



Projet Théorie des Graphes

Olivier Blot

Département Sciences du Numérique - Deuxième année 2023-2024

Contents

1	Introduction	2
2	Modélisation sous forme de graphe	3
3	Étude des graphes non valués	4
3.1	Degré des graphes	4
3.2	Degré de clustering	5
3.3	Nombre de cliques	6
3.4	Composantes connexes	8
3.5	Plus courts chemins	8
3.5.1	Valeur des plus courts chemins	8
3.5.2	Distribution des plus courts chemins	10
3.5.3	Moyenne des plus courts chemins	10
4	Étude des graphes valués	12
4.1	Valeur des plus courts chemins	12
4.2	Distribution des plus courts chemins	13
4.3	Moyenne des plus courts chemins	14
5	Conclusion	15

1 Introduction

Ce projet, faisant suite aux TP, a pour but d'utiliser les connaissances acquises pour créer des graphes et à en analyser ses caractéristiques. Plus précisément, il s'agit ici d'essaims de nanosatellites de densité variables.

Ce projet a été réalisé à l'aide de Matlab et en utilisant les fonctions des dossiers *matlab_bgl* et *matlab_tpgraphe* fournis lors des séances de TP ainsi que de certaines fonctions MATLAB en libre accès.

2 Modélisation sous forme de graphe

Cette première partie consiste en la modélisation des essaims sous forme de graphes. Plus précisément, il y a trois essaims de densité faible, moyenne et forte et sont tous modélisés pour une portée de 20, 40 et 60km. Chaque sommet du graphe représente un satellite, et chaque arête une communication possible entre deux satellites. Autrement dit, pour une portée donnée, une arête entre deux sommets signifie que les deux satellites sont suffisamment près pour communiquer entre eux. Les graphes sont obtenus en utilisant la fonction *viz_adj3D.m*, fonction originale qui adapte le code de *vizadj.m* pour fonctionner pour un espace à 3 dimensions et qui inclut la fonction *gplot3.m* obtenu via l'Add-On du même nom. Les figures suivantes représentent les graphes obtenus dans les 9 cas différents.

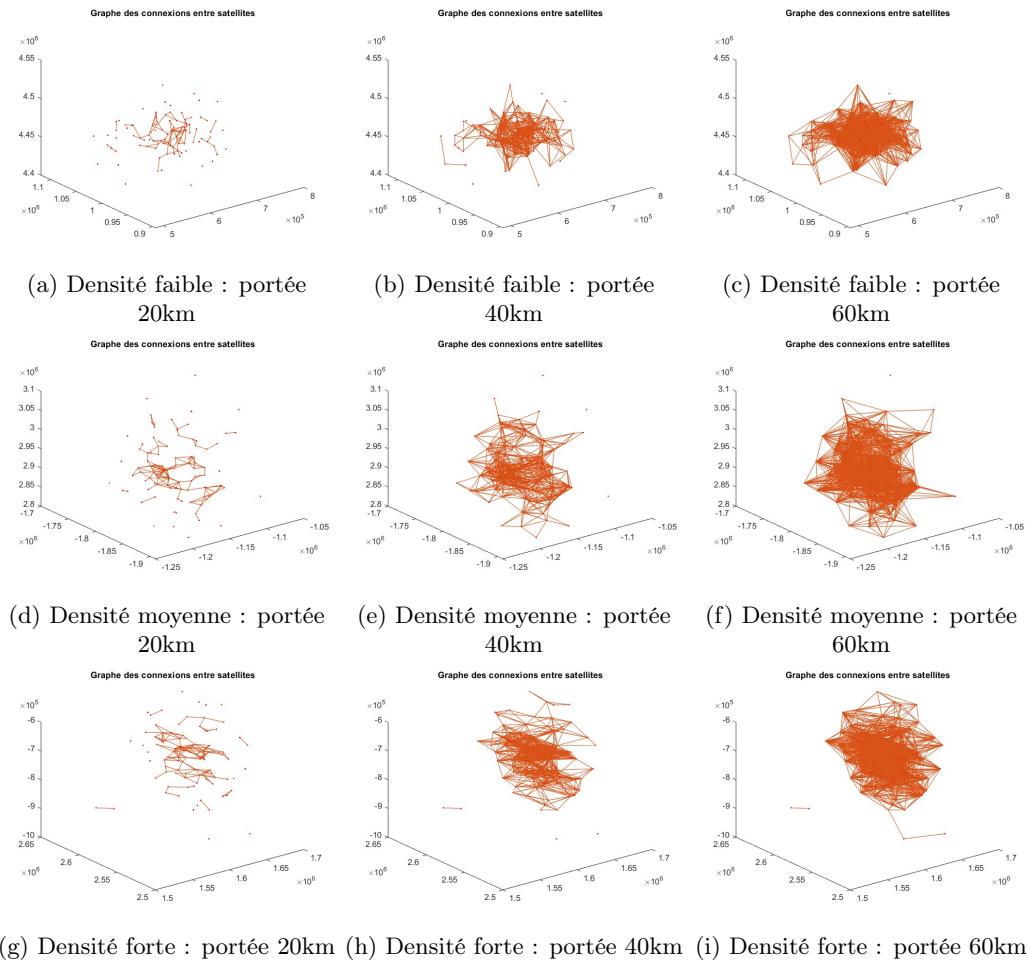


Figure 1: Modélisation des essaims sous forme de graphes

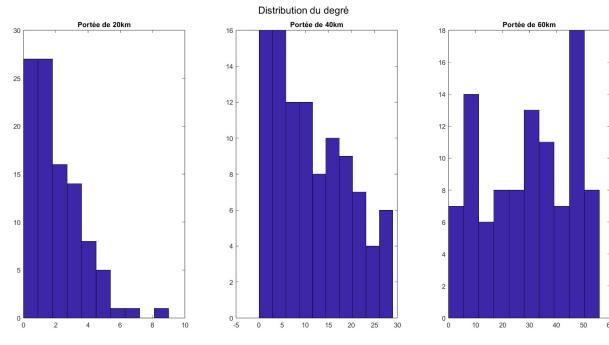
Les graphes sont cohérents avec ce à quoi on pouvait s'attendre : plus la portée augmente, plus il y a d'arêtes entre les sommets et moins il y a de sommets isolés. Et plus la densité est forte plus l'ordre des composantes connexes est grand.

3 Étude des graphes non valués

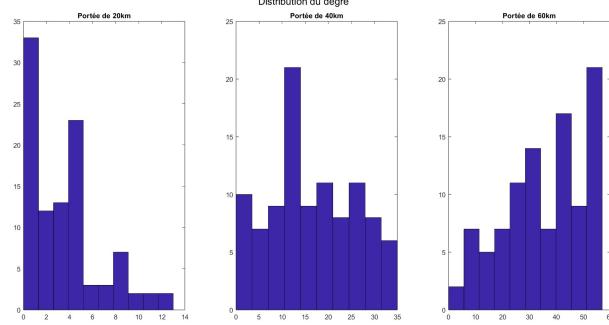
Dans cette section, seront étudiés les caractéristiques des graphes obtenues à la section précédente (degré, clustering, composante connexe, etc...). Les graphes sont aussi supposés non-valués, c'est-à-dire qu'il n'y a aucun poids au niveau des arêtes (ou que le poids vaut 1).

3.1 Degré des graphes

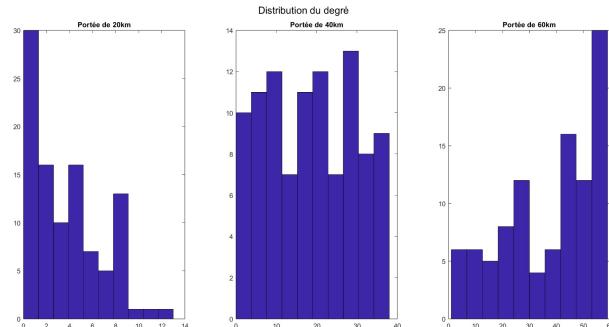
Pour chaque graphe, le degré des sommets peut être obtenu en sommant tous les éléments d'une ligne/colonne de la matrice d'adjacence en faisant attention à ce que les coefficients diagonaux soient nuls. Autrement, cela voudrait dire qu'un satellite peut communiquer avec lui-même (ce qui n'est pas faux, mais ce n'est pas ce que l'on cherche à représenter).



(a) Essaim de faible densité



(b) Essaim de densité moyenne



(c) Essaim de densité forte

Figure 2: Distribution des degrés des essaims

Pour les essaims de faible portée, on retrouve une majorité de degré valant 0,1 ou 2 et à mesure que la portée augmente, on retrouve une majorité de degré élevé à mesure que les points isolés sont de moins en moins nombreux. Cela se traduit notamment au travers du degré moyen.

	Portée 20km	Portée 40km	Portée 60km
Densité Faible	1.8	11.42	29.42
Densité Moyenne	3.46	16.84	35.64
Densité Forte	3.72	18.68	37.4

Table 1: Moyenne des degrés des graphes

3.2 Degré de clustering

Avec la fonction *clustering_coefficients.m*, on peut obtenir le degré de clustering pour chaque sommet.

On peut ensuite facilement récupérer la valeur moyenne.

	Portée 20km	Portée 40km	Portée 60km
Densité Faible	0.2261	0.5205	0.6724
Densité Moyenne	0.3637	0.6370	0.7280
Densité Forte	0.3981	0.6651	0.7281

Table 2: Moyenne des degrés de clustering des graphes

Là encore, les valeurs des degrés augmentent à mesure que la portée augmente et toutes ces valeurs sont plus importantes pour des densités élevées.

Table 3: Distribution des degrés de clustering des essaims

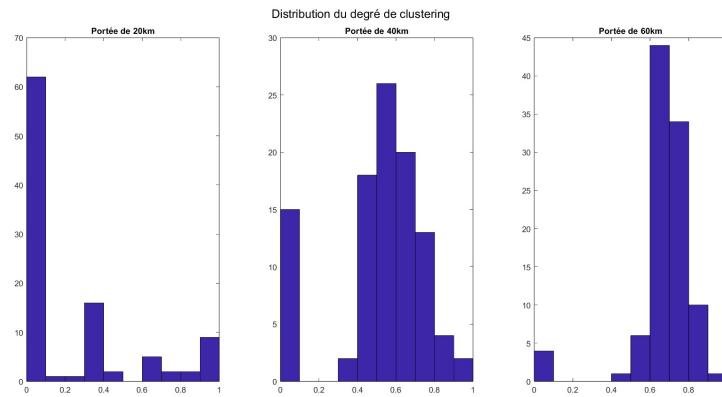


Table 3: Essaim de faible densité

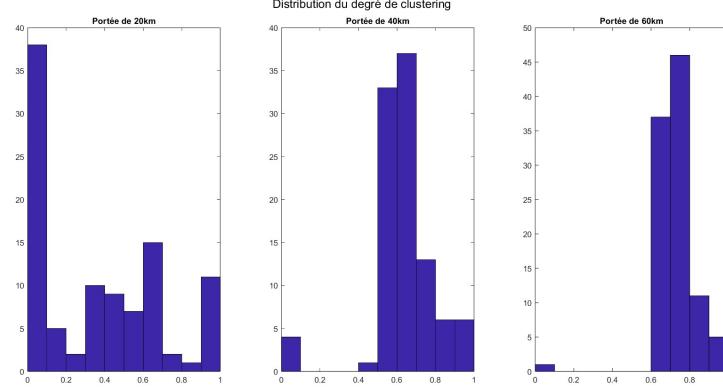


Table 3: Essaim de densité moyenne

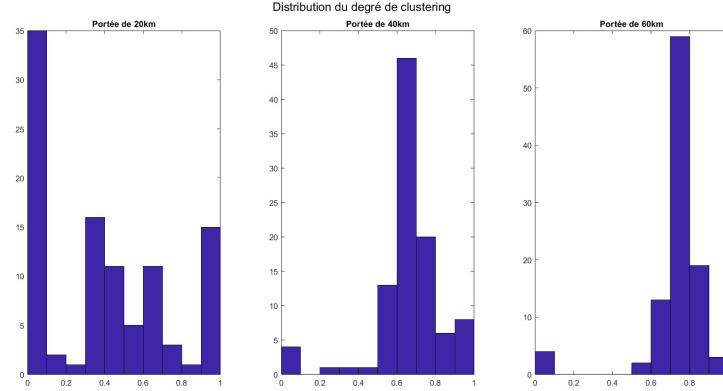
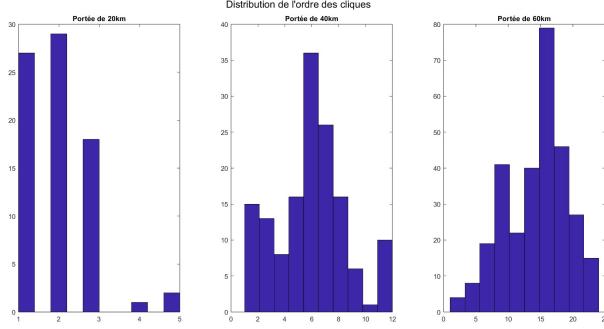


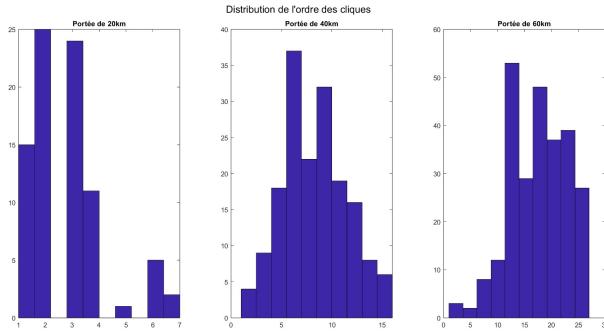
Table 3: Essaim de densité forte

3.3 Nombre de cliques

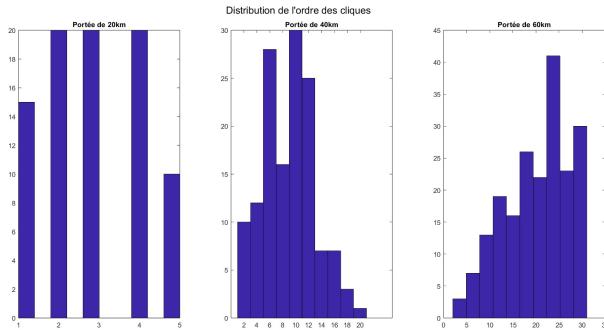
Dans les dossiers fournis, il n'y a pas de fonctions permettant de calculer le nombre de cliques. Pour obtenir le nombre de cliques, la fonction MATLAB *maximalCliques.m* disponible en libre accès a été utilisé. Plusieurs fonctions auraient pu être utilisées, dont une fonction *kclique* mais l'avantage de *maximalCliques* est qu'elle calcule les cliques maximales possibles. Il n'y a pas de clique incluse dans une clique plus grande.



(a) Essaim de faible densité



(b) Essaim de densité moyenne



(c) Essaim de densité forte

Figure 3: Distribution de l'ordre des cliques des graphes

	Portée 20km	Portée 40km	Portée 60km
Densité Faible	77	147	301
Densité Moyenne	83	171	258
Densité Forte	85	139	200

Table 4: Ordre des cliques des graphes

Plus la portée est grande plus le nombre de cliques est élevé. C'est parce qu'il y a plus de sommets connectés et donc plus de sous-graphes complets. Mais pour des densités plus élevées, il y en a moins et c'est parce que ces cliques ont un ordre plus élevé.

3.4 Composantes connexes

Les composantes connexes sont obtenues avec la fonction *components.m*. On obtient un vecteur contenant l'ordre des composantes connexes. Le nombre de composantes connexes correspond à la taille de ce vecteur. Sans trop de surprise, pour une portée faible, on retrouve beaucoup de composantes connexes (principalement d'ordre 1 et 2) et pour des portées élevées, il y a peu de composantes connexes, mais avec un ou plusieurs composantes avec un ordre important et les autres avec un ordre faible.

	Portée 20km	Portée 40km	Portée 60km
Densité Faible	39	8	4
Densité Moyenne	22	4	2
Densité Forte	23	4	2

Table 5: Nombre de composantes connexes

3.5 Plus courts chemins

Contrairement aux éléments précédents, le chemin le plus court dépend du point que l'on choisit comme source. Les figures qui vont suivre ont été obtenu en prenant le sommet 2 comme source. Les chemins s'obtiennent avec la fonction *shortest_paths.m*

3.5.1 Valeur des plus courts chemins

Table 6: Plus court chemin pour chaque sommet depuis le sommet 2

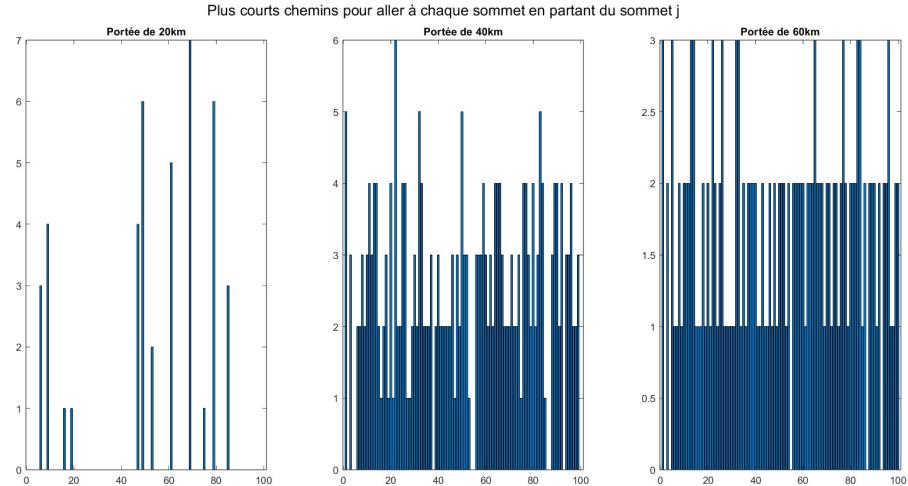


Table 6: Essaim de densité faible

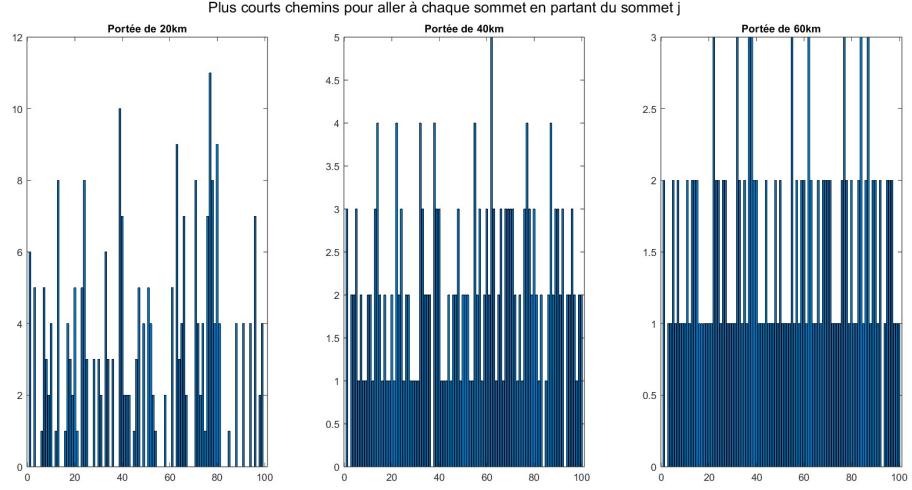


Table 6: Essaim de densité moyenne

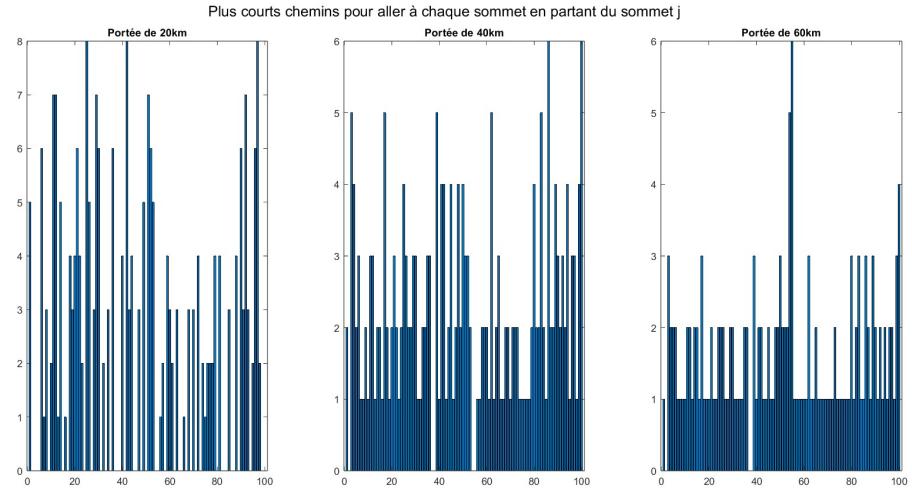
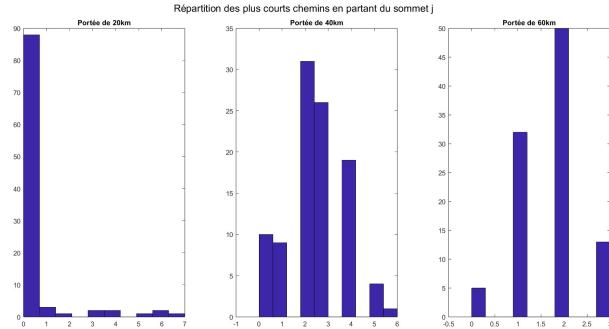


Table 6: Essaim de densité forte

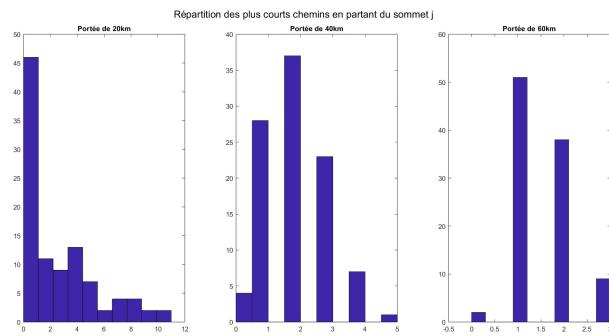
Le sommet 2 appartient à une composante connexe d'ordre élevé, car la majorité des sommets ont un chemin supérieur à 1. Plus la portée est élevée, moins il y a de longueurs valant 0. De plus, plus la portée est élevée plus les chemins sont courts car il existe plus de chemins potentiels et donc de possibilités pour raccourcir la chaîne reliant deux sommets.

3.5.2 Distribution des plus courts chemins

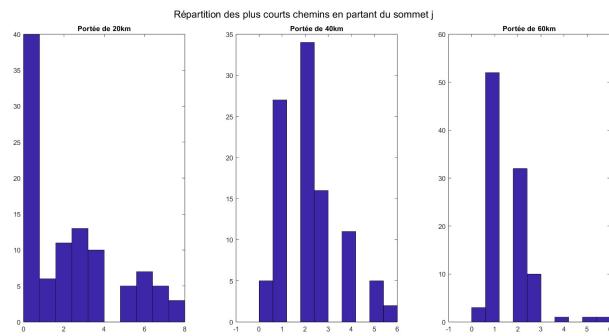
On peut aussi représenter les plus courts chemins par leur distribution. Les observations sont les mêmes.



(a) Essaim de faible densité



(b) Essaim de densité moyenne

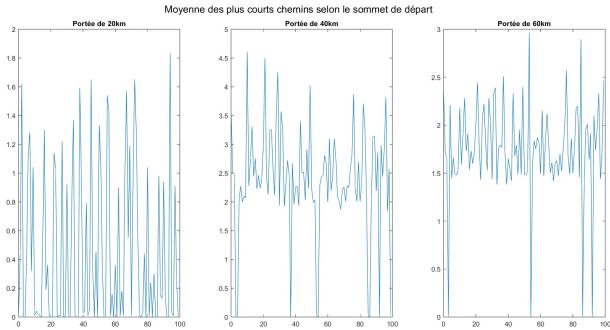


(c) Essaim de densité forte

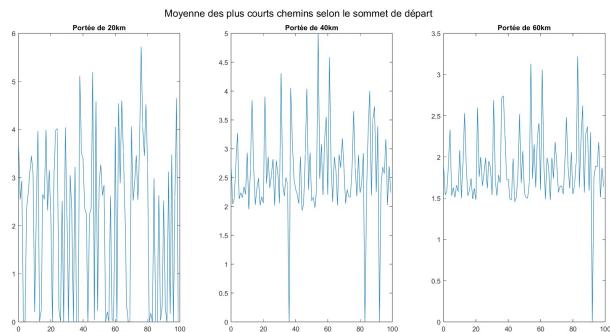
Figure 4: Distribution des plus courts chemins en partant du sommet 2

3.5.3 Moyenne des plus courts chemins

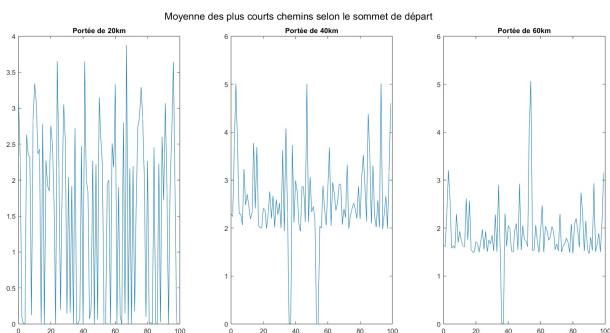
Le problème des deux représentations précédentes est qu'elle dépend du sommet que l'on choisit comme source. C'est pourquoi il peut être utile de représenter la moyenne des plus courts chemins pour tous les chemins.



(a) Essaim de faible densité



(b) Essaim de densité moyenne



(c) Essaim de densité forte

Figure 5: Moyenne des plus courts chemins

Pour les portées faibles, il y a beaucoup de moyennes nulles, correspondant aux points isolés. Pour les autres moyennes, elles sont assez élevées comme il y a moins d'arêtes. La longueur des chemins est plus grande pour une même composante connexe. Pour les portées plus grandes, les moyennes sont plus faibles car il y a beaucoup plus de liaisons entre les satellites.

4 Étude des graphes valués

Dans cette section, on ne considère plus que le cas où la portée vaut 60km. De plus, on suppose désormais qu'il y a un coût pour chaque arête correspondant au carré de la distance entre deux satellites. On ne fait pas plus d'hypothèses. Autrement dit, les graphes ne sont pas non plus orientés.

Il vient donc nécessairement que la modélisation des graphes est exactement la même que pour le cas non valué. Les degrés et degrés de clustering sont aussi les mêmes, tout comme les composantes connexes. Les seules différences se trouvent au niveau de la longueur des plus courts chemins. En effet, là où il suffisait de passer par le moins de satellites possibles, avec l'ajout de poids, il vaut parfois mieux passer par plus de satellites proches les uns des autres que d'en passer par moins de satellites éloignés les uns des autres.

La fonction *shortestpath.m* donne deux vecteurs. Le premier correspond à la valeur des plus courts chemins. Le problème est qu'en mettant un coût à nos arêtes, on modifie la valeur des plus courts chemins. On ne peut donc pas juste récupérer ce vecteur comme c'était le cas pour les graphes non-valués. On aurait des plus courts chemins dont l'ordre dépasse 10^{10} . La comparaison n'est pas pertinente. Cependant, le deuxième vecteur donne le sommet adjacent de la chaîne reliant la source à un autre sommet. On peut retracer la chaîne jusqu'à retrouver le sommet initial et obtenir le nombre d'arêtes composant le plus court chemin. C'est ce que fait la fonction *numberpath.m* que j'ai réalisé dans ce but précis.

4.1 Valeur des plus courts chemins

Table 7: Comparaison de la valeur du plus court chemin entre le graphe valué et le graphe non valué

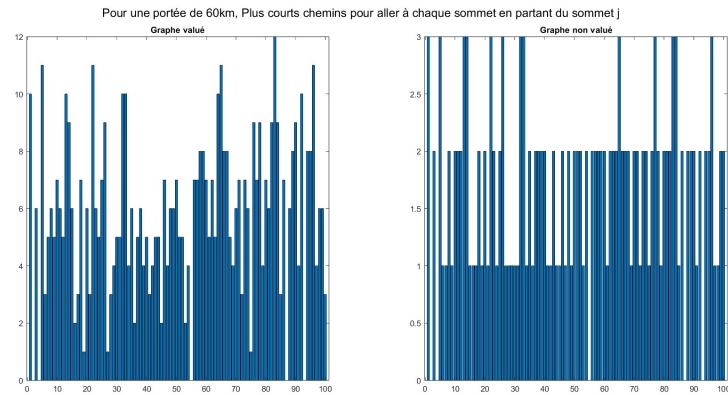


Table 7: Essaim de densité faible

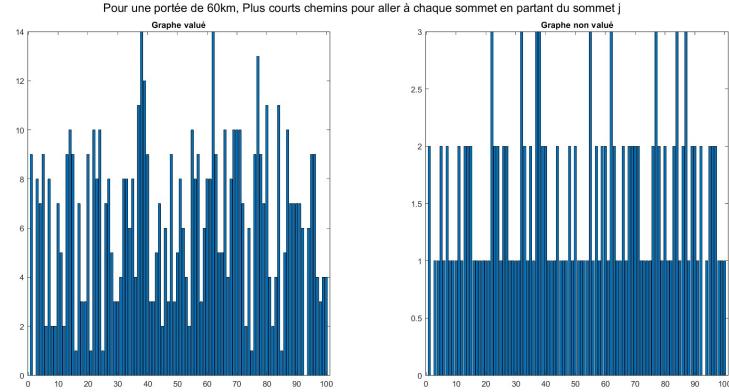


Table 7: Essaim de densité moyenne

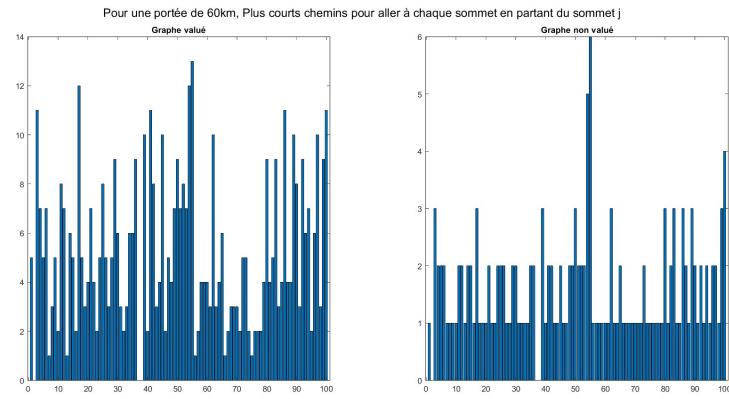


Table 7: Essaim de densité forte

La différence entre les deux graphes est assez flagrante. La longueur des plus courts chemins du graphe valué est parfois jusqu'à quatre fois plus grande que pour le graphe non-valué.

4.2 Distribution des plus courts chemins

Table 8: Comparaison de la distribution des plus courts chemins entre le graphe valué et le graphe non valué

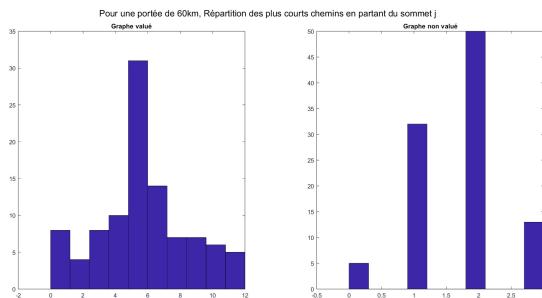


Table 8: Essaim de densité faible

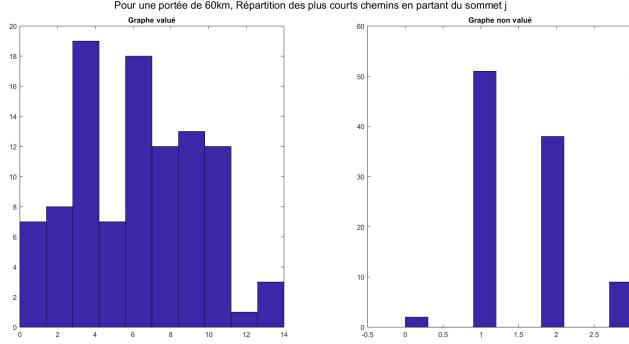


Table 8: Essaim de densité moyenne

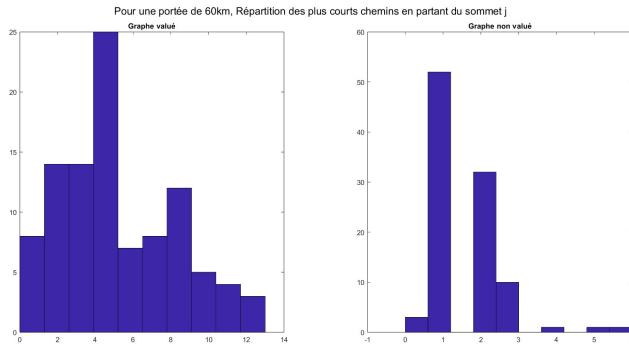


Table 8: Essaim de densité forte

Par rapport au graphe non-valué, il y a plus de valeurs de plus courts chemins possibles mais moins de sommets ayant une même valeur. Pour autant, on remarque une concentration assez importante de sommets autour de certaines valeurs. Par contre, ces valeurs restent plus grandes que les valeurs possibles pour le graphe non-valué.

4.3 Moyenne des plus courts chemins

Table 9: Comparaison de la moyenne des plus courts chemins entre le graphe valué et le graphe non valué

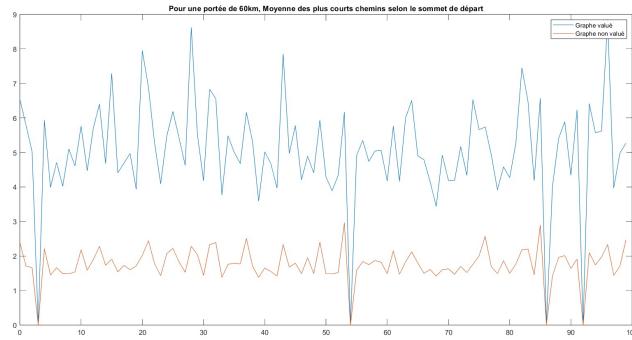


Table 9: Essaim de densité faible

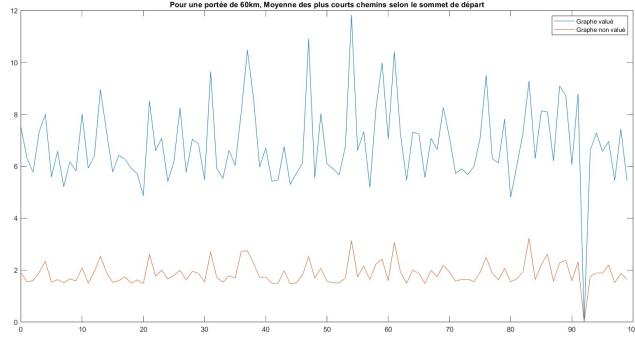


Table 9: Essaim de densité moyenne

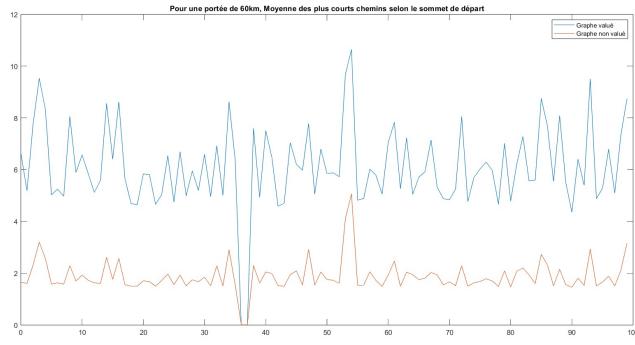


Table 9: Essaim de densité forte

La différence entre le graphe valué et non-valué est encore plus flagrante lorsque l'on compare les moyennes côté à côté. On remarque quand même des formes similaires en particulier lorsque la moyenne vaut 0. Cela reste complètement logique étant donné que les deux graphes ont les mêmes arêtes (l'un ayant un coût et l'autre non). Donc un sommet isolé l'est pour les deux graphes. S'il n'y avait pas eu cette concordance, cela aurait voulu dire qu'il y aurait eu une erreur.

5 Conclusion

Ce projet a permis de mettre en pratique les notions vues en TP. Le fait d'être libre dans le choix des outils a eu plusieurs effets positifs. Un premier effet positif est que j'ai pu mieux comprendre les fonctions et outils utilisés étant donné qu'il n'y avait pas de modèle à suivre, qu'il fallait bâtrir ce projet par soi-même et donc qu'il fallait comprendre comment fonctionnait chaque outil. Un autre effet positif est que j'ai été libre de concevoir le projet comme bon me semblait et c'est toujours agréable de voir ce qu'on fait marcher correctement.

Cependant, cette liberté a aussi un coût : on est moins guidé et il n'est pas impossible que certains aspects aient été mal traités/pas assez traités (peut-être aurais-je dû calculer le flot maximal dans la section 3 ?). Aussi, même en essayant d'être aussi concis et succinct que possible, il est difficile de tout résumer en une vidéo de 3 minutes et en un rapport de 5 pages. La faute provenant d'un nombre important de figures. Il aurait donc pu être pertinent de chercher une autre forme pour afficher les mêmes résultats.

Dans la globalité, je suis satisfait de ce projet.