

FIGURE I.3 – Principe de l'estimation stochastique bayésienne (Bayes)

On préfère établir les lois marginales

Three marginal probability distributions are shown:

- $P_{X_k|Z_{n:k}}(x_k|z_{n:k})$  (loi de FILTRAGE)
- $P_{X_k|Z_{n:k-1}}(x_k|z_{n:k-1})$ ,  $k > k$  (loi de PRÉVISION)
- $P_{X_k|Z_{n:k-1}}(x_k|z_{n:k-1}), k > k$ , loi de LISSAGE (smoothing)

Sous la hypothèse nous posons bien

$$P_{X_k|Z_{n:k}}(x_k|z_{n:k}) = \mathcal{C}(x_k; \hat{x}_{k|k}, P_{k|k}) \text{ où } \boxed{\hat{x}_{k|k}} = \mathbb{E}_{X_k|Z_{n:k}} [X_k | z_{n:k}]$$

$$P_{k|k} = \mathbb{E}_{X_k|Z_{n:k}} \left[ (X_k - \hat{x}_{k|k}) (X_k - \hat{x}_{k|k})^T \mid z_{n:k} \right]$$

$$P_{X_k|Z_{n:k-1}}(x_k|z_{n:k-1}) = \mathcal{C}(x_k; \hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) \text{ où } \boxed{\hat{x}_{k|k-1}} = \mathbb{E}_{X_k|Z_{n:k-1}} [X_k | z_{n:k-1}]$$

$$P_{k|k-1} = \mathbb{E}_{X_k|Z_{n:k-1}} \left[ (X_k - \hat{x}_{k|k-1}) (X_k - \hat{x}_{k|k-1})^T \mid z_{n:k-1} \right]$$

$$Q: X_{k+1} = F_k X_k + G_k u_k + w_k, \quad \begin{cases} X_0 \sim \mathcal{N}(m_{X_0}, P_0) \\ w_k \sim \mathcal{N}(0, Q_k) \end{cases} \text{ sont indépendants}$$

$\hookrightarrow X_k \sim \mathcal{N}(m_{X_k}, P_k)$  car on "sait" que  $X_k$  est Gaussien (parce qu'il s'agit de l'état ?)

loi a priori  $P_{X_k}(x_k) = \mathcal{N}(x_k; m_{X_k}, P_k)$

$\hookrightarrow k=0 \rightarrow m_{X_0}$  et  $P_0$  donnés

• Comment s'écrivent  $m_{X_k}$  et  $P_k$  ?  $\hookrightarrow$  si  $X_k \sim \mathcal{N}(m_{X_k}, P_k)$

alors  $X_{k+1} \sim \mathcal{N}(m_{X_{k+1}}, P_{k+1})$  avec

$$m_{X_{k+1}} = E[X_{k+1}] = E[F_k X_k + G_k u_k + w_k] = E[F_k X_k] + E[G_k u_k] + E[w_k]$$

$$\Leftrightarrow m_{X_{k+1}} = F_k m_{X_k} + G_k u_k$$

$$P_{k+1} = E[(X_{k+1} - m_{X_{k+1}})(\cdot)^T] = E[(F_k(x_k - m_{X_k}) + (G_k u_k - G_k m_{X_k}) + w_k)((x_k - m_{X_k})^T F_k^T + 0 + u_k^T)]$$

$$\Leftrightarrow P_{k+1} = E[F_k(x_k - m_{X_k})(x_k - m_{X_k})^T F_k^T] + E[w_k w_k^T] + E[F_k(x_k - m_{X_k}) w_k^T] + E[w_k (x_k - m_{X_k})^T F_k^T]$$

$$\Leftrightarrow P_{k+1} = E[F_k(x_k - m_{X_k})(x_k - m_{X_k})^T F_k^T] + E[w_k w_k^T] + E[F_k(x_k - m_{X_k}) w_k^T] + E[w_k (x_k - m_{X_k})^T F_k^T]$$

$$\Leftrightarrow P_{k+1} = F_k E[(x_k - m_{X_k})(x_k - m_{X_k})^T] F_k^T + E[w_k w_k^T] + F_k E[(x_k - m_{X_k}) w_k^T] + E[w_k (x_k - m_{X_k})^T] F_k^T$$

$$\Leftrightarrow P_{k+1} = F_k P_k F_k^T + Q_k \quad \stackrel{\text{car } X_k \text{ et } w_k \text{ sont indépendants}}{=} \quad \stackrel{\text{car } X_k \text{ et } w_k \text{ sont indépendants}}{=}$$

$$\Leftrightarrow P_{k+1} = F_k P_k F_k^T + Q_k$$

+ Notons que  $X_k$  et  $w_k$  sont mutuellement indépendants afin de démontrer que  $E[(x_k - m_{X_k})(w_k - 0)^T] = 0$

$$\rightarrow X_0; X_1 = F_0 X_0 + G_0 u_0 + w_0 = \phi_0(x_0, w_0), \quad \phi_0 \text{ linéaire et cesse de dépendre de } w_0; \quad X_2 = F_1 X_1 + G_1 u_1 + w_1 = \phi_1(\phi_0(x_0, w_0), w_1) \quad \rightarrow X_2 = \psi_1(x_0, w_0, w_1), \quad \psi_1 \text{ linéaire et cesse de dépendre de } w_1$$

...  $X_k = \psi_{k-1}(x_0, w_0, w_1, \dots, w_{k-1})$  et  $w_k$  sont-ils mutuellement indépendants ?  
oui par hypothèse

$m_{X_0}, P_0$  donnés  
 $m_{X_k} = F_k m_{X_{k-1}}$   
 $P_{k+1} = F_k P_k F_k^T + Q_k$

• On a donc conclu que la loi a priori de  $X_k$  codée,  $P_{X_k}(x_k)$  est Gaussienne avec  $P_{X_k}(x_k) = \mathcal{N}(x_k; m_{X_k}, P_k)$  et à ne pas confondre avec la loi de filtrage (a posteriori)  $P_{X_k|Z_{1:k}}(x_k | z_{1:k})$  qui s'écrit  $\mathcal{N}(x_k; \hat{x}_{k|k}, P_{k|k})$  donné par Kalman

$$\rightarrow m_{z_k} = E[z_k] = E[H_k X_k + v_k] = H_k m_{X_k} + 0 = H_k m_{X_k}$$

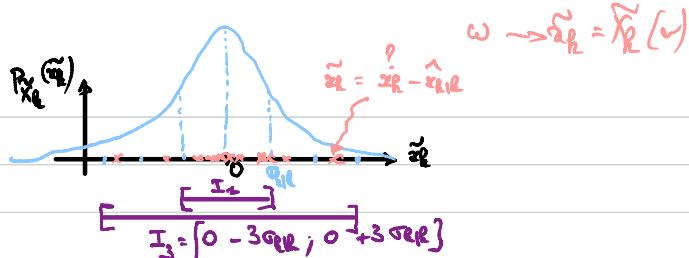
$$\rightarrow z_k = H_k X_k + v_k \quad \left\{ \begin{array}{l} H_k E[(x_k - m_{X_k})(x_k - m_{X_k})^T] H_k^T + E[v_k v_k^T] \\ S_k = E[(z_k - m_{z_k})(\cdot)^T] = E[(H_k(x_k - m_{X_k}) + v_k)((x_k - m_{X_k})^T H_k^T + v_k^T)] = + H_k E[(x_k - m_{X_k}) v_k^T] + E[v_k (x_k - m_{X_k})^T] H_k^T \end{array} \right.$$

$\text{Où } x_k = \psi_{k-1}(x_0, w_0, \dots, w_{k-1})$

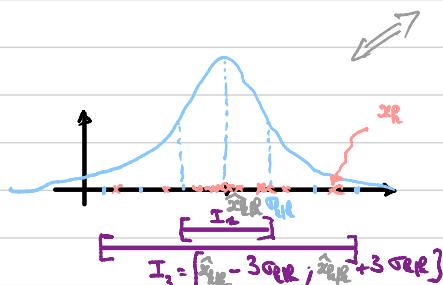
et  $v_k$  sont mutuellement indépendants

Comment exploiter  $\tilde{X}_k \sim \mathcal{N}(0, P_{k|k})$  ?

$$x_k, \hat{x}_{k|k} \in \mathbb{R}; P_{k|k} = \sigma_{k|k}^2$$



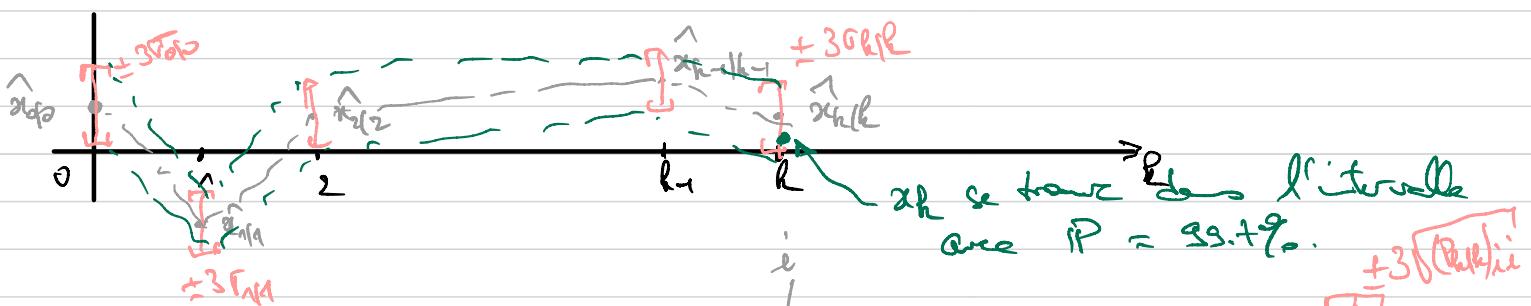
$$P(\tilde{X}_k \in I_3) = 99.7\%$$



$$P(\tilde{x}_k \in I_3) = 99.7\%$$

On définit autour de l'estimateur  $\hat{x}_{k|k}$  un ensemble de confiance  $[\hat{x}_{k|k} - \alpha \sigma_{k|k}; \hat{x}_{k|k} + \alpha \sigma_{k|k}]$  dans lequel on connaît que  $x_k$  calculé se trouve avec une proba  $P_k$  (d'autant plus grande que  $\alpha$ )

$$P(x_k \in I_3) = 99.7\%$$



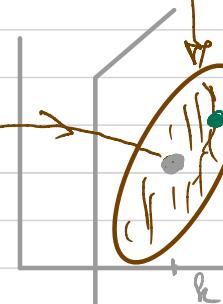
$$\text{et } x_k, \hat{x}_{k|k} \in \mathbb{R}^N, P_{k|k} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{X}_k \sim \mathcal{N}(0, P_{k|k}) \Rightarrow (\tilde{X}_k)_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2) \text{ où } \sigma_i^2 = (P_{k|k})_{ii}$$

on bien déduire des ensembles de confiance [ellipses 2D ou ellipsoïdes 3D] pour des sous-vecteurs de  $X_k$  calculé

$$x_k = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} = ?$$

$$\hat{x}_{k|k} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}$$



$$x_k \text{ se trouve dans } E_k = \{x : (x - \hat{x}_{k|k})^T ((P_{k|k})^{-1}) (x - \hat{x}_{k|k}) \leq \gamma\}$$

avec une proba  $P_k$   
[cf pour le np: n=2,  $P_k = 99\%$ ,  $\gamma = 9.21$ ]

\* Il est bien évident que la taille des ensembles de confiance (l'incertitude capturée par  $P_{k|k}$ ) est d'autant plus  $P$  que  $P_{k|k}$  ou  $P_{k|k}$  ou  $P_{k|k}$

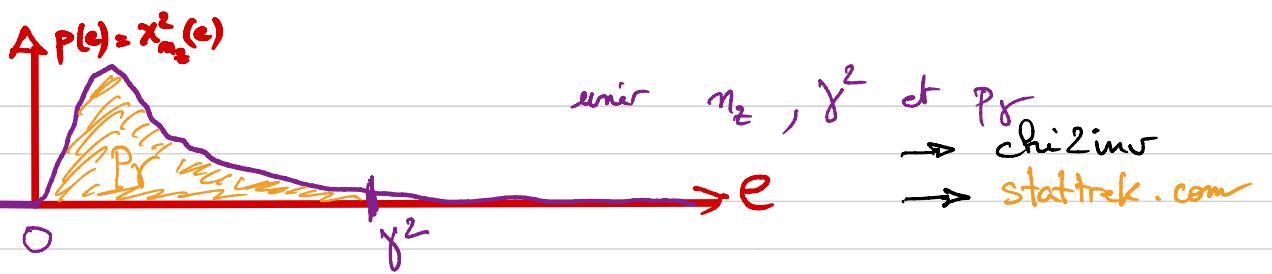
à Comment exploiter  $\Gamma_k$  blanc et  $\Gamma_k \sim \mathcal{N}(0, S_{k|k})$  où  $\Gamma_k = z_k - \hat{x}_{k|k}$ ? [not:  $\hat{x}_{k|k}$  ET  $z_k$  sont disponibles!]

→ autour de  $\hat{x}_{k|k}$ , ou autour de  $(\hat{x}_{k|k})_i$ , tracer un intervalle ( $\Delta$ ) ou un ellipsoïde de confiance basé sur  $S_{k|k}$ , ou  $(S_{k|k})_i$ , puis vérifier que  $z_k$  s'y trouve

→ ou alors: exploiter le fait que  $z_k \sim \mathcal{N}(\bar{y}, P_z)$   $\Rightarrow (\bar{y} - \bar{y})^T P_z^{-1} (\bar{y} - \bar{y}) \sim \chi_{n_z}^2 \Rightarrow \Gamma_k^T S_{k|k}^{-1} \Gamma_k \sim \chi_{n_z}^2$  somme des carrés de  $n_z$ .  
Note: tester que  $y_k = z_k - \hat{x}_{k|k}$  se trouve dans  $E_k = \{c : (c - \bar{y})^T S_{k|k}^{-1} (c - \bar{y}) \leq \gamma\}$  avec une proba  $P_k$  donnée

est équivalent à tester que  $\bar{y}^T S_{k|k}^{-1} \bar{y} \in [0, \gamma^2]$  avec la proba  $P_k$ , où  $\bar{y}^T S_{k|k}^{-1} \bar{y}$ , inversion quadratique normalisée,  $\sim \chi_{n_z}^2$

→ le lien qui unit le seuil  $\gamma^2$  à  $P_k$  s'obtient à partir des cours de la loi  $\chi_{n_z}^2$



enir  $m_2$ ,  $y^2$  et  $P_\gamma$   
 → chi2inv  
 → statstrek.com

→ NOTA: il peut être intéressant de tester l'innovation quadratique normalisée sur une fenêtre glissante de taille  $h$  (p.e. pour éviter des fausses alertes intemporelles)  $\rightarrow \sum_{k=0}^{L-1} [Y_{k,1} S_{k+L,1,1} Y_{k,1}] \sim \chi^2_{L m_2}$  en vertu de la blancheur de  $S_{k+L,1,1} S_{k+L,1,1}^\top$ .  
 ↳ il est donc facile de déterminer le seuil pour le test.

→ UTILITÉ? rejett de fausses mesures ; "gating" pour l'association de données; TUNING