}}\right) = 0{,}14^\circ \ .$$

Sur le mur à une distance de 5,40 m, cet angle représente une distance y déterminée par

$$\tan\theta_1 = \frac{y}{L} \qquad \text{(ii)}$$
$$y = L\tan\theta_1 = 5{,}40\,\text{m}\times\tan 0{,}14^\circ = 1{,}33\,\text{cm} \ .$$

C'est la distance du premier minimum (un anneau) autour de la tache centrale, donc le rayon de la tache. Le diamètre est le double de cette distance :

$$D_{\text{pic}} = 2y = 2 \times 1{,}33\,\text{cm} = 2{,}66\,\text{cm}$$
$$D_{\text{pic}} = 2{,}7\,\text{cm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du diamètre trouvé est correct, à cette distance de l'ouverture.

b. **Résoudre le problème** Toujours selon l'équation 8.12, on peut trouver l'ouverture D' qui produirait une tache deux fois plus grande. Cela implique un diamètre de la tache centrale :

$$D' = 2D_{\text{pic}} = 2 \times 2{,}7\,\text{cm} \ ,$$

et le rayon :

$$y' = \frac{1}{2}D' = 2{,}7\,\text{cm} \ .$$

L'angle intercepté par l'anneau sombre autour de cette tache est également lié à

$$\tan\theta_1 = \frac{y}{L}$$
$$\theta_1 = \arctan\frac{y}{L} = \arctan\frac{2{,}7\,\text{cm}}{5{,}40\,\text{m}} = 0{,}282° \ .$$

L'équation 8.12 permet de calculer la dimension D' à partir de l'angle trouvé :

$$D' = \frac{1{,}22\lambda}{\sin 0{,}282°} = 0{,}15\,\text{mm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du diamètre trouvé est correct, étant même précisément deux fois plus petit que le diamètre original.

De même, on aurait pu démontrer cela algébriquement en unissant les équations (i) et (ii) et en utilisant l'approximation des petits angles. Puisque θ_1 est largement inférieur à 10°, les équations (i) et (ii) pourraient s'écrire

$$\sin\theta_1 = \theta_1 = \frac{1{,}22\lambda}{D} \qquad \text{et} \qquad \tan\theta_1 = \theta_1 = \frac{y}{L} \ .$$

L'union des deux équations admet alors

$$y = \frac{1{,}22\lambda L}{D}$$

et, en cherchant le diamètre d'ouverture D' tel que $y' = 2y$, on trouve

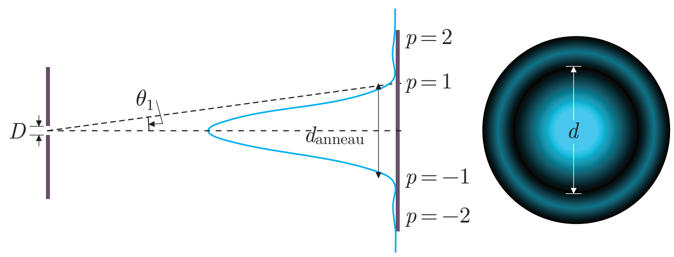
$$D' = \frac{1{,}22\lambda L}{y'} = \frac{1{,}22\lambda L}{2y}$$
$$= \frac{1{,}22\lambda L}{2 \times \frac{1{,}22\lambda L}{D}} = \frac{D}{2} \ ,$$

d'où

$$D' = \frac{1}{2} \times 0{,}30\,\text{mm} = 0{,}15\,\text{mm} \ .$$

.

E16 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre la situation avec la courbe d'intensité sur la figure de diffraction (à gauche). On peut voir sur l'écran (représentation de droite) un anneau sombre (formé par le premier minimum de diffraction) de diamètre d.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$L = 1{,}15\,\text{m}$	λ
$D = 220\,\mu\text{m}$	
$d_{\text{anneau}} = 7{,}44\,\text{mm}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 8.12 permettant de calculer l'angle θ_1 du premier anneau sombre sur l'écran.

Résoudre le problème Puisque le rayon de l'anneau sombre est largement inférieur à la distance entre l'ouverture et l'écran, on sait que l'angle θ_1 sera très faible, ce qui permet d'utiliser l'approximation des petits angles. L'équation 8.12 peut alors être simplifiée :

$$\sin\theta_1 = \frac{1{,}22\lambda}{D} = \theta_1 \ . \tag{i}$$

L'angle θ_1 est également lié au rayon y et à la distance L jusqu'à l'écran par

$$\tan\theta_1 = \frac{y}{L} = \theta_1 \ , \tag{ii}$$

où

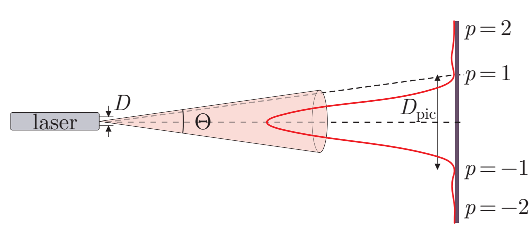
$$y = \frac{d_{\text{anneau}}}{2} = 3{,}72\,\text{mm} \ .$$

Les équations (i) et (ii) réunies permettent de trouver une expression de λ en fonction des autres paramètres, qui sont connus. D'abord, à partir de l'équation (i), on a

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{D\theta_1}{1{,}22} \\
&= \frac{D\frac{y}{L}}{1{,}22} = \frac{Dy}{1{,}22L} \\
\lambda &= \frac{220\,\mu\text{m} \times 3{,}72\,\text{mm}}{1{,}22 \times 1{,}15\,\text{m}} = 583\,\overset{\text{nm}}{\cancel{\text{mm}}} \ . \qquad \text{(réponse)}
\end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est correct, celle-ci faisant partie du visible.

P17 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre le laser produisant un jet de lumière dont l'angle de divergence est θ.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$P = 0{,}80\,\mathrm{mW}$	Φ
$\lambda = 632{,}8\,\mathrm{nm}$	D_{pic}
$D = 0{,}600\,\mathrm{mm}$	$I_{\text{moy, pic central}}$

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 8.12 dans laquelle l'angle θ est la moitié de l'angle de divergence recherché.

Résoudre le problème Selon l'équation 8.12, avec l'approximation des petits angles,

$$\theta \approx \sin\theta = \frac{1{,}22\lambda}{D} \ . \tag{i}$$

L'angle de divergence du laser est la largeur du pic central, soit le double de l'angle du premier minimum :

$$\Theta = 2\theta = 2 \times \frac{1{,}22\lambda}{D} = 2 \times \frac{1{,}22 \times 632{,}8\,\mathrm{nm}}{0{,}600\,\mathrm{mm}} = 0{,}002\,57\,\mathrm{rad}$$

$$\Theta = 2{,}57\,\mathrm{mrad} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'angle trouvé est correct, l'angle de divergence d'un laser étant effectivement très faible, ce qui en fait un rayon très concentré.

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 8.1 liant la position angulaire du premier minimum à la distance de l'écran.

Résoudre le problème Selon l'équation 8.1, l'angle impliqué étant très petit, on a

$$\theta \approx \tan\theta = \frac{y}{L} \ .$$

Puisque l'angle trouvé en **a.** est directement la largeur angulaire du pic central, la largeur du pic peut être substituée à y :

$$\Theta = \frac{d_1}{L}$$

$$D_{\mathrm{pic}} = \Theta L = 2{,}57\,\mathrm{mrad} \times 10{,}0\,\mathrm{m}$$

$$D_{\mathrm{pic}} = 25{,}7\,\mathrm{mm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du diamètre trouvé est correct compte tenu de la distance entre l'ouverture et l'écran.

c. **Identifier la clé** La clé est que l'irradiance moyenne du pic central est le rapport de la puissance totale atteignant la tache centrale à la superficie de cette tache.

Résoudre le problème La tache centrale est un cercle dont le diamètre a été calculé en **b.** Sa superficie est

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi D_{\mathrm{pic}}^2}{4} \ .$$

La puissance atteignant la tache centrale est égale à 84 % de la puissance produite par le laser :

$$P_{\text{pic central}} = 0{,}84P \ .$$

L'irradiance moyenne est donc

$$I_{\text{moy, pic central}} = \frac{P_{\text{pic central}}}{A} = \frac{0{,}84P}{\frac{\pi D_{\mathrm{pic}}^2}{4}} = \frac{4 \times 0{,}84P}{\pi D_{\mathrm{pic}}^2} = \frac{4 \times 0{,}84 \times 0{,}80\,\mathrm{mW}}{\pi D_{\mathrm{pic}}^2}$$

$$I_{\text{moy, pic central}} = 1{,}3\,\mathrm{W/m^2} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La valeur représente, pour une surface d'un mètre carré, une puissance de $1{,}3\,\mathrm{W/m^2}$, ce qui est de loin supérieur à la puissance du laser. Cependant, celui-ci n'éclaire qu'une très petite surface et peut y produire alors une grande irradiance.

Q18 **Identifier la clé** La clé est l'application du critère de Rayleigh concernant le diamètre de l'ouverture.

Résoudre le problème Une ouverture plus grande de la pupille laisse entrer davantage de lumière, mais ce n'est pas un besoin primordial lorsque la luminosité est élevée. Par contre, le pouvoir de résolution de l'œil augmente lorsque la plus petite ouverture du système optique (en l'occurrence la pupille) est plus grande. Un prédateur aura donc une vision plus nette, pourra distinguer des détails plus fins ou plus éloignés, ce qui l'aide entre autres à apercevoir plus efficacement des proies dissimulées ou des mouvements plus subtils.

Q19 **Identifier la clé** La clé est l'équation 8.15 du critère de Rayleigh liant l'angle entre les deux objets, le diamètre de l'ouverture et la longueur d'onde.

Résoudre le problème Dans le but de mieux distinguer les deux objets, on souhaite réduire l'angle critique de distinction entre deux points θ_R. L'équation 8.15 permet de déterminer les paramètres à modifier :

$$\theta_R = \frac{1{,}22\lambda}{D} \ .$$

Le diamètre de l'ouverture étant au dénominateur, son augmentation provoque la diminution de θ_R. Puisque l'ouverture impliquée est la pupille, c'est une réduction de la luminosité qui provoquera la dilatation de la pupille et la réduction de θ_R (possibilité (i)).

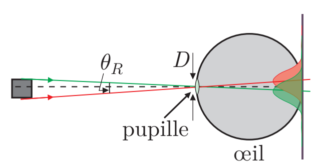
D'autre part, on suggère une variation de la distance L entre les objets et l'ouverture. Cette distance L est liée à l'angle θ sous-tendu entre les deux objets selon l'équation 8.1 :

$$\theta_R = \frac{y}{L} \ .$$

Pour une même distance absolue entre les deux objets, c'est une diminution de la distance L qui fera augmenter θ et aidera à distinguer les objets (possibilité (iv)), ce qui est logique puisqu'en se rapprochant des objets on les distingue mieux.

Les possibilités (i), pour diminuer θ_{R}, et (iv), pour augmenter β (réponse)

E20 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre l'œil avec une pupille (ouverture circulaire) de diamètre D. L'œil reçoit un jet de lumière dont l'angle d'ouverture est θ_R.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$D_{\min} = 1{,}00\,\mathrm{mm}$	$\theta_{R,\min}$
$D_{\max} = 7{,}00\,\mathrm{mm}$	$\theta_{R,\max}$
$\lambda = 550\,\mathrm{nm}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 8.15 du critère de Rayleigh liant l'angle θ_1 au diamètre de l'ouverture D.

Résoudre le problème Selon le critère de Rayleigh,

$$\theta_R = \frac{1{,}22\lambda}{D} \ .$$

Cette équation peut être appliquée pour les diamètres $D_{\max}$ et $D_{\min}$.

a.

$$\theta_{R,\max} = \frac{1{,}22\lambda}{D_{\max}} = \frac{1{,}22 \times 550 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}}{7{,}00\,\mathrm{mm}} = 9{,}59 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad}$$

Converti en degrés, cet angle est

$$\theta_{R,\max} = 9{,}59 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad} \times \frac{360°}{2\pi\ \mathrm{rad}} = 0{,}005\,49° \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b.

$$\theta_{R,\min} = \frac{1{,}22\lambda}{D_{\min}} = \frac{1{,}22 \times 550 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}}{1{,}00\,\mathrm{mm}} = 6{,}71 \times 10^{-4}\,\mathrm{rad}$$

Converti en degrés, cet angle est

$$\theta_{R,\min} = 6{,}71 \times 10^{-4}\,\mathrm{rad} \times \frac{360°}{2\pi\ \mathrm{rad}} = 0{,}038\,4° \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur des angles trouvés est correct ; ce sont de très petits angles, mais un détail au loin représente effectivement un très petit angle.

E21 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$D = 4{,}00\,\mathrm{m}$	d_{objet}
$L_{\text{TL}} = 3{,}84 \times 10^5\,\mathrm{km}$	
$\lambda = 550\,\mathrm{nm}$	

Identifier la clé La clé est le critère de Rayleigh définissant l'angle le plus faible entre deux points distinguables.

Résoudre le problème Le critère de Rayleigh est

$$\theta_R = \frac{1{,}22\lambda}{D} \ .$$

L'angle le plus faible intercepté par un objet dont on peut distinguer les deux extrémités est donc

$$\theta_R = \frac{1{,}22 \times 550 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}}{4{,}00\,\mathrm{m}} = 1{,}68 \times 10^{-7}\,\mathrm{rad} \ .$$

On trouve ensuite la longueur qu'un objet doit avoir sur la Lune pour intercepter cet angle. Grâce à l'approximation des petits angles, on peut affirmer que

$$\frac{\theta_R}{2} \approx \sin\frac{\theta_R}{2} = \frac{d_{\text{objet}}/2}{L}$$
$$d_{\text{objet}} = \theta_R L = 1{,}68 \times 10^{-7}\,\mathrm{rad} \times 3{,}84 \times 10^8\,\mathrm{m} = 64{,}4\,\mathrm{m} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Cette longueur est la longueur minimale qu'un objet doit avoir pour ne pas avoir l'apparence d'une tache pour l'observateur. Encore faudrait-il, pour reconnaître un objet, pouvoir distinguer ses différentes parties, et alors qu'il soit beaucoup plus grand que 64,4 m. Cela prouve qu'on ne peut pas s'attendre à voir, depuis la Terre, les artefacts que les humains ont laissés sur la Lune.

E22 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$d_{\text{phares}} = 1{,}7\,\mathrm{m}$	$L_{\max}$
$D_{\text{pupille}} = 2{,}2\,\mathrm{mm}$	
$\lambda = 450\,\mathrm{nm}$	
$D_{\text{jumelles}} = 7{,}5\,\mathrm{cm}$	

a. Identifier la clé La clé est le critère de Rayleigh permettant de déterminer la distance L maximale.

Résoudre le problème Le critère de Rayleigh est

$$\theta_R = \frac{1{,}22\lambda}{D_{\text{pupille}}} \ .$$

La distance L est contenue dans l'angle θ_R par la relation

$$\frac{\theta_R}{2} \approx \sin\frac{\theta_R}{2} = \frac{d_{\text{phares}}/2}{L} ,$$

l'approximation des petits angles étant permise pour cette distance.
L'union des deux équations admet

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{1{,}22\lambda}{D_{\text{pupille}}}\right)}{2} &= \frac{d_{\text{phares}}/2}{L} \\ L_{\max} &= \frac{D_{\text{pupille}} d_{\text{phares}}}{1{,}22\lambda} && \text{(i)} \\ &= \frac{2{,}2\times10^{-3}\,\text{m}\times1{,}7\,\text{m}}{1{,}22\times450\times10^{-9}\,\text{m}} \\ L_{\max} &= 6{,}8\,\text{km} . && \text{(réponse)} \end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance trouvée est correct.

b. Résoudre le problème On peut reprendre l'équation (i) développée en **a.** en ne modifiant que le diamètre D de l'ouverture pour trouver une nouvelle distance maximale :

$$\begin{aligned} L_{\max} &= \frac{D d_{\text{phares}}}{1{,}22\lambda} && \text{(i)} \\ &= \frac{0{,}075\,\text{m}\times1{,}7\,\text{m}}{1{,}22\times450\times10^{-9}\,\text{m}} \\ L_{\max} &= 2{,}3\times10^{2}\,\text{km} . && \text{(réponse)} \end{aligned}$$

Valider la réponse L'augmentation de la distance de vision nette est impressionnante avec des jumelles, mais il s'agit bien d'une distance de vision environ 34 fois plus grande pour un diamètre d'ouverture 34 fois plus grand également.

P23 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$D = 150\,\text{mm}$	D_{pic}
$L = 0{,}750\,\text{m}$	θ_R
$\lambda = 550\,\text{nm}$	Δy

a. Identifier la clé La clé est l'équation 8.15 du critère de Rayleigh.

Résoudre le problème Selon l'équation 8.15,

$$\theta_R = \frac{1{,}22\lambda}{D} ,$$

où le diamètre de l'ouverture du télescope correspond au diamètre de son miroir. Par ailleurs, à la limite du pouvoir de résolution, l'angle θ_R est l'angle entre le centre de la figure et le premier minimum, représenté par l'équation 8.1 :

$$\theta \approx \tan\theta = \frac{y}{L} .$$

Ainsi,

$$y = \theta L = \theta_R L = \frac{1{,}22\lambda L}{2D} .$$

Le diamètre de la figure est

$$D_{\text{pic}} = 2y = \frac{1{,}22\lambda L}{D} = \frac{1{,}22 \times 550 \times 10^{-9}\,\text{m} \times 0{,}75\,\text{m}}{0{,}150\,\text{m}}$$

$$D_{\text{pic}} = 6{,}71\ \mu\text{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du diamètre trouvé est correct pour une longueur d'onde visible.

b. Identifier la clé La clé est l'équation 8.1 liant la distance trouvée en **a.** à l'angle entre les deux mêmes points.

Résoudre le problème Soit

$$\theta = \frac{y}{L}\ .$$

La distance de 6,71 μm étant le diamètre de la figure de diffraction, l'angle θ entre les deux étoiles est :

$$\theta = \frac{y}{L} = \frac{d}{2L} = \frac{6{,}71\ \mu\text{m}}{2 \times 0{,}750\,\text{m}} = 4{,}47 \times 10^{-6}\,\text{rad}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse En degrés, il s'agit d'un angle de 0,923" (0,923 minute d'arc). L'angle trouvé est évidemment très faible, en accord avec la distance angulaire entre deux étoiles dans le ciel.

c. Identifier la clé La clé est l'équation 8.1 liant l'angle trouvé en **b.** à la distance entre le miroir et l'oculaire et à la distance entre les images des deux étoiles sur un écran au foyer du miroir.

Résoudre le problème La distance angulaire trouvée en **b.** est le double de la distance entre le centre et le premier minimum de diffraction d'une source. Cependant, pour de petits angles, comme c'est le cas ici, on peut appliquer l'équation 8.1 pour un angle qui représente la largeur angulaire du pic central :

$$\theta = \frac{y}{L}$$

$$\Delta y = L\theta = 0{,}75\,\text{m} \times 4{,}47 \times 10^{-6}\,\text{rad} = 3{,}36\ \mu\text{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur trouvé est correct pour la distance entre les images de deux étoiles très rapprochées, comme on les voit dans un télescope.

R24 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$f_{\text{ob}} = 3{,}50\,\text{mm}$	G_{com}
$d_{\text{obj}} = 10{,}0\,\text{mm}$	Δ_y
$f_{\text{oc}} = 15{,}0\,\text{mm}$	θ'
$l = 200\,\text{mm}$	
$\lambda = 550\,\text{nm}$	

a. Identifier la clé La clé est l'équation 6.33 qui définit le grossissement commercial d'un microscope.

Résoudre le problème Le grossissement commercial est :

$$G_{\text{com}} = -\frac{l}{f_{\text{ob}}}\frac{0{,}250\,\text{m}}{f_{\text{oc}}} = \left(-\frac{200\,\text{mm}}{3{,}50\,\text{mm}}\right)\left(\frac{0{,}250\,\text{m}}{15{,}0\,\text{mm}}\right)$$

$$G_{\text{com}} = -952\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du grossissement trouvé est correct.

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que la longueur à considérer pour le montage de diffraction est la distance objet de l'objectif.

Résoudre le problème L'équation 6.21 permet de calculer la distance à laquelle l'objet doit se trouver devant l'objectif pour que l'image finale soit à l'infini :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$p = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{q}} \ . \tag{i}$$

Mais d'abord, il faut connaître la distance image qui produira ces conditions. On sait que la longueur optique du microscope est la distance entre les foyers des deux lentilles. La distance totale entre les lentilles est donc

$$d = f_{\mathrm{ob}} + l + f_{\mathrm{oc}} = 3{,}50\,\mathrm{mm} + 200\,\mathrm{mm} + 15{,}0\,\mathrm{mm} = 218{,}5\,\mathrm{mm} \ .$$

Aussi, si on veut que l'oculaire produise une image à l'infini, son objet doit être à son foyer, c'est-à-dire que l'image produite par l'objectif doit se trouver à 15,0 mm de l'oculaire. La distance entre les lentilles étant connue, on trouve ainsi la distance image de l'objectif :

$$q_{\mathrm{ob}} = d \ - \ p_{\mathrm{oc}} = 218{,}5\,\mathrm{mm} - 15{,}0\,\mathrm{mm} = 203{,}5\,\mathrm{mm} \ .$$

On peut maintenant utiliser l'équation (i) pour calculer la distance objet sous le microscope :

$$p_{\mathrm{ob}} = \frac{1}{\frac{1}{3{,}50\,\mathrm{mm}} - \frac{1}{203{,}5\,\mathrm{mm}}} = 3{,}561\,25\,\mathrm{mm} \ .$$

On connaît enfin la longueur impliquée dans le phénomène de diffraction et les équations 8.1 et 8.15 permettent de calculer les dimensions de l'objet observé.

Vu le grossissement du microscope, il est clair que l'approximation des petits angles est valide, ce qui permet d'écrire

$$\theta = \frac{\Delta y}{L} \qquad \text{et} \qquad \theta_R = \frac{1{,}22\lambda}{D} \ .$$

En principe, la distance y est le rayon de la tache centrale, mais vu l'approximation des petits angles, on peut l'utiliser pour le diamètre, d'où

$$\theta = \frac{\Delta y}{L} = \theta_R = \frac{1{,}22\lambda}{D}$$

$$\Delta y = \frac{1{,}22\lambda L}{D} = \frac{1{,}22 \times 550 \times 10^{-9}\,\mathrm{m} \times 3{,}561\,25\,\mathrm{mm}}{10{,}0\,\mathrm{mm}} = 239\,\mathrm{nm} \ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur trouvé est petit, mais plausible puisqu'il s'agit d'un sujet observé au microscope.

c. **Identifier la clé** La clé est le fait que l'angle réel sous-tendu par l'objet est augmenté par le grossissement du microscope trouvé en **a.**

Résoudre le problème L'angle réel sous-tendu par l'objet est donné par le rapport de son diamètre à sa distance devant l'objectif (l'approximation des petits angles étant valide) :

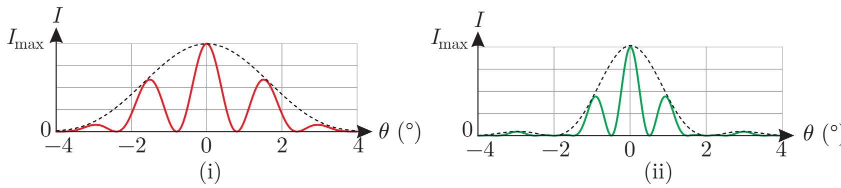
$$\theta = \frac{y}{L} \ .$$

L'angle obtenu est en radians. Cet angle, multiplié par le grossissement du microscope, donne l'angle perçu dans l'oculaire :

$$\theta' = G\frac{y}{L} = 952 \times \frac{239 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}}{3{,}56 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 0{,}063\,9\,\mathrm{rad} \ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'angle trouvé est correct, équivalent à 3,7° pour l'œil de l'observateur.

Q25 **Identifier la clé** La clé est le fait que les deux graphiques de la question, reproduits ci-dessous, permettent de déterminer la position des minimums de diffraction et des minimums d'interférence.



a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 7.17 de l'interférence selon laquelle $d \sin\theta = m_c\lambda$. Pour un même ordre d'interférence (on peut voir le maximum d'ordre 1 à droite du centre sur chaque graphique) et pour une même longueur d'onde, un angle θ plus élevé entraîne une distance d plus faible entre les fentes.

Résoudre le problème C'est sur le graphique (i) que la position angulaire du maximum d'ordre 1 est la plus grande (environ 1,5° contre 1° sur le graphique (ii)), et c'est donc dans le cas (i) que la distance est la plus faible.

Le système (i) (réponse)

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 8.5 de la diffraction selon laquelle $a \sin\theta = p\lambda$. Pour un même ordre de diffraction (on peut voir le minimum d'ordre 1 à droite du centre sur chaque graphique) et pour une même longueur d'onde, un angle θ plus élevé entraîne une largeur a plus faible des fentes.

Résoudre le problème Sur le graphique (i), il semble que ce soit à 4° qu'apparaît le premier minimum de diffraction (écrasement des maximums d'interférence). Sur le graphique (ii), cela se produit à environ 2°. Le système (i) est celui où la position angulaire du premier minimum de diffraction est le plus grand : c'est donc le système où les fentes sont les moins larges.

Le système (i) (réponse)

c. **Identifier la clé** La clé est la comparaison des équations 7.17 et 8.5 pour chacun des deux systèmes.

Résoudre le problème Selon les équations 7.17 et 8.5, le rapport d/a peut être exprimé ainsi :

$$\frac{d}{a} = \frac{\left(\frac{m\lambda}{\sin\theta_m}\right)}{\left(\frac{p\lambda}{\sin\theta_p}\right)} = \frac{m\lambda \sin\theta_p}{p\lambda \sin\theta_m} = \frac{m \sin\theta_p}{p \sin\theta_m} .$$

On peut trouver la valeur du rapport assez rapidement pour les deux systèmes si on parvient à définir un angle pour lequel on peut déterminer les ordres m et p, ce qui est possible sur chaque graphique.

Sur le graphique (i), on perçoit qu'à 4° se trouvent à la fois le premier minimum de diffraction ($p = 1$) et approximativement aussi le troisième maximum d'interférence ($m = 3$). Ainsi, pour ce système, avec $\theta_p = 1$ et $\theta_m = 3$:

$$\frac{d}{a} = \frac{m \sin\theta_p}{p \sin\theta_m} \approx \frac{3}{1} .$$

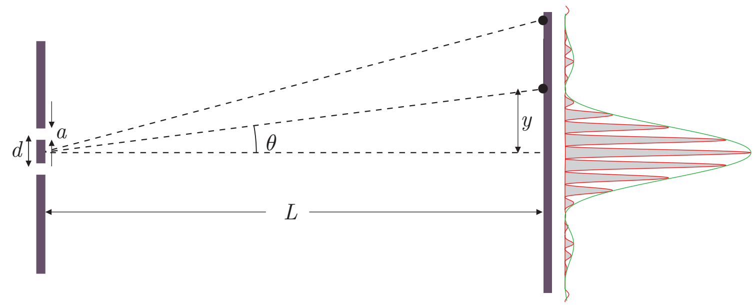
Sur le graphique (ii), on trouve à environ 2° le premier minimum de diffraction ($p = 1$) et le deuxième maximum d'interférence ($m = 2$). Ainsi,

$$\frac{d}{a} = \frac{m \sin\theta_p}{p \sin\theta_m} \approx \frac{2}{1} .$$

C'est donc sur le graphique (ii) que le rapport d/a est le plus faible.

Le système (ii) (réponse)

E26 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre la situation et la courbe d'intensité de la figure de diffraction et d'interférence produite par les deux fentes. Le pic central de diffraction (courbe verte) contient plusieurs maximums d'interférence (courbe rouge).



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$d = 0{,}40\,\text{mm}$	N_{central}
$a = 0{,}080\,\text{mm}$	$N_{\text{secondaire}}$
$L = 80{,}0\,\text{cm}$	
$\lambda = 632{,}8\,\text{nm}$	

a. Identifier la clé La clé consiste à déterminer l'ordre m d'interférence à l'angle où se trouve le minimum de diffraction d'ordre $p = 1$.

Résoudre le problème Par les propriétés de la figure de diffraction, on détermine l'angle, depuis les fentes, correspondant au premier minimum de diffraction. Selon l'équation 8.5,

$$a \sin\theta = p\lambda \ .$$

Pour $p = 1$, le sinus de l'angle θ est

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{p\lambda}{a} \qquad \text{(i)} \\ &= \frac{1 \times 632{,}8 \times 10^{-9}\,\text{m}}{0{,}080 \times 10^{-3}\,\text{m}} = 7{,}91 \times 10^{-3} \ . \end{aligned}$$

La distance à l'écran L n'est pas utile, puisque l'angle θ suffit. Pour chaque distance L, il est possible de trouver une distance y par rapport au centre, mais on ne donne ni ne demande aucune information sur y. En outre, il n'est pas nécessaire de calculer l'angle lui-même pour trouver ensuite l'ordre d'interférence m, puisque celui-ci se calcule aussi à partir du sinus de cet angle. On peut donc utiliser cette valeur de $\sin\theta$ dans l'équation 7.17 servant à déterminer m. L'équation 7.17 pour l'interférence est

$$d \sin\theta = m\lambda \ .$$

En isolant m, on obtient

$$m = \frac{d \sin\theta}{\lambda} \ . \qquad \text{(ii)}$$

C'est lorsqu'un minimum d'interférence se trouve à l'intérieur du maximum central de diffraction que la frange d'interférence qu'il délimite est complète. Ainsi, c'est une valeur demi-entière de m qu'on doit atteindre pour compter une frange brillante complète de plus :

$$m = \frac{0{,}40 \times 10^{-3}\,\text{m} \times 7{,}91 \times 10^{-3}}{632{,}8 \times 10^{-9}\,\text{m}} = 5{,}00 \ .$$

Cela indique que le centre d'une frange d'interférence est atténué complètement par le premier minimum de diffraction. Le minimum d'interférence qui précède ce point est $m_d = 4$ (l'équivalent de $m_c = 4{,}5$), et les franges d'interférence complètes entre le centre et cette limite sont les franges d'ordre $m = 1$, 2, 3 et 4. On trouve donc quatre franges brillantes complètes de part et d'autre de la frange centrale (que l'on compte également), pour un total de neuf franges brillantes d'interférence complètes à l'intérieur du maximum central de diffraction :

$$N_{\text{central}} = 9 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du nombre de franges d'interférence est correct pour cette expérience.

b. Identifier la clé La clé consiste à déterminer les ordres d'interférence là où se trouvent les minimums de diffraction d'ordres $p = 1$ et $p = 2$.

Résoudre le problème On a vu en **a.** que la cinquième frange d'interférence est atténuée en son centre vis-à-vis l'angle où $p = 1$. La première frange d'interférence complète au-delà de ce point pourra être la sixième.

On détermine ensuite, avec l'équation (i), le sinus de l'angle correspondant au minimum de diffraction $p = 2$:

$$\sin\theta = \frac{2 \times 632{,}8 \times 10^{-9}\,\text{m}}{0{,}080 \times 10^{-3}\,\text{m}} = 1{,}582 \times 10^{-2} \ .$$

On trouve maintenant l'ordre d'interférence auquel correspond cette valeur de $\sin\theta$. Selon l'équation (ii),

$$m = \frac{d\sin\theta}{\lambda} = \frac{0{,}40 \times 10^{-3}\,\text{m} \times 1{,}582 \times 10^{-2}}{632{,}8 \times 10^{-9}\,\text{m}} = 10 \ .$$

Cela indique que le centre de la dixième frange d'interférence est atténué complètement par le deuxième minimum de diffraction. Le minimum d'interférence qui précède ce point est $m_d = 9$, et les franges d'interférence complètes de la sixième jusqu'à ce point sont les franges d'ordre $m =$ 6, 7, 8 et 9. On trouve donc quatre franges brillantes complètes entre les premier et deuxième minimums de diffraction :

$$N_{\text{secondaire}} = 4 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du nombre de pics d'interférence est correct, ce nombre correspondant au nombre de pics complets entre le centre et le premier minimum de diffraction.

E27 Identifier la clé La clé consiste à comparer les termes communs dans les équations 7.17 et 8.5.

Résoudre le problème L'équation 7.17 pour l'interférence est

$$d\sin\theta = m\lambda \ .$$

L'équation 8.5 pour la diffraction est

$$a\sin\theta = p\lambda \ .$$

Dans ces deux équations, on peut isoler le terme $\frac{\lambda}{\sin\theta}$, ces deux variables représentant la même chose dans les deux phénomènes. On a alors

$$\frac{d}{m} = \frac{\lambda}{\sin\theta} = \frac{a}{p} \ .$$

On peut ainsi constater la proportionnalité entre m et p puisque les valeurs a et d sont fixes pour un montage donné :

$$m = \frac{d}{a}p \ .$$

L'augmentation de l'ordre d'interférence entre deux minimums de diffraction peut être établi de la manière suivante :

$$\Delta m = \frac{d}{a}\Delta p \ .$$

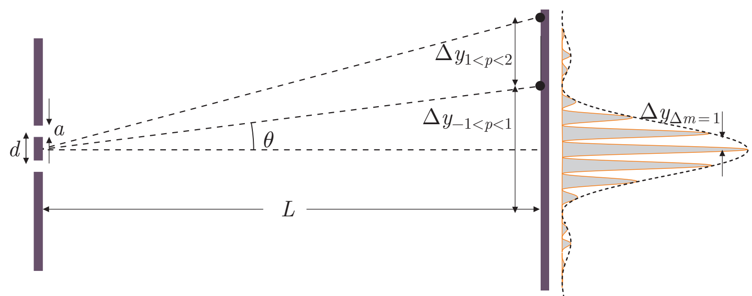
Entre deux minimums de diffraction consécutifs, c'est-à-dire lorsque $\Delta p = 1$, on a

$$\Delta m = \frac{d}{a} \times 1 = \frac{d}{a} \ .$$

Tous les pics de diffraction contiennent donc $\frac{d}{a}$ ordres d'interférence (sans égard aux franges complètes ou incomplètes) :

$$\Delta m_{\Delta p=1} = \frac{d}{a} = \text{une constante} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

E28 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre la situation et la courbe d'intensité de la figure de diffraction et d'interférence produite par les deux fentes. Le pic central de diffraction (courbe pointillée) contient plusieurs maximums d'interférence (courbe orange).



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\lambda = 589\,\text{nm}$	Δy
$a = 100\,\mu\text{m}$	$y_1 - y_{-1}$
$d = 400\,\mu\text{m}$	$y_2 - y_1$
$L = 1{,}60\,\text{m}$	N

a. **Identifier la clé** La clé est le fait que les franges brillantes les plus fines sont celles du phénomène d'interférence.

Résoudre le problème On cherche la distance entre deux franges d'interférence et, comme la distance est uniforme entre ces franges, on peut calculer directement la position de la frange d'ordre $m = 1$. La valeur de cette position (distance du centre au premier maximum) est égale à la distance séparant toutes les franges d'interférence consécutives. L'approximation des petits angles étant valide, les équations 8.1 et 7.17 admettent

$$d\theta \approx d \sin\theta = m\lambda \qquad \text{et} \qquad \frac{y}{L} = \sin\theta \approx \theta$$

$$\frac{y}{L} = \theta = \frac{m\lambda}{d}$$

$$\Delta y = \frac{m\lambda L}{d} \qquad \text{(i)}$$

$$\Delta y = \frac{1 \times 589 \times 10^{-9}\,\text{m} \times 1{,}60\,\text{m}}{400 \times 10^{-6}\,\text{m}} = 2{,}40\,\text{mm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance trouvée est correct.

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 8.5 de la diffraction avec $p = 1$.

Résoudre le problème On cherche la distance entre les minimums de diffraction $p = -1$ et $p = 1$. L'approximation des petits angles étant valide, les équations 8.1 et 8.5 admettent

$$a\theta \approx a \sin\theta = p\lambda \qquad \text{et} \qquad \frac{y}{L} = \sin\theta \approx \theta$$

$$\frac{y}{L} = \theta = \frac{m\lambda}{d}$$

$$y = \frac{p\lambda L}{d} \qquad \text{(ii)}$$

$$y_{p=1} = \frac{1 \times 589 \times 10^{-9}\,\text{m} \times 1{,}60\,\text{m}}{100 \times 10^{-6}\,\text{m}} = 9{,}42\,\text{mm}\ .$$

Cette distance est celle qu'il y a entre le centre et l'un des minimums d'ordre ±1. La distance entre ces deux minimums est donc le double de la distance trouvée :

$$y_1 - y_{-1} = 2y_{p=1} = 2 \times 9{,}42\,\text{mm} = 18{,}8\,\text{mm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance trouvée est correct.

c. **Identifier la clé** La clé consiste à calculer la position du second minimum de diffraction avec l'équation (ii) trouvée en **b.**

Résoudre le problème On obtient

$$y_{p=2} = \frac{2 \times 589 \times 10^{-9}\,\text{m} \times 1{,}60\,\text{m}}{100 \times 10^{-6}\,\text{m}} = 18{,}85\,\text{mm}\ .$$

La largeur d'un pic secondaire est la différence entre les positions des minimums $p = 1$ et $p = 2$ ($y_{p=1}$ ayant été trouvé en **a.**) :

$$y_2 - y_1 = y_{p=2} - y_{p=1} = 18{,}85\,\text{mm} - 9{,}42\,\text{mm} = 9{,}42\,\text{mm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Les pics secondaires sont environ deux fois moins larges que le pic central, comme il se doit pour une figure de diffraction.

d. **Identifier la clé** La clé consiste à déterminer l'ordre d'interférence coïncidant avec la position où $p = 1$.

Résoudre le problème On a trouvé en **b.** que le premier minimum de diffraction se trouve à 9,42 mm. À cet endroit, l'équation (i) permet de déterminer m :

$$y = \frac{m\lambda L}{d} \qquad \Rightarrow \qquad m = \frac{dy}{\lambda L}$$

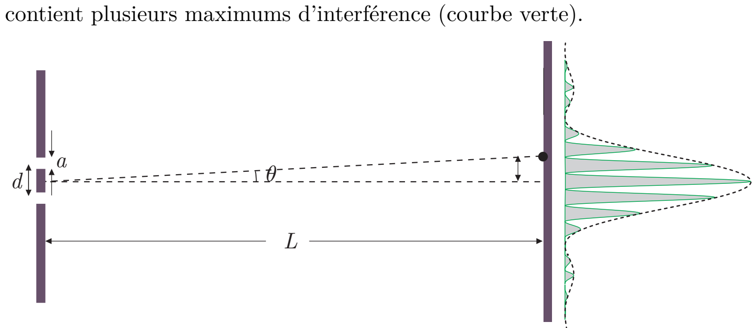
$$m = \frac{400 \times 10^{-6}\,\text{m} \times 9{,}42\,\text{mm}}{589\,\text{nm} \times 1{,}60\,\text{m}} = 4\ .$$

Le quatrième maximum d'interférence est écrasé par le premier minimum de diffraction ; il n'est donc pas complet. La frange complète d'ordre le plus élevé de chaque côté du centre est $m = \pm3$. On a donc trois franges complètes de chaque côté du centre en plus de la frange centrale, pour un total de

sept franges complètes. (réponse)

Valider la réponse L'ordre de grandeur du nombre de franges trouvé est correct.

E29 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre la situation et la courbe d'intensité de la figure de diffraction et d'interférence produite par les deux fentes. Le pic central de diffraction (courbe pointillée) contient plusieurs maximums d'interférence (courbe verte).



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\lambda = 546\,\text{nm}$	$I_{\theta=1{,}20^\circ}$
$a = 15{,}0\,\mu\text{m}$	
$d = 40{,}0\,\mu\text{m}$	
$L = 1{,}30\,\text{m}$	
$I_{\max} = 1{,}05\,\text{mW/m}^2$	

Identifier la clé La clé est l'équation 8.17 donnant l'irradiance pour les phénomènes combinés d'interférence et de diffraction.

Résoudre le problème Selon l'équation 8.17,

$$I = I_{\max}\cos^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 ,$$

$$\text{où } \Delta\Phi = \frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad \alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda} .$$

Sans égard à l'approximation des petits angles, on a également

$$d\sin\theta = m\lambda \qquad \text{et} \qquad a\sin\theta = p\lambda .$$

Donc,

$$I = I_{\max}\cos^2\left(\frac{2\pi d\sin\theta}{2\lambda}\right)\left(\frac{\sin(\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda})}{\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}\right)^2 .$$

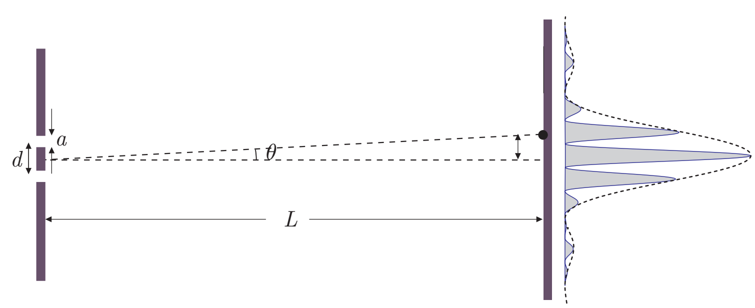
Ces valeurs étant toutes connues, on obtient

$$I_{\theta=1{,}20^\circ} = 1{,}05\,\text{mW/m}^2\cos^2\left(\frac{2\times\pi\times 40{,}0\,\mu\text{m}\times\sin 1{,}20^\circ}{2\times 546\,\text{nm}}\right)\times\left(\frac{\sin(\frac{\pi\times 15{,}0\,\mu\text{m}\times\sin 1{,}20^\circ}{546\,\text{nm}})}{\frac{\pi\times 15{,}0\,\mu\text{m}\times\sin 1{,}20^\circ}{546\,\text{nm}}}\right)^2$$

$$I_{\theta=1{,}20^\circ} = 3{,}50\,\mu\text{W/m}^2 . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'irradiance trouvée est correct, celle-ci étant inférieure à la valeur maximale au centre.

P30 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre la situation et la courbe d'intensité de la figure de diffraction et d'interférence produite par les deux ouvertures. Le pic central de diffraction (courbe pointillée) contient plusieurs maximums d'interférence (courbe bleue).



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$f = 2\,500\,\mathrm{Hz}$	$I_{y=3,00\,\mathrm{m}}$
$a = 40{,}0\,\mathrm{cm}$	
$d = 1{,}15\,\mathrm{m}$	
$L = 16{,}0\,\mathrm{m}$	
$v_{\mathrm{son}} = 343\,\mathrm{m/s}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 8.17 définissant l'irradiance d'un point en fonction du déphasage produit par la diffraction et l'interférence combinées.

Résoudre le problème Selon l'équation 8.17,

$$I = I_{\max}\cos^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 . \tag{i}$$

Selon les équations 8.18 et 8.19, les angles de déphasage $\Delta\Phi$ et α sont définis par

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad \alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda} .$$

Un point situé à 3,00 m du centre à une distance de 16,0 m des fentes intercepte un angle dépassant 10°, ce qui rend incorrecte l'approximation des petits angles. On peut donc calculer l'angle θ représentant la position du micro à l'aide de

$$\tan\theta = \frac{y}{L} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arctan\left(\frac{3{,}00\,\mathrm{m}}{16{,}0\,\mathrm{m}}\right) = 0{,}185\,\mathrm{rad} .$$

De plus, on trouve la longueur d'onde λ à partir de la fréquence donnée et de la vitesse de l'onde :

$$\lambda = \frac{v_{\mathrm{son}}}{f} .$$

On a donc, pour $\Delta\Phi$ et α,

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi f d\sin\theta}{v_{\mathrm{son}}} \qquad \text{et} \qquad \alpha = \frac{\pi f a\sin\theta}{v_{\mathrm{son}}}$$

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi \times 2\,500\,\mathrm{Hz} \times 1{,}15\,\mathrm{m} \times \sin 0{,}185\,\mathrm{rad}}{343\,\mathrm{m/s}} = 9{,}71\,\mathrm{rad}$$
$$\alpha = \frac{\pi \times 2\,500\,\mathrm{Hz} \times 0{,}400\,\mathrm{m} \times \sin 0{,}185\,\mathrm{rad}}{343\,\mathrm{m/s}} = 1{,}69\,\mathrm{rad} .$$

L'équation (i) peut alors être exprimée de manière qu'elle donne la fraction d'irradiance par rapport à l'irradiance maximale au centre :

$$\frac{I}{I_{\max}} = \cos^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$
$$\frac{I}{I_{\max}} = \cos^2\left(\frac{9{,}71\,\mathrm{rad}}{2}\right)\left(\frac{\sin 1{,}69\,\mathrm{rad}}{1{,}69\,\mathrm{rad}}\right)^2$$
$$\frac{I}{I_{\max}} = 0{,}006\,78 = 0{,}678\,\% . \tag{réponse}$$

Valider la réponse La valeur trouvée est bien une fraction comprise entre 0 et 100 %, quoique très faible.

P31 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$a = 0{,}100\,\text{mm}$	λ_1
$d = 0{,}729\,\text{mm}$	λ_2
$p_1 = 2$	
$m_2 = 9$	
$\lambda_2 - \lambda_1 = 300\,\text{nm}$	
$c = 22{,}5\,\text{cm}$	

Identifier la clé La clé est le fait que l'endroit unique où $p_1 = 2$ et $m_2 = 9$ est caractérisé par le même angle dans les équations 7.17 et 8.5.

Résoudre le problème On peut trouver une expression de $\sin\theta$ dans chacune des équations 7.17 et 8.5 pour ensuite poser leur égalité. On a d'abord, pour l'interférence,

$$d\sin\theta = m_2\lambda_2 \qquad \Rightarrow \qquad \sin\theta = \frac{m_2\lambda_2}{d}\ ,$$

et ensuite, pour la diffraction,

$$a\sin\theta = p_1\lambda_1 \qquad \Rightarrow \qquad \sin\theta = \frac{p_1\lambda_1}{a}\ .$$

On peut donc affirmer que

$$\frac{m_2\lambda_2}{d} = \frac{p_1\lambda_1}{a} \qquad \Rightarrow \qquad am_2\lambda_2 = dp_1\lambda_1\ . \tag{i}$$

Par ailleurs, la relation entre λ_1 et λ_2 constitue une équation formant avec l'équation (i) un système de deux équations et deux inconnues. On pose $300\,\text{nm} = \Delta\lambda$ pour réduire les écritures durant le traitement :

$$\lambda_2 - \lambda_1 = 300\,\text{nm} = \Delta\lambda\ . \tag{ii}$$

Si on isole la longueur d'onde λ_1 dans l'équation (ii) pour insérer son expression dans l'équation (i), on obtient

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda\ .$$

L'équation (i) devient

$$\begin{aligned} am_2(\lambda_1 + \Delta\lambda) &= dp_1\lambda_1 \\ am_2\lambda_1 + am_2\Delta\lambda &= dp_1\lambda_1 \\ \lambda_1 &= \frac{am_2\Delta\lambda}{dp_1 - am_2} \\ \lambda_1 &= \frac{0{,}100\,\text{mm} \times 9 \times 300\,\text{nm}}{0{,}729\,\text{mm} \times 2 - 0{,}100\,\text{mm} \times 9} = 484\,\text{nm}\ . \end{aligned}$$

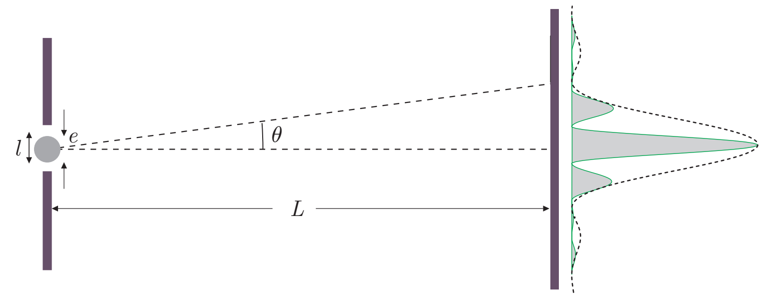
L'équation (ii) donne ensuite la valeur de λ_1 :

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda = 484\,\text{nm} + 300\,\text{nm} = 784\,\text{nm}$$

$$\lambda_1 = 484\,\text{nm} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = 784\,\text{nm}\ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur des longueurs d'onde trouvées est correct. À noter que les dimensions de la boîte ne sont d'aucune utilité pour résoudre ce problème.

P32 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre la situation et la courbe d'intensité de la figure de diffraction et d'interférence produite par les fentes créées par le filament. Le pic central de diffraction (courbe pointillée) contient plusieurs maximums d'interférence (courbe verte).



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$l = 0{,}765\,\mathrm{mm}$	e
$\lambda = 534{,}5\,\mathrm{nm}$	
$L = 1{,}35\,\mathrm{m}$	
$y_{p=1} = 2{,}65\,\mathrm{mm}$	
$y_{m=3} = 4{,}39\,\mathrm{mm}$	

Identifier la clé La clé est le fait que la différence de largeur de la fente et du filament représente la somme des largeurs des deux ouvertures restantes.

Résoudre le problème Si e est l'épaisseur du filament, la largeur totale de l'ouverture est réduite d'une quantité e et est séparée en deux fentes d'égales largeurs. La largeur de chaque fente est donc donnée par

$$a = \frac{l - e}{2} \ . \tag{i}$$

La distance entre les centres des deux fentes est donnée par la largeur du filament et deux fois la demi-largeur d'une fente, soit

$$d = \frac{a}{2} + e + \frac{a}{2} = e + a \ . \tag{ii}$$

Il s'agit de deux équations qui s'ajouteront aux équations de l'interférence et de la diffraction pour ce montage. La position d'un maximum d'interférence est régie par l'équation 7.17, pour laquelle on peut supposer que l'approximation des petits angles est correcte :

$$d\theta_m \approx d \sin\theta_m = m\lambda, \qquad \text{où} \qquad \theta_m \approx \tan\theta_m = \frac{y_m}{L}$$

$$\frac{m\lambda}{d} = \frac{y_m}{L}$$
$$L\lambda = \frac{dy_m}{m} \ . \tag{iii}$$

L'équation pour un minimum de diffraction est

$$a\theta_p \approx a \sin\theta_p = p\lambda, \qquad \text{où} \qquad \theta_p \approx \tan\theta_p = \frac{y_m}{L}$$

$$\frac{p\lambda}{a} = \frac{y}{L}$$
$$L\lambda = \frac{ay_p}{p} \ . \tag{iv}$$

La comparaison des équations (iii) et (iv) donne

$$\frac{dy_m}{m} = L\lambda = \frac{ay_p}{p} \ . \qquad \text{(v)}$$

Les équations (i), (ii) et (v) forment alors un système de trois équations à trois inconnues. Le remplacement de d (égal à $e + a$ selon l'équation (ii)) dans l'équation (v) admet

$$\frac{(e+a)y_m}{m} = \frac{ay_p}{p} \ .$$

En isolant a dans cette dernière équation, on peut ensuite faire la comparaison avec l'expression de a dans l'équation (i) :

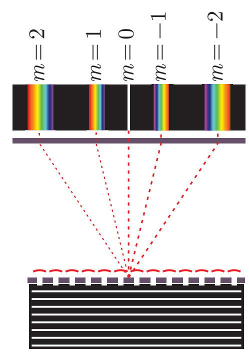
$$a = \frac{pey_m}{my_p - py_m} \ .$$

Selon l'équation (i),

$$\begin{aligned}
a &= \frac{l-e}{2} \\
a &= \frac{pey_m}{my_p - py_m} = \frac{l-e}{2} \\
e &= \frac{my_p - py_m}{py_m + my_p} \times l \\
&= \frac{(3 \times 2{,}65\,\text{mm} - 1 \times 4{,}39\,\text{mm})}{(1 \times 4{,}39\,\text{mm} + 3 \times 2{,}65\,\text{mm})} \times 0{,}765\,\text{mm} \\
e &= 0{,}221\,\text{mm} \ . && \text{(réponse)}
\end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'épaisseur trouvée est correct pour un mince filament, et il peut effectivement séparer la fente en deux fentes sans la voiler complètement.

Q33 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la situation. Des fronts d'onde plans rencontrent les fentes et l'écran présente des taches irisées représentant les différents ordres diffraction.



Identifier la clé La clé est le fait qu'à gauche du point central, la couleur à l'extrémité gauche de la tache est aussi la plus déviée ; de la même manière, la couleur la plus à droite dans les taches à droite du centre est aussi la plus déviée.

a. **Résoudre le problème** Selon l'équation 8.24 pour les réseaux, la déviation θ pour une certaine longueur d'onde λ dans la tache d'ordre m est

$$\theta = \arcsin \frac{m\lambda}{d} \ .$$

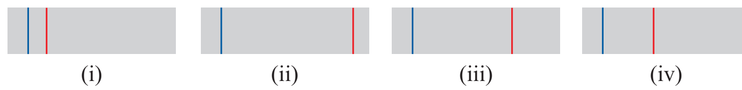
Ainsi, les longueurs d'onde les plus déviées sont les longueurs d'onde les plus élevées, soit celles qui tendent vers le rouge.
Les couleurs à l'extrémité gauche des taches à la gauche du centre étant les plus déviées, on y trouve

le rouge. (réponse)

b. **Résoudre le problème** Pour les mêmes raisons qu'en **a.**, la couleur la plus à droite dans les taches à la droite du centre est la couleur la plus déviée, soit le rouge. La couleur du côté gauche de ces taches est donc la couleur opposée au rouge dans le spectre visible, c'est-à-dire

le violet. (réponse)

Q34 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre les quatre figures de diffraction produites par les quatre différents réseaux.



Identifier la clé La clé est le fait que les figures montrent l'écart Δy entre les longueurs d'onde du bleu et du rouge.

Résoudre le problème Selon l'équation 8.24 pour les réseaux,

$$d \sin\theta = m\lambda \ .$$

On suppose, pour simplifier le traitement, que l'on applique l'approximation des petits angles. On ignore *a priori* si elle s'applique puisqu'on ne connaît pas les valeurs impliquées, mais qualitativement, l'ordre croissant du pas des quatre réseaux sera le même. Ainsi, on peut écrire

$$\theta = \frac{m\lambda}{d} \ .$$

On peut donc représenter par $\Delta\theta$ la différence de position angulaire des maximums des deux longueurs d'onde (bleu et rouge) :

$$\Delta\theta = \theta_R - \theta_B = \frac{m\lambda_R}{d} - \frac{m\lambda_R}{d} \ .$$

Pour un même réseau, au premier ordre, on obtient

$$\Delta\theta = \frac{1\lambda_R}{d} - \frac{1\lambda_R}{d} = \frac{1}{d}(\lambda_R - \lambda_B)$$
$$d = \frac{(\lambda_R - \lambda_B)}{\Delta\theta} \ .$$

On constate que d est inversement proportionnel à $\Delta\theta$, et puisque

$$\Delta\theta_{(\mathrm{i})} < \Delta\theta_{(\mathrm{iv})} < \Delta\theta_{(\mathrm{iii})} < \Delta\theta_{(\mathrm{ii})} \ ,$$

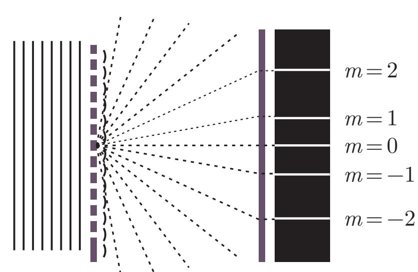
on aura

$$d_{(\mathrm{i})} > d_{(\mathrm{iv})} > d_{(\mathrm{iii})} > d_{(\mathrm{ii})} \ .$$

Finalement, on obtient

$$d_{(\mathrm{ii})} < d_{(\mathrm{iii})} < d_{(\mathrm{iv})} < d_{(\mathrm{i})} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

E35 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la situation. Des fronts d'onde plans rencontrent les fentes du réseau et l'écran présente des taches représentant les différents ordres de diffraction.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\lambda = 1{,}062\,\mu\mathrm{m}$	N_{ordres}
$n = 145\,\text{lignes/mm}$	

Identifier la clé La clé est le fait que les ordres présents sont tous ceux compris entre $\theta = 90°$ et $\theta = -90°$.

Résoudre le problème D'abord, on détermine le pas d du réseau à partir du nombre de lignes par millimètre :

$$d = \frac{1\,\mathrm{mm}}{145} = 6{,}90 \times 10^{-3}\,\mathrm{mm} = 6{,}90 \times 10^{-6}\,\mathrm{m} \ .$$

On peut ensuite déterminer la valeur m correspondant à $\theta = 90°$ à l'aide de l'équation 8.24 :

$$d \sin\theta = m\lambda \ .$$

Pour $\theta = 90°$, on a $\sin\theta = \sin 90° = 1$, et alors

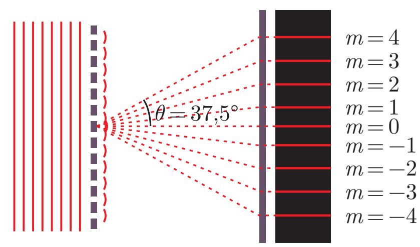
$$m = \frac{d}{\lambda} = \frac{6{,}90 \times 10^{-6}\,\text{m}}{1{,}062 \times 10^{-6}\,\text{m}} = 6{,}5 \ .$$

On apprend ainsi que l'ordre le plus élevé (m entier) présent à la sortie du réseau est l'ordre $m = 6$. On trouve donc 6 points brillants de chaque côté du point central, pour un total de 13 points en incluant la tache centrale :

$$N_{\text{ordres}} = 13 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La quantité d'ordres présents sur l'écran est correcte.

E36 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la situation. Des fronts d'onde plans rencontrent les fentes du réseau et l'écran présente des taches représentant les différents ordres de diffraction.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$l_{\text{réseau}} = 1{,}20\,\text{cm}$	N_{fentes}
$\lambda = 645\,\text{nm}$	
$\theta_{m=4} = 37{,}5°$	

Identifier la clé La clé consiste à déterminer le pas du réseau à l'aide de l'équation 8.24.

Résoudre le problème On détermine le pas du réseau à l'aide de

$$d \sin\theta = m\lambda \qquad \Rightarrow \qquad d = \frac{m\lambda}{\sin\theta}$$

$$d = \frac{4 \times 645 \times 10^{-9}\,\text{m}}{\sin 37{,}5°} = 4{,}24 \times 10^{-6}\,\text{m} \ .$$

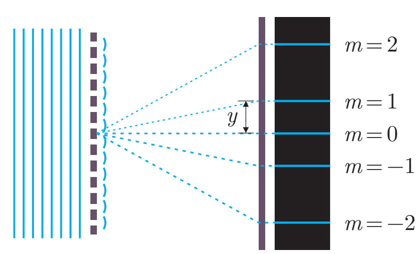
La distance entre deux fentes voisines est $4{,}24 \times 10^{-6}$ m. Le nombres de fentes sur une largeur de 1,20 cm est donné par l'équation 8.23, adaptée à une largeur de 1,20 cm :

$$d = \frac{1{,}20\,\text{cm}}{N}$$

$$N = \frac{1{,}20\,\text{cm}}{d} = \frac{0{,}012\,0\,\text{m}}{4{,}24 \times 10^{-6}\,\text{m}} = 2{,}83 \times 10^{3}\,\text{fentes} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du nombre de fentes trouvé est correct, celles-ci étant très fines.

E37 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la situation. Des fronts d'onde plans rencontrent les fentes du réseau et l'écran présente des taches représentant les différents ordres de diffraction. Le maximum d'ordre $m = 1$ se trouve à une distance $y = 85{,}5$ cm du centre.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$n = 500\,\text{lignes/mm}$	λ
$L = 3{,}28\,\text{m}$	
$y_{m=1} = 85{,}8\,\text{cm}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 8.24 appliquée pour $m = 1$.

Résoudre le problème L'équation 8.24 qui relie la longueur d'onde au pas du réseau et à un emplacement sur l'écran est

$$d \sin\theta = m\lambda\ . \tag{i}$$

On peut calculer l'angle θ à partir de l'emplacement de la tache à l'aide de l'équation 8.1 :

$$\tan\theta = \frac{y}{L} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arctan\frac{y}{L} = \arctan\frac{0{,}858\,\text{m}}{3{,}28\,\text{m}} = 14{,}7^\circ\ .$$

On doit également établir le pas du réseau à partir du nombre de fentes par millimètre :

$$d = \frac{1}{500\,\text{lignes/mm}} = 0{,}002\,00\,\text{mm} = 2\times10^{-6}\,\text{m}\ .$$

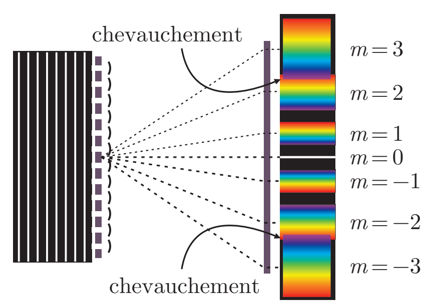
On peut alors calculer λ à partir de l'équation (i) :

$$\lambda = \frac{d\sin\theta}{m}$$

$$\lambda = \frac{2\times10^{-6}\,\text{m}\times\sin 14{,}7^\circ}{1} = 506\,\text{nm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est correct.

E38 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la situation. Des fronts d'onde plans rencontrent les fentes du réseau et l'écran présente des taches (où toutes les couleurs du spectre sont réunies) représentant les différents ordres de diffraction. À partir d'un certain ordre, il y a chevauchement des taches de deux ordres consécutifs.



Décortiquer le problème

Connue	Inconnues
$n = 3\,000\,\text{lignes/cm}$	$\theta_{400\,\text{nm},m=1,2,3...}$
	$\theta_{700\,\text{nm},m=1,2,3...}$

Identifier la clé La clé consiste à déterminer l'angle auquel on trouve chaque ordre des longueurs d'onde de 400 nm et 700 nm.

Résoudre le problème D'abord, on détermine le pas du réseau, sachant qu'il comporte 3 000 fentes par centimètre :

$$d = \frac{1}{3\,000\,\text{lignes/cm}} = 3{,}33\times10^{-4}\,\text{cm} = 3{,}33\times10^{-6}\,\text{m}\ .$$

L'équation 8.24 permet de calculer l'angle θ pour un ordre donné de chaque longueur d'onde :

$$d \sin\theta = m\lambda \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arcsin\frac{m\lambda}{d} \ .$$

On calcule d'abord le domaine des angles sur lequel s'étend le premier ordre des longueurs d'onde visibles. Pour 400 nm, on trouve

$$\theta_{1,400} = \arcsin\frac{1 \times 400 \times 10^{-9}\,\text{m}}{3{,}33 \times 10^{-6}\,\text{m}} = 6{,}89^\circ \ ,$$

et pour 400 nm, on a

$$\theta_{1,700} = \arcsin\frac{1 \times 700 \times 10^{-9}\,\text{m}}{3{,}33 \times 10^{-6}\,\text{m}} = 12{,}1^\circ \ .$$

Le rouge au premier ordre est la couleur la plus éloignée du centre. C'est le violet au second ordre qui est donc susceptible d'apparaître avant le rouge du premier ordre. On vérifie si, pour $\lambda = 400\,\text{nm}$, le second ordre apparaît avant l'angle de 12,1° :

$$\theta_{2,400} = \arcsin\frac{2 \times 400 \times 10^{-9}\,\text{m}}{3{,}33 \times 10^{-6}\,\text{m}} = 13{,}9^\circ \ .$$

Le second ordre apparaît à partir de 13,9°. Il n'y a donc pas chevauchement entre le premier et le deuxième ordre. On vérifie où se termine le deuxième ordre et où commence le troisième :

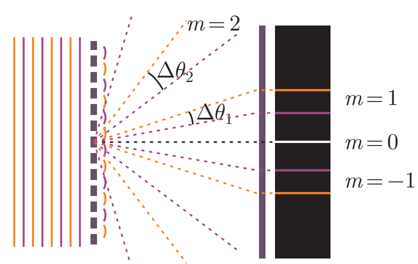
$$\theta_{2,700} = \arcsin\frac{2 \times 700 \times 10^{-9}\,\text{m}}{3{,}33 \times 10^{-6}\,\text{m}} = 24{,}8^\circ \ ,$$

$$\theta_{3,400} = \arcsin\frac{3 \times 400 \times 10^{-9}\,\text{m}}{3{,}33 \times 10^{-6}\,\text{m}} = 21{,}1^\circ \ .$$

Voilà ce qu'on cherchait. Le troisième ordre (avec les basses longueurs d'onde) apparaît avant que ne finisse le deuxième ordre.

Il y a chevauchement dès le deuxième ordre avec le troisième ordre. (réponse)

E39 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la situation. Des fronts d'onde plans rencontrent les fentes du réseau et l'écran présente des taches représentant les différents ordres de diffraction pour chaque couleur dans la lumière utilisée.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\lambda_v = 404{,}7\,\text{nm}$	$\Delta\theta_{1,\text{v-r}}$
$\lambda_r = 615{,}0\,\text{nm}$	$\Delta\theta_{2,\text{v-r}}$
$n = 600\,\text{lignes/mm}$	$m_{\max}$

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 8.24 qui permet de calculer l'angle θ pour un ordre et une longueur d'onde donnés.

Résoudre le problème Selon l'équation 8.24,

$$d \sin\theta = m\lambda \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arcsin\frac{m\lambda}{d} \ . \tag{i}$$

On détermine également le pas du réseau, sachant qu'il comporte 600 fentes par millimètre :

$$d = \frac{1}{600\,\text{lignes/mm}} = 1{,}667 \times 10^{-3}\,\text{mm} = 1{,}667 \times 10^{-6}\,\text{m} .$$

On calcule la position angulaire du premier ordre pour les longueurs d'onde λ_v et λ_r :

$$\theta_{\text{v},1} = \arcsin \frac{1 \times 404{,}7 \times 10^{-9}\,\text{m}}{1{,}667 \times 10^{-6}\,\text{m}} = 14{,}05^\circ ,$$

$$\theta_{\text{r},1} = \arcsin \frac{1 \times 615{,}0 \times 10^{-9}\,\text{m}}{1{,}667 \times 10^{-6}\,\text{m}} = 21{,}65^\circ .$$

La différence entre ces positions angulaires est

$$\Delta\theta_{1,\text{v-r}} = \theta_{\text{r},1} - \theta_{\text{v},1} = 21{,}65^\circ - 14{,}05^\circ = 7{,}60^\circ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'angle trouvé est correct.

b. Résoudre le problème Le même procédé qu'en **a.** permet de trouver la distance angulaire entre les deux taches du deuxième ordre :

$$\theta_{\text{v},2} = \arcsin \frac{2 \times 404{,}7 \times 10^{-9}\,\text{m}}{1{,}667 \times 10^{-6}\,\text{m}} = 29{,}05^\circ ,$$

$$\theta_{\text{r},2} = \arcsin \frac{2 \times 615{,}0 \times 10^{-9}\,\text{m}}{1{,}667 \times 10^{-6}\,\text{m}} = 47{,}56^\circ .$$

La différence entre ces positions angulaires est

$$\Delta\theta_{2,\text{v-r}} = \theta_{\text{r},2} - \theta_{\text{v},2} = 29{,}05^\circ - 47{,}56^\circ = 18{,}51^\circ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'angle trouvé est correct.

c. Identifier la clé La clé est le fait que les ordres positifs complets sont ceux dont les taches des longueurs d'onde aux extrémités du visible sont comprises entre $\theta = 0^\circ$ et $\theta = 90^\circ$.

Résoudre le problème Pour une longueur d'onde donnée, on peut déterminer la valeur m correspondant à $\theta = 90^\circ$ à l'aide de l'équation 8.24 :

$$d \sin\theta = m\lambda .$$

De plus, puisque les longues longueurs d'onde sont davantage déviées, c'est le rouge qui doit apparaître avant 90° pour qu'un ordre soit considéré comme complet. Pour $\theta = 90^\circ$, on a $\sin\theta = \sin 90^\circ = 1$, et alors

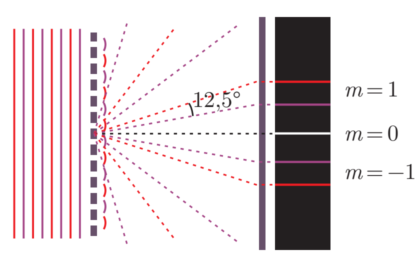
$$m = \frac{d}{\lambda} = \frac{1{,}667 \times 10^{-6}\,\text{m}}{615{,}0 \times 10^{-9}\,\text{m}} = 2{,}7 .$$

On apprend ainsi que l'ordre le plus élevé (m entier) présent à la sortie du réseau est l'ordre $m = 2$, puisque l'ordre 3 du rouge n'apparaît pas. Il y a donc deux ordres positifs complets :

$$m_\text{max} = 2 . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La quantité d'ordres trouvée est correcte.

P40 Illustrer la situation La figure ci-contre illustre la situation. Des fronts d'onde plans rencontrent les fentes du réseau et l'écran présente des taches représentant les différents ordres de diffraction pour chaque couleur dans la lumière utilisée.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\lambda_\mathrm{r} = 656\,\mathrm{nm}$	n
$\lambda_\mathrm{v} = 410\,\mathrm{nm}$	
$\theta_\mathrm{r} - \theta_\mathrm{v} = 12{,}5°$	

Identifier la clé La clé est l'identité trigonométrique E.16 de l'annexe E.

Résoudre le problème Selon l'équation 8.24 pour les réseaux,

$$d \sin\theta = m\lambda \ . \tag{i}$$

L'approximation des petits angles n'est pas valide puisqu'au moins un des angles dépasse considérablement 10°. Ainsi, l'équation (i), exprimée pour les deux longueurs d'onde, est

$$d \sin\theta_\mathrm{r} = m\lambda_\mathrm{r} \qquad \text{et} \qquad d\sin\theta_\mathrm{v} = m\lambda_\mathrm{v} \ .$$

Pour le premier ordre et pour un pas d identique dans les deux cas, on a

$$\frac{\sin\theta_\mathrm{r}}{\lambda_\mathrm{r}} = \frac{d}{m} \qquad \text{et} \qquad \frac{\sin\theta_\mathrm{v}}{\lambda_\mathrm{v}} = \frac{d}{m}$$

$$\frac{\sin\theta_\mathrm{r}}{\lambda_\mathrm{r}} = \frac{\sin\theta_\mathrm{v}}{\lambda_\mathrm{v}} \ .$$

La relation $\theta_\mathrm{r} - \theta_\mathrm{v} = 12{,}5°$ entre les deux angles permet d'écrire

$$\theta_\mathrm{r} = \theta_\mathrm{v} + 12{,}5° \ ,$$

d'où

$$\frac{\sin(\theta_\mathrm{v} + 12{,}5°)}{\lambda_\mathrm{r}} = \frac{\sin\theta_\mathrm{v}}{\lambda_\mathrm{v}} \ .$$

L'identité trigonométrique E.16 est :

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \ .$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\theta_\mathrm{v}\cos 12{,}5° + \cos\theta_\mathrm{v}\sin 12{,}5°}{\lambda_\mathrm{r}} &= \frac{\sin\theta_\mathrm{v}}{\lambda_\mathrm{v}} \\
\frac{\sin\theta_\mathrm{v}\cos 12{,}5°}{\lambda_\mathrm{r}} + \frac{\cos\theta_\mathrm{v}\sin 12{,}5°}{\lambda_\mathrm{r}} &= \frac{\sin\theta_\mathrm{v}}{\lambda_\mathrm{v}} \\
\cos 12{,}5° + \frac{\sin 12{,}5°}{\tan\theta_\mathrm{v}} &= \frac{\lambda_\mathrm{r}}{\lambda_\mathrm{v}} \\
\theta_\mathrm{v} = \arctan\left(\frac{\sin 12{,}5°}{\frac{\lambda_\mathrm{r}}{\lambda_\mathrm{v}} - \cos 12{,}5°}\right) = \arctan\left(\frac{\sin 12{,}5°}{\frac{656\,\mathrm{nm}}{410\,\mathrm{nm}} - \cos 12{,}5°}\right) &= 19{,}138° \ .
\end{aligned}$$

Cet angle, pour le violet, permet de retrouver le pas du réseau à partir de l'équation (i) :

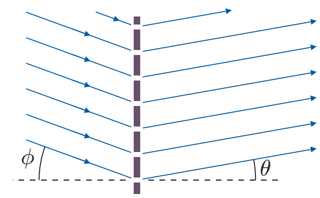
$$d = \frac{m\lambda}{\sin\theta} = \frac{1 \times 410\,\mathrm{nm}}{\sin 19{,}138°} = 1{,}251\,\mathrm{\mu m} \ .$$

On peut finalement trouver le pas du réseau à l'aide de l'équation 8.23 :

$$\begin{aligned}
d &= \frac{1}{n} \\
n &= \frac{1}{d} = \frac{1}{1{,}251\,\mathrm{\mu m}} = 800\,\text{lignes/mm} \ .
\end{aligned} \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du nombre de lignes du réseau est correct.

P41 **Illustrer la situation** La figure ci-contre reproduit la figure du problème. La lumière atteint les fentes du réseau en se propageant dans une direction non perpendiculaire au plan du réseau. Elle en émerge dans une direction non perpendiculaire représentée par l'angle θ.



a. **Identifier la clé** La clé est le fait que les rayons atteignant deux fentes voisines présentent déjà une différence de marche de $d\sin\phi$.

Résoudre le problème Il y a interférence constructive sur l'écran quand les rayons issus de deux fentes voisines présentent un déphasage étant un multiple entier de ϕ. Si, avant même d'atteindre le réseau, les rayons qui atteignent deux fentes voisines présentent un déphasage $d\sin\phi$, le déphasage produit du côté émergent par l'angle θ pourra être moins élevé de la quantité $d\sin\phi$:

$$d\sin\theta = m\lambda - d\sin\phi\ .$$

En d'autres mots, la somme des deux déphasages produits par les angles ϕ et θ est la quantité qui doit être multiple entière de λ :

$$d\sin\theta + d\sin\phi = m\lambda\ .$$

Si on met d en évidence, on obtient l'équation à démontrer :

$$d(\sin\theta + \sin\phi) = m\lambda\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Cette équation indique que le maximum central correspond à un rayon non dévié (soit $\theta = -\phi$) et que les maximums de chaque côté de ce centre ne se trouvent pas à des angles égaux de chaque côté de cette direction.

b. **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnue
$n = 600{,}0\,\text{lignes/mm}$	$\theta_1 - \theta_{-1}$
$\lambda = 632{,}8\,\text{nm}$	
$\phi = 10°$	

Identifier la clé La clé est l'équation qui était à démontrer en **a.**, avec les valeurs fournies.

Résoudre le problème La solution pour θ à partir de l'équation à démontrer est

$$\theta = \arcsin\left(\frac{m\lambda}{d} - \sin\phi\right)\ .$$

On détermine le pas du réseau, sachant qu'il comporte 600 lignes par millimètre :

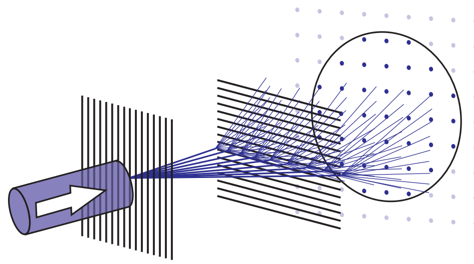
$$d = \frac{1}{600\,\text{lignes/mm}} = 1{,}667 \times 10^{-3}\,\text{mm} = 1{,}667 \times 10^{-6}\,\text{m}\ .$$

Si on considère les ordres $m = 1$ et $m = -1$, la différence $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_{-1}$ est

$$\begin{aligned}
\Delta\theta &= \arcsin\left(\frac{m_1\lambda}{d} - \sin\phi\right) - \arcsin\left(\frac{m_{-1}\lambda}{d} - \sin\phi\right)\\
&= \arcsin\left(\frac{1 \times 632{,}8\,\text{nm}}{1{,}667 \times 10^{-6}\,\text{m}} - \sin 10°\right) - \arcsin\left(\frac{-1 \times 632{,}8\,\text{nm}}{1{,}667 \times 10^{-6}\,\text{m}} - \sin 10°\right)\\
\Delta\theta &= 45{,}5°\ . \qquad \text{(réponse)}
\end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'angle trouvé est correct.

P42 **Illustrer la situation** La figure suivante illustre la lumière du laser traversant les deux réseaux. Le premier réseau sépare le rayon lumineux en plusieurs rayons lumineux se trouvant dans un plan. Le deuxième réseau sépare chacun des rayons résultants en plusieurs autres rayons dans un plan perpendiculaire au premier plan.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$d = 6{,}50\,\mu\mathrm{m}$	N_{points}
$\lambda = 462\,\mathrm{nm}$	
$L = 38{,}0\,\mathrm{cm}$	
$D_{\text{écran}} = 18{,}6\,\mathrm{cm}$	

Identifier la clé La clé est le fait que l'écran présentera des points brillants arrangés en lignes et en colonne, car chacun des rayons produits par le premier réseau, dans l'un des deux axes, est séparé en un nombre équivalent de rayons dans le second axe.

Résoudre le problème On détermine l'ordre le plus élevé du maximum d'intensité se trouvant à l'intérieur des limites de l'écran circulaire, c'est-à-dire à une distance y inférieure au rayon. À partir du centre de l'écran, les bords se trouvent à une distance r étant la moitié du diamètre donné :

$$y = r = \frac{D_{\text{écran}}}{2} = \frac{18{,}6\,\mathrm{cm}}{2} = 9{,}30\,\mathrm{cm}\ .$$

L'angle intercepté par cette distance sur l'écran est défini par

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{y}{L} \\ y &= L\tan\theta\ . \end{aligned} \qquad \text{(i)}$$

À partir de l'équation 8.24, on peut trouver une expression de θ qu'on pourra insérer dans l'équation (i) pour déterminer la position des différents ordres de diffraction :

$$d\sin\theta = m\lambda \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arcsin\frac{m\lambda}{d}$$

$$y = L\tan\theta = L\tan\left(\arcsin\frac{m\lambda}{d}\right)\ .$$

On peut ainsi trouver les positions (en x et en y) des différents ordres par rapport au centre :

$$m = 1 : \qquad y = 38{,}0\,\mathrm{cm}\times\tan\left(\arcsin\frac{1\times 462\times 10^{-9}\,\mathrm{m}}{6{,}50\times 10^{-6}\,\mathrm{m}}\right) = 2{,}71\,\mathrm{cm}$$

$$m = 2 : \qquad y = 38{,}0\,\mathrm{cm}\times\tan\left(\arcsin\frac{2\times 462\times 10^{-9}\,\mathrm{m}}{6{,}50\times 10^{-6}\,\mathrm{m}}\right) = 5{,}45\,\mathrm{cm}$$

$$m = 3 : \qquad y = 38{,}0\,\text{cm} \times \tan\left(\arcsin \frac{3 \times 462 \times 10^{-9}\,\text{m}}{6{,}50 \times 10^{-6}\,\text{m}}\right) = 8{,}29\,\text{cm}$$

$$m = 4 : \qquad y = 38{,}0\,\text{cm} \times \tan\left(\arcsin \frac{4 \times 462 \times 10^{-9}\,\text{m}}{6{,}50 \times 10^{-6}\,\text{m}}\right) = 11{,}3\,\text{cm}\ .$$

Le long des axes, les points sont sur l'écran jusqu'à $m = 3$. Il y a donc sept points sur les axes principaux.
Pour $m = 3$ en x et $m = 1$ en y, on vérifie si le point brillant est à moins de 9,30 cm du centre, avec le théorème de Pythagore :

$$r_{3,1} = \sqrt{(8{,}29\,\text{cm})^2 + (2{,}71\,\text{cm})^2} = 8{,}72\,\text{cm}\ .$$

Les rangées voisines des axes comportent le même nombre de points. Pour les points $m = 3$ en x et $m = 2$ en y, on a

$$r_{3,2} = \sqrt{(8{,}29\,\text{cm})^2 + (5{,}45\,\text{cm})^2} = 9{,}93\,\text{cm}\ .$$

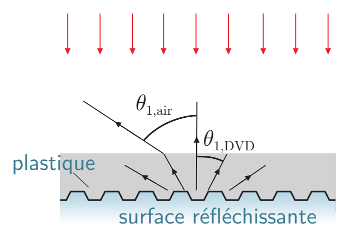
Ces points débordent de l'écran.

Les rangées d'ordre 2 sont privées d'un point à chaque bout. Elles n'en comptent donc que cinq. Par symétrie, on peut appliquer les mêmes exclusions pour les colonnes, et on sait alors que 12 points seront exclus de l'écran circulaire comparativement à un écran carré qui aurait pu afficher 7 lignes de 7 points chacune. C'est donc $49 - 12 = 37$ points qui se trouvent sur l'écran circulaire :

$$N_{\text{points}} = 37\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du nombre de points trouvé est correct.

R43 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la lumière incidente (les traits rouges) perpendiculaire à la surface du DVD et réémise par diffraction dans différentes directions (les traits noirs).



Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$n_{\text{DVD}} = 1{,}55$	λ_{DVD}
$\lambda = 650\,\text{nm}$	$\theta_{1,\text{DVD}}$
$d = 740\,\text{nm}$	$\theta_{1,\text{air}}$

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 5.3 donnant l'indice de réfraction dans un milieu d'indice n.

Résoudre le problème Selon l'équation 5.3,

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$$

$$\lambda_{\text{DVD}} = \frac{650\,\text{nm}}{1{,}55} = \lambda = 419\,\text{nm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est correct.

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que l'angle émergent du rayon diffracté, dans le plastique, obéit à l'équation 8.24 pour les réseaux.

Résoudre le problème Selon l'équation 8.24 pour les réseaux,

$$d \sin\theta = m\lambda\ .$$

En tenant compte de l'indice de réfraction dans le plastique, on trouve

$$\theta_{1,\mathrm{DVD}} = \arcsin \frac{m\lambda_{\mathrm{DVD}}}{d} = \arcsin \frac{1 \times 419\,\mathrm{nm}}{740\,\mathrm{nm}}$$
$$\theta_{1,\mathrm{DVD}} = 34{,}5^\circ \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'angle trouvé est correct.

c. Identifier la clé La clé est la loi de la réfraction pour le passage du rayon diffracté du plastique vers l'air.

Résoudre le problème La loi de la réfraction pour cette situation est

$$n_{\mathrm{DVD}} \sin\theta_{1,\mathrm{DVD}} = n_{\mathrm{air}} \sin\theta_{\mathrm{air}}$$
$$\theta_{\mathrm{air}} = \arcsin\left(\frac{n_{\mathrm{DVD}} \sin\theta_{1,\mathrm{DVD}}}{n_{\mathrm{air}}}\right)$$
$$\theta_{\mathrm{air}} = \arcsin\left(\frac{1{,}55 \times \sin(34{,}5^\circ)}{1{,}000}\right) = 61{,}4^\circ \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'angle trouvé est correct, celui-ci étant plus grand dans l'air que dans le plastique puisque l'indice de réfraction est plus faible.

Physique 3 Ondes, optique et physique moderne - 1re édition

Chapitre 09 La relativité restreinte

Q1 **Identifier la clé** La clé est le fait qu'un référentiel inertiel est un référentiel pour lequel la première loi de Newton s'applique.

Résoudre le problème Rappel : Tout objet demeure dans son état de repos ou son état de mouvement rectiligne uniforme à moins de subir une force résultante non nulle.

La première loi de Newton s'applique dans un référentiel lorsque celui-ci n'est pas accéléré. Qu'il soit immobile ou qu'il se déplace à vitesse constante, un objet ne subissant aucune force résultante aura une vitesse constante dans un référentiel si celui-ci a une vitesse constante (nulle ou non). Il ne reste donc qu'à déterminer, parmi les cinq référentiels suggérés, ceux dont la vitesse est constante.

(i) Un train qui se déplace à vitesse constante a bien une vitesse constante et est donc un référentiel inertiel.

(ii) Une automobile qui accélère n'a pas une vitesse constante. Elle ne constitue pas un référentiel inertiel.

(iii) Un arbre est immanquablement immobile. Sa vitesse nulle est évidemment constante et il constitue donc un référentiel inertiel.

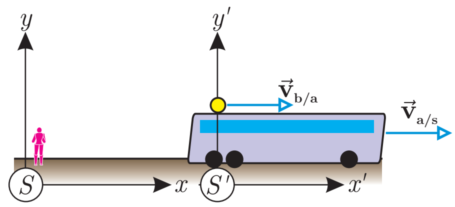
(iv) Un bateau qui dérive dans un courant uniforme a une vitesse constante (celle du courant). Il est donc un référentiel inertiel.

(v) La Station spatiale internationale est en orbite autour de la Terre, sur une trajectoire circulaire. Elle subit donc une accélération centripète, aussi faible soit-elle, vers le centre de la Terre. Elle ne peut donc être un référentiel inertiel.

Les référentiels inertiels sont (i), (iii) et (iv). (réponse)

E2 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre le référentiel S lié à la femme immobile et le référentiel S' lié à l'autobus.

Décortiquer le problème On considère un axe des x orienté dans la direction de la vitesse de l'autobus et un axe des y orienté vers le haut.



Connues	Inconnues	
$v_{\mathrm{a}} = 15{,}5\,\mathrm{m/s}$	$\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{b/a}}$	$\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{b/s}}$
$v_{\mathrm{b}} = 12{,}0\,\mathrm{m/s}$	t_{a}	t_{f}
$y_{0,\mathrm{b}} = 1{,}00\,\mathrm{m}$	d_{a}	d_{f}

a. **Identifier la clé** La clé est le fait que l'autobus est un référentiel inertiel, sa vitesse étant constante. Les équations de la cinématique s'appliquent donc normalement.

Résoudre le problème La balle se comporte par rapport à l'autobus comme un projectile conventionnel, sa composante de vitesse en x étant constante et sa composante de vitesse en y étant influencée par l'accélération gravitationnelle. On connaît déjà la composante x de la vitesse recherchée : $v_{\mathrm{b/a},x} = 12{,}0\,\mathrm{m/s}$. Pour la composante en y, on a

$$v_y = v_{y,0} + a_y t \ .$$

La balle étant lancée horizontalement, $v_{y,0} = 0$. De plus, $a_y = -g$:

$$v_y = 0 - gt = -\left(9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\right) \times (0{,}400\,\mathrm{s}) = -3{,}924\,\mathrm{m/s} \ .$$

Le vecteur vitesse finale est donc

$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{b/a}} = (12{,}0\vec{\imath} - 3{,}92\vec{\jmath})\ \mathrm{m/s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Comme pour tout projectile, la vitesse horizontale est constante et la vitesse verticale diminue avec le temps.

b. **Identifier la clé** La clé est le groupe d'équations 9.2 liant les vitesses d'un objet dans différents référentiels.

Résoudre le problème La vitesse de l'autobus par rapport au sol étant connue, on peut trouver rapidement la vitesse de la balle par rapport au sol. Selon les équations 9.2, pour un référentiel mobile se déplaçant selon x, on a

$$u_x = u'_x + v \qquad \text{et} \qquad u_y = u'_y\ .$$

Compte tenu des variables définies dans ce problème, on peut écrire

$$v_{\mathrm{b/s},x} = v_{\mathrm{b/a},x} + v_{\mathrm{a/s},x} \qquad \text{et} \qquad v_{\mathrm{b/s},y} = v_{\mathrm{b/a},y}$$

$$v_{\mathrm{b/s},x} = 12{,}0\,\mathrm{m/s} + 15{,}5\,\mathrm{m/s} \qquad \text{et} \qquad v_{\mathrm{b/s},y} = -3{,}92\,\mathrm{m/s}$$

$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{b/s}} = (27{,}5\vec{\imath} - 3{,}92\vec{\jmath})\ \mathrm{m/s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Il est normal que la balle ait une plus grande vitesse selon x par rapport au sol, car elle se déplace déjà avec l'autobus avant le lancer.

c. **Identifier la clé** La clé est le fait que l'autobus est un référentiel inertiel. Les équations de la cinématique s'appliquent normalement.

Résoudre le problème Sachant que la composante y de la vitesse initiale est nulle, on détermine rapidement la durée de la chute à partir de l'équation de la chute libre en cinématique :

$$y = y_0 + v_{y,0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = y_0 + 0t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$t_{\mathrm{a}} = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}00\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}} = 0{,}452\,\mathrm{s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la durée trouvée est correct.

d. **Identifier la clé** La clé est le fait que la vitesse horizontale de l'autobus n'affecte aucunement les valeurs concernant le mouvement vertical dans les deux référentiels (puisque $u'_y = u_y$).

Résoudre le problème La durée de la chute sera la même que pour les passagers à l'intérieur car elle implique un déplacement vertical alors que la vitesse de l'autobus est orientée selon l'horizontale :

$$t_{\mathrm{f}} = t_{\mathrm{a}} = 0{,}452\,\mathrm{s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

e. **Identifier la clé** Comme en **a.** et en **c.**, la clé est le fait que l'autobus est un référentiel inertiel. Les équations de la cinématique s'appliquent normalement.

Résoudre le problème La distance horizontale parcourue par la balle dans l'autobus est la portée du lancer, qu'on peut trouver à partir de la composante horizontale de la vitesse initiale et de la durée de la chute :

$$x = x_0 + v_{0,x}t + \frac{1}{2}a_x t^2\ .$$

La composante de l'accélération selon x étant nulle, on a

$$x - x_0 = v_{0,x}t + \frac{1}{2}0t^2 \qquad \Rightarrow \qquad d_{\mathrm{a}} = v_{\mathrm{b/a},0,x}t$$

$$d_{\mathrm{a}} = (12{,}0\,\mathrm{m/s}) \times (0{,}452\,\mathrm{s}) = 5{,}42\,\mathrm{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance trouvée est correct.

f. **Identifier la clé** La clé est le groupe d'équations 9.1 liant entre autres les distances mesurées dans deux référentiels inertiels.

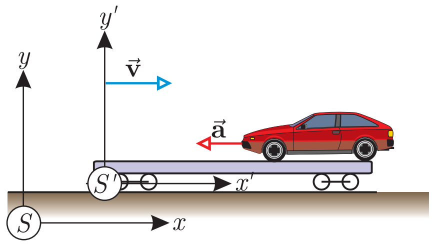
Résoudre le problème Selon les équations 9.1, on sait entre autres que

$$x = x' + vt \qquad \Rightarrow \qquad d_\mathrm{f} = d_\mathrm{a} + v_{\mathrm{a/s},x}t$$

$$\begin{aligned} d_\mathrm{f} &= 5{,}42\,\mathrm{m} + (15{,}5\,\mathrm{m/s}) \times (0{,}452\,\mathrm{s}) \\ d_\mathrm{f} &= 12{,}4\,\mathrm{m}\ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La distance mesurée par la femme est effectivement plus grande, car la vitesse de l'autobus s'ajoute à celle de la balle, de son point de vue, pour faire parcourir à la balle une distance plus grande.

E3 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre le référentiel S' lié à la plate-forme sur laquelle l'automobile accélère vers la gauche.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$v_\mathrm{t} = 42{,}0\,\mathrm{km/h}$	a_a
$d = 13{,}5\,\mathrm{m}$	

Identifier la clé La clé est le fait que l'automobile doit avoir une vitesse nulle par rapport au sol après avoir parcouru la longueur de la plate-forme.

Résoudre le problème D'après les équations 9.2, on a, selon l'axe horizontal,

$$u_x = u'_x + v, \qquad \text{où} \qquad v_{\mathrm{a/s},x} = v_{\mathrm{a/t},x} + v_\mathrm{t}\ .$$

On veut que la vitesse de la voiture par rapport au sol, en l'occurrence $v_{\mathrm{a/s},x}$, soit nulle. Donc,

$$\begin{aligned} 0 &= v_{\mathrm{a/t},x} + v_\mathrm{t} \\ v_{\mathrm{a/t},x} &= -v_\mathrm{t}\ . \end{aligned}$$

On apprend alors que la voiture doit avoir une vitesse par rapport au train égale, mais en sens inverse, à celle du train par rapport au sol :

$$v_{\mathrm{a/t},x} = -(42{,}0\,\mathrm{km/h}) \times \left(\frac{1\,\mathrm{m/s}}{3{,}6\,\mathrm{km/h}}\right) = -11{,}67\,\mathrm{m/s}\ .$$

L'automobile doit atteindre cette vitesse, dans le référentiel du train, en accélérant à partir du repos sur une distance de 13,5 m. Selon la cinématique en une dimension,

$$\begin{aligned} v_x^2 &= v_{0,x}^2 + 2a_x\,(x - x_0) \\ &= 0^2 + 2a_x\,(d) \\ a_x &= -\frac{v_x^2}{2d} = -\frac{(11{,}67\,\mathrm{m/s})^2}{2 \times (-13{,}5\,\mathrm{m})} = -5{,}04\,\mathrm{m/s^2} \\ \vec{\mathbf{a}} &= 5{,}04\,\mathrm{m/s^2} \quad \overrightarrow{\text{vers l'arrière}}\ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'accélération trouvée est correct. L'accélération est dirigée vers l'arrière du train, car l'automobile doit accélérer de manière à réduire sa vitesse par rapport au sol.

Q4 **Identifier la clé** La clé est le postulat de la vitesse de la lumière.

Résoudre le problème Selon le postulat d'Einstein sur la vitesse de la lumière, le module de cette vitesse est le même dans tous les référentiels inertiels. Puisqu'on indique la vitesse du vaisseau spatial, on sous-entend que cette vitesse est constante, faisant du vaisseau un référentiel inertiel. La vitesse de la lumière observée par les passagers est donc c, comme elle le serait pour n'importe quel observateur dans un référentiel inertiel :

$$v = c\ . \qquad \text{(réponse)}$$

E5 Décortiquer le problème

Connue	Inconnues
$\vec{\mathbf{v}} = 0{,}90c\vec{\imath}$	$\vec{\mathbf{v}}_1$
	$\vec{\mathbf{v}}_2$

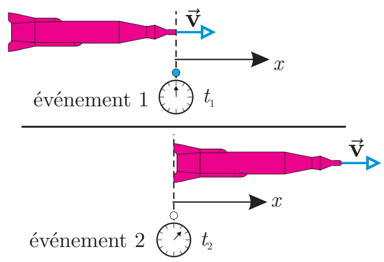
Identifier la clé La clé est le postulat de la vitesse de la lumière.

Résoudre le problème Selon le postulat d'Einstein sur la vitesse de la lumière, le module de cette vitesse est le même dans tous les référentiels inertiels. Peu importe le référentiel dans lequel on observe les deux rayons γ, pour autant qu'il ait une vitesse constante, la vitesse observée sera c.

Dans le cas présent, deux rayons γ sont produits, et on indique qu'ils se déplacent selon l'axe des x. Ils sont donc émis en directions contraires et se déplacent tous les deux à une vitesse de module c dans le référentiel du laboratoire où cette réaction d'annihilation est observée. Ainsi, l'un des rayons aura une vitesse c dans la direction de l'axe des x et l'autre, une vitesse c en direction opposée à l'axe des x.

$$\vec{\mathbf{v}}_1 = c\vec{\imath} \qquad \text{et} \qquad \vec{\mathbf{v}}_2 = -c\vec{\imath}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Q6 Illustrer la situation La figure ci-contre illustre les deux événements se déroulant à l'emplacement de l'horloge.



Décortiquer le problème Dans la situation décrite, le vaisseau spatial est en mouvement à grande vitesse par rapport à une station spatiale et la source lumineuse est immobile par rapport à cette même station.

a. **Identifier la clé** La clé est le fait que le temps propre est mesuré dans le référentiel où les deux événements sont mesurés à la même position.

Résoudre le problème La source lumineuse se trouvant sur la station spatiale, c'est dans le référentiel de cette station qu'elle est immobile et que sa durée d'éclairement sera mesurée à la même position. Le travailleur qui se trouve dans la station spatiale est donc celui qui mesurera l'intervalle de temps propre.

Le travailleur qui se trouve dans la station mesure un intervalle de temps propre. (réponse)

b. **Identifier la clé** La clé est le fait qu'un intervalle de temps est toujours plus long lorsque mesuré dans un autre référentiel que celui dans lequel est mesuré le temps propre.

Résoudre le problème Comme il est mentionné en **a.**, le référentiel dans lequel est mesuré le temps propre est le référentiel de la station spatiale. Dans tout autre référentiel, un intervalle de temps paraît plus long. Ainsi, c'est le commandant du vaisseau spatial qui perçoit l'intervalle de temps le plus long pour la durée d'éclairement de la source.

Le commandant du vaisseau mesure un intervalle de temps plus long. (réponse)

Q7 Décortiquer le problème Dans la situation décrite, le vaisseau spatial est en mouvement par rapport à la Terre.

Identifier la clé La clé est le fait que le temps propre est mesuré dans le référentiel où les deux événements sont mesurés à la même position.

a. **Résoudre le problème** Au départ de la fusée, les deux référentiels coïncident, le vaisseau spatial se trouvant sur la Terre. Le début du délai peut donc être mesuré en même temps dans les deux référentiels. Seule la fin du délai n'est pas observée au même endroit dans les deux référentiels.

Pour les passagers de la fusée, la rencontre de la frontière du système solaire est observée au moment où la fusée arrive à cet endroit même. Une horloge dans la fusée même aurait donc pu servir à mesurer le début du voyage autant que la fin du voyage. Le temps observé par les passagers est donc un temps propre.

Pour les observateurs sur Terre, l'information selon laquelle la fusée a atteint la frontière du système solaire est la réception du signal radio, ce qui ne peut pas se produire en même temps que le vaisseau atteint la frontière, vu le temps que le signal prend pour revenir vers la Terre. Une seule horloge sur Terre ne peut donc pas mesurer correctement la durée du voyage.

Le vaisseau mesure le temps propre, car il a besoin d'une seule horloge immobile. (réponse)

b. **Résoudre le problème** L'émission du signal radio se fait à l'endroit où la fusée se trouve, à la frontière du système solaire, et sa réception par les observateurs sur Terre se fait (évidemment) sur Terre. Ni l'horloge des passagers de la fusée ni l'horloge des observateurs sur Terre ne se trouve à la fois à l'endroit de l'émission et à l'endroit de la réception. Aucun des deux référentiels ne permet alors de mesurer un temps propre.

Ni l'un ni l'autre ne mesure le temps propre. (réponse)

Q8 **Identifier la clé** La clé est le fait qu'un intervalle de temps est toujours plus long lorsque mesuré dans un autre référentiel que celui dans lequel est mesuré le temps propre.

Résoudre le problème On doit déterminer lequel, des intervalles Δt_{v} et Δt_{T}, est le temps propre. Un tour sur le grand cercle commence en un point de ce cercle et se termine au même point après un tour complet. Une horloge qui mesurerait le temps propre doit donc se trouver à cet endroit lors du passage du vaisseau. Ainsi, une horloge sur Terre ne peut pas mesurer le temps propre, alors qu'une horloge à bord du vaisseau se trouvera, lors des deux mesures, à l'endroit où la fusée entame et complète le tour. Les observateurs de la fusée mesurent donc le temps propre.

Par ailleurs, le principe de dilatation du temps indique qu'un intervalle mesuré dans tout autre référentiel que le référentiel du temps propre paraît plus long. Les observateurs sur Terre mesureront donc un temps plus long.

De même, l'équation 9.11 indique que $\Delta t = \gamma\, \Delta\tau$. Puisqu'on a défini le temps propre comme étant Δt_{v}, on a $\Delta t_{\mathrm{T}} = \gamma\, \Delta t_{\mathrm{v}}$. Le paramètre γ étant une quantité comprise entre 1 et l'infini, le temps mesuré sur Terre est nécessairement le temps le plus long.

Le temps le plus long est Δt_{T}. (réponse)

E9 **Décortiquer le problème** On cherche le module de la vitesse correspondant à différentes valeurs du facteur de Lorentz.

Connues	Inconnues
$\gamma_{\mathrm{a}} = 1{,}000\,001\,0$	v_{a}
$\gamma_{\mathrm{b}} = 1{,}010$	v_{b}
$\gamma_{\mathrm{c}} = 2{,}00$	v_{c}
$\gamma_{\mathrm{d}} = 10{,}0$	v_{d}

Identifier la clé La clé est l'équation 9.10 liant le facteur de Lorentz γ à la vitesse d'un mobile, à partir de laquelle on peut isoler la vitesse :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad \Rightarrow \qquad v = \left(\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}\right) c\ .$$

Résoudre le problème

a.

$$v = \left(\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}\right)c = \left(\sqrt{1-\frac{1}{1{,}000\,001\,0^2}}\right)c$$

$$v = 0{,}001\,41c \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse trouvée est correct. Un très petit facteur de Lorentz correspond à une faible fraction de la vitesse de la lumière.

b.

$$v = \left(\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}\right)c = \left(\sqrt{1-\frac{1}{1{,}010^2}}\right)c$$

$$v = 0{,}140c \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse trouvée est correct, la vitesse étant supérieure à celle trouvée en **a.** pour un facteur γ plus petit.

c.

$$v = \left(\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}\right)c = \left(\sqrt{1-\frac{1}{2{,}00^2}}\right)c$$

$$v = 0{,}866c \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse trouvée est correct, la vitesse étant supérieure à celles trouvées en **a.** et en **b.** pour des facteurs γ plus petits.

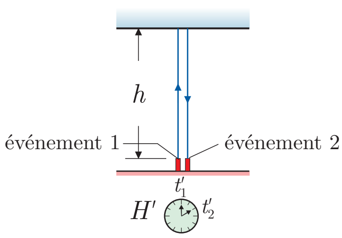
d.

$$v = \left(\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}\right)c = \left(\sqrt{1-\frac{1}{10{,}0^2}}\right)c$$

$$v = 0{,}995c \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse trouvée est correct. Un facteur de Lorentz nettement supérieur à 1 correspond à une fraction importante de la vitesse de la lumière.

E10 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre le montage servant à l'expérience. Un rayon lumineux dirigé vers le haut frappe un miroir perpendiculairement et revient vers sa source.



Décortiquer le problème Les deux événements définissant l'intervalle Δt sont le départ et l'arrivée du rayon lumineux à l'endroit où se trouve l'horloge.

Connues	Inconnues
$v_{S'} = 0{,}500c$	$\Delta t'$
$h = 5{,}000\,\text{m}$	Δt

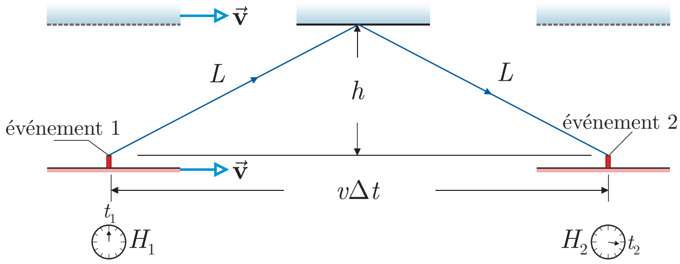
a. **Identifier la clé** La clé est le fait que l'intervalle mesuré dans le référentiel S' est le temps propre, car c'est dans S' que le départ et l'arrivée du rayon lumineux se font au même endroit.

Résoudre le problème Dans le référentiel S', la distance h est parcourue verticalement. Le départ et l'arrivée du rayon lumineux peuvent être mesurés par une même horloge (H' sur la figure ci-dessus). Ainsi, selon la cinématique, le délai de l'aller-retour est donné par

$$\Delta t' = \frac{2h}{c} = \frac{2 \times 5{,}000\,\text{m}}{2{,}998 \times 10^8\,\text{m/s}} = 33{,}36\,\text{ns} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du temps trouvé est correct, le temps étant très court en raison de la vitesse très élevée de la lumière.

b. **Illustrer la situation** La figure suivante montre le parcours du rayon lumineux pour un observateur immobile dans le référentiel S.



Identifier la clé La clé est le fait que dans le référentiel S, le rayon lumineux doit parcourir une distance plus grande.

Résoudre le problème Le temps de parcours sera plus grand en raison de la distance parcourue, qui est plus grande. L'équation 9.11 montre la relation entre le temps mesuré dans le référentiel S et le temps propre :

$$\Delta t = \gamma\,\Delta\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\Delta\tau\ .$$

$\Delta\tau$ ayant été calculé en **a.**, on a

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}500c}{c}\right)^2}} \times 33{,}36\,\text{ns} = 38{,}52\,\text{ns}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du temps trouvé est correct, celui-ci étant légèrement supérieur au temps propre, comme le veut le principe de dilatation du temps.

E11 **Décortiquer le problème** Les deux équations contenues dans l'énoncé permettent d'établir un système de deux équations à deux inconnues. On peut calculer les deux vitesses ainsi que le rapport de l'une à l'autre.

Connues	Inconnue
$\gamma_1/\gamma_2 = 2{,}00$	v_1/v_2
$v_1^2 + v_2^2 = 1{,}25c^2$	

Identifier la clé La clé est l'équation 9.10 à partir de laquelle on peut établir l'expression du rapport γ_1/γ_2 :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\ .$$

Résoudre le problème À partir de l'équation 9.10, le rapport γ_1/γ_2 peut donc s'écrire

$$\gamma_1/\gamma_2 = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}}\right)} = 2$$

$$2\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}$$

$$4c^2 - 4v_1^2 = c^2 - v_2^2\ . \qquad \text{(i)}$$

La relation entre les deux vitesses ($v_1^2 + v_2^2 = 1{,}25c^2$) constitue une deuxième équation permettant de déterminer la valeur des deux inconnues :

$$v_2^2 = 1{,}25c^2 - v_1^2\ . \qquad \text{(ii)}$$

On peut insérer cette expression de v_2 dans l'équation (i) :

$$\begin{aligned}4c^2 - 4v_1^2 &= c^2 - \left(1{,}25c^2 - v_1^2\right)\\ 4{,}25c^2 &= 5v_1^2\\ v_1 &= \sqrt{0{,}85}c\ .\end{aligned}$$

De retour sur l'équation (ii), on peut alors déterminer v_2 :

$$\begin{aligned}v_2^2 &= 1{,}25c^2 - \left(\sqrt{0{,}85}c\right)^2 = 0{,}4c\\ v_2 &= \sqrt{0{,}4}c\ .\end{aligned}$$

On peut finalement évaluer le rapport v_1/v_2 :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{0{,}85}c}{\sqrt{0{,}4}c} = 1{,}46\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Si le rapport γ_1/γ_2 est supérieur à 1, il est normal que le rapport v_1/v_2 soit également supérieur à 1.

E12 **Décortiquer le problème** Le professeur Tamperdu veut profiter du phénomène de dilatation du temps pour revenir sur Terre dans le futur des gens demeurés sur Terre.

Connues	Inconnue
$v = 0{,}992c$	Δt
$\Delta t = 10{,}0\,\text{a}$	

Identifier la clé La clé est le fait que la fusée doit changer de référentiel inertiel pour terminer son voyage à son point de départ, comme dans le paradoxe des jumeaux.

Résoudre le problème Puisque la fusée doit subir une accélération pour revenir sur Terre (faire un aller-retour ou parcourir un circuit non linéaire), la fusée doit changer de référentiel inertiel durant le voyage et l'horloge embarquée est celle qui mesurera un temps plus court que celui mesuré sur Terre pour la durée du voyage.

Le professeur Tamperdu mesurera un temps inférieur à celui des observateurs sur Terre, selon l'équation

$$\Delta t_{\text{Tamperdu}} = \frac{\Delta t_{\text{Terre}}}{\gamma}\ .$$

Connaissant la vitesse de la fusée, on trouve

$$\begin{aligned}\Delta t_{\text{Tamperdu}} &= \frac{\Delta t_{\text{Terre}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right)} = \Delta t_{\text{Terre}} \times \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\\ &= \Delta t_{\text{Terre}} \times \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\\ &= 10{,}0\,\text{a} \times \sqrt{1-\left(\frac{0{,}992}{c}\right)^2} = 1{,}26\,\text{a}\\ \Delta t &= 1{,}26\,\text{a}\ . \qquad \text{(réponse)}\end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la durée trouvée est correct.

P13 **Décortiquer le problème** Les explorateurs doivent voyager à une très grande vitesse pour parcourir la distance dans le temps indiqué. Cette vitesse produira des effets relativistes et la durée du voyage ne sera pas la même pour les explorateurs et pour les observateurs sur Terre.

Connues	Inconnues
$\Delta x = 25{,}0\,\mathrm{al}$	v
$\Delta\tau = 10{,}0\,\mathrm{a}$	$\Delta t_{\mathrm{Terre}}$

a. **Identifier les clés** La première clé est l'équation 9.11 de la dilatation du temps :

$$\Delta t = \gamma\,\Delta\tau\ .$$

La deuxième clé est le fait que la durée du voyage pour les explorateurs est le temps propre : leur horloge est celle qui observe le départ et l'arrivée à l'endroit même où ces événements se produisent. C'est donc le temps de 10 ans observé par les explorateurs qui est le plus court des deux.

Résoudre le problème Le temps Δt mesuré par les observateurs sur Terre est directement lié à la distance parcourue et à la vitesse du vaisseau :

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t = \frac{\Delta x}{v}\ .$$

On peut donc écrire

$$\frac{\Delta x}{v} = \gamma\,\Delta\tau\ .$$

En développant le terme γ, on peut isoler la vitesse du vaisseau emportant les explorateurs :

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta x}{v} &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\Delta\tau \\
\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} &= \frac{\Delta\tau}{\Delta x}v \\
\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) &= \frac{\Delta\tau^2}{\Delta x^2}v^2 \\
1-\frac{1}{c^2}v^2 &= \frac{\Delta\tau^2}{\Delta x^2}v^2 \\
v &= \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{c^2}+\frac{\Delta\tau^2}{\Delta x^2}}} = \sqrt{\frac{c^2}{1+\frac{\Delta\tau^2 c^2}{\Delta x^2}}} = \left(\sqrt{\frac{1}{1+\frac{\Delta\tau^2 c^2}{\Delta x^2}}}\right)c \\
&= \left(\sqrt{\frac{1}{1+\frac{(10{,}0\,\mathrm{a})^2 c^2}{(25{,}0\,\mathrm{a}\ \ c)^2}}}\right)c = \left(\sqrt{\frac{1}{1+0{,}4^2}}\right)c \\
v &= 0{,}928c\ . && \text{(réponse)}
\end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse trouvée est correct pour parcourir en 10 ans la distance que la lumière parcourt en 25 ans.

b. **Identifier la clé** La clé est l'addition du temps de retour du message radio et du temps d'aller du vaisseau, vu par la Terre.

Résoudre le problème La durée du voyage, vue de la Terre, est un temps dilaté par rapport à la durée de 10 ans observée par les explorateurs :

$$\begin{aligned}
\Delta t_{\mathrm{aller}} = \gamma\,\Delta\tau &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\Delta\tau \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}928c}{c}\right)^2}} \times 10{,}0\,\mathrm{a} = 26{,}93\,\mathrm{a}\ .
\end{aligned}$$

À cette durée, on doit ajouter la durée du retour du message radio, qui est simplement de 25 ans, puisque ce message parcourt une distance de 25 années-lumière à la vitesse de la lumière :

$$\Delta t = \Delta t_{\text{aller}} + 25{,}0\,\text{a} = 26{,}93\,\text{a} + 25{,}0\,\text{a} = 51{,}9\,\text{a} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la durée trouvée est correct, celle-ci étant supérieure à la durée Δt_{aller}.

P14 **Décortiquer le problème** Dans un référentiel qui n'est pas le référentiel propre des muons, leur durée de vie dépend de leur vitesse.

Connues	Inconnue
$\Delta\tau_{\text{muon}} = 2{,}20 \times 10^{-6}\,\text{s}$	v_{muon}
$\Delta x = 1\,362\,\text{m}$	

Identifier la clé La clé est le fait que la durée de vie moyenne donnée pour les muons au repos est un temps propre.

Résoudre le problème Lorsqu'un muon est au repos, aucun effet relativiste ne crée de différence entre le temps propre du muon et le temps observé dans le référentiel du laboratoire. La durée de vie du muon dans son référentiel, même s'il a une vitesse importante, est donc de $\Delta\tau = 2{,}20 \times 10^{-6}\,\text{s}$.

Dans la situation décrite dans l'énoncé, les muons ont une vitesse leur permettant de parcourir 1 362 m en un temps mesuré dans le référentiel du laboratoire. Ce temps n'étant pas le temps propre, il est plus long que la durée de vie propre des muons, selon la relation

$$\Delta t = \gamma\,\Delta\tau \ .$$

La durée observée dans le référentiel du laboratoire est liée à la vitesse et à la distance parcourue par

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t = \frac{\Delta x}{v} \ .$$

On peut donc écrire

$$\frac{\Delta x}{v} = \gamma\,\Delta\tau \ .$$

En développant le terme γ, on peut isoler la vitesse des muons :

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta x}{v} &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\Delta\tau \\
\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} &= \frac{\Delta\tau}{\Delta x}v \\
\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) &= \frac{\Delta\tau^2}{\Delta x^2}v^2 \\
1-\frac{1}{c^2}v^2 &= \frac{\Delta\tau^2}{\Delta x^2}v^2 \\
v &= \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{c^2}+\frac{\Delta\tau^2}{\Delta x^2}}} = \sqrt{\frac{c^2}{1+\frac{\Delta\tau^2 c^2}{\Delta x^2}}} = \left(\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{\Delta\tau c}{\Delta x}\right)^2}}\right)c \\
v &= \left(\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{(2{,}20\times10^{-6}\,\text{s})\times(2{,}998\times10^{8}\,\text{m/s})}{1\,362\,\text{m}}\right)^2}}\right)c \\
v &= 0{,}900c \ . \qquad \text{(réponse)}
\end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse trouvée est correct. Les particules élémentaires peuvent effectivement atteindre des vitesses relativistes lors d'expériences dans des accélérateurs de particules.

P15 **Décortiquer le problème** La longueur du faisceau (une distance parcourue) et le délai requis sont liés à la vitesse de déplacement des particules.

Connues	Inconnues
$\Delta x = 50{,}0\,\text{cm}$	v
$\Delta\tau = 1{,}67\,\text{ns}$	$\Delta t'$

a. **Identifier la clé** La clé est le fait que le temps et la distance donnés sont tous deux mesurés dans le référentiel du laboratoire.

Résoudre le problème Puisque la distance de 50,0 cm et le temps de 1,67 ns sont des données du référentiel du laboratoire, la vitesse est directement donnée par le rapport de ces grandeurs :

$$\begin{aligned} v &= \frac{\Delta x}{\Delta\tau} = \frac{0{,}500\,\text{m}}{1{,}67\times 10^{-9}\,\text{s}} = 2{,}994\,0\times 10^{8}\,\text{m/s} \\ &= 2{,}994\,0\times 10^{8}\,\text{m/s}\times\frac{c}{2{,}998\times 10^{8}\,\text{m/s}} = 0{,}998\,67c \\ v &= 0{,}999c\ . \qquad \text{(réponse)} \end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse trouvée est correct pour un faisceau produit par un accélérateur de particules.

b. **Identifier la clé** La clé est que le temps mesuré dans le référentiel des particules est un temps dilaté.

Résoudre le problème Le temps connu étant le temps propre, tout autre temps est un temps dilaté. La durée donnée dans l'énoncé est donc ce temps propre $\Delta\tau$. Le temps dilaté dans le référentiel du laboratoire peut être retrouvé à l'aide de l'équation 9.11 :

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \gamma\,\Delta\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}998\,67c}{c}\right)^2}}\times 1{,}67\times 10^{-9}\,\text{s} \\ \Delta t' &= 32{,}4\,\text{ns}\ . \qquad \text{(réponse)} \end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du temps trouvé est correct et il est normal que ce temps soit supérieur au temps propre de 1,67 ns.

Q16 **Décortiquer le problème** Les trois trains ont une longueur propre identique. Chacun a cependant une longueur différente dans le référentiel des autres trains.

Identifier la clé La clé est le fait que toute longueur observée dans un référentiel autre que celui de la longueur propre est une longueur contractée.

a. **Résoudre le problème** Pour le train A, les deux autres trains ont une vitesse provoquant une contraction de leur longueur apparente. Selon le principe de contraction des longueurs, plus un train va vite dans le référentiel du train A, plus il paraît contracté. Les trains B et C seront donc plus courts que le train A. De plus, le plus rapide des trains entre B et C sera le plus contracté, c'est-à-dire le train C. En ordre croissant, les longueurs des trois trains sont

$$L_C < L_B < L_A\ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Résoudre le problème Dans le référentiel du train B, le train A a une vitesse d'un module de $0{,}1c$. Le train C, puisqu'il a une vitesse en sens opposé à la vitesse du train B, a une vitesse d'un module de $0{,}15c + 0{,}1c = 0{,}25c$.

Dans le référentiel du train B, le train B a sa longueur propre, c'est le plus long. Le train C est le plus rapide, et il est le plus contracté. En ordre croissant, les longueurs des trois trains sont alors

$$L_C < L_A < L_B \ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. Résoudre le problème Dans le référentiel du train C, le train A a une vitesse d'un module de $0{,}15c$. Le train B, puisqu'il a une vitesse en sens opposé à la vitesse du train C, a une vitesse d'un module de $0{,}1c + 0{,}15c = 0{,}25c$.

Dans le référentiel du train C, le train C a sa longueur propre, il est le plus long. Le train B est le plus rapide, et il est le plus contracté. En ordre croissant, les longueurs des trois trains sont alors

$$L_B < L_A < L_C \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Q17 **Identifier la clé** La clé est le fait que la dimension parallèle à la vitesse d'un objet se déplaçant à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ est contractée, mais que les dimensions perpendiculaires à sa vitesse ne sont pas modifiées.

Résoudre le problème Tout référentiel dans lequel le carré a une vitesse sera contracté dans la dimension de la vitesse. Un carré contracté dans l'une de ses dimensions parallèle à la vitesse apparaîtra comme un rectangle, le côté le plus court étant celui qui est parallèle à la vitesse.

L'énoncé mentionne que la vitesse est orientée dans la direction de la largeur du carré. C'est donc la largeur qui sera inférieure à la hauteur, ce qui correspond à l'énoncé (iii).

La forme (iii), car la largeur est contractée, mais pas la hauteur. (réponse)

E18 **Décortiquer le problème** Un train plus long qu'un tunnel pourra paraître y entrer complètement grâce à l'effet relativiste de sa vitesse sur les longueurs.

Connues	Inconnue
$L_0 = 825\,\mathrm{m}$	v
$L = 600\,\mathrm{m}$	

Identifier la clé La clé est le fait que la longueur du train dans tout référentiel dans lequel ce train a une vitesse sera inférieure à la longueur propre.

Résoudre le problème Selon le principe de contraction des longueurs,

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{L}{L_0}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{600\,\mathrm{m}}{825\,\mathrm{m}}\right)^2} \times c$$

$$v = 0{,}686c. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse trouvée est correct, cette vitesse devant être une fraction importante de la vitesse de la lumière pour que les effets relativistes soient observables sur la longueur du train.

E19 **Décortiquer le problème** La distance à Tau Ceti de $11{,}90\,\mathrm{al}$ est une longueur propre L_0, car c'est une distance mesurée dans un référentiel où elle est immobile.

Connues	Inconnues
$L_0 = 11{,}90\,\text{al}$	L
$v = 0{,}600c$	$\Delta\tau$
	Δt
	$\Delta t_{\text{message}}$

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 9.19 de la contraction des longueurs.

Résoudre le problème Selon le principe de contraction des longueurs,

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \ . \tag{i}$$

On évalue le facteur γ qui pourra servir à nouveau ultérieurement :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}600c}{c}\right)^2}} = 1{,}250 \ . \tag{ii}$$

On peut alors calculer la longueur contractée perçue dans le référentiel de la sonde à l'aide de l'équation (i) :

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{11{,}90\,\text{al}}{1{,}250} = 9{,}520\,\text{al} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur trouvée est correct, celle-ci étant légèrement inférieure à la longueur réelle.

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que le temps recherché (qui est le temps propre) est lié à la vitesse et à la distance mesurée dans le même référentiel que la sonde.

Résoudre le problème La longueur parcourue dans le référentiel de la sonde ayant été trouvée en **a.**, le temps de parcours dans ce référentiel est donné par la cinématique :

$$v = \frac{L}{\Delta\tau} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\tau = \frac{L}{v}$$

$$\Delta\tau = \frac{9{,}520\,\text{a} \times c}{0{,}600c} = 15{,}87\,\text{a} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la durée trouvée est correct, celle-ci étant supérieure au temps mis par la lumière pour parcourir la même distance (11,90 al).

c. **Identifier la clé** La clé est l'équation 9.11 liant le temps propre et le temps mesuré dans un autre référentiel.

Résoudre le problème Selon l'équation 9.11, le temps mesuré par les observateurs sur Terre n'est pas le même que pour les voyageurs. La durée du voyage pour les ordinateurs de la sonde étant le temps propre (leur horloge est celle qui observe le départ et l'arrivée à l'endroit même où ils se produisent), le temps observé par la sonde est le plus court des deux. Ainsi,

$$\Delta t = \gamma\,\Delta\tau \ .$$

À partir du temps $\Delta\tau$ trouvé en **b.**, on obtient

$$\Delta t = 1{,}250 \times 25{,}87\,\text{al} = 19{,}83\,\text{a} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du temps trouvé est correct, celui-ci étant légèrement supérieur au temps propre.

d. **Identifier la clé** La clé est l'addition du temps de retour du message radio et du temps d'aller du vaisseau, vu par la Terre.

Résoudre le problème La durée du voyage, vue de la Terre, a été trouvée en **c.**, soit $\Delta t = 19{,}83\,\mathrm{a}$. À cette durée on doit ajouter la durée du retour du message radio, qui est simplement de 11,90 ans puisque ce message parcourt une distance de 11,90 al à la vitesse de la lumière :

$$\Delta t = \Delta t_{\mathrm{aller}} + 11{,}90\,\mathrm{a} = 19{,}83\,\mathrm{a} + 11{,}90\,\mathrm{a} = 31{,}73\,\mathrm{a}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la durée trouvée est correct, celle-ci étant supérieure à la durée de l'aller.

E20 **Décortiquer le problème** La longueur donnée est la longueur propre dans le référentiel du laboratoire. La durée dans ce référentiel n'est pas un temps propre.

Connues	Inconnues
$v = 0{,}734c$	Δt
$L_0 = 3{,}080\,\mathrm{m}$	$\Delta\tau$
	L

a. **Identifier la clé** La clé est le fait que la durée et la longueur mesurées dans le référentiel du laboratoire sont directement liées par la vitesse de la particule.

Résoudre le problème La particule décrit un mouvement rectiligne uniforme. L'expression de sa vitesse est donc

$$v = \frac{L_0}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{L_0}{v} = \frac{3{,}080\,\mathrm{m}}{0{,}734c} = \frac{3{,}080\,\mathrm{m}}{0{,}734 \times 2{,}998 \times 10^8\,\mathrm{m/s}} = 14{,}0\,\mathrm{ns}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du temps trouvé est correct.

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 9.11 liant le temps propre au temps mesuré dans un autre référentiel.

Résoudre le problème Le temps propre étant le temps recherché, tout autre temps est un temps dilaté. La durée donnée dans l'énoncé est donc ce temps dilaté Δt. Le temps propre peut être retrouvé à l'aide de l'équation 9.11 :

$$\Delta t = \gamma\,\Delta\tau\ . \qquad \text{(i)}$$

On évalue le facteur γ qui pourra servir ultérieurement :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}734}{c}\right)^2}} = 1{,}472\ . \qquad \text{(ii)}$$

En utlisant l'équation (i), on peut calculer $\Delta\tau$:

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{14{,}0\,\mathrm{ns}}{1{,}472} = 9{,}51\,\mathrm{ns}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du temps trouvé est correct, celui-ci étant inférieur au temps mesuré dans le référentiel du laboratoire.

c. **Identifier la clé** La clé est l'équation 9.19 de la contraction des longueurs.

Résoudre le problème Selon le principe de contraction des longueurs,

$$L = \frac{L_0}{\gamma}\ .$$

On peut alors calculer la longueur contractée perçue dans le référentiel de la particule à l'aide de l'équation :

$$L = \frac{3{,}080\,\mathrm{m}}{1{,}472} = 2{,}09\,\mathrm{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur trouvée est correct, celle-ci étant légèrement inférieure à la longueur réelle.

P21 **Décortiquer le problème** L'intervalle donné est un temps propre, car la même horloge peut donner le temps de passage de l'avant et de l'arrière du train en un même point.

Connues	Inconnues
$L_0 = 560\,\text{m}$	$\Delta t'$
$\Delta\tau = 1{,}647\,\mu\text{s}$	v
	L_S

a. **Identifier la clé** La clé consiste à insérer l'expression de la vitesse dans le référentiel du vaisseau (S') dans l'expression du facteur de Lorentz.

Résoudre le problème Selon l'équation 9.11, le temps recherché est lié au temps propre connu par

$$\Delta t' = \gamma\,\Delta\tau, \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\ .$$

Comme le mentionne la clé, si on remplace v par son expression dans le référentiel S', Δt devient la seule inconnue :

$$v = \frac{L_0}{\Delta t'} \qquad \text{(i)}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{L_0}{c\,\Delta t'}\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{L_0}{c}\right)^2 + \Delta\tau^2}$$

$$\Delta t' = \sqrt{\left(\frac{560\,\text{m}}{2{,}998\times10^8\,\text{m/s}}\right)^2 + \left(1{,}647\times10^{-6}\,\text{s}\right)^2} = 2{,}49\,\mu\text{s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du temps trouvé est correct, ce temps étant dilaté par rapport au temps propre.

b. **Identifier la clé** La clé consiste à insérer l'expression de la vitesse dans le référentiel S', évoquée en **a.**, dans l'équation (i).

Résoudre le problème Le temps $\Delta t'$ ayant été trouvé en **a.**, on a

$$v = \frac{L_0}{\Delta t'} = \frac{560\,\text{m}}{2{,}49\,\mu\text{s}} = 2{,}248\,7\times10^8\,\text{m/s}\ .$$

Pour exprimer la vitesse par une fraction de c, on écrit

$$v = 2{,}248\,7\times10^8\,\text{m/s}\times\frac{c}{2{,}998\times10^8\,\text{m/s}} = 0{,}750c\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse trouvée est correct, cette vitesse étant une fraction de la vitesse maximale physiquement possible.

c. **Identifier la clé** La clé est l'expression de la vitesse dans le référentiel de l'observateur (S).

Résoudre le problème Puisqu'on connaît le temps propre mesuré dans S et qu'on a trouvé la vitesse du vaisseau en **b.**, on peut déterminer la longueur observée dans S :

$$v = \frac{L}{\Delta\tau}$$

$$L = v\,\Delta\tau = \left(2{,}248\,7\times10^8\,\text{m/s}\right)\times\left(1{,}647\times10^{-6}\,\text{s}\right) = 370\,\text{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur trouvée est correct, celle-ci étant inférieure, comme le prévoit la contraction des longueurs.

P22 **Décortiquer le problème** Une tige est inclinée par rapport à la direction de sa vitesse. Les effets relativistes de sa vitesse ne se font sentir que sur la dimension parallèle à la vitesse.

Connues	Inconnues
$L_0 = 2{,}00\,\text{m}$	L'
$\theta = 65{,}0°$	θ'
$\vec{\mathbf{v}} = 0{,}850c\vec{\imath}$	

a. **Identifier la clé** La clé est le fait que la tige est contractée uniquement selon la dimension x.

Résoudre le problème La tige formant un angle de 65,0° avec l'axe des x, elle s'étend le long de l'axe des x sur une distance donnée par

$$L_x = L_0 \cos\theta \ .$$

Seule cette distance est contractée du point de vue du référentiel S', car ce dernier se déplace parallèlement à l'axe des x. Selon l'équation 9.19 de la contraction des longueurs,

$$\begin{aligned} L_{x'} &= \frac{L_x}{\gamma} = L_{0,x}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \\ &= L_0\cos\theta\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \\ L_{x'} &= (2{,}00\,\text{m}) \times \cos 65{,}0° \times \sqrt{1-\left(\frac{0{,}850c}{c}\right)^2} = 0{,}445\,\text{m} \ . \end{aligned}$$

L'étendue selon l'axe des y demeure inchangée, car la vitesse est perpendiculaire à cet axe. Cette dimension est donnée par

$$L_{y'} = L_y = L_0 \sin\theta \ . \qquad \text{(i)}$$

Le théorème de Pythagore peut alors révéler la longueur apparente de la tige dans S' :

$$\begin{aligned} L' &= \sqrt{(L_{x'})^2 + (L_0\sin\theta)^2} = \sqrt{(0{,}445\,\text{m})^2 + (2{,}00\,\text{m} \times \sin 65{,}0°)^2} \\ L' &= 1{,}87\,\text{m} \ . \qquad \text{(réponse)} \end{aligned}$$

Valider la réponse Il est normal que la longueur apparente soit réduite si la vitesse du référentiel est parallèle à l'une des dimensions de l'objet.

b. **Identifier la clé** La clé est le calcul de l'angle d'inclinaison de la tige à partir de la dimension x' trouvée en **a.**

Résoudre le problème L'équation (i) exprimée en **a.** peut être écrite pour le référentiel S' :

$$L_{y'} = L_y = L_0\sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad L_{y'} = L'\sin\theta' \ .$$

Il suffit alors d'isoler θ' :

$$\begin{aligned} \theta' &= \arcsin\frac{L_{y'}}{L'} = \arcsin\frac{L_0\sin\theta}{L'} = \arcsin\frac{(2{,}00\,\text{m}) \times \sin 65{,}0°}{1{,}87\,\text{m}} \\ \theta' &= 76{,}2° \ . \qquad \text{(réponse)} \end{aligned}$$

Valider la réponse L'angle trouvé est plus grand que l'angle dans le référentiel S, ce qui est cohérent avec le fait que la dimension parallèle au mouvement paraît contractée.

Q23 **Identifier la clé** La clé est le fait que plus une vitesse relative d'approche est grande, plus la longueur d'onde observée est courte, et que plus une vitesse relative d'éloignement est grande, plus la longueur d'onde est grande.

Résoudre le problème Pour déterminer d'abord les longueurs d'onde les plus courtes, on cherche les vitesses de rapprochement les plus grandes. L'observateur D est celui qui s'approche le plus rapidement de la source fixe, avec $v = 0{,}4c$. L'observateur B s'approche également, mais moins rapidement. On a donc déjà $\lambda_D < \lambda_B$.

Les deux autres observateurs ont des vitesses d'éloignement de la source, donc des longueurs d'onde plus grandes que pour D et B. L'observateur C étant celui qui s'éloigne le plus rapidement, on a $\lambda_C > \lambda_A$.

On peut ainsi placer les quatre longueurs d'onde observées en ordre croissant :

$$\lambda_D < \lambda_B < \lambda_A < \lambda_C \ . \qquad \text{(réponse)}$$

E24 **Décortiquer le problème** Un détecteur et une source s'approchent l'un de l'autre.

Connues	Inconnue
$\lambda_0 = 700\,\text{nm}$	$\vec{\mathbf{v}}$
$\lambda = 400\,\text{nm}$	

Identifier la clé La clé est le fait qu'une vitesse d'approche relative entraîne un décalage vers le bleu, donc une diminution de la longueur d'onde selon l'équation 9.24.

Résoudre le problème Puisque la source et le détecteur s'approchent l'un de l'autre, on utilise dans l'équation 9.24 les signes provoquant une longueur d'onde perçue plus faible que la longueur d'onde propre, c'est-à-dire une soustraction au numérateur et une addition au dénominateur :

$$\lambda = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\lambda_0, \qquad \text{avec} \qquad \beta = \frac{v^2}{c^2}.$$

On détermine d'abord une expression de β :

$$\begin{aligned} \lambda^2\,(1+\beta) &= \lambda_0^2\,(1-\beta) \\ \beta &= \frac{\lambda_0^2 - \lambda^2}{\lambda_0^2 + \lambda^2} \ . \end{aligned}$$

En remplaçant β par v/c, on trouve

$$\begin{aligned} \beta = \frac{v}{c} &= \frac{\lambda_0^2 - \lambda^2}{\lambda_0^2 + \lambda^2} \\ v &= \frac{\lambda_0^2 - \lambda^2}{\lambda_0^2 + \lambda^2}\ c \\ &= \frac{(700\,\text{nm})^2 - (400\,\text{nm})^2}{(700\,\text{nm})^2 + (400\,\text{nm})^2} \times \left(2{,}998 \times 10^8\,\text{m/s}\right) \\ \vec{\mathbf{v}} &= 0{,}508c\ \overrightarrow{\text{en s'approchant}}\ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse trouvée est correct, cette vitesse étant assez grande pour produire un effet Doppler relativiste perceptible.

E25 **Décortiquer le problème** Une étoile ayant une vitesse d'approche ou d'éloignement importante par rapport à la Terre produira une lumière qui nous apparaîtra modifiée par l'effet Doppler relativiste.

Connues	Inconnues
$\lambda_a/\lambda_0 = 2$	$\vec{\mathbf{v_a}}$
$\lambda_b/\lambda_0 = \frac{1}{2}$	$\vec{\mathbf{v_b}}$

a. **Identifier la clé** La clé est qu'une vitesse relative en éloignement entre la source et l'observateur produit une augmentation de la longueur d'onde apparente.

Résoudre le problème Dans l'équation 9.24 de l'effet Doppler relativiste, la longueur d'onde augmente si on applique une addition au numérateur et une soustraction au dénominateur :

$$\lambda = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\lambda_0 \ .$$

Pour $\lambda/\lambda_0 = 2$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{\lambda_0} &= \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = 2 \\ 1+\beta &= 4\,(1-\beta) \qquad \text{(i)} \\ \beta &= \frac{3}{5} \ .\end{aligned}$$

Puisque β est égal à v/c, on trouve

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{v}{c} = \frac{3}{5} \\ v &= \frac{3}{5}c \ .\end{aligned}$$

On a affirmé plus haut que cette vitesse doit être une vitesse d'éloignement entre la source et l'observateur ; donc,

$$\vec{\mathbf{v_a}} = 0{,}600c \ \overrightarrow{\text{en s'éloignant}} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse trouvée est correct pour produire un effet Doppler relativiste d'un facteur 2 vers le rouge.

b. **Identifier la clé** La clé est qu'une vitesse relative en rapprochement entre la source et l'observateur produit une diminution de la longueur d'onde apparente.

Résoudre le problème Dans l'équation 9.24 de l'effet Doppler relativiste, la longueur d'onde est réduite si on applique une soustraction au numérateur et une addition au dénominateur :

$$\lambda = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\lambda_0 \ .$$

Pour $\lambda/\lambda_0 = \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{\lambda_0} &= \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \frac{1}{2} \\ 1+\beta &= 4\,(1-\beta) \ .\end{aligned}$$

On retrouve ici la même forme que dans l'équation (i) trouvée en **a.**, ce qui indique qu'on trouvera le même résultat en isolant v :

$$v = \frac{3}{5}c \ .$$

On a affirmé plus haut que cette vitesse doit être une vitesse de rapprochement entre la source et l'observateur ; donc,

$$\vec{\mathbf{v_b}} = 0{,}600c \ \overrightarrow{\text{en s'approchant}} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse On observe que la vitesse qui produit un décalage vers le bleu d'un facteur 2 est la même que celle qui produit un décalage d'un facteur 2 vers le rouge.

E26 **Décortiquer le problème** Le vaisseau a une vitesse d'éloignement importante par rapport à la Terre. Cette vitesse a un effet sur la longueur d'onde perçue de l'onde radio reçue sur Terre.

Connues	Inconnues
$v = 0{,}400c$	f_{Terre}
$f_0 = 200\,\text{MHz}$	f_{station}

a. **Identifier la clé** La clé est le fait que le vaisseau s'éloigne de la Terre, ce qui produira une diminution de la fréquence.

Résoudre le problème L'équation 9.23 est adaptée à la variation de la fréquence observée. Pour obtenir une diminution de la fréquence, comme le mentionne la clé, on doit appliquer une soustraction au numérateur et une addition au dénominateur :

$$f = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, f_0, \qquad \text{avec} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

$$f = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}\, f_0$$

$$f = \sqrt{\frac{1-\frac{0{,}400c}{c}}{1+\frac{0{,}400c}{c}}} \times 200 \times 10^6\,\text{Hz} = 130{,}9\,\text{MHz}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la fréquence trouvée est correct, celle-ci étant réduite par l'effet Doppler relativiste.

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que le vaisseau s'approche de la station, ce qui produira une augmentation de la fréquence.

Résoudre le problème Selon l'équation 9.23, pour obtenir une augmentation de la fréquence, comme le mentionne la clé, on doit appliquer une addition au numérateur et une soustraction au dénominateur :

$$f = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\, f_0, \qquad \text{avec} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

$$f = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}\, f_0$$

$$f = \sqrt{\frac{1+\frac{0{,}400c}{c}}{1-\frac{0{,}400c}{c}}} \times 200 \times 10^6\,\text{Hz} = 305{,}5\,\text{MHz}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la fréquence trouvée est correct, celle-ci étant augmentée de façon perceptible par l'effet Doppler relativiste.

P27 **Décortiquer le problème** Le vaisseau envoie vers la Terre et vers Saturne des signaux lumineux identiques qui sont perçus différemment aux deux endroits.

Connues	Inconnues
$\lambda_{\text{S}} = 450\,\text{nm}$	v
$\lambda_{\text{T}} = 640\,\text{nm}$	λ_0

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 9.24 appliquée simultanément à la longueur d'onde réduite observée de Saturne et à la longueur d'onde augmentée observée de la Terre.

Depuis Saturne, la longueur d'onde réduite observée est donnée par

$$\lambda_S = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\lambda_0 \ , \tag{i}$$

et la longueur d'onde augmentée observée depuis la Terre est donnée par

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\lambda_0 \ . \tag{ii}$$

Résoudre le problème Les équations (i) et (ii) permettent d'obtenir deux expressions de λ_0 que l'on peut poser égales pour avoir β comme seule inconnue :

$$\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\lambda_S = \lambda_0 = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\lambda_T \tag{iii}$$

$$\lambda_S\,(1+\beta) = \lambda_T\,(1-\beta)$$

$$\lambda_S + \beta\lambda_S = \lambda_T - \beta\lambda_T$$

$$\beta = \frac{\lambda_T - \lambda_S}{\lambda_T + \lambda_S} \ .$$

Puisque $\beta = \frac{v}{c}$, on peut finalement évaluer la vitesse :

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{\lambda_T - \lambda_S}{\lambda_T + \lambda_S}$$

$$v = \frac{\lambda_T - \lambda_S}{\lambda_T + \lambda_S}c = \left(\frac{640\,\text{nm} - 450\,\text{nm}}{640\,\text{nm} + 450\,\text{nm}}\right)c$$

$$v = 0{,}174c \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse trouvée est correct, celle-ci étant une fraction importante de la vitesse de la lumière.

b. **Identifier la clé** La clé est l'une des expressions de λ_0 développée en **a.**

Résoudre le problème La première partie de l'équation (iii) utilisant λ_S permet de calculer λ_0 :

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\lambda_S, \qquad \text{avec} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}\lambda_S$$

$$= \sqrt{\frac{1+\frac{0{,}174c}{c}}{1-\frac{0{,}174c}{c}}} \times 450\,\text{nm}$$

$$\lambda_0 = 537\,\text{nm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est correct, celle-ci étant comprise entre λ_S et λ_T.

R28 **Décortiquer le problème** Une galaxie nous envoie de la lumière dont la longueur propre est 393,3 nm, car la raie observée est semblable à une raie connue dans un certain type de lumière. La galaxie possède donc une vitesse relative par rapport à la Terre si cette raie est observée à une autre longueur d'onde.

Connues	Inconnues
$n = 750{,}0\,\text{lignes/mm}$	λ_0
$\theta = 18{,}00°$	$\vec{v}$
$\lambda = 393{,}3\,\text{nm}$	

a. **Identifier la clé** La clé consiste à déterminer la longueur d'onde qui traverse le réseau, à partir des propriétés de ce réseau, selon la section 8.7.

Résoudre le problème Selon l'équation 8.24, l'angle d'observation d'une raie d'émission traversant un réseau est donné par

$$d\sin\theta = m\lambda, \qquad \text{avec} \qquad d = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n}\sin\theta = m\lambda$$

$$\lambda = \frac{\sin\theta}{mn} = \frac{\sin 18{,}00°}{1 \times \frac{750\,\text{lignes}}{0{,}001\,\text{m}}} = 412{,}0\,\text{nm}$$

$$\lambda = 412{,}0\,\text{nm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est correct. Une longueur d'onde apparente plus grande que la longueur d'onde réelle (un décalage vers le rouge par l'effet Doppler relativiste) suggère que la galaxie est en éloignement de la Terre, ce qui est plus probable vu l'expansion de l'univers.

b. **Identifier la clé** La clé est qu'une vitesse relative en éloignement entre la galaxie et l'astronome produit une augmentation de la longueur d'onde apparente.

Résoudre le problème Dans l'équation 9.24 de l'effet Doppler relativiste, la longueur d'onde augmente si on applique une addition au numérateur et une soustraction au dénominateur :

$$\lambda = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\lambda_0\ .$$

Pour connaître la vitesse, on isole d'abord le paramètre β :

$$\lambda^2(1-\beta) = \lambda_0^2(1+\beta)$$

$$\beta = \frac{\lambda^2-\lambda_0^2}{\lambda^2+\lambda_0^2}\ .$$

Puisque β est égal à v/c, on trouve

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{\lambda^2-\lambda_0^2}{\lambda^2+\lambda_0^2}$$

$$v = \frac{\lambda^2-\lambda_0^2}{\lambda^2+\lambda_0^2}\times c = \frac{(412{,}0\,\text{nm})^2-(393{,}3\,\text{nm})^2}{(412{,}0\,\text{nm})^2+(393{,}3\,\text{nm})^2}\times c = 0{,}046\,5c\ .$$

On a affirmé plus haut que cette vitesse doit être une vitesse d'éloignement entre la galaxie et la Terre ; donc,

$$\vec{\mathbf{v}} = 0{,}046c\ \overrightarrow{\text{en s'éloignant}}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse trouvée est correct pour produire un effet Doppler relativiste, mais la fraction de c est légèrement faible, ce qui est cohérent avec le fait qu'une masse comme une galaxie ne peut pas avoir une vitesse se rapprochant vraiment de la vitesse de la lumière.

E29 **Décortiquer le problème** La désintégration d'une particule est observée dans un certain référentiel (S') à une position et à un instant connus. Le même événement sera perçu ailleurs et à un autre instant dans un autre référentiel.

Connues		Inconnues
$t = 250{,}0\,\text{ns}$	$x = 90{,}00\,\text{m}$	x'
$\vec{\mathbf{v}} = 0{,}850\,0c\vec{\imath}$	$t_0 = t'_0$	t'

Identifier la clé La clé est l'ensemble d'équations 9.28 donnant les coordonnées pour le référentiel S'. La vitesse étant orientée selon l'axe des x, les coordonnées x' et t' sont données par

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad \text{et} \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) .$$

Résoudre le problème On détermine d'abord le facteur de Lorentz qui apparaît dans les deux calculs :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}850\,0c}{c}\right)^2}} = 1{,}898\,3 .$$

On peut alors calculer x' et t' rapidement :

$$x' = \gamma(x - vt) = 1{,}898\,3 \times \left(90{,}00\,\mathrm{m} - 0{,}850\,0c \times 250{,}0 \times 10^{-9}\,\mathrm{s}\right) = 49{,}91\,\mathrm{m}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) = 1{,}898\,3 \times \left(250{,}0 \times 10^{-9}\,\mathrm{s} - \frac{0{,}850\,0c \times 90{,}00\,\mathrm{m}}{\left(2{,}998 \times 10^8\,\mathrm{m/s}\right)^2}\right) = -9{,}81\,\mathrm{ns}$$

$$x' = 49{,}91\,\mathrm{m} \qquad \text{et} \qquad t' = -9{,}8\,\mathrm{ns} . \qquad \text{(réponse)}$$

E30 **Décortiquer le problème** Deux événements simultanés dans le référentiel en mouvement à grande vitesse sont observés dans le référentiel immobile des balises.

Connues	Inconnues
$v = 0{,}320c$	Δt
$x = 2{,}50\,\mathrm{km}$	L

a. Identifier la clé La clé est le fait que la largeur de la rivière est contractée dans le référentiel de l'avion.

Résoudre le problème Selon les équations 9.29, le délai observé par le pêcheur, dans le référentiel S, est donné par

$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) .$$

Puisque le délai est nul dans le référentiel de l'avion, on peut affirmer que $t' = 0$. Ainsi,

$$t = \gamma\left(0 + \frac{vx'}{c^2}\right) = \frac{\gamma v x'}{c^2} . \qquad \text{(i)}$$

Par ailleurs, la largeur x' dans le référentiel de l'avion n'est pas une longueur propre et elle est contractée, en accord avec l'équation 9.19 :

$$x' = \frac{x}{\gamma} .$$

En insérant cette expression de x' dans l'équation (i), on obtient

$$t = \frac{\gamma v\left(\frac{x}{\gamma}\right)}{c^2} = \frac{vx}{c^2} .$$

On peut alors procéder au calcul du délai recherché :

$$t = \frac{0{,}320c \times 2\,500\,\mathrm{m}}{c^2} = 2{,}67 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$$

$$t = 2{,}67\,\mu\mathrm{s} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du délai trouvé est correct pour un intervalle impliquant la vitesse de la lumière.

b. Identifier la clé La clé est l'équation 9.28 de la longueur dans le référentiel en mouvement :

$$x' = \gamma\,(x - vt)\,, \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\ .$$

Résoudre le problème

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \times (x - vt) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}320c}{c}\right)^2}} \times \big((2\,500\,\mathrm{m}) - \big(0{,}320 \times 2{,}998 \times 10^8\,\mathrm{m/s} \times 2{,}67 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}\big)\big) \\ x' &= 2{,}37\,\mathrm{km} \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la largeur trouvée est correct, celle-ci étant légèrement inférieure à la largeur propre pour le pilote de l'avion.

E31 Décortiquer le problème La distance et le temps donnés appartiennent au référentiel des voyageurs. Il s'agit donc de x' et de t'.

Connues	Inconnues
$v = 0{,}800c$	x
$t' = 2{,}40\,\mathrm{a}$	t
$x' = 7{,}20\,\mathrm{al}$	

a. Identifier la clé La clé est l'équation de la position x parmi les équations 9.29 :

$$x = \gamma\,(x' + vt')\,, \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\ .$$

Résoudre le problème La position x dans le référentiel de la Terre est

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \times (x' + vt')\ .$$

En insérant les valeurs connues, on obtient

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}800c}{c}\right)^2}} \times (7{,}20\,\mathrm{a} \times c + (0{,}800c \times 2{,}40\,\mathrm{a})) \\ x &= 15{,}2\,\mathrm{al}\ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la distance trouvée est correct, celle-ci étant supérieure à la distance contractée dans le référentiel des voyageurs.

b. Identifier la clé La clé est l'équation de t parmi les équations 9.29 :

$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)\ .$$

Résoudre le problème Le temps dans le référentiel de la Terre est

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}800c}{c}\right)^2}}\left((2{,}40\,\mathrm{a}) + \frac{0{,}800c \times 7{,}2\,\mathrm{a} \times c}{c^2}\right) \\ t &= 13{,}6\,\mathrm{a}\ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du temps trouvé est correct.

P32 **Décortiquer le problème** La création et la désintégration d'une particule sont observées dans le référentiel immobile d'un laboratoire.

Connues	Inconnues
$x_1 = 0\,\text{m}$	v
$t_1 = 2{,}00\,\mu\text{s}$	$\Delta t'$
$t_2 = 13{,}50\,\mu\text{s}$	x_1'
$x_2 = 3\,100\,\text{m}$	

a. Identifier la clé La clé est l'utilisation de l'équation 9.28 de la position de la particule pour le moment initial et le moment final. La position de la particule, dans son propre référentiel, peut être définie pour les deux instants. La particule étant à l'origine de son référentiel aux deux instants, on peut écrire

$$x_1' = \gamma\,(x_1 - vt_1) = 0 \qquad \text{et} \qquad x_2' = \gamma\,(x_2 - vt_2) = 0\ .$$

Résoudre le problème L'égalité des deux positions à 0 permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\gamma\,(x_1 - vt_1) &= \gamma\,(x_2 - vt_2)\\
x_1 - vt_1 &= x_2 - vt_2\\
v &= \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{3\,100\,\text{m} - 0\,\text{m}}{13{,}50\,\mu\text{s} - 2{,}00\,\mu\text{s}} = 2{,}696 \times 10^8\,\text{m/s}\ .
\end{aligned}$$

Expirmée en fraction de c, la vitesse est

$$v = 2{,}696 \times 10^8\,\text{m/s} \times \frac{c}{2{,}998 \times 10^8\,\text{m/s}} = 0{,}899c\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse trouvée est correct.

b. Identifier la clé La clé est le fait que le temps observé dans le référentiel du laboratoire est un temps dilaté.

Résoudre le problème Selon l'équation 9.11 de la dilatation du temps,

$$\Delta t = \gamma\,\Delta t' \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma}\ .$$

On évalue d'abord γ :

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}899c}{c}\right)^2}} = 2{,}285\,0\\
\Delta t' &= \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{t_2 - t_1}{\gamma} = \frac{13{,}50\,\mu\text{s} - 2{,}00\,\mu\text{s}}{2{,}285\,0}\\
\Delta t' &= 5{,}03\,\mu\text{s}\ . \qquad \text{(réponse)}
\end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du temps trouvé est correct, ce temps étant inférieur au temps dilaté mesuré dans le référentiel du laboratoire.

c. Identifier la clé La clé consiste à déterminer au préalable la position de la particule dans le référentiel du laboratoire à $t = 0$.

Résoudre le problème Par la cinématique, on peut déterminer la position de la particule à $t = 0$ à partir de l'équation du mouvement rectiligne uniforme :

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + vt_1\\
x_0 &= x_1 - vt_1 = 0 - (0{,}899c) \times (2{,}00\,\mu\text{s}) = -539{,}1\,\text{m}\ .
\end{aligned}$$

Ensuite, selon l'équation 9.28 de la position x',

$$x' = \gamma\,(x - vt)\ .$$

Si on considère l'instant $t = 0$, on obtient

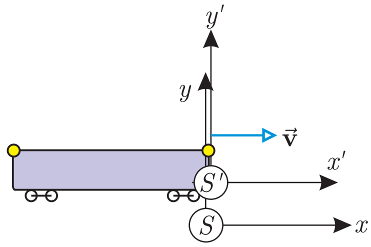
$$x'_0 = \gamma\,(x - v \times 0) = \gamma x_0 = 2{,}285\,0 \times -539{,}1\,\mathrm{m}$$
$$x'_0 = -1\,232\,\mathrm{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

P33 Lorsque l'avant du train passe vis-à-vis l'observateur, on considère que $t = 0$ dans les deux référentiels (celui de l'observateur, S, et celui du train, S').

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$L = 1{,}00\,\mathrm{km}$	Allumage : t_{av}, t_{ar}
$v = c/2$	Extinction : t_{av}, t_{ar}
	$\Delta t'_{\mathrm{av}}$, $\Delta t'_{\mathrm{ar}}$
	Δt_{av}, Δt_{ar}

a. **Illustrer la situation** La figure ci-contre montre le train à l'instant où son extrémité avant passe vis-à-vis de l'observateur (l'origine de S).



Identifier la clé La clé est l'équation 9.28 de t' appliquée aux deux extrémités du train dans le référentiel de l'observateur :

$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)\ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème On calcule d'abord le facteur γ qui servira à plusieurs reprises :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}5c}{c}\right)^2}} = 1{,}154\,7\ .$$

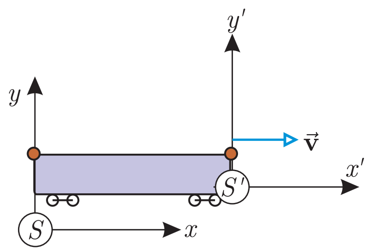
Le phare à l'avant du train est le plus facile à traiter, puisque celui-ci passe précisément devant l'observateur lorsqu'il s'allume. Le temps d'allumage t_{av} pour ce phare est donc 0. Si le phare à l'arrière du train s'allume au même instant pour le référentiel S' ($t'_{\mathrm{ar}} = 0$), l'équation (i) permet de connaître l'instant où cela se produit dans S :

$$t_{\mathrm{ar}} = \gamma\left(t'_{\mathrm{ar}} + \frac{vx'}{c^2}\right) = 1{,}154\,7 \times \left(0 + \frac{0{,}5c \times -1\,000\,\mathrm{m}}{c^2}\right)$$
$$t_{\mathrm{ar}} = -1{,}93\,\mu\mathrm{s}$$

$$t_{\mathrm{av}} = 0 \qquad \text{et} \qquad t_{\mathrm{ar}} = -1{,}93\,\mu\mathrm{s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Le temps t_{ar} trouvé est négatif, ce qui fait que le phare à l'arrière semble s'être allumé avant le phare avant, pour l'observateur immobile.

b. **Illustrer la situation** La figure ci-contre montre le train à l'instant où son extrémité arrière passe vis-à-vis de l'observateur.



Identifier la clé La clé est l'application de l'équation 9.29 de t après avoir calculé le temps de passage de l'arrière du train devant l'observateur dans le référentiel S' :

$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)\ . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème Pour trouver t à l'aide de l'équation (ii), on doit d'abord déterminer t'. Par cinématique, on peut trouver ce moment t' de passage de l'arrière du train devant l'observateur. Dans le référentiel du train, c'est l'observateur qui se déplace vers l'arrière du train, à la vitesse de $-c/2$. À $t' = 0$, l'observateur se trouve vis-à-vis de l'avant du train, soit à 1 000 m. Ainsi, par cinématique,

$$x' = x'_0 + vt' \qquad \Rightarrow \qquad t' = \frac{x' - x'_0}{v} = \frac{0 - 1\,000\,\mathrm{m}}{-c/2} = 6{,}671\ \mu\mathrm{s}\ .$$

On sait donc que dans le référentiel du train, le temps d'extinction des deux phares est 6,671 µs.

L'équation (ii) de t appliquée au temps d'extinction du phare avant, qui se trouve à l'origine dans S' ($x' = 0$), est

$$t_{\mathrm{av}} = 1{,}154\,7 \times \left(6{,}671\ \mu\mathrm{s} + \frac{v \times 0}{c^2}\right) = 7{,}70\ \mu\mathrm{s}\ .$$

Pour le phare arrière, qui s'éteint en passant devant l'observateur et qui se trouve à $x' = -1\,000$ m dans S', on obtient

$$t_{\mathrm{ar}} = 1{,}154\,7 \times \left(6{,}671\ \mu\mathrm{s} + \frac{0{,}5c \times -1\,000\,\mathrm{m}}{c^2}\right) = 5{,}78\ \mu\mathrm{s}$$

$$t_{\mathrm{av}} = 7{,}70\ \mu\mathrm{s} \qquad \text{et} \qquad t_{\mathrm{ar}} = 5{,}78\ \mu\mathrm{s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. **Identifier la clé** La clé est le fait que dans le référentiel du train, l'allumage des deux phares est simultané, comme leur extinction.

Résoudre le problème La durée d'allumage des deux phares est la même, les deux s'allumant à $t' = 0$ et s'éteignant à $t' = 6{,}671$ µs (comme on l'a trouvé en **b.**). Ainsi,

$$\Delta t'_{\mathrm{av}} = \Delta t'_{\mathrm{ar}} = 6{,}671\ \mu\mathrm{s} - 0 = 6{,}671\ \mu\mathrm{s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

d. **Identifier la clé** La clé consiste à utiliser les temps d'allumage et d'extinction de chaque phare tels que trouvés en **a.** et en **b.**

Résoudre le problème On a trouvé précédemment que dans S, le phare avant s'allumait à $t_{\mathrm{av}} = 0$ et s'éteignait à 7,70 µs. Sa durée d'allumage est donc

$$\Delta t_{\mathrm{av}} = 7{,}70\ \mu\mathrm{s} - 0 = 7{,}70\ \mu\mathrm{s}\ .$$

Pour le phare arrière, on a trouvé qu'il s'allumait dans S à $-1{,}93$ µs et qu'il s'éteignait à 5,78 µs. Sa durée d'allumage est donc

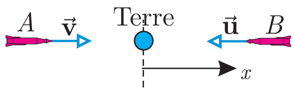
$$\Delta t_{\mathrm{ar}} = 5{,}78\ \mu\mathrm{s} - (-1{,}93\ \mu\mathrm{s}) = 7{,}70\ \mu\mathrm{s}\ .$$

Ainsi, les deux phares ont également la même durée d'éclairage dans S :

$$\Delta t_{\mathrm{av}} = \Delta t_{\mathrm{ar}} = 7{,}70\ \mu\mathrm{s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Le temps trouvé est plausible et se trouve même à être égal au temps dilaté du temps trouvé en **c.** En effet, une autre solution possible aurait été d'appliquer l'équation 9.11 à partir du temps propre de 6,671 µs.

E34 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la situation.



Décortiquer le problème Le référentiel S est celui de la Terre et le référentiel S' est celui du vaisseau A.

Connues	Inconnues
$v = u_{Ax} = 0{,}25c$	$\vec{\mathbf{u}}'_{\mathrm{T}}$
$u_{Bx} = -0{,}25c$	$\vec{\mathbf{u}}'_{B}$

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 9.30 permettant de transformer la vitesse d'un référentiel à l'autre :

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \; . \tag{i}$$

Résoudre le problème La vitesse de la Terre, dans son propre référentiel, est nulle : $u_{\mathrm{T}x} = 0$. Le référentiel S' étant celui de la fusée A (qui a une vitesse $\vec{\mathbf{v}} = v\vec{\imath}$), la vitesse de la Terre dans ce référentiel est

$$u'_{\mathrm{T}x} = \frac{u_{\mathrm{T}x} - v}{1 - \frac{vu_{\mathrm{T}x}}{c^2}} = \frac{0 - 0{,}25c}{1 - \frac{0{,}25c \times 0}{c^2}} = -0{,}25c \; .$$

Exprimée sous forme de vecteur, cette vitesse est

$$\vec{\mathbf{u}}'_{\mathrm{T}} = -0{,}25c\vec{\imath} \; . \tag{réponse}$$

Valider la réponse Il est normal que les vitesses relatives de deux objets soient des opposées l'une de l'autre.

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation (i), avec la vitesse de la fusée B : $u_x = -0{,}25c$.

Résoudre le problème Selon l'équation 9.30,

$$u'_{Bx} = \frac{u_{Bx} - v}{1 - \frac{vu_{Bx}}{c^2}} \; .$$

On insère les valeurs :

$$u'_{Bx} = \frac{-0{,}25c - 0{,}25c}{1 - \frac{(0{,}25c)(-0{,}25c)}{c^2}} = -0{,}471\,c \; .$$

Exprimée sous forme de vecteur, cette vitesse vers x négatif est

$$\vec{\mathbf{u}}'_{B} = -0{,}471c\vec{\imath} \; . \tag{réponse}$$

Valider la réponse On constate que le module de la vitesse de B par rapport à A est supérieur au module de la vitesse de B par rapport à la Terre, ce qui est cohérent avec l'orientation des vitesses illustrées sur la figure. De plus, le module de la vitesse est plus faible que ce qu'on obtiendrait en utilisant la transformation des vitesses de Galilée.

E35 **Décortiquer le problème** Le référentiel de la Terre est S et le référentiel du vaisseau est S'.

Connues	Inconnue
$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{V}} = 0{,}300c\vec{\imath}$	$\vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{M}}$
$\vec{\mathbf{u}}'_{\mathrm{M}} = 0{,}500c\vec{\imath}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 9.32 donnant la vitesse du missile par rapport à un référentiel autre que le référentiel en mouvement du vaisseau :

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2} \; . \tag{i}$$

Résoudre le problème Selon l'équation (i),

$$u_{\mathrm{M}x} = \frac{u'_{\mathrm{M}x} + v}{1 + \frac{vu'_{\mathrm{M}x}}{c^2}} \; .$$

Dans cette équation, v est le module de la vitesse du vaisseau (le référentiel dans lequel on connaît la vitesse du missile) et $u'_{\mathrm{M}x}$ est la vitesse du missile dans ce référentiel. Donc,

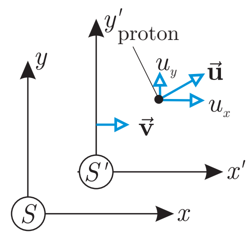
$$u_{\mathrm{M}x} = \frac{0{,}500c + 0{,}300c}{1 + \frac{0{,}500c \times 0{,}300c}{c^2}} = 0{,}696c \ .$$

Exprimée sous forme de vecteur, cette vitesse est

$$\vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{M}} = 0{,}696c\vec{\imath} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse trouvée est correct. Le module de la vitesse est plus faible que ce qu'on obtiendrait avec l'équation de transformation des vitesses de Galilée (dans laquelle on additionnerait simplement les vitesses).

P36 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre le proton ayant une vitesse dans S', le référentiel S' ayant lui-même une vitesse dans le référentiel S.



Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$u'_{\mathrm{p}} = 0{,}900c$	$\vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{p}}$
$\theta_{\mathrm{p}} = 30{,}0°$	
$\vec{\mathbf{v}} = 0{,}700c\vec{\imath}$	

Identifier les clés Les clés sont les équations 9.32 et 9.33 de la vitesse de la particule selon x et y dans le référentiel S :

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \qquad \text{et} \qquad u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{vu'\cos\theta}{c^2}\right)} \ .$$

Résoudre le problème Pour procéder au calcul de u_x, la vitesse selon x du proton dans le référentiel S, il faut d'abord déterminer la composante x de la vitesse dans S', u'_x. Celle-ci est liée à l'orientation de la vitesse du proton dans S' selon

$$u'_x = u'\cos\theta \ .$$

Donc,

$$u_x = \frac{u'\cos\theta + v}{1 + \frac{vu'\cos\theta}{c^2}} = \frac{0{,}900c \times \cos 30° + 0{,}700c}{1 + \frac{0{,}700c \times 0{,}900c \times \cos 30°}{c^2}} = 0{,}957\,19c \ .$$

De la même manière, pour y, il faut d'abord déterminer la composante y de la vitesse du proton dans S' pour calculer la vitesse dans S :

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{vu'\cos\theta}{c^2}\right)}, \qquad \text{avec} \qquad u'_y = u'\sin\theta \ .$$

Le facteur de Lorentz est

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}700c}{c}\right)^2}} = 1{,}400\,3 \ .$$

On calcule alors u_y ainsi :

$$u_y = \frac{u'\sin\theta}{\gamma\left(1 + \frac{vu'\cos\theta}{c^2}\right)} = \frac{0{,}900c \times \sin 30°}{1{,}400\,3 \times \left(1 + \frac{0{,}700c \times 0{,}900c \times \cos 30°}{c^2}\right)} = 0{,}207\,92c \ .$$

Les deux composantes de vitesse dans S étant connues, on peut alors trouver le vecteur vitesse finale en utilisant entre autres le théorème de Pythagore :

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{(0{,}957\,19c)^2 + (0{,}207\,92c)^2} = 0{,}980c$$
$$\theta_u = \arctan \frac{0{,}207\,92c}{0{,}980c} = 12{,}3° \ .$$

Le vecteur vitesse du proton dans S est donc

$$\vec{\mathbf{u}} = 0{,}980c \quad \overrightarrow{\text{à } 12{,}3° \text{ au-dessus de l'axe des } x} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Il est cohérent que le vecteur vitesse du proton soit plus près de l'horizontale dans le référentiel S en raison de la vitesse du référentiel S', qui est horizontale et qui accroît la vitesse selon x du proton dans S.

P37 **Décortiquer le problème** Un vaisseau et des protons se rencontrent avec des vitesses en sens opposés et la durée de leur rencontre est observée dans différents référentiels.

Connues	Inconnues
$L_0 = 800\,\mathrm{m}$	Δt_T
$\vec{\mathbf{v}}_\mathrm{v} = 0{,}760c$	Δt_v
$\vec{\mathbf{v}}_\mathrm{p} = -0{,}850c$	Δt_p

a. **Identifier la clé** La clé consiste à calculer le temps propre d'un proton pour parcourir la longueur contractée du vaisseau.

Résoudre le problème Selon la définition de la vitesse en cinématique,

$$v = \frac{L}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t = \frac{L}{v} \ .$$

Dans le présent cas, la longueur dans le référentiel des protons est une longueur contractée par la vitesse du vaisseau :

$$L = \frac{L_0}{\gamma_\mathrm{v}} \ ,$$

où

$$\gamma_\mathrm{v} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_\mathrm{v}}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}760c}{c}\right)^2}} = 1{,}538\,6 \ .$$

La vitesse relative du vaisseau par rapport aux protons est

$$v = v_\mathrm{v} - v_\mathrm{p} = (0{,}760c) - (-0{,}850c) = 1{,}61c \ .$$

Le temps de parcours pour les protons est un temps propre :

$$\Delta\tau = \frac{L}{v} = \frac{\left(\frac{L_0}{\gamma_\mathrm{v}}\right)}{v} = \frac{\left(\frac{800\,\mathrm{m}}{1{,}538\,6}\right)}{1{,}61c} = 1{,}076\,5\,\mu\mathrm{s} \ .$$

Ce temps est le temps propre vécu par les protons. La Terre perçoit une durée dilatée de ce temps, selon l'équation 9.11 qui lie le facteur de Lorentz à la vitesse des protons :

$$\Delta t = \gamma_\mathrm{p}\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_\mathrm{p}}{c}\right)^2}}\tau$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{-0{,}850c}{c}\right)^2}} \times 1{,}076\,5\,\mu\mathrm{s}$$
$$\Delta t = 2{,}04\,\mu\mathrm{s} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du temps trouvé est correct.

b. Identifier la clé La clé est l'équation 9.30 de la vitesse d'un mobile dans un référentiel en mouvement :

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \ . \tag{i}$$

Résoudre le problème Dans l'équation (i), u_x est la vitesse des protons dans le référentiel de la Terre, et v est la vitesse du référentiel du vaisseau (le vaisseau lui-même). Ainsi,

$$u'_x = \frac{-0{,}850c - 0{,}760c}{1 - \frac{0{,}760c \times -0{,}850c}{c^2}} = -0{,}978\,1c \ .$$

À cette vitesse, le temps mesuré dans le référentiel du vaisseau, où la longueur parcourue est sa longueur propre, est

$$\Delta t_{\mathrm{v}} = \frac{L_0}{u'_x} = \frac{800\,\mathrm{m}}{-0{,}978\,1c} = 2{,}73\,\mu\mathrm{s} \ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du temps trouvé est correct.

c. Identifier la clé La clé est l'équation 9.30 de la vitesse d'un mobile dans un référentiel en mouvement.

Résoudre le problème Selon un traitement similaire à celui fait en **b.**, mais avec une valeur u'_x étant la vitesse du vaisseau et v, la vitesse des protons, on obtient

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} = \frac{0{,}760c - (-0{,}850c)}{1 - \frac{-0{,}850c \times 0{,}760c}{c^2}} = 0{,}978\,1c \ .$$

De plus, pour les protons, la longueur du vaisseau est contractée, selon l'équation 9.19 :

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \ ,$$

où

$$\gamma_{\mathrm{p}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{\mathrm{p}}}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}978\,1c}{c}\right)^2}} = 4{,}807\,7 \ .$$

La durée du parcours est donc

$$\Delta t_{\mathrm{p}} = \frac{L}{u'_x} = \frac{L_0}{\gamma u'_x} = \frac{800\,\mathrm{m}}{4{,}807\,7 \times 0{,}978\,1c} = 567\,\mathrm{ns} \ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du temps trouvé est correct. Ce temps est beaucoup plus court que les temps trouvés en **a.** et en **b.**, car la vitesse relative des protons par rapport au vaisseau est beaucoup plus grande que les autres vitesses relatives impliquées.

Q38 Décortiquer le problème Quatre masses sont données avec leur énergie totale, qui inclut donc l'énergie au repos et l'énergie cinétique.

a. Identifier la clé La clé est l'équation 9.47 de l'énergie au repos d'une masse m :

$$E_0 = mc^2 \ . \tag{i}$$

Résoudre le problème Pour chacune des quatre particules, l'équation (i) entraîne

$$\begin{aligned} E_{0,1} &= mc^2 \\ E_{0,2} &= 2mc^2 \\ E_{0,3} &= mc^2 \\ E_{0,4} &= 3mc^2 \ . \end{aligned}$$

L'énergie est donc proportionnelle à la masse, ce qui permet d'ordonner les particules en ordre croissant d'énergie au repos :

$$\begin{aligned} m_1 = m_3 < m_2 < m_4 \\ E_{0,1} = E_{0,3} < E_{0,2} < E_{0,4} \ . \end{aligned} \tag{réponse}$$

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 9.46 de l'énergie totale d'une masse en mouvement :

$$E = E_0 + K \ . \tag{ii}$$

Résoudre le problème Selon l'équation (ii), l'énergie cinétique est

$$K = E - E_0 \ ,$$

où E_0 est l'énergie au repos donnée par mc^2. Pour les quatre masses décrites, on a donc

$$\begin{aligned} K_1 &= E_1 - E_{0,1} = 3mc^2 - (m)c^2 = 2mc^2 \\ K_2 &= E_2 - E_{0,2} = 4mc^2 - (2m)c^2 = 2mc^2 \\ K_3 &= E_3 - E_{0,3} = 4mc^2 - (m)c^2 = 3mc^2 \\ K_4 &= E_4 - E_{0,4} = 4mc^2 - (3m)c^2 = mc^2 \ . \end{aligned}$$

En ordre croissant, ces quatre énergies cinétiques sont

$$K_4 < K_1 = K_2 < K_3 \ . \tag{réponse}$$

c. **Identifier la clé** La clé est l'équation 9.48 liant l'énergie cinétique et l'énergie au repos par le facteur de Lorentz :

$$K = (\gamma - 1)\, E_0 \ . \tag{iii}$$

Résoudre le problème Le facteur γ isolé à partir de l'équation (iii) est donné par

$$\gamma = 1 + \frac{K}{E_0} \ .$$

Connaissant les énergies K et E_0 établies en **a.** et en **b.**, on a

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 1 + \frac{K_1}{E_{0,1}} = 1 + \frac{2mc^2}{mc^2} = 3 \\ \gamma_2 &= 1 + \frac{K_2}{E_{0,2}} = 1 + \frac{2mc^2}{2mc^2} = 2 \\ \gamma_3 &= 1 + \frac{K_3}{E_{0,3}} = 1 + \frac{3mc^2}{mc^2} = 4 \\ \gamma_4 &= 1 + \frac{K_4}{E_{0,4}} = 1 + \frac{mc^2}{3mc^2} = 4/3 \ . \end{aligned}$$

En ordre croissant, ces quatre facteurs sont

$$\gamma_4 < \gamma_2 < \gamma_1 < \gamma_3 \ . \tag{réponse}$$

d. **Identifier la clé** La clé consiste à déterminer la vitesse à partir des facteurs de Lorentz déterminés en **c.**

Résoudre le problème Selon l'équation 9.10 définissant le facteur de Lorentz,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right) c^2}} \ .$$

En isolant la vitesse, on trouve

$$v = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \times c \ .$$

Pour chacune des quatre particules, on trouve

$$v_1 = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma_1^2}} \times c = \sqrt{1-\frac{1}{3^2}} \times c = \sqrt{\frac{8}{9}}c = 0{,}943c$$
$$v_2 = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma_2^2}} \times c = \sqrt{1-\frac{1}{2^2}} \times c = \sqrt{\frac{3}{4}}c = 0{,}866c$$
$$v_3 = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma_3^2}} \times c = \sqrt{1-\frac{1}{4^2}} \times c = \sqrt{\frac{15}{16}}c = 0{,}968c$$
$$v_4 = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma_4^2}} \times c = \sqrt{1-\frac{1}{(4/3)^2}} \times c = \sqrt{\frac{7}{16}}c = 0{,}661c\ .$$

En ordre croissant, les quatre vitesses sont

$$v_4 < v_2 < v_1 < v_3\ . \qquad \text{(réponse)}$$

E39 **Décortiquer le problème** La grande vitesse d'une particule fait en sorte que sa quantité de mouvement réelle est supérieure à la vitesse normalement calculée selon la mécanique classique.

Connues	Inconnue
$p_{\text{rel}} = 2p_{\text{newt.}}$	v

Identifier la clé La clé est l'équation 9.39 de la quantité de mouvement relativiste :

$$p_{\text{rel}} = \gamma m v\ .$$

Résoudre le problème La quantité de mouvement en mécanique newtonienne est donnée par

$$p_{\text{newt.}} = mv\ .$$

En considérant l'effet relativiste de la vitesse, la quantité de mouvement devient

$$p_{\text{rel}} = \gamma m v\ .$$

La condition énoncée est $p_{\text{rel}} = 2p_{\text{newt.}}$, c'est-à-dire

$$\gamma m v = 2 \times mv\ ,$$

ce qui entraîne que $\gamma = 2$. La vitesse induisant cette valeur du facteur de Lorentz est donnée par

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 2$$
$$v = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} \times c = \sqrt{1-\frac{1}{2^2}} \times c$$
$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c = 0{,}866c\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse trouvée est correct pour induire un effet relativiste non négligeable.

E40 **Décortiquer le problème** Puisqu'on connaît l'énergie totale pour un électron en mouvement, on peut déterminer d'autres propriétés de son mouvement.

Connue	Inconnues
$E = 0{,}647\,\text{MeV}$	p
	K
	v

a. Identifier la clé La clé est l'équation 9.49 de l'invariance de l'énergie au repos :

$$E_0^2 = E^2 - p^2c^2 \ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème Sachant que $E_0 = mc^2$, la quantité de mouvement peut être tirée de l'équation (i) :

$$p = \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{c} = \frac{\sqrt{E^2 - (mc^2)^2}}{c} = \frac{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}{c} \ .$$

En considérant la masse de l'électron en unités de masse atomique (selon l'annexe E), on a

$$p = \frac{\sqrt{E^2 - \left(5{,}486 \times 10^{-4}\,\mathrm{u}\right)^2 c^4}}{c} \ .$$

En utilisant la conversion $1\,\mathrm{u} = \frac{931{,}5\,\mathrm{MeV}}{c^2}$, on trouve

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sqrt{E^2 - \left(5{,}486 \times 10^{-4} \times \frac{931{,}5\,\mathrm{MeV}}{c^2}\right)^2 c^4}}{c} \\ &= \frac{\sqrt{(0{,}647\,\mathrm{MeV})^2 - \left(5{,}486 \times 10^{-4} \times \frac{931{,}5\,\mathrm{MeV}}{c^2}\right)^2 c^4}}{c} \end{aligned}$$

$$p = 0{,}397\,\mathrm{MeV}/c \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Les unités sont bien celles d'une quantité de mouvement, soit une énergie sur une vitesse.

b. Identifier la clé La clé est l'équation 9.46 de l'énergie totale :

$$E = E_0 + K \ .$$

Résoudre le problème En considérant l'énergie au repos définie par mc^2 et en utilisant l'équation $1\,\mathrm{u} = \frac{931{,}5\,\mathrm{MeV}}{c^2}$ dans l'expression de la masse de l'électron :

$$\begin{aligned} K &= E - E_0 = E - mc^2 = (0{,}647\,\mathrm{MeV}) - \left(5{,}486 \times 10^{-4} \times \frac{931{,}5\,\mathrm{MeV}}{c^2}\right) c^2 \\ K &= (0{,}647\,\mathrm{MeV}) - \left(5{,}486 \times 10^{-4} \times 931{,}5\,\mathrm{MeV}\right) = 0{,}136\,\mathrm{MeV} \ . \qquad \text{(réponse)} \end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct.

c. Identifier la clé La clé est l'équation 9.50 permettant de calculer la vitesse de l'électron à partir de la quantité de mouvement trouvée et de l'énergie totale connue :

$$\frac{pc}{E} = \frac{v}{c} \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{pc^2}{E} \ .$$

Résoudre le problème Ayant trouvé en **a.** que $p = 0{,}397\,\mathrm{MeV/c}$, on a

$$v = \frac{0{,}397\,\mathrm{MeV/c} \times c^2}{0{,}647\,\mathrm{MeV}} = 0{,}613c \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse trouvée est correct.

E41 **Décortiquer le problème** La masse et la quantité de mouvement connues d'une particule permettent de déterminer d'autres propriétés de cette particule.

Connues	Inconnues
$m = 3m_0$	E
$p = 4m_0c$	K
	v

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 9.49 de l'invariance de l'énergie au repos :

$$E_0^2 = E^2 - p^2c^2 \qquad \Rightarrow \qquad E = \sqrt{E_0^2 + p^2c^2}\ .$$

Résoudre le problème L'énergie au repos E_0 est donnée par l'équation 9.47 :

$$E_0 = mc^2\ .$$

Ainsi,

$$E = \sqrt{\left(3m_0c^2\right)^2 + \left(4m_0c\right)^2c^2} = \sqrt{9m_0^2c^4 + 16m_0^2c^4}$$

$$E = \sqrt{25m_0^2c^4} = 5m_0c^2\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Les unités de l'expression trouvée sont bien celles d'une énergie.

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 9.46 de l'énergie totale :

$$E = E_0 + K\ .$$

Résoudre le problème L'énergie cinétique est

$$K = E - E_0 = 5m_0c^2 - (3m_0)\,c^2 = 2m_0c^2\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'énergie cinétique trouvée est plausible, puisqu'elle est inférieure à l'énergie totale.

c. **Identifier la clé** La clé est l'équation 9.50 permettant de calculer la vitesse de l'électron à partir de la quantité de mouvement trouvée et de l'énergie totale connue :

$$\frac{pc}{E} = \frac{v}{c} \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{pc^2}{E}\ .$$

Résoudre le problème Selon les expressions connues de p et de E,

$$v = \frac{(4m_0c)\,c^2}{5m_0c^2} = 0{,}8c\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse trouvée est correct.

E42 **Décortiquer le problème** Un proton en mouvement possède de l'énergie cinétique. Accélérer un proton au repos implique donc un transfert d'énergie (travail) par un agent extérieur.

Identifier la clé La clé est le fait que le travail permettant d'accélérer une masse est égal à la différence d'énergie cinétique aux deux vitesses impliquées.

Résoudre le problème Le travail d'accélération est donné par

$$\begin{aligned} W = \Delta K = K_\mathrm{f} - K_\mathrm{i} &= \left((\gamma_\mathrm{f} - 1)\,mc^2\right) - \left((\gamma_\mathrm{i} - 1)\,mc^2\right) = (\gamma_\mathrm{f} - \gamma_\mathrm{i})\,mc^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_\mathrm{f}}{c}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_\mathrm{i}}{c}\right)^2}}\right)mc^2\ , \end{aligned}$$

où $c^2 = \frac{931{,}5\,\text{MeV}}{\text{u}}$. La masse d'un proton étant $m = 1{,}007\,3\,\text{u}$, la forme la plus simplifiée pour cette équation est

$$\begin{aligned} W &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v_\text{f}}{c}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v_\text{i}}{c}\right)^2}} \right) \times 1{,}007\,3\,\text{u} \times \frac{931{,}5\,\text{MeV}}{\text{u}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v_\text{f}}{c}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v_\text{i}}{c}\right)^2}} \right) \times 938{,}3\,\text{MeV}\ . \end{aligned}$$

a. Pour accélérer un proton du repos à $0{,}100c$, il faut

$$W = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}100c}{c}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0}{c}\right)^2}} \right) \times 938{,}3\,\text{MeV}$$

$$W = 4{,}73\,\text{MeV}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct.

b. Pour accélérer un proton de $0{,}500c$ à $0{,}600c$, il faut

$$W = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}600c}{c}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}500c}{c}\right)^2}} \right) \times 938{,}3\,\text{MeV}$$

$$W = 89{,}4\,\text{MeV}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct et celle-ci est considérablement plus grande que celle trouvée en **a.**, car l'effet de la relativité est de plus en plus considérable quand la vitesse augmente.

c. Pour accélérer un proton de $0{,}890c$ à $0{,}990c$, il faut

$$W = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}990c}{c}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}890c}{c}\right)^2}} \right) \times 938{,}3\,\text{MeV}$$

$$W = 4{,}59 \times 10^3\,\text{MeV}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct et celle-ci est beaucoup plus grande encore que celle trouvée en **b.** Le travail à effectuer pour que la vitesse d'une masse (même infime) atteigne c tend vers l'infini.

E43 **Décortiquer le problème** Une particule a une durée de vie dont la valeur est différente dans différents référentiels.

Connues	Inconnue
$\Delta\tau = 12{,}4\,\text{ns}$	Δt
$E_0 = 494\,\text{MeV}$	
$K = 1{,}27\,\text{GeV}$	

Identifier la clé La clé consiste à tirer le facteur de Lorentz de l'équation 9.48 :

$$K = (\gamma - 1)\,E_0 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = 1 + \frac{K}{E_0}\ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème L'équation 9.11 permet d'exprimer la durée Δt en fonction de $\Delta\tau$:

$$\Delta t = \gamma\,\Delta\tau\ . \qquad \text{(ii)}$$

L'union des équations (i) et (ii) permet d'écrire

$$\Delta t = \gamma\,\Delta\tau = \left(1 + \frac{K}{E_0}\right)\Delta\tau$$

$$\Delta t = \left(1 + \frac{1{,}27\times 10^3\,\mathrm{MeV}}{494\,\mathrm{MeV}}\right)\times 12{,}4\,\mathrm{ns} = 44{,}3\,\mathrm{ns}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la durée de vie trouvée est correct, celle-ci étant plus grande dans le référentiel du laboratoire que la durée de vie propre.

P44 **Décortiquer le problème** Un électron accéléré à partir du repos gagne de l'énergie cinétique.

Connues	Inconnues
$\Delta V = 1{,}20\times 10^3\,\mathrm{V}$	K
$q = -e$	p
$m = 0{,}511\,0\,\mathrm{MeV}/c^2$	

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 4.12 du tome 2 liant l'énergie cinétique d'une particule chargée à la différence de potentiel qui l'accélère :

$$\Delta K = -\Delta U = -q\,\Delta V\ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème La charge de l'électron est $-e$. Donc,

$$\Delta K = -(-e)\,\Delta V = e\,\Delta V = 1e\times 1{,}20\times 10^6\,\mathrm{V} = 1{,}20\times 10^6\,\mathrm{eV} = 1{,}20\,\mathrm{MeV}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct pour une particule de cette masse.

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 9.49 dans laquelle on peut isoler la quantité de mouvement p :

$$E_0^2 = E^2 - p^2c^2 \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{c}\ , \qquad \text{(ii)}$$

où l'énergie E est l'énergie totale, donnée par l'équation 9.46 :

$$E = E_0 + K\ , \qquad \text{(iii)}$$

et où l'énergie au repos de l'électron est

$$E_0 = mc^2 = 0{,}511\,0\,\mathrm{MeV}\ . \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème On calcule d'abord l'énergie totale :

$$E = 0{,}511\,0\,\mathrm{MeV} + 1{,}20\,\mathrm{MeV} = 1{,}711\,\mathrm{MeV}\ . \qquad \text{(v)}$$

On insère les équations (iv) et (v) dans l'équation (ii) :

$$p = \frac{\sqrt{(1{,}711\,\mathrm{MeV})^2 - (0{,}511\,0\,\mathrm{MeV})^2}}{c} = 1{,}63\,\mathrm{MeV}/c \text{ ou } 8{,}73\times 10^{-22}\ \mathrm{kg\cdot m/s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Comme l'énergie cinétique est de l'ordre du mégaélectronvolt, il est normal que le module de la quantité de mouvement soit de l'ordre du mégaélectronvolt sur c.

P45 **Décortiquer le problème** Des pions ont une énergie cinétique déterminée. Il est possible de connaître les propriétés de leur mouvement.

Connues	Inconnues
$\Delta\tau = 26{,}03\,\text{ns}$	v
$E_0 = 139{,}7\,\text{MeV}$	Δt
$K = 423{,}0\,\text{MeV}$	L

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 9.48 de l'énergie cinétique d'une particule en mouvement ayant une vitesse relativiste :

$$K = (\gamma - 1)\,E_0 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = 1 + \frac{K}{E_0}\ .$$

Résoudre le problème

$$\gamma = 1 + \frac{423{,}0\,\text{MeV}}{139{,}7\,\text{MeV}} = 4{,}027\,9\ . \tag{i}$$

Selon la définition du facteur de Lorentz, on peut déterminer la vitesse :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$v = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} \times c = \sqrt{1-\frac{1}{(4{,}027\,9)^2}} \times c$$

$$v = 0{,}968\,7c = 2{,}904 \times 10^8\ \text{m/s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse trouvée est correct.

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 9.11 de la dilatation du temps :

$$\Delta t = \gamma\,\Delta\tau\ . \tag{i}$$

Résoudre le problème La durée de vie donnée est un temps propre dans le référentiel même du pion. Dans le référentiel du laboratoire, la durée de vie apparaîtra dilatée, selon l'équation (i). Le facteur de Lorentz ayant été déterminé en **a.**, on obtient

$$\Delta t = 4{,}027\,9 \times 26{,}03\,\text{ns}$$

$$\Delta t = 104{,}8\,\text{ns}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la durée de vie trouvée est plausible, celle-ci étant supérieure à la durée de vie propre.

c. **Identifier la clé** La clé consiste à utiliser la durée de vie du pion dans le laboratoire et la définition de la vitesse en cinématique.

Résoudre le problème La vitesse d'un pion dans le référentiel du laboratoire est liée à la distance et au temps observés dans ce référentiel :

$$v = \frac{L}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad L = v\,\Delta t\ .$$

La vitesse d'un pion a été déterminé en **a.**, $v = 0{,}968\,7c$. Ainsi,

$$L = 0{,}968\,7c \times 104{,}8\,\text{ns} = 30{,}45\,\text{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Le domaine possible des valeurs de distance est très vaste, mais la distance trouvée est tout de même plausible.

P46 **Décortiquer le problème** La combustion de l'hydrogène dans le Soleil transforme de la masse en énergie. On peut calculer l'énergie produite à partir de la réduction de masse observée.

Connues	Inconnue
$m_{\mathrm{p}} = 1{,}007\,276\,\mathrm{u}$	Q
$m_{\mathrm{é}} = 0{,}000\,549\,\mathrm{u}$	
$m_{\mathrm{He}} = 4{,}001\,506\,\mathrm{u}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 9.58 de l'énergie dégagée lors d'une réaction nucléaire :

$$Q = E_{0,\mathrm{i}} - E_{0,\mathrm{f}} = M_{\mathrm{i}}c^2 - M_{\mathrm{f}}c^2 = (M_{\mathrm{i}} - M_{\mathrm{f}})\,c^2 \ .$$

Résoudre le problème La masse initiale est la somme des masses des protons et des électrons :

$$M_{\mathrm{i}} = (4m_{\mathrm{p}} + 2m_{\mathrm{é}}) \ .$$

La masse finale est celle d'un noyau d'hélium, m_{He}. Ainsi,

$$Q = ((4m_{\mathrm{p}} + 2m_{\mathrm{é}}) - m_{\mathrm{He}})\,c^2$$

$$Q = ((4 \times 1{,}007\,276\,\mathrm{u} + 2 \times 0{,}000\,549\,\mathrm{u}) - 4{,}001\,506\,\mathrm{u})\,c^2$$

$$Q = (0{,}028\,696\,\mathrm{u})\,c^2 \times \frac{931{,}5\,\mathrm{MeV}/c^2}{\mathrm{u}} = 26{,}7\,\mathrm{MeV} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct.

P47 **Décortiquer le problème** L'énergie produite par une centrale nucléaire est liée à la réduction de masse observée chez les réactifs.

Connues	Inconnue
$P_{\mathrm{cent.}} = 630\,\mathrm{MW}$	ΔM
$R_{\%} = 32\,\%$	
$\Delta t = 300\,\mathrm{j}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 9.58 contenant la variation de masse observée lors d'une réaction nucléaire :

$$Q = -\Delta M c^2 \ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème La puissance produite par la centrale est liée à l'énergie Q évoquée par l'équation (i). Selon la définition de la puissance,

$$P = \frac{Q}{\Delta t} \ .$$

Cependant, ce n'est pas toute cette puissance qui est transformée en énergie électrique. On doit multiplier par le rendement pour obtenir la puissance électrique :

$$P_{\mathrm{élect}} = R_{\%}P = R_{\%}\frac{Q}{\Delta t} = R_{\%}\frac{-\Delta M c^2}{\Delta t} \ .$$

Finalement, on peut isoler la variation de masse ΔM et trouver sa valeur :

$$\Delta M = \frac{-P_{\mathrm{élect}}\Delta t}{R_{\%}c^2} = \frac{-630 \times 10^6\,\mathrm{W}\left(300\,\mathrm{j} \times \frac{24\times 3\,600\,\mathrm{s}}{1\,\mathrm{j}}\right)}{0{,}320\,(2{,}998 \times 10^8\,\mathrm{m/s})^2}$$

$$\Delta M = -0{,}568\,\mathrm{kg} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Une toute petite fraction de l'énergie au repos se transforme et donne une quantité importante d'énergie électrique. C'est correct, car l'énergie au repos dépend du module de la vitesse de la lumière au carré.

R48 **Décortiquer le problème** La combustion de l'hydrogène dans le Soleil transforme de la masse en énergie. On peut calculer la masse transformée chaque seconde en énergie à partir de l'énergie totale émise par le Soleil dans le même délai.

Connue	Inconnue
$I = 1\,367\,\mathrm{W/m^2}$	ΔM_{Soleil}

Identifier la clé La clé consiste à calculer la puissance totale irradiée par le Soleil à partir de celle que reçoit un mètre carré du sol terrestre, à la distance où la Terre se trouve.

Résoudre le problème L'irradiance reçue à la distance à laquelle la Terre se trouve du Soleil, R_{TS}, est liée à la puissance totale du Soleil et à l'aire d'une sphère de rayon R_{TS} :

$$I = \frac{P_{\text{Soleil}}}{A_{R_{\text{TS}}}}$$
$$P_{\text{Soleil}} = IA_{R_{\text{TS}}} = I \times 4\pi R_{\text{TS}}^2$$
$$P_{\text{Soleil}} = 4I\pi R_{\text{TS}}^2 \ . \qquad \text{(i)}$$

Cette puissance est l'énergie émise par le Soleil chaque seconde, selon la définition de la puissance :

$$P = \frac{Q}{\Delta t} \ , \qquad \text{(ii)}$$

où l'énergie Q est liée à la masse transformée par l'équation 9.58 :

$$Q = -\Delta M c^2 \ . \qquad \text{(iii)}$$

L'union des équations (i), (ii) et (iii) permet d'écrire

$$4I\pi R_{\text{TS}}^2 = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{-\Delta M c^2}{\Delta t}$$
$$\Delta M = \frac{-4I\pi R_{\text{TS}}^2\,\Delta t}{c^2} = \frac{-4 \times 1\,367\,\mathrm{W/m^2} \times \pi \times \left(1{,}496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}\right)^2 \times 1{,}000\,\mathrm{s}}{\left(2{,}998 \times 10^8\,\mathrm{m/s}\right)^2}$$
$$\Delta M = -4{,}28 \times 10^9\,\mathrm{kg} \ .$$

La variation de masse du Soleil est de $4{,}28 \times 10^9$ kg. (réponse)

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la masse trouvée est plausible, le Soleil brûlant une masse gigantesque d'hydrogène de façon continue (par fusion nucléaire).

P49 **Décortiquer le problème** La collision de deux particules implique la conservation de l'énergie totale et la conservation de la quantité de mouvement.

Connues	Inconnues
$m_1 = m$	$p_{1,\text{i}}$
$v_1 = 0{,}800c$	E_{i}
$m_2 = 3m$	m_{f}
$v_2 = 0$	v_{f}

a. Identifier la clé La clé est l'équation 9.39 de la quantité de mouvement relativiste :

$$p = \gamma m v \ .$$

Résoudre le problème On calcule d'abord le facteur de Lorentz pour la particule m_1 qui servira à quelques reprises ensuite :

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}800c}{c}\right)^2}} = \frac{5}{3} \ . \qquad \text{(i)}$$

La quantité de mouvement est donc

$$p_{1,\mathrm{i}} = \gamma_1 m_1 v_1 = \frac{5}{3} m \times 0{,}800c = \frac{4}{3} mc = 1{,}33mc \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse On ne peut pas déterminer une valeur de cette quantité de mouvement, mais l'expression trouvée a une forme plausible pour la quantité de mouvement relativiste d'une particule.

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 9.46 de l'énergie totale d'une particule, appliquée aux deux particules avant la collision :

$$E = \gamma mc^2 \ .$$

Résoudre le problème L'énergie totale avant la collision, considérant les deux particules, est

$$E_\mathrm{i} = E_{1,\mathrm{i}} + E_{2,\mathrm{i}} = \gamma_1 m_1 c^2 + \gamma_2 m_2 c^2 \ .$$

Le facteur de Lorentz pour la particule 1 a été évalué en **a.** (équation (i)). Pour la particule 2, la vitesse nulle entraîne un facteur $\gamma_2 = 1$. Ainsi,

$$E_\mathrm{i} = \gamma_1 (m) c^2 + 1 (3m) c^2 = (\gamma_1 + 3) mc^2$$

$$E_\mathrm{i} = \left(\frac{5}{3} + 3\right) mc^2 = \frac{14}{3} mc^2 = 4{,}67mc^2 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct, celle-ci étant supérieure à l'énergie au repos des deux masses réunies.

c. **Identifier la clé** La clé est l'équation 9.49 de l'invariance de l'énergie au repos :

$$E_0^2 = E^2 - p^2c^2 \ .$$

Résoudre le problème Les quantités E et p ont été évaluées en **a.** et en **b.** pour l'instant initial et sont conservées dans un système isolé, en accord avec le principe de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie totale. Après la collision, les valeurs de p et de E sont donc les mêmes. Puisque l'énergie au repos E_0 est égale à Mc^2 (selon l'équation 9.47), on peut déterminer la masse finale M :

$$\left(Mc^2\right)^2 = \left(\frac{14}{3} mc^2\right)^2 - \left(\frac{4}{3} mc\right)^2 c^2$$

$$M^2c^4 = \frac{196}{9} m^2c^4 - \frac{16}{9} m^2c^4$$

$$M = \sqrt{\frac{196}{9} m^2 - \frac{16}{9} m^2} = \sqrt{\frac{180}{9} m^2}$$

$$M = \sqrt{20} m = 4{,}47m \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la masse trouvée est correct, celle-ci étant augmentée par l'effet relativiste de sa vitesse finale.

d. **Identifier la clé** La clé est l'équation 9.50 liant l'énergie d'une masse à sa quantité de mouvement et à sa vitesse :

$$\frac{pc}{E} = \frac{v}{c} \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{pc^2}{E} \ .$$

Résoudre le problème La quantité de mouvement et l'énergie sont toujours celles qu'on a déterminées en **a.** et en **b.** ; donc,

$$v = \frac{\frac{4}{3} mc \times c^2}{\frac{14}{3} mc^2} = \frac{4}{14} c$$

$$v = \frac{2}{7} c = 0{,}286c \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse trouvée est correct.

Physique 3 Ondes, optique et physique moderne - 1re édition

Chapitre 10 La dualité onde-particule

Q1 **Décortiquer le problème** La lumière infrarouge et la lumière ultraviolette que les lampes émettent sont constituées de photons de longueurs d'onde différentes.

Identifier la clé La clé est l'équation 10.4 qui quantifie l'énergie contenue dans un faisceau lumineux :

$$E_{\text{faisc}} = Nhf = \frac{Nhc}{\lambda} \; .$$

Résoudre le problème On peut isoler la quantité de photons N dans l'équation pour observer facilement sa dépendance aux autres facteurs :

$$N = \frac{E\lambda}{hc} \; .$$

Selon cette dernière équation, des photons ayant une longueur d'onde plus grande possèdent moins d'énergie et doivent être plus nombreux pour porter la même énergie totale.

Entre la lumière infrarouge et la lumière ultraviolette, la lumière infrarouge est celle dont les photons ont la longueur d'onde la plus grande, et donc le moins d'énergie. La lampe infrarouge est donc la lampe qui émet le plus de photons pour une même puissance.

La lampe infrarouge émet le plus de photons chaque seconde. (réponse)

E2 **Décortiquer le problème** On doit déterminer l'énergie de photons dont la longueur d'onde ou la fréquence est connue, en électronvolts.

Connues	Inconnue
$\lambda_X = 22\,\text{pm}$	E
$f_b = 11{,}8\,\text{GHz}$	
$\lambda_c = 450\,\text{nm}$	
$hc = 1\,240\,\text{eV} \cdot \text{nm}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 10.1 permettant de calculer l'énergie d'un photon à partir de sa fréquence ou de sa longueur d'onde :

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \; .$$

a. **Résoudre le problème** La longueur d'onde du rayon X est donnée. Si on utilise l'expression du produit hc donnant une énergie en électronvolts, on doit exprimer la longueur d'onde en nanomètres, soit $22\,\text{pm} = 0{,}022\,\text{nm}$. Ainsi,

$$E_X = \frac{hc}{\lambda_X} = \frac{1\,240\,\text{eV} \cdot \text{nm}}{0{,}022\,\text{nm}}$$

$$E_X = 56\,\text{keV} \; . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Résoudre le problème** À partir de la fréquence d'un photon, l'énergie est donnée par

$$E_b = hf_b = \left(6{,}626 \times 10^{-34}\,\text{J} \cdot \text{s}\right) \times \left(11{,}8 \times 10^{9}\,\text{Hz}\right) = 7{,}818\,7 \times 10^{-24}\,\text{J} \; .$$

On exprime cette énergie en électronvolts :

$$E_b = 7{,}818\,7 \times 10^{-24}\,\text{J} \times \frac{1\,\text{eV}}{1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{J}}$$

$$E_b = 48{,}8\,\mu\text{eV} \; . \qquad \text{(réponse)}$$

c. Résoudre le problème Comme en **a.**, une longueur d'onde est donnée :

$$E_c = \frac{hc}{\lambda_c} = \frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{450\,\text{nm}}$$
$$E_c = 2{,}76\,\text{eV} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Les valeurs d'énergie trouvées ont toutes un ordre de grandeur correct pour l'énergie d'un photon unique.

E3 **Décortiquer le problème** On doit déterminer l'énergie de photons dont la longueur d'onde ou la fréquence est connue, en joules.

Connues	Inconnue
$\lambda_a = 632{,}0\,\text{nm}$	E
$\lambda_b = 12{,}23\,\text{cm}$	
$f_c = 98{,}1\,\text{MHz}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 10.1 permettant de calculer l'énergie d'un photon à partir de sa fréquence ou de sa longueur d'onde :

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \ .$$

a. Résoudre le problème La longueur d'onde des photons du laser est donnée. L'énergie de chacun est

$$E_a = \frac{hc}{\lambda_a} = \frac{\left(6{,}626\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}\right)\times\left(2{,}998\times10^{8}\,\text{m/s}\right)}{632{,}0\times10^{-9}\,\text{m}}$$
$$E_a = 3{,}143\times10^{-19}\,\text{J} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Résoudre le problème La longueur d'onde des photons produits par le four est donnée. L'énergie de chacun est

$$E_b = \frac{hc}{\lambda_b} = \frac{\left(6{,}626\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}\right)\times\left(2{,}998\times10^{8}\,\text{m/s}\right)}{0{,}122\,3\,\text{m}}$$
$$E_b = 1{,}624\times10^{-24}\,\text{J} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. Résoudre le problème À partir de la fréquence d'un photon, l'énergie est donnée par

$$E_c = hf_c = \left(6{,}626\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}\right)\times\left(98{,}1\times10^{6}\,\text{MHz}\right)$$
$$E_c = 6{,}50\times10^{-26}\,\text{J} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Les valeurs d'énergie trouvées ont toutes un ordre de grandeur correct pour l'énergie d'un photons unique.

E4 **Décortiquer le problème** Un laser produit un faisceau lumineux comportant une quantité de photons fixée par la puissance émise.

Connues	Inconnue
$\lambda = 405\,\text{nm}$	n
$P = 48{,}5\,\text{mW}$	
$d_{\text{faisc}} = 1{,}80\,\text{mm}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 10.4 qui quantifie l'énergie contenue dans un faisceau lumineux :

$$E_{\text{faisc}} = \frac{Nhc}{\lambda} \ .$$

Résoudre le problème Puisqu'on cherche la quantité de photons produits par seconde, on doit considérer l'énergie produite durant une seconde à la puissance indiquée. On peut donc utiliser directement cette puissance pour trouver un nombre de photons par seconde :

$$\frac{E_{\text{faisc}}}{\Delta t} = P = \frac{Nhc}{\lambda \Delta t} = \frac{hc}{\lambda}\frac{N}{\Delta t} \; .$$

On pose $n = \frac{N}{\Delta t}$, le nombre de photons par seconde :

$$\begin{aligned} n &= \frac{N}{\Delta t} = \frac{P\lambda}{hc} \\ &= \frac{0{,}048\,5\,\text{W} \times 405 \times 10^{-9}\,\text{m}}{6{,}626 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s} \times 2{,}998 \times 10^{8}\,\text{m/s}} \\ n &= 9{,}89 \times 10^{16}\,\text{photons/s} \; . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du nombre de photons produits par seconde est correct. Un faisceau lumineux en contient évidemment une quantité gigantesque.

E5 **Décortiquer le problème** Une énergie émise est constituée de photons dont la longueur d'onde est connue. On peut les dénombrer durant un intervalle de temps connu.

Connues	Inconnue
$\lambda = 2{,}80 \times 10^{-16}\,\text{m}$	N
$\Delta t = 30{,}0\,\text{s}$	
$E_{\text{faisc}} = 1{,}13 \times 10^{15}\,\text{eV}$	
$hc = 1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 10.4 qui quantifie l'énergie contenue dans un faisceau lumineux :

$$E_{\text{faisc}} = \frac{Nhc}{\lambda} \; . \qquad \text{(i)}$$

Dans la présente situation, l'énergie n'est pas émise sous forme de faisceau concentré, mais le calcul de la quantité de photons impliquée est le même. Chaque photon correspond à la désintégration d'un noyau.

Résoudre le problème L'intervalle de temps de 30,0 s n'intervient pas directement dans les calculs puisqu'on connaît déjà la quantité d'énergie émise. Ainsi, à partir de l'équation (i), on trouve

$$\begin{aligned} N &= \frac{E\lambda}{hc} = \frac{1{,}13 \times 10^{15}\,\text{eV} \times 2{,}80 \times 10^{-16}\,\text{m}}{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}} \times \frac{1\,\text{nm}}{1 \times 10^{-9}\,\text{m}} \\ N &= 2{,}55 \times 10^{5}\,\text{noyaux} \; . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du nombre de noyaux désintégrés est correct puisqu'un échantillon, si petit soit-il, contient une grande quantité de noyaux.

E6 **Décortiquer le problème** L'œil perçoit la lumière lorsque huit photons, dont la longueur d'onde est connue, atteignent un point de la rétine. On doit déterminer l'énergie portée par un groupe de huit photons.

Connues	Inconnue
$\Delta t = 100\,\text{ms}$	P
$\lambda = 550\,\text{nm}$	
$N = 8\,\text{photons}$	

Identifier les clés La première clé est l'équation 10.4 qui quantifie l'énergie contenue dans un faisceau lumineux :

$$E_{\text{faisc}} = \frac{Nhc}{\lambda} \ . \qquad \text{(i)}$$

La deuxième clé est la définition de la puissance :

$$P = \frac{E}{\Delta t} \ . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème En insérant simplement l'expression de l'énergie de l'équation (i) dans l'équation (ii), on a

$$\begin{aligned} P &= \frac{E}{\Delta t} = \frac{Nhc}{\Delta t \lambda} \\ &= \frac{(8\,\text{photons}) \times \left(6{,}626 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}\right) \times \left(2{,}998 \times 10^{8}\,\text{m/s}\right)}{(0{,}100\,\text{s}) \times \left(550 \times 10^{-9}\,\text{m}\right)} = 2{,}89 \times 10^{-17}\,\text{J/s} \\ P &= 2{,}89 \times 10^{-17}\,\text{W} \ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La puissance trouvée est très faible, comparativement à la puissance d'une ampoule, par exemple, et c'est normal puisque le seuil de sensibilité de l'œil est de loin inférieur à la puissance des sources d'éclairage normales.

R7 **Décortiquer le problème** La lumière du laser passant à travers une ouverture circulaire de diamètre a voit son énergie distribuée sur un écran par le phénomène de diffraction. On peut associer chaque frange brillante à une quantité de photons par unité de temps.

Connues		Inconnues
$\lambda = 632{,}8\,\text{nm}$	$P_{\text{laser}} = 5{,}00\,\text{mW}$	I_{moy}
$D = 0{,}800\,\text{mm}$	$L = 10{,}0\,\text{m}$	n
$\dfrac{E_{\text{cent}}}{E_{\text{tot}}} = 84{,}0\,\%$	$\dfrac{E_{\text{abs}}}{E_{\text{in}}} = 60{,}0\,\%$	

a. **Identifier les clés** La première clé est le fait que l'ouverture circulaire produit de la diffraction et génère sur l'écran des franges brillantes circulaires contenant l'énergie distribuée. Les équations 8.12 et 8.1 permettent de calculer le rayon de la frange brillante centrale (une tache circulaire) :

$$\sin\theta = \frac{1{,}22\lambda}{D} \qquad \text{et} \qquad \tan\theta = \frac{y}{L}$$

$$y = L\tan\theta = L\tan\left(\arcsin\frac{1{,}22\lambda}{D}\right) \ . \qquad \text{(i)}$$

La seconde clé est l'équation 4.25 de l'irradiance définie par la puissance éclairante et la superficie de la zone éclairée, cette zone étant la tache centrale :

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi r^2} \ . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème L'approximation des petits angles est généralement applicable pour des longueurs d'onde visibles. L'équation (i) devient

$$y = \frac{1{,}22L\lambda}{D} \ .$$

Cette position y est la distance du centre de la tache jusqu'à la première frange sombre. C'est donc le rayon de la tache centrale, $r = y$. Ce rayon est

$$r = \frac{1{,}22 \times (10{,}0\,\text{m}) \times \left(632{,}8 \times 10^{-9}\,\text{m}\right)}{8{,}00 \times 10^{-4}\,\text{m}} = 9{,}650\,2\,\text{mm} \ .$$

On confirme que le rayon de la tache centrale est beaucoup plus petit que L, ce qui appuie la validité de l'approximation des petits angles ($r <<< L$).

Puisque 84,0 % de la puissance de 5,00 mW traversant l'ouverture atteint la tache centrale, on obtient

$$P_{\text{cent}} = P_{\text{laser}} \times 0{,}840 = 0{,}005\,00\,\text{W} \times 0{,}84 = 0{,}004\,20\,\text{W} \ .$$

L'équation (ii) permet finalement de calculer l'irradiance moyenne dans la tache centrale :

$$I = \frac{P_{\text{cent}}}{\pi r^2} = \frac{0{,}004\,20\,\text{W}}{\pi \times \left(9{,}650\,2 \times 10^{-3}\,\text{m}\right)^2} = 14{,}36\,\text{W/m}^2$$

$$I = 14{,}4\,\text{W/m}^2 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La puissance trouvée (pour un mètre carré) est plus élevée que la puissance du laser, car elle est concentrée sur une surface très faible. L'irradiance est donc élevée sur cette surface.

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 10.4 qui relie une quantité d'énergie à une quantité de photons :

$$E = \frac{Nhc}{\lambda} \ . \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème On mentionne que l'énergie atteignant la tache centrale est absorbée à 60,0 % par l'écran. À partir de l'irradiance trouvée en **a.**, on peut déterminer l'irradiance absorbée par l'écran :

$$I_{\text{abs}} = I \times 0{,}600 = 14{,}36\,\text{W/m}^2 \times 0{,}600 = 8{,}613\,\text{W/m}^2 \ .$$

Cette irradiance (énergie par unité de temps et par unité de surface) est liée par l'équation (iii) à la quantité n de photon absorbés par unité de temps et par unité de surface :

$$I_{\text{abs}} = \frac{P_{\text{abs}}}{A} = \frac{E}{\Delta t A} = \frac{N}{\Delta t A}\frac{hc}{\lambda} = n\frac{hc}{\lambda}$$

$$n = \frac{I\lambda}{hc} = \frac{(8{,}613\,\text{W}) \times \left(632{,}8 \times 10^{-9}\,\text{m}\right)}{\left(6{,}626 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}\right) \times \left(2{,}998 \times 10^{8}\,\text{m/s}\right)}$$

$$n = 2{,}74 \times 10^{19}\,\text{photons/(s}\cdot\text{m}^2) \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La quantité de photons associée à l'irradiance moyenne de la tache centrale de diffraction est évidemment très grande.

Q8 **Décortiquer le problème** Tous les objets, en raison de leur énergie thermique, émettent un rayonnement contenant un large spectre de longueurs d'onde.

Identifier la clé La clé est le fait qu'aux températures des objets dans notre environnement, la totalité de l'énergie émise par rayonnement est contenue dans des longueurs d'onde trop grandes pour appartenir au spectre visible.

Résoudre le problème Plus concrètement, l'équation 10.11 permet de calculer la radiance spectrale contenue dans le rayonnement à différentes longueurs d'onde. On peut alors constater qu'à des longueurs d'onde appartenant au spectre visible (380 nm à 800 nm), l'énergie émise est mathématiquement infime et ne peut être perçue par l'œil.

C'est dans l'infrarouge que se trouve la plus grande partie de l'énergie émise, avec par exemple un pic d'émission à environ 10 000 µm pour un objet à la température de 20,0 °C.

Parce que le rayonnement des objets est dans l'infrarouge. (réponse)

Q9 **Décortiquer le problème** Un corps noir produisant une irradiance plus élevée qu'un autre a nécessairement une température plus élevée.

Connue	Inconnue
$\dfrac{I_a}{I_b} = 2$	$\dfrac{T_a}{T_b}$

Identifier la clé La clé est la loi de Stefan-Boltzmann :

$$I = \sigma T^4 \ .$$

Résoudre le problème Appliquée aux deux corps noirs a et b, la loi de Stefan-Boltzmann permet d'écrire

$$I_a = \sigma T_a^4 \qquad \text{et} \qquad I_b = \sigma T_b^4 \ .$$

Si on connaît le rapport $\frac{I_a}{I_b}$, on peut trouver le rapport des températures $\frac{T_a}{T_b}$:

$$\begin{aligned} \frac{I_a}{I_b} &= 2 = \frac{\sigma T_a^4}{\sigma T_b^4} = \left(\frac{T_a}{T_b}\right)^4 \\ &= \sqrt[4]{2} \\ \frac{T_a}{T_b} &= 1{,}19 \ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse En température absolue, un corps n'a pas besoin d'être beaucoup plus chaud qu'un autre pour émettre substantiellement plus, car l'effet d'un réchauffement est amplifié par la quatrième puissance de la température.

Q10 **Décortiquer le problème** On connaît les dimensions et la longueur d'onde du pic d'émission de quatre corps noirs sphériques. On peut alors déterminer les propriétés du rayonnement de ces autres corps.

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation du déplacement de Wien :

$$\lambda_{\max} T = 2{,}898 \times 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot K} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{2{,}898 \times 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot K}}{\lambda_{\max}} \ .$$

Résoudre le problème Puisque la température est inversement proportionnelle à $\lambda_{\max}$, l'ordre croissant des températures correspond à l'ordre décroissant des longueurs d'onde :

$$2\lambda_0 > \lambda_0 = \lambda_0 > \lambda_0/2$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\max,2} > \lambda_{\max,1} &= \lambda_{\max,3} > \lambda_{\max,4} \\ T_2 < T_1 &= T_3 < T_4 \ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La clé est la loi de Stefan-Boltzmann :

$$I = \sigma T^4 \ .$$

Résoudre le problème Puisqu'on a trouvé en **a.** l'ordre croissant des températures des quatre objets et que l'irradiance est proportionnelle à la quatrième puissance de la température, l'ordre croissant des irradiances s'établit comme suit :

$$I_2 < I_1 = I_3 < I_4 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. **Identifier les clés** La première clé est l'équation 4.26 de l'irradiance, car les quatre corps émettent sur toute la surface, qui est celle d'une sphère :

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \qquad \Rightarrow \qquad P = 4\pi r^2 I \ .$$

La deuxième clé est la loi de Stefan-Boltzmann :

$$I = \sigma T^4 \ .$$

La troisième clé est l'équation du déplacement de Wien :

$$\lambda_{\text{max}} T = 2{,}898 \times 10^{-3}\,\text{m}\cdot\text{K} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{2{,}898 \times 10^{-3}\,\text{m}\cdot\text{K}}{\lambda_{\text{max}}} \ .$$

Résoudre le problème En réunissant les trois clés, on trouve

$$P = 4\pi r^2 \left(\sigma T^4\right) = 4\pi r^2 \sigma \left(\frac{2{,}898 \times 10^{-3}\,\text{m}\cdot\text{K}}{\lambda_{\text{max}}}\right)^4 \ .$$

On peut résumer la partie constante ainsi, car on ne cherche qu'à établir la relation entre les quatre puissances :

$$P = C\frac{r^2}{\lambda_{\text{max}}^4} \ .$$

La puissance émise par chacun des quatre corps est

$$\begin{aligned}
P_1 &= C\frac{r_0^2}{\lambda_0^4} = 1\frac{Cr_0^2}{\lambda_0^4} \\
P_2 &= C\frac{(2r_0)^2}{(2\lambda_0)^4} = \frac{1}{4}\frac{Cr_0^2}{\lambda_0^4} \\
P_3 &= C\frac{(r_0/2)^2}{\lambda_0^4} = \frac{1}{4}\frac{Cr_0^2}{\lambda_0^4} \\
P_4 &= C\frac{r_0^2}{(\lambda_0/2)^4} = 16\frac{Cr_0^2}{\lambda_0^4} \ .
\end{aligned}$$

L'ordre croissant des puissances est donc

$$P_2 = P_3 < P_1 < P_4 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

E11 **Décortiquer le problème** Si on connaît la température correspondant au rayonnement de fond de l'Univers, c'est parce que l'on connaît la longueur d'onde du pic d'émission du rayonnement reçu du lointain Cosmos.

Connue	Inconnue
$T = 2{,}728\,\text{K}$	λ_{max}

Identifier la clé La clé est l'équation du déplacement de Wien :

$$\lambda_{\text{max}} T = 2{,}898 \times 10^{-3}\,\text{m}\cdot\text{K} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{\text{max}} = \frac{2{,}898 \times 10^{-3}\,\text{m}\cdot\text{K}}{T} \ .$$

Résoudre le problème

$$\begin{aligned}
\lambda_{\text{max}} &= \frac{2{,}898 \times 10^{-3}\,\text{m}\cdot\text{K}}{2{,}728\,\text{K}} \\
\lambda_{\text{max}} &= 1{,}062\,\text{mm} \qquad \text{(réponse)}
\end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée ne se voit pas couramment, mais correspond à des micro-ondes, tout près de l'infrarouge.

E12 **Décortiquer le problème**

Connues		Inconnue
$T_a = 32\,^\circ\mathrm{C}$	$T_c = 60\,^\circ\mathrm{C}$	P
$T_b = -15\,^\circ\mathrm{C}$	$T_d = 450\,^\circ\mathrm{F}$	

Identifier les clés La première clé est l'équation 4.25 de l'irradiance :

$$I = \frac{P}{A} \qquad \Rightarrow \qquad P = IA\ .$$

La deuxième clé est la loi de Stefan-Boltzmann :

$$I = \sigma T^4\ .$$

Résoudre le problème L'union des deux clés fournit l'équation qui donnera la puissance pour un centimètre carré dans chacune des quatre situations décrites :

$$P = \sigma T^4 A\ .$$

a. On doit d'abord convertir en kelvins la température de 32 °C :

$$T[K] = 273{,}16 + T[^\circ C] = 273{,}16 + 32 = 305{,}16\,\mathrm{K}\ .$$

Ensuite, on calcule la puissance pour une surface de $1{,}00\,\mathrm{cm}^2 = 1{,}00 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$:

$$P_a = \sigma\,(305{,}16\,\mathrm{K})^4 \times 1{,}00 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$$
$$P_a = 49{,}2\,\mathrm{mW}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. On doit d'abord convertir en kelvins la température de −15 °C :

$$T[K] = 273{,}16 + T[^\circ C] = 273{,}16 + (-15) = 258{,}16\,\mathrm{K}\ .$$

Ensuite, on calcule la puissance pour une surface de $1{,}00\,\mathrm{cm}^2 = 1{,}00 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$:

$$P_b = \sigma\,(258{,}16\,\mathrm{K})^4 \times 1{,}00 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$$
$$P_b = 2{,}52\,\mathrm{mW}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. On doit d'abord convertir en kelvins la température de 60 °C :

$$T[K] = 273{,}16 + T[^\circ C] = 273{,}16 + 60 = 333{,}16\,\mathrm{K}\ .$$

Ensuite, on calcule la puissance pour une surface de $1{,}00\,\mathrm{cm}^2 = 1{,}00 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$:

$$P_c = \sigma\,(333{,}16\,\mathrm{K})^4 \times 1{,}00 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$$
$$P_c = 69{,}9\,\mathrm{mW}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

d. On doit d'abord convertir en kelvins la température de 450 °F. Puisqu'on fournit une équation de conversion de la température des degrés Fahrenheit vers des degrés Celsius, une expression supplémentaire apparaîtra dans la conversion en kelvins :

$$T[^\circ F] = \frac{9}{5}T[^\circ C] + 32 \qquad \Rightarrow \qquad T[^\circ C] = \frac{5}{9}\,(T[^\circ F] - 32)$$

$$T[K] = 273{,}16 + T[^\circ C] = 273{,}16 + \frac{5}{9}\,(T[^\circ F] - 32) = 273{,}16 + \frac{5}{9}\,(450 - 32) = 505{,}38\,\mathrm{K}\ .$$

Ensuite, on calcule la puissance pour une surface de $1{,}00\,\mathrm{cm}^2 = 1{,}00 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$:

$$P_a = \sigma\,(505{,}38\,\mathrm{K})^4 \times 1{,}00 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$$
$$P_a = 0{,}370\,\mathrm{W}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur des puissances trouvées varie de façon importante, en accord avec le fait que puissance émise varie avec la quatrième puissance de la température en kelvins, laquelle varie environ du simple au double dans les quatre situations présentées.

E13 **Décortiquer le problème** Si on connaît la température de la lave d'un volcan, on peut déterminer la longueur d'onde $\lambda_{\max}$ du pic d'émission, c'est-à-dire la longueur d'onde à laquelle le plus d'énergie est émise.

Connue	Inconnue
$T = 1\,052\,^\circ\mathrm{C}$	$\lambda_{\max}$

Identifier la clé La clé est l'équation du déplacement de Wien :

$$\lambda_{\max} T = 2{,}898 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{K} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{\max} = \frac{2{,}898 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}{T} \;.$$

Résoudre le problème On doit d'abord convertir en kelvins la température de $1\,052\,^\circ\mathrm{C}$:

$$T[K] = 273{,}16 + T[^\circ C] = 273{,}16 + 1\,052 = 1\,325{,}16\,\mathrm{K}$$

$$\lambda_{\max} = \frac{2{,}898 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}{1\,325{,}16\,\mathrm{K}}$$

$$\lambda_{\max} = 2{,}187\,\mu\mathrm{m} \;. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La longueur d'onde trouvée appartient au domaine infrarouge. Ce n'est pas en contradiction avec le fait que la lave émet de la lumière visible, car même si c'est dans l'infrarouge que se trouve le pic d'émission, une certaine proportion de l'énergie émise est dans le domaine visible.

E14 **Décortiquer le problème** À partir de la longueur d'onde $\lambda_{\max}$ du pic d'émission d'un corps, on peut déterminer sa température.

Connue	Inconnue
$\lambda_{\max} = 10{,}0\,\mathrm{nm}$	T

Identifier la clé La clé est l'équation du déplacement de Wien :

$$\lambda_{\max} T = 2{,}898 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{K} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{2{,}898 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}{\lambda_{\max}} \;.$$

Résoudre le problème

$$T = \frac{2{,}898 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}{10{,}0 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}}$$

$$T = 2{,}90 \times 10^{5}\,\mathrm{K} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la température trouvée est correct pour la surface d'une étoile.

P15 **Décortiquer le problème** À partir de la température d'un corps, on peut déterminer sa radiance spectrale pour n'importe quelle valeur de longueur d'onde. On doit déterminer la radiance spectrale pour la longueur d'onde à laquelle le plus d'énergie est émise, $\lambda_{\max}$.

Connue	Inconnue
$T = 750\,^\circ\mathrm{C}$	$R_T(\lambda_{\max})$

Identifier les clés La première clé est l'équation 10.11, la loi du rayonnement de Planck :

$$R_T(\lambda) = \frac{8\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{\mathrm{e}^{hc/\lambda kT} - 1} \;. \qquad \text{(i)}$$

La deuxième clé est la loi du déplacement de Wien, requise pour déterminer la longueur d'onde du pic d'émission à utiliser avec la première clé :

$$\lambda_{\max} T = 2{,}898 \times 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot K} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{\max} = \frac{2{,}898 \times 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot K}}{T} \ . \tag{ii}$$

Résoudre le problème On doit d'abord convertir en kelvins la température de 750 °C :

$$T[K] = 273{,}16 + T[^\circ C] = 273{,}16 + 750 = 1\,023{,}16\,\mathrm{K} \ .$$

La longueur d'onde du pic d'émission, à partir de l'équation (ii), est

$$\lambda_{\max} = \frac{2{,}898 \times 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot K}}{1\,023{,}16\,\mathrm{K}} = 2{,}832\,4 \times 10^{-6}\,\mathrm{m} \ .$$

Finalement, avec l'équation (i), on peut calculer la radiance spectrale de la barre de métal (la constante k étant égale à $1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K selon l'équation 10.12) :

$$R_T(\lambda) = \frac{8\pi c^2 h}{\left(2{,}832\,4 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}\right)^5} \frac{1}{\mathrm{e}^{hc/\left(\left(2{,}832\,4 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}\right) \times k \times (1\,023{,}16\,\mathrm{K})\right)} - 1}$$

$$R_T(\lambda) = 5{,}76 \times 10^{10}\,\mathrm{W/m^3} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la radiance spectrale est difficile à interpréter, mais cette valeur est néanmoins correcte.

P16 **Décortiquer le problème** La balle plus chaude que son environnement dégage davantage d'énergie qu'elle en reçoit. L'irradiance et la puissance nettes émises par cette balle ne sont donc pas nulles.

Connues	Inconnues
$d = 11{,}2\,\mathrm{cm}$	I_{nette}
$T_{\text{b}} = 80{,}0\,^\circ\mathrm{C}$	P_{nette}
$T_{\text{env}} = 21{,}5\,^\circ\mathrm{C}$	

a. **Identifier la clé** La clé est la loi de Stefan-Boltzmann appliquée à la fois à l'irradiance reçue et à l'irradiance émise, de façon à exprimer l'irradiance nette :

$$I_{\text{nette}} = I_{\text{émise}} - I_{\text{reçue}} = \sigma\left(T_{\text{b}}^4 - T_{\text{env}}^4\right) \ .$$

Résoudre le problème On doit d'abord convertir en kelvins les températures impliquées. Pour $T_{\text{b}} = 80{,}0\,^\circ$C, on trouve

$$T[K] = 273{,}16 + T[^\circ C] = 273{,}16 + 80{,}0 = 353{,}16\,\mathrm{K} \ ,$$

et pour $T_{\text{env}} = 21{,}5\,^\circ$C, on a

$$T[K] = 273{,}16 + 21{,}5 = 294{,}66\,\mathrm{K} \ .$$

On peut maintenant calculer l'irradiance nette :

$$I_{\text{nette}} = 5{,}670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2 \cdot K^4)} \times \left((353{,}16\,\mathrm{K})^4 - (294{,}66\,\mathrm{K})^4\right)$$

$$I_{\text{nette}} = 455\,\mathrm{W/m^2} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'irradiance trouvée est correct. La puissance de 455 W impliquée est une valeur applicable à un mètre carré, alors que la balle a une surface beaucoup plus faible.

b. Identifier la clé La clé est l'équation 4.25 qui relie l'irradiance à la surface émettrice :

$$I = \frac{P}{A} \qquad \Rightarrow \qquad P = IA \; .$$

Résoudre le problème Pour la balle sphérique, la puissance nette émise implique l'irradiance nette trouvée en **a.** :

$$\begin{aligned} P_{\text{nette}} &= I_{\text{nette}}A = I_{\text{nette}}\left(4\pi\frac{d^2}{4}\right) = I_{\text{nette}}\pi d^2 \\ &= 455\,\text{W/m}^2 \times \pi \times (0{,}112\,\text{m})^2 \\ P_{\text{nette}} &= 17{,}9\,\text{W} \; . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la puissance trouvée est correct. La balle plus chaude que l'environnement diffuse son énergie thermique dans l'environnement. Évidemment, la température décroît constamment et la valeur trouvée n'est valide que durant un instant.

P17 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\lambda = 457\,\text{nm}$	n_{inc}
$r_{\text{S}} = 50{,}5\,\text{cm}$	$P_{\text{ém}}$
$r_{\text{cap}} = 3{,}40\,\text{mm}$	$T_{\text{éq}}$
$P_{\text{inc}} = 2{,}31\,\text{mW}$	

a. Identifier la clé La clé est l'équation 10.4 qui quantifie l'énergie contenue dans un faisceau lumineux :

$$E_{\text{faisc}} = \frac{Nhc}{\lambda} \; .$$

Résoudre le problème Puisqu'on cherche la quantité de photons qui atteignent le capteur chaque seconde, l'énergie considérée (disons l'énergie incidente E_{inc}) est l'énergie reçue durant une seconde à la puissance mesurée par le capteur. On peut donc utiliser directement cette puissance pour trouver un nombre de photons par seconde :

$$\frac{E_{\text{inc}}}{\Delta t} = P = \frac{Nhc}{\Delta t \lambda} = \frac{N}{\Delta t}\frac{hc}{\lambda} \; .$$

On pose $n = \frac{N}{\Delta t}$, le nombre de photons par seconde :

$$\begin{aligned} n &= \frac{N}{\Delta t} = \frac{P\lambda}{hc} \\ &= \frac{0{,}002\,31\,\text{W} \times 457 \times 10^{-9}\,\text{m}}{6{,}626 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s} \times 2{,}998 \times 10^{8}\,\text{m/s}} \\ n &= 5{,}31 \times 10^{15}\,\text{photons/s} \; . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du nombre de photons qui atteignent le capteur chaque seconde est correct. Un faisceau lumineux en contient évidemment une quantité gigantesque.

b. Identifier les clés La première clé est l'équation 4.26 qui définit la puissance que doit avoir une source pour produire une irradiance donnée à une distance r :

$$I = \frac{P_{\text{S}}}{4\pi r_{\text{S}}^2} \qquad \Rightarrow \qquad P_{\text{S}} = 4\pi r_{\text{S}}^2 I \; . \qquad \text{(i)}$$

La deuxième clé est l'équation 4.25 appliquée au capteur pour déterminer l'irradiance incidente qui l'éclaire à partir de la puissance indiquée dans l'énoncé :

$$I_{\text{inc}} = \frac{P_{\text{inc}}}{A_{\text{cap}}} \; . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème L'irradiance reçue par le capteur est liée par l'équation (ii) à l'aire du capteur (un cercle) :

$$I_{\text{inc}} = \frac{P_{\text{inc}}}{\pi r_{\text{cap}}^2} \ . \qquad \text{(iii)}$$

Cette irradiance incidente est insérée dans l'équation (i) :

$$\begin{aligned} P_{\text{S}} &= 4\pi r_{\text{S}}^2 I = P_{\text{S}} = 4\pi r_{\text{S}}^2 \left(\frac{P_{\text{inc}}}{\pi r_{\text{cap}}^2}\right) = 4P_{\text{inc}} \left(\frac{r_{\text{S}}}{r_{\text{cap}}}\right)^2 \\ &= 4 \times \left(2{,}31 \times 10^{-3}\,\text{W}\right) \times \left(\frac{0{,}505\,\text{m}}{3{,}40 \times 10^{-3}\,\text{m}}\right)^2 \\ P_{\text{S}} &= 204\,\text{W} \ . \qquad \text{(réponse)} \end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la puissance trouvée est correct. La puissance de la source éloignée doit être beaucoup plus grande que la puissance captée, car une très faible fraction de l'énergie émise atteint le petit capteur.

c. Identifier la clé La clé est la loi de Stefan-Boltzmann :

$$I = \sigma T^4 \qquad \Rightarrow \qquad T = \sqrt[4]{\frac{I}{\sigma}} \ , \qquad \text{(iv)}$$

où on pose l'égalité de l'irradiance émise et de l'irradiance reçue par le capteur, soit celle définie par l'équation (iii) en **a.** :

$$I_{\text{inc}} = \frac{P_{\text{inc}}}{\pi r_{\text{cap}}^2} \ . \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème L'union de l'équation (iii) et de l'équation (iv) donne

$$\begin{aligned} T &= \sqrt[4]{\frac{\left(\frac{P_{\text{inc}}}{\pi r_{\text{cap}}^2}\right)}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{P_{\text{inc}}}{\sigma \pi r_{\text{cap}}^2}} = \sqrt[4]{\frac{2{,}31 \times 10^{-3}\,\text{W}}{\left(5{,}670 \times 10^{-8}\,\text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4\right) \pi \left(3{,}40 \times 10^{-3}\,\text{m}\right)^2}} \\ T &= 183\,\text{K} \ . \qquad \text{(réponse)} \end{aligned}$$

Valider la réponse La température trouvée est plausible. Cependant, on constate qu'elle correspond à une température de $-90\,^{\circ}\text{C}$, c'est-à-dire qu'une température très faible suffit à faire émettre à un corps une irradiance équivalente à celle reçue d'une source de 204 W à une distance 50 cm.

Q18 **Décortiquer le problème** On étudie l'effet de différents facteurs sur le potentiel d'arrêt $V_{\text{arrêt}}$ permettant d'immobiliser un électron éjecté par l'effet photoélectrique.

Identifier la clé La clé est l'équation 10.15 du potentiel d'arrêt :

$$V_{\text{arrêt}} = \frac{h}{e} f - \frac{\Phi}{e} \ .$$

Résoudre le problème On vérifie si chacun des éléments indiqués dans la question apparaît dans l'équation du potentiel d'arrêt.

a. Le travail d'extraction Φ est un paramètre de l'équation du potentiel d'arrêt, dans le terme soustrait. Un travail d'extraction plus grand entraîne un potentiel d'arrêt inférieur.

Diminution du potentiel d'arrêt (réponse)

b. La distance entre la surface du matériau et le collecteur n'est pas un paramètre de l'équation du potentiel d'arrêt. Elle n'a donc pas d'influence sur le potentiel d'arrêt. Un même potentiel appliqué à une distance plus grande aura pour effet de réduire la décélération des électrons émis. Ainsi, le même potentiel suffira à les immobiliser encore tout juste avant qu'ils touchent le collecteur.

Aucune influence sur le potentiel d'arrêt (réponse)

c. La fréquence du rayonnement est un paramètre de l'équation du potentiel d'arrêt, dans le premier terme soustrait. Une fréquence plus élevée entraîne un potentiel d'arrêt supérieur. Dans les faits, des photons de plus haute énergie entraînant l'émission d'un photoélectron génèrent une énergie cinétique plus grande, donc des électrons plus rapides, dont l'immobilisation demande un champ électrique plus intense.

Augmentation du potentiel d'arrêt (réponse)

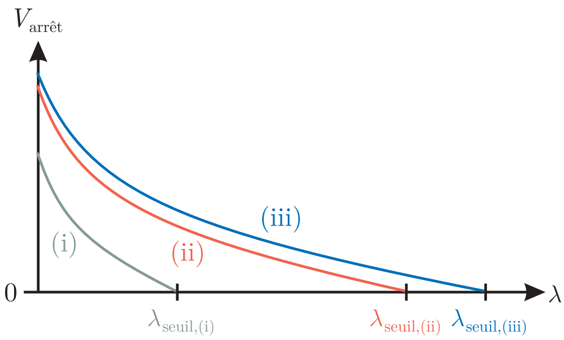
d. L'irradiance n'est pas un paramètre de l'équation du potentiel d'arrêt. Elle n'a donc pas d'influence sur le potentiel d'arrêt. Une irradiance plus grande est synonyme d'une plus grande quantité de photons incidents sur la surface. La surface émet donc une plus grande quantité d'électrons, mais chaque électron se comporte de la même manière malgré le grand nombre d'électrons impliqués.

Aucune influence sur le potentiel d'arrêt (réponse)

Q19 **Décortiquer le problème** Le potentiel d'arrêt dépend de l'énergie des photons incidents sur la surface (donc de leur longueur d'onde) et aussi du travail d'extraction du matériau utilisé.

a. **Illustrer la situation** La figure suivante reproduit le diagramme de l'énoncé.

Identifier la clé La clé est le fait que la longueur d'onde seuil est la longueur d'onde à partir de laquelle l'effet photoélectrique se produit. À cette longueur d'onde, les photoélectrons n'ont aucune énergie cinétique et aucun potentiel d'arrêt n'est requis pour atténuer leur énergie cinétique. Comme le montre la figure, la longueur d'onde à laquelle une courbe coupe l'axe horizontal ($V_{\text{arrêt}} = 0$) définit la longueur d'onde seuil. On peut alors déterminer l'ordre croissant des longueurs d'onde seuils pour les trois courbes illustrées :



$$\lambda_{\text{seuil,(i)}} < \lambda_{\text{seuil,(ii)}} < \lambda_{\text{seuil,(iii)}} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 10.17 de la longueur d'onde seuil :

$$\lambda_{\text{seuil}} = \frac{hc}{\Phi} \qquad \Rightarrow \qquad \Phi = \frac{hc}{\lambda_{\text{seuil}}} \ .$$

Résoudre le problème Puisqu'on a trouvé en **a.** l'ordre croissant des longueurs d'onde seuils, on peut établir à partir de l'équation clé que l'ordre croissant du travail d'extraction des trois matériaux sera l'ordre inverse :

$$\Phi_{\text{(iii)}} < \Phi_{\text{(ii)}} < \Phi_{\text{(i)}} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

E20 **Décortiquer le problème** Le travail d'extraction d'un certain matériau est connu. On peut déterminer la longueur d'onde à partir de laquelle l'effet photoélectrique se produit.

Connues	Inconnue
$\Phi_{\text{Co}} = 3{,}90\,\text{eV}$	λ_{seuil}
$hc = 1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 10.17 de la longueur d'onde seuil :

$$\lambda_{\text{seuil}} = \frac{hc}{\Phi} \ .$$

Résoudre le problème

$$\lambda_{\text{seuil}} = \frac{1\,240\,\text{eV} \cdot \text{nm}}{3{,}90\,\text{eV}}$$

$$\lambda_{\text{seuil}} = 318\,\text{nm} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est correct, celle-ci faisant partie du domaine ultraviolet.

E21 **Décortiquer le problème** On cherche le travail d'extraction d'un matériau inconnu. On connaît la longueur d'onde des photons impliqués ainsi que l'énergie cinétique des électrons émis.

Connues	Inconnue
$K_{\text{max}} = 1{,}27\,\text{eV}$	Φ
$\lambda = 405\,\text{nm}$	
$hc = 1\,240\,\text{eV} \cdot \text{nm}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 10.14 de l'énergie cinétique des photoélectrons :

$$hf - \Phi = K_{\text{max}} \qquad \Rightarrow \qquad \Phi = hf - K_{\text{max}}\ . \tag{i}$$

Résoudre le problème Puisque l'équation (i) utilise la fréquence plutôt que la longueur d'onde, on doit y remplacer f par $\frac{c}{\lambda}$. Ainsi,

$$\Phi = \frac{hc}{\lambda} - K_{\text{max}} = \frac{1\,240\,\text{eV} \cdot \text{nm}}{405\,\text{nm}} - 1{,}27\,\text{eV}$$

$$\Phi = 1{,}79\,\text{eV}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur pour le travail d'extraction trouvé est correct.

E22 **Décortiquer le problème** Le potentiel d'arrêt étant connu pour un matériau et une longueur d'onde donnée, on peut établir le potentiel d'arrêt à d'autres longueurs d'onde.

Connues		Inconnues
$V_{\text{arrêt},0} = 0{,}92\,\text{V}$	$\lambda_1 = 250\,\text{nm}$	$V_{\text{arrêt,a}}$
$\lambda_0 = 405\,\text{nm}$	$\lambda_2 = 500\,\text{nm}$	$V_{\text{arrêt,b}}$
$hc = 1\,240\,\text{eV} \cdot \text{nm}$	$\lambda_3 = 600\,\text{nm}$	$V_{\text{arrêt,c}}$

Identifier la clé La clé consiste à déterminer au préalable le travail d'extraction du matériau impliqué à l'aide de l'équation 10.16 de l'effet photoélectrique :

$$\frac{hc}{\lambda} = eV_{\text{arrêt}} + \Phi \qquad \Rightarrow \qquad \Phi = \frac{hc}{\lambda_0} - eV_{\text{arrêt},0}\ .$$

La même équation permet ensuite de trouver le potentiel d'arrêt pour d'autres longueurs d'onde :

$$\begin{aligned} V_{\text{arrêt,i}} &= \frac{1}{e}\left(\frac{hc}{\lambda_{\text{i}}} - \Phi\right) = \frac{1}{e}\left(\frac{hc}{\lambda_{\text{i}}} - \left(\frac{hc}{\lambda_0} - eV_{\text{arrêt},0}\right)\right) \\ &= V_{\text{arrêt},0} + \frac{hc}{e}\left(\frac{1}{\lambda_{\text{i}}} - \frac{1}{\lambda_0}\right)\ . \end{aligned}$$

On peut maintenant procéder au calcul du potentiel d'arrêt pour les trois longueurs d'onde suggérées.

a.
$$V_{\text{arrêt,a}} = 0{,}92\,\text{V} + \frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{e}\left(\frac{1}{250\,\text{nm}} - \frac{1}{405\,\text{nm}}\right)$$
$$V_{\text{arrêt,a}} = 2{,}82\,\text{V} \qquad \text{(réponse)}$$

b.
$$V_{\text{arrêt,b}} = 0{,}92\,\text{V} + \frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{e}\left(\frac{1}{500\,\text{nm}} - \frac{1}{405\,\text{nm}}\right)$$
$$V_{\text{arrêt,b}} = 0{,}34\,\text{V} \qquad \text{(réponse)}$$

c.
$$V_{\text{arrêt,c}} = 0{,}92\,\text{V} + \frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{e}\left(\frac{1}{600\,\text{nm}} - \frac{1}{405\,\text{nm}}\right)$$
$$V_{\text{arrêt,c}} = -0{,}075\,\text{V}$$

Le résultat négatif signifie qu'il ne peut pas y avoir d'effet photoélectrique. En effet, si le potentiel d'arrêt est celui qui immobilise les électrons émis, le potentiel négatif trahit le fait que les photons incidents n'ont pas assez d'énergie pour extraire les électrons de la surface.

Il n'y a pas d'effet photoélectrique. (réponse)

Valider la réponse L'ordre de grandeur des potentiels trouvés en **a.** et en **b.** est correct pour l'effet photoélectrique. Par ailleurs, le potentiel d'arrêt ne peut être que positif.

E23 **Décortiquer le problème** Le potentiel d'arrêt et la longueur d'onde des photons incidents sont connus pour une certaine surface. On peut déterminer les divers paramètres de l'effet photoélectrique observé sur cette surface.

Connues	Inconnues
$V_{\text{arrêt}} = 0{,}57\,\text{V}$	Φ
$\lambda = 434\,\text{nm}$	$v_{\max}$
$hc = 1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}$	$V_{\text{arrêt}}$ à 486 nm

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 10.16 de l'effet photoélectrique :

$$\frac{hc}{\lambda} = eV_{\text{arrêt}} + \Phi \qquad \Rightarrow \qquad \Phi = \frac{hc}{\lambda} - eV_{\text{arrêt}}\ .$$

Résoudre le problème

$$\Phi = \frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{434\,\text{nm}} - e\times 0{,}57\,\text{V} = 2{,}287\,\text{eV}$$
$$\Phi = 2{,}29\,\text{eV} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du potentiel d'arrêt trouvé est correct.

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 10.13 de l'énergie cinétique des photoélectrons :

$$K_{\max} = eV_{\text{arrêt}}\ .$$

Résoudre le problème L'énergie cinétique des photoélectrons est évidemment liée à leur vitesse maximale par

$$K_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2\ .$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = eV_{\text{arrêt}}$$
$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2eV_{\text{arrêt}}}{m}} = \sqrt{\frac{2\times\left(1{,}602\times 10^{-19}\,\text{J}\right)\times 0{,}57\,\text{V}}{9{,}109\times 10^{-31}\,\text{kg}}}$$
$$v_{\max} = 4{,}5\times 10^{5}\,\text{m/s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse trouvée est correct, et le fait qu'elle soit beaucoup plus faible que la vitesse de la lumière confirme qu'on n'a pas besoin de considérer l'effet de la relativité.

c. Identifier la clé La clé est l'équation 10.16 de l'effet photoélectrique :

$$\frac{hc}{\lambda} = eV_{\text{arrêt}} + \Phi \qquad \Rightarrow \qquad V_{\text{arrêt}} = \frac{1}{e}\left(\frac{hc}{\lambda} - \Phi\right) .$$

Résoudre le problème

$$V_{\text{arrêt}} = \frac{1}{1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{C}}\left(\frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{486\,\text{nm}} - 2{,}287\,\text{eV}\right)$$

$$V_{\text{arrêt}} = 0{,}26\,\text{V} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du potentiel trouvé est correct. Ce potentiel d'arrêt est plus faible que celui qu'on donne dans l'énoncé, car les électrons émis sous un rayonnement à 486 nm ont moins d'énergie cinétique et sont plus faciles à immobiliser.

P24 Décortiquer le problème L'énoncé du problème contient des informations sur l'effet photoélectrique produit sur un même matériau à deux longueurs d'onde distinctes telles que $\lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_1$.

Un potentiel se mesure en volt, pas en électronvolt, qui mesure plutôt de l'énergie.

Connues	Inconnues
$v_{\max,1} = 7{,}41 \times 10^5\,\text{m/s}$	λ_1
$V_{\text{arrêt},2} = 3{,}52\,\cancel{\text{e}}\text{V}$	Φ
$hc = 1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}$	λ_{seuil}

a. Identifier la clé La clé consiste à écrire un système de deux équations à deux inconnues à partir de l'effet photoélectrique produit aux longueurs d'onde λ_1 et $\lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_1$.

La première situation décrite implique qu'on connaît la vitesse d'émission des photoélectrons, donc qu'on connaît l'énergie cinétique. L'équation 10.14 permet de relier cette énergie cinétique à la longueur d'onde :

$$hf - \Phi = K_{\max} .$$

Puisque $c = \lambda f$ et que $K = \frac{1}{2}mv^2$, on peut écrire la première équation du système de deux équations à deux inconnues :

$$\frac{hc}{\lambda_1} - \Phi = \frac{1}{2}m_e v_{\max}^2 . \qquad \text{(i)}$$

La seconde situation décrite implique qu'on connaît le potentiel d'arrêt. L'équation 10.16 permet de relier ce potentiel d'arrêt à la longueur d'onde :

$$\frac{hc}{\lambda_2} = eV_{\text{arrêt},2} + \Phi . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème Le terme Φ est commun aux équations (i) et (ii), ce qui permet de le mettre en évidence et d'isoler ensuite la longueur d'onde recherchée λ_1 :

$$\begin{aligned}
\frac{hc}{\lambda_1} - \frac{1}{2}m_e v_{max}^2 &= \Phi = \frac{hc}{\lambda_2} - eV_{arrêt} \\
&= \frac{hc}{\frac{1}{2}\lambda_1} - eV_{arrêt} \\
\frac{hc}{\lambda_1} &= eV_{arrêt,2} - \frac{1}{2}m_e v_{max}^2 \\
\lambda_1 &= \frac{hc}{eV_{arrêt,2} - \frac{1}{2}m_e v_{max}^2} \\
&= \frac{\left(6{,}626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}\right) \times \left(2{,}998 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}\right)}{\left(1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}\right) \times (3{,}52\,\mathrm{V}) - \frac{1}{2}\left(9{,}109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}\right) \times \left(7{,}41 \times 10^{5}\,\mathrm{m/s}\right)^2} \\
\lambda_1 &= 633\,\mathrm{nm} \qquad \text{(réponse)}
\end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est correct. Cette longueur d'onde appartient au domaine visible, dans le secteur du rouge.

b. Identifier la clé La clé consiste à utiliser l'équation (i) ou l'équation (ii) établies en **a.** pour calculer Φ puisqu'on connaît maintenant λ.

Résoudre le problème À partir de l'équation (ii), on a

$$\begin{aligned}
\Phi &= \frac{hc}{\lambda_2} - eV_{arrêt} = \frac{hc}{\frac{1}{2}\lambda_1} - eV_{arrêt,2} \\
&= \frac{1\,240\,\mathrm{eV\cdot nm}}{\frac{1}{2} \times 633\,\mathrm{nm}} - e\,(3{,}52\,\mathrm{V}) = 0{,}397\,9\,\mathrm{eV} \\
\Phi &= 0{,}40\,\mathrm{eV}\ . \qquad \text{(réponse)}
\end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du travail d'extraction trouvé est correct.

c. Identifier la clé La clé est l'équation 10.17 de la longueur d'onde seuil :

$$\lambda_{seuil} = \frac{hc}{\Phi}\ .$$

Résoudre le problème

$$\begin{aligned}
\lambda_{seuil} &= \frac{1\,240\,\mathrm{eV\cdot nm}}{0{,}397\,9\,\mathrm{eV}} \\
\lambda_{seuil} &= 3{,}1\,\mu\mathrm{m}\ . \qquad \text{(réponse)}
\end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est correct, celle-ci faisant partie du domaine ultraviolet.

R25 Décortiquer le problème Deux rayons lumineux dont la longueur d'onde est inconnue sont analysés à la fois à l'aide d'un réseau et de l'effet photoélectrique qu'ils produisent sur un matériau inconnu.

Connues		Inconnues	
$n_{réseau} = 600\,\mathrm{lignes/mm}$	$L = 45{,}0\,\mathrm{cm}$	λ_{violet}	h
$y_{1,violet} = 10{,}9\,\mathrm{cm}$	$V_{arrêt,violet} = 1{,}008\,\mathrm{V}$	λ_{vert}	Φ
$y_{1,vert} = 14{,}9\,\mathrm{cm}$	$V_{arrêt,vert} = 0{,}217\,\mathrm{V}$		

a. Identifier la clé La clé consiste à déterminer la longueur d'onde des deux lumières utilisées à l'aide des propriétés des réseaux de diffraction.

Les équations 8.16, 8.23 et 8.24 permettent d'établir une équation de la longueur d'onde :

$$\tan\theta = \frac{y}{L}\ , \qquad d = \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad d\sin\theta = m\lambda\ .$$

Résoudre le problème L'union des trois équations du fonctionnement d'un réseau, pour l'ordre $m = 1$, permet d'écrire

$$\frac{1}{n}\sin\left(\arctan\frac{y}{L}\right) = 1\lambda\ .$$

On peut maintenant calculer les deux longueurs d'onde utilisées :

$$\lambda_{\text{violet}} = \frac{1}{600\,\text{lignes/mm}}\sin\left(\arctan\frac{0{,}109\,\text{m}}{0{,}450\,\text{m}}\right) = 392{,}36\,\text{nm}$$

$$\lambda_{\text{vert}} = \frac{1}{600\,\text{lignes/mm}}\sin\left(\arctan\frac{0{,}149\,\text{m}}{0{,}450\,\text{m}}\right) = 523{,}88\,\text{nm}$$

$$\lambda_{\text{violet}} = 392\,\text{nm} \quad \text{et} \quad \lambda_{\text{vert}} = 524\,\text{nm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Les deux longueurs d'onde trouvées appartiennent bien au domaine visible, dans le secteur du violet et du vert.

b. Identifier la clé La clé est l'équation 10.16 de l'effet photoélectrique, utilisée avec chacune des deux longueurs d'onde trouvées en **a.** :

$$\frac{hc}{\lambda_{\text{violet}}} = eV_{\text{arrêt,violet}} + \Phi \qquad \text{et} \qquad \frac{hc}{\lambda_{\text{vert}}} = eV_{\text{arrêt,vert}} + \Phi\ .$$

Résoudre le problème Les deux seules inconnues des deux équations qui précèdent sont Φ et h, qui sont des valeurs communes. On peut mettre en évidence Φ pour obtenir une équation où h est la seule inconnue :

$$\frac{hc}{\lambda_{\text{violet}}} - eV_{\text{arrêt,violet}} = \Phi = \frac{hc}{\lambda_{\text{vert}}} - eV_{\text{arrêt,vert}} \qquad \text{(i)}$$

$$h = \frac{e}{c}\frac{(V_{\text{violet}} - V_{\text{vert}})}{\left(\frac{1}{\lambda_{\text{violet}}} - \frac{1}{\lambda_{\text{vert}}}\right)} = \frac{1{,}602\times10^{-19}\,\text{C}}{2{,}998\times10^{8}\,\text{m/s}} \times \frac{(1{,}008\,\text{V} - 0{,}217\,\text{V})}{\left(\frac{1}{392{,}36\,\text{nm}} - \frac{1}{523{,}88\,\text{nm}}\right)}$$

$$h = 6{,}61\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La valeur s'approche de la valeur admise de la constante de Planck. Le résultat est donc plausible. De légers écarts entre les longueurs d'onde et potentiels mesurés et les valeurs réelles sont sans doute à l'origine du léger écart avec la valeur théorique de h.

c. Identifier la clé La clé consiste à utiliser l'une des équations de la ligne (i) établies en **a.** pour calculer Φ.

Résoudre le problème En utilisant la première partie de l'équation (i), pour le violet, on a

$$\Phi = \frac{hc}{\lambda_{\text{violet}}} - eV_{\text{arrêt,violet}}$$

$$= \frac{e}{1{,}602\times10^{-19}\,\text{C}}\frac{\left(6{,}61\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}\right)\times\left(2{,}998\times10^{8}\,\text{m/s}\right)}{(392\,\text{nm})} - e\,(1{,}008\,\text{V})$$

$$\Phi = 2{,}14\,\text{eV}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du travail d'extraction trouvé est correct. Le calcul a été fait avec la valeur de la constante de Planck trouvée en **b.** On aurait trouvé 2,15 eV avec la valeur officielle de h.

E26 Décortiquer le problème Les photons de longueur d'onde visible portent une certaine quantité de mouvement. On doit déterminer cette quantité de mouvement pour des photons aux limites du domaine visible.

Connues	Inconnues
$\lambda_1 = 380\,\text{nm}$	p_1
$\lambda_2 = 800\,\text{nm}$	p_2
$h = \frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{c}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 10.20 de la quantité de mouvement d'un photon :

$$p = \frac{h}{\lambda} \ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème Appliquée aux deux longueurs d'onde des limites du domaine visible, l'équation (i) donne

$$p_1 = \frac{h}{\lambda_1} = \frac{\frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{c}}{380\,\text{nm}} = 3{,}26\,\text{eV/c}$$

$$p_2 = \frac{h}{\lambda_2} = \frac{\frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{c}}{800\,\text{nm}} = 1{,}55\,\text{eV/c}$$

$$3{,}26\,\text{eV/c} \geq p \geq 1{,}55\,\text{eV/c} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

E27 **Décortiquer le problème**

Connues		Inconnue
$\lambda = 141\,\text{pm}$	$\theta = 23{,}5°$	$\Delta\lambda$
$hc = 1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}$	$mc^2 = 511 \times 10^3\,\text{eV}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 10.24 du décalage de Compton :

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta) = \frac{hc}{mc^2}(1-\cos\theta) \ .$$

Résoudre le problème La longueur d'onde indiquée dans l'énoncé n'intervient pas dans le calcul du décalage de Compton $\Delta\lambda$:

$$\Delta\lambda = \frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{511 \times 10^3\,\text{eV}}(1-\cos 23{,}5°) = 0{,}201 \times 10^{-3}\,\text{nm}$$

$$\Delta\lambda = 0{,}201\,\text{pm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du décalage trouvé est correct pour l'effet Compton.

E28 **Décortiquer le problème** L'effet Compton peut être utilisé dans un sélecteur de longueur d'onde. Chaque orientation des photons émergents sera peuplée de photons d'une longueur d'onde précise.

Connues		Inconnue
$\lambda = 82{,}3\,\text{nm}$	$\lambda' = 84{,}0\,\text{pm}$	θ

Identifier la clé La clé est l'équation 10.24 du décalage de Compton :

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta) = \frac{hc}{mc^2}(1-\cos\theta) \ .$$

On peut isoler l'orientation θ dans cette équation :

$$\theta = \arccos\left(1 - \frac{mc^2\Delta\lambda}{hc}\right) \ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème À partir des longueurs d'onde données dans l'énoncé, on peut définir le décalage de Compton requis :

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda \ .$$

Inséré dans l'équation (i), ce décalage de Compton permet le calcul de l'angle θ :

$$\theta = \arccos\left(1 - \frac{mc^2\,(\lambda' - \lambda)}{hc}\right) = \arccos\left(1 - \frac{511 \times 10^3\,\text{eV} \times (0{,}084\,0\,\text{nm} - 0{,}082\,3\,\text{nm})}{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}\right)$$

$$\theta = 72{,}6^\circ \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'angle trouvé, compris entre 0 et 90°, est plausible.

E29 **Décortiquer le problème** L'effet Compton propulse l'électron impliqué à une certaine vitesse.

Connue	Inconnue
$\lambda = 40{,}0\,\text{pm}$	K_{max}

Identifier les clés La première clé est l'équation 10.27 qui relie l'énergie cinétique de l'électron diffusé au décalage de Compton :

$$K = \frac{hc\,\Delta\lambda}{\lambda\,(\lambda + \Delta\lambda)} \ . \quad \text{(i)}$$

La deuxième clé est le fait que l'énergie maximale de l'électron survient lorsque le photon émis est orienté à 180° par rapport à son orientation d'incidence.

Résoudre le problème L'équation de l'effet Compton appliquée avec $\theta = 180^\circ$ est

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}\,(1 - \cos 180^\circ) = \frac{2h}{mc} = \frac{2hc}{mc^2} = \frac{2 \times 1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{511 \times 10^3\,\text{eV}} = 4{,}853 \times 10^{-3}\,\text{nm} \ .$$

Selon l'équation (i), l'énergie lorsque $\Delta\lambda = 2{,}426\,6\,\text{mm}$ est

$$K = \frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm} \times 4{,}853 \times 10^{-3}\,\text{nm}}{40{,}0 \times 10^{-3}\,\text{nm} \times \left(40{,}0 \times 10^{-3}\,\text{nm} + 4{,}853 \times 10^{-3}\,\text{nm}\right)}$$

$$K = 3{,}4\,\text{keV} \ . \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct. Un photon du domaine des rayons X possède assez d'énergie pour céder cette quantité à un électron lors de l'effet Compton.

P30 **Décortiquer le problème** Lors de l'effet Compton, on peut déterminer le mouvement final de l'électron à partir du mouvement final du photon diffusé.

Connues	Inconnues
$E_{\text{photon}} = 16{,}5\,\text{keV}$	$\theta \quad K_{\text{é}}$
$\Delta\lambda = 1{,}46\,\text{pm}$	$v_{\text{é}} \quad \phi$

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 10.24 du décalage de Compton :

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}\,(1 - \cos\theta) = \frac{hc}{mc^2}\,(1 - \cos\theta) \ .$$

On peut isoler l'orientation θ dans cette équation :

$$\theta = \arccos\left(1 - \frac{mc^2\Delta\lambda}{hc}\right) \ .$$

Résoudre le problème

$$\theta = \arccos\left(1 - \frac{511 \times 10^3\,\text{eV} \times \left(1{,}46 \times 10^{-3}\,\text{nm}\right)}{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}\right)$$

$$\theta = 66{,}5^\circ \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'angle trouvé est plausible, compris entre 0° et 180°.

b. Identifier les clés La première clé est l'équation 10.27 qui relie l'énergie cinétique de l'électron diffusé au décalage de Compton et à la longueur d'onde du photon incident :

$$K = \frac{hc\,\Delta\lambda}{\lambda\,(\lambda + \Delta\lambda)} \ . \qquad \text{(i)}$$

La deuxième clé est l'équation 10.1 permettant de calculer la longueur d'onde des photons incidents à partir de leur énergie :

$$E = \frac{hc}{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{hc}{E} \ . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème À l'aide de l'équation (ii), on calcule d'abord la longueur d'onde initiale :

$$\lambda = \frac{1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}{16{,}5\times 10^3\,\mathrm{eV}} = 0{,}075\,15\,\mathrm{nm} \ .$$

L'équation (i) permet ensuite de calculer l'énergie des photons diffusés :

$$K = \frac{(1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm})\times\left(1{,}46\times 10^{-3}\,\mathrm{nm}\right)}{0{,}075\,15\,\mathrm{nm}\left(0{,}075\,15\,\mathrm{nm} + 1{,}46\times 10^{-3}\,\mathrm{nm}\right)}$$
$$K = 0{,}314\,\mathrm{keV} \text{ ou } 5{,}04\times 10^{-17}\ \mathrm{J} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct pour un électron diffusé par effet Compton.

c. Décortiquer le problème Lors du calcul de la vitesse de l'électron diffusé, il est permis de considérer les équations de la mécanique classique, mais il faut porter un jugement sur le résultat pour s'assurer que la vitesse n'est pas une fraction importante de la vitesse de la lumière, auquel cas il faudrait reprendre le calcul en considérant l'énergie cinétique relativiste.

Identifier la clé La clé est la définition classique de l'énergie cinétique :

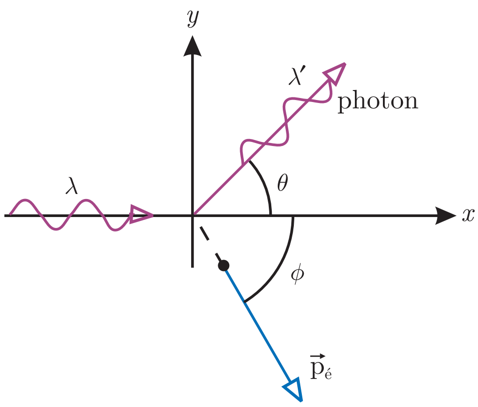
$$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{2K}{m_{\text{é}}}} \ .$$

Résoudre le problème

$$v = \sqrt{\frac{2\times 314\,\mathrm{eV}}{9{,}109\times 10^{-31}\,\mathrm{kg}} \times \frac{1{,}602\times 10^{-19}\,\mathrm{J}}{\mathrm{eV}}} = 1{,}052\times 10^7\,\mathrm{m/s}$$
$$v = 1{,}1\times 10^7\,\mathrm{m/s} = 0{,}04c \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La vitesse trouvée est plausible pour un électron. La vitesse, étant tout de même beaucoup plus faible que la vitesse de la lumière, confirme qu'il n'est pas nécessaire de considérer l'effet de la relativité ($\gamma = 1{,}000\,6$).

d. **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre le photon diffusé ainsi que l'électron diffusé de part et d'autre d'un axe des x orienté selon la direction initiale du photon.



Identifier la clé La clé est l'application du principe de conservation de la quantité de mouvement dans la dimension perpendiculaire à la direction du photon incident.

Résoudre le problème Si on considère que l'électron est initialement au repos, toute la quantité de mouvement initiale est portée par le photon, quantité de mouvement qui est entièrement orientée selon l'axe des x. On considère également que la direction du photon diffusé a une composante y dans la direction positive de l'axe des y. Ainsi, l'équation de conservation de la quantité de mouvement est

$$\sum p_{y,\mathrm{i}} = \sum p_{y,\mathrm{f}}$$
$$0 = p_{\lambda',y} + p_{é,y} \ .$$

La quantité de mouvement du photon est donnée par l'équation 10.20, $p = \frac{h}{\lambda'}$, et celle de l'électron est donnée par la forme conventionnelle en mécanique, $p_é = mv$. Ainsi,

$$0 = \frac{h}{\lambda'} \sin\theta - m_é v \sin\phi$$
$$\phi = \arcsin\left(\frac{h\sin\theta}{\lambda' m_é v}\right) \ .$$

La vitesse de l'électron ayant été déterminée en **c.**, on peut donc calculer l'angle ϕ :

$$\phi = \arcsin\left(\frac{6{,}626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s} \times \sin 66{,}5°}{(0{,}075\,15 + 0{,}001\,46) \times 10^{-9}\ \mathrm{m} \times (9{,}109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}) \times (1{,}052 \times 10^{7}\,\mathrm{m/s})}\right) = 55{,}88°$$

$\phi = 56°$. (réponse)

Valider la réponse L'angle trouvé, compris entre 0° et 90°, est plausible.

P31 **Décortiquer le problème** Lors de l'effet Compton, on peut déterminer le mouvement final de l'électron à partir du mouvement final du photon diffusé.

Connues	Inconnues
$E = 700\,\mathrm{keV}$	θ $K_é$
$\Delta\lambda = 1{,}10\,\mathrm{pm}$	$v_é$ ϕ

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 10.24 du décalage de Compton :

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) = \frac{hc}{mc^2}(1 - \cos\theta) \ .$$

On peut isoler l'orientation θ dans cette équation :

$$\theta = \arccos\left(1 - \frac{mc^2\Delta\lambda}{hc}\right) \ .$$

Résoudre le problème

$$\theta = \arccos\left(1 - \frac{511 \times 10^{3}\,\mathrm{eV} \times (1{,}10 \times 10^{-3}\,\mathrm{nm})}{1\,240\,\mathrm{eV\cdot nm}}\right)$$

$\theta = 56{,}9°$ (réponse)

Valider la réponse L'angle trouvé, compris entre 0° et 180°, est plausible.

b. Identifier les clés La première clé est l'équation 10.27 qui relie l'énergie cinétique de l'électron diffusé au décalage de Compton et à la longueur d'onde du photon incident :

$$K = \frac{hc\,\Delta\lambda}{\lambda\,(\lambda + \Delta\lambda)}\ . \tag{i}$$

La deuxième clé est l'équation 10.1 permettant de calculer la longueur d'onde des photons incidents à partir de leur énergie :

$$E = \frac{hc}{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{hc}{E}\ . \tag{ii}$$

Résoudre le problème À l'aide de l'équation (ii), on calcule d'abord la longueur d'onde initiale :

$$\lambda = \frac{1\,240\,\mathrm{eV\cdot nm}}{700 \times 10^3\,\mathrm{eV}} = 0{,}001\,77\,\mathrm{nm}\ .$$

L'équation (i) permet ensuite de calculer l'énergie des photons diffusés :

$$K = \frac{(1\,240\,\mathrm{eV\cdot nm}) \times (0{,}001\,10\,\mathrm{nm})}{0{,}001\,77\,\mathrm{nm}\,(0{,}001\,77\,\mathrm{nm} + 0{,}001\,10\,\mathrm{nm})}$$

$$K = 268\,\mathrm{keV} \text{ ou } 4{,}29 \times 10^{-14}\ \mathrm{J}\ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie cinétique trouvée est plutôt élevé pour un électron, suggérant que sa vitesse est d'un ordre de grandeur impliquant des effets relativistes. C'est néanmoins une valeur possible.

c. Décortiquer le problème L'énergie trouvée en **b.** est très élevée pour un électron. On considère alors dès le départ la contribution de la relativité.

Identifier la clé La clé est la définition de l'énergie cinétique relativiste :

$$K = (\gamma - 1)\,mc^2, \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\ .$$

Résoudre le problème L'équation de l'énergie cinétique relativiste permet dans un premier temps de déterminer le facteur de Lorentz γ :

$$\gamma = \frac{K}{mc^2} + 1 = 1{,}524\,7\ .$$

On peut alors calculer la vitesse à partir de cette valeur de γ :

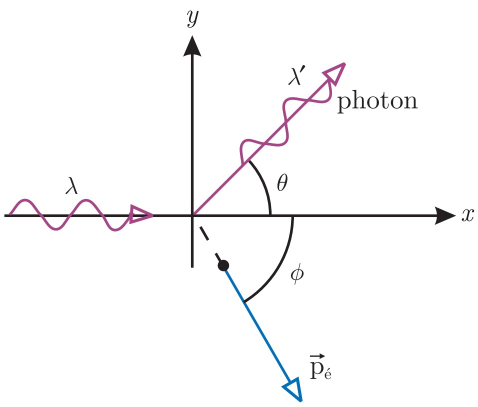
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}\,c$$

$$v = \sqrt{1 - \frac{1}{1{,}524\,7^2}}\,c = 0{,}754\,9c$$

$$v = 0{,}755c = 2{,}26 \times 10^8\ \mathrm{m/s}\ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse La vitesse trouvée est plausible pour un électron ayant une très grande énergie cinétique. La vitesse demeure inférieure à la vitesse de la lumière.

d. **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre le photon diffusé ainsi que l'électron diffusé de part et d'autre d'un axe des x orienté selon la direction initiale du photon.



Identifier la clé La clé est l'application du principe de conservation de la quantité de mouvement dans la dimension perpendiculaire à la direction du photon incident, en tenant compte des effets relativistes, selon l'équation 9.39 :

$$p = \gamma m v \ .$$

Résoudre le problème Si on considère que l'électron est initialement au repos, toute la quantité de mouvement initiale est portée par le photon, quantité de mouvement qui est entièrement orientée selon l'axe des x. On considère également que la direction du photon diffusé a une composante y dans la direction positive de l'axe des y. Ainsi, l'équation de conservation de la quantité de mouvement est

$$\sum p_{y,\mathrm{i}} = \sum p_{y,\mathrm{f}}$$
$$0 = p_{\lambda',y} + p_{\mathrm{é},y} \ .$$

La quantité de mouvement du photon est donnée par l'équation 10.20, $p = \frac{h}{\lambda'}$, et celle de l'électron dans la forme relativiste est $p_{\mathrm{é}} = \gamma m v$. Ainsi,

$$0 = \frac{h}{\lambda'} \sin\theta - \gamma m_{\mathrm{é}} v \sin\phi$$
$$\phi = \arcsin\left(\frac{h \sin\theta}{\lambda' \gamma m_{\mathrm{é}} v}\right) \ .$$

Le module de la vitesse de l'électron et le facteur γ ont été déterminés en **c.**, on peut donc calculer l'angle ϕ :

$$\phi = \arcsin\left(\frac{6{,}626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s} \times \sin 56{,}9°}{(0{,}001\,77 + 0{,}001\,10) \times 10^{-9}\ \mathrm{m} \times 1{,}524\,7 \times \left(9{,}109 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}\right) \times \left(2{,}263 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}\right)}\right)$$

$$\phi = 37{,}9° \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'angle trouvé, compris entre 0° et 90°, est plausible.

P32 Décortiquer le problème

Connues		Inconnue
$d_{\text{arrêt}} = 3{,}22\,\mathrm{mm}$	$E = 124\,\mathrm{kV/m}$	$\Delta\lambda$
$\lambda' = 69{,}7\,\mathrm{pm}$	$hc = 1\,240\,\mathrm{keV \cdot pm}$	

Identifier les clés La première clé est l'équation 10.27 de l'énergie cinétique de l'électron diffusé lors de l'effet Compton :

$$K = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda\,(\lambda + \Delta\lambda)} \ .$$

Pour exprimer cette équation en fonction de la longueur d'onde finale connue et du décalage de Compton recherché, on peut utiliser l'équivalence $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ pour écrire

$$K = \frac{hc\Delta\lambda}{(\lambda' - \Delta\lambda)\,(\lambda')} \ . \qquad \text{(i)}$$

La deuxième clé est l'équation 4.12 du tome 2 qui relie la variation d'énergie cinétique d'une particule chargée à la variation de potentiel qu'elle rencontre lors d'un déplacement :

$$\Delta K = -q\Delta V \ .$$

Pour un électron qui s'immobilise sur une distance d sous l'effet d'un champ E, cette équation devient

$$0 - K_{\text{i}} = e\Delta V, \qquad \text{avec} \qquad \Delta V = -Ed_{\text{arrêt}}$$

$$K = eEd \ . \tag{ii}$$

Résoudre le problème L'union des équations (i) et (ii) donne

$$eEd = \frac{hc\Delta\lambda}{(\lambda' - \Delta\lambda)\,\lambda'} \ .$$

On peut alors isoler et calculer le décalage de Compton $\Delta\lambda$:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda'}{1 + \frac{hc}{eEd\lambda'}} = \frac{69{,}7\,\text{pm}}{1 + \frac{1\,240\,\text{keV}\cdot\text{pm}}{e(124\,\text{kV/m})\times\left(3{,}22\times 10^{-3}\,\text{m}\right)\times(69{,}7\,\text{pm})}}$$

$$\Delta\lambda = 1{,}53\,\text{pm} \ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du décalage trouvé est plausible pour la variation de longueur d'onde lors de l'effet Compton.

Q33 **Décortiquer le problème** La longueur d'onde de De Broglie d'une particule varie avec sa vitesse.

Identifier la clé La clé est l'équation 10.33 de la longueur d'onde de De Broglie :

$$\lambda = \frac{h}{p} \ .$$

Si la vitesse de la particule n'implique pas d'effet relativiste, la quantité de mouvement en fonction de la vitesse ou de l'énergie cinétique est

$$p = mv = \sqrt{2mK} \ .$$

La longueur d'onde de De Broglie est donc

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mK}} \ . \tag{i}$$

a. L'équation (i) montre que la longueur d'onde de De Broglie d'une particule est inversement proportionnelle au module de la vitesse. Un module de la vitesse deux fois plus grand entraînerait donc une longueur d'onde deux fois plus petite.

$$\text{La longueur d'onde est divisée par 2.} \tag{réponse}$$

b. L'équation (i) montre que la longueur d'onde de De Broglie est inversement proportionnelle à la racine carrée de l'énergie cinétique. Une énergie cinétique deux fois plus grande entraînerait donc une longueur d'onde divisée par un facteur $\sqrt{2}$.

$$\text{La longueur d'onde est divisée par } \sqrt{2}. \tag{réponse}$$

Q34 **Décortiquer le problème** Le rapport entre les masses de deux particules différentes ayant la même longueur d'onde de De Broglie permet de déterminer le rapport de leurs énergies cinétiques et de leurs vitesses.

Connues	Inconnues
$m_\alpha = 4{,}0\,\text{u}$	K_α/K_p
$m_\text{p} = 1{,}0\,\text{u}$	v_α/v_p

Identifier la clé La clé est l'équation 10.33 de la longueur d'onde de De Broglie dans laquelle on insère l'expression de la quantité de mouvement non relativiste :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mK}} \ . \tag{i}$$

a. Résoudre le problème À partir de l'équation (i), on établit l'expression de l'énergie cinétique :

$$K = \frac{h^2}{2m\lambda^2} \ .$$

Pour les deux particules ayant la même longueur d'onde de De Broglie, on a

$$K_\alpha/K_\mathrm{p} = \frac{\left(\frac{h^2}{2m_\alpha\lambda^2}\right)}{\left(\frac{h^2}{2m_\mathrm{p}\lambda^2}\right)} = \frac{m_\mathrm{p}}{m_\alpha} = \frac{1{,}0\,\mathrm{u}}{4{,}0\,\mathrm{u}}$$

$$K_\alpha/K_\mathrm{p} = \frac{1}{4} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Résoudre le problème À partir de l'équation (i), on établit l'expression du module de la vitesse :

$$v = \frac{h}{m\lambda} \ .$$

Pour les deux particules ayant la même longueur d'onde de De Broglie, on a

$$v_\alpha/v_\mathrm{p} = \frac{\left(\frac{h}{m_\alpha\lambda}\right)}{\left(\frac{h}{m_\mathrm{p}\lambda}\right)} = \frac{m_\mathrm{p}}{m_\alpha} = \frac{1{,}0\,\mathrm{u}}{4{,}0\,\mathrm{u}}$$

$$v_\alpha/v_\mathrm{p} = \frac{1}{4} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Q35 Décortiquer le problème Un électron traverse trois régions où règne un champ électrique ou magnétique dont l'orientation est connue.

a. Identifier la clé La clé consiste à déterminer le sens de variation de la vitesse à partir de la variation décrite de la longueur d'onde de De Broglie pour déduire le sens du champ électrique.

Résoudre le problème Selon l'équation 10.33 de la longueur d'onde de de Broglie, si la longueur d'onde augmente, il y a nécessairement diminution du module de la vitesse de l'électron. La vitesse étant orientée vers la droite, on devine qu'une accélération, et de là une force, agissent sur l'électron vers la gauche.

Un électron (une charge négative) subit une force en sens opposé au champ électrique. Une force vers la gauche sur l'électron implique un champ électrique orienté vers la droite.

$$\vec{\mathbf{E}}_a \text{ est orienté vers la droite.} \qquad \text{(réponse)}$$

b. Identifier la clé Comme en **a.**, la clé consiste à déterminer le sens de variation de la vitesse à partir de la variation décrite de la longueur d'onde de De Broglie pour déduire le sens du champ électrique.

Résoudre le problème Selon l'équation 10.33, si la longueur d'onde diminue, il y a nécessairement augmentation du module de la vitesse de l'électron. La vitesse étant orientée vers la droite, on devine qu'une accélération et une force agissent sur l'électron vers la droite.

Un électron subit une force en sens opposé au champ électrique. Une force vers la droite sur l'électron implique un champ électrique orienté vers la gauche.

$$\vec{\mathbf{E}}_b \text{ est orienté vers la gauche.} \qquad \text{(réponse)}$$

c. Identifier la clé La clé est le fait qu'un champ magnétique ne peut pas modifier le module de la vitesse d'une particule chargée. Il ne peut que la faire dévier. La seule accélération subie sera une accélération radiale, perpendiculaire à la vitesse. Ainsi, la vitesse ne varie pas en module.

Résoudre le problème La vitesse d'une particule chargée ayant un module constant dans un champ magnétique, la longueur d'onde de De Broglie ne sera pas modifiée, celle-ci étant donnée par $\lambda = \frac{h}{p}$.

La longueur d'onde ne change pas. (réponse)

E36 Décortiquer le problème Un photon (du domaine des rayons X) a une énergie identique à celle d'un électron en mouvement. On peut donc déterminer la longueur d'onde de De Broglie de l'électron.

Connue	Inconnue
$\lambda_{\mathrm{X}} = 4{,}06\,\mathrm{nm}$	$\lambda_{\text{é}}$

Identifier les clés La première clé est l'équation 10.33 de la longueur d'onde de De Broglie dans laquelle on remplace la quantité de mouvement par la quantité de mouvement non relativiste donnée à l'équation 10.34 :

$$\lambda_{\text{é}} = \frac{h}{p_{\text{é}}}, \qquad \text{avec} \qquad p = \sqrt{2mK_{\text{é}}}$$

$$\lambda_{\text{é}} = \frac{h}{\sqrt{2mK_{\mathrm{e}}}}$$

$$K_{\text{é}} = \frac{h^2}{2m\lambda_{\text{é}}^2}\ . \tag{i}$$

La deuxième clé est le calcul de l'énergie du photon de longueur d'onde connue à l'aide de l'équation 10.1 :

$$E_{\mathrm{X}} = \frac{hc}{\lambda_{\mathrm{X}}}\ . \tag{ii}$$

Résoudre le problème Les équations (i) et (ii) définissent des énergies qu'on dit égales. On peut alors calculer la longueur d'onde de De Broglie de l'électron :

$$K_{\text{é}} = E_{\mathrm{X}}$$

$$\frac{h^2}{2m\lambda_{\text{é}}^2} = \frac{hc}{\lambda_{\mathrm{X}}}$$

$$\lambda_{\text{é}} = \sqrt{\frac{h\lambda_{\mathrm{X}}}{2\,mc}} = \sqrt{\frac{hc\lambda_{\mathrm{X}}}{2\,mc^2}} = \sqrt{\frac{(1\,240\,\mathrm{eV\cdot nm}) \times (4{,}06\,\mathrm{nm})}{2 \times \left(511 \times 10^3\,\mathrm{eV}\right)}} = 0{,}070\,19\,\mathrm{nm}$$

$$\lambda_{\text{é}} = 70{,}2\,\mathrm{pm}\ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est correct pour un électron.

E37 Décortiquer le problème Un électron en mouvement est freiné par une différence de potentiel. La longueur d'onde de De Broglie de cet électron permet de déterminer sa vitesse et, de là, la différence de potentiel requise pour l'immobiliser.

Connue	Inconnue
$\lambda_{\text{é}} = 100\,\mathrm{pm}$	ΔV

Identifier la clé La clé consiste à déterminer la vitesse initiale de l'électron à partir de sa longueur d'onde de De Broglie, à l'aide de l'équation 10.33 dans laquelle on remplace la quantité de mouvement par la quantité de mouvement non relativiste donnée à l'équation 10.34 :

$$\lambda_{\text{é}} = \frac{h}{p_{\text{é}}}, \qquad \text{avec} \qquad p = mv$$

$$\lambda_{\text{é}} = \frac{h}{mv} \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{h}{m\lambda_{\text{é}}}\ . \tag{i}$$

Résoudre le problème

$$v = \frac{6{,}626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}}{\left(9{,}109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}\right) \times \left(100 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}\right)} = 7{,}274 \times 10^{6}\,\mathrm{m/s}$$

Cette vitesse étant largement inférieure à la vitesse de la lumière, on confirme que l'effet relativiste de sa vitesse n'était pas à considérer.
On cherche la différence de potentiel qui immobiliserait l'électron à la vitesse trouvée. Selon l'équation 4.12 du tome 2 et en considérant la charge négative de l'électron, on trouve

$$\begin{aligned} \Delta K &= -q\Delta V \\ 0 - K_{\mathrm{i}} &= e\Delta V \ . \end{aligned}$$

La grandeur du potentiel est donc donnée par

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{-K_{\mathrm{i}}}{e} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{e} = \frac{mv^2}{2e} \\ &= \frac{-\left(9{,}109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}\right) \times \left(7{,}274 \times 10^{6}\,\mathrm{m/s}\right)^2}{2 \times \left(1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}\right)} = -150{,}4\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

La grandeur de la différence de potentiel requise est la valeur absolue de ce résultat :

$$\Delta V = 150\,\mathrm{V} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La valeur de potentiel trouvée est plausible.

E38 **Décortiquer le problème** L'effet photoélectrique propulse des électrons à une certaine vitesse. Ces électrons ont donc une longueur d'onde de De Broglie correspondante. L'énergie de l'électron n'est pas très élevée ; on est donc déjà certain qu'il n'est pas nécessaire de considérer des effets relativistes.

Connue	Inconnue
$K_{\text{é}} = 17{,}0\,\mathrm{eV}$	$\lambda_{\text{é}}$

Identifier la clé La clé est l'équation 10.33 de la longueur d'onde de De Broglie dans laquelle on insère l'expression de la quantité de mouvement non relativiste :

$$\lambda_{\text{é}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mK}} \ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème On peut modifier légèrement l'équation (i) pour faciliter le traitement des unités :

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{é}} &= \frac{hc}{\sqrt{2mc^2K}} \\ &= \frac{1\,240\,\mathrm{eV \cdot nm}}{\sqrt{2 \times \left(511 \times 10^{3}\,\mathrm{eV}\right) \times (17{,}0\,\mathrm{eV})}} \\ \lambda_{\text{é}} &= 0{,}297\,\mathrm{nm} \ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est correct pour un électron.

E39 **Décortiquer le problème** Des protons dans un accélérateur de particules peuvent être accélérés jusqu'à une très haute énergie cinétique, donc forcément à une vitesse qui implique les effets relativistes.

Connues		Inconnue
$K_{\mathrm{p}} = 3{,}5\,\mathrm{TeV}$	$hc = 1\,240\,\mathrm{eV \cdot nm}$	λ_{p}
$m_{\mathrm{p}} = 1{,}007\,3\,\mathrm{u}$	$\mathrm{u} = 931{,}5\,\mathrm{MeV}/c^2$	

Identifier la clé La clé est l'équation 10.33 de la longueur d'onde de De Broglie dans laquelle on insère l'expression de la quantité de mouvement relativiste :

$$\lambda = \frac{h}{p}, \qquad \text{avec} \qquad p = \gamma m v = \frac{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}{c}$$

$$\lambda_{\mathrm{p}} = \frac{hc}{\sqrt{E^2 - m^2c^4}} = \frac{hc}{\sqrt{E^2 - (mc^2)^2}} \ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème Pour un proton, l'énergie E indiquée à l'équation (i) est l'énergie totale $E = mc^2 + K$. Cet ajout donne une nouvelle équation de la longueur d'onde λ_{p} :

$$\lambda_{\mathrm{p}} = \frac{hc}{\sqrt{(mc^2 + K)^2 - (mc^2)^2}} \ .$$

On peut alors calculer la longueur d'onde :

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathrm{p}} &= \frac{1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}{\sqrt{\left(\left(1{,}007\,3 \times 931{,}5 \times 10^{6}\,\mathrm{eV}/c^2\right)c^2 + \left(3{,}5 \times 10^{12}\,\mathrm{eV}\right)\right)^2 - \left(\left(1{,}007\,3 \times 931{,}5 \times 10^{6}\,\mathrm{eV}/c^2\right)c^2\right)^2}} \\ &= 3{,}54 \times 10^{-10}\,\mathrm{nm} \\ \lambda_{\mathrm{p}} &= 0{,}35 \times 10^{-18}\,\mathrm{m} = 0{,}35\,\mathrm{am} \ . \qquad \text{(réponse)}\end{aligned}$$

Valider la réponse Le symbole « am » représente des attomètres, « atto » étant le préfixe, rarement utilisé, qui représente le facteur 10^{-18}. La très haute énergie des protons entraîne une longueur d'onde très petite pour les protons. On peut effectivement imaginer que le LHC est un lieu où des quantités extrêmes sont observées.

P40 **Décortiquer le problème** On compare les énergies d'un électron et d'un photon pour différentes valeurs communes de longueurs d'onde. Puisque les longueurs d'onde suggérées atteignent $1\,\mathrm{fm} = 10^{-15}$ m, on considère l'effet relativiste dans le calcul des rapports recherchés.

Connues		Inconnue
$\lambda_{\mathrm{a}} = 1{,}00\,\mathrm{nm}$	$mc^2 = 511\,\mathrm{keV}$	$\dfrac{E_\gamma}{K_{\text{é}}}$
$\lambda_{\mathrm{b}} = 1{,}00\,\mathrm{pm}$	$hc = 1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}$	
$\lambda_{\mathrm{c}} = 1{,}00\,\mathrm{fm}$		

Identifier les clés La première clé est l'équation 10.1 de l'énergie d'un photon :

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda_\gamma} \ . \qquad \text{(i)}$$

La deuxième clé est l'union des équations 10.33 et 10.35 permettant d'exprimer la longueur d'onde de De Broglie pour un électron ayant une vitesse relativiste :

$$\lambda_{\text{é}} = \frac{h}{p}, \qquad \text{avec} \qquad p = \gamma m v = \frac{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}{c}$$

$$\lambda_{\text{é}} = \frac{hc}{\sqrt{E^2 - m^2c^4}} \ . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème Pour l'électron, l'énergie E indiquée à l'équation (ii) est l'énergie totale $E = mc^2 + K$. Cet ajout à l'équation (ii) donne une nouvelle équation dans laquelle on peut isoler l'énergie cinétique K :

$$\begin{aligned}
\lambda_{é} &= \frac{hc}{\sqrt{\left(mc^2+K\right)^2 - m^2c^4}} \\
\left(mc^2+K\right)^2 - m^2c^4 &= \left(\frac{hc}{\lambda_{é}}\right)^2 \\
K &= \sqrt{\left(\frac{hc}{\lambda_{é}}\right)^2 + (mc^2)^2} - mc^2 \ . \qquad \text{(iii)}
\end{aligned}$$

Les équations (i) et (iii) permettent d'établir une expression unique du rapport $\frac{E_\gamma}{K_{é}}$:

$$\frac{E_\gamma}{K_{é}} = \frac{\left(\frac{hc}{\lambda_\gamma}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{hc}{\lambda_{é}}\right)^2 + (mc^2)^2} - mc^2\right)} \ .$$

On peut finalement utiliser cette équation avec les trois valeurs de longueur d'onde suggérées.

a. Avec $\lambda\gamma = \lambda_{é} = 1{,}00\,\text{nm}$:

$$\frac{E_\gamma}{K_{é}} = \frac{\left(\frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{1{,}00\,\text{nm}}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{1{,}00\,\text{nm}}\right)^2 + \left(511\times10^3\,\text{eV}\right)^2} - 511\times10^3\,\text{eV}\right)} = 824{,}19$$

$$\frac{E_\gamma}{K_{é}} = 824 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Avec $\lambda\gamma = \lambda_{é} = 1{,}00\,\text{pm} = 1{,}00\times10^{-3}\,\text{nm}$:

$$\frac{E_\gamma}{K_{é}} = \frac{\left(\frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{1{,}00\times10^{-3}\,\text{nm}}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{1{,}00\times10^{-3}\,\text{nm}}\right)^2 + \left(511\times10^3\,\text{eV}\right)^2} - 511\times10^3\,\text{eV}\right)} = 1{,}493\,7$$

$$\frac{E_\gamma}{K_{é}} = 1{,}49 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. Avec $\lambda\gamma = \lambda_{é} = 1{,}00\,\text{fm} = 1{,}00\times10^{-6}\,\text{nm}$:

$$\frac{E_\gamma}{K_{é}} = \frac{\left(\frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{1{,}00\times10^{-6}\,\text{nm}}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{1{,}00\times10^{-6}\,\text{nm}}\right)^2 + \left(511\times10^3\,\text{eV}\right)^2} - 511\times10^3\,\text{eV}\right)} = 1{,}000\,4$$

$$\frac{E_\gamma}{K_{é}} = 1{,}00 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Les rapports trouvés sont plausibles. On observe que plus la longueur d'onde de De Broglie est faible pour une particule, plus son énergie se rapproche de celle d'un photon de même longueur d'onde.

P41 **Décortiquer le problème** Un électron propulsé par l'effet Compton acquiert une certaine vitesse. On peut alors lui associer une certaine longueur d'onde.

Connues	Inconnues
$\lambda_\gamma = 60{,}0\,\text{pm}$	$\theta\gamma$
$\lambda'_\gamma = 63{,}0\,\text{pm}$	$\lambda_{é}$

a. Identifier la clé La clé est l'équation 10.24 du décalage de Compton :

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}\left(1 - \cos\theta\right) \ . \tag{i}$$

Résoudre le problème On calcule d'abord le décalage de Compton :

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 63{,}0\,\text{pm} - 60{,}0\,\text{pm} = 3{,}0\,\text{pm} \ . \tag{ii}$$

En transformant légèrement l'équation (i), on peut simplifier le traitement des unités :

$$\theta = \arccos\left(1 - \frac{mc^2\Delta\lambda}{hc}\right) = \arccos\left(1 - \frac{\left(511 \times 10^3\,\text{eV}\right) \times 0{,}003\,0\,\text{nm}}{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}\right)$$

$$\theta = 103{,}7^\circ \ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'angle de diffusion du photon est évidemment compris entre 0° et 180°. Le photon peut voir la composante de sa vitesse finale qui est parallèle à sa vitesse initiale inversée.

b. Identifier les clés La première clé consiste à déterminer au préalable l'énergie cinétique de l'électron diffusé par l'effet Compton à l'aide de l'équation 10.27 :

$$K = \frac{hc\,\Delta\lambda}{\lambda\left(\lambda + \Delta\lambda\right)} \ . \tag{iii}$$

La deuxième clé est l'équation 10.33 de la longueur d'onde de De Broglie pour une particule, qui exprime la quantité de mouvement en fonction de l'énergie cinétique non relativiste :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2K}} \ . \tag{iv}$$

Résoudre le problème On procède d'abord au calcul de l'énergie cinétique de l'électron à l'aide de l'équation (iii), $\Delta\lambda$ ayant été évalué en **a.** à la ligne (ii) :

$$K = \frac{(1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}) \times (0{,}003\,0\,\text{nm})}{(0{,}060\,0\,\text{nm}) \times (0{,}060\,0\,\text{nm} + 0{,}003\,0\,\text{nm})} = 984{,}13\,\text{eV} \ .$$

Cette valeur peut être insérée dans l'équation (iv) pour calculer finalement la longueur d'onde de l'électron :

$$\lambda = \frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{\sqrt{2 \times \left(511 \times 10^3\,\text{eV}\right) \times (984{,}13\,\text{eV})}} = 0{,}039\,1\,\text{nm}$$

$$\lambda_é = 39\,\text{pm} \ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est correct pour l'électron.

R42 Décortiquer le problème Un électron est accéléré par une différence de potentiel de 150 V. Cette valeur n'étant pas très élevée, on constate qu'il ne sera pas nécessaire de considérer une vitesse relativiste.

Connues		Inconnues
$\Delta V = 150\,\text{V}$	$L = 1{,}80\,\text{m}$	$\lambda_é$
$\Delta y_{\text{franges}} = 180\,\mu\text{m}$	$m_é = 0{,}000\,549\,\text{u}$	d
$1\,\text{u} = 931{,}5\,\text{MeV}/c^2$		

a. Identifier les clés La première clé est l'équation 4.12 du tome 2, qui permet de calculer l'énergie cinétique de l'électron accéléré par la différence de potentiel indiquée. En considérant la charge négative de l'électron, on trouve

$$\begin{aligned} \Delta K &= -q\Delta V \\ K - 0 &= e\Delta V \ . \end{aligned} \tag{i}$$

La deuxième clé est l'équation 10.33 de la longueur d'onde de De Broglie dans laquelle on insère l'expression de la quantité de mouvement non relativiste :

$$\lambda_{\text{é}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2K}} \ . \tag{ii}$$

Résoudre le problème L'insertion dans l'équation (ii) de l'expression de l'énergie cinétique de l'équation (i) donne

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{é}} &= \frac{hc}{\sqrt{2mc^2e\Delta V}} \\ &= \frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{\sqrt{2\times\left(511\times10^3\,\text{eV}\right)\times e\,(150\,\text{V})}} = 0{,}100\,1\,\text{nm} \\ \lambda_{\text{é}} &= 0{,}100\,\text{nm} \ . \end{aligned} \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est plausible pour un électron.

b. Identifier la clé La clé est l'équation 7.21 qui relie la distance entre deux franges consécutives à la distance entre les fentes :

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{\lambda L}{d} \\ d &= \frac{\lambda L}{\Delta y} \ . \end{aligned} \tag{iii}$$

Résoudre le problème

$$\begin{aligned} d &= \frac{0{,}100\times10^{-9}\,\text{m}\times1{,}80\,\text{m}}{180\times10^{-6}\,\text{m}} = 1{,}001\times10^{-6}\,\text{m} \\ d &= 1{,}00\,\mu\text{m} \ . \end{aligned} \tag{réponse}$$

Valider la réponse La distance trouvée est réaliste pour deux fentes dans l'expérience de Young.

R43 Décortiquer le problème Des neutrons se déplacent à une vitesse non relativiste et produisent de la diffraction en traversant une fente.

Connues		Inconnues
$v_n = 2{,}40\,\text{km/s}$	$m_n = 1{,}008\,7\,\text{u}$	λ_n
$a = 1{,}20\,\mu\text{m}$	$L = 2{,}00\,\text{m}$	$y_1 - y_{-1}$
$c^2 = 931{,}5\,\text{MeV/u}$		

a. Identifier les clés La première clé est l'équation 10.33 de la longueur d'onde de De Broglie dans laquelle on insère l'expression de la quantité de mouvement non relativiste :

$$\lambda_n = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \ . \tag{i}$$

Résoudre le problème

$$\lambda_{\mathrm{n}} = \frac{h}{mv} = \frac{6{,}626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}}{\left(1{,}675 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}\right) \times (2\,400\,\mathrm{m/s})} = 1{,}648 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$$

$$\lambda_{\mathrm{n}} = 0{,}165\,\mathrm{nm} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est plausible.

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que la largeur du pic central de diffraction est la distance entre les minimums d'ordre 1 et d'ordre −1. Les équations 8.1 et 8.5 permettent de trouver la position des minimums :

$$\tan\theta = \frac{y}{L} \qquad \text{et} \qquad a\sin\theta = p\lambda\ .$$

L'approximation des petits angles est valide pour les premiers ordres lorsque $\lambda <<< a$. Ainsi,

$$\frac{y}{L} = \tan\theta \approx \sin\theta = \frac{p\lambda}{a}$$

$$y = \frac{pL\lambda}{a}\ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème On peut calculer la position du minimum d'ordre $p = 1$ à l'aide de l'équation (i) :

$$y_1 = \frac{1 \times (2{,}00\,\mathrm{m}) \times \left(0{,}165 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}\right)}{1{,}20 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}} = 2{,}747 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}\ .$$

Puisque la figure de diffraction est symétrique, le minimum d'ordre $p = -1$ est à la même distance de l'autre côté du centre. Ainsi, la largeur du pic central est le double de la valeur y_1 :

$$\Delta y_{1,-1} = 2y_1 = 2 \times 2{,}747 \times 10^{-4}\,\mathrm{m} = 5{,}494 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}$$

$$\Delta y_{1,-1} = 549\,\mu\mathrm{m}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Le pic central de la figure de diffraction a une largeur d'environ un demi-millimètre. C'est très mince, mais pour une longueur d'onde beaucoup plus petite que les longueurs d'onde visibles, cette valeur est plausible.

E44 **Décortiquer le problème** Une mesure de la vitesse d'une particule possède une incertitude connue, ce qui permet de connaître l'incertitude sur la position de la particule. On considère que la vitesse et son incertitude sont orientées selon l'axe des x.

Connues	Inconnue
$\Delta v = 5{,}8 \times 10^5\,\mathrm{m/s}$	Δx_{min}
$m_{\mathrm{p}} = 1{,}673 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 10.36 du principe d'incertitude sur la position :

$$\Delta x\,\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}\ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème Dans l'équation (i), on remplace l'incertitude sur la quantité de mouvement Δp par $m\,\Delta v$ pour pouvoir calculer Δx :

$$\Delta x\, m\, \Delta v \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2m\, \Delta v}$$

$$\Delta x_{\min} = \frac{\hbar}{2m\, \Delta v} = \frac{1{,}055 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}{2 \times \left(1{,}673 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}\right) \times \left(5{,}8 \times 10^{5}\,\mathrm{m/s}\right)} = 5{,}436 \times 10^{-14}\,\mathrm{m}$$

$$\Delta x_{\min} = 54\,\mathrm{fm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'incertitude minimale trouvée est très faible, mais c'est bien un ordre de grandeur correct pour l'incertitude sur la position d'une particule.

E45 **Décortiquer le problème** L'incertitude sur la position d'un électron est assimilée au rayon d'un atome d'hydrogène.

Connue	Inconnue
$r = 53\,\mathrm{pm}$	Δv

Identifier la clé La clé est l'équation 10.36 du principe d'incertitude sur la position :

$$\Delta x\, \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}\ .$$

On doit remplacer l'incertitude sur la quantité de mouvement Δp par $m\,\Delta v$ pour faire apparaître dans l'équation l'incertitude à évaluer, Δv :

$$\Delta x\, m\, \Delta v \geq \frac{\hbar}{2}\ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème Il ne reste qu'à isoler Δv dans l'équation (i) pour procéder au calcul :

$$\Delta v \geq \frac{\hbar}{2m\, \Delta x}$$

$$\Delta v \geq \frac{1{,}055 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}{2 \times \left(9{,}109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}\right) \times \left(53 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}\right)} = 1{,}09 \times 10^{6}\,\mathrm{m/s}$$

$$\Delta v \geq 1{,}1 \times 10^{6}\,\mathrm{m/s} = 0{,}003\,6\, c\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'incertitude trouvée pour la vitesse est plausible, cette valeur étant de loin inférieure à c.

E46 **Décortiquer le problème** Le principe d'incertitude d'Heisenberg permet de relier l'incertitude sur une mesure de temps à une incertitude sur une quantité d'énergie.

Connue	Inconnue
$\Delta t = 25\,\mathrm{ns}$	$\Delta E_{\min}$

Identifier la clé La clé est l'équation 10.36 du principe d'incertitude appliqué au temps et à l'énergie :

$$\Delta E\, \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t}\ .$$

Résoudre le problème Pour trouver la valeur minimale d'incertitude sur l'énergie, on peut remplacer l'inégalité par une égalité :

$$\Delta E_{\min} = \frac{1{,}055 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}{2 \times \left(25 \times 10^{-9}\,\mathrm{s}\right) \times \left(1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J/eV}\right)} = 1{,}317 \times 10^{-8}\,\mathrm{eV}$$

$$\Delta E_{\min} = 13 \times 10^{-9}\,\mathrm{eV}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'incertitude trouvée sur l'énergie est très faible, mais est plausible vu l'incertitude très faible également sur la mesure de temps.

Physique 3 Ondes, optique et physique moderne - 1re édition

Chapitre 11 La mécanique quantique

Q1 **Décortiquer le problème** Une figure montre la fonction d'onde d'une particule, à partir de laquelle on peut déterminer la probabilité de trouver la particule à chaque point.

Identifier la clé La clé est l'équation 11.1 qui établit le lien entre la fonction d'onde et la probabilité de retrouver la particule en un point :

$$P(\text{entre } x \text{ et } x + \mathrm{d}x) = |\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x \ .$$

Résoudre le problème L'équation 11.1 indique que la probabilité de trouver une particule à une position x est donnée par le carré de la fonction d'onde à cette position. Il faut donc établir l'ordre décroissant des valeurs absolues des valeurs $|\psi(x)|$:

$$|\psi(x_{\text{iii}})| < |\psi(x_{\text{i}})| < |\psi(x_{\text{ii}})| < |\psi(x_{\text{iv}})| \ .$$

Les quatre points, par ordre croissant de probabilité de présence, sont donc

$$\text{(iii)} < \text{(i)} < \text{(ii)} < \text{(vi)} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Q2 **Décortiquer le problème** On donne un graphique de la fonction d'onde d'un électron. À partir de l'information qu'on y trouve, on peut construire le graphique de la densité de probabilité.

Identifier la clé La clé est l'équation 11.1 selon laquelle la valeur de la densité de probabilité en un point est le carré de la fonction d'onde au même endroit :

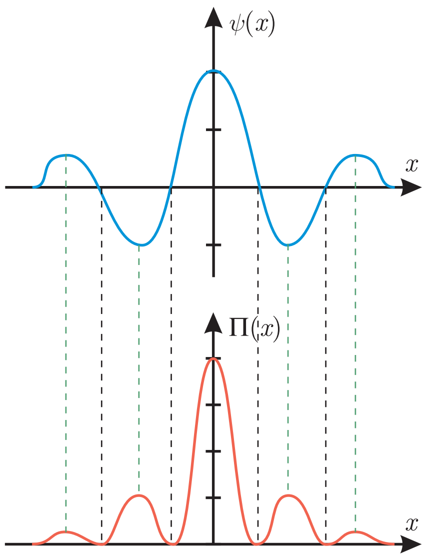
$$P(\text{entre } x \text{ et } x + \mathrm{d}x) = |\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x \ .$$

Illustrer la situation La figure ci-contre montre la fonction d'onde illustrée avec l'énoncé. En dessous, on aperçoit la courbe de la densité de probabilité.

Résoudre le problème Sur la figure, on voit que vis-à-vis chaque point où la fonction d'onde est nulle, son carré est nul également (*voir les pointillés noirs*).

Ensuite, là où la fonction d'onde montre un extremum (sommet ou creux), la densité de probabilité comporte un sommet positif, le carré de toute valeur étant positif (*voir les pointillés verts*).

Finalement, même si on ne considère que l'aspect qualitatif de la courbe de densité de probabilité, il demeure possible de respecter les hauteurs relatives des sommets. Deux points dont les valeurs de la fonction d'onde diffèrent d'un facteur 2 présentent des densités de probabilité qui diffèrent d'un facteur $2^2 = 4$, ce qui est visuellement respecté sur la courbe $\Pi(x)$.



La courbe $\Pi(x)$ illustrée en rouge sur la figure ci-dessus correspond à la fonction d'onde $\Psi(x)$. (réponse)

E3 **Décortiquer le problème** On doit démontrer que pour un nombre réel Φ, $\cos\Phi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}}{2}$ et $\sin\Phi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}}{2\mathrm{i}}$.

a. Identifier la clé La clé est l'équation 11.11 (la formule d'Euler) qui permet d'exprimer un nombre complexe à partir d'une fonction exponentielle :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \ .$$

Résoudre le problème On veut trouver la partie réelle à partir de l'équation (i). Pour éliminer la partie imaginaire, il faut additionner le complexe conjugué :

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi} = \cos(\Phi) - \mathrm{i}\,\sin(\phi)\ .$$

On a donc

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi} = (\cos\Phi + \mathrm{i}\,\sin\Phi) + (\cos\Phi - \mathrm{i}\,\sin\Phi) = 2\cos(\Phi)\ ,$$

d'où

$$\cos(\Phi) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}}{2}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Identifier la clé La clé est à nouveau l'équation 11.11.

Résoudre le problème On veut cette fois-ci conserver la partie imaginaire à partir de l'équation (i). Il faut soustraire le complexe conjugué $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}$:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi} = (\cos\Phi + \mathrm{i}\,\sin\Phi) - (\cos\Phi - \mathrm{i}\,\sin\Phi) = 2\mathrm{i}\sin(\Phi)\ ,$$

d'où

$$\sin(\Phi) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}}{2\mathrm{i}}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

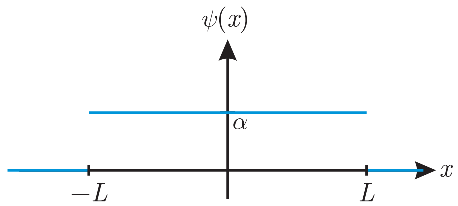
E4 Décortiquer le problème La fonction d'onde d'un électron est donnée. On peut donc évaluer divers paramètres concernant les probabilités de présence d'un électron à différents endroits.

Connue	Inconnues
$\psi(x) = \begin{cases} \alpha & (-L < x < L) \\ 0 & \text{(ailleurs)} \end{cases}$	Graphique $\psi(x)$
	α
	Π entre $x = 0$ et $x = L/2$

a. Identifier la clé La clé est la fonction d'onde de l'exercice, qui tient compte des différents domaines pour lesquels les valeurs de $\psi(x)$ sont données.

Résoudre le problème La fonction d'onde indique une valeur constante α entre $-L$ et L. Ainsi, on a un plateau à $\psi(x) = \alpha$ dans la courbe à tracer. La valeur est nulle partout ailleurs.

Le graphique de $\psi(x)$ est illustré ci-dessous. La fonction $\Psi(x)$ est égale à α entre $-L$ et L, et zéro ailleurs.



(réponse)

b. Identifier la clé La clé est l'équation 11.14 selon laquelle la somme des probabilités est égale à 1 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\ \mathrm{d}x = 1\ .$$

Résoudre le problème La fonction d'onde traitée est nulle en dehors du domaine $-L < x < L$. L'intégrale à résoudre se limite donc à la suivante :

$$\int_{-L}^{L} |\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 1$$

$$\int_{-L}^{L} \alpha^2 \, \mathrm{d}x = \alpha^2 \, [x]|_{-L}^{L} = 1$$

$$\alpha^2 (L - (-L)) = 2\alpha^2 L = 1$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2L}} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse On ne peut pas évaluer la valeur α concrètement pour déterminer sa validité, sinon en confirmant que $\alpha^2 \times (2L) = 1$, puisque la zone où $\Pi(x)$ a une valeur non nulle délimite un rectangle de hauteur α^2 et de largeur $L - (-L) = 2L$.

c. Identifier la clé La clé est l'équation 11.13 dans laquelle on résout l'intégrale entre 0 et $L/2$:

$$P(\text{entre } x_1 \text{ et } x_2) = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x \ .$$

Résoudre le problème La valeur du paramètre α étant connue, on peut trouver une valeur numérique de l'intégrale à résoudre :

$$P(\text{entre } 0 \text{ et } L/2) = \int_{0}^{L/2} |\alpha|^2 \, \mathrm{d}x$$

$$P = \alpha^2 \int_{-0}^{L/2} \mathrm{d}x$$

$$P = \left(\sqrt{\frac{1}{2L}}\right)^2 |x|_0^{L/2}$$

$$P = \frac{1}{2L} (L/2 - 0)$$

$$P = \frac{1}{2L} (L/2)$$

$$P = \frac{1}{4} = 0{,}250 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La probabilité trouvée est plausible, étant comprise entre 0 et 1.

P5 Décortiquer le problème La fonction d'onde d'un électron est donnée. On peut donc évaluer divers paramètres concernant les probabilités de présence d'un électron à différents endroits.

Connue	Inconnues
$\psi(x) = \begin{cases} \beta\left(\frac{L}{2} - \left|x - \frac{L}{2}\right|\right) & (0 \leq x \leq L) \\ 0 & (\text{ailleurs}) \end{cases}$	α Π entre $x = L/4$ et $x = 3L/4$ Graphique de $\Pi(x)$

a. Identifier les clés La première clé est l'équation 11.14 selon laquelle la somme des probabilités est égale à 1 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 1 \ . \qquad \text{(i)}$$

La deuxième clé est la séparation du domaine $0 \leq x \leq L$ en deux en raison du terme en valeur absolue dans la valeur de $\psi(x)$. C'est à $x = L/2$ que le comportement de $\psi(x)$ change. Pour $0 \leq x \leq L/2$, la fonction d'onde peut être remplacée :

$$\beta\left(\frac{L}{2} - \left(-\left(x - \frac{L}{2}\right)\right)\right) = \beta\left(\frac{L}{2} + \left(x - \frac{L}{2}\right)\right) = \beta x \ .$$

Au-delà de $x = L/2$, pour $0 \leq x \leq L/2$, la fonction est

$$\beta\left(\frac{L}{2} - \left(x - \frac{L}{2}\right)\right) = -\beta x \ .$$

Ainsi, la valeur de $\psi(x)$ devient

$$\psi(x) = \begin{cases} \beta x & (0 \leq x \leq L/2) \\ \beta\,(L - x) & (L/2 \leq x \leq L) \\ 0 & (\text{ailleurs}) \ . \end{cases} \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème La fonction d'onde traitée est nulle en dehors du domaine $0 < x < L/2$. L'intégrale à résoudre selon l'équation (ii) se divise en deux intégrales selon la deuxième clé :

$$\int_0^L |\psi(x)|^2 \ \mathrm{d}x = \int_0^{L/2} |\psi(x)|^2 \ \mathrm{d}x + \int_{L/2}^{L} |\psi(x)|^2 \ \mathrm{d}x = 1$$

$$\int_0^{L/2} (\beta x)^2 \ \mathrm{d}x + \int_{L/2}^{L} (\beta\,(L - x))^2 \ \mathrm{d}x = 1 \ .$$

On subdivise la deuxième intégrale en trois intégrales en développant le terme $(L - x) = \left(L^2 - 2Lx + x^2\right)$:

$$\beta^2 \int_0^{L/2} (x)^2 \ \mathrm{d}x + \beta^2 \int_{L/2}^{L} L^2 \ \mathrm{d}x - 2\beta^2 \int_{L/2}^{L} Lx \ \mathrm{d}x + \beta^2 \int_{L/2}^{L} x^2 \ \mathrm{d}x = 1$$

$$\beta^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^{L/2} + \beta^2 \left[L^2 x\right]\Big|_{L/2}^{L} - 2\beta^2 \left[\frac{Lx^2}{2}\right]\Bigg|_{L/2}^{L} + \beta^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{L/2}^{L} = 1$$

$$\beta^2 \left(\frac{(L/2)^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) + \beta^2 \Big(L^2 L - L^2\,(L/2)\Big) - 2\beta^2 \left(\frac{LL^2}{2} - \frac{L\,(L/2)^2}{2}\right) + \beta^2 \left(\frac{L^3}{3} - \frac{(L/2)^3}{3}\right) = 1$$

$$\beta^2 \left(\frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{2} - \frac{3L^3}{4} + \frac{7L^3}{24}\right) = 1$$

$$\frac{\beta^2 L^3}{12} = 1$$

$$\beta = \sqrt{\frac{12}{L^3}} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse On ne peut pas évaluer la valeur β concrètement pour déterminer sa validité.

b. **Identifier les clés** La première clé est l'équation 11.13 dans laquelle on résout l'intégrale entre $L/4$ et $3L/4$:

$$P(\text{entre } x_1 \text{ et } x_2) = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 \ \mathrm{d}x \ .$$

La deuxième clé est la séparation de l'intégrale en deux, de part et d'autre de la valeur $x = L/2$ où le comportement de $\psi(x)$ change (l'équation (ii) définit deux zones distinctes).

Résoudre le problème La valeur du paramètre β étant connue, on peut trouver une valeur numérique de l'intégrale à résoudre :

$$P(\text{entre } 3L/4 \text{ et } 3L/4) = \int_{L/4}^{3L/4} |\psi(x)|^2 \ \mathrm{d}x$$

$$P = \int_{L/4}^{L/2} (\beta x)^2 \, \mathrm{d}x + \int_{L/2}^{3L/4} (\beta (L - x))^2 \, \mathrm{d}x$$

$$P = \beta^2 \int_{L/4}^{L/2} (x)^2 \, \mathrm{d}x + \beta^2 \int_{L/2}^{3L/4} L^2 \, \mathrm{d}x - 2\beta^2 \int_{L/2}^{3L/4} Lx \, \mathrm{d}x + \beta^2 \int_{L/2}^{3L/4} x^2 \, \mathrm{d}x$$

$$P = \beta^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{L/4}^{L/2} + \beta^2 \left[L^2 x\right]\Big|_{L/2}^{3L/4} - 2\beta^2 \left[\frac{Lx^2}{2}\right]\Bigg|_{L/2}^{3L/4} + \beta^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{L/2}^{3L/4}$$

$$P = \beta^2 \left(\frac{(L/2)^3}{3} - \frac{(L/4)^3}{3}\right) + \beta^2 \Big(L^2 (3L/4) - L^2 (L/2)\Big) - 2\beta^2 \left(\frac{L (3L/4)^2}{2} - \frac{L (L/2)^2}{2}\right)$$
$$+ \beta^2 \left(\frac{(3L/4)^3}{3} - \frac{(L/2)^3}{3}\right)$$

$$P = \beta^2 L^3 \left(\frac{7}{192} + \frac{1}{4} - \frac{5}{16} + \frac{19}{192}\right)$$

$$P = \left(\sqrt{\frac{12}{L^3}}\right)^2 L^3 \left(\frac{7}{192} + \frac{1}{2} - \frac{5}{16} + \frac{19}{192}\right)$$

$$P = \frac{12}{L^3} L^3 \left(\frac{7}{96}\right)$$

$$P = \frac{7}{8} = 0{,}875 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La probabilité trouvée est plausible, comprise entre 0 et 1.

c. Identifier les clés La première clé est l'équation 11.2 de la densité de probabilité $\Pi(x)$:

$$\Pi(x) = |\psi(x)|^2 \ .$$

La deuxième clé est la fonction de probabilité (i) donnée en **a.**, dans laquelle la fonction d'onde a un comportement différent de part et d'autre de $x = L/2$:

$$\psi(x) = \begin{cases} \beta x & (0 \leq x \leq L/2) \\ \beta (L - x) & (L/2 \leq x \leq L) \\ 0 & \text{(ailleurs)} \ . \end{cases}$$

Résoudre le problème L'expression de la densité de probabilité aura également une forme différente de part et d'autre de $x = L/2$:

$$\Pi(x) = \begin{cases} \beta^2 x^2 & (0 \leq x \leq L/2) \\ \beta^2 (L - x)^2 & (L/2 \leq x \leq L) \\ 0 & \text{(ailleurs)} \ . \end{cases}$$

Puisque $\beta = \sqrt{\frac{12}{L^3}}$, le terme β^2 peut être remplacé par $\frac{12}{L^3}$:

$$\Pi(x) = \begin{cases} \frac{12x^2}{L^3} & (0 \leq x \leq L/2) \\ \frac{12(L-x)^2}{L^3} & (L/2 \leq x \leq L) \\ 0 & \text{(ailleurs)} \ . \end{cases}$$

On peut évaluer la valeur de $\Pi(x)$ pour certains points particuliers, et ensuite identifier le type de courbe. À $x = 0$, on a

$$\Pi(x) = \frac{12 \times 0^2}{L^3} = 0 \ ,$$

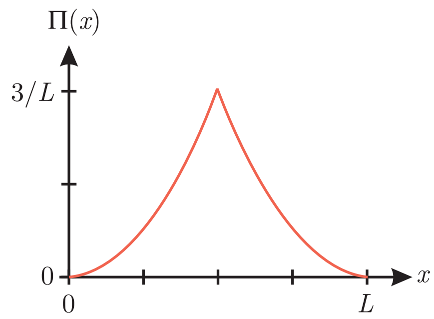
à $x = L/2$, le point frontière entre les deux sous-domaines, on a

$$\Pi(x) = \frac{12 \times (L/2)^2}{L^3} = \frac{12 \times (L - L/2)^2}{L^3} = \frac{3}{L} \ ,$$

et à $x = L$, on a

$$\Pi(x) = \frac{12 \times (L - L)^2}{L^3} = 0 \ .$$

Finalement, la forme de $\Pi(x)$ entre 0 et $L/2$ est $\frac{12x^2}{L^3}$, une branche de parabole croissante, et la forme entre $L/2$ et L est $\frac{12(L-x)^2}{L^3}$, une branche de parabole décroissante.
Le graphique de $\Pi(x)$ est illustré ci-dessous.



(réponse)

P6 Décortiquer le problème

Connue	Inconnues
$\psi(x) = \begin{cases} Ax\,\mathrm{e}^{-x/a_0} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$	A
	$x_{P_{\max}}$
	$\langle x \rangle$

a. Identifier la clé La clé est l'équation 11.14 de la condition de normalisation :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 1 \ .$$

Résoudre le problème La fonction d'onde est nulle pour $x < 0$, ce qui réduit l'intégrale à résoudre à

$$\int_{0}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 1 \ .$$

La fonction d'onde que l'on remplace dans l'intégrale contient le paramètre A à évaluer :

$$\int_{0}^{\infty} \left(Ax\,\mathrm{e}^{-x/a_0}\right)^2 \mathrm{d}x = A^2 \int_{0}^{\infty} \left(x^2\,\mathrm{e}^{-2x/a_0}\right) \mathrm{d}x = 1 \ . \qquad \text{(i)}$$

Les équations E.61 et E.76 de l'annexe E permettent d'évaluer cette intégrale. L'équation E.76 n'est applicable que pour les bornes d'intégration 0 à l'infini, mais c'est bien la situation que l'on traite. La forme de cette équation étant plus simple, on l'utilise ici :

$$\int_{0}^{\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-ax} \, \mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}} \ .$$

L'équation (i) devient alors

$$A^2 \int_{0}^{\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-(2/a_0)x} \, \mathrm{d}x = A^2 \frac{2!}{(2/a_0)^{2+1}} = 1$$

$$A^2 \frac{a_0^3}{4} = 1$$

$$A = \frac{2}{\sqrt{a_0^3}} = \frac{2}{(a_0)^{3/2}} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que la probabilité de détecter l'électron est maximale lorsque la dérivée de la densité de probabilité par rapport à la position est nulle.

Résoudre le problème Selon l'équation 11.2, la densité de probabilité est donnée par

$$\Pi(x) = |\psi(x)|^2 \ .$$

La fonction d'onde $\psi(x)$ et la constante de normalisation étant connues, on obtient

$$\begin{aligned}\Pi(x) &= \left(Ax\,\mathrm{e}^{-x/a_0}\right)^2 = \left(\frac{2}{(a_0)^{3/2}}\right)^2 x^2\,\mathrm{e}^{-2x/a_0}\\ \Pi(x) &= \frac{4}{(a_0)^3}x^2\,\mathrm{e}^{-2x/a_0} \ .\end{aligned}$$

Comme le mentionne la clé, on doit poser que la dérivée de cette densité de probabilité est égale à 0 pour déterminer la position x recherchée.

L'un des trois termes de gauche doit être égal à 0, car leur produit est égal à 0. Seule la parenthèse peut prendre cette valeur, puisque $\frac{4}{(a_0)^3}$ est une constante, et le terme exponentiel ne peut valoir 0 que lorsque x tend vers l'infini (ce qui n'est pas une solution admissible ici). On trouve donc une solution lorsque

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{4}{(a_0)^3}x^2\,\mathrm{e}^{-2x/a_0} &= 0\\ \frac{4}{(a_0)^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2\,\mathrm{e}^{-2x/a_0} &= 0\\ \frac{4}{(a_0)^3}\left(2x\,\mathrm{e}^{-2x/a_0} + x^2\left(\frac{-2}{a_0}\right)\mathrm{e}^{-2x/a_0}\right) &= 0\\ \frac{4}{(a_0)^3}\,\mathrm{e}^{-2x/a_0}\left(2x - \frac{2x^2}{a_0}\right) &= 0 \ .\end{aligned}$$

Cette équation est la forme la plus simplifiée de la dérivée obtenue. Il reste à isoler x :

$$\begin{aligned}2x - \frac{2x^2}{a_0} &= 0\\ \frac{2x^2}{a_0} &= 2x\\ x &= a_0 \ . \qquad \text{(réponse)}\end{aligned}$$

c. **Identifier la clé** La clé est l'équation 11.15 de la position moyenne de la position s :

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\,x\,\psi(x)\ \mathrm{d}x \ .$$

Résoudre le problème À nouveau, le domaine sur lequel on doit intégrer se limite à $x \geq 0$, donc

$$\begin{aligned}\langle x\rangle &= \int_0^{\infty}\left(Ax\,\mathrm{e}^{-x/a_0}\right)^2 x\ \mathrm{d}x\\ \langle x\rangle &= \int_0^{\infty}\left(A^2x^3\,\mathrm{e}^{-2x/a_0}\right)\mathrm{d}x \ . \qquad \text{(ii)}\end{aligned}$$

Comme en **a.**, l'équation E.76 de l'annexe E permet d'évaluer l'intégrale :

$$\int_0^{\infty}x^n\,\mathrm{e}^{-ax}\ \mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}} \ .$$

En l'appliquant à l'équation (ii), on a

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle &= A^2\frac{3!}{(2/a_0)^{3+1}}\\
&= \left(\frac{2}{(a_0)^{3/2}}\right)^2\frac{6}{(2/a_0)^4}\\
&= \frac{4}{(a_0)^3}\frac{6}{(16/a_0^4)}\\
\langle x\rangle &= \frac{3a_0}{2}\ . \qquad \text{(réponse)}
\end{aligned}$$

Valider la réponse Il est difficile de valider la forme des résultats obtenus en **a.**, en **b.** et en **c.**, mais il est toutefois cohérent que les dimensions des réponses en **b.** et en **c.** soient les mêmes (les dimensions du paramètre a_0).

P7 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$	E
$\omega = \sqrt{k/m}$	

a. Identifier la clé La clé consiste à insérer l'expression donnée de $\psi(x)$ dans l'équation de Schrödinger indépendante du temps, l'équation 11.23, qui est

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)\ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème L'insertion de l'expression de $\psi(x)$ dans l'équation (i) exige qu'on dérive deux fois l'expression $A\,\mathrm{e}^{-m\omega x^2/(2\hbar)}$ par rapport à x. La dérivée première est

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(A\,\mathrm{e}^{-m\omega x^2/(2\hbar)}\right)\\
&= A\left(\frac{-2m\omega x}{2\hbar}\right)\mathrm{e}^{-m\omega x^2/(2\hbar)}\\
&= A\left(\frac{-m\omega x}{\hbar}\right)\mathrm{e}^{-m\omega x^2/(2\hbar)}\ .
\end{aligned}$$

La dérivée seconde est

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A\left(\frac{-m\omega x}{\hbar}\right)\mathrm{e}^{-m\omega x^2/(2\hbar)}\\
&= A\left(\frac{-m\omega}{\hbar}\right)\mathrm{e}^{-m\omega x^2/(2\hbar)} + A\left(\frac{-m\omega x}{\hbar}\right)^2\mathrm{e}^{-m\omega x^2/(2\hbar)}\\
&= \frac{-Am\omega\,\mathrm{e}^{-m\omega x^2/(2\hbar)}}{\hbar}\left(1+\frac{-m\omega x^2}{\hbar}\right)\ .
\end{aligned}$$

En insérant cette expression, l'expression initiale de $\psi(x)$ ainsi que l'expression donnée de l'énergie potentielle du système dans l'équation (i), on trouve

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{-Am\omega\,\mathrm{e}^{-m\omega x^2/(2\hbar)}}{\hbar}\right)\left(1+\frac{-m\omega x^2}{\hbar}\right)+\left(\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\left(A\,\mathrm{e}^{-m\omega x^2/(2\hbar)}\right) = E\left(A\,\mathrm{e}^{-m\omega x^2/(2\hbar)}\right)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{-m\omega}{\hbar}\right)\left(1+\frac{-m\omega x^2}{\hbar}\right)+\left(\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)=E$$
$$\left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)\left(1+\frac{-m\omega x^2}{\hbar}\right)+\left(\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)=E$$
$$\frac{\hbar\omega}{2}-\frac{-m\omega^2x^2}{2}+\frac{-m\omega^2x^2}{2}=E$$
$$\frac{\hbar\omega}{2}=E\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La forme de l'expression trouvée est bien une énergie, donc $\psi(x) = A\,\mathrm{e}^{-m\omega x^2/(2\hbar)}$ est bien une solution de l'équation de Schrödinger.

b. **Résoudre le problème** L'expression trouvée en **a.** est une énergie, celle du système analysé :

$$E=\frac{\hbar\omega}{2}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Q8 **Décortiquer le problème** Quatre puits de potentiel infini de largeurs différentes sont illustrés. On peut établir des valeurs relatives de l'énergie d'un électron piégé dans ces puits.

Identifier la clé La clé est l'équation 11.27 de l'énergie d'une particule dans un puits de potentiel :

$$E_n=\frac{h^2}{8mL^2}n^2\ .$$

Résoudre le problème Ce qui distingue les quatre puits, c'est la largeur L du puits. Les quatre valeurs de largeur sont les suivantes :

$$L_{(\mathrm{i})}=L-0=L$$
$$L_{(\mathrm{ii})}=L-(-L)=2L$$
$$L_{(\mathrm{iii})}=L/2-0=L/2$$
$$L_{(\mathrm{iv})}=2L-0=2L\ .$$

On peut donc évaluer l'énergie pour les quatre puits :

$$E_{n,(\mathrm{i})}=\frac{h^2}{8m\,(L)^2}=\frac{h^2}{8mL^2}n^2$$
$$E_{n,(\mathrm{ii})}=\frac{h^2}{8m\,(2L)^2}=\frac{h^2}{32mL^2}n^2$$
$$E_{n,(\mathrm{iii})}=\frac{h^2}{8m\,(L/2)^2}=\frac{h^2}{2mL^2}n^2$$
$$E_{n,(\mathrm{iv})}=\frac{h^2}{8m\,(2L)^2}=\frac{h^2}{32mL^2}n^2\ .$$

a. On considère l'état fondamental, c'est-à-dire que $n = 1$ et $n^2 = 1$. Les énergies dans les quatre puits sont alors

$$E_{1,(\mathrm{i})}=\frac{h^2}{8m\,(L)^2}=\frac{h^2}{8mL^2}$$
$$E_{1,(\mathrm{ii})}=\frac{h^2}{8m\,(2L)^2}=\frac{h^2}{32mL^2}$$
$$E_{1,(\mathrm{iii})}=\frac{h^2}{8m\,(L/2)^2}=\frac{h^2}{2mL^2}$$
$$E_{1,(\mathrm{iv})}=\frac{h^2}{8m\,(2L)^2}=\frac{h^2}{32mL^2}\ .$$

L'ordre croissant des énergies est donc

$$E_{1,(\text{ii})} = E_{1,(\text{iv})} < E_{1,(\text{i})} < E_{1,(\text{iii})} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. On considère le premier état excité, c'est-à-dire le premier état supérieur à $n = 1$ soit $n = 2$. Les énergies dans les quatre puits sont alors

$$\begin{aligned} E_{2,(\text{i})} &= \frac{h^2}{8m\,(L)^2} \times 2^2 = \frac{h^2}{2mL^2} \\ E_{2,(\text{ii})} &= \frac{h^2}{8m\,(2L)^2} \times 2^2 = \frac{h^2}{8mL^2} \\ E_{2,(\text{iii})} &= \frac{h^2}{8m\,(L/2)^2} \times 2^2 = \frac{2h^2}{mL^2} \\ E_{2,(\text{iv})} &= \frac{h^2}{8m\,(2L)^2} \times 2^2 = \frac{h^2}{8mL^2} \ . \end{aligned}$$

Les quatre expressions d'énergie qu'on avait trouvées en **a.** sont multipliées par un même facteur. L'ordre croissant des énergies est donc le même :

$$E_{1,(\text{ii})} = E_{1,(\text{iv})} < E_{1,(\text{i})} < E_{1,(\text{iii})} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Q9 **Décortiquer le problème** Un proton et un électron peuvent se trouver dans des puits de potentiel de même largeur, mais leurs énergies ne seront pas égales.

Identifier la clé La clé est l'équation 11.27 de l'énergie d'une particule dans un puits de potentiel :

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2 \ . \qquad \text{(i)}$$

Cette équation contient la masse m qui distingue un proton d'un électron.

Résoudre le problème L'équation (i) doit être utilisée avec $n = 1$ puisqu'on indique pour les deux particules qu'elles sont dans leur état fondamental. La forme de l'équation permet de constater que la particule ayant la plus faible énergie est celle dont la masse est la plus grande :

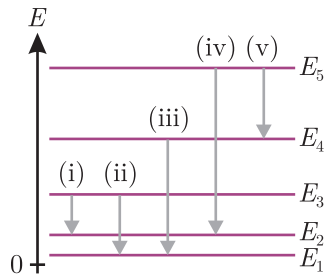
$$\frac{h^2}{8m_{\text{p}}L^2} 1^2 < \frac{h^2}{8m_{\text{é}}L^2} 1^2$$

$$E_{\text{p}} < E_{\text{é}} \ .$$

Le proton est la particule ayant la plus faible énergie. (réponse)

Valider la réponse La forme de l'équation permet de constater que le proton aura la plus faible énergie peu importe la valeur n utilisée (commune aux deux particules).

Q10 **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre le diagramme de niveaux d'énergie pour un électron dans un certain puits de potentiel infini.



Décortiquer le problème Un diagramme de niveaux d'énergie permet de visualiser la quantité d'énergie impliquée dans différentes transitions de l'électron.

Identifier la clé La clé est l'équation 11.29 qui définit le lien entre la longueur d'onde d'un photon émis lors d'une transition et la variation d'énergie entre les deux niveaux impliqués :

$$\Delta E = E_{\text{nh}} - E_{\text{nb}} = \frac{hc}{\lambda} \ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème La variation d'énergie (une perte) subie par l'électron est directement représentée par la longueur de la flèche qui représente la transition. On peut visuellement établir que l'ordre croissant des longueurs des flèches pour les cinq transitions est

$$\text{(i)} < \text{(ii)} < \text{(v)} < \text{(iii)} < \text{(iv)} \ .$$

L'énergie dégagée est proportionnelle à la longueur de ces flèches :

$$E_{(\mathrm{i})} < E_{(\mathrm{ii})} < E_{(\mathrm{v})} < E_{(\mathrm{iii})} < E_{(\mathrm{iv})} \ ,$$

et l'équation (i) montre que la longueur d'onde du photon émis est inversement proportionnelle à l'énergie émise. L'ordre croissant des longueurs d'onde des photons émis est donc

$$\lambda_{(\mathrm{iv})} < \lambda_{(\mathrm{iii})} < \lambda_{(\mathrm{v})} < \lambda_{(\mathrm{ii})} < \lambda_{(\mathrm{i})} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

E11 **Décortiquer le problème** Un électron dans un puits de potentiel de largeur connue est dans son deuxième état excité, c'est-à-dire dans l'état $n = 3$. Il peut émettre l'énergie d'excitation sous forme de photons en revenant vers son état fondamental.

Connues	Inconnues
$L = 0{,}540\,\text{nm}$	$E_{\text{é}}$
$hc = 1\,240\,\text{eV} \cdot \text{nm}$	$\Delta E_{3\to1}$
$mc^2 = 511\,\text{keV}$	$\lambda_{3\to1}$, $\lambda_{3\to2}$, $\lambda_{2\to1}$

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 11.27 de l'énergie d'une particule dans un puits de potentiel :

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2 \ .$$

Pour faciliter le traitement des unités, on peut la modifier légèrement :

$$E_n = \frac{(hc)^2}{8mc^2L^2} n^2 \ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème Au deuxième niveau excité ($n = 3$), l'équation (i) devient

$$E_3 = \frac{(hc)^2}{8mc^2L^2} \times 3^2 = \frac{(1\,240\,\text{eV} \cdot \text{nm})^2}{8 \times \left(511 \times 10^3\,\text{eV}\right) \times (0{,}540\,\text{nm})^2} \times 9 = 11{,}61\,\text{eV}$$

$$E_3 = 11{,}6\,\text{eV} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct.

b. **Identifier la clé** La clé est la différence entre les niveaux d'énergie initial $n = 3$ et final $n = 1$. L'équation 11.29 exprime cette différence par

$$\Delta E = E_{\text{nh}} - E_{\text{nb}} \ .$$

Résoudre le problème L'énergie pour $n = 3$ ayant été calculée en **a.**, on calcule séparément l'énergie pour $n = 1$ à l'aide de l'équation (i) :

$$E_1 = \frac{(\hbar c)^2}{8mc^2L^2} \times 1^2 = \frac{(1\,240\,\text{eV} \cdot \text{nm})^2}{8 \times \left(511 \times 10^3\,\text{eV}\right) \times (0{,}540\,\text{nm})^2} \times 1 = 1{,}290\,\text{eV}$$

$$\Delta E_{3\to1} = E_3 - E_1 = 11{,}61\,\text{eV} - 1{,}29\,\text{eV} \ .$$

$$\Delta E_{3\to1} = 10{,}3\,\text{eV} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la variation d'énergie trouvée est correct. La variation d'énergie est évidemment inférieure à l'énergie au niveau 3, car il doit rester de l'énergie lorsque la particule est au niveau fondamental.

c. **Identifier la clé** La clé est le fait que la transition du niveau 3 au niveau 1 peut se faire en une seule étape ou en deux étapes via le niveau 2. L'équation 11.29 établit le lien entre la longueur d'onde du photon émis et la différence d'énergie entre deux niveaux.

Résoudre le problème Si l'électron passe directement du niveau 3 au niveau 1, l'énergie dégagée est celle qu'on a trouvée en **b.** La longueur d'onde du photon émis est alors

$$\begin{aligned}\Delta E_{3\to 1} &= E_3 - E_1 = \frac{hc}{\lambda_{3\to 1}}\\ \lambda_{3\to 1} &= \frac{hc}{\Delta E_{3\to 1}} = \frac{1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}{10{,}3\,\mathrm{eV}}\\ \lambda_{3\to 1} &= 120\,\mathrm{nm}\ .\end{aligned}$$

Pour calculer les deux autres longueurs d'onde, on a besoin d'évaluer l'énergie au niveau 2 à l'aide de l'équation (i) :

$$E_2 = \frac{(\hbar c)^2}{8mc^2L^2}\times 2^2 = \frac{(1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm})^2}{8\times\left(511\times 10^3\,\mathrm{eV}\right)\times(0{,}540\,\mathrm{nm})^2}\times 4 = 5{,}159\,\mathrm{eV}\ .$$

La transition du niveau 3 au niveau 2 génère donc un photon dont la longueur d'onde est

$$\lambda_{3\to 2} = \frac{hc}{\Delta E_{3\to 2}} = \frac{hc}{E_3 - E_2} = \frac{1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}{11{,}61\,\mathrm{eV} - 5{,}16\,\mathrm{eV}}$$

$$\lambda_{3\to 2} = 192\,\mathrm{nm}\ .$$

Finalement, pour la transition du niveau 2 au niveau 1, on a

$$\begin{aligned}\lambda_{2\to 1} &= \frac{hc}{\Delta E_{2\to 1}} = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}{5{,}16\,\mathrm{eV} - 1{,}29\,\mathrm{eV}}\\ &= 320\,\mathrm{nm}\ .\end{aligned}$$

Les trois longueurs d'onde produites lors des différentes transitions du niveau 3 au niveau 1 sont

$$\lambda_{3\to 1} = 120\,\mathrm{nm},\qquad \lambda_{3\to 2} = 192\,\mathrm{nm},\qquad \lambda_{2\to 1} = 320\,\mathrm{nm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur des longueurs d'onde trouvées est correct. Les longueurs d'onde $\lambda_{3\to 2}$ et $\lambda_{2\to 1}$ sont évidemment plus grandes que $\lambda_{3\to 1}$, car l'énergie est dégagée en deux étapes au lieu d'une seule.

E12 **Décortiquer le problème** À partir de l'énergie d'un électron et des propriétés du puits de potentiel où il est piégé, on peut déterminer le niveau d'excitation dans lequel il oscille.

Connues	Inconnue
$\lambda = 92{,}36\,\mathrm{nm}$	n
$L = 0{,}820\,\mathrm{nm}$	

Identifier la clé La clé est l'union des équations 11.27 et 11.29 :

$$\Delta E = E_{\mathrm{nh}} - E_{\mathrm{nb}} = \frac{hc}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad E_n = \frac{h^2}{8mL^2}n^2$$

$$\frac{h^2}{8mL^2}n_{\mathrm{nh}}^2 - \frac{h^2}{8mL^2}n_{\mathrm{nb}}^2 = \frac{hc}{\lambda}\ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème On sait que l'état $n_{\mathrm{b}} = 1$, car l'électron est initialement dans son état fondamental. L'inconnue est n_{h}, qu'on isole dans l'équation (i) :

$$\begin{aligned}n_{\mathrm{nh}}^2 - n_{\mathrm{nb}}^2 &= \frac{8mL^2hc}{h^2\lambda} = \frac{8mc^2L^2}{hc\lambda}\\ n_{\mathrm{nh}} &= \sqrt{n_{\mathrm{nb}}^2 + \frac{8mL^2hc}{h^2\lambda}} = \sqrt{n_{\mathrm{nb}}^2 + \frac{8mc^2L^2}{hc\lambda}}\\ &= \sqrt{1^2 + \frac{8\times\left(511\times 10^3\,\mathrm{eV}\right)\times(0{,}820\,\mathrm{nm})^2}{(1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm})\times(92{,}36\,\mathrm{nm})}} = 5{,}000\ .\end{aligned}$$

La valeur trouvée est le niveau de l'électron, le niveau $n = 5$ étant le quatrième état excité.

$$n_f = 5, \text{ le quatrième niveau excité.} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre n trouvé est un entier, ce qui est cohérent avec le fait qu'on cherche le numéro d'un niveau d'énergie de l'électron.

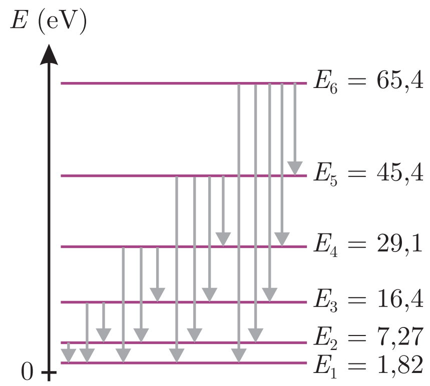
E13 **Décortiquer le problème** La largeur d'un puits de potentiel permet de déterminer l'énergie de chacun des niveaux pour un électron piégé.

Connue	Inconnues
$L = 0{,}455\,\text{nm}$	Diagramme d'énergie
	$N_{\text{transitions}}$

a. **Identifier la clé** La clé est le fait que le diagramme d'énergie doit montrer les six premiers niveaux (niveau fondamental et cinq niveaux excités), et qu'une flèche doit illustrer toutes les combinaisons possibles d'un niveau à un autre. De plus, d'après l'équation 11.27, l'énergie de chaque niveau est proportionnelle à n^2, ce qui permet d'établir le positionnement relatif de chaque niveau sur l'échelle verticale du diagramme.

Résoudre le problème Une flèche doit relier chaque niveau à chacun des niveaux inférieurs. Donc, cinq flèches ont leur origine au niveau 6 vers les cinq niveaux inférieurs ; quatre flèches ont leur origine au niveau 5 vers les quatre niveaux inférieurs, etc.

La figure ci-dessous illustre le diagramme d'énergie pour les six premiers niveaux.



(réponse)

b. **Identifier la clé** La clé est le dénombrement des flèches présentes sur le diagramme tracé en **a.**

Résoudre le problème Le nombre de flèches est

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 \ .$$

$$\text{Il y a 15 transitions possibles.} \qquad \text{(réponse)}$$

P14 **Décortiquer le problème** Un électron au niveau fondamental est excité en absorbant l'énergie d'un photon. Si on connaît la longueur d'onde du photon absorbé, on peut déterminer le niveau que l'électron atteindra.

Connues	Inconnue
$L = 2{,}00\,\text{nm}$	n_f
$n_i = 1$	

Identifier la clé La clé est l'union des équations 11.27 et 11.29 :

$$\Delta E = E_{\mathrm{nh}} - E_{\mathrm{nb}} = \frac{hc}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2 \ ,$$

où l'énergie absorbée est celle d'un photon $\Delta E = \frac{hc}{\lambda}$.

Résoudre le problème Puisqu'on sait que l'électron est initialement dans son état fondamental, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{8mL^2} n_{\mathrm{nh}}^2 - \frac{h^2}{8mL^2} n_{\mathrm{nb}}^2 = \frac{hc}{\lambda} \\ n_{\mathrm{nh}}^2 = n_{\mathrm{nb}}^2 + \frac{8mc^2L^2}{hc\lambda} \\ n_{\mathrm{nh}} = \sqrt{{}_{\mathrm{nb}}^{2} + \frac{8mc^2L^2}{hc\lambda}} \ . \end{aligned} \tag{i}$$

Il ne reste qu'à appliquer cette équation avec les différentes longueurs d'ondes suggérées.

a.

$$n_{\mathrm{nh}} = \sqrt{1^2 + \frac{8 \times \left(511 \times 10^3\,\mathrm{eV}\right) \times (2{,}00\,\mathrm{nm})^2}{(1\,240\,\mathrm{eV} \cdot \mathrm{nm}) \times (549\,\mathrm{nm})}} = 5{,}000$$

Le niveau $n = 5$ correspond au quatrième état excité.

L'état de l'électron est le quatrième état excité. (réponse)

b.

$$n_{\mathrm{nh}} = \sqrt{1^2 + \frac{8 \times \left(511 \times 10^3\,\mathrm{eV}\right) \times (2{,}00\,\mathrm{nm})^2}{(1\,240\,\mathrm{eV} \cdot \mathrm{nm}) \times (720\,\mathrm{nm})}} = 4{,}395$$

L'énergie n'a pas une valeur permettant à l'électron d'acquérir précisément l'énergie qui l'amènerait à un niveau donné. L'électron demeure donc à l'état fondamental.

L'électron demeure à l'état fondamental. (réponse)

c.

$$n_{\mathrm{nh}} = \sqrt{1^2 + \frac{8 \times \left(511 \times 10^3\,\mathrm{eV}\right) \times (2{,}00\,\mathrm{nm})^2}{(1\,240\,\mathrm{eV} \cdot \mathrm{nm}) \times (1\,648\,\mathrm{nm})}} = 3{,}000$$

Le niveau $n = 3$ correspond au deuxième état excité.

L'état de l'électron est le deuxième état excité. (réponse)

P15 **Décortiquer le problème** Un électron excité au troisième état excité ($n_{\mathrm{i}} = 4$) retourne à son état fondamental en faisant deux transitions (émet deux photons). On peut déterminer l'état intermédiaire durant la transition à partir des longueurs d'onde des deux photons.

Connues	Inconnue
$n_{\mathrm{i}} = 4$	L
$n_{\mathrm{f}} = 1$	
$\lambda_{n_{\mathrm{i}} \to n'} = 150\,\mathrm{nm}$	
$\lambda_{n' \to n_{\mathrm{f}}} = 600\,\mathrm{nm}$	

Identifier la clé La clé est l'union des équations 11.27 et 11.29, l'équation résultante étant appliquée pour chacune des deux transitions dont l'un des niveaux est inconnu :

$$\Delta E = E_{\mathrm{nh}} - E_{\mathrm{nb}} = \frac{hc}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2$$

$$n_{\mathrm{nh}}^2 - n_{\mathrm{nb}}^2 = \frac{8mc^2L^2}{hc\lambda} \ . \tag{i}$$

Résoudre le problème L'équation (i) écrite pour chacune des deux transitions donne

$$n_{\mathrm{i}}^2 - n'^2 = \frac{8mc^2L^2}{hc\lambda_{n_{\mathrm{i}}\to n'}} \ ,$$

et

$$n'^2 - n_{\mathrm{f}}^2 = \frac{8mc^2L^2}{hc\lambda_{n'\to n_{\mathrm{f}}}} \ .$$

Ces deux équations forment un système de deux équations à deux inconnues. Par addition des deux équations, on peut faire disparaître l'inconnue n' :

$$\begin{aligned} \left(n_{\mathrm{i}}^2 - n'^2\right) + \left(n'^2 - n_{\mathrm{f}}^2\right) &= \frac{8mc^2L^2}{hc\lambda_{n_{\mathrm{i}}\to n'}} + \frac{8mc^2L^2}{hc\lambda_{n'\to n_{\mathrm{f}}}} \\ \left(n_{\mathrm{i}}^2 - n_{\mathrm{f}}^2\right) &= \frac{8mc^2L^2}{hc}\left(\frac{1}{\lambda_{n_{\mathrm{i}}\to n'}} + \frac{1}{\lambda_{n'\to n_{\mathrm{f}}}}\right) \ . \end{aligned}$$

On peut enfin isoler la largeur L, celle-ci étant la seule inconnue restante :

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\frac{\left(n_{\mathrm{i}}^2 - n_{\mathrm{f}}^2\right) hc}{8mc^2\left(\frac{1}{\lambda_{n_{\mathrm{i}}\to n'}} + \frac{1}{\lambda_{n'\to n_{\mathrm{f}}}}\right)}} \\ &= \sqrt{\frac{(4^2 - 1^2)\times(1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm})}{8\times\left(511\times10^3\,\mathrm{eV}\right)\left(\frac{1}{150\,\mathrm{nm}} + \frac{1}{600\,\mathrm{nm}}\right)}} \\ L &= 0{,}739\,\mathrm{nm} \ . \end{aligned} \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la largeur trouvée est correct.

P16 **Décortiquer le problème** Pour une particule de masse inconnue, on connaît les énergies pour deux niveaux n inconnus. On peut alors déterminer l'énergie du niveau fondamental et la masse de cette particule.

Connues	Inconnues
$L = 15{,}00\,\mathrm{fm}$	E_1
$E_n = 8{,}194\,\mathrm{MeV}$	m
$E_{n+1} = 14{,}57\,\mathrm{MeV}$	

a. Identifier la clé La clé est l'équation 11.27 appliquée pour les deux niveaux consécutifs d'énergie connue. On obtient alors un système de deux équations à deux inconnues :

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2 \qquad \text{et} \qquad E_{n+1} = \frac{h^2}{8mL^2}(n+1)^2 \ .$$

Résoudre le problème Pour résoudre le système de deux équations à deux inconnues, on peut isoler la partie commune :

$$\frac{E_n}{n^2} = \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{E_{n+1}}{(n+1)^2}$$
$$\frac{E_n}{n^2} = \frac{E_{n+1}}{(n+1)^2}$$
$$(n+1)\sqrt{E_n} = n\sqrt{E_{n+1}}$$
$$n+1 = n\sqrt{\frac{E_{n+1}}{E_n}}$$
$$n = \frac{1}{\sqrt{\frac{E_{n+1}}{E_n}} - 1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{14{,}57\,\mathrm{MeV}}{8{,}194\,\mathrm{MeV}}} - 1} = 2{,}999 \ .$$

La valeur n étant connue, on peut rapidement déterminer l'énergie à l'état fondamental E_1 à partir de l'équation 11.27 :

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2}n^2 = n^2 E_1$$
$$E_1 = \frac{E_n}{n^2} = \frac{E_3}{3^2} = \frac{8{,}194\,\mathrm{MeV}}{9}$$
$$E_1 = 0{,}910\,4\,\mathrm{MeV} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct. L'énergie de la particule à l'état fondamental doit être inférieure à l'énergie dans tout état excité.

b. Identifier la clé La clé est l'équation 11.28 qui définit l'énergie à l'état fondamental pour une particule de masse m :

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} \ .$$

Résoudre le problème

$$m = \frac{h^2}{8L^2E_1} = \frac{(hc)^2}{8L^2E_1c^2}$$
$$= \frac{\left(1\,240 \times 10^{-6}\,\mathrm{MeV}\cdot\mathrm{nm}\right)^2}{8 \times \left(15{,}00 \times 10^{-6}\,\mathrm{nm}\right)^2 \times (0{,}910\,4\,\mathrm{MeV})\,c^2}$$
$$m = 938{,}2\,\mathrm{MeV}/c^2 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la masse trouvée est correct, quoique celle-ci soit beaucoup plus élevée que la masse d'un électron au repos.

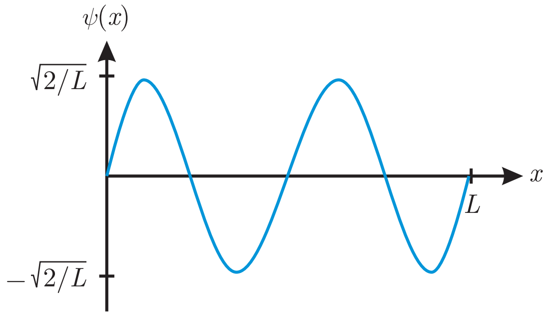
Q17 Décortiquer le problème Un électron piégé dans un puits de potentiel infini présente quatre endroits où la probabilité de l'observer est égale et maximale.

a. Identifier la clé La clé est l'équation 11.42 définissant la fonction d'onde d'une particule piégée :

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & (0 \le x \le L) \\ 0 & (x < 0 \text{ ou } x > L) \ . \end{cases}$$

Résoudre le problème On voit dans la forme de la fonction d'onde que la courbe est de forme sinusoïdale telle que $\psi_n(0) = 0$. Puisque l'électron est dans un état stationnaire, on sait également que $\psi_n(L) = 0$. Finalement, puisqu'on indique que quatre endroits présentent une probabilité maximale et identique, on sait que la courbe à tracer présente quatre extremums.

La figure à la page suivante illustre la fonction d'onde.



(réponse)

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que l'onde stationnaire présente n ventres et $n + 1$ nœuds, n étant le nombre quantique recherché.

Résoudre le problème Le graphique tracé en **a.** pour la fonction d'onde comporte quatre ventres et cinq nœuds. Le nombre quantique n est donc 4.

$$n = 4 \qquad \text{(réponse)}$$

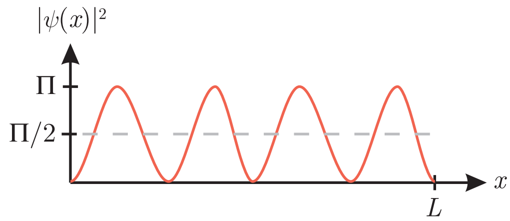
c. **Identifier la clé** La clé est le fait que la densité de probabilité est nulle vis-à-vis des nœuds de la fonction d'onde.

Résoudre le problème Puisque la fonction d'onde comporte cinq nœuds, il y a donc cinq endroits où la densité de probabilité est nulle.

À cinq endroits (réponse)

d. **Illustrer la situation** La figure ci-contre illustre la densité de probabilité associée à la fonction d'onde.

Identifier la clé La clé est l'observation sur le graphique des endroits où la courbe de la densité de probabilité est à mi-hauteur.



Résoudre le problème On voit sur la figure que huit points de la courbe coupent la valeur $\Pi/2$ de la densité de probabilité.

À huit endroits (réponse)

Q18 **Décortiquer le problème** Deux particules différentes sont piégées dans des puits de potentiel de même largeur. On peut évaluer le rapport de leurs fonctions d'onde pour un endroit précis.

Identifier la clé La clé est l'équation 11.42 définissant la fonction d'onde d'une particule piégée :

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & (0 \leq x \leq L) \\ 0 & (x < 0 \text{ ou } x > L)\ . \end{cases}$$

Résoudre le problème L'électron et le proton sont dans leur état fondamental. La valeur de la fonction d'onde entre 0 et L devient

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\ .$$

Pour la position $x = L/2$, le rapport des fonctions d'onde pour les deux particules est

$$\frac{\psi_{\text{p}}}{\psi_{\text{é}}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi L/2}{L}\right)}{\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi L/2}{L}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\pi/2)}{\sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\pi/2)} = \frac{\sqrt{\frac{2}{L}}}{\sqrt{\frac{2}{L}}}\ .$$

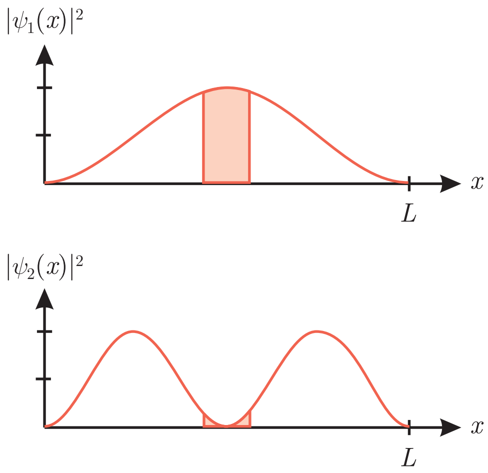
On voit que les deux expressions du rapport sont identiques. En fait, la valeur de la fonction d'onde n'est pas fonction d'un paramètre qui distingue l'électron et le proton. Ainsi, le rapport sera égal à 1, les deux fonctions d'onde étant égales à $\sqrt{2/L}$:

$$\frac{\psi_{\text{p}}}{\psi_{\text{é}}} = 1 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Q19 **Décortiquer le problème** Pour un électron piégé dans un puits de potentiel de largeur connue, on peut évaluer si le fait de passer à un niveau excité supérieur augmentera ou réduira la probabilité de l'observer dans une partie donnée de son domaine accessible.

Identifier la clé La clé est l'observation de l'aire sous la courbe entre 0,45L et 0,55L sur les graphiques de la densité de probabilité des deux premiers états pour l'électron.

Illustrer la situation La figure ci-contre illustre la densité de probabilité pour les deux premiers états stationnaires de l'électron.



Résoudre le problème On observe sur la figure ci-contre que l'aire sous la courbe, entre 0,45L et 0,55L, est beaucoup plus faible pour le deuxième état stationnaire. La probabilité d'observer l'électron dans ce domaine est donc beaucoup plus faible après que l'électron est passé au premier état excité. Il y a donc diminution de la probabilité d'y retrouver l'électron.

La probabilité diminue. (réponse)

E20 **Décortiquer le problème** La fonction d'onde illustrée est celle d'un électron dont on connaît l'énergie.

Connue	Inconnues
$E = 3{,}40\,\text{eV}$	L
	λ_{min}

a. **Identifier les clés** La première clé est le fait que l'onde stationnaire présente n ventres et $n+1$ nœuds, n étant le nombre quantique de l'onde. La deuxième clé est l'équation 11.27 dans laquelle on peut isoler la largeur L :

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2}n^2$$

$$L = \sqrt{\frac{h^2n^2}{8mE_n}} = \sqrt{\frac{(hc)^2\,n^2}{8mc^2E_n}} \ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème L'onde illustrée présente six nœuds. On sait donc que l'électron se trouve dans son cinquième état stationnaire ($n = 5$). Cette valeur de n insérée dans l'équation (i) permet de calculer L :

$$L = \sqrt{\frac{(hc)^2\,n^2}{8mc^2E_n}} = \sqrt{\frac{(1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm})^2 \times 5^2}{8 \times \left(511 \times 10^3\,\text{eV}\right) \times 3{,}40\,\text{eV}}}$$

$$L = 1{,}66\,\text{nm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la largeur trouvée est correct.

b. Identifier la clé La clé est le fait que la plus petite longueur d'onde d'un photon émis survient lorsque l'électron fait une transition directe du niveau $n = 5$ vers le niveau fondamental, c'est-à-dire lorsqu'il passe au niveau $n = 1$.

Résoudre le problème L'équation 11.27 permet de trouver l'énergie au niveau $n = 1$:

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} \times n^2 = \frac{(hc)^2}{8mc^2L^2} \times 1^2$$
$$= \frac{(1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm})^2}{8 \times \left(511 \times 10^3\,\mathrm{eV}\right) \times (1{,}66\,\mathrm{nm})^2} = 0{,}136\,\mathrm{eV}\ .$$

L'équation 11.29 permet de calculer la longueur d'onde du photon émis par la transition vers $n = 1$:

$$\Delta E = E_{\mathrm{nh}} - E_{\mathrm{nb}} = \frac{hc}{\lambda}$$
$$\lambda_{n_5\to n_1} = \frac{hc}{E_5 - E_1} = \frac{1\,240\,\mathrm{eV}}{3{,}40\,\mathrm{eV} - 0{,}136\,\mathrm{eV}}$$
$$\lambda_{n_5\to n_1} = 380\,\mathrm{nm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

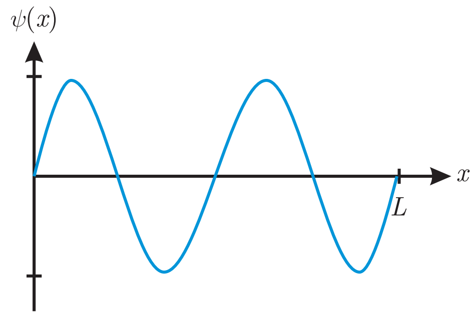
Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est correct pour un photon émis lors de la transition d'un électron vers un niveau inférieur.

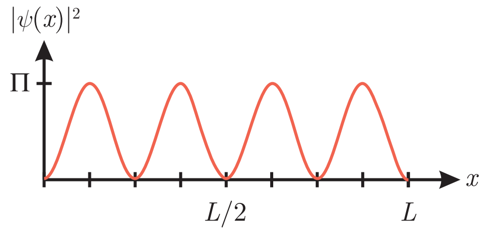
P21 Décortiquer le problème On connaît l'état stationnaire dans lequel un électron se trouve, dans un puits de potentiel de largeur L. On peut analyser la probabilité de trouver l'électron à différents endroits.

Connue	Inconnues
$0 \geq x \geq L$	$x_{P_{\max}}$
$n = 4$	P entre $x = 0{,}100L$
	et $x = 0{,}300L$

a. Identifier la clé La clé est l'observation de la courbe de la densité de probabilité.

Illustrer la situation La figure ci-dessous illustre la fonction d'onde et la densité de probabilité pour l'électron dans l'état stationnaire $n = 4$.





Résoudre le problème On observe sur la courbe $|\psi(x)|^2$ ci-contre que quatre endroits présentent une probabilité maximale aux positions suivantes :

$$x_1 = \frac{L}{8}\ , x_2 = \frac{3L}{8}\ , x_3 = \frac{5L}{8}\ , x_4 = \frac{7L}{8}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Identifier la clé La clé est l'équation 11.13 :

$$P = \int_{0,100L}^{0,300L} \left|\psi_4^2(x)\right|^2 \, \mathrm{d}x \ ,$$

où

$$\psi_4 = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right) \ .$$

Résoudre le problème La résolution de l'intégrale est

$$\begin{aligned} P &= \int_{0,100L}^{0,300L} \left(\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{L} \int_{0,100L}^{0,300L} \sin^2\left(\frac{4\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x \ . \end{aligned}$$

L'équation E.70 de l'annexe E fournit la solution à cette intégrale :

$$\int \sin^2(ax) \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} \ .$$

En l'appliquant à la présente situation, on a

$$P = \frac{2}{L}\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}\right]\Bigg|_{0,100L}^{0,300L}, \qquad \text{avec} \qquad a = \frac{4\pi}{L}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{L}\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin\left(2\left(\frac{4\pi}{L}\right)x\right)}{4\left(\frac{4\pi}{L}\right)}\right]\Bigg|_{0,100L}^{0,300L} = \left[\frac{x}{L} - \frac{\sin\left(\frac{8\pi}{L}x\right)}{8\pi}\right]\Bigg|_{0,100L}^{0,300L} \\ &= \left[\left(\frac{0,300L}{L} - \frac{\sin\left(\frac{8\pi}{L} \times 0,300L\right)}{8\pi}\right) - \left(\frac{0,100L}{L} - \frac{\sin\left(\frac{8\pi}{L} \times 0,100L\right)}{8\pi}\right)\right] \\ P &= \left[\left(0,300 - \frac{\sin(2,4\pi)}{8\pi}\right) - \left(0,100 - \frac{\sin(0,8\pi)}{8\pi}\right)\right] \\ P &= \left(0,200 - \frac{\sin(2,4\pi) - \sin(0,8\pi)}{8\pi}\right) \end{aligned}$$

$$P(\text{entre } x = 0,100L \text{ et } x = 0,300L) = 0,186 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La probabilité trouvée est plausible, comprise entre 0 et 1.

P22 Décortiquer le problème Les propriétés du puits de potentiel et de l'onde stationnaire d'un électron piégé permettent de déterminer différents paramètres de l'énergie de l'électron et de la longueur d'onde des photons qu'il peut émettre.

Connues	Inconnues
$0 \geq x \geq 1,200\,\mathrm{nm}$	$\lambda_{\text{é}}$
$\psi(0,600\,\mathrm{nm}) = 0$	n
$\psi(0,800\,\mathrm{nm}) = 0$	$\lambda_{\max,n \,\to\, n-1}$

a. Identifier les clés La première clé consiste à déterminer le niveau d'énergie dans lequel l'électron se trouve à partir de la largeur du puits et de la distance donnée entre deux nœuds.

La deuxième clé est l'équation 11.25 qui permet de calculer la longueur d'onde d'une particule piégée à partir de l'ordre de son état stationnaire :

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème Si le puits de potentiel est situé entre $x = 0$ et $x = 1{,}200\,\text{nm}$, alors la largeur du puits est $L = 1{,}200\,\text{nm} - 0 = 1{,}200\,\text{nm}$. D'autre part, la probabilité d'observer l'électron est nulle à $x = 0{,}600\,\text{nm}$ et à $x = 0{,}800\,\text{nm}$, et aucun endroit entre ces points ne présente une probabilité nulle, ce qui signifie que ce sont deux nœuds voisins. On sait alors que les nœuds sont distants de $d = 0{,}800\,\text{nm} - 0{,}600\,\text{nm} = 0{,}200\,\text{nm}$, et que le puits entier a une largeur $L = nd$. Ainsi,

$$n = \frac{L}{d} = \frac{1{,}200\,\text{nm}}{0{,}200\,\text{nm}} = 6\ .$$

L'équation (i) donne la longueur d'onde de cet électron :

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} = \frac{2 \times 1{,}200\,\text{nm}}{6}$$
$$\lambda_n = 0{,}400\,\text{nm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse On constate que la largeur du puits correspond à trois longueurs d'onde.

b. Identifier la clé La clé est le rapport entre la largeur du puits et la distance entre des nœuds voisins.

Résoudre le problème Comme il est démontré en **a.**, la largeur du puits est $L = 1{,}200\,\text{nm}$ et les nœuds sont distants les uns des autres de $d = 0{,}200\,\text{nm}$. Il y a donc $\frac{L}{d} = 6$ ventres dans la courbe de la fonction d'onde de l'électron, ce qui correspond au sixième état stationnaire.

$$n = 6 \qquad \text{(réponse)}$$

c. Identifier la clé La clé est le fait que le photon ayant la plus grande longueur d'onde est celui qui est émis lorsque l'électron fait la transition la moins importante en s'approchant de l'état fondamental. En l'occurrence, il s'agit du cas où l'électron passe du niveau 6 au niveau 5. On doit alors trouver au préalable l'énergie de l'électron aux niveaux 6 et 5 pour évaluer la variation d'énergie de l'électron.

Résoudre le problème L'équation 11.27 permet de trouver l'énergie au niveau n. Pour $n = 6$ d'abord, on a

$$E_6 = \frac{h^2}{8mL^2} \times n^2 = \frac{(hc)^2}{8mc^2L^2} \times 6^2$$
$$= \frac{(1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm})^2 \times 36}{8 \times \left(511 \times 10^3\,\text{eV}\right) \times (1{,}200\,\text{nm})^2} = 9{,}403\,\text{eV}\ .$$

Pour $n = 5$:

$$E_5 = \frac{h^2}{8mL^2} \times n^2 = \frac{(hc)^2}{8mc^2L^2} \times 5^2$$
$$E_5 = \frac{(1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm})^2 \times 25}{8 \times \left(511 \times 10^3\,\text{eV}\right) \times (1{,}200\,\text{nm})^2} = 6{,}530\,\text{eV}\ .$$

L'équation 11.29 permet de calculer la longueur d'onde du photon émis par la transition de $n = 6$ à $n = 5$:

$$\Delta E = E_{\text{nh}} - E_{\text{nb}} = \frac{hc}{\lambda}$$
$$\lambda_{n_6\to n_5} = \frac{hc}{E_6 - E_5} = \frac{1\,240\,\text{eV}}{9{,}403\,\text{eV} - 6{,}530\,\text{eV}}$$
$$\lambda_{n_6\to n_5} = 431{,}6\,\text{nm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est correct pour un photon émis lors de la transition d'un électron vers un niveau inférieur. Toutes les autres chutes de l'électron auraient impliqué une énergie plus grande, donc un photon de longueur d'onde plus faible.

Q23 **Décortiquer le problème** Un puits de potentiel rectangulaire a des dimensions connues. On peut alors comparer différents niveaux d'énergie d'une particule qui s'y trouve.

Identifier la clé La clé est l'équation 11.47 de l'énergie dans un puits de potentiel infini en plusieurs dimensions :

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}\right) . \tag{i}$$

Résoudre le problème Le puits de potentiel décrit dans l'énoncé ne s'étend qu'en deux dimensions. L'équation (i) peut alors se réduire à

$$E_{n_x,n_y} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}\right) .$$

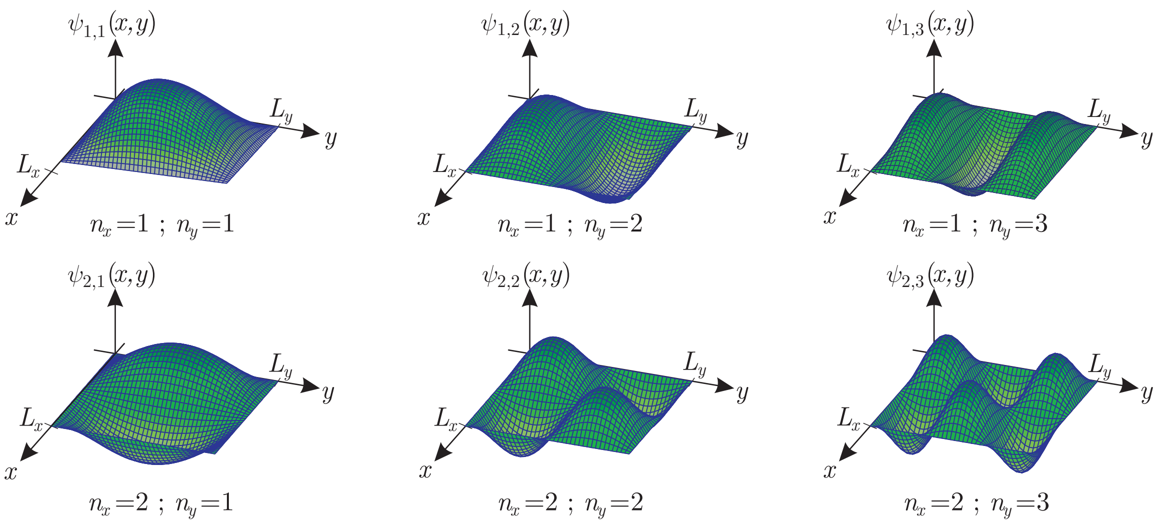
Cette équation permet d'établir une expression de l'énergie pour les énergies $E_{1,1}$, $E_{2,1}$, $E_{1,2}$ et $E_{2,2}$. On connaît les dimensions du puits ($L_x = L$ et $L_y = 2L$) :

$$\begin{aligned}
E_{1,1} &= \frac{h^2}{8m}\left(\frac{1^2}{L^2} + \frac{1^2}{(2L)^2}\right) = \frac{5h^2}{32mL^2} \\
E_{2,1} &= \frac{h^2}{8m}\left(\frac{2^2}{L^2} + \frac{1^2}{(2L)^2}\right) = \frac{17h^2}{32mL^2} \\
E_{1,2} &= \frac{h^2}{8m}\left(\frac{1^2}{L^2} + \frac{2^2}{(2L)^2}\right) = \frac{2h^2}{8mL^2} = \frac{8h^2}{32mL^2} \\
E_{2,2} &= \frac{h^2}{8m}\left(\frac{2^2}{L^2} + \frac{2^2}{(2L)^2}\right) = \frac{5h^2}{8mL^2} = \frac{20h^2}{32mL^2} .
\end{aligned}$$

On peut alors placer ces énergies par ordre croissant :

$$E_{1,1} < E_{1,2} < E_{2,1} < E_{2,2} . \tag{réponse}$$

Q24 **Illustrer la situation** La figure 11.14 (reproduite ci-après) montre différents états stationnaires pour une particule dans un puits de potentiel infini à deux dimensions.



Décortiquer le problème Dans un puits de potentiel rectangulaire, on cherche les endroits où la probabilité d'observer une particule est maximale et identique.

Identifier la clé La clé est le fait que les endroits où la probabilité d'observer l'électron est maximale correspondent à des ventres d'une onde stationnaire en deux dimensions.

a. **Identifier la clé** La clé est le fait qu'une onde stationnaire à deux dimensions telles que $n_x = 1$ et $n_y = 1$ n'admet qu'un ventre (*voir en haut à gauche sur la figure*).

Résoudre le problème

$$\text{À un endroit} \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La clé est le fait qu'une onde stationnaire à deux dimensions telles que $n_x = 2$ et $n_y = 1$ possède deux ventres le long de l'axe des x et un seul le long de l'axe des y. Le nombre total de ventres est donc $2 \times 1 = 2$ (*voir en bas à gauche sur la figure*).

Résoudre le problème

$$\text{À deux endroits} \qquad \text{(réponse)}$$

c. **Identifier la clé** La clé est le fait qu'une onde stationnaire à deux dimensions telles que $n_x = 3$ et $n_y = 2$ possède trois ventres le long de l'axe des x et deux le long de l'axe des y. Il y a donc un réseau de ventres tel que le nombre total est $3 \times 2 = 6$. (Ce cas n'est pas représenté sur la figure, mais il est similaire au cas $n_x = 2$, $n_y = 3$ représenté en bas à droite).

Résoudre le problème

$$\text{À six endroits} \qquad \text{(réponse)}$$

E25 **Décortiquer le problème** Un puits de potentiel carré a des dimensions connues. On peut donc calculer l'énergie des différents niveaux d'énergie.

Connues	Inconnues
$L_x = 0{,}950\,\text{nm}$	$E_{1,1}, E_{1,2}$
$L_y = 0{,}950\,\text{nm}$	$E_{2,1}, E_{2,2}$
	$E_{3,1}, E_{1,3}$
	États dégénérés
	Diagramme d'énergie

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 11.47 appliquée au cas à deux dimensions où $L_x = L_y = L$:

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}\right)$$

$$E_{n_x,n_y} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L^2} + \frac{n_y^2}{L^2}\right)$$

$$E_{n_x,n_y} = \frac{(hc)^2}{8mc^2L^2}\left(n_x^2 + n_y^2\right) \ .$$

On peut évaluer numériquement la partie constante de cette équation pour réduire les manipulations ultérieures :

$$E_{n_x,n_y} = \frac{(1\,240\,\text{eV} \cdot \text{nm})^2}{8 \times \left(511 \times 10^3\,\text{eV}\right) \times (0{,}950\,\text{nm})^2}\left(n_x^2 + n_y^2\right)$$

$$E_{n_x,n_y} = 0{,}416\,7\,\text{eV} \times \left(n_x^2 + n_y^2\right) \ . \qquad \text{(i)}$$

Cette équation sert au calcul de l'énergie de n'importe quel état stationnaire d'un électron dans le puits de potentiel considéré.

Résoudre le problème On doit d'abord déterminer les six premiers états stationnaires pour lesquels on doit calculer l'énergie.

L'état fondamental est évidemment le premier niveau d'énergie ; on calculera $E_{1,1}$. Le niveau 2 dans les deux dimensions fait apparaître trois niveaux d'énergie qui demanderont également un calcul : $E_{2,1}$, $E_{1,2}$ et $E_{2,2}$. Il ne manque alors que deux niveaux d'énergie à considérer, et si on doit impliquer le niveau 3, la plus faible énergie pour le niveau 3 dans l'une des dimensions sous-tend nécessairement une seconde dimension à son niveau fondamental, c'est-à-dire qu'on cherche $E_{3,1}$ et $E_{1,3}$. L'équation (i) appliquée pour ces six valeurs d'énergie à calculer donne

$$E_{1,1} = 0{,}416\,7\,\text{eV} \times \left(1^2 + 1^2\right) = 0{,}834\,\text{eV} \ .$$

Les énergies $E_{2,1}$ et $E_{1,2}$ sont égales, puisque le terme entre parenthèses a la même valeur dans les deux cas :

$$E_{2,1} = E_{1,2} = 0{,}416\,7\,\text{eV} \times \left(1^2 + 2^2\right) = 2{,}084\,\text{eV}$$
$$E_{2,2} = 0{,}416\,7\,\text{eV} \times \left(2^2 + 2^2\right) = 3{,}334\,\text{eV} \ .$$

Les énergies $E_{3,1}$ et $E_{1,3}$ sont égales elles aussi :

$$E_{3,1} = E_{1,3} = 0{,}416\,7\,\text{eV} \times \left(1^2 + 3^2\right) = 4{,}168\,\text{eV} \ .$$

Les six valeurs d'énergie dans les premiers états stationnaires sont donc

$$E_{1,1} = 0{,}834\,\text{eV},\ E_{2,1} = E_{1,2} = 2{,}08\,\text{eV},\ E_{2,2} = 3{,}33\,\text{eV},\ E_{3,1} = E_{1,3} = 4{,}17\,\text{eV} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur des valeurs d'énergie trouvées est correct.

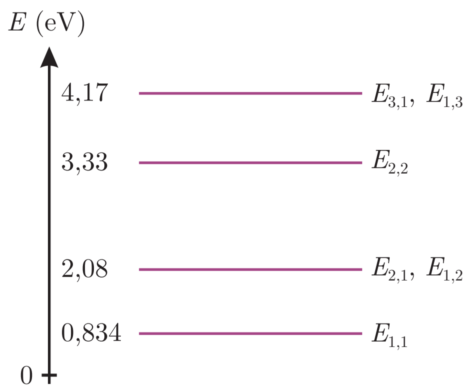
b. **Identifier la clé** La clé est le fait que des états dégénérés sont des états qui n'ont pas les mêmes nombres quantiques tout en ayant la même énergie.

Résoudre le problème Selon la définition des états dégénérés, on constate à partir des valeurs trouvées en **a.** que les énergies $E_{2,1}$ et $E_{1,2}$ sont liées à deux états dégénérés, ainsi que les énergies $E_{3,1}$ et $E_{1,3}$. Il y a donc deux paires d'états dégénérés :

$$(n_x = 1\ , n_y = 2) \text{ et } (n_x = 2\ , n_y = 1)\,;(n_x = 1\ , n_y = 3) \text{ et } (n_x = 3\ , n_y = 1) \ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. **Identifier la clé** La clé est l'utilisation des valeurs d'énergie trouvées en **a.** pour construire le diagramme d'énergie pour les niveaux étudiés.

Résoudre le problème Il y a quatre valeurs différentes à placer sur le diagramme. En respectant les proportions relatives sur l'échelle verticale, on obtient la figure ci-dessous.



(réponse)

E26 **Décortiquer le problème** Un puits de potentiel en trois dimensions a des dimensions connues. On peut déterminer l'énergie de l'électron dans divers états stationnaires.

Connues	Inconnue
$L_x = 1{,}20\,\text{nm}$	$E_{1,1,1}$
$L_y = 1{,}20\,\text{nm}$	
$L_z = 1{,}80\,\text{nm}$	

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 11.47 :

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}\right) = \frac{(hc)^2}{8mc^2}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}\right) .$$

Résoudre le problème Dans l'état fondamental $E_{1,1,1}$, l'énergie est

$$\begin{aligned} E_{1,1,1} &= \frac{(hc)^2}{8mc^2}\left(\frac{1^2}{(1{,}20\,\mathrm{nm})^2} + \frac{1^2}{(1{,}20\,\mathrm{nm})^2} + \frac{1^2}{(1{,}80\,\mathrm{nm})^2}\right) \\ &= \frac{(1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm})^2}{8\times(511\times10^3\,\mathrm{eV})}\left(\frac{1^2}{(1{,}20\,\mathrm{nm})^2} + \frac{1^2}{(1{,}20\,\mathrm{nm})^2} + \frac{1^2}{(1{,}80\,\mathrm{nm})^2}\right) \\ E_{1,1,1} &= 0{,}638\,\mathrm{eV} . \qquad \text{(réponse)} \end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct.

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que le premier état excité est l'état d'énergie le plus faible lorsqu'un seul des nombres quantiques est augmenté d'une unité.

Résoudre le problème Puisque L_z est supérieur à L_x et à L_y, c'est n_z qui sera élevé au niveau supérieur pour atteindre le premier état excité. Ainsi,

$$\begin{aligned} E_{1,1,2} &= \frac{(1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm})^2}{8\times(511\times10^3\,\mathrm{eV})}\left(\frac{1^2}{(1{,}20\,\mathrm{nm})^2} + \frac{1^2}{(1{,}20\,\mathrm{nm})^2} + \frac{2^2}{(1{,}80\,\mathrm{nm})^2}\right) \\ E_{1,1,2} &= 0{,}987\,\mathrm{eV} . \qquad \text{(réponse)} \end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct. À titre de comparaison, si on avait plutôt calculé $E_{2,1,1} = E_{1,2,1}$, on aurait trouvé 1,42 eV, comme quoi c'est bien $E_{1,1,2}$ qui est le premier état excité.

c. **Identifier la clé** La clé est l'équation 11.29 qui relie la longueur d'onde d'un photon émis à la variation d'énergie entre deux niveaux :

$$\Delta E = E_{1,1,2} - E_{1,1,1} = \frac{hc}{\lambda} .$$

Résoudre le problème

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{hc}{E_{1,1,2} - E_{1,1,1}} = \frac{1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}{0{,}987\,\mathrm{eV} - 0{,}638\,\mathrm{eV}} \\ \lambda &= 3{,}56\,\mu\mathrm{m} . \qquad \text{(réponse)} \end{aligned}$$

Valider la réponse La longueur d'onde trouvée est plausible, le photon appartient au domaine de l'infrarouge.

P27 **Décortiquer le problème** Un corail quantique est un puits de potentiel en deux dimensions et on y étudie le comportement d'un électron.

Connues	Inconnues
$L_x = 0{,}500\,\mathrm{nm}$	Diagramme d'énergie
$L_y = 1{,}00\,\mathrm{nm}$	$\Delta E_{\text{dégénéré}}$
	$\lambda_{\max}$
	$\lambda_{\min}$

a. Identifier la clé La clé est le calcul des différentes énergies à l'aide de l'équation 11.47 :

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}\right) ,$$

jusqu'à ce qu'on rencontre deux énergies de même valeur pour deux états dégénérés. Puisque le puits traité n'a que deux dimensions,

$$E_{n_x,n_y} = \frac{(hc)^2}{8mc^2}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}\right) .$$

On peut évaluer numériquement la partie constante de cette équation pour réduire les manipulations ultérieures :

$$\begin{aligned} E_{n_x,n_y} &= \frac{(1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm})^2}{8\times 511\times 10^3\,\mathrm{eV}}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}\right) \\ &= 0{,}376\,1\,\mathrm{eV}\times\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}\right) . \end{aligned}$$

Facultativement, et pour simplifier davantage l'équation, on peut utiliser le fait que $L_y = 2L_x$ et écrire :

$$E_{n_x,n_y} = 0{,}376\,1\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}^2\times\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{(2L_x)^2}\right) = \frac{0{,}376\,1\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}^2}{L_x^2}\times\left(\frac{n_x^2}{1} + \frac{n_y^2}{4}\right)$$

$$E_{n_x,n_y} = \frac{0{,}376\,1\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}^2}{(0{,}500\,\mathrm{nm})^2}\times\left(n_x^2 + \frac{1}{4}n_y^2\right) = 1{,}505\,\mathrm{eV}\times\left(n_x^2 + \frac{n_y^2}{4}\right) . \tag{i}$$

Cette équation sert au calcul de l'énergie de n'importe quel état stationnaire d'un électron dans le puits de potentiel considéré.

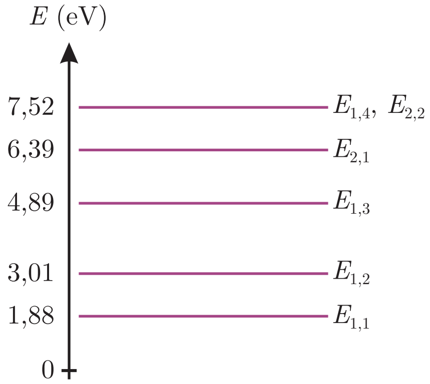
Résoudre le problème Pour tous les états stationnaires, en commençant par les plus bas, on a

$$\begin{aligned} E_{1,1} &= 1{,}505\,\mathrm{eV}\times\left(1^2 + \frac{1^2}{4}\right) = 1{,}88\,\mathrm{eV} \\ E_{1,2} &= 1{,}505\,\mathrm{eV}\times\left(1^2 + \frac{2^2}{4}\right) = 3{,}01\,\mathrm{eV} \\ E_{2,1} &= 1{,}505\,\mathrm{eV}\times\left(2^2 + \frac{1^2}{4}\right) = 6{,}39\,\mathrm{eV} \\ E_{2,2} &= 1{,}505\,\mathrm{eV}\times\left(2^2 + \frac{2^2}{4}\right) = 7{,}52\,\mathrm{eV} \\ E_{1,3} &= 1{,}505\,\mathrm{eV}\times\left(1^2 + \frac{3^2}{4}\right) = 4{,}89\,\mathrm{eV} . \end{aligned}$$

On constate ici que $E_{1,3} < E_{2,1}$. L'augmentation de n_y produit des augmentations d'énergie plus faibles. On peut explorer d'abord les cas $n_y > n_x$:

$$E_{1,4} = 1{,}505\,\mathrm{eV}\times\left(1^2 + \frac{4^2}{4}\right) = 7{,}52\,\mathrm{eV} .$$

On trouve que $E_{1,4} = E_{2,2}$. Ce sont les deux états dégénérés les plus bas. On peut maintenant placer ces valeurs d'énergie sur un diagramme (*voir la figure à la page suivante*).



(réponse)

Valider la réponse L'ordre de grandeur des valeurs d'énergie trouvées est correct.

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 11.29 appliquée à la différence d'énergie entre le niveau fondamental et l'énergie des niveaux dégénérés $E_{1,4} = E_{2,2}$:

$$\Delta E = E_{\mathrm{nh}} - E_{\mathrm{nb}} = E_{1,4} - E_{1,1} \ .$$

Résoudre le problème

$$\Delta E = E_{1,4} - E_{1,1} = 7{,}52\,\mathrm{eV} - 1{,}88\,\mathrm{eV}$$
$$\Delta E = 5{,}64\,\mathrm{eV} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la variation d'énergie trouvée est correct.

c. **Identifier la clé** La clé est le fait qu'un photon de grande longueur d'onde est un photon de faible énergie. On cherche donc la transition vers un niveau inférieur le plus rapproché depuis l'un des niveaux dégénérés.

Résoudre le problème L'équation 11.29 permet d'obtenir une expression de λ :

$$E_{\mathrm{nh}} - E_{\mathrm{nb}} = \frac{hc}{\lambda}$$
$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{E_{\mathrm{nh}} - E_{\mathrm{nb}}} \ .$$

Le niveau d'énergie le plus près, sous l'énergie d'un niveau dégénéré connu, est $E_{2,1}$, dont l'énergie est 6,39 eV. Ainsi,

$$\lambda_{\max} = \frac{1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}{7{,}52 - 6{,}39}$$
$$\lambda_{\max} = 1{,}10\,\mu\mathrm{m} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

d. **Identifier la clé** La clé est le fait qu'un photon de petite longueur d'onde est un photon de haute énergie. On cherche donc la transition vers un niveau inférieur le plus éloigné depuis l'un des niveaux dégénérés.

Résoudre le problème L'équation (i) développée en **c.** sert à nouveau pour la longueur d'onde la plus faible :

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{E_{\mathrm{nh}} - E_{\mathrm{nb}}} \ .$$

Le niveau d'énergie le plus éloigné, sous l'énergie d'un niveau dégénéré connu, est $E_{1,1}$, dont l'énergie est 1,88 eV. Ainsi,

$$\lambda_{\min} = \frac{1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}{7{,}52 - 1{,}88}$$
$$\lambda_{\min} = 220\,\mu\mathrm{m} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Les longueurs d'onde trouvées en **c.** et en **d.** sont plausibles.

P28 **Décortiquer le problème** Dans un puits de potentiel carré, on connaît la distance entre des points dont les probabilités de présence sont maximales.

Connues	Inconnues
$L_x = L$	Fonction d'onde
$L_y = L$	E
$d_x = L/3$	
$d_y = d/2$	

a. **Identifier les clés** La première clé est l'interprétation des distances $L/3$ et $L/2$ données pour déduire l'état dans lequel se trouve l'électron. Ces distances sont les distances entre les ventres de l'onde, dans chacune des dimensions. Les nombres quantiques de la particule sont donc

$$n_x = \frac{L_x}{d_x} = \frac{L}{L/3} = 3$$
$$n_y = \frac{L_y}{d_y} = \frac{L}{L/2} = 2 \ .$$

On cherche donc la fonction d'onde pour $n_x = 3$ et $n_y = 2$.

La deuxième clé est l'équation 11.45 qui définit la fonction d'onde pour des nombres quantiques connus :

$$\psi_{n_x,n_y}(x,y) = \psi_{n_x}(x)\,\psi_{n_y}(y) \ .$$

où

$$\psi_{n_x}(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{L_x}}\sin\left(\dfrac{n_x\pi x}{L_x}\right) & (0 \le x \le L_x) \\ 0 & (x < 0 \text{ ou } x > L_x) \end{cases}$$

$$\psi_{n_y}(y) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{L_y}}\sin\left(\dfrac{n_y\pi y}{L_y}\right) & (0 \le y \le L_y) \\ 0 & (y < 0 \text{ ou } y > L_y) \ . \end{cases}$$

Donc,

$$\psi_{n_x,n_y}(x,y) = \sqrt{\frac{2}{L_x}}\sin\left(\frac{n_x\pi x}{L_x}\right) \times \sqrt{\frac{2}{L_y}}\sin\left(\frac{n_y\pi y}{L_y}\right) \ .$$

Résoudre le problème Les nombres quantiques et les dimensions du puits étant connus, la fonction d'onde devient

$$\psi_{n_x,n_y}(x,y) = \frac{2}{L}\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \times \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 11.47 de l'énergie dans un puits de potentiel infini en trois dimensions :

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}\right) \ .$$

Résoudre le problème Pour les nombres quantiques $n_x = 3$ et $n_y = 2$, et pour les dimensions $L_x = L_y = L$, l'énergie est

$$E_{3,2} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3^2}{L^2} + \frac{2^2}{L^2}\right)$$
$$= \frac{h^2}{8mL^2}\left(3^2 + 2^2\right) = \frac{h^2}{8mL^2} \times 13$$
$$E_{3,2} = \frac{13h^2}{8mL^2} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

E29 **Décortiquer le problème** L'énergie totale d'un électron dans son mode fondamental doit être évaluée à partir de valeurs de largeur et de profondeur des puits de potentiel.

Identifier la clé La clé est l'équation 11.28 de l'énergie d'une particule dans son état fondamental dans un puits de potentiel. Pour une même largeur du puits, un puits plus profond implique une énergie plus élevée.

Résoudre le problème Dans l'équation 11.28, on constate que l'énergie est inversement proportionnelle à la largeur du puits. Déjà, on peut écrire

$$E_{(\mathrm{i})} < E_{(\mathrm{iii})} = E_{(\mathrm{iv})} < E_{(\mathrm{ii})} \ .$$

A priori, $E_{(\mathrm{iii})} = E_{(\mathrm{iv})}$, car les deux puits ont la même largeur. Mais comme un puits plus profond implique une énergie légèrement plus élevée, on peut préciser l'ordre croissant, le puits (iv) étant plus profond que le puits (iii) :

$$E_{(\mathrm{i})} < E_{(\mathrm{iii})} < E_{(\mathrm{iv})} < E_{(\mathrm{ii})} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

E30 **Décortiquer le problème** L'énergie d'un électron dans un puits de potentiel est connue. On peut déterminer le nombre d'onde associé à cet état stationnaire.

Connue	Inconnue
$E_{\text{é}} = 2{,}13\,\mathrm{eV}$	k

Identifier la clé La clé est l'équation 11.53 du nombre d'onde pour une particule dans un état stationnaire :

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{\sqrt{8\pi^2 mE}}{h} = \frac{\sqrt{8\pi^2 mc^2 E}}{hc} \ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

$$k = \frac{\sqrt{8\pi^2 \times \left(511 \times 10^3\,\mathrm{eV}\right) \times (2{,}13\,\mathrm{eV})}}{1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}$$

$$k = 7{,}48\,\mathrm{nm}^{-1} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du nombre d'onde trouvé est correct. Les unités sont bien celles d'un nombre d'onde, l'inverse d'une distance.

E31 **Décortiquer le problème** Un électron dans un puits de potentiel demeure captif si un photon incident ne lui procure pas assez d'énergie pour vaincre la barrière de potentiel. Des photons d'énergie suffisante pourront le libérer du puits.

Connues	Inconnues
$L = 0{,}500\,\mathrm{nm}$	$\lambda_{\text{piégé}}$
$U_0 = 2{,}00\,\mathrm{eV}$	$\lambda_{\text{libéré}}$
$n_{\mathrm{i}} = 1$	

a. **Identifier la clé** La clé est le fait que l'électron demeurera confiné au puits si le photon incident lui procure une quantité d'énergie le faisant passer au niveau 2 ou au niveau 3. Ces deux transitions correspondent à des longueurs d'onde précises pour le photon incident, en accord avec l'équation 11.29 :

$$\Delta E = E_{\mathrm{nh}} - E_{\mathrm{nb}} = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{hc}{E_{\mathrm{nh}} - E_{\mathrm{nb}}} \ .$$

Résoudre le problème Pour la transition du niveau 1 au niveau 2, la longueur d'onde est

$$\lambda_{1\to2} = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{0{,}888\,\text{eV} - 0{,}229\,\text{eV}} = 1\,882\,\text{nm} \ .$$

Pour la transition du niveau 1 au niveau 3, la longueur d'onde est

$$\lambda_{1\to3} = \frac{hc}{E_3 - E_1} = \frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{1{,}817\,\text{eV} - 0{,}229\,\text{eV}} = 780{,}9\,\text{nm} \ .$$

Les deux longueurs d'onde laissant l'électron confiné dans le puits sont

$$\lambda_{1\to2} = 1{,}88\,\mu\text{m} \qquad \text{et} \qquad \lambda_{1\to3} = 780{,}9\,\text{nm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Les longueurs d'onde trouvées sont plausibles.

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que tout photon ayant au moins assez d'énergie pour amener l'électron à la hauteur de la barrière de potentiel pourra libérer l'électron. Les photons d'énergie supérieure au seuil (de longueur d'onde inférieure à une certaine valeur) permettront à l'électron de s'échapper du puits.

Résoudre le problème Toujours selon l'équation 11.29, la longueur d'onde seuil est

$$\begin{aligned} \lambda_{1\to\infty} &< \frac{hc}{U_0 - E_1} = \frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{2{,}00\,\text{eV} - 0{,}229\,\text{eV}} = 700{,}2\,\text{nm} \\ \lambda_{1\to\infty} &< 700\,\text{nm} \ . \qquad \text{(réponse)} \end{aligned}$$

Valider la réponse La longueur d'onde trouvée est plausible. Elle est évidemment plus faible que les longueurs d'onde trouvées en **a.**, car elle est associée à une énergie plus grande.

E32 **Décortiquer le problème** Un électron devient captif d'un puits de potentiel après avoir émis un photon, ce qui lui fait perdre une quantité d'énergie qu'on doit déterminer.

Connues	Inconnue
$K = 1{,}250\,\text{eV}$	λ
$U_0 = 2{,}000\,\text{eV}$	

Identifier la clé La clé est le fait que l'énergie cinétique de l'électron est une quantité d'énergie qui sépare initialement l'électron du haut de la barrière du puits de potentiel. L'énergie qu'il perd en tombant dans l'état stationnaire dans le puits de potentiel est la somme de son énergie cinétique et de la différence entre la hauteur du puits et la hauteur de l'état stationnaire :

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{hc}{\lambda} \\ 1{,}250\,\text{eV} + (2{,}000\,\text{eV} - 0{,}229\,\text{eV}) &= \frac{hc}{\lambda} \ . \end{aligned}$$

Résoudre le problème

$$\begin{aligned} 1{,}250\,\text{eV} + (1{,}771\,\text{eV}) &= \frac{hc}{\lambda} \\ \lambda &= \frac{hc}{3{,}021\,\text{eV}} = \frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{3{,}021\,\text{eV}} \\ \lambda &= 410{,}5\,\text{nm} \qquad \text{(réponse)} \end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est correct.

Q33 **Décortiquer le problème** Trois électrons sont confinés dans des puits de potentiel différents. Les largeurs différentes de ces puits déterminent des probabilités différentes pour l'électron de traverser la barrière par effet tunnel.

Identifier la clé La clé est l'équation 11.55 de la probabilité de traverser une barrière de potentiel :

$$T \approx \mathrm{e}^{-2\kappa\ell}, \qquad \text{avec} \qquad \kappa = \frac{\sqrt{2m\,(U_0 - E)}}{\hbar^2} \;.$$

Les trois électrons ayant la même énergie, le facteur κ est identique pour les trois. Seule la largeur ℓ distingue les trois situations.

Résoudre le problème On exprime chacune des trois valeurs de probabilité avec les valeurs ℓ correspondantes :

$$T_{(\mathrm{i})} \approx \mathrm{e}^{-2\kappa\ell_{(\mathrm{i})}}, \qquad T_{(\mathrm{ii})} \approx \mathrm{e}^{-2\kappa\ell_{(\mathrm{ii})}}, \qquad T_{(\mathrm{iii})} \approx \mathrm{e}^{-2\kappa\ell_{(\mathrm{iii})}} \;.$$

Les propriétés des exposants permettent d'exprimer les mêmes valeurs dans une forme plus facile à interpréter :

$$T_{(\mathrm{i})} \approx \frac{1}{\mathrm{e}^{2\kappa\ell_{(\mathrm{i})}}}, \qquad T_{(\mathrm{ii})} \approx \frac{1}{\mathrm{e}^{2\kappa\ell_{(\mathrm{ii})}}}, \qquad T_{(\mathrm{iii})} \approx \frac{1}{\mathrm{e}^{2\kappa\ell_{(\mathrm{iii})}}} \;.$$

Les valeurs respectives des trois largeurs peuvent être ordonnées par ordre croissant :

$$\ell_{(\mathrm{ii})} > \ell_{(\mathrm{iii})} > \ell_{(\mathrm{i})} \;,$$

et le fait que la probabilité varie selon l'inverse d'une exponentielle qui est fonction de ℓ permet finalement d'établir que

$$T_{(\mathrm{ii})} < T_{(\mathrm{iii})} < T_{(\mathrm{i})} \;. \qquad \text{(réponse)}$$

Q34 **Décortiquer le problème** Pour une particule piégée dans un puits de potentiel de hauteur finie et de largeur connue, l'augmentation de la hauteur de la barrière peut avoir une influence sur la probabilité que la particule traverse une barrière par effet tunnel.

Identifier la clé La clé est l'équation 11.55 de la probabilité de traverser une barrière de potentiel :

$$T \approx \mathrm{e}^{-2\kappa\ell}, \qquad \text{avec} \qquad \kappa = \frac{\sqrt{2m\,(U_0 - E)}}{\hbar}$$

$$T \approx \mathrm{e}^{-2\frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}\ell} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{8\ell^2 m(U_0-E)}}{\hbar}}} \;. \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème Dans l'équation (i), on observe qu'une augmentation de la hauteur du puits U_0 a une influence sur la probabilité T. Si U_0 augmente, le terme au dénominateur augmente également, ce qui fait diminuer la probabilité pour la particule de traverser une barrière.

La probabilité de traverser la barrière diminue. (réponse)

Valider la réponse Le modèle du puits de potentiel appuie la conclusion trouvée : des barrières plus hautes réduisent la probabilité pour une particule de la traverser, même par effet tunnel.

Q35 **Décortiquer le problème** Deux particules différentes sont piégées dans des puits de potentiel identiques, de même hauteur finie et de même largeur. Les masses des particules étant différentes, la probabilité de chaque particule de traverser une barrière par effet tunnel n'est pas la même.

Identifier la clé La clé est l'équation 11.55 de la probabilité de traverser une barrière de potentiel :

$$T \approx \mathrm{e}^{-2\kappa\ell}, \qquad \text{avec} \qquad \kappa = \frac{\sqrt{2m\,(U_0 - E)}}{\hbar}$$

$$T \approx \mathrm{e}^{-2\frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}\ell} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{8\ell^2 m(U_0-E)}}{\hbar}}} \;. \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème L'équation (i) contient la masse m de la particule piégée. Cette variable étant au numérateur dans l'argument de l'exponentielle, une masse plus faible entraînera un dénominateur plus petit, et donc une probabilité plus grande pour la particule de traverser une barrière par effet tunnel. Ainsi, la particule la plus légère des deux (le proton) aura une probabilité plus grande de franchir la barrière.

Le proton, car sa masse est plus faible. (réponse)

E36 **Décortiquer le problème** Pour un électron piégé dans un puits de potentiel de dimensions connues, on peut analyser la possibilité qu'il sorte du puits par effet tunnel.

Connues		Inconnues
$K = 1{,}10\,\text{eV}$	$U_0 = 1{,}40\,\text{eV}$	T
$\ell = 1{,}500\,\text{nm}$	$mc^2 = 511 \times 10^3\,\text{eV}$	K

a. Identifier la clé La clé est l'équation 11.55 de la probabilité de traverser une barrière de potentiel :

$$T \approx \mathrm{e}^{-2\kappa\ell}, \qquad \text{avec} \qquad \kappa = \frac{\sqrt{2m\,(U_0 - E)}}{\hbar} = \frac{\sqrt{8\pi^2 m\,(U_0 - E)}}{h} = \frac{\sqrt{8\pi^2 mc^2\,(U_0 - E)}}{hc} \; .$$

Résoudre le problème Pour l'électron dans ce puits, on détermine la valeur du paramètre κ :

$$\kappa = \frac{\sqrt{8\pi^2 \times \left(511 \times 10^3\,\text{eV}\right)(1{,}40\,\text{eV} - 1{,}10\,\text{eV})}}{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}} = 2{,}806\,\text{nm}^{-1} \; .$$

La probabilité T est

$$T \approx \mathrm{e}^{-2\kappa\ell} = \mathrm{e}^{-2\times 2{,}806\,\text{nm}^{-1}\times 1{,}500\,\text{nm}} = 2{,}21 \times 10^{-4}$$

$$T = 2{,}21 \times 10^{-4} \; . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la probabilité trouvée est correct. L'effet tunnel est tout de même improbable.

b. Identifier la clé La clé est le fait qu'en traversant une barrière par effet tunnel, l'électron se retrouve à l'extérieur du puits avec la même énergie totale.

Résoudre le problème Puisque l'électron avait une énergie cinétique de 1,10 eV avant sa sortie du puits, il aura toujours une énergie cinétique de 1,10 eV :

$$K = 1{,}10\,\text{eV} \; . \qquad \text{(réponse)}$$

E37 **Décortiquer le problème** Si on connaît le coefficient de transmission pour un électron se trouvant dans un puits de potentiel de dimensions connues, on peut déterminer l'énergie de cet électron.

Connues	Inconnue
$U_0 = 5{,}000\,\text{eV}$	E
$\ell = 3{,}20\,\text{nm}$	
$T = 1{,}20 \times 10^{-6}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 11.55 de la probabilité de traverser une barrière de potentiel :

$$T \approx \mathrm{e}^{-2\kappa\ell}, \qquad \text{avec} \qquad \kappa = \frac{\sqrt{2m\,(U_0 - E)}}{\hbar}$$

$$T \approx \mathrm{e}^{-2\frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}\ell} \ . \tag{i}$$

Résoudre le problème Dans l'équation (i), on isole l'énergie E recherchée :

$$\ln T = -2\frac{\sqrt{2m\,(U_0 - E)}}{\hbar}\ell$$

$$E = U_0 - \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar \ln T}{2\ell}\right)^2 = U_0 - \frac{1}{2m}\left(\frac{h \ln T}{4\pi\ell}\right)^2 = U_0 - \frac{1}{32mc^2}\left(\frac{hc \ln T}{\pi\ell}\right)^2$$

$$E = 5{,}000\,\mathrm{eV} - \frac{1}{32 \times 511 \times 10^3\,\mathrm{eV}}\left(\frac{(1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm})\ln\left(1{,}20 \times 10^{-6}\right)}{\pi \times 3{,}20\,\mathrm{nm}}\right)^2$$

$$E = 4{,}827\,\mathrm{eV} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La valeur d'énergie trouvée est plausible. L'électron est piégé, car son énergie est inférieure à la hauteur du puits de potentiel, mais il peut tout de même en sortir par effet tunnel.

P38 **Décortiquer le problème** Dans le microscope à effet tunnel, la distance entre la pointe de la sonde et la surface de l'échantillon correspond à la largeur ℓ du puits de potentiel. Si on augmente cette distance, le coefficient de transmission des électrons est affecté.

Connues	Inconnue
$U_0 = E_{\text{é}} + 4{,}20\,\mathrm{eV}$	$T_\mathrm{f}/T_\mathrm{i}$
$\Delta\ell = 0{,}15\,\mathrm{nm}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 11.55 appliquée à la situation initiale et à la situation finale :

$$T \approx \mathrm{e}^{-2\kappa\ell}\,, \qquad \text{avec} \qquad \kappa = \frac{\sqrt{8\pi^2 m\,(U_0 - E)}}{h} \ .$$

Résoudre le problème Pour faciliter les manipulations algébriques dans l'évaluation du rapport recherché, on peut calculer d'abord le paramètre κ. Ainsi,

$$\kappa = \frac{\sqrt{8\pi^2 mc^2\,(U_0 - E)}}{hc} = \frac{\sqrt{8\pi^2 mc^2\,(U_0)}}{hc}$$

$$= \frac{\sqrt{8\pi^2 \times \left(511 \times 10^3\,\mathrm{eV}\right)(4{,}20\,\mathrm{eV})}}{1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}} = 10{,}498\,\mathrm{nm}^{-1} \ .$$

Par ailleurs, le rapport $T_\mathrm{f}/T_\mathrm{i}$ peut être exprimé par

$$\frac{T_\mathrm{f}}{T_\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{-2\kappa\ell_\mathrm{f}}}{\mathrm{e}^{-2\kappa\ell_\mathrm{i}}} = \mathrm{e}^{(-2\kappa\ell_\mathrm{f})-(-2\kappa\ell_\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{-2\kappa(\ell_\mathrm{f}\,-\,\ell_\mathrm{i})} \ .$$

La valeur de κ étant connue, on a

$$\frac{T_\mathrm{f}}{T_\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-2\,\times\left(10{,}498\,\mathrm{nm}^{-1}\right)\times(0{,}15\,\mathrm{nm})} = 0{,}042\,9 \ .$$

Ce rapport étant inférieur à 1, on constate que T_f est inférieur à T_i. Le facteur de diminution du coefficient de transmission est donc l'inverse de ce rapport :

$$\frac{T_\mathrm{i}}{T_\mathrm{f}} = \frac{1}{0{,}042\,9} = 23{,}3 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du facteur de réduction est correct. La section 11.8 mentionne que la sensibilité d'un microscope à effet tunnel avoisine le millième de nanomètre. Une variation de 0,15 nm produira donc un effet très perceptible pour l'instrument (une mesure 23 fois plus faible).

Q39 **Décortiquer le problème** Les diagrammes de niveaux d'énergie montrent des configurations électroniques dans une certaine région carrée. On peut reconnaître les configurations possibles et impossibles à partir de la position des électrons sur chaque niveau. La région étant carrée, les nombres quantiques des électrons dans cette région sont n_x, n_y et m_s.

Identifier la clé La clé est le fait qu'il est impossible de retrouver deux électrons ayant les mêmes nombres quantiques n et m_s.

Résoudre le problème Sur la figure (i), deux électrons sur le même niveau $E_{1,1}$ ont le même nombre magnétique de spin $m_s = +1/2$, représenté par une flèche vers le haut. Cette configuration est donc impossible.

Sur la figure (iv), deux électrons sur le même niveau $E_{2,2}$ ont le même nombre magnétique de spin $m_s = +1/2$, représenté par une flèche vers le haut. Cette configuration est donc impossible également.

Les deux autres configurations sont possibles. Sur la figure (ii), on retrouve aussi deux électrons ayant le même spin sur le deuxième niveau, mais comme il s'agit d'un état dégénéré tel que deux états ont la même valeur d'énergie ($E_{1,2}$ et $E_{2,1}$), il y a de la place pour deux électrons ayant un même spin, comme c'est le cas.

Les situations (ii) et (iii) sont possibles. (réponse)

E40 **Décortiquer le problème** Un système de plusieurs électrons dans un puits de potentiel comporte une énergie qui dépend du nombre d'électrons pouvant occuper chaque niveau.

Connues	Inconnues
$L_x = 0{,}500\,\text{nm}$	E_{fond}
$L_y = 1{,}000\,\text{nm}$	$E_{1\text{e}}$
$N_{\text{é}} = 5$	$E_{2\text{e}}$

a. **Identifier les clés** La première clé est le fait que l'énergie du système est la somme des énergies des cinq électrons présents, alors qu'un maximum de deux électrons peuvent occuper chaque niveau.

La deuxième clé est le calcul des différentes énergies à l'aide de l'équation 11.47 :

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}\right) ,$$

jusqu'à ce qu'on rencontre deux énergies de même valeur pour deux états dégénérés.

Puisque le puits traité n'a que deux dimensions,

$$E_{n_x,n_y} = \frac{(hc)^2}{8mc^2}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}\right) .$$

On peut évaluer numériquement la partie constante de cette équation pour réduire les manipulations ultérieures :

$$\begin{aligned} E_{n_x,n_y} &= \frac{(1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm})^2}{8\times 511\times 10^3\,\text{eV}}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}\right) \\ &= 0{,}376\,1\,\text{eV}\times\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}\right) . \end{aligned}$$

Facultativement, et pour simplifier davantage l'équation, on peut utiliser le fait que $L_y = 2L_x$ et écrire

$$E_{n_x,n_y} = 0{,}376\,1\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}^2 \times \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{(2L_x)^2}\right) = \frac{0{,}376\,1\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}^2}{L_x^2} \times \left(\frac{n_x^2}{1} + \frac{n_y^2}{4}\right)$$

$$E_{n_x,n_y} = \frac{0{,}376\,1\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}^2}{(0{,}500\,\mathrm{nm})^2} \times \left(n_x^2 + \frac{1}{4}n_y^2\right) = 1{,}505\,\mathrm{eV} \times \left(n_x^2 + \frac{n_y^2}{4}\right) \ . \qquad \text{(i)}$$

Cette équation sert au calcul de l'énergie de n'importe quel état stationnaire d'un électron dans le puits de potentiel considéré.

Résoudre le problème Pour évaluer correctement l'énergie du système dans différents états, dont l'état fondamental, on doit connaître l'énergie d'un électron sur les différents niveaux. On pourra alors déterminer l'état fondamental à partir de la somme la plus faible pour les cinq électrons.

Au niveau $E_{1,1}$, l'énergie d'un électron est

$$E_{1,1} = 1{,}505\,\mathrm{eV} \times \left(1^2 + \frac{1^2}{4}\right) = 1{,}88\,\mathrm{eV} \ . \qquad \text{(ii)}$$

Ce niveau peut accueillir deux électrons.

Au niveau $E_{1,2}$, l'énergie d'un électron est

$$E_{1,2} = 1{,}505\,\mathrm{eV} \times \left(1^2 + \frac{2^2}{4}\right) = 3{,}01\,\mathrm{eV} \ . \qquad \text{(iii)}$$

Ce niveau peut accueillir deux électrons également.

Au niveau $E_{2,1}$, l'énergie d'un électron est

$$E_{2,1} = 1{,}505\,\mathrm{eV} \times \left(2^2 + \frac{1^2}{4}\right) = 6{,}39\,\mathrm{eV} \ . \qquad \text{(iv)}$$

Ce niveau peut accueillir deux électrons également.

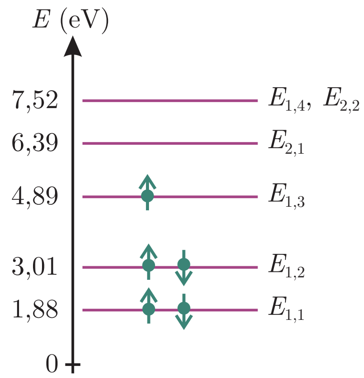
Attention ! Même si les trois niveaux dont l'énergie est quantifiée pourraient déjà accueillir six électrons, il n'est pas encore confirmé que ce sont les niveaux les plus bas. La largeur n'étant pas la même dans les deux dimensions, on vérifie si $E_{1,3}$ ne présenterait pas une énergie inférieure à l'une de celles qu'on a trouvées.

Au niveau $E_{1,3}$, l'énergie d'un électron est

$$E_{1,2} = 1{,}505\,\mathrm{eV} \times \left(1^2 + \frac{3^2}{4}\right) = 4{,}89\,\mathrm{eV} \ . \qquad \text{(v)}$$

En effet, le niveau $E_{1,3}$ sera peuplé par les électrons avant le niveau $E_{2,1}$. Il y a maintenant suffisamment d'emplacements pour les cinq électrons sans qu'il soit possible qu'un autre niveau présente une énergie plus faible.

La figure suivante illustre la configuration électronique de l'état fondamental du système. À l'état fondamental du système, deux des cinq électrons se trouveront donc au niveau le plus bas, $E_{1,1}$, avec des spins de $+1/2$ et $-1/2$. Deux autres électrons se trouveront sur le deuxième niveau le plus faible, soit $E_{1,2}$, eux aussi avec des spins inverses. Finalement, l'électron restant se trouvera sur le troisième niveau d'énergie le plus bas, soit $E_{1,3}$. Son spin sera l'une ou l'autre des deux valeurs possibles.



L'énergie totale du système est donc

$$\begin{aligned} E_{\text{fond}} &= 2E_{1,1} + 2E_{1,2} + E_{1,3} \\ &= 2 \times 1{,}88\,\text{eV} + 2 \times 3{,}01\,\text{eV} + 4{,}89\,\text{eV} \\ E_{\text{fond}} &= 14{,}7\,\text{eV} \ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que le premier état excité est celui dont l'énergie augmente le plus faiblement par rapport à l'état fondamental. Il s'agit donc de ne déplacer qu'un seul électron vers le niveau immédiatement supérieur pour augmenter l'énergie du système, à condition que ce soit un état permis par le principe d'exclusion de Pauli.

Résoudre le problème Les cinq électrons sont répartis sur trois niveaux. Il n'existe donc que trois transitions possibles d'un électron vers le niveau immédiatement supérieur. Cependant, un électron au niveau $E_{1,1}$ ne peut pas se déplacer vers le niveau $E_{1,2}$, car celui-ci est déjà complet (peuplé par deux électrons). Il ne reste que deux transitions possibles : l'un des électrons au niveau $E_{1,2}$ pourrait se déplacer vers le niveau $E_{1,3}$, et l'électron au niveau $E_{1,3}$ pourrait se déplacer vers le niveau $E_{2,1}$. Il faut donc déterminer laquelle de ces transitions présente l'augmentation d'énergie la plus faible.

Le gain d'énergie lors d'une transition du niveau $E_{1,2}$ vers le niveau $E_{1,3}$ est

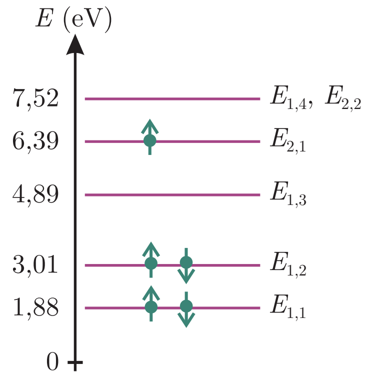
$$\Delta = E_{1,3} - E_{1,2} = 4{,}89\,\text{eV} - 3{,}01\,\text{eV} = 1{,}88\,\text{eV} \ . \qquad \text{(vi)}$$

Le gain d'énergie lors d'une transition du niveau $E_{1,3}$ vers le niveau $E_{2,1}$ est

$$\Delta = E_{2,1} - E_{1,3} = 6{,}39\,\text{eV} - 4{,}89\,\text{eV} = 1{,}50\,\text{eV} \ . \qquad \text{(vii)}$$

La figure ci-contre illustre la configuration électronique du premier état excité du système.

La transition $E_{1,3} \to E_{2,1}$ est donc celle qui amène le système à son premier état excité. Dans cet état, il y a toujours deux électrons au niveau $E_{1,1}$, il y en a toujours deux au niveau $E_{1,2}$, et le cinquième se trouve sur le niveau $E_{2,1}$. L'énergie du système dans cette configuration est alors



$$\begin{aligned} E_{1\text{e}} &= 2E_{1,1} + 2E_{1,2} + E_{2,1} \\ &= 2 \times 1{,}88\,\text{eV} + 2 \times 3{,}01\,\text{eV} + 6{,}39\,\text{eV} \end{aligned}$$

$$E_{1\text{e}} = 16{,}2\,\text{eV} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. **Identifier les clés** La première clé est le fait que le deuxième état excité est celui dont l'énergie augmente le plus faiblement par rapport au premier état excité.

La deuxième clé est le fait que le deuxième état excité n'est pas nécessairement un état où un électron a subi une excitation supplémentaire par rapport au premier état excité. On pourrait le trouver en remplaçant l'unique électron excité par un autre dont l'excitation requiert une énergie légèrement supérieure.

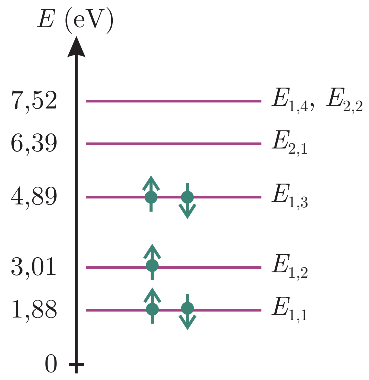
Résoudre le problème Comme le mentionne la deuxième clé, il y a deux choses à vérifier. Dans un premier temps, on peut calculer l'énergie du système si l'un des cinq électrons est excité d'un seul niveau par rapport à la configuration du premier état excité. Encore une fois, un électron au niveau $E_{1,1}$ ne peut pas se déplacer vers le niveau $E_{1,2}$ en raison du principe d'exclusion de Pauli. Si un électron du niveau $E_{1,2}$ se déplace vers le niveau $E_{1,3}$, on a trouvé en **b.** (ligne (vi)) que cela ajoute une énergie de 1,88 eV. Si l'électron excité au niveau $E_{1,3}$ se déplace vers le niveau $E_{1,4}$ ou $E_{2,2}$, le gain d'énergie du système est

$$\Delta E = E_{1,4} - E_{2,1} = 7{,}52\,\text{eV} - 6{,}39\,\text{eV} = 1{,}13\,\text{eV} \ ,$$

pour une énergie totale de

$$\begin{aligned} E &= 2E_{1,1} + 2E_{1,2} + E_{1,4} \\ E &= 2 \times 1{,}88\,\text{eV} + 2 \times 3{,}01\,\text{eV} + 7{,}52\,\text{eV} = 17{,}3\,\text{eV} \ . \end{aligned}$$

L'autre possibilité évoquée par la deuxième clé consiste à replacer l'électron excité à son niveau le plus bas ($E_{1,3}$) et à déplacer vers le haut d'un niveau l'un des quatre autres électrons. Encore une fois, seuls les électrons au niveau $E_{1,2}$ peuvent être excités d'un niveau.
Illustrer la situation La figure ci-contre illustre la configuration électronique du deuxième état excité du système.



Lors de cette transition, le gain d'énergie du système est 1,88 eV, comme on l'a calculé à la ligne (vi), pour une énergie totale de

$$\begin{aligned} E &= 2E_{1,1} + 1E_{1,2} + 2E_{1,3} \\ &= 2 \times 1{,}88\,\text{eV} + 1 \times 3{,}01\,\text{eV} + 2 \times 7{,}52\,\text{eV} = 16{,}5\,\text{eV} \ . \end{aligned}$$

Ce dernier résultat est la troisième valeur d'énergie la plus faible que le système peut avoir. Il correspond donc au deuxième état excité du système :

$$E_{2\text{e}} = 16{,}5\,\text{eV} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur des énergies trouvées est correct, et on confirme que l'énergie du deuxième état excité est supérieure à l'énergie du premier état excité, elle-même supérieure à l'énergie de l'état fondamental.

E41 **Décortiquer le problème** Une boîte cubique forme un puits de potentiel dont la largeur est la même dans les trois dimensions. Six électrons doivent se répartir sur les divers niveaux d'énergie du système.

Connues	Inconnues
$L_x = L_y = L_z = 0{,}700\,\text{nm}$	Diagramme d'énergie fondamental
	λ_{max} pour exciter le système

a. **Identifier les clés** La première clé est le calcul de l'énergie des quelques premiers niveaux jusqu'à ce qu'on détermine les trois niveaux d'énergie les plus faibles pour accueillir les six électrons.
La deuxième clé est le calcul des différentes énergies, à l'aide de l'équation 11.47 :

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}\right) \ .$$

En posant $L_x = L_y = L_z = L$, on peut évaluer numériquement la partie constante de cette équation pour réduire les manipulations ultérieures. On multiplie également l'énergie par c^2/c^2 pour faciliter la gestion des unités :

$$\begin{aligned} E_{n_x,n_y,n_z} &= \frac{h^2}{8m}\frac{c^2}{c^2}\left(\frac{n_x^2}{L^2} + \frac{n_y^2}{L^2} + \frac{n_z^2}{L^2}\right) = \frac{(hc)^2}{8mc^2L^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) \\ &= \frac{(1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm})^2}{8 \times \left(511 \times 10^3\,\text{eV}\right) \times (0{,}700\,\text{nm})}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) \\ E_{n_x,n_y,n_z} &= 0{,}767\,6\,\text{eV} \times \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) \ . \qquad \text{(i)} \end{aligned}$$

Cette équation sert au calcul de l'énergie de n'importe quel état stationnaire d'un électron dans le puits de potentiel considéré.

Résoudre le problème Pour tracer correctement le diagramme des niveaux d'énergie de ce puits de potentiel, on doit connaître la quantité d'énergie des quelques premiers niveaux permettant d'accueillir au total six électrons. L'équation (i) permet de calculer l'énergie à tous les niveaux.

Au niveau $E_{1,1,1}$, l'énergie d'un électron est

$$E_{1,1,1} = 0{,}767\,6\,\text{eV} \times \left(1^2 + 1^2 + 1^2\right) = 2{,}303\,\text{eV}\ . \tag{ii}$$

Ce niveau peut accueillir deux électrons.

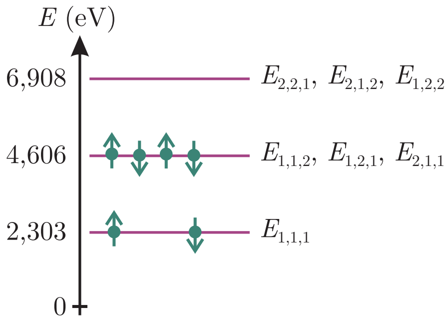
Au niveau $E_{1,1,2}$, l'énergie d'un électron est la même qu'aux niveaux $E_{1,2,1}$ et $E_{2,1,1}$, car la boîte est cubique. Ainsi,

$$E_{1,1,2} = E_{1,2,1} = E_{2,1,1} = 0{,}767\,6\,\text{eV} \times \left(1^2 + 1^2 + 2^2\right) = 4{,}606\,\text{eV}\ . \tag{iii}$$

Ce sont trois états dégénérés pouvant accueillir au total six électrons (deux par état). Ainsi, les quatre électrons qui ne sont pas acceptés au niveau $E_{1,1,1}$ trouvent leur place sur l'un de ces trois niveaux. On pourrait déjà tracer le diagramme des niveaux d'énergie de l'état fondamental, mais pour qu'il soit plus complet, on calcule également l'énergie du niveau supérieur, qui représente aussi trois états dégénérés :

$$E_{1,2,2} = E_{2,2,1} = E_{2,1,2} = 0{,}767\,6\,\text{eV} \times \left(1^2 + 2^2 + 2^2\right)$$
$$E_{1,2,2} = 6{,}908\,\text{eV}\ . \tag{iv}$$

La figure ci-dessous illustre la configuration électronique de l'état fondamental du système.



(réponse)

b. Identifier les clés La première clé consiste à déterminer la variation d'énergie amenant le système à son premier état excité.

La deuxième clé est l'équation 11.29 qui relie la longueur d'onde d'un photon absorbé à la variation d'énergie du système :

$$\Delta E = E_{\text{nh}} - E_{\text{nb}} = \frac{hc}{\lambda}$$
$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E}\ .$$

Résoudre le problème Les lignes (ii), (iii) et (iv) permettent de constater que les niveaux d'énergie sont tous séparés les uns des autres par $\Delta E = 2{,}303\,\text{eV}$. Ainsi, le premier état excité du système est atteint lorsque n'importe lequel des six électrons monte d'un niveau, soit du niveau de 2,303 eV vers le niveau de 4,606 eV, ou de ce dernier niveau vers le niveau de 6,908 eV. Dans tous les cas, la variation d'énergie est $\Delta E = 2{,}303\,\text{eV}$. Selon l'équation 11.29, le longueur d'onde du photon qui amènera le système à son premier niveau excité est

$$\lambda = \frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{2{,}303\,\text{eV}}$$
$$\lambda = 538{,}5\,\text{nm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est correct.

Physique 3 Ondes, optique et physique moderne - 1re édition

Chapitre 12 La physique atomique

E1 **Décortiquer le problème** Lors de la chute d'un électron aux niveaux 1, 2 ou 3 dans l'atome d'hydrogène, des photons de différentes longueurs d'onde sont produits, appartenant respectivement aux séries de Lyman, de Balmer et de Paschen.

Connue	Inconnues	
$R_\infty = 1{,}097 \times 10^7\,\mathrm{m}^{-1}$	$\lambda^{\max}_{\text{Lyman}}$	$\lambda^{\min}_{\text{Lyman}}$
	$\lambda^{\max}_{\text{Balmer}}$	$\lambda^{\min}_{\text{Balmer}}$
	$\lambda^{\max}_{\text{Paschen}}$	$\lambda^{\min}_{\text{Paschen}}$

Identifier les clés La première clé est l'équation 12.2, appliquée avec $n_1 = 1$, $n_1 = 2$ et $n_1 = 3$:

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$$

$$\lambda = \frac{1}{R_\infty \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)} \;. \tag{i}$$

La deuxième clé est le fait qu'on trouve la longueur d'onde maximale lorsque l'électron ne chute que d'un seul niveau, c'est-à-dire d'un niveau $(n+1)$ vers un niveau n. L'équation (i) devient alors

$$\lambda^{\max} = \frac{1}{R_\infty \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)} \;. \tag{ii}$$

La troisième clé est le fait qu'on trouve la longueur d'onde minimale lorsque l'on considère que l'électron tombe de la couche la plus élevée possible dans l'atome, soit lorsque $n_2 \to \infty$. Dans ce cas, l'équation (i) devient

$$\lambda^{\min} = \frac{1}{R_\infty \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{\infty^2}\right)}$$

$$\lambda^{\min} = \frac{n_1^2}{R_\infty} \;. \tag{iii}$$

Résoudre le problème Il ne reste qu'à appliquer les équations (ii) et (iii) pour les valeurs du niveau n final correspondant aux séries de Lyman, de Balmer et de Paschen.

a. La série de Lyman correspond aux diverses longueurs d'onde émises quand l'électron tombe au niveau fondamental, c'est-à-dire $n_{\text{final}} = 1$. Selon l'équation (ii), la longueur d'onde maximale est

$$\lambda^{\max}_{\text{Lyman}} = \frac{1}{R_\infty \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{(1+1)^2}\right)} = \frac{1}{1{,}097 \times 10^7\,\mathrm{m}^{-1} \times \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right)} = 121{,}5\,\mathrm{nm} \;.$$

Selon l'équation (iii), la longueur d'onde minimale est

$$\lambda^{\min}_{\text{Lyman}} = \frac{1^2}{R_\infty} = \frac{1^2}{1{,}097 \times 10^7\,\mathrm{m}^{-1}} = 91{,}16\,\mathrm{nm} \;.$$

Donc,

$$\lambda^{\max}_{\text{Lyman}} = 121{,}5\,\mathrm{nm} \qquad \text{et} \qquad \lambda^{\min}_{\text{Lyman}} = 91{,}16\,\mathrm{nm} \;. \qquad \text{(réponse)}$$

b. La série de Balmer correspond aux diverses longueurs d'onde émises quand l'électron tombe au niveau 2, c'est-à-dire $n_{\text{final}} = 2$, depuis un niveau supérieur. Selon l'équation (ii), la longueur d'onde maximale est

$$\lambda_{\text{Balmer}}^{\max} = \frac{1}{R_\infty\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{(2+1)^2}\right)} = \frac{1}{1{,}097 \times 10^7\,\text{m}^{-1} \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)} = 656{,}3\,\text{nm}\ .$$

Selon l'équation (iii), la longueur d'onde minimale est

$$\lambda_{\text{Balmer}}^{\min} = \frac{2^2}{R_\infty} = \frac{2^2}{1{,}097 \times 10^7\,\text{m}^{-1}} = 364{,}6\,\text{nm}\ .$$

Donc,

$$\lambda_{\text{Balmer}}^{\max} = 656{,}3\,\text{nm} \qquad \text{et} \qquad \lambda_{\text{Balmer}}^{\min} = 364{,}6\,\text{nm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. La série de Paschen correspond aux diverses longueurs d'onde émises quand l'électron tombe au niveau 3, c'est-à-dire $n_{\text{final}} = 3$, depuis un niveau supérieur. Selon l'équation (ii), la longueur d'onde maximale est

$$\lambda_{\text{Paschen}}^{\max} = \frac{1}{R_\infty\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{(3+1)^2}\right)} = \frac{1}{1{,}097 \times 10^7\,\text{m}^{-1} \times \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right)} = 1\,875\,\mu\text{m}\ .$$

Selon l'équation (iii), la longueur d'onde minimale est

$$\lambda_{\text{Paschen}}^{\min} = \frac{3^2}{R_\infty} = \frac{3^2}{1{,}097 \times 10^7\,\text{m}^{-1}} = 820{,}4\,\text{nm}\ .$$

Donc,

$$\lambda_{\text{Paschen}}^{\max} = 1\,875\,\mu\text{m} \qquad \text{et} \qquad \lambda_{\text{Paschen}}^{\min} = 820{,}4\,\text{nm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Les longueurs d'onde trouvées sont plausibles. Les valeurs de $\lambda^{\max}$ et de $\lambda^{\min}$ sont de plus en plus grandes à mesure qu'on traite des couches finales plus élevées, car il y a de moins en moins d'énergie à transformer en photons pour des chutes de plus en plus petites.

E2 **Décortiquer le problème** La série de Balmer concerne la chute d'un électron vers le deuxième niveau d'énergie dans l'atome d'hydrogène, alors que la série de Lyman concerne la chute d'un électron vers le premier niveau.

Connue	Inconnue
$R_\infty = 1{,}097 \times 10^7\,\text{m}^{-1}$	$\dfrac{\lambda_{\text{B},2}}{\lambda_{\text{L},2}}$

Identifier les clés La première clé est l'équation 12.2, appliquée avec $n_1 = 1$ et $n_1 = 2$:

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$$

$$\lambda = \frac{1}{R_\infty\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)}\ . \qquad \text{(i)}$$

La deuxième clé est le fait que la deuxième raie de chaque série est celle qui est constituée des photons émis quand un électron chute de deux niveaux d'énergie, c'est-à-dire que le niveau initial n_2 est égal à $n_1 + 2$.

Résoudre le problème Avant de calculer le rapport $\frac{\lambda_{\text{B},2}}{\lambda_{\text{L},2}}$, on peut calculer séparément les deux longueurs d'onde impliquées à l'aide de l'équation (i). Pour la deuxième raie de la série de Balmer, $n_1 = 2$ et $n_2 = 4$:

$$\lambda_{\text{B},2} = \frac{1}{R_\infty\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right)} = 486{,}17\,\text{nm}\ .$$

Pour la deuxième raie de la série de Lyman, $n_1 = 1$ et $n_2 = 3$:

$$\lambda_{\mathrm{L},2} = \frac{1}{R_\infty\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}\right)} = 102{,}55\,\mathrm{nm}\ .$$

Le rapport recherché est

$$\frac{\lambda_{\mathrm{B},2}}{\lambda_{\mathrm{L},2}} = \frac{486{,}17\,\mathrm{nm}}{102{,}55\,\mathrm{nm}} = 4{,}741\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Le rapport trouvé est plausible. Les fréquences trouvées sont du même ordre de grandeur.

E3 **Décortiquer le problème** La formule de Balmer est un cas particulier de la formule de Rydberg. On peut obtenir la première à partir de la seconde.

Identifier la clé La clé est l'équation 12.2 dans laquelle on utilise $n_1 = 2$ et $n_2 = n$:

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)\ .$$

Résoudre le problème

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda} &= R_\infty\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)\\
\lambda &= \frac{1}{R_\infty\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{R_\infty}\frac{1}{\left(\frac{n^2}{4n^2} - \frac{4}{4n^2}\right)}\\
&= \frac{1}{R_\infty}\left(\frac{4n^2}{n^2-4}\right) = \frac{4}{R_\infty}\left(\frac{n^2}{n^2-4}\right)\\
&= \frac{4}{1{,}097\times10^7\,\mathrm{m}^{-1}}\left(\frac{n^2}{n^2-4}\right)\\
\lambda &= 364{,}6\,\mathrm{nm}\left(\frac{n^2}{n^2-4}\right) \qquad \text{(réponse)}
\end{aligned}$$

Valider la réponse La forme simplifiée trouvée est bien la formule de Balmer, l'équation 12.1.

R4 **Décortiquer le problème** La lumière d'une lampe à hydrogène contient plusieurs raies dans la série de Balmer et on produit l'effet photoélectrique à partir de photons contenus dans cette lumière.

Connue	Inconnue
$\Phi = 2{,}20\,\mathrm{eV}$	$V_{\text{arrêt}}$

Identifier les clés La première clé est l'équation 10.16 de l'effet photoélectrique :

$$\frac{hc}{\lambda} = eV_{\text{arrêt}} + \Phi \qquad \Rightarrow \qquad V_{\text{arrêt}} = \frac{1}{e}\left(\frac{hc}{\lambda} - \Phi\right)\ . \qquad \text{(i)}$$

La deuxième clé est l'équation 12.1, la formule de Balmer, pour déterminer la longueur d'onde d'une raie utilisée dans l'effet photoélectrique :

$$\lambda = 364{,}56\,\mathrm{nm}\left(\frac{n^2}{n^2-4}\right)\ . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème L'union des équations (i) et (ii) permet d'obtenir une expression unique du potentiel d'arrêt recherché :

$$V_{\text{arrêt}} = \frac{1}{e}\left(\frac{hc}{364{,}56\,\mathrm{nm}\left(\frac{n^2}{n^2-4}\right)} - \Phi\right)\ . \qquad \text{(iii)}$$

On peut utiliser cette équation pour différentes valeurs de n, le niveau d'énergie initial de l'électron.

a. La première raie de la série de Balmer est celle qui est produite par la transition d'un électron du niveau $n = 3$ au niveau 2. L'équation (iii) devient

$$V_{\text{arrêt}} = \frac{1}{e}\left(\frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{364{,}56\,\text{nm}\left(\frac{3^2}{3^2-4}\right)} - 2{,}20\,\text{eV}\right) = -0{,}310\,\text{V} \ .$$

L'effet photoélectrique ne peut pas impliquer un potentiel négatif. Ce potentiel signifie plutôt que le photon impliqué n'a pas assez d'énergie pour extraire un électron de la surface utilisée.

Il n'y a pas d'effet photoélectrique. (réponse)

b. La deuxième raie de la série de Balmer est celle qui est produite par la transition d'un électron du niveau $n = 4$ au niveau 2. L'équation (iii) devient

$$V_{\text{arrêt}} = \frac{1}{e}\left(\frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{364{,}56\,\text{nm}\left(\frac{4^2}{4^2-4}\right)} - 2{,}20\,\text{eV}\right) = 0{,}351\,\text{V}$$

$$V_{\text{arrêt}} = 0{,}35\,\text{V} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du potentiel trouvé est correct.

c. La raie qui correspond à la limite de la série de Balmer est celle qui est produite par la transition d'un électron du niveau très élevé ($n \to \infty$) au niveau 2. L'équation (iii) devient

$$V_{\text{arrêt}} = \frac{1}{e}\left(\frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{364{,}56\,\text{nm}\left(\frac{\infty^2}{\infty^2-4}\right)} - 2{,}20\,\text{eV}\right) \ .$$

Le terme $\left(\frac{\infty^2}{\infty^2-4}\right)$ tend vers 1. La longueur d'onde impliquée est 364,56 nm, comme il est montré dans la solution **E1b.** Le potentiel d'arrêt est alors

$$V_{\text{arrêt}} = \frac{1}{e}\left(\frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{364{,}56\,\text{nm}\times 1} - 2{,}20\,\text{eV}\right) = 1{,}201\,\text{V}$$

$$V_{\text{arrêt}} = 1{,}20\,\text{V} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du potentiel trouvé est correct. De plus, il est supérieur à celui trouvé en **b.**, car le photon transmet plus d'énergie à l'électron extrait, ce qui nécessite un potentiel plus élevé pour l'immobiliser.

Q5 **Décortiquer le problème** L'antiélectron dans un atome d'antihydrogène, comme l'électron dans l'atome d'hydrogène, peut se trouver sur différents niveaux.

Identifier la clé La clé est le fait que la seule différence entre l'atome d'hydrogène et l'atome d'antihydrogène est la charge du noyau et de la particule en orbite.

Résoudre le problème La masse de l'antiélectron étant la même que celle de l'électron, la démonstration entière de l'énergie de chacun des niveaux de l'atome est identique, ce qui induit la même équation 12.15 pour l'énergie de l'antiélectron, $E_n = -\frac{13{,}60\,\text{eV}}{n^2}$. À l'état fondamental, $n = 1$, d'où

$$E_1 = -\frac{13{,}60\,\text{eV}}{1^2} = -13{,}60\,\text{eV} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

E6 **Décortiquer le problème** Lorsque l'électron d'un atome d'hydrogène absorbe un photon, l'énergie ajoutée le fait passer à un niveau d'énergie supérieur.

Connue	Inconnues
$\lambda = 92{,}62\,\text{nm}$	n
	r_n
	v_n

a. Identifier la clé La clé est l'équation 12.16 qui relie la longueur d'onde d'un photon incident aux niveaux d'énergie initial et final de l'électron :

$$\frac{hc}{\lambda} = -13{,}60\,\text{eV}\left(\frac{1}{n_\text{h}^2} - \frac{1}{n_\text{b}^2}\right) \ . \tag{i}$$

Résoudre le problème On cherche le nombre quantique du niveau d'énergie final, c'est-à-dire n_h. On l'isole dans l'équation (i) :

$$n_\text{h} = \sqrt{\frac{1}{\frac{hc}{\lambda(-13{,}60\,\text{eV})} + \frac{1}{n_\text{b}^2}}}$$

$$n_\text{h} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{(92{,}62\,\text{nm})\times(-13{,}60\,\text{eV})} + \frac{1}{1^2}}} = n_\text{h} = 8{,}01 \ .$$

La valeur trouvée est très près d'un entier, comme l'exigent les propriétés des nombres quantiques, ce qui laisse penser que la réponse est bien $n = 8$:

$$n_\text{h} = 8 \ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse La valeur trouvée est plausible. Le huitième niveau est très près de l'ionisation de l'atome d'hydrogène, ce qui est plausible dans le cas d'un photon de 92,62 nm.

b. Identifier la clé La clé est l'équation 12.13 du rayon de l'orbite de l'électron dans l'atome de Bohr :

$$r = \frac{\hbar}{\alpha mc}n^2 = a_0 n^2, \qquad \text{avec} \qquad a_0 = 0{,}052\,91\,\text{nm} \ . \tag{ii}$$

Résoudre le problème On a trouvé en **a.** que $n = 8$. On peut donc résoudre l'équation (ii) :

$$r_8 = 0{,}052\,91\,\text{nm} \times 8^2$$
$$r_8 = 3{,}386\,\text{nm} \ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse La valeur trouvée pour le rayon est plausible pour l'électron dans l'atome d'hydrogène.

c. Identifier la clé L'une des clés possibles pour trouver la vitesse de l'électron est l'équation 12.11, qui est la plus rapide pour connaître la vitesse :

$$v = \frac{\alpha}{n}c, \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \frac{1}{137} \ . \tag{iii}$$

Résoudre le problème Le calcul de la vitesse selon l'équation (iii) donne

$$v_8 = \frac{\alpha}{n}c = \frac{c}{8\times 137} = \frac{c}{1\,097}$$
$$v_8 = \frac{c}{1\,097} = 2{,}735\times 10^5\,\text{m/s} \ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse La vitesse trouvée est plausible, de loin inférieure à la vitesse de la lumière.

E7 Décortiquer le problème L'hélium ionisé He^+ est un ion hydrogénoïde qui obéit aux mêmes équations que l'hydrogène pour l'énergie de l'électron sur les différents niveaux d'énergie.

Connues	Inconnue
$Z = 2$	ΔE
$n_\text{i} = 1$	
$n_\text{f} = \infty$	

Identifier les clés La première clé est l'équation 12.19 qui donne l'énergie au niveau d'énergie n :

$$E_n = -\frac{13{,}60\,\mathrm{eV}Z^2}{n^2} \ . \tag{i}$$

La deuxième clé est le fait que, pour ioniser complètement l'atome d'hélium, il faut déplacer l'électron restant vers le niveau $n = \infty$.

Résoudre le problème On calcule d'abord l'énergie de l'électron lorsqu'il est au niveau le plus bas, avant l'ionisation. Pour l'hélium, $Z = 2$:

$$E_1 = -\frac{13{,}60\,\mathrm{eV} \times 2^2}{1^2} = -54{,}4\,\mathrm{eV} \ .$$

Lorsque l'atome est complètement ionisé, l'électron est à un niveau $n \to \infty$:

$$E_\infty = -\frac{13{,}60\,\mathrm{eV} \times 2^2}{\infty^2} = 0\,\mathrm{eV} \ .$$

L'apport d'énergie requis est donné par la différence des énergies trouvées :

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_\infty - E_1 = (0\,\mathrm{eV}) - (-54{,}4\,\mathrm{eV}) \\ \Delta E &= 54{,}4\,\mathrm{eV} \ . \end{aligned} \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct.

E8 **Décortiquer le problème** Dans l'atome d'hydrogène, un électron se trouvant au deuxième état excité peut émettre des photons de différentes longueurs d'onde lors de son retour vers l'état fondamental.

Connue	Inconnues
$n_\mathrm{i} = 3$	$\lambda_{3\to1}$
	$\lambda_{3\to2}$
	$\lambda_{2\to1}$

Identifier les clés La première clé est l'équation 12.16 qui relie la longueur d'onde d'un photon incident aux niveaux d'énergie initial et final de l'électron :

$$\begin{aligned} \frac{hc}{\lambda} &= -13{,}60\,\mathrm{eV}\left(\frac{1}{n_\mathrm{h}^2} - \frac{1}{n_\mathrm{b}^2}\right) \\ \lambda &= \frac{hc}{-13{,}60\,\mathrm{eV}\left(\frac{1}{n_\mathrm{h}^2} - \frac{1}{n_\mathrm{b}^2}\right)} \ . \end{aligned} \tag{i}$$

La deuxième clé est le fait que le retour à l'état fondamental peut se faire de deux façons, soit par un retour direct à l'état fondamental, soit par le passage par le premier état excité, avec deux transitions.

Résoudre le problème Dans le cas d'une transition unique vers le niveau fondamental, l'électron passe du niveau $n = 3$ au niveau $n = 1$. La longueur d'onde du photon émis est

$$\lambda_{3\to1} = \frac{1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}{-13{,}60\,\mathrm{eV}\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{1^2}\right)} = 102{,}6\,\mathrm{nm} \ .$$

Dans le cas de deux transitions, vers le niveau 2 et ensuite vers le niveau 1, la longueur d'onde du premier photon émis est

$$\lambda_{3\to2} = \frac{1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}{-13{,}60\,\mathrm{eV}\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2}\right)} = 656{,}5\,\mathrm{nm} \ ,$$

et la longueur d'onde du deuxième photon émis est

$$\lambda_{2\to 1} = \frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{-13{,}60\,\text{eV}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{1^2}\right)} = 121{,}6\,\text{nm}\ .$$

Les différents photons pouvant être émis ont pour longueurs d'onde

$$\lambda_{3\to 1} = 102{,}6\,\text{nm},\ \lambda_{3\to 2} = 656{,}5\,\text{nm},\ \lambda_{2\to 1} = 121{,}6\,\text{nm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur des longueurs d'onde trouvées est correct.

E9 **Décortiquer le problème** Le fait de bombarder des atomes d'hydrogène avec des photons d'une certaine longueur d'onde peut fournir assez d'énergie aux électrons pour ioniser l'atome.

Connue	Inconnue
$\lambda = 85{,}0\,\text{nm}$	$K_{\text{é}}$

Identifier la clé La clé est le fait que le photon a plus d'énergie qu'il n'en faut pour ioniser l'atome. L'excédent d'énergie se retrouve dans l'énergie cinétique de l'électron.

Résoudre le problème On calcule l'énergie de l'atome dans l'état fondamental ($n = 1$) et ensuite dans l'état ionisé ($n = \infty$) à l'aide de l'équation 12.15 :

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{13{,}60\,\text{eV}}{1^2} = -13{,}60\,\text{eV} \\ E_\infty &= -\frac{13{,}60\,\text{eV}}{\infty^2} = 0\,\text{eV}\ . \end{aligned}$$

L'énergie permettant d'ioniser l'atome est

$$\Delta E_{1\to\infty} = E_\infty - E_1 = (0\,\text{eV}) - (-13{,}60\,\text{eV}) = 13{,}60\,\text{eV}\ .$$

On calcule également l'énergie portée par le photon incident à l'aide de l'équation 10.1 :

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1\,240\,\text{eV}\cdot\text{nm}}{85{,}0\,\text{nm}} = 14{,}588\,\text{eV}\ .$$

La différence d'énergie entre E_γ et $\Delta E_{1\to\infty}$ est l'énergie cinétique de l'électron éjecté :

$$\begin{aligned} K_{\text{é}} &= E_\gamma - \Delta E_{1\to\infty} = 14{,}588\,\text{eV} - 13{,}60\,\text{eV} \\ K_{\text{é}} &= 0{,}99\,\text{eV}\ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct.

P10 **Décortiquer le problème** Les différentes transitions de l'électron dans l'atome d'hydrogène produisent des photons de différentes longueurs d'onde. Une valeur donnée de longueur d'onde ne correspond qu'à une transition bien précise parmi les transitions possibles.

Connue	Inconnues
$\lambda = 383{,}65\,\text{nm}$	n_{i} n_{f} Série

a. Identifier les clés La première clé est l'équation 12.16 qui relie la longueur d'onde d'un photon incident aux niveaux d'énergie initial et final de l'électron :

$$\frac{hc}{\lambda} = -13{,}60\,\text{eV}\left(\frac{1}{n_{\text{h}}^2} - \frac{1}{n_{\text{b}}^2}\right)\ . \qquad \text{(i)}$$

La deuxième clé est le fait que l'équation (i) doit faire intervenir deux valeurs entières pour les nombres quantiques n. On peut donc calculer n_h pour $\lambda = 383{,}65\,\mathrm{nm}$ et pour différentes valeurs de n_b jusqu'à trouver un résultat entier. Selon cette méthode, l'équation (i) peut s'écrire

$$n_\mathrm{h} = \sqrt{\frac{1}{\frac{hc}{\lambda(-13{,}60\,\mathrm{eV})} + \frac{1}{n_\mathrm{b}^2}}} \ . \tag{ii}$$

Résoudre le problème Selon l'équation (ii), si la longueur d'onde appartient à la série de Lyman ($n_\mathrm{b} = 1$), le niveau n_h est

$$n_\mathrm{h} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}{(383{,}65\,\mathrm{nm})\times(-13{,}60\,\mathrm{eV})} + \frac{1}{1^2}}} = 1{,}14 \ .$$

La valeur trouvée n'est pas un entier, ce qui invalide la possibilité que le photon d'onde soit produit lors d'une transition vers le niveau fondamental.

Si la longueur d'onde appartient à la série de Balmer ($n_\mathrm{b} = 2$), le niveau n_h est

$$n_\mathrm{h} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}{(383{,}65\,\mathrm{nm})\times(-13{,}60\,\mathrm{eV})} + \frac{1}{2^2}}} = 9{,}000\,4 \ .$$

La valeur trouvée est très près d'un entier, ce qui laisse penser que c'est la valeur entière recherchée (l'écart étant dû à l'inexactitude des valeurs arrondies de l'équation). L'électron passe donc du niveau 9 au niveau 2 :

$$n_\mathrm{i} = 9 \text{ et } n_\mathrm{f} = 2. \qquad \text{(réponse)}$$

b. Identifier la clé La clé est le fait que toutes les transitions lors desquelles l'électron retombe au niveau 2 appartiennent à la série de Balmer.

La raie fait partie de la série de Balmer. (réponse)

P11 Décortiquer le problème Un ion He^+ émet un photon lorsque son électron restant chute d'un niveau d'énergie vers un autre. Pour certaines transitions, le photon émis appartient au domaine visible.

Connue	Inconnue
$n_\mathrm{i} = 7$	$\lambda_\mathrm{visibles}$

Identifier la clé La clé est l'union des équations 12.16 et 12.19, qui donne une équation de la longueur d'onde d'un photon émis en fonction des niveaux initial et final de l'électron :

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda} = E_\mathrm{h} - E_\mathrm{b} \qquad \text{et} \qquad E_n = -\frac{13{,}60\,\mathrm{eV}\,Z^2}{n^2} \ .$$

La première équation tient compte de la longueur d'onde du photon émis, alors que la seconde tient compte du fait que le noyau est celui de l'hélium, pour lequel $Z = 2$. Ainsi, l'équation condensée est

$$\frac{hc}{\lambda} = -13{,}60\,\mathrm{eV}\,Z^2\left(\frac{1}{n_\mathrm{h}^2} - \frac{1}{n_\mathrm{b}^2}\right)$$
$$\lambda = \frac{hc}{-13{,}60\,\mathrm{eV}\,Z^2\left(\frac{1}{n_\mathrm{h}^2} - \frac{1}{n_\mathrm{b}^2}\right)} \ .$$

On peut évaluer la partie constante de cette équation pour réduire les calculs ultérieurs des différentes longueurs d'onde :

$$\lambda = \frac{1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}{-13{,}60\,\mathrm{eV}\,2^2\left(\frac{1}{n_\mathrm{h}^2}-\frac{1}{n_\mathrm{b}^2}\right)}$$

$$\lambda = \frac{-22{,}794\,\mathrm{nm}}{\frac{1}{n_\mathrm{h}^2}-\frac{1}{n_\mathrm{b}^2}}\ . \tag{i}$$

Résoudre le problème De nombreuses combinaisons de transitions sont possibles lors du passage d'un électron du niveau 7 vers le niveau 1. Les transitions du niveau 7 vers les niveaux inférieurs produisent les photons suivants :

$$\begin{aligned}
\lambda_{7\to6} &= \frac{-22{,}794\,\mathrm{nm}}{\frac{1}{7^2}-\frac{1}{6^2}} = 3\,093\,\mathrm{nm} &&\text{(non visible)}\\
\lambda_{7\to5} &= \frac{-22{,}794\,\mathrm{nm}}{\frac{1}{7^2}-\frac{1}{5^2}} = 1\,163\,\mathrm{nm} &&\text{(non visible)}\\
\lambda_{7\to4} &= \frac{-22{,}794\,\mathrm{nm}}{\frac{1}{7^2}-\frac{1}{4^2}} = 541{,}5\,\mathrm{nm} &&\text{(visible)}\\
\lambda_{7\to3} &= \frac{-22{,}794\,\mathrm{nm}}{\frac{1}{7^2}-\frac{1}{3^2}} = 251{,}3\,\mathrm{nm} &&\text{(non visible)}\ .
\end{aligned}$$

Les deux autres photons pour $n_\mathrm{h} = 7$ sont évidemment non visibles. On a donc déjà un photon visible identifié ($\lambda_{7\to4}$).

Les transitions du niveau 6 vers les niveaux inférieurs produisent les photons suivants :

$$\begin{aligned}
\lambda_{6\to5} &= \frac{-22{,}794\,\mathrm{nm}}{\frac{1}{6^2}-\frac{1}{5^2}} = 1\,865\,\mathrm{nm} &&\text{(non visible)}\\
\lambda_{6\to4} &= \frac{-22{,}794\,\mathrm{nm}}{\frac{1}{6^2}-\frac{1}{4^2}} = 656{,}5\,\mathrm{nm} &&\text{(visible)}\\
\lambda_{6\to3} &= \frac{-22{,}794\,\mathrm{nm}}{\frac{1}{6^2}-\frac{1}{3^2}} = 273{,}5\,\mathrm{nm} &&\text{(non visible)}\ .
\end{aligned}$$

Les deux autres photons pour $n_\mathrm{h} = 6$ sont évidemment non visibles. On a donc un deuxième photon visible identifié ($\lambda_{6\to4}$).

Les transitions du niveau 5 vers les niveaux inférieurs produisent les photons suivants :

$$\begin{aligned}
\lambda_{5\to4} &= \frac{-22{,}794\,\mathrm{nm}}{\frac{1}{5^2}-\frac{1}{4^2}} = 1\,013\,\mathrm{nm} &&\text{(non visible)}\\
\lambda_{5\to3} &= \frac{-22{,}794\,\mathrm{nm}}{\frac{1}{5^2}-\frac{1}{3^2}} = 320{,}5\,\mathrm{nm} &&\text{(non visible)}\ .
\end{aligned}$$

Les deux autres photons pour $n_\mathrm{h} = 5$ sont évidemment non visibles et $n_\mathrm{h} = 5$ n'est associé à aucun photon visible.

Les transitions du niveau 4 vers les niveaux inférieurs produisent les photons suivants :

$$\begin{aligned}
\lambda_{4\to3} &= \frac{-22{,}794\,\mathrm{nm}}{\frac{1}{4^2}-\frac{1}{3^2}} = 468{,}9\,\mathrm{nm} &&\text{(visible)}\\
\lambda_{4\to2} &= \frac{-22{,}794\,\mathrm{nm}}{\frac{1}{4^2}-\frac{1}{2^2}} = 121{,}6\,\mathrm{nm} &&\text{(non visible)}\ .
\end{aligned}$$

L'autre photon pour $n_\mathrm{h} = 4$ est évidemment non visible. On connaît un troisième photon visible ($\lambda_{4\to3}$).

Les transitions du niveau 3 vers les niveaux inférieurs produisent les photons suivants :

$$\lambda_{3\to2} = \frac{-22{,}794\,\text{nm}}{\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^2}} = 164{,}1\,\text{nm} \qquad \text{(non visible)}$$
$$\lambda_{3\to1} = \frac{-22{,}794\,\text{nm}}{\frac{1}{3^2}-\frac{1}{1^2}} = 25{,}64\,\text{nm} \qquad \text{(non visible)}\ .$$

Aucun photon visible n'est produit pour $n_\text{h} = 3$.
La transition du niveau 2 vers le niveau 1 produit le photon suivant :

$$\lambda_{2\to1} = \frac{-22{,}794\,\text{nm}}{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{1^2}} = 30{,}4\,\text{nm} \qquad \text{(non visible)}\ .$$

Le photon produit n'est pas visible lorsque $n_\text{h} = 2$.
On a déterminé en tout trois transitions produisant des photons visibles :

$$\lambda_{7\to4} = 541{,}5\,\text{nm}\ , \qquad \lambda_{6\to4} = 656{,}5\,\text{nm}\ , \qquad \lambda_{4\to3} = 468{,}9\,\text{nm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

P12 **Décortiquer le problème** L'électron étant en orbite dans un mouvement répétitif, on peut parler de la période orbitale de son mouvement.

Connue	Inconnue
n	T_orb

Identifier les clés La première clé est la relation en cinématique entre la période orbitale, le rayon de la trajectoire et le module de la vitesse orbitale :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{2\pi r}{T} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{2\pi r}{v}\ .$$

La deuxième clé est l'union des équations 12.11 et 12.13 qui expriment le module de la vitesse et le rayon pour un niveau d'énergie n en fonction de la constante de structure fine α :

$$v = \frac{\alpha c}{n} \qquad \text{et} \qquad r = \frac{\hbar n^2}{\alpha m c}\ .$$

Résoudre le problème L'union des deux équations clés a pour résultat une équation unique de la période orbitale de l'électron pour un niveau n :

$$T = \frac{2\pi r}{v}, \qquad \text{avec} \qquad r = \frac{\hbar n^2}{\alpha m c} \qquad \text{et} \qquad v = \frac{\alpha c}{n}$$

$$T = \frac{2\pi \frac{\hbar n^2}{\alpha m c}}{\frac{\alpha c}{n}} = \frac{2\pi \frac{h}{2\pi} n^3}{\alpha^2 m c^2}$$

$$T = \frac{h}{\alpha^2 m c^2}\, n^3\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Les unités de l'expression trouvée sont bien des unités de temps.

Q13 **Décortiquer le problème** Un échantillon d'hydrogène peut absorber des photons selon le processus inverse de leur émission.

Identifier la clé La clé est le fait que les raies de la série de Lyman sont associées aux transitions de l'électron impliquant le niveau fondamental.

Résoudre le problème Si seules les longueurs d'onde de la série de Lyman sont absorbées par l'hydrogène, cela signifie que toutes les transitions produites par l'absorption de l'énergie incidente impliquent le niveau fondamental des électrons. Ceux-ci ne pouvant être qu'excités lorsqu'ils sont dans leur état fondamental, on en déduit que tous les électrons de l'échantillon se trouvent initialement dans leur état fondamental et sont excités vers un niveau supérieur. Aucun électron n'est déjà excité à un niveau $n > 1$ pour absorber une longueur d'onde n'appartenant pas à la série de Lyman.

Le fait que l'échantillon d'hydrogène soit à la température de la pièce fait en sorte qu'il est possible qu'aucun électron ne soit déjà excité. À haute température, il aurait pu en être autrement.

À la température de la pièce, tous les atomes d'hydrogène
sont dans leur état fondamental $n = 1$. (réponse)

Q14 **Décortiquer le problème** Les différents nombres quantiques pour un atome d'hydrogène ne peuvent prendre que certaines combinaisons de valeurs. Certaines combinaisons suggérées dans l'énoncé peuvent être impossibles.

Identifier la clé La clé est l'équation 12.26 qui définit les valeurs des nombres quantiques n, ℓ et m_ℓ :

$$n = 1,\ 2,\ \ldots, \qquad \ell = 0,\ \ldots,\ n-1 \qquad \text{et} \qquad m_\ell = -\ell,\ -\ell+1,\ \ldots,\ \ell\ .$$

Résoudre le problème Les quatre valeurs n sont possibles, puisque n doit être un entier positif.

ℓ doit être compris entre 0 et $n-1$, selon l'équation 12.26. Cette condition écarte la situation (iii), car 4 n'est pas compris entre 0 et $(4-1)$. Les trois autres situations indiquent un ℓ possible.

m_ℓ doit être compris entre $-\ell$ et ℓ, selon l'équation 12.26. Cette condition écarte la situation (i), car 1 n'est pas compris entre $\ell = 0$ et $-\ell = 0$. Il ne reste donc que deux situations possibles.

Les situations (ii) et (iv) sont possibles. (réponse)

E15 **Décortiquer le problème** À partir de la sous-couche sur laquelle un électron se trouve dans un atome d'hydrogène, on peut déduire toutes les propriétés quantiques de cet atome.

Connue	Inconnues
Sous-couche $= 4f$	E
	L
	m_ℓ

a. **Identifier la clé** La clé est le fait que la sous-couche $4f$ pour un électron implique qu'il se trouve au niveau $n = 4$.

Résoudre le problème L'énergie d'un électron au niveau n est donnée par l'équation 12.27. Pour le niveau 4, on a

$$E_4 = -\frac{13{,}60\,\text{eV}}{n^2} = -\frac{13{,}60\,\text{eV}}{4^2}$$
$$E_4 = -0{,}850\,0\,\text{eV}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct.

b. **Identifier les clés** La première clé est le fait que la sous-couche $4f$ indique que $\ell = 3$ (équation 12.29). La deuxième clé est l'équation 12.31 du module du moment cinétique :

$$L = \sqrt{\ell\,(\ell+1)}\hbar\ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème Selon l'équation (i), avec $\ell = 3$, on a

$$L = \sqrt{3 \times (3+1)} \times 1{,}055 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$$
$$L = \sqrt{12}\hbar\ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. Identifier la clé La clé est l'équation 12.26 qui définit les valeurs possibles de m_ℓ en fonction de ℓ :

$$m_\ell = -\ell,\ -\ell+1,\ \ldots,\ell \qquad \Rightarrow \qquad -\ell \geq m_\ell \geq \ell\ .$$

Résoudre le problème Puisque $\ell = 3$, m_ℓ peut prendre les valeurs comprises entre -3 et 3 inclusivement :

$$m_\ell = \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0\ . \qquad \text{(réponse)}$$

E16 Décortiquer le problème Un électron fait une transition du cinquième niveau au deuxième niveau. Un photon est émis et possède l'énergie dégagée par la transition.

Connues	Inconnues
$n_\mathrm{h} = 5$	$E\gamma$
$n_\mathrm{b} = 2$	λ

a. Identifier la clé La clé est l'équation 12.15 qui sert à trouver l'énergie dans chacun des niveaux initial et final de la transition. La différence entre les deux valeurs d'énergie trouvées est l'énergie du photon émis :

$$E_n = -\frac{13{,}60\,\mathrm{eV}}{n^2}\ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème Au niveau initial $n = 5$, l'équation (i) donne

$$E_5 = -\frac{13{,}60\,\mathrm{eV}}{5^2} = -0{,}544\,0\,\mathrm{eV}\ .$$

Au niveau final $n = 2$, l'équation (i) donne

$$E_2 = -\frac{13{,}60\,\mathrm{eV}}{2^2} = -3{,}400\,\mathrm{eV}\ .$$

La variation d'énergie de l'électron, égale à l'opposé de l'énergie du photon émis, est

$$E_\gamma = -\Delta E = -(E_2 - E_5) = -((-3{,}400\,\mathrm{eV}) - (-0{,}544\,0\,\mathrm{eV}))$$
$$E_\gamma = 2{,}856\,\mathrm{eV}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct.

b. Identifier la clé La clé est l'équation 12.16 qui permet de définir la longueur d'onde d'un photon émis en fonction de la variation d'énergie de l'atome :

$$\frac{hc}{\lambda} = -13{,}60\,\mathrm{eV}\left(\frac{1}{n_\mathrm{h}^2} - \frac{1}{n_\mathrm{b}^2}\right)$$
$$\lambda = \frac{hc}{-13{,}60\,\mathrm{eV}\left(\frac{1}{n_\mathrm{h}^2} - \frac{1}{n_\mathrm{b}^2}\right)}\ . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème On procède au calcul :

$$\lambda = \frac{1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}{-13{,}60\,\mathrm{eV}\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{2^2}\right)}$$
$$\lambda = 434{,}2\,\mathrm{nm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La valeur de longueur d'onde trouvée est plausible. Ce photon appartient au domaine visible.

E17 **Décortiquer le problème** Une valeur du moment cinétique d'un atome d'hydrogène est associée à un état particulier de l'atome.

Connues	Inconnues
$L = 3{,}46\hbar$	Sous-couche
$m_\ell = -1$	$E_{\min}$
	$\theta_{\vec{\mathbf{L}}-z}$

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 12.31 du module du moment cinétique de l'atome :

$$L = \sqrt{\ell\,(\ell+1)}\hbar\ . \tag{i}$$

Résoudre le problème L'équation permet de déterminer ℓ, car on sait que $L = 3{,}46\hbar$:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\ell\,(\ell+1)}\hbar = 3{,}46\hbar \\ \ell\,(\ell+1) &= 3{,}46^2 \\ \ell^2 + \ell - 3{,}46^2 &= 0\ . \end{aligned}$$

Les solutions mathématiques de cette équation sont $\ell = 3$ et $\ell = -4$. Mais comme ℓ ne peut être qu'un entier positif (selon l'équation 12.29), on ne peut conserver qu'une des deux solutions :

$$\ell = 3\ . \tag{réponse}$$

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que la valeur $\ell = 3$ trouvée en **a.** admet plusieurs valeurs possibles de n, selon l'équation 12.26 :

$$\ell = 0,\ \ldots,\ n-1\ . \tag{ii}$$

Résoudre le problème L'équation (ii) montre que la valeur maximale possible de ℓ est $(n-1)$. Si $\ell = 3$, la valeur minimale possible de n est donc 4 (si n était égal à 3, ℓ ne pourrait pas être égal à 3). L'énergie minimale de l'atome est donc liée à la valeur minimale de n (la valeur la plus négative de l'énergie étant la valeur minimale). L'équation 12.27 donne la valeur de cette énergie pour $n = 4$:

$$\begin{aligned} E_n &= -\frac{13{,}60\,\mathrm{eV}}{n^2} \\ E_4 &= -\frac{13{,}60\,\mathrm{eV}}{4^2} = -0{,}850\,0\,\mathrm{eV} \\ E_{\min} &= E_4 = -0{,}850\,0\,\mathrm{eV}\ . \end{aligned} \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct. La valeur négative indique que l'électron est prisonnier du puits de potentiel, une énergie nulle ou positive signifiant un électron libre.

c. **Identifier les clés** La première clé est l'équation 12.32 qui donne la composante z du moment cinétique :

$$L_z = m_\ell \hbar\ . \tag{iii}$$

La deuxième clé est la relation entre le moment cinétique L et sa composante z :

$$L_z = L\cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arccos\frac{L_z}{L}\ . \tag{iv}$$

Résoudre le problème On indique dans l'énoncé que $m_\ell = -1$. La composante z du moment cinétique, selon l'équation (iii), est donc

$$L_z = -1\hbar\ .$$

L'équation (iv) permet alors de trouver θ :

$$\theta = \arccos\frac{L_z}{L} = \arccos\frac{-1\hbar}{3{,}46\hbar}$$
$$\theta = 106{,}8^\circ \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'angle trouvé est plausible.

E18 **Décortiquer le problème** À partir de la valeur du nombre quantique ℓ, on peut établir les différentes orientations possibles du vecteur moment cinétique.

Connue	Inconnue
$\ell = 1$	Diagramme des orientations θ possibles

Identifier la clé La clé est l'union des équations 12.26, 12.31 et 12.32 :

$$\ell \geq m_\ell \geq \ell \ , \qquad L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar \qquad \text{et} \qquad L_z = m_\ell\hbar \ ,$$

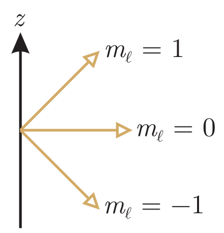
en plus du fait que la composante z du moment cinétique est liée au module du moment cinétique par $L_z = L\cos\theta$. Ainsi,

$$\theta = \arccos\frac{m_\ell\hbar}{\sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar} = \arccos\frac{m_\ell}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \ , \qquad \text{avec} \qquad m_\ell = -1,\ 0,\ 1 \ . \qquad \text{(i)}$$

a. Résoudre le problème Pour tracer un diagramme comme celui de la figure 12.15, on doit d'abord calculer les différentes orientations θ possibles. Selon l'équation (i),

$$\theta_{-1} = \arccos\frac{m_\ell}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1\times(1+1)}} = 135^\circ$$
$$\theta_0 = \arccos\frac{m_\ell}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1\times(1+1)}} = 90{,}0^\circ$$
$$\theta_1 = \arccos\frac{m_\ell}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1\times(1+1)}} = 45{,}0^\circ \ .$$

Il y a donc trois orientations possibles, faisant des angles de 45°, de 90° et de 135° avec l'orientation de l'axe des z. Le diagramme illustrant ces orientations est donné ci-dessous.



(réponse)

b. Résoudre le problème Comme il est montré en **a.**, les orientations possibles du vecteur moment cinétique par rapport à l'axe des z est

$$\theta = 45^\circ,\ 90^\circ,\ 135^\circ \ . \qquad \text{(réponse)}$$

P19 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$n_\mathrm{b} = 1$	n_h
$\lambda = 97{,}18\,\mathrm{nm}$	Diagramme d'énergie$_{\to n_\mathrm{h}}$
	Diagramme d'énergie$_{\to n_\mathrm{b}}$
	λ_IR
	λ_V

a. Identifier la clé La clé est l'équation 12.16 dans laquelle on peut isoler le niveau final n_h :

$$\frac{hc}{\lambda} = -13{,}60\,\mathrm{eV}\left(\frac{1}{n_\mathrm{h}^2} - \frac{1}{n_\mathrm{b}^2}\right)$$

$$n_\mathrm{h} = \sqrt{\frac{1}{\frac{hc}{(-13{,}60\,\mathrm{eV})\lambda} + \frac{1}{n_\mathrm{b}^2}}}\ . \tag{i}$$

Résoudre le problème On calcule n_h à l'aide de l'équation 1 en utilisant $n_\mathrm{b} = 1$:

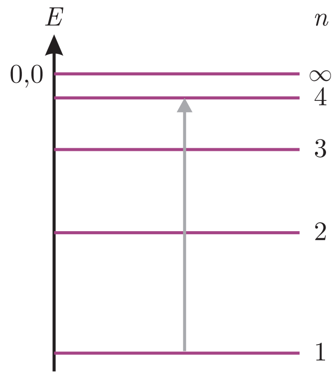
$$n_\mathrm{h} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}{(-13{,}60\,\mathrm{eV})\times(97{,}18\,\mathrm{nm})} + \frac{1}{1^2}}} = 4{,}02$$

$$n_\mathrm{h} = 4\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Le calcul donne pratiquement un entier, ce qui rend la valeur plausible. Le nombre quantique n est nécessairement un entier.

b. Résoudre le problème On doit illustrer au moins les niveaux 1, 2, 3 et 4 sur l'échelle verticale de l'énergie. L'énergie nulle correspond à un électron libre, au niveau équivalent à $n = \infty$. La transition du niveau fondamental au niveau $n = 4$ est illustrée par une flèche allant du niveau 1 au niveau 4.

La figure ci-dessous illustre la transition $n_1 \to n_4$.

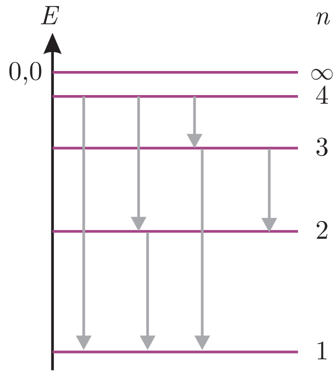


(réponse)

c. Identifier la clé La clé est le fait que le retour de l'électron vers le niveau fondamental peut se faire par diverses combinaisons de transitions.

Résoudre le problème Comme en **b.**, on doit illustrer les niveaux 1, 2, 3 et 4 sur l'échelle verticale de l'énergie. La transition du niveau $n = 4$ au niveau fondamental peut se faire par sauts de un seul niveau à la fois, par un saut de trois niveaux d'un coup, ou par une combinaison d'un saut double et d'un saut simple. Toutes les transitions possibles des niveaux 2 à 4 vers les niveaux 1 à 3 doivent être illustrées, pour un total de six transitions différentes possibles.

La figure suivante illustre les six transitions possibles de $n = 4$ à $n = 1$.



(réponse)

d. Identifier les clés La première clé est l'équation 12.16 dans laquelle on peut isoler la longueur d'onde du photon émis :

$$\frac{hc}{\lambda} = -13{,}60\,\text{eV}\left(\frac{1}{n_\text{h}^2} - \frac{1}{n_\text{b}^2}\right)$$
$$\lambda = \frac{hc}{-13{,}60\,\text{eV}\left(\frac{1}{n_\text{h}^2} - \frac{1}{n_\text{b}^2}\right)}\ . \qquad \text{(ii)}$$

La deuxième clé est le fait que si les diverses longueurs d'onde produites appartiennent au domaine infrarouge, au domaine visible et au domaine ultraviolet, les photons appartenant à l'infrarouge seront produits par les transitions les moins énergétiques.

Résoudre le problème L'équation (ii) permet de calculer la longueur d'onde pour chacune des transitions déterminées en **c.**, mais on calcule d'abord les transitions les plus petites, soit celles qui sont représentées par les flèches les plus courtes sur le diagramme tracé en **c.**

On constate, sur le diagramme des transitions vers les niveaux inférieurs, que les photons les moins énergétiques sont d'abord $\lambda_{4\to3}$, $\lambda_{3\to2}$, et $\lambda_{2\to1}$. On les calcule :

$$\lambda_{4\to3} = \frac{1\,240}{-13{,}60\,\text{eV}\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{3^2}\right)} = 1\,876\,\text{nm} \qquad \text{(domaine infrarouge)}$$
$$\lambda_{3\to2} = \frac{1\,240}{-13{,}60\,\text{eV}\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2}\right)} = 656{,}47\,\text{nm} \qquad \text{(domaine visible)}$$
$$\lambda_{2\to1} = \frac{1\,240}{-13{,}60\,\text{eV}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right)} = 121{,}6\,\text{nm} \qquad \text{(domaine ultraviolet).}$$

Toutes les autres transitions sont au moins aussi énergétiques que $n_3 \to n_2$, qui n'appartient pas au domaine infrarouge. Le seul photon infrarouge émis est donc $\lambda_{4\to3}$:

$$\lambda_{4\to3} = 1\,876\,\text{nm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

e. Identifier la clé La clé est le calcul de toutes les longueurs d'onde des photons émis à l'aide de l'équation (ii) définie en **d.**

Résoudre le problème On a trouvé en **d.** une longueur d'onde appartenant au domaine visible. Les trois longueurs d'onde encore à déterminer sont

$$\lambda_{4\to2} = \frac{1\,240}{-13{,}60\,\text{eV}\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{2^2}\right)} = 486{,}3\,\text{nm} \qquad \text{(domaine visible)}$$
$$\lambda_{4\to1} = \frac{1\,240}{-13{,}60\,\text{eV}\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{1^2}\right)} = 97{,}3\,\text{nm} \qquad \text{(domaine ultraviolet)}$$
$$\lambda_{3\to1} = \frac{1\,240}{-13{,}60\,\text{eV}\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{1^2}\right)} = 102{,}6\,\text{nm} \qquad \text{(domaine ultraviolet).}$$

On a déterminé une autre longueur d'onde visible. Les deux seuls photons appartenant au domaine visible sont donc

$$\lambda_{3\to 2} = 656\,\text{nm} \ , \quad \lambda_{4\to 2} = 486\,\text{nm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

P20 **Décortiquer le problème** On doit démontrer l'égalité $L_x^2 + L_y^2 = \ell(\ell+1)\hbar^2 - m_\ell^2\hbar^2$.

Identifier les clés Les clés sont les équations 12.31, 12.32 et le théorème de Pythagore.

Résoudre le problème Selon le théorème de Pythagore en trois dimensions, la relation entre le module du moment cinétique et ses composantes est

$$L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} \ . \qquad \text{(i)}$$

L'équation 12.31 donne une autre équivalence impliquant le module du moment cinétique :

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar \ . \qquad \text{(ii)}$$

Les équations (i) et (ii) permettent d'écrire

$$\sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar \qquad \Rightarrow \qquad L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = \ell(\ell+1)\hbar^2 \ . \qquad \text{(iii)}$$

Selon l'équation 12.32, le terme L_z peut être remplacé par $m_\ell\hbar$. Ce remplacement dans l'équation (iii) entraîne que

$$L_x^2 + L_y^2 + (m_\ell\hbar)^2 = \ell(\ell+1)\hbar^2 \ .$$

Si on met en évidence la somme $L_x^2 + L_y^2$, on obtient finalement

$$L_x^2 + L_y^2 = \ell(\ell+1)\hbar^2 - m_\ell^2\hbar^2 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

P21 **Décortiquer le problème** On doit démontrer que sur une couche orbitale n, il existe n^2 états dégénérés, c'est-à-dire n^2 combinaisons possibles des nombres quantiques définissant un électron sur cette couche.

Identifier les clés La première clé est l'équation 12.26 qui définit les valeurs possibles du nombre orbital :

$$\ell = 0, \ \ldots, \ n-1 \ . \qquad \text{(i)}$$

La deuxième clé est le principe d'exclusion de Pauli qui permet à deux électrons d'occuper la même couche électronique dans l'atome à condition d'avoir des spins différents.

Résoudre le problème L'équation (i) montre que pour toute valeur n donnée, il existe n valeurs possibles de ℓ (soit $(n-1)$ valeurs non nulles, en plus de zéro). Ce sont n états dégénérés.

Puisque deux électrons peuvent occuper la même couche électronique, les deux électrons ont chacun l'une des n valeurs ℓ du nombre orbital. Toutes les combinaisons possibles des nombres orbitaux des deux électrons comprennent $n \times n = n^2$ combinaisons. Puisque toutes ces combinaisons correspondent à des situations où l'énergie est la même (l'énergie d'un électron ne dépend que de son nombre quantique principal), ce sont des états dégénérés.

Il y a n^2 états dégénérés associés à un nombre quantique n. (réponse)

R22 **Décortiquer le problème** Un photon interagit avec un électron par effet Compton. Le photon transfère ainsi une partie de son énergie à l'électron.

Connues	Inconnues
$\lambda = 0{,}052\,9\,\text{nm}$	$E_{\gamma,\text{i}}$
$\theta_{\text{Compton}} = 90{,}0°$	$E_{\gamma,\text{f}}$
	n_b

a. Identifier la clé La clé est l'équation 10.1 de l'énergie d'un photon :

$$E = \frac{hc}{\lambda}\ . \tag{i}$$

Résoudre le problème En remplaçant les variables par leurs valeurs, on trouve

$$E = \frac{1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}{0{,}052\,9\,\mathrm{nm}}$$
$$E = 23{,}4\,\mathrm{keV}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est élevé pour un photon, mais possible, car la longueur d'onde de ce photon est très faible.

b. Identifier la clé La clé est l'équation 10.24 du décalage de Compton qui permet de trouver la longueur d'onde du photon diffusé :

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$
$$\lambda' - \lambda = \frac{hc}{mc^2}(1-\cos\theta)\ . \tag{ii}$$

Résoudre le problème En isolant la longueur d'onde modifiée dans l'équation (ii), on trouve

$$\lambda' = \lambda + \frac{hc}{mc^2}(1-\cos\theta)$$
$$\lambda' = (0{,}052\,9\,\mathrm{nm}) + \frac{1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}{511\times10^3\,\mathrm{eV}}(1-\cos 90{,}0^\circ) = 0{,}055\,33\,\mathrm{nm}\ .$$

L'équation (i) permet de calculer l'énergie de ce photon :

$$E' = \frac{1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}{0{,}055\,33\,\mathrm{nm}}$$
$$E' = 22{,}4\,\mathrm{keV}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Comme en **a.**, cette énergie est élevée pour un photon, mais correcte pour une longueur d'onde aussi petite.

c. Identifier la clé La clé est l'équation 12.15 appliquée aux niveaux initial et final :

$$E_n = -\frac{13{,}60\,\mathrm{eV}}{n^2}\ .$$

La différence d'énergie des photons incident et diffusé indique la quantité d'énergie gagnée par l'électron dans l'atome d'hydrogène. Le gain d'énergie ΔE est lié aux niveaux initial et final :

$$\Delta E = E_\mathrm{f} - E_\mathrm{i} = \left(-\frac{13{,}60\,\mathrm{eV}}{n_\mathrm{f}^2}\right) - \left(-\frac{13{,}60\,\mathrm{eV}}{n_\mathrm{i}^2}\right)$$
$$\Delta E = 13{,}60\,\mathrm{eV}\times\left(\frac{1}{n_\mathrm{i}^2}\right) - \left(\frac{1}{n_\mathrm{f}^2}\right)\ . \tag{iii}$$

Résoudre le problème Le gain d'énergie de l'électron est égal à la perte d'énergie du photon. À partir des résultats trouvés en **a.** et en **b.**, on écrit

$$\Delta E_\mathrm{é} = -\Delta E_\gamma = -(E' - E) = E - E'$$
$$= 23{,}4\,\mathrm{keV} - 22{,}4\,\mathrm{keV} = 1{,}0\,\mathrm{keV}\ .$$

On sait que l'électron est initialement au niveau fondamental ($n_\mathrm{i} = 1$). L'équation (iii) peut alors mener au calcul du niveau d'énergie final :

$$\Delta E = 13{,}60\,\mathrm{eV} \times \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n_\mathrm{f}^2}\right)$$
$$n_\mathrm{f} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\Delta E}{13{,}60\,\mathrm{eV}}}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1{,}0\,\mathrm{keV}}{13{,}60\,\mathrm{eV}}}} \ .$$

Cette équation n'a pas de solution, car l'argument de la racine carrée est négatif. Cela signifie que l'électron ne se retrouvera pas sur une couche, mais sera éjecté de l'atome en raison d'une énergie cinétique trop grande. L'atome est ionisé par cette réaction.

L'électron n'est pas sur un niveau ; l'atome est ionisé. (réponse)

Valider la réponse En effet, l'énergie de 1,0 keV transférée à l'électron est supérieure au travail d'extraction.

d. **Identifier la clé** La clé est le fait qu'on a déterminé en **c.** que l'atome sera ionisé par l'énergie reçue du photon incident.

Résoudre le problème Puisque l'électron est extrait de l'atome, on ne peut plus parler de sa position dans l'atome. Il a quitté l'atome.

Non, on ne peut pas savoir où se trouve l'électron dans l'atome. (réponse)

R23 **Décortiquer le problème** Lors d'une transition de l'atome vers un niveau inférieur, la quantité de mouvement emportée par le photon doit être compensée par le mouvement résiduel de l'atome entier.

Connues	Inconnues
$v_\mathrm{at,i} = 0$	E_γ
$n_\mathrm{i} = 6$	p_γ
$n_\mathrm{f} = 1$	$v_\mathrm{at,f}$

a. **Identifier la clé** La clé est le fait que l'énergie perdue par l'électron lors de la transition est l'énergie du photon produit. À partir de l'équation 12.15, on a

$$E_\gamma = -\Delta E_\mathrm{é} = E_\mathrm{i} - E_\mathrm{f} = \frac{-13{,}60\,\mathrm{eV}}{n_\mathrm{f}^2} - \frac{-13{,}60\,\mathrm{eV}}{n_\mathrm{i}^2} \ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème On procède au calcul :

$$E_\gamma = \frac{-13{,}60\,\mathrm{eV}}{6^2} - \frac{-13{,}60\,\mathrm{eV}}{1^2}$$
$$E_\gamma = 13{,}22\,\mathrm{eV} \text{ ou } 2,118 \times 10^{-18}\mathrm{J} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie est correct pour un photon émis lors d'une transition de l'atome d'hydrogène.

b. **Identifier les clés** La première clé est l'équation 10.20 de la quantité de mouvement d'un photon :

$$p = \frac{h}{\lambda} \ . \qquad \text{(ii)}$$

La deuxième clé est l'équation 10.1 qui relie la longueur d'onde d'un photon à son énergie :

$$E = \frac{hc}{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{hc}{E} \ . \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème L'union des équations (ii) et (iii) permet d'obtenir une équation de la quantité de mouvement du photon :

$$p = \frac{h}{\lambda}, \qquad \text{avec} \qquad \lambda = \frac{hc}{E}$$

$$p = \frac{h}{\left(\frac{hc}{E}\right)} = \frac{E}{c}$$

$$= \frac{13{,}22\,\text{eV}}{c}$$

$$p = 13{,}22\,\text{eV}/c \text{ ou } 7{,}065 \times 10^{-27}\text{kg} \cdot \text{m/s} \,. \qquad \text{(réponse)}$$

c. Identifier la clé La clé est le principe de conservation de la quantité de mouvement. Le long d'un axe des x parallèle à la direction du photon émis, on a :

$$\sum p_{x\text{i}} = \sum p_{x\text{f}} \,. \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème La quantité de mouvement initiale est nulle, car l'atome est initialement immobile. L'équation (iv) se développe ainsi :

$$0 = p_{\gamma,x} + p_{\text{at},x}$$

$$p_{\text{at},x} = -p_\gamma = -13{,}22\,\text{eV}/c$$

$$|p_{\text{at},x}| = 13{,}22\,\text{eV}/c \,.$$

La quantité de mouvement est donc de même grandeur, mais de sens opposé à celle du photon. Si on cherche le module de la vitesse de l'atome, on développe la quantité de mouvement à partir de sa définition. La masse de l'atome d'hydrogène étant $1{,}007\,9\,\text{u} = 938{,}86\,\text{MeV}/c^2$, on obtient

$$p = mv \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{p}{m}$$

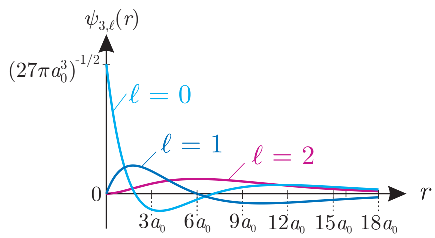
$$v = \frac{13{,}22\,\text{eV}/c}{938{,}86 \times 10^6\,\text{eV}/c^2}$$

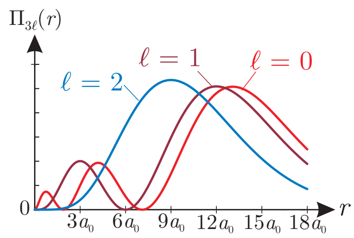
$$v = (1{,}408 \times 10^{-8})c = 4{,}222\,\text{m/s} \,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse trouvée peut être difficile à apprécier, mais le traitement des unités donne bien une vitesse en mètres par seconde et la vitesse n'est pas relativiste.

Q24 Décortiquer le problème On sait d'un atome qu'il se trouve dans la couche $n = 3$. On doit analyser les probabilités de trouver l'électron sur différentes couches.

Identifier les clés Les clés sont les figures 12.20a et 12.20b, reproduites ci-dessous, dans lesquelles on aperçoit les fonctions d'onde radiales ainsi que les courbes de densité de probabilité radiales pour le niveau $n = 3$.





a. Résoudre le problème On voit sur la figure 12.20b que c'est la courbe rouge qui présente le plus de ventres (trois ventres). C'est la sous-couche $\ell = 0$, désignée par s. C'est donc la sous-couche $3s$ qui possède la densité de probabilité radiale qui présente le plus de ventres.

La sous-couche $3s$ (réponse)

b. Résoudre le problème On voit sur la figure 12.20b que c'est la courbe bleue qui présente le moins de ventres (un seul ventre). C'est la sous-couche $\ell = 2$, désignée par d. C'est donc la sous-couche $3d$ qui possède la densité de probabilité radiale qui présente le moins de ventres.

La sous-couche $3d$ (réponse)

c. Résoudre le problème On voit sur la figure 12.20a que c'est la courbe bleu pâle qui présente la valeur $\psi_{3,\ell}$ la plus élevée lorsque $r = 0$ ($\psi_{3,\ell} = \left(27\pi a_0^3\right)^{-1/2}$, les deux autres étant nulles). C'est la sous-couche $\ell = 0$, désignée par s. C'est donc la sous-couche $3s$ qui présente la plus grande probabilité de retrouver l'électron à $r = 0$.

La sous-couche $3s$ (réponse)

d. Résoudre le problème On voit sur la figure 12.20a que c'est la courbe violette qui présente le maximum le plus éloigné de $r = 0$, soit à $r = 6a_0$. C'est la sous-couche $\ell = 2$, désignée par d. C'est donc la sous-couche $3d$ qui présente la plus grande distance où il est le plus probable de trouver l'électron.

La sous-couche $3d$ (réponse)

E25 Décortiquer le problème Pour l'état fondamental, on peut calculer la probabilité de trouver l'électron dans un volume sous forme de coquille autour du noyau.

Connues	Inconnue
État $= 1s$	$P(\text{entre } r \text{ et } r + \Delta r)$
$a_0 = 52{,}9\,\text{pm}$	
r	
$\Delta r = 0{,}02a_0$	

Identifier les clés La première clé est l'équation 12.38 qui donne la densité de probabilité radiale dans l'état $1s$:

$$\Pi_{1s}(r) = 4\pi r^2 \left|\psi_{1s}(r)\right|^2 = \frac{4r^2}{a_0^3}\, \mathrm{e}^{-2r/a_0} \quad . \tag{i}$$

La deuxième clé est le fait que la probabilité de trouver l'électron entre r et $r + \Delta r$ est donnée par l'équation 12.37 :

$$P(\text{entre } r_1 \text{ et } r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \Pi(r)\ \mathrm{d}r \ .$$

Cependant, la coquille étant très mince par rapport au rayon analysé, il n'est pas nécessaire d'intégrer (comme le mentionne l'indice). La densité de probabilité varie très peu sur l'épaisseur de la coquille, et il suffit de multiplier la densité de probabilité radiale par l'intervalle de rayon Δr indiqué pour trouver la probabilité :

$$\begin{aligned} P(\text{entre } r \text{ et } r + \Delta r) &= \Pi(r)\,\Delta r \\ &= \frac{4r^2}{a_0^3}\,\mathrm{e}^{-2r/a_0} \times 0{,}02a_0 \ . \end{aligned}$$

On peut appliquer cette équation pour les cinq valeurs r indiquées.

a. Résoudre le problème Pour la coquille $r = 0{,}500a_0$, on a

$$\begin{aligned} P(0{,}500a_0) &= \frac{4\,(0{,}500a_0)^2}{a_0^3}\,\mathrm{e}^{-2(0{,}500a_0)/a_0} \times 0{,}02a_0 \\ &= \frac{0{,}02}{e^1} = 0{,}007\,36 \\ P(0{,}500a_0) &= 0{,}736\,\% \ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

b. Résoudre le problème Pour la coquille $r = 1{,}00a_0$, on a

$$\begin{aligned} P(1{,}00a_0) &= \frac{4\,(1{,}00a_0)^2}{a_0^3}\,\mathrm{e}^{-2(1{,}00a_0)/a_0} \times 0{,}02a_0 \\ &= \frac{0{,}08}{e^2} = 0{,}010\,8 \\ P(1{,}00a_0) &= 1{,}08\,\% \ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

c. Résoudre le problème Pour la coquille $r = 2{,}00a_0$, on a

$$\begin{aligned} P(2{,}00a_0) &= \frac{4\,(2{,}00a_0)^2}{a_0^3}\,\mathrm{e}^{-2(2{,}00a_0)/a_0} \times 0{,}02a_0 \\ &= \frac{0{,}32}{e^4} = 0{,}005\,86 \\ P(2{,}00a_0) &= 0{,}586\,\% \ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

d. Résoudre le problème Pour la coquille $r = 5{,}00a_0$, on a

$$\begin{aligned} P(5{,}00a_0) &= \frac{4\,(5{,}00a_0)^2}{a_0^3}\,\mathrm{e}^{-2(5{,}00a_0)/a_0} \times 0{,}02a_0 \\ &= \frac{2{,}00}{e^{10}} = 0{,}000\,090\,8 \\ P(5{,}00a_0) &= 0{,}009\,08\,\% \ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

e. Résoudre le problème Pour la coquille $r = 50{,}0a_0$, on a

$$\begin{aligned} P(50{,}0a_0) &= \frac{4\,(50{,}0a_0)^2}{a_0^3}\,\mathrm{e}^{-2(50{,}0a_0)/a_0} \times 0{,}02a_0 \\ &= \frac{200}{e^{100}} = 7{,}44 \times 10^{-42} \\ P(50{,}0a_0) &= 7{,}44 \times 10^{-40}\,\% \ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur des probabilités trouvées est correct. La coquille étant très mince, la probabilité d'y retrouver l'électron est très faible. De plus, on observe une progression dans les valeurs indiquant qu'une probabilité plus grande est observée aux environs de $r = a_0$, comme le prédit la théorie.

P26 **Décortiquer le problème** On doit montrer que la probabilité de trouver l'électron quelque part est égale à 1.

Identifier la clé La clé est l'équation 12.37 :

$$P(\text{entre } r_1 \text{ et } r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \Pi(r)\ \mathrm{d}r \ ,$$

avec des bornes d'intégration de $r = 0$ jusqu'à $r = \infty$.

Résoudre le problème La densité de probabilité radiale $\Pi_{1s}(r)$ est donnée par l'équation 12.38 :

$$\Pi_{1s}(r) = \frac{4r^2}{a_0^3}\ \mathrm{e}^{-2r/a_0}\ .$$

L'intégration sur le domaine défini donne

$$P(\text{entre } r = 0 \text{ et } r = \infty) = \int_0^\infty \frac{4r^2}{a_0^3}\ \mathrm{e}^{-2r/a_0}\ \mathrm{d}r = \frac{4}{a_0^3}\int_0^\infty r^2\ \mathrm{e}^{-2r/a_0}\ \mathrm{d}r\ .$$

L'équation E.76 de l'annexe E donne une solution rapide de cette intégrale pour le cas précis où les bornes sont 0 et l'infini :

$$\int_0^\infty r^n e^{-ar}\ \mathrm{d}r = \frac{n!}{a^{n+1}}\ .$$

Dans le cas présent, la constante a est $(2/a_0)$ et $n = 2$:

$$\begin{aligned} P(\text{entre } 0 \text{ et } \infty) &= \frac{4}{a_0^3}\frac{2!}{\left(\frac{2}{a_0}\right)^{2+1}} \\ &= \frac{4}{a_0^3}\frac{2a_0^3}{8} \\ P(\text{entre } 0 \text{ et } \infty) &= 1\ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

P27 **Décortiquer le problème** Pour un atome d'hydrogène dans l'état $2s$, la densité de probabilité radiale atteint des maximums à plusieurs endroits, que l'on peut déterminer.

Connue	Inconnues
État $= 2s$	r pour $\Pi(r)_{\text{max}}$
	d

a. Identifier les clés La première clé est la dérivée de la densité de probabilité radiale qu'on pose égale à 0 pour localiser les maximums :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Pi_{2s}(r) = 0\ . \qquad \text{(i)}$$

La deuxième clé est l'équation 12.36 qui définit la probabilité de trouver l'électron dans un petit intervalle de rayon dr :

$$\Pi(r)\ \mathrm{d}r = |\psi(r)|^2\ 4\pi r\ \mathrm{d}r\ . \qquad \text{(ii)}$$

La troisième clé est l'équation 12.39 qui définit la fonction d'onde pour l'état $2s$:

$$\psi_{2,0,0}(r) = \frac{1}{\sqrt{8\pi a_0^3}}\left(1 - \frac{r}{2a_0}\right)\mathrm{e}^{-r/2a_0}\ . \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème L'insertion de l'équation (iii) dans l'équation (ii) entraîne

$$\begin{aligned} \Pi_{2,0,0}(r)\ \mathrm{d}r &= \left|\frac{1}{\sqrt{8\pi a_0^3}}\left(1 - \frac{r}{2a_0}\right)\mathrm{e}^{-r/2a_0}\right|^2\ 4\pi r\ \mathrm{d}r \\ \Pi_{2,0,0}(r) &= \frac{r^2}{2a_0^3}\left(1 - \frac{r}{2a_0}\right)^2 \mathrm{e}^{-r/a_0}\ . \end{aligned}$$

En dérivant cette expression par rapport à r comme le suggère l'équation (i), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Pi_{2,0,0}(r) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{r^2}{2a_0^3}\left(1-\frac{r}{2a_0}\right)^2 \mathrm{e}^{-r/a_0} = 0\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Pi_{2,0,0}(r) &= \frac{r}{a_0^3}\left(1-\frac{r}{2a_0}\right)^2 \mathrm{e}^{-r/a_0} + \frac{r^2}{2a_0^3}\times 2\left(1-\frac{r}{2a_0}\right)\left(-\frac{1}{2a_0}\right)\mathrm{e}^{-r/a_0}\\
&\quad + \frac{r^2}{2a_0^3}\left(1-\frac{r}{2a_0}\right)^2\left(\frac{-1}{a_0}\right)\mathrm{e}^{-r/a_0} = 0\\
0 &= \frac{r}{a_0^3}\left(1-\frac{r}{2a_0}\right)\mathrm{e}^{-r/a_0}\left[\left(1-\frac{r}{2a_0}\right)-\left(\frac{r}{2a_0}\right)+\left(1-\frac{r}{2a_0}\right)\left(\frac{-r}{2a_0}\right)\right]\\
0 &= \frac{r}{a_0^3}\left(1-\frac{r}{2a_0}\right)\mathrm{e}^{-r/a_0}\left(\frac{1}{4}\frac{r^2}{a_0^2}-\frac{3}{2}\frac{r}{a_0}+1\right) .
\end{aligned}$$

Cette équation possède plusieurs solutions. Lorsque la parenthèse $\left(\frac{1}{4}\frac{r^2}{a_0^2}-\frac{3}{2}\frac{r}{a_0}+1\right)$ est égale à 0, on a une équation du second degré qui admet comme solutions

$$\frac{r}{a_0} = 0{,}763\,9 \qquad \text{et} \qquad \frac{r}{a_0} = 5{,}236$$

ou

$$r = 0{,}763\,9a_0 \qquad \text{et} \qquad r = 5{,}236a_0 \ .$$

Ce sont deux endroits où la dérivée est nulle. Une autre solution existe lorsque la parenthèse $\left(1-\frac{r}{2a_0}\right)$ est égale à 0. Cela se produit lorsque $r = 2a_0$. D'autres solutions se trouvent lorsque $r = 0$ et $r = \infty$, mais ce sont des solutions triviales qui ne représentent pas des maximums en soi.

Parmi les trois solutions trouvées, deux sont des maximums et une est un minimum (qui doit séparer deux maximums, car on ne peut trouver deux maximums qui ne soient pas séparés par un minimum). Au-delà de $r = 0$, la première solution rencontrée, $r = 0{,}763\,9a_0$, est forcément un maximum, car la courbe présente une pente positive près de $r = 0$. La solution suivante est donc un minimum, à $r = 2a_0$, suivie d'un maximum à $r = 5{,}236a_0$. On observe alors un maximum de la densité de probabilité radiale aux positions

$$r = 0{,}763\,9a_0 \qquad \text{et} \qquad r = 5{,}236a_0 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur des rayons trouvés est correct, du même ordre de grandeur que la constante a_0.

b. **Identifier la clé** La clé est la simple différence entre les deux positions trouvées en **a.**

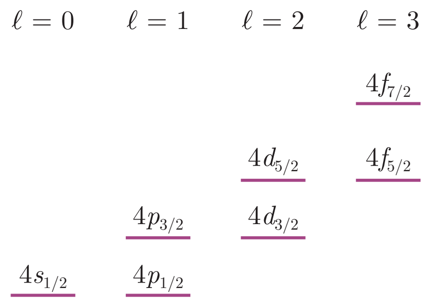
Résoudre le problème

$$d = \Delta r_{\max} = |5{,}236a_0 - 0{,}763\,9a_0| = 4{,}472a_0 \qquad \text{(réponse)}$$

Q28 **Décortiquer le problème** Un atome se trouve dans l'état $n = 4$. On doit tracer le diagramme des niveaux d'énergie des diverses couches possibles.

Identifier la clé La clé est le fait que le niveau $n = 4$ possède quatre sous-couches : s, p, d et f.

Résoudre le problème Il y a quatre sous-couches. Hormis la couche $4s$, chacune se divise en deux en raison des deux valeurs possibles du moment cinétique $j = \ell \pm 1/2$. Le diagramme des niveaux d'énergie est donc le suivant :



(réponse)

E29 **Décortiquer le problème** On analyse le moment cinétique total j pour un électron dans la sous-couche $3p$.

Connues	Inconnues
Sous-couche $= 3p$	j
$\vec{\mathbf{L}}$ et $\vec{\mathbf{S}}$ sont parallèles	m_j

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 12.46 qui relie le nombre quantique associé au moment cinétique j au nombre quantique ℓ :

$$j = \left|\ell \pm \frac{1}{2}\right| \ .$$

Résoudre le problème Puisque la sous-couche étudiée est la sous-couche p, $\ell = 1$. Ainsi,

$$j = \left|\ell \pm \frac{1}{2}\right| \ .$$

Donc,

$$j = 3/2, \qquad \text{ou} \qquad j = 1/2 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 12.48 du nombre quantique magnétique :

$$m_j = j,\ j-1,\ ...,\ -j \ .$$

Résoudre le problème Les deux valeurs j déterminées en **a.** permettent de trouver des valeurs m_j dont certaines sont identiques :

$$j = 3/2 \qquad m_j = \frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{-1}{2},\ \frac{-3}{2}\ ,$$

$$j = 1/2 \qquad m_j = \frac{1}{2},\ \frac{-1}{2}\ .$$

Donc,

$$m_j = \frac{3}{2}\ , \quad m_j = \frac{1}{2}\ , \quad m_j = \frac{-1}{2}\ , \quad m_j = \frac{-3}{2}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

E30 **Décortiquer le problème** Un électron émet divers photons et fait une transition qui dépend de la longueur d'onde du photon émis.

Connue	Inconnues
$4p_{1/2}$	Transitions possibles

Identifier la clé La clé est l'équation 12.52 qui permet d'obtenir les règles de sélection, qu'on applique pour des transitions vers le bas :

$$\Delta\ell = \pm 1 \qquad \text{(i)}$$
$$\Delta j = 0,\ \pm 1\ .$$

Résoudre le problème Puisque l'électron émet un photon, les transitions possibles sont celles qui impliquent la transition de l'électron vers un niveau n inférieur. En respectant les autres contraintes, on a

$$p \to s \quad (\Delta\ell = +1)$$
$$p \to d \quad (\Delta\ell = -1)$$
$$\Delta j = 0,\ \pm 1\ .$$

Les états possibles après la transition ne sont pas nombreux. La sous-couche après la transition ne peut être que s ou d. De plus, j vaut 1/2 ou 3/2, donc

vers $n = 3$, les états accessibles sont $3d_{3/2}$ et $3s_{1/2}$;
vers $n = 2$, le seul état accessible est $2s_{1/2}$;
vers $n = 1$, le seul état accessible est $1s_{1/2}$.

a. Parmi les transitions définies, une seule se fait vers le niveau 2 :

$$4p_{1/2} \to 2s_{1/2}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Parmi les transitions définies, deux se font vers le niveau 3 :

$$4p_{1/2} \to 3s_{1/2}, \qquad \text{ou} \qquad 4p_{1/2} \to 3d_{3/2}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. Parmi les transitions définies, une seule se fait vers le niveau 1 :

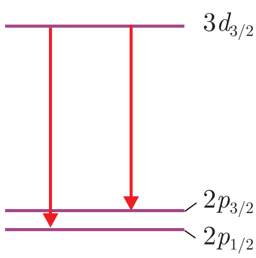
$$4p_{1/2} \to 1s_{1/2}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

P31 **Décortiquer le problème** Deux transitions à partir du niveau $3d_{3/2}$ vers le niveau $2p$ génèrent des photons de longueurs d'onde légèrement différentes.

Connues	Inconnues
$\lambda_{3d_{3/2}\to 3p_{1/2}} = 656{,}270\,969\,9\,\text{nm}$	Diagramme des niveaux d'énergie
$\lambda_{3d_{3/2}\to 3p_{3/2}} = 656{,}286\,733\,6\,\text{nm}$	$E_{p_{3/2}} - E_{p_{1/2}}$

a. **Identifier la clé** La clé est le fait que les variations d'énergie des deux transitions comparées sont très semblables.

Résoudre le problème L'écart entre les énergies des niveaux $3p_{1/2}$ et $3p_{3/2}$ est très faible en comparaison de l'écart avec le niveau initial. Les deux transitions sont donc de grandeurs semblables sur le diagramme à tracer.



(réponse)

b. Identifier la clé La clé est l'équation 12.51 :

$$E_{n,j} = E_n\left[1 + \frac{\alpha^2}{n}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right)\right], \qquad \text{avec} \qquad E_n = -\frac{13{,}60\,\text{eV}}{n^2}\ .$$

Résoudre le problème La différence entre les niveaux d'énergie $2p_{1/2}$ et $2p_{3/2}$ est donnée par

$$\begin{aligned} E_{2,3/2} - E_{2,1/2} &= E_2\left[1 + \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{1}{3/2+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4\times 2}\right)\right] - E_2\left[1 + \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{1}{1/2+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4\times 2}\right)\right] \\ &= E_2\frac{\alpha^2}{2}\left[\left(\frac{1}{3/2+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4\times 2}\right) - \left(\frac{1}{1/2+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4\times 2}\right)\right] \\ &= -\frac{13{,}60\,\text{eV}}{2^2} \times \frac{1}{2\times 137{,}0^2} \times \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right) - \left(1 - \frac{3}{8}\right)\right] \end{aligned}$$

$$E_{p,3/2} - E_{p,1/2} = 45{,}3\ \mu\text{eV}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est plausible, car les deux états considérés sont très près l'un de l'autre.

P32 **Décortiquer le problème** Une équation à démontrer comporte des termes étant les carrés des modules des nombres quantiques.

Connues	Inconnue
$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar$	$\vec{\mathbf{L}}\cdot\vec{\mathbf{S}}$
$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar$	
$J = \sqrt{j(j+1)}\hbar$	

Identifier la clé La clé est le fait que les termes de l'équation à démontrer sont des carrés des nombres quantiques. On met donc au carré le vecteur $\vec{\mathbf{J}}$ du moment cinétique total, qui est donné par l'équation 12.44 :

$$\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{S}}\ .$$

Résoudre le problème Comme le mentionne la clé, on exprime le carré du vecteur moment cinétique total :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{J}}^2 &= \left(\vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{S}}\right)^2 \\ J^2 &= \left(\vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{S}}\right)\cdot\left(\vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{S}}\right) \\ &= L^2 + S^2 + 2\vec{\mathbf{L}}\cdot\vec{\mathbf{S}}\ . \end{aligned}$$

Le terme $\vec{\mathbf{L}}\cdot\vec{\mathbf{S}}$ est le terme de gauche de l'expression à démontrer. On peut donc le mettre en évidence :

$$\vec{\mathbf{L}}\cdot\vec{\mathbf{S}} = \frac{J^2 - L^2 - S^2}{2}\ .$$

Les équations 12.31, 12.42 et 12.45 qui définissent le module des moments cinétiques permettent de compléter les transformations :

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar \qquad S = \sqrt{s(s+1)}\hbar \qquad J = \sqrt{j(j+1)}\hbar$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{L}}\cdot\vec{\mathbf{S}} &= \frac{\left(\sqrt{j(j+1)}\hbar\right)^2 - \left(\sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar\right)^2 - \left(\sqrt{s(s+1)}\hbar\right)^2}{2} \\ &= \frac{j(j+1)\hbar^2 - \ell(\ell+1)\hbar^2 - s(s+1)\hbar^2}{2} \end{aligned}$$

$$\vec{\mathbf{L}}\cdot\vec{\mathbf{S}} = \frac{j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)}{2}\hbar^2\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Cette équation est bien celle qu'on devait démontrer.

Q33 **Décortiquer le problème** Le niveau $3d_{5/2}$ se divise en plusieurs niveaux que l'on peut étudier grâce à l'effet Zeeman.

Identifier la clé La clé est le fait que, pour le niveau $3d_{5/2}$, le nombre quantique m_j peut prendre six valeurs différentes : $m_j = \pm 5/2,\ \pm 3/2,\ \pm 1/2$.

a. **Résoudre le problème** Les six valeurs de m_j présentées dans la clé correspondent à six niveaux différents du niveau $3d_{5/2}$.

Il y a six niveaux. (réponse)

b. **Résoudre le problème** Les six valeurs possibles de m_j sont $\pm 5/2,\ \pm 3/2,\ \pm 1/2$. Le niveau le plus élevé est celui dont la valeur m_j est $+5/2$.

$$m_j = +5/2 \qquad \text{(réponse)}$$

E34 **Décortiquer le problème** Les niveaux $4d_{3/2}$ et $2p_{3/2}$ se divisent tous les deux en quatre niveaux. Certaines transitions entre les niveaux $n = 4$ et $n = 2$ sont possibles alors que d'autres sont impossibles.

Identifier la clé La clé est l'équation 12.57 qui s'ajoute aux règles de sélection des transitions définies par l'équation 12.52. L'ensemble des règles de sélection est donc

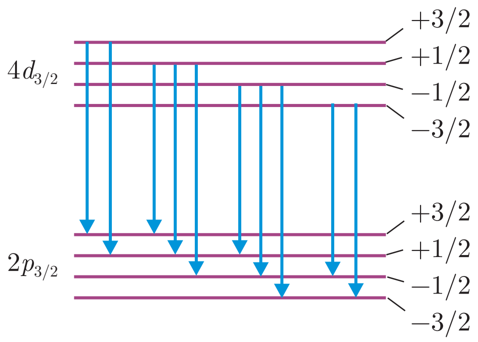
$$\begin{aligned} \Delta\ell &= \pm 1 \\ \Delta j &= 0,\ \pm 1 \\ \Delta m_j &= 0,\ \pm 1\ . \end{aligned} \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème Selon les niveaux impliqués, les deux premières règles sont d'emblée respectées. La règle pour Δm_j est celle qui détermine les transitions possibles. Le niveau $4d_{3/2}$ se divise en quatre niveaux $4d_{3/2}$, $4d_{1/2}$, $4d_{-1/2}$ et $4d_{-3/2}$.

Les transitions permises à partir des niveaux $4d_{3/2}$, $4d_{1/2}$, $4d_{-1/2}$ et $4d_{-3/2}$ sont au nombre de dix seulement, en raison de la règle de sélection sur m_j :

$$\begin{array}{ccc} 4d_{3/2} \to 2p_{3/2} & 4d_{3/2} \to 2p_{1/2} & \\ 4d_{1/2} \to 2p_{3/2} & 4d_{1/2} \to 2p_{1/2} & 4d_{1/2} \to 2p_{-1/2} \\ 4d_{-1/2} \to 2p_{1/2} & 4d_{-1/2} \to 2p_{-1/2} & 4d_{-1/2} \to 2p_{-3/2}\ . \\ 4d_{-3/2} \to 2p_{-1/2} & 4d_{-3/2} \to 2p_{-3/2} & \end{array}$$

Ces dix transitions peuvent être représentées sur le diagramme des niveaux d'énergie suivant.



(réponse)

E35 **Décortiquer le problème** Une raie spectrale se divise en plusieurs raies lorsqu'on applique un champ magnétique non nul.

Connue	Inconnues
Raie = $4s_{1/2} \to 2p_{3/2}$	Diagramme d'énergie
	Nombre de raies

a. Identifier la clé La clé est le fait qu'un niveau d'énergie se divise en autant de niveaux qu'il y a de valeurs m_j possibles.

Résoudre le problème Pour le niveau $4s_{1/2}$, m_j peut prendre deux valeurs : $m_j = \pm 1/2$. Pour le niveau $2p_{3/2}$, m_j peut prendre quatre valeurs : $m_j = \pm 3/2,\ \pm 1/2$. Ces niveaux se divisent donc respectivement en deux et en quatre niveaux, et le diagramme d'énergie est le suivant.

(réponse)

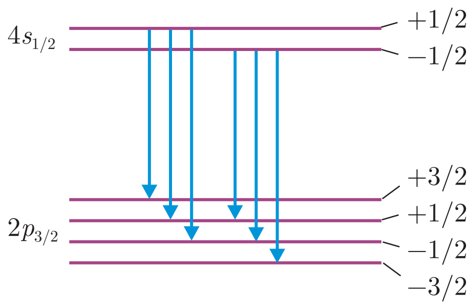
b. Identifier la clé La clé est l'équation 12.57 qui définit la division de chaque niveau d'énergie :

$$\Delta m_j = 0,\ \pm 1 \ .$$

Résoudre le problème Les transitions permises à partir des niveaux $4s_{1/2}$ et $4s_{-1/2}$ sont au nombre de six, en raison de la règle de sélection sur m_j :

$$\begin{array}{lll} 4d_{1/2} \rightarrow 2p_{3/2} & 4d_{1/2} \rightarrow 2p_{1/2} & 4d_{1/2} \rightarrow 2p_{-1/2} \\ 4d_{-1/2} \rightarrow 2p_{1/2} & 4d_{-1/2} \rightarrow 2p_{-1/2} & 4d_{-1/2} \rightarrow 2p_{-3/2} \ . \end{array}$$

Ces six transitions peuvent être représentées sur le diagramme des niveaux d'énergie suivant.



Il y a six raies. (réponse)

E36 Décortiquer le problème La fréquence de transition entre deux états hyperfins de l'état fondamental du césium est liée à la longueur d'onde des photons émis ainsi qu'à la différence d'énergie entre ces deux états.

Connue	Inconnues
$1\,\text{s} = 9\,192\,631\,770T$	λ
	ΔE

a. Identifier la clé La clé est la relation entre la vitesse de la lumière, la fréquence et la longueur d'onde d'une radiation :

$$c = \lambda f \ .$$

Résoudre le problème La quantité de période durant une seconde est la fréquence de l'onde. Pour une plus grande précision, on utilise la valeur précise de la vitesse de la lumière :

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{299\,792\,458\,\text{m/s}}{9\,192\,631\,770\,\text{s}^{-1}} = 0{,}032\,612\,257\,\text{m}$$

$$\lambda = 32{,}612\,255\,7\,\text{mm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse La longueur d'onde trouvée est plausible, quoique plutôt grande. Mais la fréquence considérée est beaucoup plus faible que la fréquence des photons du domaine visible et des photons plus énergétiques que ceux du domaine visible.

b. Identifier la clé La clé est l'équation 12.30 qui relie la longueur d'onde d'un photon à la variation d'énergie entre deux niveaux d'énergie :

$$\frac{hc}{\lambda} = \Delta E \ .$$

Résoudre le problème

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1\,240\,\mathrm{eV} \cdot \mathrm{nm}}{32\,612\,256\,\mathrm{nm}}$$

$$\Delta E = 38{,}02\,\mu\mathrm{eV} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est plausible, car les deux états considérés sont très près l'un de l'autre.

Q37 Décortiquer le problème La configuration électronique d'un atome permet de l'identifier et de déterminer son niveau d'excitation.

a. Identifier la clé La clé est le fait que le nombre d'électrons se trouvant sur chaque couche est indiqué par l'exposant qui accompagne chaque symbole du nombre quantique ℓ.

Résoudre le problème La configuration électronique indiquée est $1s^2 2s^2 2p^5 3s^2$. Les quatre valeurs des exposants sont additionnées :

$$2 + 2 + 5 + 2 = 11 \ .$$

Il y a 11 électrons dans cet atome. S'il n'est pas ionisé, il y a donc aussi 11 protons. Ainsi, il s'agit d'un atome de l'élément dont le numéro atomique est $Z = 11$, soit du sodium.

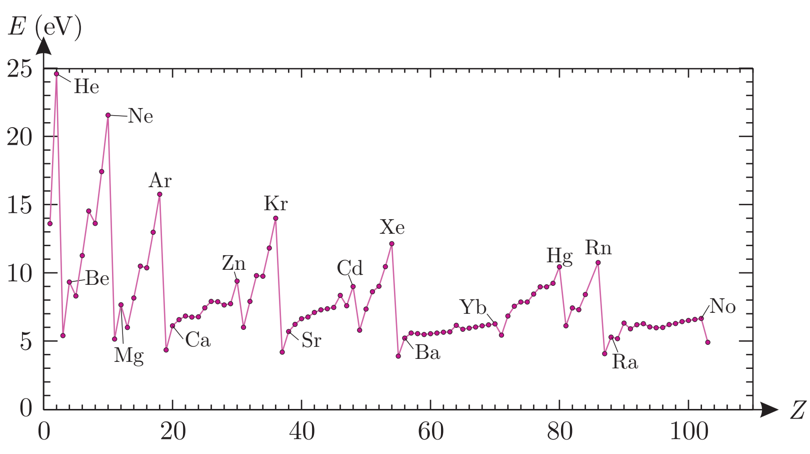
$$\text{Le sodium, car } Z = 11. \qquad \text{(réponse)}$$

b. Identifier la clé La clé est le fait qu'un atome est dans un état excité lorsqu'une couche est incomplète et qu'un niveau supérieur est tout de même occupé par un ou des électrons.

Résoudre le problème Chacun des niveaux $1s$ et $2s$ peut héberger deux électrons. Les deux premières couches de l'atome sont donc complètes. Le niveau $2p$ peut héberger au maximum six électrons. La configuration électronique donnée indique qu'il n'y en a que cinq au niveau $2p$, alors que deux électrons se trouvent pourtant au niveau supérieur. La couche $2p$ est donc incomplète.

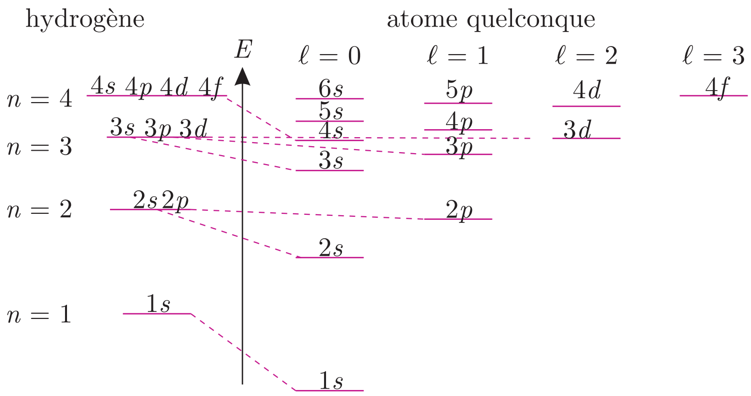
$$\text{L'atome est dans un état excité, car la couche } 2p \text{ est incomplète.} \qquad \text{(réponse)}$$

Q38 Illustrer la situation La figure suivante reproduit la figure 12.38 de l'énergie d'ionisation des éléments. On y voit que l'ytterbium se trouve sur un sommet local de la courbe.



Décortiquer le problème L'ytterbium est un élément comportant 70 protons. Son énergie d'ionisation est liée à la façon dont ses 70 électrons se répartissent sur les diverses couches électroniques.

Identifier la clé La clé est la comparaison des niveaux d'énergie pour un atome quelconque, telle que représentée par la figure 12.37. On peut alors déterminer l'ordre dans lequel les couches électroniques sont remplies par les 70 électrons de l'atome d'ytterbium. Voici la figure 12.37.



Résoudre le problème Selon cette figure, l'ordre de priorité dans lequel les couches sont remplies est

$$1s \to 2s \to 2p \to 3s \to 3p \to 4s \to 3d \to 4p \to 5s \to 4d \to 5p \to 6s \to 4f\ .$$

Les couches s peuvent accueillir 2 électrons, les couches p peuvent en accueillir 6, les couches d, 10, et les couches f, 14. Ainsi, l'atome accumule 70 électrons de la façon suivante :

Couche $1s$: 2é	N_{tot} : 2
Couche $2s$: 2é	N_{tot} : 4
Couche $2p$: 6é	N_{tot} : 10
Couche $3s$: 2é	N_{tot} : 12
Couche $3p$: 6é	N_{tot} : 18
Couche $4s$: 2é	N_{tot} : 20
Couche $3d$: 10é	N_{tot} : 30
Couche $4p$: 6é	N_{tot} : 36
Couche $5s$: 2é	N_{tot} : 38
Couche $4d$: 10é	N_{tot} : 48
Couche $5p$: 6é	N_{tot} : 54
Couche $6s$: 2é	N_{tot} : 56
Couche $4f$: 14é	N_{tot} : 70 .

Les 13 couches requises pour accumuler 70 électrons sont précisément complètes (remplies). La figure 12.37 n'indique pas quel niveau est peuplé après le niveau $4f$, mais on n'a pas besoin de cette information pour décrire l'atome d'ytterbium à l'état fondamental.

Le fait que les couches soient remplies fait en sorte qu'il est plus difficile d'ajouter un électron à cet atome ou d'en extraire un, comparativement à ses voisins, dont la dernière couche est forcément incomplète.

La dernière sous-couche ($4f$) est fermée pour cet élément
lorsqu'il est dans son état fondamental. (réponse)

Q39 **Décortiquer le problème** La configuration électronique des atomes peut être établie pour différents états excités. On peut alors représenter le diagramme des niveaux d'énergie pour chaque état.

Identifier la clé La clé consiste à déterminer l'ordre dans lequel les couches électroniques sont remplies ainsi que le nombre d'électrons peuplant chaque couche.

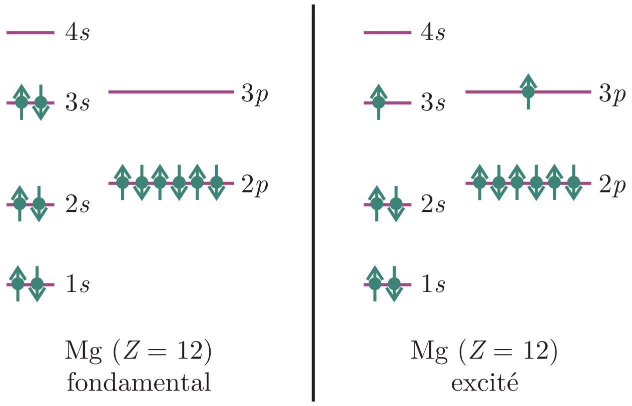
Selon la figure 12.37, l'ordre de priorité dans lequel les premières couches sont remplies est

$$1s \to 2s \to 2p \to 3s \to 3p \to 4s \to 3d \to \text{etc.}$$

a. Résoudre le problème Pour l'atome de magnésium, on veut distribuer 12 électrons sur les différentes couches. On remplit les couches dans l'ordre avec la quantité maximale d'électrons jusqu'à la distribution des 12 électrons de l'atome :

$$\begin{array}{ll} \text{Couche } 1s : 2\text{é} & N_{\text{tot}} : 2 \\ \text{Couche } 2s : 2\text{é} & N_{\text{tot}} : 4 \\ \text{Couche } 2p : 6\text{é} & N_{\text{tot}} : 10 \\ \text{Couche } 3s : 2\text{é} & N_{\text{tot}} : 12 \\ \text{Couche } 3p : 0\text{é, non requise .} & \end{array}$$

Au premier état excité, l'électron pouvant effectuer la transition la plus petite vers le haut est un électron qui passe du niveau $3s$ au niveau $3p$. On peut donc tracer les diagrammes des niveaux d'énergie suivants pour les deux premiers niveaux du magnésium.

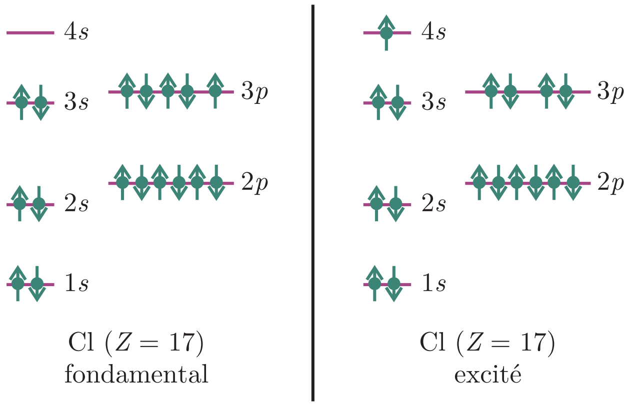


(réponse)

b. Résoudre le problème Pour l'atome de chlore, on veut distribuer 17 électrons sur les différentes couches. On remplit les couches dans l'ordre avec la quantité maximale d'électrons jusqu'à la distribution des 17 électrons de l'atome :

$$\begin{array}{ll} \text{Couche } 1s : 2\text{é} & N_{\text{tot}} : 2 \\ \text{Couche } 2s : 2\text{é} & N_{\text{tot}} : 4 \\ \text{Couche } 2p : 6\text{é} & N_{\text{tot}} : 10 \\ \text{Couche } 3s : 2\text{é} & N_{\text{tot}} : 12 \\ \text{Couche } 3p : 5\text{é} & N_{\text{tot}} : 17 \\ \text{Couche } 4s : 0\text{é, non requise .} & \end{array}$$

Pour le premier état excité, on doit trouver l'électron qui peut effectuer la plus petite transition vers le haut. La couche $3p$ étant incomplète, un électron pourrait faire une transition du niveau $3s$ au niveau $3p$. Un électron pourrait aussi passer du niveau $3p$ au niveau $4s$. La plus faible de ces deux transitions, si on regarde la figure 12.37, est la transition $3p \to 4s$. On peut alors tracer les diagrammes des niveaux d'énergie suivants pour les deux premiers niveaux du chlore.



(réponse)

Q40 **Décortiquer le problème** Dans un laser, les atomes de néon sont excités par des atomes d'hélium qui interagissent avec eux lors de collisions.

Identifier la clé La clé est le fait que l'énergie portée par un atome d'hélium ne se limite pas à son énergie d'excitation.

Résoudre le problème Lors de la collision avec un atome de néon, l'atome d'hélium possède de l'énergie cinétique en plus de son énergie d'excitation électronique, ce qui permet de dépasser le seuil d'énergie requise pour exciter suffisamment les atomes de néon.

De l'énergie cinétique de l'atome d'hélium (réponse)

Q41 **Décortiquer le problème** On veut déterminer si on peut observer l'effet laser lorsque le nombre d'atomes excités est inférieur au nombre d'atomes non excités.

Identifier la clé La clé est le fait que l'émission stimulée est générée lorsqu'un seul atome excité reçoit un photon.

Résoudre le problème Même si le nombre d'atomes excités est inférieur au nombre d'atomes non excités, il suffit qu'il ne soit pas nul pour qu'il y ait des émissions stimulées. Ainsi, si $N_2 < N_1$, l'effet pourra être plus faible, mais tout de même présent.

Oui, mais les émissions stimulées sont moins nombreuses que les absorptions. (réponse)

E42 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$\Delta t = 10{,}0\,\text{ns}$	$E_{\text{impulsion}}$
$P = 4{,}00\,\text{kW}$	$N_{\text{transitions}}$
$\lambda = 695\,\text{nm}$	

a. Identifier la clé La clé est la définition de la puissance :

$$P = \frac{\Delta E}{t} \; .$$

Résoudre le problème Pour le cas du laser, l'intervalle de temps pour lequel on cherche la quantité d'énergie est la période de l'impulsion. Ainsi, l'énergie d'une impulsion est

$$E = P \times t = P \times T = 4{,}00 \times 10^{3}\,\text{W} \times 10{,}0 \times 10^{-9}\,\text{s}$$
$$E_{\text{impulsion}} = 40{,}0\,\mu\text{J} \; .$$ (réponse)

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct. Une grande quantité d'impulsions sont émises chaque seconde pour justifier l'énergie totale émise chaque seconde (la puissance).

b. **Identifier la clé** La clé est le rapport de l'énergie d'un seul photon à l'énergie totale émise lors d'une impulsion.

Résoudre le problème L'énergie portée par un seul photon de la longueur d'onde produite est donnée par l'équation 10.1 :

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{\left(6{,}626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}\right) \times \left(2{,}998 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}\right)}{695 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}} = 2{,}858 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}\ .$$

Le nombre de transitions dont l'énergie totale est contenue dans chaque impulsion est donné par le rapport de l'énergie totale d'une impulsion (trouvé en **a.**) à l'énergie produite par une seule transition (l'énergie E_γ d'un seul photon) :

$$N_{\text{transitions}} = \frac{E_{\text{impulsion}}}{E_\gamma} = \frac{40{,}0 \times 10^{-6}\,\mathrm{J}}{2{,}858 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}}$$

$$N_{\text{transitions}} = 1{,}40 \times 10^{14} \text{ transitions}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du nombre de transitions trouvé est plausible.

Physique 3 Ondes, optique et physique moderne - 1$^{\text{re}}$ édition

Chapitre 13 La physique nucléaire

Q1 **Décortiquer le problème** Parmi les dix nucléides présentés, certains peuvent être regroupés en raison de propriétés communes : ${}^{13}_{5}\text{B}$, ${}^{12}_{6}\text{C}$, ${}^{13}_{6}\text{C}$, ${}^{14}_{6}\text{C}$, ${}^{13}_{7}\text{N}$, ${}^{14}_{7}\text{N}$, ${}^{15}_{7}\text{N}$, ${}^{13}_{8}\text{O}$, ${}^{14}_{8}\text{O}$, ${}^{15}_{8}\text{O}$.

a. **Identifier la clé** La clé est le fait que les isobares sont des nucléides qui ont le même nombre de nucléons (protons et neutrons réunis).

Résoudre le problème Le nombre du haut dans les nucléides présentés est le nombre de nucléons. Quatre nucléides possèdent 13 nucléons : ${}^{13}_{5}\text{B}$, ${}^{13}_{6}\text{C}$, ${}^{13}_{7}\text{N}$ et ${}^{13}_{8}\text{O}$. Trois nucléides possèdent 14 nucléons : ${}^{14}_{6}\text{C}$, ${}^{14}_{7}\text{N}$ et ${}^{14}_{8}\text{O}$. Finalement, deux nucléides possèdent 15 nucléons : ${}^{15}_{7}\text{N}$ et ${}^{15}_{8}\text{O}$.

$$({}^{13}_{5}\text{B},\ {}^{13}_{6}\text{C},\ {}^{13}_{7}\text{N},\ {}^{13}_{8}\text{O}),\ ({}^{14}_{6}\text{C},\ {}^{14}_{7}\text{N},\ {}^{14}_{8}\text{O}) \text{ et } ({}^{15}_{7}\text{N},\ {}^{15}_{8}\text{O}). \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que les isotones sont des nucléides qui ont le même nombre de neutrons.

Résoudre le problème Le nombre de neutrons est la différence entre le nombre de nucléons (nombre du haut dans la description des nucléides) et le nombre de protons (nombre du bas). Pour les dix nucléides, on a les nombres de neutrons suivants :

$$\begin{aligned}
{}^{13}_{5}\text{B} &\Rightarrow 8 \text{ neutrons}\\
{}^{12}_{6}\text{C} &\Rightarrow 6 \text{ neutrons}\\
{}^{13}_{6}\text{C} &\Rightarrow 7 \text{ neutrons}\\
{}^{14}_{6}\text{C} &\Rightarrow 8 \text{ neutrons}\\
{}^{13}_{7}\text{N} &\Rightarrow 6 \text{ neutrons}\\
{}^{14}_{7}\text{N} &\Rightarrow 7 \text{ neutrons}\\
{}^{15}_{7}\text{N} &\Rightarrow 8 \text{ neutrons}\\
{}^{13}_{8}\text{O} &\Rightarrow 5 \text{ neutrons}\\
{}^{14}_{8}\text{O} &\Rightarrow 6 \text{ neutrons}\\
{}^{15}_{8}\text{O} &\Rightarrow 7 \text{ neutrons}\ .
\end{aligned}$$

On peut donc les regrouper de la façon suivante : trois nucléides possèdent huit neutrons : ${}^{13}_{5}\text{B}$, ${}^{14}_{6}\text{C}$ et ${}^{15}_{7}\text{N}$. Trois nucléides possèdent sept neutrons : ${}^{13}_{6}\text{C}$, ${}^{14}_{7}\text{N}$ et ${}^{15}_{8}\text{O}$. Finalement, trois nucléides possèdent six neutrons : ${}^{12}_{6}\text{C}$, ${}^{13}_{7}\text{N}$ et ${}^{14}_{8}\text{O}$.

$$({}^{13}_{5}\text{B},\ {}^{14}_{6}\text{C},\ {}^{15}_{7}\text{N}),\ ({}^{13}_{6}\text{C},\ {}^{14}_{7}\text{N},\ {}^{15}_{8}\text{O}) \text{ et } ({}^{12}_{6}\text{C},\ {}^{13}_{7}\text{N},\ {}^{14}_{8}\text{O}). \qquad \text{(réponse)}$$

c. **Identifier la clé** La clé est le fait que les isotopes sont des nucléides qui ont le même nombre de protons.

Résoudre le problème Le nombre de protons est le nombre du bas dans la description des nucléides. On a donc les regroupements qui suivent : Trois nucléides possèdent six protons : ${}^{12}_{6}\text{C}$, ${}^{13}_{6}\text{C}$ et ${}^{14}_{6}\text{C}$. Trois nucléides possèdent sept protons : ${}^{13}_{7}\text{N}$, ${}^{14}_{7}\text{N}$ et ${}^{15}_{7}\text{N}$. Finalement, trois nucléides possèdent huit protons : ${}^{13}_{8}\text{O}$, ${}^{14}_{8}\text{O}$ et ${}^{15}_{8}\text{O}$.

$$({}^{12}_{6}\text{C},\ {}^{13}_{6}\text{C},\ {}^{14}_{6}\text{C}),\ ({}^{13}_{7}\text{N},\ {}^{14}_{7}\text{N},\ {}^{15}_{7}\text{N}) \text{ et } ({}^{13}_{8}\text{O},\ {}^{14}_{8}\text{O},\ {}^{15}_{8}\text{O}). \qquad \text{(réponse)}$$

d. **Identifier la clé** La clé est le fait que l'élément auquel appartient un nucléide est déterminé par le nombre de protons ainsi que par le symbole (en lettres) qui le représente.

Résoudre le problème Il y a donc quatre éléments représentés : B, C, N et O. Les éléments sont

le bore, le carbone, l'azote et l'oxygène. (réponse)

Q2 **Identifier la clé** La clé est le fait que le nombre de neutrons est la différence entre le nombre de nucléons (nombre du haut dans la description des nucléides) et le nombre de protons (nombre du bas).

Résoudre le problème Pour les quatre nucléides, on a les nombres de neutrons suivants :

$$^{235}_{92}\mathrm{U} \quad \Rightarrow \quad 235 - 92 = \cancel{147} \text{ neutrons}$$ 143
$$^{238}_{92}\mathrm{U} \quad \Rightarrow \quad 238 - 92 = \cancel{150} \text{ neutrons}$$ 146
$$^{235}_{93}\mathrm{Np} \quad \Rightarrow \quad 235 - 93 = \cancel{146} \text{ neutrons}$$ 142
$$^{238}_{95}\mathrm{Am} \quad \Rightarrow \quad \cancel{235} - 95 = \cancel{147} \text{ neutrons} \ .$$ 143
238

Par ordre croissant du nombre de nucléons, on a

$$\text{(iii)} < \text{(i)} = \text{(iv)} < \text{(ii)} \quad .$$ (réponse)

E3 **Identifier la clé** La clé est l'équation 13.5 du rayon du noyau d'un atome en fonction du nombre de masse A :

$$r = r_0 A^{1/3} = 1{,}20\,\mathrm{fm}\,A^{1/3} \ .$$

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$^{4}_{2}\mathrm{He}$	Charge volumique ρ
$^{56}_{26}\mathrm{Fe}$	
$^{206}_{82}\mathrm{Pb}$	
$r_0 = 1{,}20\,\mathrm{fm}$	

Résoudre le problème La charge du noyau est donnée par le nombre de protons et la charge élémentaire :

$$q_{\text{noyau}} = Ze \ .$$

Le volume du noyau, qu'on peut traiter comme une sphère, est donné par

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \qquad \text{avec} \qquad r = r_0 A^{1/3} \ .$$

Ainsi, la charge volumique est donnée par

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{Ze}{\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)} = \frac{3Ze}{4\pi\left(r_0 A^{1/3}\right)^3} = \frac{3Ze}{4\pi r_0^3 A} \ .$$

a. Pour l'hélium $^{4}_{2}\mathrm{He}$, on a

$$\rho = \frac{3 \times 2 \times 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}}{4\pi\left(1{,}20 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}\right)^3 \times 4}$$
$$\rho = 1{,}11 \times 10^{25}\,\mathrm{C/m^3} \ .$$ (réponse)

b. Pour le fer $^{56}_{26}\mathrm{Fe}$, on a

$$\rho = \frac{3 \times 26 \times 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}}{4\pi\left(1{,}20 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}\right)^3 \times 56}$$
$$\rho = 1{,}03 \times 10^{25}\,\mathrm{C/m^3} \ .$$ (réponse)

c. Pour le plomb $^{206}_{82}\mathrm{Pb}$, on a

$$\rho = \frac{3 \times 82 \times 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}}{4\pi\left(1{,}20 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}\right)^3 \times 206}$$

$$\rho = 8{,}81 \times 10^{24}\,\mathrm{C/m^3}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse On constate avec les trois charges volumiques trouvées que la charge volumique diminue avec la taille du noyau, ce qui est cohérent avec le fait que la proportion de neutrons est de plus en plus grande avec l'augmentation du numéro atomique des éléments.

P4 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$^{56}_{26}\mathrm{Fe}$	$K_{\text{nucléon}}$
$\Delta x = r$	
$p = \Delta p$	

Identifier les clés La première clé est l'équation 10.34 qui relie la quantité de mouvement à son énergie cinétique :

$$p = \sqrt{2mK}\ . \qquad \text{(i)}$$

La deuxième clé est l'équation 10.36 du principe d'incertitude pour la position :

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}\ . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème On indique que les incertitudes sont minimales et que le module de la quantité de mouvement est égale à son incertitude, donc l'équation (ii) peut s'écrire

$$p = \Delta p_x = \frac{\hbar}{2\Delta x}\ .$$

On mentionne aussi dans l'énoncé que l'incertitude sur la position d'un nucléon est égale au rayon du noyau, soit $\Delta x = r = r_0 A^{1/3}$. Donc

$$p = \frac{\hbar}{2r} = \frac{\hbar}{2r_0 A^{1/3}}\ .$$

Selon l'équation (i), l'énergie cinétique est

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{\left(\frac{\hbar}{2r_0 A^{1/3}}\right)^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{8mr_0^2 A^{2/3}}\ .$$

Dans le cas du fer, pour lequel $A = 56$, pour un nucléon dont la masse est $1{,}661 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, on obtient

$$K = \frac{\hbar^2}{8mr_0^2 A^{2/3}} = \frac{\left(1{,}055 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}\right)^2}{8 \times \left(1{,}661 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}\right) \times \left(1{,}20 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}\right)^2 \times 56^{2/3}}$$

$$K = 4{,}0 \times 10^{-14}\,\mathrm{J} = 0{,}25\,\mathrm{MeV}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct pour un nucléon.

P5 **Décortiquer le problème** La connaissance de la longueur d'onde de de Broglie d'une particule permet de déterminer sa vitesse.

Connues	Inconnue
${}^{197}_{79}\mathrm{Au}$	ΔV
$\lambda = \dfrac{r_{\text{noyau}}}{4}$	

Identifier les clés La première clé est l'équation 10.33 de la longueur d'onde de de Broglie pour une particule :

$$\lambda = \frac{h}{p} \ . \tag{i}$$

La deuxième clé est l'équation 10.35 qui définit la quantité de mouvement relativiste :

$$p = \frac{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}{c}, \qquad \text{où} \qquad E = mc^2 + K$$

$$p = \frac{\sqrt{\left(mc^2 + K\right)^2 - m^2c^4}}{c} \ . \tag{ii}$$

(Car sans savoir si la vitesse de l'électron est d'ordre relativiste ou non, on sait qu'en utilisant l'équation 10.35 on trouve une solution qui respecte les deux cas.)
La troisième clé est l'équation qui relie l'énergie cinétique d'une particule chargée à la différence de potentiel utilisée pour l'accélérer :

$$K = -q\Delta V \ . \tag{iii}$$

Résoudre le problème À partir des deux premières clés, on peut trouver une expression de l'énergie cinétique de l'électron. D'abord, selon l'équation (ii),

$$K = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2 \ .$$

On peut exprimer la quantité de mouvement p en fonction de la longueur d'onde selon l'équation (i), puis l'insérer dans l'équation de l'énergie cinétique :

$$p = \frac{h}{\lambda}, \qquad \text{avec} \qquad \lambda = \frac{r_{\text{noyau}}}{4}$$

$$p = \frac{h}{\left(\frac{r_{\text{noyau}}}{4}\right)} = \frac{4h}{r_0 A^{1/3}}$$

$$K = \sqrt{\left(\frac{4h}{r_0 A^{1/3}}\right)^2 c^2 + m^2c^4} - mc^2$$

$$= \sqrt{\frac{16\,(hc)^2}{r_0^2 A^{2/3}} + \left(mc^2\right)^2} - mc^2 \ .$$

Le calcul de cette énergie cinétique donne

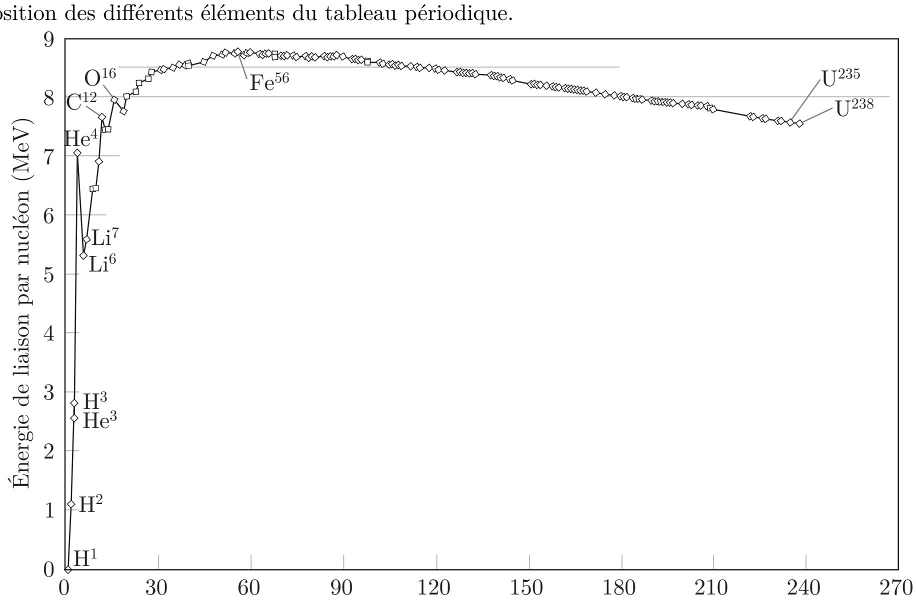
$$K = \sqrt{\frac{16 \times (1\,240\,\mathrm{eV \cdot nm})^2}{\left(1{,}20 \times 10^{-6}\,\mathrm{nm}\right)^2 \times 197^{2/3}} + \left(511 \times 10^3\,\mathrm{eV}\right)^2} - 511 \times 10^3\,\mathrm{eV} = 710\,\mathrm{MeV} \ .$$

Selon l'équation (iii), la différence de potentiel associée à cette énergie pour un électron est

$$\Delta V = \frac{K}{-q} = \frac{K}{e} = \frac{710\,\mathrm{MeV}}{e} = 710\,\mathrm{MV} \ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du potentiel trouvé est élevé, mais plausible, car l'électron peut être accéléré à très haute vitesse dans de telles expériences.

Q6 **Illustrer la situation** La figure suivante reproduit la figure 13.4 dans laquelle on peut voir la position des différents éléments du tableau périodique.



Décortiquer le problème Les différents nucléides n'ont pas la même énergie de liaison par nucléon, donc pas la même hauteur sur le graphique de la figure 13.4.

Identifier la clé La clé consiste à repérer, sur la courbe de la figure 13.4, les quatre nucléides analysés.

Résoudre le problème On doit utiliser le nombre de masse pour repérer chaque nucléide sur le graphique (sur l'axe horizontal). Pour les nucléides $^{124}_{54}\text{Xe}$, $^{66}_{30}\text{Zn}$, $^{7}_{3}\text{Li}$ et $^{196}_{80}\text{Hg}$, les nombres de masse impliqués sont 124, 66, 7 et 196.

Sur la figure, on voit que le lithium 7 est le nucléide qui est situé le plus bas parmi les quatre. Le zinc 66, près du fer, est celui qui est situé le plus haut. À mesure qu'on s'éloigne au-delà du fer, les nucléides ont une énergie de liaison par nucléon de plus en plus faible. Ainsi, le xénon 124 a une énergie inférieure à celle du zinc, et le mercure a une énergie un peu plus basse encore. Les nucléides par ordre croissant d'énergie de liaison par nucléon sont donc $^{7}_{3}\text{Li}$, $^{196}_{80}\text{Hg}$, $^{124}_{54}\text{Xe}$ et $^{66}_{30}\text{Zn}$.

$$\text{(iii)} < \text{(iv)} < \text{(i)} < \text{(ii)} \qquad \text{(réponse)}$$

E7 **Décortiquer le problème** On cherche l'énergie de liaison contenue dans un noyau de livermorium 293.

Connues	Inconnue
$M_{\text{Lv-293}} = 293{,}204\,49\,\text{u}$	E_l
$M_{^1\text{H}} = 1{,}007\,825\,0\,\text{u}$	
$M_\text{n} = 1{,}008\,664\,9\,\text{u}$	
$c^2 = 931{,}5\,\text{MeV/u}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 13.8 de l'énergie de liaison :

$$E_\text{l} = (Zm_\text{H} + Nm_\text{n} - M)\,c^2 \ .$$

Résoudre le problème Le livermorium 293 possède $Z = 116$ protons et $N = 293 - 116 = 177$ neutrons. L'énergie de liaison est donc

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{l}} &= (116 \times 1{,}007\,825\,0\,\mathrm{u} + 177 \times 1{,}008\,664\,9\,\mathrm{u} - 293{,}204\,49\,\mathrm{u}) \times 931{,}5\,\mathrm{MeV/u} \\ &= 2{,}084\,\mathrm{GeV}\ . \end{aligned}$$

Pour comparer cette énergie à l'énergie au repos d'un atome d'hydrogène, on calcule cette énergie au repos à l'aide de l'équation 9.47 :

$$E_{0,\mathrm{H}} = m_{\mathrm{H}}c^2 = 1{,}007\,825\,0\,\mathrm{u} \times 931{,}5\,\mathrm{MeV/u} = 938{,}81\,\mathrm{MeV}\ .$$

L'énergie de liaison trouvée pour le livermorium 293 représente $2{,}220E_{0,\mathrm{H}}$. On peut donc affirmer que

$$E_{\mathrm{l}} = 2{,}084\,\mathrm{GeV} = 2{,}220E_{0,\mathrm{H}}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct.

E8 **Décortiquer le problème** On cherche l'énergie de liaison par nucléon contenue dans deux nucléides différents ayant tous deux 40 nucléons.

Connues	Inconnue
$M_{\text{K-40}} = 39{,}963\,999\,\mathrm{u}$	E_{l}/A
$M_{\text{Ar-40}} = 39{,}962\,383\,\mathrm{u}$	
$M_{\mathrm{H}} = 1{,}007\,825\,\mathrm{u}$	
$M_{\mathrm{n}} = 1{,}008\,665\,\mathrm{u}$	
$c^2 = 931{,}5\,\mathrm{MeV/u}$	

a. **Identifier la clé** La clé consiste à calculer l'énergie de liaison à l'aide de l'équation 13.8, en plus de diviser le résultat par le nombre de nucléons A :

$$E_{\mathrm{l}}/A = \frac{(Zm_{\mathrm{H}} + Nm_{\mathrm{n}} - M)\,c^2}{A}\ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème Le ${}^{40}_{19}\mathrm{K}$ possède $Z = 19$ protons et $N = 21$ neutrons, pour un total de $A = 40$ nucléons, donc

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{l}}/A &= \frac{(19 \times 1{,}007\,825\,\mathrm{u} + 21 \times 1{,}008\,665\,\mathrm{u} - 39{,}963\,999\,\mathrm{u}) \times 931{,}5\,\mathrm{MeV/u}}{40} \\ E_{\mathrm{l}}/A &= 8{,}538\,\mathrm{MeV}\ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct.

b. **Identifier la clé** On procède de la même manière qu'en **a.** avec l'équation (i).

Résoudre le problème Le ${}^{40}_{18}\mathrm{Ar}$ possède $Z = 18$ protons et $N = 22$ neutrons, pour un total de $A = 40$ nucléons, donc

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{l}}/A &= \frac{(18 \times 1{,}007\,825\,\mathrm{u} + 22 \times 1{,}008\,665\,\mathrm{u} - 39{,}962\,383\,\mathrm{u}) \times 931{,}5\,\mathrm{MeV/u}}{40} \\ E_{\mathrm{l}}/A &= 8{,}595\,\mathrm{MeV}\ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct.

c. **Identifier la clé** La clé est le fait qu'une énergie de liaison par nucléon plus faible est associée à un noyau plus susceptible de se transformer pour tendre vers une énergie de liaison plus grande.

Résoudre le problème En comparant les résultats obtenus en **a.** et en **b.**, on constate que l'énergie de liaison par nucléon est plus faible pour le ${}^{40}_{19}\mathrm{K}$. C'est donc le noyau le plus instable des deux.

Le ${}^{40}_{19}\mathrm{K}$, car son énergie de liaison par nucléon est plus faible. (réponse)

P9 **Décortiquer le problème** On cherche l'énergie de liaison contenue dans deux isotopes différents du manganèse.

Connues	Inconnues
$M_{^{55}\mathrm{Mn}} = 54{,}938\,049\,\mathrm{u}$	$E_{\mathrm{l},^{55}\mathrm{Mn}}$
$M_{^{55}\mathrm{Mn}} = 55{,}938\,909\,\mathrm{u}$	$E_{\mathrm{l},^{55}\mathrm{Mn}}$
$M_{\mathrm{H}} = 1{,}007\,825\,0\,\mathrm{u}$	E_γ
$M_{\mathrm{n}} = 1{,}008\,664\,9\,\mathrm{u}$	
$c^2 = 931{,}5\,\mathrm{MeV/u}$	

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 13.8 de l'énergie de liaison :

$$E_\mathrm{l} = (Zm_\mathrm{H} + Nm_\mathrm{n} - M)\,c^2\ .$$

Résoudre le problème Le manganèse 55 possède $Z = 25$ protons et $N = 55 - 25 = 30$ neutrons. L'énergie de liaison est donc

$$E_\mathrm{l}\left(^{55}\mathrm{Mn}\right) = (25 \times 1{,}007\,825\,0\,\mathrm{u} + 30 \times 1{,}008\,664\,9\,\mathrm{u} - 54{,}938\,049\,\mathrm{u}) \times 931{,}5\,\mathrm{MeV/u}$$
$$E_\mathrm{l}\left(^{55}\mathrm{Mn}\right) = 482{,}07\,\mathrm{MeV}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct.

b. **Identifier la clé** Comme en **a.**, on utilise l'équation 13.8 de l'énergie de liaison :

$$E_\mathrm{l} = (Zm_\mathrm{H} + Nm_\mathrm{n} - M)\,c^2\ .$$

Résoudre le problème Le manganèse 56 possède $Z = 25$ protons et $N = 56 - 25 = 31$ neutrons. L'énergie de liaison est donc

$$E_\mathrm{l}\left(^{56}\mathrm{Mn}\right) = (25 \times 1{,}007\,825\,0\,\mathrm{u} + 31 \times 1{,}008\,664\,9\,\mathrm{u} - 55{,}938\,909\,\mathrm{u}) \times 931{,}5\,\mathrm{MeV/u}$$
$$E_\mathrm{l}\left(^{56}\mathrm{Mn}\right) = 489{,}34\,\mathrm{MeV}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct.

c. **Identifier la clé** La clé est le principe de conservation de l'énergie.

Résoudre le problème La réaction produisant un photon est

$$^{55}\mathrm{Mn} + \mathrm{n} = {}^{56}\mathrm{Mn} + \gamma\ .$$

Exprimée en fonction de l'énergie au repos, cette équation s'écrit

$$\left(M_{^{55}\mathrm{Mn}} + M_\mathrm{n}\right)\,c^2 = M_{^{56}\mathrm{Mn}}c^2 + E_\gamma\ .$$

On peut alors isoler et calculer l'énergie du photon E_γ :

$$\begin{aligned} E_\gamma &= \left(M_{^{55}\mathrm{Mn}} + M_\mathrm{n}\right)c^2 - M_{^{56}\mathrm{Mn}}c^2 \\ &= \left(M_{^{55}\mathrm{Mn}} + M_\mathrm{n} - M_{^{56}\mathrm{Mn}}\right)c^2 \\ &= (54{,}938\,049\,\mathrm{u} + 1{,}008\,664\,9\,\mathrm{u} - 55{,}938\,909\,\mathrm{u}) \times 931{,}5\,\mathrm{MeV/u} \\ E_\gamma &= 7{,}27\,\mathrm{MeV}\ . \qquad \text{(réponse)} \end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de cette énergie est plausible pour un photon de haute énergie (sa longueur d'onde serait 0,170 pm).

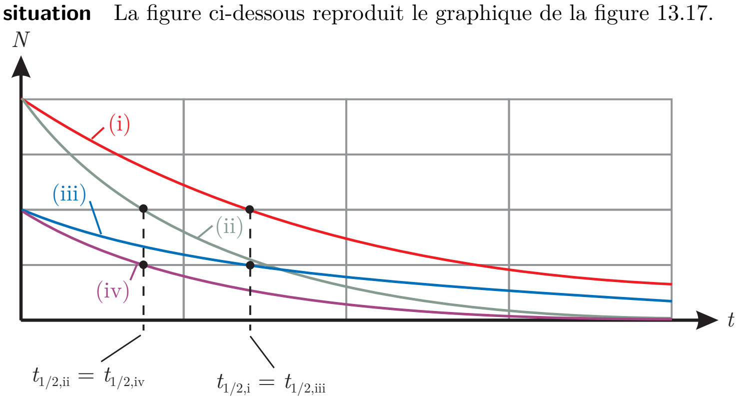
Q10 **Décortiquer le problème** On désire déterminer si la datation radioactive au carbone 14 peut être utilisée pour étudier des ossements de dinosaure.

Identifier la clé La clé est le fait que la limite pratique de la datation radioactive au carbone 14 est d'environ 20 000 ans.

Résoudre le problème Les dinosaures ont vécu sur Terre jusqu'à il y a environ 65 millions d'années, bien avant la limite pratique de la datation au carbone 14. Les atomes de carbone 14 ont pratiquement tous été transmutés en azote et l'activité d'un échantillon serait trop faible pour être détectée. On ne peut donc pas utiliser cette méthode pour déterminer l'âge d'ossements de dinosaures.

Non, on ne peut pas utiliser la datation au carbone 14. (réponse)

Q11 **Illustrer la situation** La figure ci-dessous reproduit le graphique de la figure 13.17.



Décortiquer le problème Le graphique montre la décroissance du nombre de noyaux pour quatre échantillons. Ce sont des échantillons d'isotopes radioactifs.

a. **Identifier la clé** La clé est le temps requis pour que la courbe atteigne la moitié de sa hauteur initiale.

Résoudre le problème À partir des graduations sur le graphique, on observe que la courbe (ii) et la courbe (iv) atteignent en même temps une valeur $N = N_0/2$, et qu'après un délai supplémentaire, les courbes (i) et (iii) atteignent en même temps une valeur $N = N_0/2$. Ainsi, les quatre échantillons par ordre croissant de la demi-vie sont

$$t_{1/2,(\text{ii})} = t_{1/2,(\text{iv})} < t_{1/2,(\text{i})} = t_{1/2,(\text{iii})} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 13.19 qui établit la relation entre la demi-vie et la constante de désintégration :

$$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}} \ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème On constate avec l'équation (i) que la demi-vie varie selon l'inverse de la constante de désintégration. Une demi-vie plus grande correspond à une constante de désintégration plus faible. Ainsi, à partir de l'ordre trouvé en **a.** pour la demi-vie des quatre échantillons, on trouve

$$\lambda_{(\text{i})} = \lambda_{(\text{iii})} < \lambda_{(\text{ii})} = \lambda_{(\text{iv})} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'information contenue dans la figure 13.17 permet également d'établir le rapport des différentes constantes de désintégration. On peut observer que les demi-vies des échantillons (i) et (iii) sont deux fois plus grandes que les demi-vies des échantillons (ii) et (iv). L'équation (i) permet donc d'affirmer plus précisément que $\lambda_{(\text{ii})} = \lambda_{(\text{iv})} = 2\lambda_{(\text{i})} = 2\lambda_{(\text{iii})}$. Ce résultat sera utile en **c.**

c. Identifier la clé La clé est l'équation 13.14 selon laquelle l'activité R est égale au taux de diminution du nombre de noyaux intacts par rapport au temps :

$$R = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} \ . \tag{ii}$$

C'est donc la pente des courbes sur le graphique présenté.

Résoudre le problème On aperçoit sur le graphique que la courbe (iii) est celle qui a la pente la plus faible (en valeur absolue) à $t = 0$. On observe aussi que la courbe (ii) semble avoir la pente la plus forte. Les courbes (i) et (iv) ont des courbes semblables à une valeur intermédiaire, ce qui suggère qu'à $t = 0$ on a $R_{0,(\mathrm{i})} = R_{0,(\mathrm{iv})}$. Il est cependant possible de quantifier cette relation pour un résultat plus clair.

On a établi en **b.** que $\lambda_{(\mathrm{iv})} = 2\lambda_{(\mathrm{i})}$. Puisque $R_0 = \lambda N_0$ (équation 13.16) et que $N_{0,(\mathrm{i})} = 2N_{0,(\mathrm{iv})}$ (voir l'échelle verticale du graphique), on trouve

$$R_{0,(\mathrm{i})} = \lambda_{(\mathrm{i})} N_{0,(\mathrm{i})} = \frac{1}{2}\lambda_{(\mathrm{iv})} \times 2N_{0,(\mathrm{iv})} = \lambda_{(\mathrm{iv})} N_{0,(\mathrm{iv})} = R_{0,(\mathrm{iv})} \ .$$

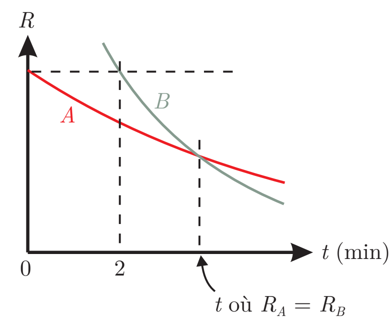
On peut donc finalement affirmer que les activités $R_{0,(\mathrm{i})}$ et $R_{0,(\mathrm{iv})}$ sont égales, à une valeur comprise entre $R_{0,(\mathrm{iii})}$ et $R_{0,(\mathrm{ii})}$:

Q12 **Décortiquer le problème** Deux échantillons (A et B) présentent la même activité à deux minutes d'intervalle. Peuvent-ils présenter la même activité à un instant donné si $t_{1/2,A} > t_{1/2,B}$?

Identifier la clé La clé est le fait que la demi-vie est le temps requis pour que l'activité d'un échantillon diminue précisément d'un facteur 2.

Résoudre le problème D'abord, on doit interpréter le fait que $R_A(0) = R_B(2{,}0\,\mathrm{min})$. D'une part, à $t = 0$, l'activité de l'échantillon B (activité en décroissance) était nécessairement supérieure à $R_A(0)$. D'autre part, à $t = 2{,}0\,\mathrm{min}$, l'activité de l'échantillon A a diminué à un niveau inférieur à $R_B(2{,}0\,\mathrm{min})$.

La demi-vie de l'échantillon B étant plus faible, cela signifie que l'activité R_B décroît plus rapidement. Elle pourra alors rattraper R_A qui décroît plus lentement. La figure ci-contre montre le comportement des deux courbes de l'activité en fonction du temps : la courbe B, qui présente une valeur supérieure à la courbe A à $t = 0$ et à $t = 2{,}0\,\mathrm{min}$, décroît plus rapidement jusqu'à couper la courbe A, à l'instant où les deux activités sont égales.



Oui, les deux échantillons auront la même activité à un temps supérieur à 2,0 min. (réponse)

E13 **Décortiquer le problème** L'activité radioactive d'un échantillon est liée au nombre d'atomes de l'échantillon et à la demi-vie de l'isotope.

Connues	Inconnue
$N = 7{,}75 \times 10^{19}$ atomes	R
$t_{1/2,{}^{13}\mathrm{N}} = 9{,}97\,\mathrm{min}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 13.14 de l'activité radioactive d'un échantillon :

$$R = \lambda N, \qquad \text{avec} \qquad \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

$$R = \frac{N \ln 2}{t_{1/2}} \ . \tag{i}$$

Résoudre le problème En insérant les valeurs dans l'équation (i), on trouve

$$R = \frac{7{,}75 \times 10^{19}\,\text{atomes} \times \ln 2}{9{,}97\,\text{min}} = 5{,}388 \times 10^{18}\,\text{at/min} \ .$$

Puisqu'on a utilisé la demi-vie exprimée en minutes, on obtient une activité en atomes désintégrés par minute. On peut faire la conversion en secondes pour avoir des becquerels :

$$R = 5{,}388 \times 10^{18}\,\text{at/min} \times \frac{1{,}00\,\text{min}}{60{,}0\,\text{s}}$$
$$R = 8{,}98 \times 10^{16}\,\text{Bq} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'activité peut être aussi élevé, car le nombre d'atomes de l'échantillon peut être de cet ordre de grandeur.

E14 **Décortiquer le problème**

Connue	Inconnues
$t_{1/2,{}^{99}\text{Mo}} = 66\,\text{h}$	$t_{R_0/10}$

Identifier la clé La clé est l'équation 13.15 de la loi de désintégration pour l'activité :

$$R = R_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,, \qquad \text{avec} \qquad \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$
$$R = R_0\,\mathrm{e}^{\frac{-t\ln 2}{t_{1/2}}} \ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème On s'intéresse au délai après lequel l'activité est dix fois plus faible, c'est-à-dire que $R = R_0/10$. On isole t dans l'équation (i) en faisant ce remplacement :

$$\frac{R_0}{10} = R_0\,\mathrm{e}^{\frac{-t\ln 2}{t_{1/2}}}$$
$$\ln 0{,}1 = \frac{-t\ln 2}{t_{1/2}}$$
$$t = -\frac{t_{1/2}\ln 0{,}1}{\ln 2}$$
$$= -\frac{66\,\text{h} \times \ln 0{,}1}{\ln 2} = 219{,}2\,\text{h} \ .$$

Convertie en jours, cette durée est

$$t = 9{,}1\,\text{d} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la durée trouvée est correct, celle-ci étant équivalente à un peu plus de trois demi-vies.

E15 **Décortiquer le problème** La demi-vie et l'activité d'un échantillon radioactif permettent de déterminer le nombre de noyaux et l'activité à différents instants.

Connues	Inconnues
$t_{1/2,{}^{131}\text{I}} = 8{,}02\,\text{d}$	N_0
$R_0 = 2{,}00\,\text{GBq}$	R
$t = 14{,}0\,\text{d}$	$\lvert\Delta N\rvert$

a. Identifier la clé La clé est l'équation 13.14 de l'activité radioactive :

$$R = \lambda N, \qquad \text{avec} \qquad \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$
$$R = \frac{N\ln 2}{t_{1/2}} \ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème On applique l'équation (i) pour $t = 0$ en isolant le nombre de noyaux N :

$$\begin{aligned} N_0 &= \frac{R_0 t_{1/2}}{\ln 2} \\ &= \frac{2{,}00 \times 10^9\,\text{Bq} \times 8{,}02\,\text{d} \times \frac{24 \times 3\,600\,\text{s}}{1{,}00\,\text{d}}}{\ln 2} = 1{,}999 \times 10^{15}\ \text{noyaux} \\ N_0 &= 2{,}00 \times 10^{15}\ \text{noyaux}\ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du nombre de noyaux est correct pour un échantillon d'une fraction de gramme.

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 13.15 de la loi de désintégration pour l'activité :

$$R = R_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,, \qquad \text{avec} \qquad \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

$$R = R_0\,\mathrm{e}^{\frac{-t \ln 2}{t_{1/2}}}\ . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème On applique l'équation (ii) pour $t = 14{,}0\,\text{d}$:

$$\begin{aligned} R &= 2{,}00 \times 10^9\,\text{Bq} \times \mathrm{e}^{\frac{-14{,}0\,\text{d} \times \ln 2}{8{,}02\,\text{d}}} = 5{,}962 \times 10^8\,\text{Bq} \\ R &= 596\,\text{MBq}\ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'activité est élevé, mais plus faible que celui de l'activité initiale, ce qui est logique.

c. **Identifier la clé** La clé consiste à comparer le nombre de noyaux intacts au début et à la fin du délai de 14,0 d.

Résoudre le problème Pour $t = 14{,}0\,\text{d}$, on calcule d'abord le nombre de noyaux d'iode 131 restants dans l'échantillon à l'aide de l'équation (i) utilisée en **a.**, à partir de l'activité réduite trouvée en **b.** :

$$\begin{aligned} N &= \frac{R t_{1/2}}{\ln 2} \\ N &= \frac{596\,\text{MBq} \times 8{,}02\,\text{d} \times \frac{24 \times 3\,600\,\text{s}}{1{,}00\,\text{d}}}{\ln 2} = 5{,}96 \times 10^{14}\ \text{noyaux}\ . \end{aligned}$$

On calcule ensuite la différence du nombre de noyaux intacts :

$$\begin{aligned} |\Delta N| &= N - N_0 = 2{,}00 \times 10^{15} - 5{,}96 \times 10^{14} \\ |\Delta N| &= 1{,}40 \times 10^{15}\ \text{noyaux désintégrés}\ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du nombre de désintégrations est correct, celui-ci étant inférieur au nombre de noyaux initial.

E16 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$t_{^{32}\text{P}} = 14{,}26\,\text{d}$	λ
$m = 1{,}73\,\mu\text{g}$	N_0
	R_0
	$R_{24{,}0\,\text{h}}$
	$N_{7{,}00\,\text{d}}$

a. Identifier la clé La clé est l'équation 13.21 de la demi-vie :

$$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} \ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème En isolant λ dans l'équation (i), on trouve

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}} = \frac{\ln(2)}{14{,}26\,\text{d}}$$
$$\lambda = 0{,}048\,61\,\text{d}^{-1} = 5{,}63 \times 10^{-7}\,\text{s}^{-1} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la constante de désintégration est correct. On l'obtient d'abord en d^{-1} puisque la demi-vie est exprimée en jours.

b. Identifier la clé On calcule le nombre de noyaux à partir de la masse du nucléide $^{32}_{15}\text{P}$, obtenue par le nombre de masse :

$$N = \frac{M}{m} \ . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème On remplace les valeurs numériques :

$$N_0 = \frac{1{,}73 \times 10^{-9}\,\text{kg}}{32 \times 1{,}661 \times 10^{-27}\,\text{kg}}$$
$$N_0 = 3{,}25 \times 10^{16}\,\text{atomes} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du nombre de noyaux est correct pour un échantillon d'une fraction de gramme.

c. Identifier la clé La clé est l'équation 13.14 de l'activité radioactive d'un échantillon :

$$R = \lambda N, \qquad \text{avec} \qquad \lambda = 5{,}63 \times 10^{-7}\,\text{s}^{-1} \ .$$

Résoudre le problème En utilisant le nombre de noyaux trouvé en **b.**, on trouve

$$R_0 = \lambda N_0 = 5{,}63 \times 10^{-7}\,\text{s}^{-1} \times 3{,}25 \times 10^{16}\,\text{noyaux} = 1{,}83 \times 10^{10}\,\text{Bq}$$
$$R_0 = 18{,}3\,\text{GBq} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'activité trouvée est correct.

d. Identifier la clé La clé est l'équation 13.15 de la loi de désintégration pour l'activité :

$$R = R_0\,\text{e}^{-\lambda t} \ . \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème On applique l'équation (iii) pour $t = 24{,}0\,\text{h}$:

$$R = 18{,}3 \times 10^9\,\text{Bq} \times \text{e}^{-5{,}63\,\times\,10^{-7}\,\text{s}^{-1} \times (24{,}0 \times 3\,600\,\text{s})} = 1{,}74 \times 10^9\,\text{Bq}$$
$$R = 17{,}4\,\text{GBq} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'activité trouvée est plus faible que l'activité initiale, comme il se doit.

e. Identifier la clé La clé est l'équation 13.13 de la loi de désintégration :

$$N = N_0\,\text{e}^{-\lambda t} \ . \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème En utilisant le nombre d'atomes trouvé en **b.** pour $t = 0$, on obtient

$$N = 3{,}25 \times 10^{16}\,\text{atomes} \times \text{e}^{-5{,}63\,\times\,10^{-7}\,\text{s}^{-1} \times (7{,}00 \times 24{,}0 \times 3\,600\,\text{s})}$$
$$N = 2{,}32 \times 10^{16}\,\text{atomes} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du nombre de noyaux trouvé est correct.

P17 **Décortiquer le problème** L'activité observée dans un échantillon de carbone ayant fait partie d'un être vivant permet de déterminer l'âge de l'échantillon ainsi que le nombre d'atomes de carbone 14 à divers instants.

Connues	Inconnues
$M = 0{,}124\,\text{g}$	N
$R = 28{,}50\,\text{mBq}$	N_0
$t_{1/2,^{14}\text{C}} = 5\,730\,\text{a}$	t
$N_{^{14}\text{C}}/N_\text{C} = 1{,}30 \times 10^{-12}$	

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 13.14 de l'activité radioactive :

$$R = \lambda N, \qquad \text{avec} \qquad \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

$$R = \frac{N \ln 2}{t_{1/2}} \ . \tag{i}$$

Résoudre le problème On applique l'équation (i) en isolant le nombre de noyaux N :

$$\begin{aligned} N &= \frac{Rt_{1/2}}{\ln 2} \\ &= \frac{28{,}50 \times 10^{-3}\,\text{Bq} \times 5\,730\,\text{a} \times (365{,}24 \times 24 \times 3\,600\,\text{s/a})}{\ln 2} = 7{,}434\,7 \times 10^9 \text{ noyaux} \\ N &= 7{,}43 \times 10^9 \text{ atomes} \ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du nombre de noyaux est correct pour un échantillon d'une fraction de gramme.

b. **Identifier la clé** La masse d'un atome de carbone 14 est $m_{^{14}\text{C}} = 14\,\text{u}$ et celle d'un atome de carbone 12 est $m_{^{12}\text{C}} = 12\,\text{u}$. Un échantillon de carbone prélevé sur un être vivant contient principalement du carbone 12, un peu de carbone 13 et une fraction infime de carbone 14 ($N_{^{14}\text{C}}/N_\text{C} = 1{,}30 \times 10^{-12}$). Pour cette raison, la masse atomique moyenne du carbone de l'échantillon est 12,011 u, le nombre d'atomes de carbone est donné par

$$N_\text{C} = \frac{M}{m_\text{C}} \ ,$$

et le nombre d'atomes de carbone 14 est donné par

$$N_{^{14}\text{C}} = \frac{M}{m_\text{C}} \times \left(\frac{N_{^{14}\text{C}}}{N_{^{12}\text{C}}}\right) \ .$$

Résoudre le problème On insère les valeurs numériques :

$$\begin{aligned} N_{^{14}\text{C}} &= \frac{1{,}24 \times 10^{-4}\,\text{kg}}{12{,}011 \times 1{,}661 \times 10^{-27}\,\text{kg}} \times \left(1{,}30 \times 10^{-12}\right) \\ &= 8{,}080\,1 \times 10^9 \text{ atomes} \ . \end{aligned}$$

Cette quantité est le nombre d'atomes de ^{14}C dans l'échantillon (de 0,124 g) jusqu'au moment de la mort de l'être vivant ; c'est donc N_0, la quantité au début du délai de désintégration étudié :

$$N_0 = 8{,}08 \times 10^9 \text{ atomes} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du nombre d'atomes de carbone 14 est correct et supérieur au nombre d'atomes de carbone 14 au moment de l'analyse, comme il se doit.

c. Identifier la clé La clé est l'équation 13.13 de la loi de désintégration :

$$N = N_0\, e^{-\lambda t}, \qquad \text{avec} \qquad \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

$$N = N_0\, e^{-\frac{t \ln 2}{t_{1/2}}} . \tag{ii}$$

Résoudre le problème On isole la durée t dans l'équation (ii) et on utilise les nombres d'atomes trouvés en **a.** et en **b.** pour calculer l'âge du suaire de Turin :

$$\begin{aligned} \frac{N}{N_0} &= e^{-\frac{t\ln 2}{t_{1/2}}} \\ -\ln\frac{N}{N_0} &= \frac{t\ln 2}{t_{1/2}} \\ t &= \frac{-t_{1/2}\ln\frac{N}{N_0}}{\ln 2} \\ &= \frac{-5\,730\,\mathrm{a}\times\ln\left(\frac{7{,}434\,7\times10^9\ \text{atomes}}{8{,}080\,1\times10^9\ \text{atomes}}\right)}{\ln 2} \\ t &= 688\,\mathrm{a}\ . \end{aligned} \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'âge du vêtement est plausible, mais on apprend alors que le suaire de Turin ne peut pas avoir la fameuse origine qui l'a pourtant rendu célèbre.

P18 **Décortiquer le problème** La désintégration alpha d'un échantillon radioactif produit des noyaux d'hélium. On peut évaluer la masse d'hélium produite à partir du nombre de désintégrations alpha observées pour un échantillon donné.

Connues	Inconnue
$t_{1/2,{}^{238}\mathrm{Pu}} = 87{,}7\,\mathrm{a}$	M_{He}
$M_{\mathrm{Pu}} = 830\,\mathrm{g}$	
$\Delta t = 100\,\mathrm{a}$	

Identifier les clés La première clé est le fait que le nombre de noyaux d'hélium créés (des particules alpha) est égal au nombre de noyaux de plutonium désintégrés :

$$N_{\mathrm{He}} = \Delta N_{\mathrm{Pu}} = N - N_0\ . \tag{i}$$

La deuxième clé est l'équation 13.13 de la loi de désintégration :

$$N = N_0\, e^{-\lambda t}, \qquad \text{avec} \qquad \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

$$N = N_0\, e^{-\frac{t \ln 2}{t_{1/2}}} . \tag{ii}$$

Résoudre le problème On calcule le nombre initial de noyaux de plutonium à partir de la masse du nucléide ^{238}Pu, obtenue par le nombre de masse :

$$N_0 = \frac{M}{m} \tag{iii}$$

$$= \frac{0{,}830\,\mathrm{kg}}{238\times1{,}661\times10^{-27}\,\mathrm{kg}} = 2{,}100\times10^{24}\ \text{noyaux}\ .$$

On peut trouver le nombre de noyaux de plutonium restants après 100 ans à partir de l'équation (ii) :

$$N = 2{,}100\times10^{24}\ \text{noyaux}\times e^{-\frac{100\,\mathrm{a}\ln 2}{87{,}7\,\mathrm{a}}} = 9{,}525\times10^{23}\ \text{noyaux}\ .$$

Le nombre de noyaux de plutonium désintégrés est donné par l'équation (i) :

$$\Delta N_{\mathrm{Pu}} = N - N_0 = 2{,}100 \times 10^{24} - 9{,}525 \times 10^{23} = 1{,}147 \times 10^{24}\,\text{noyaux} = N_{\mathrm{He}}\ .$$

C'est le nombre de particules alpha émises, égal au nombre de noyaux d'hélium créés. La masse de cet échantillon d'hélium est donnée par l'équation (iii) dans laquelle on isole la masse M :

$$M_{\mathrm{He}} = N_{\mathrm{He}} \times m_{\mathrm{He}} = 1{,}147 \times 10^{24} \times \left(4 \times 1{,}661 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}\right)$$
$$M_{\mathrm{He}} = 7{,}62\,\mathrm{g}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la masse trouvée est correct.

P19 **Décortiquer le problème** Soit $\Delta N_{^{40}\mathrm{K} \to {^{40}\mathrm{Ar}}}$, le nombre d'atomes de potassium qui se transforment en argon.

Connues	Inconnue
$t_{1/2,^{40}\mathrm{K}} = 1{,}28 \times 10^9\,\mathrm{a}$	t
$N_{^{40}\mathrm{Ar}}/N_{^{40}\mathrm{K}} = 0{,}312$	
$\Delta N_{^{40}\mathrm{K} \to {^{40}\mathrm{Ar}}} = 0{,}107\,2\Delta N_{^{40}\mathrm{K}}$	

Identifier les clés La première clé est le fait que le nombre actuel d'atomes d'argon dans la roche est égal à 10,72 % du nombre de noyaux de potassium désintégrés :

$$N_{^{40}\mathrm{Ar}} = 0{,}107\,2\Delta N_{^{40}\mathrm{K}}\ ,$$

où $\Delta N_{^{40}\mathrm{K}} = N_{^{40}\mathrm{K},0} - N_{^{40}\mathrm{K}}$, donc

$$N_{^{40}\mathrm{Ar}} = 0{,}107\,2\left(N_{^{40}\mathrm{K},0} - N_{^{40}\mathrm{K}}\right)\ . \qquad \text{(i)}$$

La deuxième clé est l'équation 13.13 de la loi de désintégration :

$$N = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,, \qquad \text{avec} \qquad \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}\ .$$

Donc,

$$N_{^{40}\mathrm{K}} = N_{^{40}\mathrm{K},0}\,\mathrm{e}^{-\frac{t \ln 2}{t_{1/2}}}\ . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème Les équations (i) et (ii) peuvent être liées au rapport $N_{^{40}\mathrm{Ar}}/N_{^{40}\mathrm{K}}$ pour développer une expression dans laquelle l'âge t est la seule inconnue. On peut y parvenir par exemple en modifiant l'équation (i) par une division de chaque terme par $N_{^{40}\mathrm{K}}$:

$$\frac{N_{^{40}\mathrm{Ar}}}{N_{^{40}\mathrm{K}}} = \frac{1}{N_{^{40}\mathrm{K}}} 0{,}107\,2\left(N_{^{40}\mathrm{K},0} - N_{^{40}\mathrm{K}}\right)$$
$$0{,}312 = 0{,}107\,2\left(\frac{N_{^{40}\mathrm{K},0}}{N_{^{40}\mathrm{K}}} - 1\right)\ . \qquad \text{(iii)}$$

L'équation (ii) permet ensuite de remplacer le rapport $\frac{N_{^{40}\mathrm{K},0}}{N_{^{40}\mathrm{K}}}$ par

$$\frac{N_{^{40}\mathrm{K},0}}{N_{^{40}\mathrm{K}}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{-\frac{t \ln 2}{t_{1/2}}}} = \mathrm{e}^{\frac{t \ln 2}{t_{1/2}}}\ .$$

En insérant cette expression dans l'équation (iii), on obtient

$$0{,}312 = 0{,}107\,2\left(\mathrm{e}^{\frac{t\ln 2}{t_{1/2}}} - 1\right)\ ,$$

dans laquelle on peut finalement isoler t pour calculer l'âge de la roche :

$$\begin{aligned}\frac{0{,}312}{0{,}107\,2} + 1 &= \mathrm{e}^{\frac{t\ln 2}{t_{1/2}}}\\ t &= \frac{t_{1/2}}{\ln 2}\ln\left(\frac{0{,}312}{0{,}107\,2} + 1\right)\\ &= \frac{1{,}28\times 10^{9}\ \mathrm{a}}{\ln 2}\ln\left(\frac{0{,}312}{0{,}107\,2} + 1\right)\\ t &= 2{,}52\times 10^{9}\ \mathrm{a}\ .\end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'âge trouvé est correct, celui-ci étant environ de deux demi-vies pour le potassium.

Q20 **Décortiquer le problème** Le meitnerium $^{268}_{109}\mathrm{Mt}$ (nucléide initial) possède 268 nucléons, dont $Z_0 = 109$ protons et $N_0 = (268 - 109) = 159$ neutrons. On veut déterminer les nucléides observés successivement lorsque se produisent quatre désintégrations alpha.

Identifier la clé La clé est le fait qu'une désintégration alpha signifie que le noyau qui se désintègre perd deux protons et deux neutrons.

Résoudre le problème À partir du noyau initial $^{268}_{109}\mathrm{Mt}$, la première désintégration alpha produit un noyau dont les nombres de protons et de neutrons sont

$$\begin{aligned}&Z_1 = Z_0 - 2 = 109 - 2 = 107 \qquad \text{et} \qquad N_1 = N_0 - 2 = 159 - 2 = 157\\ &A_1 = Z_1 + N_1 = 107 + 157 = 264\ .\end{aligned}$$

Les annexes F et G permettent de déterminer que le nucléide obtenu par cette première désintégration est le bohrium $^{264}_{107}\mathrm{Bh}$.

La deuxième désintégration alpha produit un noyau dont les nombres de protons et de neutrons sont

$$\begin{aligned}&Z_2 = Z_1 - 2 = 107 - 2 = 105 \qquad \text{et} \qquad N_2 = N_1 - 2 = 157 - 2 = 155\\ &A_2 = Z_2 + N_2 = 105 + 155 = 260\ .\end{aligned}$$

Les annexes F et G permettent de déterminer que le nucléide obtenu par cette deuxième désintégration est le dubnium $^{260}_{105}\mathrm{Db}$.

La troisième désintégration alpha produit un noyau dont les nombres de protons et de neutrons sont

$$\begin{aligned}&Z_3 = Z_2 - 2 = 105 - 2 = 103 \qquad \text{et} \qquad N_3 = N_2 - 2 = 155 - 2 = 153\\ &A_3 = Z_3 + N_3 = 103 + 153 = 256\ .\end{aligned}$$

Les annexes F et G permettent de déterminer que le nucléide obtenu par cette troisième désintégration est le lawrencium $^{256}_{103}\mathrm{Lr}$.

La quatrième désintégration alpha produit un noyau dont les nombres de protons et de neutrons sont

$$\begin{aligned}&Z_4 = Z_3 - 2 = 103 - 2 = 101 \qquad \text{et} \qquad N_4 = N_3 - 2 = 153 - 2 = 151\\ &A_4 = Z_4 + N_4 = 101 + 151 = 252\ .\end{aligned}$$

Les annexes F et G permettent de déterminer que le nucléide obtenu par cette quatrième désintégration est le mendélévium $^{252}_{101}\mathrm{Md}$.

La chaîne de nucléides observés est donc

$$^{268}_{109}\mathrm{Mt} \to {}^{264}_{107}\mathrm{Bh} \to {}^{260}_{105}\mathrm{Db} \to {}^{256}_{103}\mathrm{Lr} \to {}^{252}_{101}\mathrm{Md}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Q21 **Décortiquer le problème** On donne l'énergie libérée par désintégration alpha pour quatre isotopes inconnus du thorium :

Isotope	Q (MeV)
(i)	5,50
(ii)	4,77
(iii)	4,08
(iv)	6,45

Identifier la clé La clé est le fait qu'une plus grande énergie libérée lors d'une désintégration alpha est associée à une demi-vie plus courte.

Résoudre le problème L'énergie libérée lors de la désintégration est en quelque sorte un indicateur de l'instabilité du noyau ; plus un noyau est instable, plus sa demi-vie sera courte. L'ordre décroissant de l'énergie Q est donc équivalent à l'ordre croissant des demi-vies $t_{1/2}$:

$$\text{(iv)} < \text{(i)} < \text{(ii)} < \text{(iii)} \; . \qquad \text{(réponse)}$$

E22 **Décortiquer le problème** Des particules alpha de différentes énergies sont émises lors de la désintégration de plusieurs noyaux.

Connues	Inconnues
$M_{\text{Rn}} = 222{,}017\,57\,\text{u}$	K_{α_1}
$M_{\text{Po}} = 218{,}008\,97\,\text{u}$	K_{α_2}
$M_{\text{He}} = 4{,}002\,60\,\text{u}$	
$E\gamma = 0{,}51\,\text{MeV}$	

Identifier les clés La première clé est le fait que l'énergie dégagée par la réaction est soit portée uniquement par la particule alpha, soit portée par la particule alpha et le photon.

La deuxième clé est l'équation 13.23 de l'énergie dégagée lors d'une désintégration alpha :

$$Q = (M_{\text{X}} - M_{\text{X}'} - M_{\text{He}})\, c^2 \; . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème On calcule d'abord l'énergie dégagée par la réaction à l'aide de l'équation (i), où X représente le ${}^{222}_{86}\text{Rn}$ et X′ représente le ${}^{218}_{84}\text{Po}$:

$$Q = (222{,}017\,57\,\text{u} - 218{,}008\,97\,\text{u} - 4{,}002\,60\,\text{u}) \times 931{,}5\,\text{MeV/u} = 5{,}589\,\text{MeV} \; .$$

Dans le cas où les particules alpha portent toute l'énergie dégagée par la réaction, leur énergie cinétique est directement cette quantité Q :

$$K_{\alpha_1} = 5{,}589\,\text{MeV} \; .$$

Résoudre le problème Pour les particules alpha qui partagent l'énergie dégagée avec un photon de 0,51 MeV, leur énergie cinétique (légèrement inférieure) est la différence entre l'énergie émise et l'énergie des photons qui accompagnent la désintégration :

$$K_{\alpha_2} = Q - E\gamma = 5{,}589\,\text{MeV} - 0{,}51\,\text{MeV} = 5{,}08\,\text{MeV} \; .$$

Les énergies des deux types de particules alpha observées sont donc

$$K_{\alpha_1} = 5{,}59\,\text{MeV} \quad \text{et} \quad K_{\alpha_2} = 5{,}08\,\text{MeV} \; . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur des énergies trouvées est correct pour l'énergie cinétique d'une particule alpha émise par radioactivité.

P23 **Décortiquer le problème** On étudie la réaction ${}^{147}_{62}\mathrm{Sm} \to {}^{143}_{60}\mathrm{Nd} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$.

Connues	Inconnues
$M_{^{147}\mathrm{Sm}} = 146{,}914\,89\ \mathrm{u}$	Q
$M_{^{143}\mathrm{Nd}} = 142{,}909\,81\ \mathrm{u}$	v_α
$M_{\mathrm{He}} = 4{,}002\,60\ \mathrm{u}$	

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 13.23 de l'énergie dégagée lors d'une désintégration alpha :

$$Q = (M_{\mathrm{X}} - M_{\mathrm{X}'} - M_{\mathrm{He}})\, c^2 \ . \tag{i}$$

Résoudre le problème En insérant les valeurs dans l'équation (i), où X représente le ${}^{147}_{62}\mathrm{Sm}$ et X′ représente le ${}^{143}_{60}\mathrm{Nd}$:

$$Q = (146{,}914\,89\ \mathrm{u} - 142{,}909\,81\ \mathrm{u} - 4{,}002\,60\ \mathrm{u}) \times 931{,}5\ \mathrm{MeV/u} = 2{,}31\ \mathrm{MeV} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct.

b. **Identifier les clés** La première clé est le principe de conservation de la quantité de mouvement, puisqu'on doit tenir compte du recul de l'atome de néodyme.

La deuxième clé est le principe de conservation de l'énergie, alors que l'énergie dégagée par la réaction devient l'énergie cinétique des deux produits.

Résoudre le problème Puisque le noyau de samarium est initialement immobile, la quantité de mouvement initiale est nulle. En supposant que l'axe des x est parallèle aux vitesses finales, l'équation de conservation de la quantité de mouvement admet donc

$$\begin{aligned} \sum p_{x,\mathrm{i}} &= \sum p_{x,\mathrm{f}} \\ 0 &= p_{\alpha\ ,x,\mathrm{f}} + p_{\mathrm{Nd},x,\mathrm{f}} \\ &= m_\alpha v_{\alpha\ ,x} + m_{\mathrm{Nd}} v_{\mathrm{Nd},x} \ . \end{aligned}$$

On devine que les deux vitesses finales seront de sens opposés sur le même axe. On peut alors exprimer la dernière équation en fonction des modules des vitesses :

$$\begin{aligned} 0 &= m_\alpha v_\alpha - m_{\mathrm{Nd}} v_{\mathrm{Nd}} \\ m_{\mathrm{Nd}} v_{\mathrm{Nd}} &= m_\alpha v_\alpha \ . \end{aligned} \tag{ii}$$

Cette équation comporte deux inconnues. On doit donc traiter l'énergie pour obtenir une seconde équation contenant la vitesse recherchée. Le principe de conservation de l'énergie permet d'écrire

$$Q = K_{\mathrm{Nd}} + K_\alpha \ .$$

En supposant préalablement que les vitesses impliquées ne sont pas relativistes, le traitement est plus simple et on pourra confirmer à la vue des résultats si le traitement relativiste est requis. L'équation précédente devient donc

$$Q = \frac{1}{2} m_{\mathrm{Nd}} v_{\mathrm{Nd}}^2 + \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \ . \tag{iii}$$

Les équations (ii) et (iii) forment un système de deux équations à deux inconnues. On peut isoler v_{Nd} dans l'équation (ii) pour l'insérer ensuite dans l'équation (iii) :

$$\begin{aligned}
v_{\text{Nd}} &= \frac{m_\alpha v_\alpha}{m_{\text{Nd}}} \\
Q &= \frac{1}{2} m_{\text{Nd}} \left(\frac{m_\alpha v_\alpha}{m_{\text{Nd}}}\right)^2 + \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \\
2Q &= \frac{m_\alpha^2 v_\alpha^2}{m_{\text{Nd}}} + m_\alpha v_\alpha^2 \\
2Q &= v_\alpha^2 \left(\frac{m_\alpha^2}{m_{\text{Nd}}} + m_\alpha\right) \\
v_\alpha &= \sqrt{\frac{2Q}{\frac{m_\alpha^2}{m_{\text{Nd}}} + m_\alpha}} \\
&= \sqrt{\frac{2 \times 2{,}31\,\text{MeV}}{\left(\frac{(4{,}002\,60\,\text{u})^2}{142{,}909\,81\,\text{u}} + 4{,}002\,60\,\text{u}\right) \times 931{,}5\,\text{MeV}/c^2}} \\
v_\alpha &= 0{,}034\,7\,c = 1{,}04 \times 10^7\ \text{m/s}\ . \qquad \text{(réponse)}
\end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la vitesse trouvée est correct, et on confirme qu'il n'est pas nécessaire de considérer l'effet relativiste de la vitesse, la vitesse de la particule alpha (la plus élevée des deux vitesses) ne valant que 3,47 % de la vitesse de la lumière.

Q24 **Décortiquer le problème** Un nucléide inconnu absorbe un neutron et se brise en particules de nature connue. On peut donc déduire quel est le nucléide de départ.

Identifier la clé La clé est le fait qu'il y a conservation du nombre de nucléons et de la charge.

a. Résoudre le problème On peut mettre en équation les trois réactions successives, à partir du nucléide X. Pour l'absorption du neutron, on a

$$ {}^{\text{A}}_{\text{Z}}\text{X} + {}^{1}_{0}\text{n} \quad \to \quad {}^{\text{A+1}}_{\text{Z}}\text{X}'\ . \qquad \text{(i)}$$

Pour la désintégration β^-, on a, selon l'équation 13.25,

$$ {}^{\text{A+1}}_{\text{Z}}\text{X}' \quad \to \quad {}^{\text{A+1}}_{\text{Z+1}}\text{X}'' + \text{e}^- + \bar{\nu}\ . \qquad \text{(ii)}$$

Finalement, lorsque le noyau X'' se scinde en deux particules alpha, on peut écrire

$$ {}^{\text{A+1}}_{\text{Z+1}}\text{X}'' \quad \to \quad 2 \times {}^{4}_{2}\text{He}\ . \qquad \text{(iii)}$$

On peut combiner les trois équations en une seule pour simplifier la transformation :

$$\begin{aligned}
\left({}^{\text{A}}_{\text{Z}}\text{X} + {}^{1}_{0}\text{n}\right) + \left({}^{\text{A+1}}_{\text{Z}}\text{X}'\right) + \left({}^{\text{A+1}}_{\text{Z+1}}\text{X}''\right) \quad &\to \quad \left({}^{\text{A+1}}_{\text{Z}}\text{X}'\right) + \left({}^{\text{A+1}}_{\text{Z+1}}\text{X}'' + \text{e}^- + \bar{\nu}\right) + \left(2 \times {}^{4}_{2}\text{He}\right) \\
{}^{\text{A}}_{\text{Z}}\text{X} + {}^{1}_{0}\text{n} \quad &\to \quad \text{e}^- + \bar{\nu} + 2 \times {}^{4}_{2}\text{He}\ .
\end{aligned}$$

Il suffit de déterminer le nombre de nucléons et la charge nette dans chaque membre de l'equation, pour les particules connues, pour déduire le nombre de nucléons et la charge nette du nucléide inconnu ${}^{\text{A}}_{\text{Z}}\text{X}$. Dans le membre de droite de l'équation, les deux noyaux d'hélium entraînent la présence de quatre protons et de quatre neutrons, donc huit nucléons et une charge nette de +3 (4 protons et un électron) ; il y a ainsi nécessairement huit nucléons dans le membre de gauche et une charge nette de +3 également. La particule inconnue ${}^{\text{A}}_{\text{Z}}\text{X}$ doit donc contenir sept des huit nucléons et toute la charge nette de +3. Il s'agit donc de trois protons et quatre neutrons.

Il s'agit donc de lithium ${}^{7}_{3}\text{Li}$. (réponse)

Valider la réponse La désintégration β– entraîne la transformation d'un neutron en un proton et un électron, ce qui permet à l'équation d'être balancée au niveau de la charge nette.

b. **Résoudre le problème** On a écrit en **a.** l'équation de la capture du neutron, à la ligne (i), et l'équation de la désintégration β^-, à la ligne (ii). On doit d'abord identifier les nucléides ${}^{A+1}_{Z}X'$ et ${}^{A+1}_{Z+1}X''$ pour connaître toutes les particules de l'équation à écrire. Selon le résultat de la partie **a.**, on sait que $A = 7$ et $Z = 3$. On sait donc que

$$ {}^{A+1}_{Z}X' = {}^{8}_{3}X' \text{, du lithium } {}^{8}_{3}\mathrm{Li} \ , $$

et

$$ {}^{A+1}_{Z+1}X'' = {}^{8}_{4}X'' \text{, du béryllium } {}^{8}_{4}\mathrm{Be} \ . $$

On peut donc résumer les deux premières réactions par

$$ {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + \mathrm{n} \to {}^{8}_{3}\mathrm{Li} \to {}^{8}_{4}\mathrm{Be} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu} \ . \qquad \text{(réponse)} $$

c. **Résoudre le problème** On a déterminé en **b.** que ${}^{8}_{4}X'' = {}^{8}_{4}\mathrm{Be}$. La réaction de la ligne (iii) peut donc s'écrire

$$ {}^{8}_{4}\mathrm{Be} \to {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \ . \qquad \text{(réponse)} $$

Q25 **Décortiquer le problème** Puisque deux processus de désintégration sont possibles pour le ${}^{40}_{19}\mathrm{K}$, on doit déterminer deux équations différentes qui définissent ces désintégrations.

Identifier les clés Les clés sont les équations 13.25 et 13.29 pour les désintégrations β^- et β^+ :

$$ {}^{A}_{Z}X \to {}_{Z+1}^{\ \ A}X' + \mathrm{e}^- + \bar{\nu} $$
$$ {}^{A}_{Z}X \to {}_{Z-1}^{\ \ A}X' + \mathrm{e}^+ + \nu \ . $$

Résoudre le problème Lors de la désintégration β^-, le nombre de protons augmente de une unité et le nombre de nucléons demeure le même, donc

$$ {}^{40}_{19}\mathrm{K} \xrightarrow{\beta^-} {}_{19+1}^{\ \ 40}X' + \mathrm{e}^- + \bar{\nu} \ . $$

L'élément dont les noyaux comportent 20 protons est le calcium, alors

$$ {}^{40}_{19}\mathrm{K} \xrightarrow{\beta^-} {}^{40}_{20}\mathrm{Ca} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu} \ . \qquad \text{(réponse)} $$

Lors de la désintégration β^+, le nombre de protons diminue de une unité et le nombre de nucléons demeure le même, donc

$$ {}^{40}_{19}\mathrm{K} \xrightarrow{\beta^+} {}_{19-1}^{\ \ 40}X' + \mathrm{e}^+ + \nu \ . $$

L'élément dont les noyaux comportent 18 protons est l'argon, alors

$$ {}^{40}_{19}\mathrm{K} \xrightarrow{\beta^+} {}^{40}_{18}\mathrm{Ar} + \mathrm{e}^+ + \nu \ . \qquad \text{(réponse)} $$

Q26 **Décortiquer le problème** Un noyau initial d'uranium 238 peut se transformer par des désintégrations alpha et β^-. Seuls certains nucléides peuvent être observés dans la chaîne de désintégration de l'uranium 238.

Identifier la clé La clé est le fait que seules les désintégrations alpha modifient le nombre de nucléons d'un noyau et que cette quantité varie d'un multiple de 4, car une particule alpha compte quatre nucléons.

Résoudre le problème Parmi les trois isotopes du plomb suggérés dans l'énoncé, un seul présente une quantité de nucléons (la quantité A) dont la différence avec celle de l'uranium 238 est un multiple de 4. Sous forme d'équation, on peut écrire

$$ A_{{}^{238}\mathrm{U}} - A_{\mathrm{Pb}} = 4N \ , $$

N étant un entier, le nombre de particules alpha émises :

$$ N = \frac{A_{{}^{238}\mathrm{U}} - A_{\mathrm{Pb}}}{4} \ . $$

On peut vérifier pour les trois isotopes du plomb si cette condition est satisfaite. Pour le ${}^{206}_{82}\mathrm{Pb}$, on trouve

$$N_{{}^{206}\mathrm{Pb}} = \frac{A_{{}^{238}\mathrm{U}} - A_{{}^{206}\mathrm{Pb}}}{4} = \frac{238 - 206}{4} = 8 \ .$$

Le plomb ${}^{206}_{82}\mathrm{Pb}$ pourrait être la solution. On confirme que les deux autres isotopes ne peuvent pas être la solution :

$$N_{{}^{207}\mathrm{Pb}} = \frac{A_{{}^{238}\mathrm{U}} - A_{{}^{207}\mathrm{Pb}}}{4} = \frac{238 - 207}{4} = 7{,}75$$

$$N_{{}^{208}\mathrm{Pb}} = \frac{A_{{}^{238}\mathrm{U}} - A_{{}^{208}\mathrm{Pb}}}{4} = \frac{238 - 208}{4} = 7{,}50 \ .$$

Le nucléide qui termine la chaîne de désintégration de l'uranium 238 est donc

$${}^{206}_{82}\mathrm{Pb}, \text{ car } \Delta A = 32. \qquad \text{(réponse)}$$

E27 **Décortiquer le problème** On étudie la réaction $\mathrm{p} + \mathrm{e}^- \to \mathrm{n} + \nu$.

Connues	Inconnues
$M_{{}^1_1\mathrm{H}} = 1{,}007\,825\,0\,\mathrm{u}$	Q
$M_\mathrm{n} = 1{,}008\,664\,9\,\mathrm{u}$	$\lambda_{E_\gamma = Q}$

a. Identifier la clé La clé est l'équation 13.27 de l'énergie dégagée lors d'une désintégration β^-, appliquée à la réaction analysée :

$$Q = \Delta M c^2 \ .$$

Résoudre le problème On remplace les valeurs numériques et on utilise $c^2 = 931{,}5\,\mathrm{MeV/u}$:

$$Q = (1{,}007\,825\,0\,\mathrm{u} - 1{,}008\,664\,9\,\mathrm{u})\,931{,}5\,\mathrm{MeV/u}$$
$$Q = -0{,}782\,4\,\mathrm{MeV} = -782{,}4\,\mathrm{keV} \ .$$

On trouve une énergie négative, ce qui signifie que le noyau doit absorber de l'énergie pour subir une désintégration β^- :

$$Q = -782{,}4\,\mathrm{keV} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Identifier la clé La clé est l'équation qui donne l'énergie d'un photon, alors que l'énergie du photon est l'énergie $|Q|$ trouvée en **a.** :

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = Q \ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème Dans l'équation (i), on isole la longueur d'onde et on utilise $hc = 1\,240\,\mathrm{nm}\cdot\mathrm{eV}$:

$$\lambda = \frac{hc}{|Q|} = \frac{1\,240\,\mathrm{nm}\cdot\mathrm{eV}}{782{,}4 \times 10^3\,\mathrm{eV}} = 1{,}585 \times 10^{-3}\,\mathrm{nm}$$
$$\lambda = 1{,}585\,\mathrm{pm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est correct pour un photon ayant assez d'énergie pour déclencher une désintégration β^-.

E28 **Décortiquer le problème** Le ${}^{61}_{29}\mathrm{Cu}$ dégage de l'énergie lors de sa désintégration β^+.

Connues	Inconnue
$M_{{}^{61}\mathrm{Cu}} = 60{,}933\,46\,\mathrm{u}$	Q
$M_{{}^{61}\mathrm{Ni}} = 60{,}931\,06\,\mathrm{u}$	
$M_\mathrm{e} = 0{,}000\,548\,6\,\mathrm{u}$	
$c^2 = 931{,}5\,\mathrm{MeV/u}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 13.31 de l'énergie dégagée lors d'une désintégration β^+ :

$$Q = (M_\mathrm{X} - M_{\mathrm{X}'} - 2m_\mathrm{e})\, c^2 \ . \tag{i}$$

Résoudre le problème On insère les valeurs dans l'équation (i), appliquée à la désintégration du cuivre 61 :

$$\begin{aligned} Q &= \left(M_{^{61}\mathrm{Cu}} - M_{^{61}\mathrm{Ni}} - 2m_\mathrm{e}\right) c^2 \\ &= (60{,}933\,46\,\mathrm{u} - 60{,}931\,06\,\mathrm{u} - 2 \times 0{,}000\,548\,6\,\mathrm{u}) \times 931{,}5\,\mathrm{MeV/u} \\ Q &= 1{,}21\,\mathrm{MeV} \ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est correct pour l'énergie libérée par une désintégration β.

E29 **Décortiquer le problème** Le $^{80}_{35}$Br dégage de l'énergie lors de sa désintégration β^- vers le $^{80}_{36}$Kr ainsi que lors de sa désintégration β^+ vers le $^{80}_{34}$Se. On peut calculer l'énergie dégagée dans les deux cas.

Connues	Inconnues
$M_{^{80}\mathrm{Br}} = 79{,}918\,53\,\mathrm{u}$	$K_{\mathrm{max,e}}$
$M_{^{80}\mathrm{Kr}} = 79{,}916\,38\,\mathrm{u}$	$K_{\mathrm{max,p}}$
$M_{^{80}\mathrm{Se}} = 79{,}916\,52\,\mathrm{u}$	
$M_\mathrm{e} = 0{,}000\,548\,6\,\mathrm{u}$	
$c^2 = 931{,}5\,\mathrm{MeV/u}$	

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 13.28 de l'énergie dégagée lors d'une désintégration β^-, appliquée à la réaction $^{80}_{35}\mathrm{Br} \to {}^{80}_{36}\mathrm{Kr} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}$:

$$Q = \left(M_{^{80}\mathrm{Br}} - M_{^{80}\mathrm{Kr}}\right) c^2 \ . \tag{i}$$

Résoudre le problème On remplace les valeurs numériques dans l'équation (i) et on utilise $c^2 = 931{,}5\,\mathrm{MeV/u}$:

$$\begin{aligned} Q &= (79{,}918\,53\,\mathrm{u} - 79{,}916\,38\,\mathrm{u})\, 931{,}5\,\mathrm{MeV/u} \\ &= 2{,}00\,\mathrm{MeV} \ . \end{aligned}$$

Cette énergie se retrouve principalement sous forme d'énergie cinétique des électrons émis. La vitesse de recul du noyau est négligeable, car la masse d'un électron est beaucoup plus faible que celle du noyau fille. L'énergie au repos de l'antineutrino est également négligée car nulle pour cette particule.

$$K_{\mathrm{max,e}} = 2{,}00\,\mathrm{MeV} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 13.31 de l'énergie dégagée lors d'une désintégration β^+, appliquée à la réaction $^{80}_{35}\mathrm{Br} \to {}^{80}_{36}\mathrm{Kr} + \mathrm{e}^+ + \nu$:

$$Q = \left(M_{^{80}\mathrm{Br}} - M_{^{80}\mathrm{Se}} - 2m_\mathrm{e}\right) c^2 \ . \tag{ii}$$

Résoudre le problème On remplace les valeurs numériques dans l'équation (ii) :

$$Q = (79{,}918\,53\,\mathrm{u} - 79{,}916\,52\,\mathrm{u} - 2 \times 0{,}000\,548\,6\,\mathrm{u})\, 931{,}5\,\mathrm{MeV/u} \ .$$

Comme en **a.**, cette énergie se retrouve principalement sous forme d'énergie cinétique des positrons émis. La vitesse de recul du noyau est négligeable, car la masse d'un électron est beaucoup plus faible que celle du noyau fille. L'énergie au repos du neutrino est également négligée car nulle pour cette particule.

$$K_{\mathrm{max,p}} = 0{,}85\,\mathrm{MeV} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur des énergies cinétiques trouvées est correct pour une désintégration β.

P30 **Décortiquer le problème** On étudie la réaction ${}^{18}_{9}\mathrm{F} \to \mathrm{X}' + \mathrm{e}^{+} + \nu$.

Connues	Inconnues
$t_{1/2,{}^{18}\mathrm{F}} = 109{,}8\,\mathrm{min}$	Q
$M_{{}^{18}\mathrm{F}} = 18{,}000\,938\,\mathrm{u}$	R
$R_0 = 300\,\mathrm{MBq}$	
$\Delta t = 24{,}0\,\mathrm{h}$	
$M_{\mathrm{X}'} = 17{,}999\,160\,\mathrm{u}$	
$M_{\mathrm{e}} = 0{,}000\,548\,6\,\mathrm{u}$	
$c^2 = 931{,}5\,\mathrm{MeV/u}$	

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 13.31 de l'énergie dégagée lors d'une désintégration β^{+}, appliquée à la réaction ${}^{18}_{9}\mathrm{F} \to_{\mathrm{X'}} + \mathrm{e}^{+} + \nu$:

$$Q = \left(M_{{}^{18}\mathrm{F}} - M_{\mathrm{X}'} - 2m_{\mathrm{e}}\right) c^2 \ . \tag{i}$$

Résoudre le problème On insère les valeurs numériques dans l'équation (i) :

$$Q = (18{,}000\,938\,\mathrm{u} - 17{,}999\,160\,\mathrm{u} - 2 \times 0{,}000\,548\,6\,\mathrm{u})\,931{,}5\,\mathrm{MeV/u}$$
$$Q = 0{,}634\,\mathrm{MeV} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct. Il n'était pas nécessaire de connaître la nature du noyau fille, mais comme la désintégration β^{+} transforme un proton en neutron, alors le noyau fille est le ${}^{18}_{8}\mathrm{O}$.

b. **Identifier la clé** La clé est l'équation 13.15 de la loi de désintégration pour l'activité :

$$R = R_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t} , \qquad \text{avec} \qquad \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$
$$R = R_0\,\mathrm{e}^{\frac{-t \ln 2}{t_{1/2}}} \ . \tag{ii}$$

Résoudre le problème On insère les valeurs numériques dans l'équation (ii) et on calcule l'activité finale :

$$R = 300\,\mathrm{MBq}\,\mathrm{e}^{\left(\frac{-24{,}0 \times 60{,}0\,\mathrm{min} \times \ln 2}{109{,}8\,\mathrm{min}}\right)} = 3{,}382 \times 10^{4}\,\mathrm{Bq}$$
$$R = 33{,}8\,\mathrm{kBq} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'activité trouvée est plausible, puisqu'elle est inférieure à l'activité initiale de l'intervalle de 24,0 h.

P31 **Décortiquer le problème** On étudie la réaction ${}^{32}_{15}\mathrm{P} \to {}^{32}_{16}\mathrm{S} + \mathrm{e}^{-} + \bar{\nu}$.

Connues	Inconnues
$M_{{}^{32}\mathrm{P}} = 31{,}973\,907\,\mathrm{u}$	Q
$M_{{}^{32}\mathrm{S}} = 31{,}972\,071\,\mathrm{u}$	λ_{e}
$c^2 = 931{,}5\,\mathrm{MeV/u}$	$\lambda_{\mathrm{max,e}}$
$m_{\mathrm{e}}c^2 = 511\,\mathrm{keV}$	
$L = r_{\mathrm{P}}$	

a. **Identifier la clé** La clé est l'équation 13.28 de l'énergie dégagée lors d'une désintégration β^-, appliquée à la réaction ${}^{32}_{15}\mathrm{P} \to {}^{32}_{16}\mathrm{S} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}$:

$$Q = \left(M_{^{32}\mathrm{P}} - M_{^{32}\mathrm{S}}\right) c^2 \ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème On remplace les valeurs numériques dans l'équation (i) et on utilise $c^2 = 931{,}5\,\mathrm{MeV/u}$:

$$Q = (31{,}973\,907\,\mathrm{u} - 31{,}972\,071\,\mathrm{u})\,931{,}5\,\mathrm{MeV/u}$$
$$Q = 1{,}710\,\mathrm{MeV} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct pour une désintégration β.

b. **Identifier les clés** La première clé est l'équation 10.33 de la longueur d'onde de De Broglie pour une particule :

$$\lambda = \frac{h}{p} \ . \qquad \text{(ii)}$$

La deuxième clé est l'équation de la quantité de mouvement relativiste :

$$p = \frac{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}{c}, \qquad \text{avec} \qquad E = mc^2 + K$$
$$p = \frac{\sqrt{\left(mc^2 + K\right)^2 - m^2c^4}}{c} \ . \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème L'union des deux équations clés donne

$$\lambda = \frac{h}{\left(\frac{\sqrt{(mc^2+K)^2 - m^2c^4}}{c}\right)} = \frac{hc}{\sqrt{\left(mc^2 + K\right)^2 - (mc^2)^2}} \ . \qquad \text{(iv)}$$

On mentionne dans l'énoncé que toute l'énergie dégagée par la réaction est transmise à l'électron sous forme d'énergie cinétique. On sait donc que $K = Q = 1{,}710 \times 10^6\,\mathrm{eV}$, et on peut insérer les valeurs numériques dans l'équation (iv) pour calculer la longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{1\,240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}}{\sqrt{\left(511 \times 10^3\,\mathrm{eV} + 1{,}710 \times 10^6\,\mathrm{eV}\right)^2 - \left(511 \times 10^3\,\mathrm{eV}\right)^2}} = 5{,}737 \times 10^{-4}\,\mathrm{nm}$$
$$\lambda = 573{,}6\,\mathrm{fm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est correct pour un électron de haute énergie.

c. **Identifier les clés** La première clé est l'équation 11.25 de la longueur d'onde de matière pour une particule dans un puits infini :

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \ . \qquad \text{(v)}$$

La deuxième clé est l'équation 13.5 du rayon du noyau d'un atome en fonction du nombre de masse A :

$$r = r_0 A^{1/3} = 1{,}20\,\mathrm{fm}\,A^{1/3} \ , \qquad \text{(vi)}$$

où $A = 32$ pour le phosphore 32.

Résoudre le problème On sait que la largeur du puits de potentiel est $L = r_\mathrm{P}$, donc

$$\lambda_1 = \frac{2r_\mathrm{P}}{1} = 2r_\mathrm{P} \ . \qquad \text{(vii)}$$

On réunit les équations (vi) et (vii) et on insère les valeurs numériques pour calculer λ_1 :

$$\lambda_1 = 2 \times 1{,}20\,\text{fm} \times 32^{1/3} = 7{,}62\,\text{fm}\ .$$

C'est la longueur d'onde maximale dans le mode fondamental pour l'électron, donc

$$\lambda_{\text{max}} = 7{,}62\,\text{fm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la longueur d'onde trouvée est correct pour un électron.

P32 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$M_{^{137}\text{Cs}} = 136{,}907\,085\,\text{u}$	Q
$M_{^{137}\text{Ba}} = 136{,}095\,822\,\text{u}$	$K_{\text{max,e}}$
$c^2 = 931{,}5\,\text{MeV/u}$	E_γ
$m_\text{e}c^2 = 511\,\text{keV}$	

a. Identifier la clé La clé est l'équation 13.28 de l'énergie dégagée lors d'une désintégration β^-, appliquée à la réaction ${}^{137}_{55}\text{Cs} \to {}^{137}_{56}\text{Ba} + \text{e}^- + \bar{\nu}$:

$$Q = \left(M_{^{137}\text{Cs}} - M_{^{137}\text{Ba}}\right) c^2\ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème On remplace les valeurs numériques dans l'équation (i) et on utilise $c^2 = 931{,}5\,\text{MeV/u}$:

$$Q = (136{,}097\,085\,\text{u} - 136{,}095\,822\,\text{u})\,931{,}5\,\text{MeV/u}$$
$$Q = 1{,}176\,\text{MeV}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct pour une désintégration β.

b. Identifier la clé La clé est le fait que le noyau fille peut être excité après la désintégration. La figure 13.18 montre l'état fondamental et les deux premiers états excités dans lesquels peut se retrouver le noyau de baryum après la désintégration. Dans les deux cas où le noyau fille est excité, l'énergie de l'état excité réduit de la même quantité l'énergie cinétique portée par l'électron émis.

Résoudre le problème Dans le cas où le noyau de baryum n'est pas excité, toute l'énergie dégagée par la réaction devient l'énergie cinétique de l'électron, donc

$$K_{\text{max},0} = Q = 1{,}176\,\text{MeV}\ .$$

Pour les états excités $n = 1$ et $n = 2$, l'énergie cinétique de l'électron est l'énergie dégagée par la réaction réduite de la quantité d'énergie conservée par le noyau fille :

$$K_{\text{max},1} = Q - E_1 = 1{,}176\,\text{MeV} - 0{,}284\,\text{MeV} = 0{,}892\,\text{MeV}\ ,$$

et

$$K_{\text{max},2} = Q - E_2 = 1{,}176\,\text{MeV} - 0{,}662\,\text{MeV} = 0{,}514\,\text{MeV}\ .$$

L'énergie cinétique maximale de l'électron, dans les trois cas, est

$$K_{\text{max},0} = 1{,}176\,\text{MeV}, \quad K_{\text{max},1} = 0{,}892\,\text{MeV} \quad \text{et} \quad K_{\text{max},2} = 0{,}514\,\text{MeV}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur des énergies cinétiques trouvées est correct pour un électron lors d'une désintégration β.

c. **Identifier la clé** La clé est le fait qu'un noyau de baryum excité après la désintégration β^- peut retourner à son état fondamental en émettant des photons dont l'énergie est la différence d'énergie entre les deux niveaux.

Résoudre le problème Deux cas sont possibles pour le retour du noyau de baryum à son état fondamental. Il peut faire une transition directement du deuxième niveau excité à l'état fondamental ($E_{2\to0}$), ou passer par le premier état excité et atteindre l'état fondamental après deux transitions ($E_{2\to1}$ et $E_{1\to0}$).

L'énergie des photons émis est l'énergie des transitions observées, laquelle est égale à la différence d'énergie entre les états initial et final de la transition. Ainsi,

$$E_{2\to0} = E_\mathrm{h} - E_\mathrm{b} = 0{,}662\,\mathrm{MeV} - 0{,}000\,\mathrm{MeV} = 0{,}662\,\mathrm{MeV}$$
$$E_{2\to1} = E_\mathrm{h} - E_\mathrm{b} = 0{,}662\,\mathrm{MeV} - 0{,}284\,\mathrm{MeV} = 0{,}378\,\mathrm{MeV}$$
$$E_{1\to0} = E_\mathrm{h} - E_\mathrm{b} = 0{,}284\,\mathrm{MeV} - 0{,}000\,\mathrm{MeV} = 0{,}284\,\mathrm{MeV}\ .$$

L'énergie des photons gamma qui accompagnent la désintégration peut donc prendre trois valeurs :

$$E_{2\to0} = 0{,}662\,\mathrm{MeV},\quad E_{2\to1} = 0{,}378\,\mathrm{MeV},\quad E_{1\to0} = 0{,}284\,\mathrm{MeV}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur des énergies trouvées est correct pour des photons de longueur d'onde gamma.

Q33 **Décortiquer le problème** On peut exprimer de plusieurs manières l'exposition radioactive subie par un être vivant. On doit convertir ces expressions sous une même forme, la dose équivalente DE, pour les comparer.

Identifier les clés La première clé est le calcul et la conversion en sieverts des trois expositions décrites en vue d'effectuer la comparaison.

La deuxième clé est l'union des équations 13.35 et 13.38 pour le calcul de la dose équivalente :

$$D = \frac{\Delta E}{M} \qquad \text{et} \qquad DE = w_\mathrm{R} D$$
$$DE = \frac{w_\mathrm{R}\Delta E}{M}\ ,$$

où w_R est le facteur de pondération donné dans le tableau 13.4 pour chaque type de particule.

Résoudre le problème Dans la situation (i), les particules impliquées sont des neutrons de 8,0 keV, dont le facteur de pondération se situe entre 2, 5 et 3 selon le tableau 13.4. On fait un calcul pour les deux limites de ce domaine puisqu'on ne connaît pas la valeur exacte. La dose équivalente requiert qu'on détermine d'abord l'énergie totale absorbée, donnée par

$$\Delta E = N \times E_\mathrm{n} = 1{,}2\times10^{13} \times \left(8{,}0\times10^{3}\,\mathrm{eV} \times \frac{1{,}602\times10^{-19}\,\mathrm{J}}{1{,}00\,\mathrm{eV}}\right) = 0{,}015\,38\,\mathrm{J}\ .$$

La dose équivalente, selon l'équation clé, est donc

$$DE_{(\mathrm{i}),\mathrm{min}} = \frac{2{,}5\times0{,}015\,38\,\mathrm{J}}{50\,\mathrm{kg}} = 0{,}000\,768\,96\,\mathrm{Sv}$$
$$DE_{(\mathrm{i}),\mathrm{max}} = \frac{3\times0{,}015\,38\,\mathrm{J}}{50\,\mathrm{kg}} = 0{,}000\,922\,75\,\mathrm{Sv}\ .$$

Dans la situation (ii), les particules impliquées sont des particules alpha, dont le facteur de pondération est $w_\mathrm{R} = 20$ selon le tableau 13.4. La dose équivalente, selon l'équation clé, est

Selon énoncé, 250 g.
250 g x 1 kg/1000 g = 0,25 kg

$$DE_{(\mathrm{ii})} = \frac{20\times \overset{5}{50}\times10^{-6}\,\mathrm{J}}{0{,}250\times\cancel{10^{-3}}\,\mathrm{kg}} = \cancel{4{,}0}\,\mathrm{Sv}\ .$$

400 µSv

Selon énoncé: 5 µJ, pas 50.
5 µJ x 1 x 10^-6 J/µJ=5 x 10^-6 J

Dans la situation (iii), les particules impliquées sont des particules β^-, dont le facteur de pondération est $w_\mathrm{R} = 1$ selon le tableau 13.4. La dose équivalente, selon l'équation 13,38, est

$$DE_{(\mathrm{iii})} = 1\times0{,}75\times10^{-3}\,\mathrm{Gy} = 0{,}75\times10^{-3}\,\cancel{\mathrm{Gy}}\ .\ \mathbf{Sv}$$

On doit cependant exprimer cette valeur en sieverts pour la comparer aux autres, et on sait à la fois que 1 rd = 0,01 Gy et que $w \times 1\,\text{rd} = 0{,}01\,\text{Sv}$, donc 1 Gy = 1 Sv dans le cas de radiations β^-. Ainsi,

$$DE_{(\text{iii})} = 0{,}000\,75\,\text{Sv} \; .$$

On peut donc déterminer l'ordre croissant des trois doses décrites :

$$DE_{(\text{ii})} < DE_{(\text{iii})} < DE_{(\text{i})} \; ,$$

d'où

$$(\text{ii}) < (\text{iii}) < (\text{i}). \qquad \text{(réponse)}$$

E34 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$M = 120\,\text{g}$	DE
$D_\gamma = 1{,}2\,\text{Gy}$	ΔE

a. Identifier la clé La clé est l'équation 13.38 de la dose équivalente :

$$DE = w_\text{R} D \; . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème Pour des rayons gamma, le facteur de pondération, selon le tableau 13.4, est $w_\text{R} = 1$. Ainsi, à l'aide de l'équation (i), on trouve

$$DE = 1 \times 1{,}2\,\text{Gy}$$
$$DE = 1{,}2\,\text{Sv} \; . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Identifier la clé La clé est l'équation 13.35 de la dose absorbée :

$$D = \frac{\Delta E}{M} \; . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème Dans l'équation (ii), on isole l'énergie ΔE :

$$\Delta E = DM = 1{,}2\,\text{Gy} \times 120 \times 10^{-3}\,\text{kg}$$
$$\Delta E = 0{,}144\,\text{J} \; . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est plausible.

P35 Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$M = 25{,}0\,\% \times 75{,}0\,\text{kg}$	N
$DE = 300\,\mu\text{Sv}$	
$E_\gamma = 10{,}0\,\text{keV}$	
$w_\text{R} = 0{,}900$	

Identifier les clés La première clé est l'équation 13.35 de la dose absorbée :

$$D = \frac{\Delta E}{M} \; ,$$

où l'énergie ΔE est l'énergie totale portée par les N photons X :

$$D = \frac{N E_\gamma}{M} \; . \qquad \text{(i)}$$

La deuxième clé est l'équation 13.38 de la dose équivalente :

$$DE = w_\mathrm{R} D\ . \tag{ii}$$

Résoudre le problème L'union des équations (i) et (ii) permet d'obtenir une équation où N est la seule inconnue, qu'on peut alors isoler :

$$DE = w_\mathrm{R} D = w_\mathrm{R}\left(\frac{NE_\gamma}{M}\right) = \frac{w_\mathrm{R} N E_\gamma}{M}$$

$$\begin{aligned} N &= \frac{M \times DE}{w_\mathrm{R} E_\gamma} \\ &= \frac{0{,}25 \times 75{,}0\,\mathrm{kg} \times 300 \times 10^{-6}\,\mathrm{Sv}}{0{,}900 \times \left(10{,}0 \times 10^3\,\mathrm{eV} \times \frac{1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}}{1{,}00\,\mathrm{eV}}\right)} \\ N &= 3{,}90 \times 10^{12}\ \text{photons}\ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du nombre de photons trouvé est plausible.

P36 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$N_0 = 3{,}0 \times 10^{13}$ noyaux	E
$M_{^{201}\mathrm{Th}} = 200{,}970\,80\,\mathrm{u}$	m_Th
$M_{^{201}\mathrm{Hg}} = 200{,}970\,285\,\mathrm{u}$	DE
$t_{1/2,^{201}\mathrm{Th}} = 72{,}9\,\mathrm{h}$	t
$R = 0{,}01 R_0$	

a. **Identifier la clé** La clé est le calcul de l'énergie émise par chaque désintégration d'un noyau de thallium. L'équation 13.28 peut servir à ce calcul :

$$Q = \left(M_{^A_Z\mathrm{X}} - M_{^{\ A}_{Z-1}\mathrm{X}'}\right) c^2\ . \tag{i}$$

Puisqu'aucune autre particule que l'électron capturé n'est impliquée, seule la nature du noyau change.

Résoudre le problème On calcule l'énergie de la réaction à l'aide de l'équation (i) :

$$Q = (200{,}970\,80\,\mathrm{u} - 200{,}970\,285\,\mathrm{u})\,931{,}5\,\mathrm{MeV/u} = 0{,}479\,7\,\mathrm{MeV}\ .$$

Cette énergie est émise lors de chacune des $3{,}0 \times 10^{13}$ désintégrations qui se produiront. L'énergie totale absorbée par le corps est donc

$$\begin{aligned} E &= NQ = 3{,}0 \times 10^{13} \times \left(0{,}479\,7 \times 10^6\,\mathrm{eV} \times \frac{1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}}{1{,}00\,\mathrm{eV}}\right) \\ E &= 2{,}3\,\mathrm{J}\ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La clé consiste à utiliser le nombre de masse du nucléide et la masse de l'échantillon :

$$N = \frac{m}{M} \qquad \Rightarrow \qquad m = NM\ . \tag{ii}$$

Résoudre le problème

$$\begin{aligned} m &= N_0 M_{^{201}\mathrm{Th}} = 3{,}0 \times 10^{13} \times \left(200{,}970\,80\,\mathrm{u} \times 1{,}661 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg/u}\right) = 1{,}00 \times 10^{-11}\,\mathrm{kg} \\ m &= 10\,\mathrm{ng} \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la masse trouvée est correct pour une quantité de noyaux bien inférieure au nombre d'Avogadro.

c. **Identifier les clés** La première clé est le fait que l'énergie sera émise sous forme de photons, car aucune particule n'est émise par le noyau lors de la capture électronique, seulement de l'énergie (photon). Le facteur de pondération pour des photons, selon le tableau 13.4, est $w_\mathrm{R} = 1$.

La deuxième clé est l'union des équations 13.35 et 13.38 pour le calcul de la dose équivalente :

$$D = \frac{\Delta E}{M} \qquad \text{et} \qquad DE = w_\mathrm{R} D$$

$$DE = \frac{w_\mathrm{R}\Delta E}{M} \; . \tag{iii}$$

Résoudre le problème Dans l'équation (iii), on considère que ΔE est égal à 1,00 % de l'énergie émise (celle trouvée en **a.**). Le calcul donne

$$\begin{aligned} DE &= \frac{0{,}01 w_\mathrm{R} E_{\mathbf{a.}}}{M} \\ &= \frac{0{,}01 \times 1 \times 2{,}3\,\mathrm{J}}{62\,\mathrm{kg}} = 3{,}72 \times 10^{-4}\,\mathrm{Sv} \\ DE &= 0{,}37\,\mathrm{mSv} \; . \end{aligned} \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la dose équivalente trouvée est correct.

d. **Identifier la clé** La clé est l'équation 13.15 de la loi de désintégration pour l'activité :

$$R = R_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,, \qquad \text{avec} \qquad \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

$$R = R_0\,\mathrm{e}^{\frac{-t\ln 2}{t_{1/2}}} \; . \tag{iv}$$

Résoudre le problème On s'intéresse au délai après lequel l'activité est $R = 0{,}01R_0$. On isole t dans l'équation (iv) en faisant ce remplacement :

$$\begin{aligned} 0{,}01R_0 &= R_0\,\mathrm{e}^{\frac{-t\ln 2}{t_{1/2}}} \\ \ln 0,01 &= \frac{-t\ln 2}{t_{1/2}} \\ t &= -\frac{t_{1/2}\ln 0{,}01}{\ln 2} \\ &= -\frac{72{,}9\,\mathrm{h} \times \ln 0{,}01}{\ln 2} = 484{,}3\,\mathrm{h} \; . \end{aligned}$$

Convertie en jours, cette durée est

$$t = 20{,}2\,\mathrm{d} \; . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la durée trouvée est correct, celle-ci étant équivalente à près de sept demi-vies pour une réduction de 99 % de l'activité.

E37 **Décortiquer le problème** Un noyau d'uranium 235 absorbe un neutron et se fissionne en quelques particules dont une est inconnue. On peut déduire quel est le nucléide inconnu.

Identifier la clé La clé est le fait qu'il y a conservation du nombre de nucléons.

Résoudre le problème La réaction décrite est

$${}^{235}_{92}\mathrm{U} + \mathrm{n} \to {}^{134}_{51}\mathrm{Sb} + \;? + \mathrm{n} + \alpha \; .$$

La particule inconnue est forcément un nucléide assez lourd, car le premier nucléide produit contient beaucoup moins de nucléons que le noyau d'uranium. Il suffit de déterminer le nombre de protons et de neutrons dans chaque membre de l'équation, pour les particules connues, pour déduire le nombre de protons et de neutrons du nucléide inconnu. Dans le membre de gauche de l'équation, il y a $235 + 1 = 236$ nucléons, dont $N_\mathrm{p} = 92$ protons et $N_\mathrm{n} = (235 - 92) + 1 = 144$ neutrons.

Comme il n'y a pas de mutation entre protons et neutrons lors de cette fission, il doit y avoir la même quantité de protons et de neutrons dans le membre de droite et les trois particules contiennent déjà

$$N_{\mathrm{p}} = 51 + 0 + 2 = 53 \text{ protons}$$
$$N_{\mathrm{n}} = (134 - 51) + 1 + 2 = 86 \text{ neutrons} .$$

Le nucléide inconnu contient le reste des protons et des neutrons dénombrés dans le membre de gauche :

$$N_{?} = 92 - 53 = 39 \text{ protons}$$
$$= 144 - 86 = 58 \text{ neutrons} .$$

On a donc un nucléide possédant 39 protons et 58 neutrons, pour un total de 97 nucléons. Le tableau périodique (annexe G) et la liste des éléments (annexe F) indiquent que le nucléide possédant 39 protons est l'yttrium :

$$^{97}_{39}\mathrm{Y} . \qquad \text{(réponse)}$$

E38 **Décortiquer le problème** La réaction chimique de la combustion du TNT dégage de l'énergie qu'on peut associer à une masse transformée.

Connue	Inconnue
$\Delta E_{1\mathrm{t_{TNT}}} = 4{,}184 \times 10^9$ J	Δm

Identifier la clé La clé est l'équivalence entre la masse et l'énergie : lorsqu'une réaction libère de l'énergie, la masse du système diminue :

$$\Delta E_0 = \Delta m\, c^2 . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème On isole la variation de la masse Δm dans l'équation (i) et on la calcule :

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{4{,}184 \times 10^9 \text{ J}}{\left(2{,}998 \times 10^8 \text{ m/s}\right)^2} = 4{,}655 \times 10^{-8}\,\text{kg}$$
$$\Delta m = 46{,}55\,\mu\text{g} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la masse trouvée est correct ; une très faible masse dégage beaucoup d'énergie lorsqu'elle est entièrement transformée en énergie.

E39 **Décortiquer le problème** On étudie la réaction $^{235}_{92}\mathrm{U} + \mathrm{n} \to {}^{236}_{92}\mathrm{U}* \to {}^{38}_{94}\mathrm{Sr} + {}^{140}_{54}\mathrm{Xe} + 2\mathrm{n}$.

Connues	Inconnues
$M_{^{235}\mathrm{U}} = 235{,}043\,92\,\mathrm{u}$	Q
$M_{^{140}\mathrm{Xe}} = 139{,}921\,64\,\mathrm{u}$	m
$M_{^{94}\mathrm{Sr}} = 93{,}915\,36\,\mathrm{u}$	
$M_{\mathrm{n}} = 1{,}008\,665\,\mathrm{u}$	
$E = 1{,}00\,\mathrm{kWh}$	

a. **Identifier la clé** La clé est le calcul de l'énergie émise par la variation de masse entre les réactifs et les produits.

Résoudre le problème Il n'est pas nécessaire de considérer l'étape intermédiaire de la réaction. Il y a initialement un noyau de ^{235}U et un neutron, et il y a à la fin deux nucléides connus et deux neutrons.

$$Q = \Big((235{,}043\,92\,\mathrm{u} + 1{,}008\,665\,\mathrm{u}) - (93{,}915\,36\,\mathrm{u} + 139{,}921\,64\,\mathrm{u} + 2 \times 1{,}008\,665\,\mathrm{u}) \Big) 931{,}5\,\mathrm{MeV/u}$$
$$Q = 184{,}7\,\mathrm{MeV} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct.

b. Identifier les clés La première clé est la définition de la puissance :

$$P = \frac{E}{\Delta t} \ ,$$

où l'énergie E est l'énergie totale produite par la fission de N noyaux d'uranium 235 :

$$P = \frac{NQ}{\Delta t} \ . \qquad \text{(i)}$$

La deuxième clé est le fait que le rendement de la transformation de l'énergie fait en sorte que seulement 30,0 % de l'énergie dégagée par la fission de l'uranium est transformée en énergie électrique :

$$P_{\text{él}} = 0{,}300\left(\frac{NQ}{\Delta t}\right) \ . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème On isole N dans l'équation (ii) et on calcule le nombre de réactions requises :

$$\begin{aligned} N &= \frac{P_{\text{él}}\Delta t}{0{,}300Q} \\ &= \frac{1{,}00 \times 10^3\,\text{W} \times 1{,}00\,\text{h} \times 3\,600\,\text{s/h}}{0{,}300 \times 184{,}7 \times 10^6\,\text{eV} \times \frac{1{,}602\times 10^{-19}\,\text{J}}{1{,}00\,\text{eV}}} = 4{,}056 \times 10^{17}\,\text{atomes} \ . \end{aligned}$$

On calcule ensuite la masse de cette quantité de noyaux à partir de la masse atomique de l'uranium 235 :

$$\begin{aligned} &N = \frac{m}{M} \qquad \Rightarrow \qquad m = NM_{^{235}\text{U}} \\ &m = 4{,}056 \times 10^{17} \times \left(235{,}043\,92\,\text{u} \times 1{,}661 \times 10^{-27}\,\text{kg/u}\right) = 1{,}58 \times 10^{-7}\,\text{kg} \\ &m = 158\,\mu\text{g} \ . \qquad \text{(réponse)} \end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la masse trouvée est plausible, car une très petite masse renferme une grande quantité d'énergie nucléaire.

E40 Décortiquer le problème On étudie la réaction ${}^3_2\text{He} + {}^3_2\text{He} \rightarrow {}^4_2\text{He} + \text{p} + \text{p}$.

Connues	Inconnue
$Q = 12{,}86\,\text{MeV}$	$M_{^3_2\text{He}}$
$M_{^4_2\text{He}} = 4{,}002\,603\,\text{u}$	
$M_\text{p} = 1{,}007\,276\,5\,\text{u}$	

Identifier la clé La clé est le calcul de la différence d'énergie entre les réactifs et les produits de la réaction.

Résoudre le problème L'énergie dégagée par la réaction est donnée par

$$Q = \left(2M_{^3_2\text{He}} - M_{^4_2\text{He}} - 2M_\text{p}\right) 931{,}5\,\text{MeV/u} \ .$$

On isole la masse recherchée $M_{^3_2\text{He}}$ et on trouve

$$\begin{aligned} M_{^3_2\text{He}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{931{,}5\,\text{MeV/u}} + M_{^4_2\text{He}} + 2M_\text{p}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{12{,}86\,\text{MeV}}{931{,}5\,\text{MeV/u}} + 4{,}002\,603\,\text{u} + 2 \times 1{,}007\,276\,5\,\text{u}\right) \\ M_{^3_2\text{He}} &= 3{,}015\,48\,\text{u} \ . \qquad \text{(réponse)} \end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la masse trouvée pour l'hélium 3 est correct, tout près de l'unité.

P41 **Décortiquer le problème** On compare l'énergie dégagée dans les deux réactions suivantes :

$$^{52}_{24}\mathrm{Cr} + \alpha \rightarrow {}^{56}_{26}\mathrm{Fe} \tag{i}$$
$$^{55}_{25}\mathrm{Mn} + \mathrm{p} \rightarrow {}^{56}_{26}\mathrm{Fe}\ . \tag{ii}$$

Connues	Inconnue
$M_{^4\mathrm{He}} = 4{,}002\,603\,2\,\mathrm{u}$	$\dfrac{E_{\mathrm{Cr}+\alpha}}{E_{\mathrm{Mn+p}}}$
$M_{^{52}\mathrm{Cr}} = 51{,}940\,51\,\mathrm{u}$	
$M_{^1\mathrm{H}} = 1{,}007\,825\,0\,\mathrm{u}$	
$M_{^{55}\mathrm{Mn}} = 54{,}938\,05\,\mathrm{u}$	
$M_{^{56}\mathrm{Fe}} = 55{,}934\,94\,\mathrm{u}$	

Identifier la clé La clé est le calcul de la différence d'énergie entre les réactifs et les produits pour les deux réactions.

Résoudre le problème D'abord, pour la réaction (i), on trouve

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{Cr}+\alpha} &= \left(M_{^{52}_{24}\mathrm{Cr}} + M_\alpha - M_{^{56}_{26}\mathrm{Fe}}\right) 931{,}5\,\mathrm{MeV/u} \\ &= \left(51{,}940\,51\,\mathrm{u} + 4{,}002\,603\,2\,\mathrm{u} - 55{,}934\,94\,\mathrm{u}\right) 931{,}5\,\mathrm{MeV/u} \\ &= 7{,}613\,3\,\mathrm{u}\ . \end{aligned}$$

Ensuite pour la réaction (ii), on a

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{Mn+p}} &= \left(M_{^{55}_{25}\mathrm{Mn}} + M_\mathrm{p} - M_{^{56}_{26}\mathrm{Fe}}\right) 931{,}5\,\mathrm{MeV/u} \\ &= \left(54{,}938\,05\,\mathrm{u} + 1{,}007\,825\,0\,\mathrm{u} - 55{,}934\,94\,\mathrm{u}\right) 931{,}5\,\mathrm{MeV/u} \\ &= 10{,}186\,0\,\mathrm{u}\ . \end{aligned}$$

Pour comparer les deux valeurs, on peut exprimer le rapport $E_{\mathrm{Cr}+\alpha}/E_{\mathrm{Mn+p}}$:

$$\frac{E_{\mathrm{Cr}+\alpha}}{E_{\mathrm{Mn+p}}} = \frac{7{,}613\,3\,\mathrm{u}}{10{,}186\,0\,\mathrm{u}} = 0{,}747\,4\ . \tag{réponse}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du rapport est plausible, les deux valeurs d'énergie dégagée sont semblables.

P42 **Décortiquer le problème** L'énergie émise par le Soleil est associée à une diminution de sa masse, alors que l'hydrogène fusionne en hélium.

Connues	Inconnue
$P = 3{,}9 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$	t
$Q = 26{,}73\,\mathrm{MeV}$	
$M_{\mathrm{S},0} = 1{,}99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$	
$\Delta M = 10{,}0\,\% M_{\mathrm{S},0}$	
$M_\mathrm{H} = 1{,}007\,825\,0\,\mathrm{u}$	

Identifier la clé La clé est le calcul du nombre de réactions de fusion qui doivent se produire chaque seconde, ce qui correspond à la puissance émise par le Soleil.

Résoudre le problème On convertit d'abord l'énergie de la réaction de fusion en joules pour manipuler les équations en unités SI :

$$Q = 26{,}73 \times 10^6\,\text{eV} \times \frac{1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{J}}{1{,}00\,\text{eV}} = 4{,}282 \times 10^{-12}\,\text{J} \ .$$

Le Soleil émet chaque seconde $E_{1\text{s}} = 3{,}9 \times 10^{26}$ J. On peut donc calculer le nombre de réactions de fusion qui se produisent chaque seconde :

$$N_{\text{fusions/s}} = \frac{E_{1\text{s}}}{Q} = \frac{3{,}9 \times 10^{26}\,\text{J}}{4{,}282 \times 10^{-12}\,\text{J}} = 9{,}108 \times 10^{37}\,\text{fusions/s} \ .$$

Chacune des réactions de fusion transforme quatre protons en un noyau d'hélium. Le nombre de protons consommés est donc

$$N_{\text{protons/s}} = 4 \times N_{\text{réactions}} = 4 \times 9{,}108 \times 10^{37} = 3{,}643 \times 10^{38}\,\text{protons/s} \ .$$

La masse d'hydrogène transformée chaque seconde est donnée par la masse atomique de l'hydrogène :

$$\begin{aligned} m_{\text{H/s}} &= N_{\text{protons/s}} \times M_{\text{p}} = 3{,}643 \times 10^{38}\,\text{protons/s} \times \left(1{,}007\,825\,0\,\text{u} \times 1{,}661 \times 10^{-27}\,\text{kg/u}\right) \\ m_{\text{H/s}} &= 6{,}098 \times 10^{11}\,\text{kg/s} \ . \qquad \text{(i)} \end{aligned}$$

On considère que la masse actuelle est presque exclusivement formée d'hydrogène. La masse consommée est donc 10,0 % de la masse actuelle du Soleil, soit $\Delta M = 0{,}100 M_{\text{S},0} = 1{,}99 \times 10^{29}$ kg. Le temps requis pour consommer cette masse est lié à la masse consommée chaque seconde et trouvée à la ligne (i) :

$$t = \frac{\Delta M}{m_{\text{H/s}}} = \frac{1{,}99 \times 10^{29}\,\text{kg}}{6{,}098 \times 10^{11}\,\text{kg/s}} = 3{,}263 \times 10^{17}\,\text{s} \ .$$

On peut finalement convertir cette durée en années pour en avoir un meilleur aperçu :

$$\begin{aligned} t &= 3{,}263 \times 10^{17}\,\text{s} \times \left(\frac{1{,}00\,\text{a}}{3\,600 \times 24 \times 365{,}24\,\text{s}}\right) \\ t &= 10 \times 10^9\,\text{a} \ . \qquad \text{(réponse)} \end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur du temps trouvé est correct, puisque le Soleil brûlera évidemment très longtemps encore.

Physique 3 Ondes, optique et physique moderne - 1re édition

Chapitre 14 Les particules élémentaires

E1 **Décortiquer le problème** On veut déterminer la charge des antiparticules de quatre particules connues.

Connues	Inconnues
$Q(\mathrm{u}) = \frac{2}{3}e$	$Q(\bar{K}^0)$
$Q(\mathrm{d}) = -\frac{1}{3}e$	$Q(\bar{\Delta}^{++})$
$Q(\mathrm{s}) = -\frac{1}{3}e$	$Q(\mathrm{W}^+)$
	$Q(\bar{\nu}_\mu)$

Identifier la clé La clé est le fait que la charge d'une antiparticule est l'opposée de la charge de la particule correspondante.

a. **Résoudre le problème** On détermine d'abord la charge de la particule K^0, dont la composition est donnée dans le tableau 14.5. Le kaon K^0 est formé des quarks d$\bar{s}$. La charge totale des ces quarks réunis est

$$Q\mathrm{K}^0 = Q(\mathrm{d}) + Q(\bar{s}) = -\frac{1}{3}e + \left(-\left(-\frac{1}{3}e\right)\right) = 0 \ .$$

La charge opposée d'une charge nulle est évidemment une charge nulle :

$$Q(\bar{K}^0) = 0 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Le tableau 14.5 donne aussi directement la composition du kaon $\bar{K}^0$, les quarks s et $\bar{\mathrm{d}}$, dont la charge totale est effectivement 0.

b. **Résoudre le problème** Le tableau 14.6 donne la composition du baryon Δ^{++}, soit l'union des quarks uuu. La charge du baryon est donc le triple de la charge du quark u :

$$Q(\Delta^{++}) = 3Q(\mathrm{u}) = 3 \times \left(\frac{2}{3}e\right) = 2e \ .$$

La charge opposée de la charge $2e$ est la valeur recherchée :

$$Q(\bar{\Delta}^{++}) = -2e \ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. **Résoudre le problème** L'antiparticule du boson W^- est le boson W^+, dont la charge est directement donnée dans le tableau 14.2. On voit dans ce tableau que la charge du boson W^+ est $+1e$, donc

$$Q(\mathrm{W}^+) = +e \ . \qquad \text{(réponse)}$$

d. **Résoudre le problème** La particule ν_μ est un neutrino muonique, dont la charge est nulle. Son antiparticule est $\bar{\nu}_\mu$ et sa charge, opposée, est donc également nulle :

$$Q(\bar{\nu}_\mu) = 0 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

E2 **Décortiquer le problème**

Connues	Inconnues
$M_\mathrm{e} = 511{,}0\,\mathrm{keV}/c^2$	$K\left(\mathrm{e}^+, \mathrm{e}^-\right)$
$M_\pi = 139{,}570\,\mathrm{MeV}/c^2$	$K\left(\pi^+, \pi^-\right)$
$M_\mathrm{p} = 938{,}27\,\mathrm{MeV}/c^2$	$K\left(\mathrm{p}, \bar{p}\right)$

Identifier la clé La clé est le fait que l'énergie au repos des deux antiparticules créées est égale à l'énergie cinétique des deux protons qui entrent en collision. On considère que les particules créées sont au repos parce que l'énergie recherchée est tout juste suffisante pour les créer, sans leur donner d'énergie cinétique.

a. Résoudre le problème L'équation 9.47 permet de connaître l'énergie au repos d'une paire électron-positron :

$$E_{0,\text{paire e}} = M_\text{e}c^2 + M_\text{e}c^2 = 2M_\text{e}c^2 \ ,$$

et utilise le fait qu'une antiparticule a la même masse que la particule associée. On obtient

$$K + K = 2M_\text{e}c^2 \ . \tag{i}$$

Il ne reste qu'à calculer K :

$$K = M_\text{e}c^2$$
$$K = 0{,}511\,0\,\text{MeV} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Résoudre le problème L'équation 9.47 appliquée aux cas des pions π^+ et π^-, dont les masses sont identiques, est

$$E_{0,\text{paire }\pi} = 2M_\pi c^2 \ .$$

L'équation (i) appliquée à ce cas donne

$$K + K = 2M_\pi c^2$$
$$K = M_\pi c^2 = 139{,}57\,\text{MeV}/c^2 \times c^2$$
$$K = 139{,}57\,\text{MeV} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Cette énergie est beaucoup plus grande que celle trouvée en **a.**, car les pions sont beaucoup plus lourds que les électrons.

c. Résoudre le problème L'équation 9.47 appliquée au cas des proton et antiproton, dont les masses sont identiques, est

$$E_{0,\text{paire p}} = 2M_\text{p}c^2 \ .$$

L'équation (i) appliquée à ce cas donne

$$K + K = 2M_\text{p}c^2$$
$$K = M_\text{p}c^2 = 938{,}27\,\text{MeV} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse Cette énergie est beaucoup plus grande que celle trouvée en **b.**, car les protons sont plus lourds encore que les pions.

P3 Décortiquer le problème On veut prouver que la réaction $\text{e}^+ + \text{e}^- \rightarrow \gamma$ est impossible, sachant que la quantité de mouvement du positron est $\vec{\mathbf{p}}_\text{i} = p_{\text{i},x}\vec{\imath}$.

Identifier la clé La clé est le fait que si une seule particule émerge de la rencontre de l'électron et du positron, elle doit porter à la fois la quantité de mouvement et l'énergie du système initial.

Résoudre le problème L'électron étant initialement immobile et le positron ayant une quantité de mouvement de module $p_{\text{i},x}$, la quantité de mouvement du système entier est $p_{\text{i},x}$. Dans la réaction décrite, les deux particules s'annihilent et ne laissent qu'un photon, dont la quantité de mouvement devra être $p_{\text{i},x}$. La quantité de mouvement du photon est alors décrite par

$$p_{\text{i},x} = \frac{h}{\lambda} \ .$$

Il s'agit de vérifier si l'énergie de ce photon peut correspondre à l'énergie du système. L'énergie du photon est donnée par

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = p_{\text{i},x}c \ .$$

On détermine si l'énergie des particules, avant la collision, correspond à cette expression. En tenant compte d'éventuels effets relativistes, l'énergie d'une masse peut être exprimée à l'aide de l'équation 9.49 par

$$E = \sqrt{E_0^2 + p_{\mathrm{i},x}^2 c^2} \ .$$

Ajoutée à l'énergie de l'électron au repos, on trouve, pour l'énergie totale du système,

$$E_{\mathrm{sys}} = E_0 + \sqrt{E_0^2 + p_{\mathrm{i},x}^2 c^2} \ .$$

Cette expression suffit à constater que l'énergie du système est supérieure au produit $p_{\mathrm{i},x}c$ du photon :

$$\begin{aligned} E_0 + \sqrt{E_0^2 + p_{\mathrm{i},x}^2 c^2} &> p_{\mathrm{i},x}c \\ E_{\mathrm{sys}} &> E_\gamma \ . \end{aligned}$$

Si on aborde la réaction selon le principe de conservation de la quantité de mouvement, on constate que l'énergie ne peut être conservée, ce qui suggère que l'équation n'est pas possible. (réponse)

Valider la réponse On aurait pu aborder la question d'abord selon l'angle de la conservation de l'énergie. On aurait alors constaté que la quantité de mouvement ne peut être conservée.

Q4 **Décortiquer le problème** On analyse deux réactions invalides et on doit déterminer le principe de conservation qui n'est pas respecté.

Identifier la clé La clé consiste à confirmer la conservation de la charge électrique, du nombre leptonique et du nombre baryonique.

a. **Résoudre le problème** Dans la réaction $\mathrm{p} \to \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$, la charge est conservée, car elle est de $+e$ des deux côtés (la charge du neutrino électronique étant nulle).

Les équations 14.3 et 14.5 permettent de vérifier si les nombres leptonique et baryonique sont conservés :

$$L = N_\ell - N_{\bar{\ell}} = \text{constant} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{N_q - N_{\bar{q}}}{3} \ .$$

À gauche, il n'y a aucun lepton et un baryon. Le proton étant un baryon, le décompte initial est donc

$$L_\mathrm{i} = 0 \qquad \text{et} \qquad B_\mathrm{i} = \frac{3-0}{3} = 1 \ .$$

À droite, l'état final, il y a un lepton (ν_e) et un antilepton (e), mais aucun baryon, donc

$$L_\mathrm{f} = (1-1) = 0 \qquad \text{et} \qquad B_\mathrm{f} = \frac{0-0}{3} = 0 \ .$$

Le nombre baryonique est la quantité non conservée dans la réaction. (réponse)

b. **Résoudre le problème** La réaction analysée est $\mathrm{e}^- \to \nu_\mathrm{e} + \nu_\mathrm{e} + \bar{\nu}_\mathrm{e}$.

On constate rapidement que la charge n'est pas conservée, car elle est de $-e$ du côté gauche et nulle du côté droit (les neutrinos ayant une charge nulle).

Les équations 14.3 et 14.5 permettent de vérifier si les nombres leptonique et baryonique sont conservés :

$$L = N_\ell - N_{\bar{\ell}} = \text{constant} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{N_q - N_{\bar{q}}}{3} \ .$$

À gauche, il n'y a qu'un lepton (e^-) et aucun baryon. Le décompte initial est donc

$$L_\mathrm{i} = (1-0) = 1 \qquad \text{et} \qquad B_\mathrm{i} = \frac{0-0}{3} = 0 \ .$$

À droite, l'état final, il y a deux leptons (ν_e) et un antilepton ($\bar{\nu}_e$), mais aucun baryon, donc

$$L_f = (2-1) = 1 \qquad \text{et} \qquad B_f = \frac{0}{3} = 0 \ .$$

Les nombres leptonique et baryonique sont conservés.

La charge électrique est la quantité non conservée dans la réaction. (réponse)

E5 **Décortiquer le problème** On doit trouver la ou les particules manquantes dans les produits de la réaction, parmi les protons (p), les neutrons (n), les leptons de première génération (ν_e et $_{e-}$) et leurs antiparticules ($\bar{p}$, $\bar{n}$, $\bar{\nu}_e$ et e^+).

Identifier la clé La clé est l'application des principes de conservation de la charge électrique Q, du nombre leptonique L et du nombre baryonique B.

a. **Résoudre le problème** La réaction analysée est $e^- + p \to n + \cdots$. Du côté gauche, les valeurs analysées sont

$$Q_i = (-e) + e = 0 \ ,$$
$$L_i = N_\ell - N_{\bar{\ell}} = 1 - 0 = 1 \ ,$$

et

$$B_i = \frac{N_q - N_{\bar{q}}}{3} = \frac{3-0}{3} = +1 \ .$$

Du côté droit, le neutron seul implique que

$$Q_f = 0 \ ,$$
$$L_f = N_\ell - N_{\bar{\ell}} = 0 - 0 = 0 \ ,$$

et

$$B_f = \frac{N_q - N_{\bar{q}}}{3} = \frac{3-0}{3} = +1 \ .$$

On constate que $Q_i - Q_f = 0$, que $L_i - L_f = 1$ et que $B_i - B_f = 0$. On cherche donc à ajouter à droite un lepton dont la charge est nulle, ce qui limite le choix au neutrino électronique ν_e :

$$e^- + p \to n + \nu_e \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Résoudre le problème** La réaction analysée est $\bar{\nu}_e + p \to n + \cdots$. Du côté gauche, les valeurs analysées sont

$$Q_i = 0 + e = e \ ,$$
$$L_i = N_\ell - N_{\bar{\ell}} = 0 - 1 = -1 \ ,$$

et

$$B_i = \frac{N_q - N_{\bar{q}}}{3} = \frac{3-0}{3} = +1 \ .$$

Du côté droit, le neutron seul implique que

$$Q_f = 0 \ ,$$
$$L_f = N_\ell - N_{\bar{\ell}} = 0 - 0 = 0 \ ,$$

et

$$B_f = \frac{N_q - N_{\bar{q}}}{3} = \frac{3-0}{3} = +1 \ .$$

On constate que $Q_i - Q_f = e$, que $L_i - L_f = -1$ et que $B_i - B_f = 0$. On cherche donc à ajouter à droite un antilepton dont la charge est positive, ce qui limite le choix au positron e^+ :

$$\bar{\nu}_e + p \to n + e^+ \ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. Résoudre le problème La réaction analysée est ${}^{2}_{1}\mathrm{H} + \nu_\mathrm{e} \to {}^{1}_{1}\mathrm{H} + \cdots$. Du côté gauche, si on ne considère que le noyau de l'atome d'hydrogène ${}^{2}_{1}\mathrm{H}$ (un proton et un neutron), les valeurs analysées sont

$$Q_\mathrm{i} = e + 0 = e\ ,$$
$$L_\mathrm{i} = N_\ell - N_{\bar{\ell}} = 1 - 0 = 1\ ,$$

et

$$B_\mathrm{i} = \frac{N_q - N_{\bar{q}}}{3} = \frac{6-0}{3} = +2\ .$$

Du côté droit, le noyau d'hydrogène ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$ seul implique que

$$Q_\mathrm{f} = e\ ,$$
$$L_\mathrm{f} = N_\ell - N_{\bar{\ell}} = 0 - 0 = 0\ ,$$

et

$$B_\mathrm{f} = \frac{N_q - N_{\bar{q}}}{3} = \frac{3-0}{3} = +1\ .$$

On constate que $Q_\mathrm{i} - Q_\mathrm{f} = 0$, que $L_\mathrm{i} - L_\mathrm{f} = 1$ et que $B_\mathrm{i} - B_\mathrm{f} = 1$. On cherche donc à ajouter à droite un lepton sans charge et un baryon sans charge, ce qui est possible si on ajoute un neutrino électronique ν_e et un neutron n :

$${}^{2}_{1}\mathrm{H} + \nu_\mathrm{e} \to {}^{1}_{1}\mathrm{H} + \mathrm{n} + \nu_\mathrm{e}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

d. Résoudre le problème La réaction analysée est ${}^{48}_{20}\mathrm{Ca} \to {}^{48}_{22}\mathrm{Ti} + \mathrm{e}^- + \cdots$. Du côté gauche, si on ne considère que les noyaux des atomes, les valeurs analysées sont

$$Q_\mathrm{i} = 20e\ ,$$
$$L_\mathrm{i} = N_\ell - N_{\bar{\ell}} = 0 - 0 = 0\ ,$$

et

$$B_\mathrm{i} = \frac{N_q - N_{\bar{q}}}{3} = \frac{144-0}{3} = +48\ .$$

Du côté droit, le noyau de titane et l'électron implique que

$$Q_\mathrm{f} = 22e + (-e) = 21e\ ,$$
$$L_\mathrm{f} = N_\ell - N_{\bar{\ell}} = 1 - 0 = 1\ ,$$

et

$$B_\mathrm{f} = \frac{N_q - N_{\bar{q}}}{3} = \frac{144-0}{3} = +48\ .$$

On constate que $Q_\mathrm{i} - Q_\mathrm{f} = 1e$, que $L_\mathrm{i} - L_\mathrm{f} = -1$ et que $B_\mathrm{i} - B_\mathrm{f} = 0$. On cherche donc à ajouter à droite un lepton de charge négative (donc un électron e^-), mais le nombre leptonique final passe alors à 2. On doit donc ajouter également deux antileptons sans charge, c'est-à-dire deux antineutrinos électroniques $\bar{\nu}_\mathrm{e}$. La réaction complète est

$${}^{48}_{20}\mathrm{Ca} \to {}^{48}_{22}\mathrm{Ti} + \mathrm{e}^- + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e} + \bar{\nu}_\mathrm{e}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

E6 Décortiquer le problème La distance minimale d permettant un échange d'énergie dépend de l'énergie portée par la particule d'échange, un électron, en l'occurrence.

Connues	Inconnue
$\Delta E_\mathrm{a} = 1{,}00\,\mathrm{MeV}$	d
$\Delta E_\mathrm{a} = 100\,\mathrm{MeV}$	
$\Delta E_\mathrm{a} = 1{,}00\,\mathrm{GeV}$	

Identifier la clé La clé est l'équation 14.7 de la portée de la force nucléaire :

$$R < \frac{\hbar c}{Mc^2} \ ,$$

où Mc^2 est l'énergie ΔE de l'électron impliqué.
Cette équation donne la distance minimale recherchée. On peut donc faire le calcul avec la forme

$$d = \frac{hc}{(2\pi)\, Mc^2} \ . \qquad \text{(i)}$$

a. Résoudre le problème On utilise l'équation (i) avec $Mc^2 = 1{,}00 \times 10^6\,\text{eV}$:

$$d = \frac{1\,240\,\text{eV} \cdot \text{nm}}{(2\pi) \times \left(1{,}00 \times 10^6\,\text{eV}\right)} = 197 \times 10^{-6}\,\text{nm}$$

$$d = 197\,\text{fm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Résoudre le problème On utilise l'équation (i) avec $Mc^2 = 1{,}00 \times 10^6\,\text{eV}$:

$$d = \frac{1\,240\,\text{eV} \cdot \text{nm}}{(2\pi) \times \left(100 \times 10^6\,\text{eV}\right)} = 197 \times 10^{-8}\,\text{nm}$$

$$d = 1{,}97\,\text{fm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. Résoudre le problème On utilise l'équation (i) avec $Mc^2 = 1{,}00 \times 10^6\,\text{eV}$:

$$d = \frac{1\,240\,\text{eV} \cdot \text{nm}}{(2\pi) \times \left(1{,}00 \times 10^9\,\text{eV}\right)} = 197 \times 10^{-9}\,\text{nm}$$

$$d = 0{,}197\,\text{fm} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur des distances trouvées est correct et il est logique qu'une énergie plus grande permette une distance minimale plus faible.

E7 **Décortiquer le problème** La portée associée à l'interaction du boson X est associée à son énergie.

Connue	Inconnues
$\Delta E = 1 \times 10^{15}\,\text{GeV}$	R

Identifier la clé La clé est l'équation 14.7 de la portée de la force nucléaire :

$$R < \frac{\hbar c}{Mc^2} \ ,$$

où Mc^2 est l'énergie du boson X. La portée est la plus faible valeur de R, donc

$$R = \frac{hc}{(2\pi)Mc^2} \ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème On utilise l'équation (i) avec $Mc^2 = 1 \times 10^{15}\,\text{GeV} = 1 \times 10^{24}\,\text{eV}$:

$$R = \frac{1\,240\,\text{eV} \cdot \text{nm}}{(2\pi) \times \left(1 \times 10^{24}\,\text{eV}\right)} = 2{,}0 \times 10^{-22}\,\text{nm} \ .$$

Exprimée en mètres, cette portée est

$$R = 2 \times 10^{-31}\,\text{m} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de la portée trouvée est très faible, mais cohérent avec l'énergie très élevée du boson X. On ne garde qu'un chiffre significatif dans la réponse, car l'énergie du boson X n'a qu'un seul chiffre significatif. La durée de vie moyenne de la particule produite n'est pas une variable utile pour le calcul.

E8 Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$E_\gamma = 150\,\text{keV}$	E
$E_{\text{e},0} = 511\,\text{keV}$	p
	$\sqrt{E^2 - p^2c^2}$

a. Identifier la clé La clé est le fait que l'énergie de l'électron virtuel est simplement donnée par la somme de l'énergie au repos de l'électron et de l'énergie du photon absorbé.

Résoudre le problème Selon la clé, l'énergie de l'électron virtuel est

$$E = E_{\text{e},0} + E_\gamma = 511\,\text{keV} + 150\,\text{keV}$$

$$E = 661\,\text{keV}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Identifier la clé La clé est le fait que la quantité de mouvement de l'électron virtuel est celle du photon qu'il a absorbé (l'électron étant initialement nulle, il n'avait pas de quantité de mouvement). L'équation 10.19 relie la quantité de mouvement d'un photon à son énergie :

$$p = \frac{E}{c}\ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème Selon l'équation (i), la quantité de mouvement absorbée par l'électron est

$$p = \frac{150\,\text{keV}}{c}\ .$$

On peut laisser les unités telles quelles pour écrire

$$p = 150\,\text{keV}/c\ . \qquad \text{(réponse)}$$

c. Identifier la clé La clé consiste à utiliser les valeurs trouvées en **a.** et en **b.** pour procéder au calcul de $\sqrt{E^2 - p^2c^2}$.

Résoudre le problème Pour l'électron virtuel, on sait que $E = 661\,\text{keV}$ et que $p = 150\,\text{keV}/c$, donc

$$\sqrt{E^2 - p^2c^2} = \sqrt{(661\,\text{keV})^2 - (150\,\text{keV}/c)^2\,c^2}$$

$$\sqrt{E^2 - p^2c^2} = 644\,\text{keV}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur des valeurs trouvées est correct.

Q9 Identifier la clé La clé est qu'un diagramme qui possède un plus grand nombre de sommets a une plus faible amplitude de probabilité, car chaque sommet implique un facteur $\sqrt{\alpha} = 1/\sqrt{137}$.

Résoudre le problème Le tableau suivant indique le nombre de sommets de chaque diagramme.

Situation	Nombre de sommets
(i)	4
(ii)	2
(iii)	4
(iv)	6

Donc, l'ordre décroissant est le suivant :

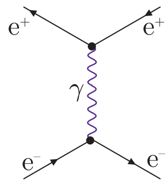
$$\text{(ii)} > \text{(i)} = \text{(iii)} > \text{(iv)}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

E10 **Décortiquer le problème** On doit tracer les deux diagrammes de Feynman possibles pour la diffusion d'un électron et d'un positron ($e^- + e^+ \to e^- + e^+$).

Identifier la clé La clé est la technique 14.1 et le tableau 14.3 pour les diagrammes de Feynman.

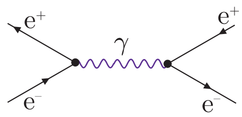
Résoudre le problème Les particules initiales et finales sont des fermions (électron et positron) et sont représentées par des droites et des flèches vers la droite et vers la gauche. La particule virtuelle impliquée est un photon (γ), car la réaction entre ces particules est une interaction électromagnétique.

Dans un premier cas, l'électron et le positron ne s'annihilent pas et échangent un photon. On obtient le diagramme suivant.



(réponse)

Dans un deuxième cas, l'électron et le positron s'annihilent et deviennent temporairement un photon, qui se divise rapidement à nouveau en un électron et un positron. On obtient le diagramme suivant.



(réponse)

P11 **Décortiquer le problème** On étudie la réaction $\pi^0 \to \gamma + \gamma$.

Connues	Inconnue
$v_{\pi^0} = 0{,}900\,0\,c$	E_γ
$M_{\pi^0} = 134{,}977\,\mathrm{MeV}/c^2$	

Identifier la clé La clé consiste à appliquer les principes de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.

Résoudre le problème On calcule l'énergie et la quantité de mouvement initiale, portée exclusivement par le pion π^0.

Selon l'équation 9.46, l'énergie relativiste du pion est

$$E_{\pi^0} = \gamma mc^2 \ ,$$

où γ est le facteur de Lorentz :

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}900\,0c/c)^2}} = 2{,}294 \\
E_{\pi^0} &= 2{,}294 M_{\pi^0} c^2 \\
&= 2{,}294 \times \left(134{,}977\,\mathrm{MeV}/c^2\right) c^2 \\
&= 309{,}7\,\mathrm{MeV} \ .
\end{aligned}$$

Ensuite, selon l'équation 9.39, le module de la quantité de mouvement du pion est

$$\begin{aligned}
p &= \gamma mu \\
&= 2{,}294 M_{\pi^0} u \\
&= 2{,}294 \times 134{,}977\,\mathrm{MeV}/c^2 \times 0{,}900\,0\,c \\
&= 278{,}7\,\mathrm{MeV}/c \ .
\end{aligned}$$

Si on considère un axe (disons l'axe des x) dans le sens de la vitesse initiale du pion, la composante x de la quantité de mouvement initiale est $+278{,}693\,\mathrm{MeV}/c$.
Après la désintégration, les deux photons réunis doivent avoir une énergie totale de 309,65 MeV et une quantité de mouvement totale de $+278{,}693\,\mathrm{MeV}/c$. Mises en équations, ces relations donnent

$$E_{\gamma 1} + E_{\gamma 2} = 309{,}7\,\mathrm{MeV} \tag{i}$$
$$p_{\gamma 1,x} + p_{\gamma 2,x} = 278{,}7\,\mathrm{MeV}/c^2 \ . \tag{ii}$$

Pour déterminer la valeur des inconnues, on utilise la relation entre l'énergie et la quantité de mouvement d'un photon :

$$E_\gamma = p_\gamma c \ .$$

En considérant que le premier photon est celui qui se déplace dans le même sens que le pion initial, on peut exprimer la composante x de la quantité de mouvement des deux photons par

$$p_{\gamma 1,x} = \frac{E_{\gamma 1}}{c} \qquad \text{et} \qquad p_{\gamma 2,x} = -\frac{E_{\gamma 2}}{c} \ .$$

En remplaçant ces deux expressions dans l'équation (ii), on obtient

$$\begin{aligned} E_{\gamma 1} - E_{\gamma 2} &= (278{,}7\,\mathrm{MeV}/c)\ c \\ E_{\gamma 1} - E_{\gamma 2} &= 278{,}7\,\mathrm{MeV} \ . \qquad \text{(iii)} \end{aligned}$$

Les équations (i) et (iii) forment un système de deux équations et deux inconnues.

a. Pour trouver $E_{\gamma 1}$, on isole d'abord $E_{\gamma 2}$ dans l'équation (i) :

$$E_{\gamma 2} = 309{,}7\,\mathrm{MeV} - E_{\gamma 1} \ ,$$

puis on remplace $E_{\gamma 2}$ dans l'équation (iii) :

$$\begin{aligned} E_{\gamma 1} - (309{,}7\,\mathrm{MeV} - E_{\gamma 1}) &= 278{,}7\,\mathrm{MeV}\, c \\ 2E_{\gamma 1} &= 278{,}7\,\mathrm{MeV} + 309{,}7\,\mathrm{MeV} \\ E_{\gamma 1} &= \frac{588{,}4\,\mathrm{MeV}}{2} \\ E_{\gamma 1} &= 294\,\mathrm{MeV} \ . \qquad \text{(réponse)} \end{aligned}$$

b. Finalement, on trouve $E_{\gamma 2}$ en réutilisant l'équation (iii) :

$$\begin{aligned} E_{\gamma 2} &= E_{\gamma 1} - 278{,}7\,\mathrm{MeV} \\ &= 294{,}2\,\mathrm{MeV} - 278{,}7\,\mathrm{MeV} \\ E_{\gamma 2} &= 16\,\mathrm{MeV} \ . \qquad \text{(réponse)} \end{aligned}$$

Valider la réponse La somme des énergies des deux photons est bien égale à l'énergie du pion initial.

Q12 **Décortiquer le problème** Une particule a a un spin $s_a = 3/2$ et une particule b a un spin nul ($s_b = 0$). On cherche à déterminer laquelle est un méson et laquelle est un baryon.

a. **Identifier la clé** La clé est le fait que les mésons sont des particules composites dont le spin est entier.

Résoudre le problème La particule dont le spin est entier est la particule b, donc

le méson est la particule b. (réponse)

b. **Identifier la clé** La clé est le fait que les baryons sont des particules composites dont le spin est demi-entier.

Résoudre le problème La particule dont le spin est demi-entier est la particule a, donc

le baryon est la particule a. (réponse)

Q13 **Décortiquer le problème** On doit classer en ordre croissant quatre résonances d'un méson K^+ dont les énergies sont différentes.

Identifier la clé La clé est le fait qu'une énergie plus élevée correspond à une masse plus élevée et à un spin plus élevé.

Résoudre le problème L'ordre croissant du spin est le même que l'ordre croissant de l'énergie des quatre particules. On a

$$892 < 1\,430 < 1\,780 < 2\,045$$
$$K^* < K_2^* < K_3^* < K_4^* \;.$$

Donc, pour le spin, on a finalement

$$\text{(i)} < \text{(ii)} < \text{(iii)} < \text{(iv)}. \qquad \text{(réponse)}$$

Q14 **Décortiquer le problème** On doit déterminer si l'état des trois quarks u qui forment le baryon Δ^{++} est permis par le principe d'exclusion.

Identifier la clé La clé est le fait que chaque saveur de quark peut avoir l'une des trois couleurs (rouge, vert et bleu).

Résoudre le problème Puisque les trois quarks u peuvent avoir une couleur différente lorsqu'ils s'unissent pour former un baryon Δ^{++}, le principe d'exclusion qui s'applique ne contredit pas leur coexistence. Ils ne se trouvent pas dans le même état quantique. Donc,

le principe d'exclusion s'applique, mais les trois quarks n'ont pas la même couleur. (réponse)

E15 **Décortiquer le problème** On cherche à déterminer la validité de quatre équations par l'analyse de l'interaction forte.

Identifier la clé Pour chaque réaction, la clé consiste à vérifier la conservation de tous les nombres quantiques à l'aide des tableaux 14.5 et 14.6.

a. Soit la réaction $\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \pi^+ + \Delta^+$.

Résoudre le problème La vérification de la conservation des divers nombres quantiques présente un problème avec I_3 et B. Initialement, les deux protons présentent des valeurs I_3 et B telles que

$$I_3 = (1/2) + (1/2) = 1 \qquad \text{et} \qquad B = \frac{6-0}{3} = 2 \;.$$

Après la réaction, les mêmes valeurs, selon les particules π^+ et Δ^+, sont

$$I_3 = (1) + (1/2) = 3/2 \qquad \text{et} \qquad B = \frac{3-0}{3} = 1 \;.$$

La réaction ne peut pas se produire, car I_3 et B ne sont pas conservés. (réponse)

b. Soit la réaction $\mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}} \to \mathrm{K}^+ + \mathrm{K}^-$.

Résoudre le problème On constate que, de chaque côté de la réaction, on trouve une particule et son antiparticule. Il se trouve que les nombres quantiques d'une particule et de son antiparticule sont nécessairement l'opposé l'un de l'autre. Les nombres quantiques sont donc tous nuls des deux côtés de la réaction, et la conservation est nécessairement observée.

La réaction peut se produire, car on a des paires particule-antiparticule
dans les deux membres de l'équation. (réponse)

c. Soit la réaction $\mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^- \to \Upsilon$.

Résoudre le problème Du côté gauche de la réaction, on trouve une particule et son antiparticule. Tous les nombres quantiques sont donc nuls initialement. On doit vérifier du côté droit si tous les nombres quantiques sont nuls pour l'upsilon Υ. À l'aide du tableau 14.5, on confirme que tous les nombres quantiques sont nuls et qu'alors la réaction est possible.

La réaction peut se produire, car tous les nombres quantiques
sont nuls dans les deux membres de l'équation. (réponse)

d. Soit la réaction $p + \pi^- \to D_s^+ + \Sigma^-$.

Résoudre le problème La vérification de la conservation des divers nombres quantiques présente un problème avec I_3 et C. Initialement, le proton et le pion présentent des valeurs I_3 et C telles que

$$I_3 = (1/2) + (-1) = -1/2 \qquad \text{et} \qquad C = 0 + 0 = 0 \ .$$

Après la réaction, les mêmes valeurs, selon les particules D^+ et Σ^-, sont

$$I_3 = (0) + (-1) = -1 \qquad \text{et} \qquad C = 1 + 0 = 1 \ .$$

La réaction ne peut pas se produire, car I_3 et C ne sont pas conservés. (réponse)

E16 Décortiquer le problème On étudie la réaction $\pi^+ + p \to K^+ + \Sigma^+$.

a. Identifier la clé La clé est l'information contenue dans les tableaux 14.5 et 14.6, qui indiquent la composition des mésons et des baryons.

Résoudre le problème Les quarks qui composent les quatre particules participant à la réaction sont les suivants :

$$\begin{aligned} \pi^+ &\Rightarrow (\mathrm{u\bar{d}}) \\ \mathrm{p} &\Rightarrow (\mathrm{uud}) \\ \mathrm{K}^+ &\Rightarrow (\mathrm{u\bar{s}}) \\ \Sigma^+ &\Rightarrow (\mathrm{uus}) \ . \end{aligned}$$

Exprimée en fonction des quarks de valence, la réaction est

$$(\mathrm{u\bar{d}}) + (\mathrm{uud}) \to (\mathrm{u\bar{s}}) + (\mathrm{uus}) \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Identifier la clé La clé est la technique 14.1 et le tableau 14.3 pour les diagrammes de Feynman.

Résoudre le problème On détermine les propriétés du diagramme à tracer.

Tous les quarks impliqués sont les fermions, qu'on représente par une droite et une flèche vers la droite, alors que les antiquarks sont représentés par une droite et une flèche vers la gauche.

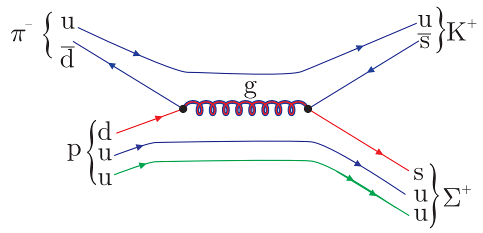
Puisque l'interaction n'implique que des quarks, c'est un gluon qui est échangé entre deux quarks. Le gluon est représenté par le symbole en tire-bouchon.

Initialement, les quarks présents sont $(\mathrm{u\bar{d}})$ et (uud). Seuls le quark (d) et l'antiquark $\bar{d}$ peuvent s'annihiler et former temporairement un gluon, puisqu'ils sont l'antiparticule l'un de l'autre. Les autres quarks (trois quarks u) se retrouvent à la fois avant et après la réaction. Les quarks apparaissant durant la réaction sont donc les quarks (s) et $\bar{\mathrm{s}}$, deux antiparticules l'un de l'autre, et peuvent donc être créés par la désintégration du gluon.

Finalement, le proton et le baryon Σ^+ sont des particules sans couleur. Les trois quarks qui les forment doivent donc avoir les trois couleurs différentes (rouge, vert et bleu). Le pion et le kaon sont formés d'un quark et d'un antiquark dont les couleurs doivent être complémentaires (on choisit le bleu et l'antibleu comme l'illustre la figure résultante).

Les quarks qui s'annihilent et ceux qui sont recréés ensuite doivent avoir des couleurs différentes. Si on pose l'annihilation d'un quark rouge avec un quark antibleu, le gluon sera un gluon rouge-antibleu ($\mathrm{g}_{\mathrm{r\bar{b}}}$) et générera également des quarks rouge et antibleu même s'ils ont une autre saveur.

Toutes les conditions réunies permettent de produire la figure suivante.



(réponse)

E17 **Décortiquer le problème** On étudie la réaction $e^+ + e^- \to D^+ + D^-$.

a. **Identifier la clé** La clé est l'information contenue dans les tableaux 14.1 et 14.5, qui indiquent la composition des fermions et des baryons.

Résoudre le problème Les quarks qui composent les quatre particules participant à la réaction sont les suivants :

$$\begin{aligned} e^+ &\Rightarrow e^+ \\ e^- &\Rightarrow e^- \\ D^+ &\Rightarrow (c\bar{d}) \\ D^- &\Rightarrow (d\bar{c}) \;. \end{aligned}$$

Exprimée en fonction des quarks de valence, la réaction est

$$e^+ + e^- \to (c\bar{d}) + (d\bar{c}) \;. \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** La clé est la technique 14.1 et le tableau 14.3 pour les diagrammes de Feynman.

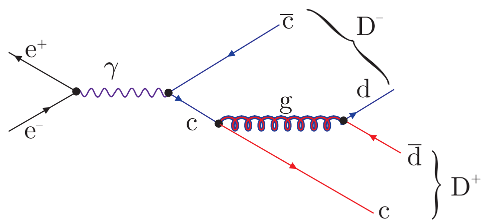
Résoudre le problème On détermine les propriétés du diagramme à tracer.

Toutes les particules impliquées sont les fermions, qu'on représente par une droite. L'électron et les quarks sont représentés par une flèche vers la droite, alors que le positron et les antiquarks sont représentés par une flèche vers la gauche.

Les deux particules initiales sont un électron et son antiparticule, le positron, qui vont donc s'annihiler et créer temporairement un photon (γ). Ce photon ne peut se désintégrer ensuite qu'en formant une particule et son antiparticule. Les particules finales sont deux paires quark-antiquark ($c\bar{c}$ et $d\bar{d}$). On choisit la création c et $\bar{c}$ à la désintégration du photon. Les deux particules créées doivent avoir des couleurs complémentaires (on choisit bleu et antibleu).

Pour faire apparaître l'autre paire quark-antiquark ($d\bar{d}$), l'une des deux particules déjà créées doit émettre un gluon (en changeant de couleur). On pose que le quark c-bleu émet ce gluon. On choisit un gluon rouge-antibleu qui transforme le quark bleu en quark rouge. Le gluon créé est à l'origine de la création de la paire d-bleu et $\bar{d}$-antirouge pour que ces particules soient complémentaires aux quarks $\bar{c}$-antibleu et c-rouge qui forment les mésons D^+ et D^-.

Toutes les conditions réunies permettent de produire la figure suivante.



(réponse)

E18 **Décortiquer le problème** Un baryon Ω^- subit une chaîne de désintégrations produisant après trois étapes une paire de photons. Chaque désintégration fait intervenir un type d'interaction, faible, forte ou électromagnétique. On sait que l'étrangeté du baryon Ω^- est $S_{\Omega^-} = -3$.

a. **Identifier la clé** La clé est le fait que l'interaction faible est celle qui intervient lorsque varie l'étrangeté, le charme ou la beauté de part et d'autre de la réaction.

Résoudre le problème Dans le cas de la désintégration $\Omega^- \to \Xi^0 + \pi^-$, l'étrangeté varie. Initialement, le baryon Ω^- a une étrangeté (selon le tableau 14.6) de -3. Après la réaction, le baryon Ξ^0 et le pion π^- ont respectivement des étrangetés de -2 et 0, pour un total de -2. L'étrangeté a donc varié durant la réaction, ce qui trahit l'action de l'interaction faible.

$$\text{L'interaction faible, car } \Delta S \neq 0. \qquad \text{(réponse)}$$

b. **Identifier la clé** Comme en **a.**, la clé est le fait que l'interaction faible est celle qui intervient lorsque varie l'étrangeté, le charme ou la beauté de part et d'autre de la réaction.

Résoudre le problème Dans le cas de la désintégration $\Xi^0 \to \pi^0 + \Lambda^0$, l'étrangeté varie. Initialement, le baryon Ξ^0 a une étrangeté (selon le tableau 14.6) de -2. Après la réaction, le pion Π^0 et le baryon Λ^- ont respectivement des étrangetés de 0 et -1, pour un total de -1. L'étrangeté a donc varié durant la réaction, ce qui trahit encore une fois l'action de l'interaction faible.

L'interaction faible, car $\Delta S \neq 0$. (réponse)

c. Identifier la clé La clé est la section 14.9 qui explique le comportement des mésons π^0 lors de leur désintégration en deux photons.

Résoudre le problème Dans le cas de la désintégration $\pi^0 \to \gamma + \gamma$, l'étrangeté, le charme et la beauté sont conservés (ces valeurs sont toutes nulles pour les photons comme pour le pion π^0). Comme le mentionne la clé, la création de deux photons (γ) suggère l'action de l'interaction faible. Par ailleurs, les valeurs S, C et $\widetilde{B}$ sont nulles de part et d'autre de la réaction. Ainsi, l'interaction impliquée est

l'interaction électromagnétique, car on obtient des photons. (réponse)

Valider la réponse La section 14.9 présente précisément cette réaction en mentionnant que l'interaction électromagnétique en est la cause.

E19 **Décortiquer le problème** On doit déterminer l'équation de deux réactions différentes dans lesquelles un tauon se désintègre.

a. Identifier la clé La clé consiste à appliquer la conservation de la charge et des nombres leptoniques, dont les valeurs sont données dans le tableau 14.1 pour chaque fermion.

Résoudre le problème La charge du tauon est $-e$ et son nombre leptonique, $L_\tau = +1$. Lors de sa désintégration, ces deux valeurs doivent être les mêmes pour l'ensemble des produits.

Dans le premier cas, on sait qu'un muon est produit. Le muon a une charge de $-e$ également, et la charge est balancée. Déjà, on sait que

$$\tau^- \to \mu^- + \ldots$$

On cherche ensuite à déterminer les neutrinos qui permettront de balancer également les nombres leptoniques, car, du côté gauche, on a $L_\tau = 1$ et $L_\mu = 0$. Le neutrino qui portera à $+1$ la valeur du nombre leptonique tauique du côté droit est le neutrino tauique ν_τ. De plus, le neutrino qui réduira à 0 le nombre leptonique électronique à droite est l'antineutrino $\bar{\nu}_\mu$. On peut finalement écrire l'équation complète de la réaction :

$$\tau^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau \ . \qquad \text{(réponse)}$$

b. Identifier la clé La clé consiste à appliquer la conservation de la charge et des nombres leptoniques, dont les valeurs sont données dans le tableau 14.1 pour chaque fermion.

Résoudre le problème La charge du tauon est $-e$ et son nombre leptonique, $L_\tau = +1$. Lors de sa désintégration, ces deux valeurs doivent être les mêmes pour l'ensemble des produits.

Dans le deuxième cas, on sait qu'un électron est produit. L'électron a une charge de $-e$ également, et la charge est balancée. Déjà, on sait que

$$\tau^- \to \mathrm{e}^- + \ldots$$

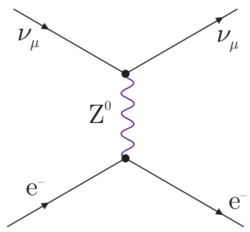
On cherche ensuite à déterminer les neutrinos qui permettront de balancer également les nombres leptoniques, car, du côté gauche, on a $L_\tau = 1$ et $L_\mathrm{e} = 0$. Le neutrino qui portera à $+1$ la valeur du nombre leptonique tauique du côté droit est le neutrino tauique ν_τ. De plus, le neutrino qui réduira à 0 le nombre leptonique électronique à droite est l'antineutrino $\bar{\nu}_\mathrm{e}$. On peut finalement écrire l'équation complète de la réaction :

$$\tau^- \to \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e} + \nu_\tau \ . \qquad \text{(réponse)}$$

E20 **Décortiquer le problème** Le boson Z^0 est impliqué dans la réaction entre un neutrino muonique et un électron, selon l'équation $\nu_\mu + e^- \to \nu_\mu + e^-$.

a. **Identifier la clé** La clé est la technique 14.1 et le tableau 14.3 pour les diagrammes de Feynman, en plus du fait que le boson de jauge Z^0 ne change pas la saveur.

Résoudre le problème Les particules impliquées sont des fermions. Leur représentation est donc une droite munie d'une flèche vers la droite. S'il n'y a aucune variation de la saveur des particules, l'électron demeure électron et le neutrino muonique demeure neutrino muonique. Le boson est simplement échangé entre les particules lors de leur interaction. Le boson Z^0 se représente par un trait ondulé reliant deux sommets. On peut donc tracer le diagramme de Feynman correspondant :

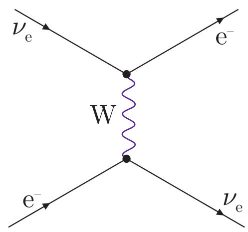


(réponse)

b. **Identifier la clé** La clé est la technique 14.1 et le tableau 14.3 pour les diagrammes de Feynman, en plus du fait que le boson de jauge W change la saveur.

Résoudre le problème Comme en **a.**, les particules impliquées sont des fermions. Leur représentation est encore une droite munie d'une flèche vers la droite. Puisqu'il n'y a pas de variation de la saveur des particules, l'électron et le neutrino électronique doivent tous deux être transformés en une autre particule. Le boson est échangé entre les particules lors de leur interaction et permet de préciser la transformation des deux particules. La transformation de chaque particule en une autre est limitée à une seule possibilité : l'électron est transformé en neutrino électronique et le neutrino électronique, en électron.

Le boson W se représente par un trait ondulé reliant deux sommets. On peut donc tracer le diagramme de Feynman correspondant :



(réponse)

E21 **Décortiquer le problème** On étudie la réaction $\nu_e + {}^{37}_{17}Cl \to {}^{37}_{18}Ar + e^-$.

a. **Identifier la clé** La clé est le fait que les nombres atomiques du chlore et de l'argon indiquent qu'un neutron du noyau de chlore est changé en proton lors de la réaction.

Résoudre le problème Outre le neutron transformé lors de la réaction, les autres nucléons sont spectateurs. Du côté des produits, c'est le proton supplémentaire de l'argon qui est créé. La réaction se résume donc à

$$\nu_e + n \to p + e^- \quad . \qquad \text{(réponse)}$$

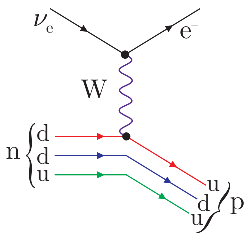
b. **Identifier la clé** La clé est le fait que le neutron est composé des quarks (udd) et que le proton est composé des quarks (uud).

Résoudre le problème Selon la clé, on constate qu'un quark d a été transformé en quark u lors de la réaction dans laquelle un neutron s'est transformé en proton. C'est donc l'interaction entre le neutrino électronique ν_e et le quark d qui crée un quark u et un électron. La réaction se résume donc à

$$\nu_e + d \to u + e^- \quad . \qquad \text{(réponse)}$$

c. **Identifier la clé** La clé est le fait que la particule qui transforme une paire neutrino électronique-quark d en une paire électron-quark u est un boson W.

Résoudre le problème Les quarks, l'électron et le neutrino électronique sont des fermions et sont représentés sur un diagramme de Feynman par une droite munie d'une flèche vers la droite. Le boson W est plutôt représenté par une ligne ondulée entre les deux sommets qui représentent l'interaction des deux particules. Le boson W doit faire le lien entre les deux particules impliquées initialement, soit le neutrino électronique et l'un des quarks d du neutron. À droite de cette interaction, on trouve plutôt un quark u et le neutrino est devenu électron. Finalement, on doit tenir compte de la couleur des quarks qui forment le neutron pour que deux quarks n'aient pas la même couleur. On a alors toute l'information nécessaire pour tracer le diagramme de Feynman qui suit :



(réponse)

d. **Identifier la clé** La clé est le fait que les nombres leptoniques doivent être conservés lors de la réaction.

Résoudre le problème Si le neutrino électronique est remplacé par une autre variété de neutrino du côté des réactifs, le nombre leptonique électronique devient nul du côté gauche de l'équation. Selon le principe de conservation du nombre leptonique électronique, ce nombre devrait avoir la même valeur du côté droit (la valeur 0). Une valeur nulle du côté droit signifie qu'on ne peut pas y trouver un électron, ce qui rend impossible la transformation d'un neutron en proton, et la réaction est alors impossible.

Il n'y a aucune réaction. (réponse)

E22 **Décortiquer le problème** On étudie la réaction $\nu + {}^2_1\mathrm{H} \rightarrow {}^1_1\mathrm{H} + \mathrm{n} + \nu$.

Connues	Inconnue
$M_{^2_1\mathrm{H}} = 2{,}014\,102\,\mathrm{u}$	E_ν
$M_{^1_1\mathrm{H}} = 1{,}007\,825\,\mathrm{u}$	
$M_\mathrm{n} = 1{,}008\,665\,\mathrm{u}$	
$u = 931{,}5\,\mathrm{MeV}/c^2$	

a. **Identifier la clé** La clé est le fait que l'énergie doit être conservée lors de la réaction. Si on cherche l'énergie minimale du neutrino de gauche, cela sous-entend que l'énergie du neutrino diffusé (celui de droite) tend vers zéro.

Résoudre le problème On calcule l'énergie relativiste de la masse du noyau de deutérium, à gauche :

$$\begin{aligned} E_0 &= M_{^2_1\mathrm{H}} c^2 \\ &= 2{,}014\,102\,\mathrm{u} \times \frac{931{,}5\,\mathrm{MeV}/c^2}{1{,}000\,\mathrm{u}} \times c^2 \\ &= 1\,876{,}136\,\mathrm{MeV}\ . \end{aligned}$$

On calcule ensuite l'énergie relativiste des produits du côté droit, alors que le neutrino a une énergie nulle :

$$\begin{aligned}
E &= (M_{{}^1_1\mathrm{H}} + M_{\mathrm{n}})c^2 \\
&= (1{,}007\,825\,\mathrm{u} + 1{,}008\,665\,\mathrm{u}) \times \frac{931{,}5\,\mathrm{MeV}/c^2}{1{,}000\,\mathrm{u}} \times c^2 \\
&= 1\,878{,}360\,\mathrm{MeV}\ .
\end{aligned}$$

La différence entre les deux énergies trouvées est celle portée par le neutrino initial :

$$\begin{aligned}
E_\nu &= 1\,878{,}360\,\mathrm{MeV} - 1\,876{,}136\,\mathrm{MeV} \\
E_\nu &= 2{,}224\,\mathrm{MeV}\ . \qquad \text{(réponse)}
\end{aligned}$$

Valider la réponse L'ordre de grandeur de l'énergie trouvée est correct.

b. **Identifier la clé** La clé est le fait qu'aucune particule n'est transformée lors de la réaction : un neutron est séparé du noyau, mais demeure neutron.

Résoudre le problème La clé indique que la particule d'échange est un boson Z^0, qui ne change la saveur d'aucun des quarks impliqués. Cela fait en sorte que n'importe quelle saveur de neutrino permet de déclencher la réaction et qu'alors l'eau lourde permet de dénombrer tous les neutrinos de toutes les saveurs émis par le Soleil et atteignant le détecteur. En résumé,

la réaction est utile, car elle permet d'observer tous les types de neutrinos. (réponse)

