L3 Parcours Mathématiques-informatique – UE Projet Maths-Info – 2022-2023

Ajouter des pavages à JS-Sandpile

Sujet proposé par Kévin Perrot (LIS équipe Calcul Naturel)
<kevin.perrot@lis-lab.fr>

Modèles de piles de sable

Ce sont des systèmes dynamiques discrets, imaginés par les physiciens Bak, Tang et Wiesenfeld en 1987 pour modéliser le phénomène de *Self-Organised Criticality* [1]. Soit $S = [\![1,5]\!] \times [\![1,5]\!]$ une grille bidimentionnelle carrée de 5×5 cellules. Dans chaque cellule nous pouvons placer des grains pour obtenir une *configuration* $c : S \to \mathbb{N}$. Une cellule contenant au moins quatre grains est *instable*, et donnera un grain à chacune de ses quatre voisines (nord, est, sud, ouest). Ainsi la règle d'évolution F est formellement définie $\forall (x,y) \in S$ par

$$F(c)(x,y) = c(x,y) - 4\,H(c(x,y)-4) + \sum\nolimits_{(x',y') \text{ avec } |x'-x|+|y'-y|=1} H(c(x',y')-4),$$

avec $H(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ la *fonction seuil de Heaviside*. Voici un exemple d'évolution.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 3&2&0&6&0\\\hline 2&0&0&0&1\\\hline 1&4&5&1&1\\\hline 0&4&2&3&3\\\hline 0&1&3&4&1\\\hline\end{array} \overset{F}{\mapsto} \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 3&2&1&2&1\\\hline 2&1&1&1&1\\\hline 2&2&2&2&1\\\hline 1&1&4&4&3\\\hline 0&2&4&0&1\\\hline\end{array} \overset{F}{\mapsto} \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 3&2&1&2&1\\\hline 2&1&1&1&1\\\hline 2&2&3&3&1\\\hline 1&2&2&1&4\\\hline 0&3&1&2&1\\\hline\end{array} \overset{F}{\mapsto} \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 3&2&1&2&1\\\hline 2&1&1&1&1\\\hline 2&2&3&3&2\\\hline 1&2&2&2&0\\\hline 0&3&1&2&2\\\hline\end{array}$$

La configuration stable obtenue à partir de c est notée c°. On peut définir une addition $\oplus$

$$c \oplus c' = (c+c')^\circ \text{ avec } c+c' \text{ la somme des grains cellule à cellule.}$$

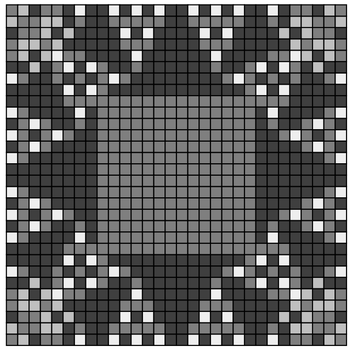
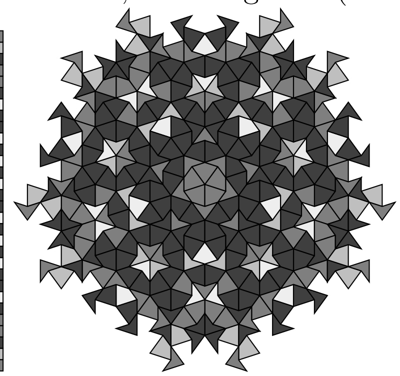
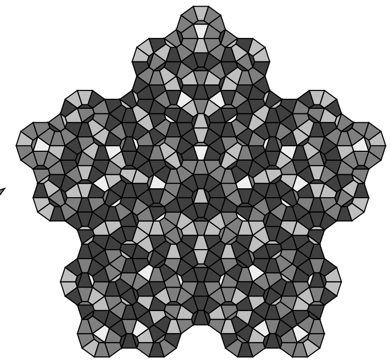
Il est alors simple de voir que l'ensemble des configurations stables $\mathcal{C}$ forme un monoïde (clôt, associatif, identité) commutatif. En particulier, l'élément identité correspond à la configuration sans aucun grain. L'ensemble des configurations *récurrentes* est défini par

$$\mathcal{R} = \{c \in \mathcal{C} \mid \forall c' \in \mathcal{C} : \exists c'' \in \mathcal{C} : c' \oplus c'' = c\},$$

il correspond intuitivement au sous-ensemble de configurations stables que l'on peut atteindre, en ajoutant des grains, à partir de n'importe quelle configuration. Dhar a démontré en 1990 le superbe résultat suivant.

Théorème ([2])**.** $(\mathcal{R}, \oplus)$ *est un groupe (clôt, asociatif, identité, inverse) commutatif.*

La forme des éléments identité du groupe des configurations récurrentes reste aujourd'hui encore un grand mystère. On peut étendre ces résultats à de nombreux supports de la dynamique, autres que la grille. Voici quelques illustrations d'éléments identité sur des pavages, avec blanc=0, gris clair=1, gris foncé=2, noir=3 grains (chaque cellule a quatre voisines).

JS-Sandpile

JS-Sandpile est un simulateur de piles de sable écrit en javascript, prêt à jouer :

`https://github.com/huacayacauh/JS-Sandpile/`

Il permet notamment de calculer les identités de nombreux pavages, en utilisant la formule $e = (2m - (2m)^\circ)^\circ$ avec m la configuration stable maximale (avec $deg(i) - 1$ grains en i).

Votre travail

1. Jouer avec JS-Sandpile, prendre connaissance du wiki.
2. Implémenter deux nouveaux pavages simples, par exemple Euclidéens :
   `https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Euclidean_uniform_tilings`
   `https://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_tilings_by_convex_regular_polygons`
3. Implémenter un nouveau pavage par substitution (en utilisant la *Substitution API*) :
   `https://tilings.math.uni-bielefeld.de/substitution/`
4. ~~Implémenter des pavages hyperboliques selon le modèle du disque de Poincarré :~~
   ~~`https://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_tilings_in_hyperbolic_plane`~~
5. Proposer un nouveau découpage du plan, par exemple les diagrammes de Voronoi générés aléatoirement à partir de paramètres choisis par l'utilisateur :
   `https://en.wikipedia.org/wiki/Tessellation`
   `https://en.wikipedia.org/wiki/Voronoi_diagram`
6. Étudier les éléments identités sur ces nouveaux pavages.
7. (extra) Étudier les possibilités d'implémenter des piles de sable sur graphes orientés arbitraires (que l'on donnerait au format *graphviz/dot*) dans JS-Sandpile.

Références

[1] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, *Self-organized criticality : An explanation of the 1/f noise*, Physical Review Letters 59 :381–384, 1987.

[2] D. Dhar, *Self-organized critical state of sandpile automaton models*, Physical Review Letters 64 :1613–1616, 1990.