

# Introduction aux processus stochastiques

## Projet 1 : Analyse de la propagation d'un virus au sein d'un réseau

Maxime GOFFART  
180521

Olivier JORIS  
182113

Année académique 2019 - 2020

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Structure du programme</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Étude du modèle exact</b>	<b>4</b>
3.1	Question 1 . . . . .	4
3.2	Question 2 . . . . .	4
3.3	Question 3 . . . . .	4
3.3.1	Avec la matrice $W_{lin}$ . . . . .	5
3.3.2	Avec la matrice $W_{full}$ . . . . .	5
3.4	Question 4 . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Étude sur base de simulations</b>	<b>7</b>
4.1	Question 1 . . . . .	7
4.2	Question 2 . . . . .	7
4.3	Question 3 . . . . .	9
4.4	Question 4 . . . . .	10
4.4.1	Comparaison des différentes mesures . . . . .	14

# 1 Introduction

Les processus stochastiques permettent d'étudier des phénomènes aléatoires dans divers secteurs : l'économie, la climatologie, la météorologie, la biologie, . . . .

Dans ce projet, il nous a été demandé d'étudier, en particulier, un phénomène d'actualité : la propagation d'un virus au sein d'un réseau, pouvant être modélisée à l'aide d'une chaîne de Markov. Ainsi, ce projet nous a permis d'appliquer les concepts vus au cours sur un exemple concret et d'actualité.

## 2 Structure du programme

Nous avons décidé de réaliser le projet en Python après comparaison des avantages et inconvénients des différents langages proposés. Notre code source se compose des fichiers suivants<sup>1</sup> :

- `exact_model.py` : module principal pour l'étude du modèle exact à l'aide de la matrice de transition (section 1 de l'énoncé).
- `simulations_study.py` : module principal pour l'étude sur base de simulations (section 2 de l'énoncé).
- `virus_spread_model.py` : module lié à la propagation du virus au sein de la population.
- `file_management.py` : module qui permet de charger la matrice d'adjacence du graphe  $W$  sous forme dense.
- `graphics_generator.py` : module qui permet d'afficher le graphique des proportions des individus.
- `states_manipulator.py` : module qui permet de manipuler les états d'une chaîne de Markov.
- `transition_matrix.py` : module qui permet de manipuler la matrice de transition d'une chaîne de Markov.

Nous avons utilisé différentes bibliothèques externes<sup>2</sup>. En voici la liste :

- `Random` pour la génération de nombres pseudo-aléatoires.
- `Numpy` pour le produit matriciel, la puissance de matrices et la résolution de systèmes d'équations.
- `Matplotlib` pour l'affichage des graphiques.

---

1. Chaque méthode est décrite dans le module dans lequel elle est définie.

2. Aucune n'est spécifique aux chaînes de Markov comme mentionné sur eCampus.

## 3 Étude du modèle exact

### 3.1 Question 1

Le modèle proposé dans l'énoncé est bien un processus de Markov en temps discret caractérisé par ses  $3^N$  états<sup>3</sup>. Les états de cette chaîne sont caractérisés par la suite de longueur  $N$  des catégories<sup>4</sup> auxquelles appartiennent les individus<sup>5</sup> à l'instant  $t$ . Par exemple : pour  $N = 3$ , l'état "'S' 'I' 'I'" représente le fait que le premier individu est susceptible d'être infecté et que les deux derniers sont infectés.

Les probabilités de transitions d'un état à un potentiel état de l'instant suivant de la chaîne dépendent à la fois de chacune des catégories des individus à l'instant initial et de leurs interactions avec des personnes infectées<sup>6</sup>.

Les états de cette chaîne, qui sont uniquement composés d'individus de la catégorie 'R' ou<sup>7</sup> de la catégorie 'S', sont absorbants car la propagation du virus n'est plus possible s'il n'y a plus d'infecté. Il en va de même pour les états dans lesquels les infectés n'ont de contact avec personne<sup>8</sup>. Cette chaîne n'est donc ni irréductible, ni régulière, ni périodique.

### 3.2 Question 2

Soit  $X$  une variable aléatoire, qui suit une distribution géométrique, représentant le temps de guérison d'un individu une fois qu'il a été infecté. On a :

$$X \sim \mathcal{G}(\mu)$$

avec  $\mu$  la probabilité de guérison.

Le temps moyen nécessaire à un individu pour guérir une fois qu'il a été infecté est donné par l'espérance de  $X$ . On a :

$$E(X) = \frac{1}{\mu}$$

### 3.3 Question 3

Pour répondre à cette question, le programme peut-être lancé à l'aide de la commande suivante :

```
1 $ python3 exact_model.py populationSize fileName
```

où la première option spécifie la taille de la matrice  $W$  utilisée et la deuxième représente le nom du fichier dans lequel cette matrice est encodée.

---

3.  $N$  étant la taille de la population.

4. S, R ou I.

5. Les individus étant indexés de 1 à  $N$ .

6. Modélisées par le graphe  $W$ .

7. Il s'agit d'un "ou" inclusif.

8. Cela correspond à une ligne remplie de 0 dans le graphe  $W$ .

### 3.3.1 Avec la matrice $W_{lin}$

Ainsi, en lançant le programme avec cette commande :

```
$ python3 exact_model.py 6 6x6_lin.txt
```

On obtient ce graphique répondant à la première partie de la question avec les paramètres  $\mu$  et  $\beta$  fixés aux valeurs suggérées :

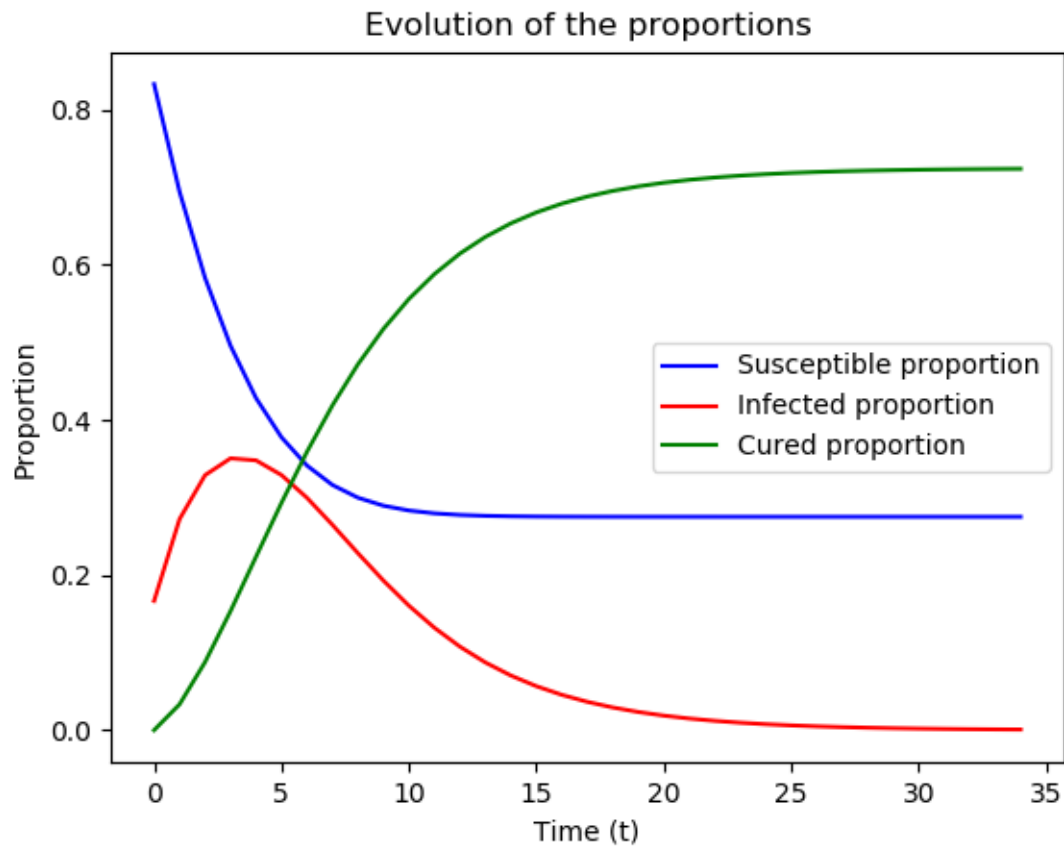


FIGURE 1 – Évolution des proportions d’individus, dont les relations sont modélisées par la matrice  $W_{lin}$ , dans chacune des catégories au cours du temps.

Sur la figure 1, on observe le fait que la proportion d’individus infectés est décroissante après une partie croissante jusque  $t = 3$ . En effet, les individus ayant peu de contacts les uns avec les autres, la probabilité qu’un individu soit infecté est faible.

De plus, les individus initialement infectés finissent par guérir. On observe, également, qu’une partie de la population reste "susceptible" d’obtenir le virus : elle ne l’a jamais contracté car les relations entre les individus sont limitées.

### 3.3.2 Avec la matrice $W_{full}$

De la même façon en lançant le programme à l’aide de cette commande :

```
1 $ python3 exact_model.py 6 6x6_full.txt
```

On obtient ce graphique répondant à la deuxième partie de la question avec les paramètres  $\mu$  et  $\beta$  fixés aux valeurs suggérées :

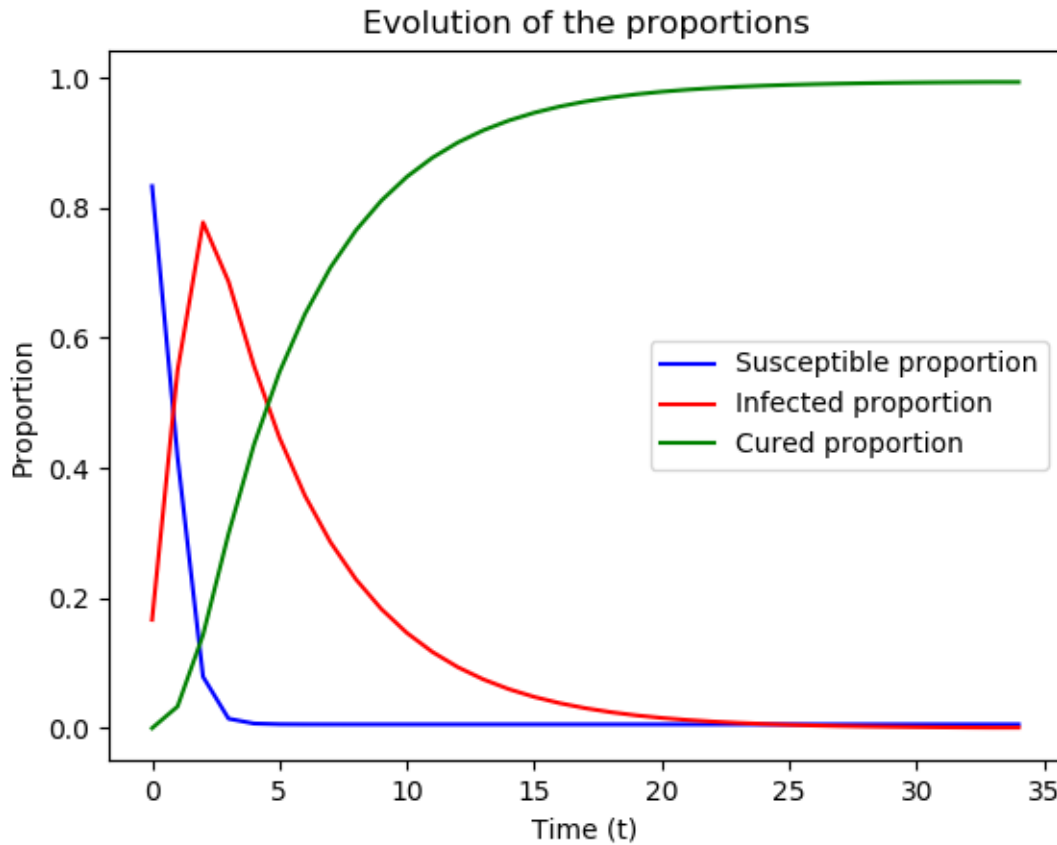


FIGURE 2 – Évolution des proportions d’individus, dont les relations sont modélisées par la matrice  $W_{full}$ , dans chacune des catégories au cours du temps

Sur la figure 2, on observe, à l’inverse de la situation précédente, que la population connaît un nombre important d’infectés et ce très rapidement car les gens sont tous en contact. On observe un pic en  $t = 2$  avec une proportion de  $\pm 77\%$  d’infectés.

Au temps  $t = 4$ , on peut voir que la proportion d’individus susceptibles est très proche de 0, c’est-à-dire que presque toute la population a été infectée à un instant inférieur ou égal à celui-ci. En effet, les individus ayant tous des contacts les uns avec les autres, le virus ne fait que se propager au sein de la population jusqu’à ce que celle-ci soit entièrement infectée.

### 3.4 Question 4

Calculer le temps moyen nécessaire à la disparition totale du virus revient à calculer le temps moyen avant d'être dans un état absorbant.

Lors de l'exécution des deux précédentes commandes, le programme nous retourne également le temps moyen nécessaire à la disparition du virus dans la population. Nous avons obtenu 11,6860 unités de temps dans le cas où les contacts entre les gens sont limités (modélisés par la matrice  $W_{lin}$ ) et 12,8183 unités de temps dans l'autre cas (celui qui utilise la matrice  $W_{full}$ ).

On observe que le premier modèle, celui dont la matrice d'adjacence est  $W_{lin}$ , nécessite un temps inférieur au second avant d'atteindre une situation stable. Ceci s'explique par le fait que le virus se répand moins rapidement<sup>9</sup>. Donc, les gens qui sont infectés transmettent le virus à moins d'individus et la proportion de personnes infectées est plus rapidement sous contrôle. Comme mentionné précédemment, une partie de la population n'est pas infectée par le virus. Il n'est donc pas nécessaire de les soigner, ce qui permet de gagner du temps.

A l'inverse, dans le deuxième cas, celui dont la matrice d'adjacence est  $W_{full}$ , le temps moyen avant la disparition du virus est plus long car une grande majorité de la population est rapidement atteinte. Le seul moyen d'arriver à une situation "stable" est de soigner tout le monde. Dans le cas de la question 3, la probabilité d'être guéri est donnée par  $\mu = 0,2$ . Le temps nécessaire pour avoir une population entièrement guérie est long.

## 4 Étude sur base de simulations

### 4.1 Question 1

L'hypothèse d'indépendance posée par les auteurs de l'article n'est, en général, pas vérifiée car la probabilité qu'un individu se trouve dans un état à un instant  $t$  dépend en partie de son interaction avec les autres personnes de la population et de l'état de celles-ci à un instant précédent. Ainsi, si un individu, dans un état *susceptible*, a des contacts avec des individus dans un état *infectieux* alors, son état à un instant  $t' > t$  sera impacté par ces derniers. L'indépendance n'est donc vérifiée que dans le cas où un individu n'a de contact avec personne.

### 4.2 Question 2

Pour répondre à cette question, le programme peut-être lancé à l'aide de la commande suivante :

```
1 $ python3 simulations_study.py populationSize fileName
```

où la première option spécifie la taille de la matrice  $W$  utilisée et la deuxième option correspond au nom du fichier dans lequel cette matrice est encodée.

---

9. Car les gens sont moins en contact les uns avec les autres.

Ainsi, en lançant le programme avec cette commande :

```
$ python3 simulations_study.py 6 6x6_lin.txt
```

Le programme demande à l'utilisateur les paramètres que celui-ci souhaite utiliser pour les simulations. On choisit ainsi les valeurs suggérées dans l'énoncé. Ensuite, le script retourne le graphique de la figure 3 ainsi que le temps moyen de disparition des individus infectieux y correspondant à savoir 11,6731 unités de temps. On observe ainsi que l'étude sur base du modèle exact et celle sur base de simulations se ressemblent dans le cas où la matrice d'adjacence correspond à  $W_{lin}$ . Les différences observées peuvent être justifiées par le fait que les simulations n'utilisent pas la matrice de transition. Donc, la précision est plus faible par rapport au modèle exact.

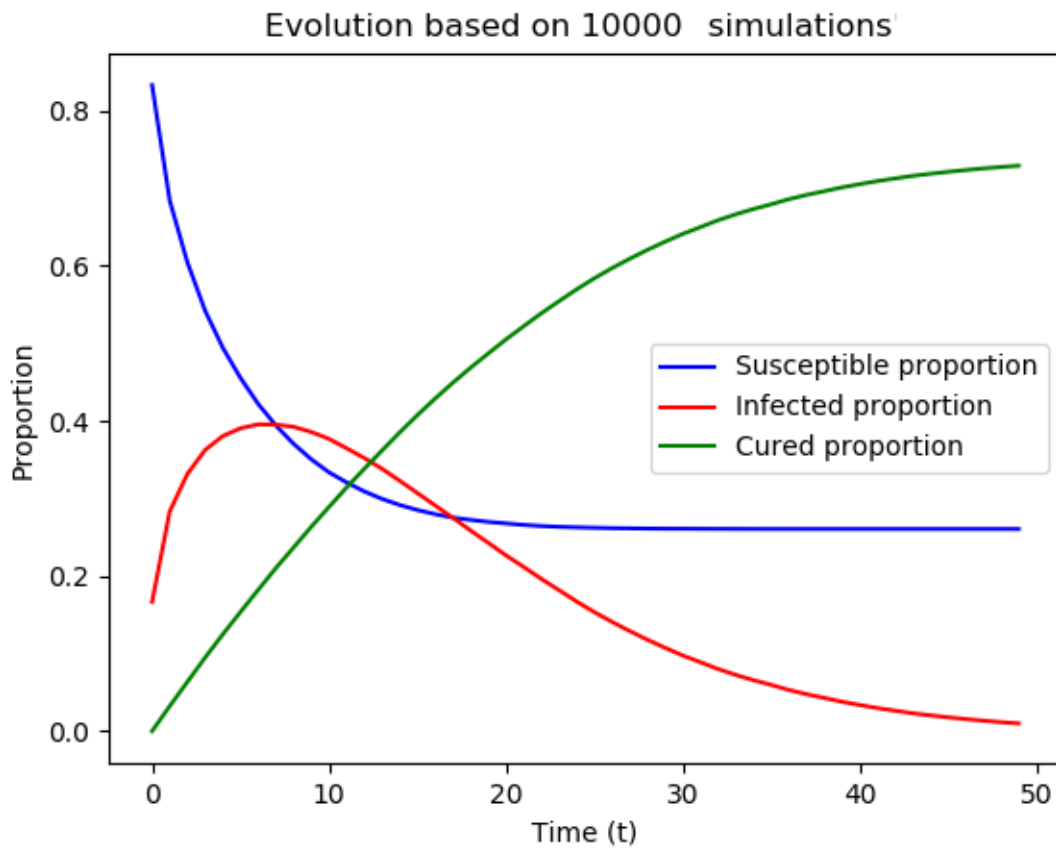


FIGURE 3 – Évolution des proportions d'individus, dont les relations sont modélisées par la matrice  $W_{lin}$  avec 6 individus, dans chacune des catégories au cours du temps

De la même façon en lançant le programme à l'aide de cette commande<sup>10</sup> :

```
$ python3 simulations_study.py 6 6x6_full.txt
```

10. Et en choisissant les paramètres suggérés dans l'énoncé.



On obtient le graphique de la figure 4 ainsi que le temps moyen de disparition des individus infectieux y correspondant à savoir 13,258 unités de temps. On observe que l'étude sur base du modèle exact et celle sur base de simulations se ressemblent également dans ce cas de figure<sup>11</sup>. On peut donc penser que cette simulation approxime de manière satisfaisante la réalité et permettrait ainsi de modéliser le même modèle avec une population plus nombreuse<sup>12</sup>.

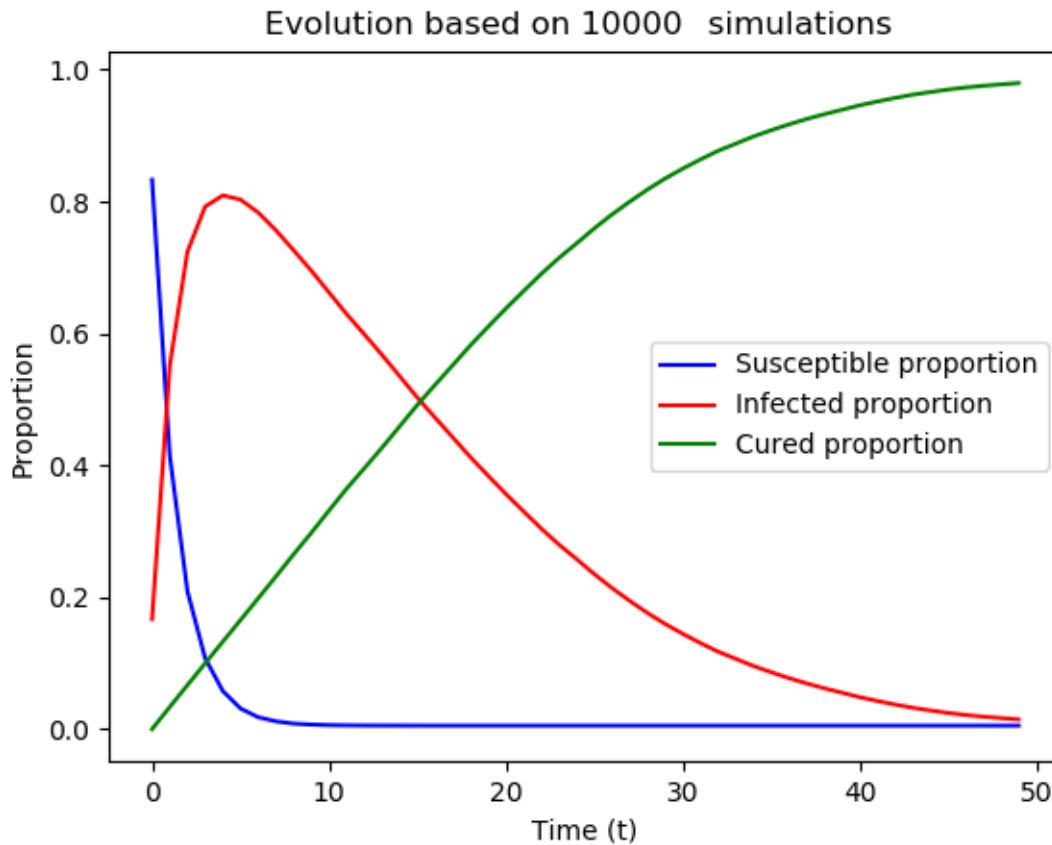


FIGURE 4 – Évolution des proportions d'individus, dont les relations sont modélisées par la matrice  $W_{full}$  avec 6 individus, dans chacune des catégories au cours du temps

### 4.3 Question 3

En lançant le programme à l'aide de la commande suivante<sup>13</sup> :

```
$ python3 simulations_study.py 2000 Wbig_dense.txt
```

11. Comme précédemment, les différences peuvent s'expliquer par le fait que les simulations n'utilisent pas la matrice de transition. Donc, la précision est plus faible.

12. En prenant un nombre de simulations suffisamment grand pour que les calculs soient stables.

13. En choisissant un nombre suffisant de simulations pour avoir des résultats stables.

Le programme retourne le graphique de la figure 5 ainsi que le temps moyen de disparition des individus infectieux y correspondant qui est de 44,652 unités de temps avec les probabilités  $\beta$  et  $\mu$  fixées aux valeurs suggérées.

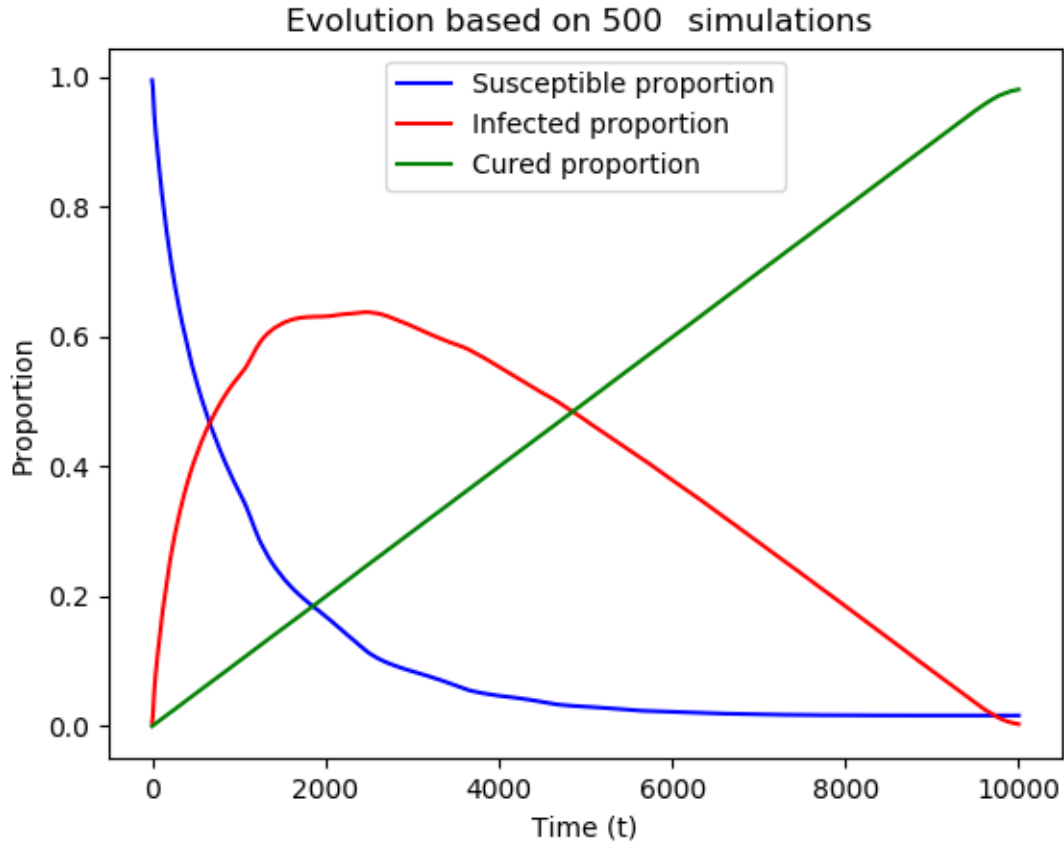


FIGURE 5 – Évolution des proportions d’individus, dont les relations sont modélisées par la matrice  $W_{big}$  avec 2000 individus, dans chacune des catégories au cours du temps

#### 4.4 Question 4

Si le graphique de la figure 5 représente l’évolution de l’épidémie dans le cas où aucune mesure n’est prise, étudions l’impact des mesures suivantes :

(a) Réduire la probabilité de transmission de la maladie via différents moyens revient à diminuer la probabilité de contamination  $\beta$ . Ainsi, en réduisant la probabilité  $\beta$  à 0.2, on obtient le graphique de la figure 6 qui permet de visualiser que cette mesure permet d’avoir une proportion de la population qui n’est pas infectée par le virus. De plus, le temps moyen de disparition de ce dernier est de 48,92 unités de temps.

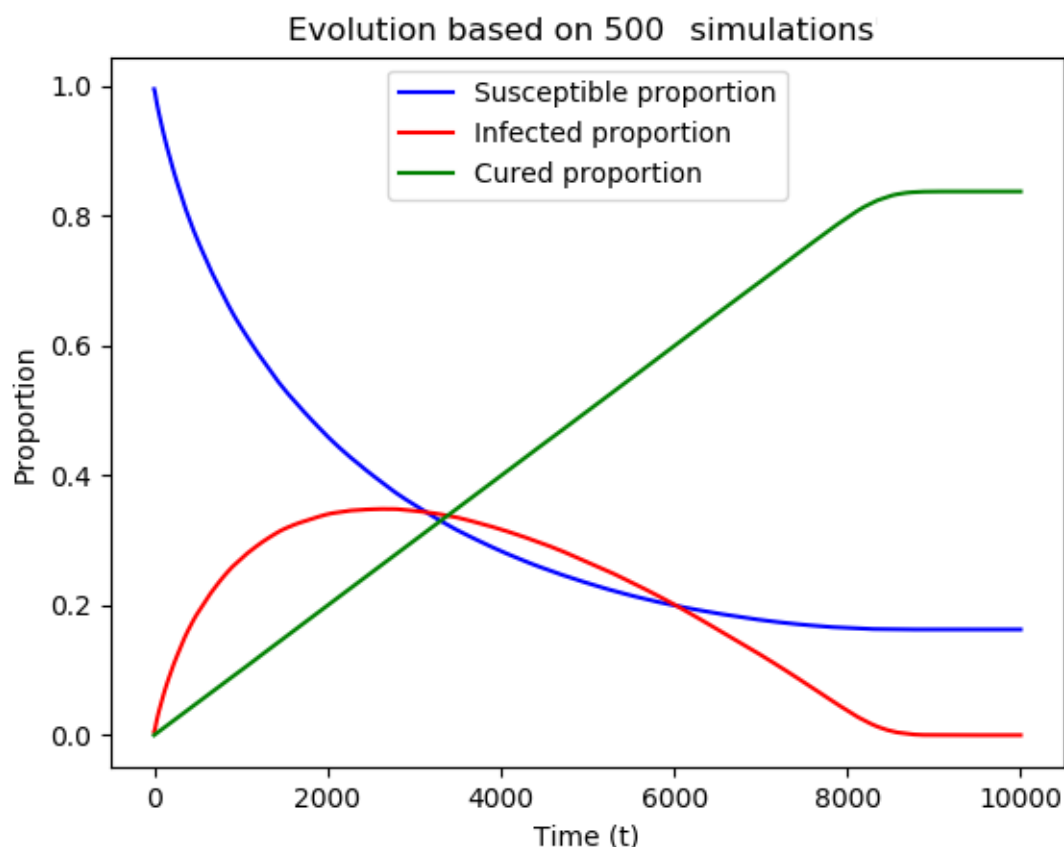


FIGURE 6 – Évolution des proportions d’individus, dont les relations sont modélisées par la matrice  $W_{big}$ , dans chacune des catégories au cours du temps avec une probabilité de transmission de la maladie réduite :  $\beta = 0.2$

(b) Réduire les interactions entre les individus revient à diminuer le nombre de 1 dans la matrice  $W_{big}$ . En imposant un maximum d’interactions égal à 6 par personne par rapport à la matrice initiale, on obtient le graphique de la figure 7 montrant que cette mesure permet également d’accélérer le temps moyen nécessaire à la disparition du virus qui vaut 44,94 unités de temps dans ce cas. Cette mesure permet également de réduire la proportion d’infectés.

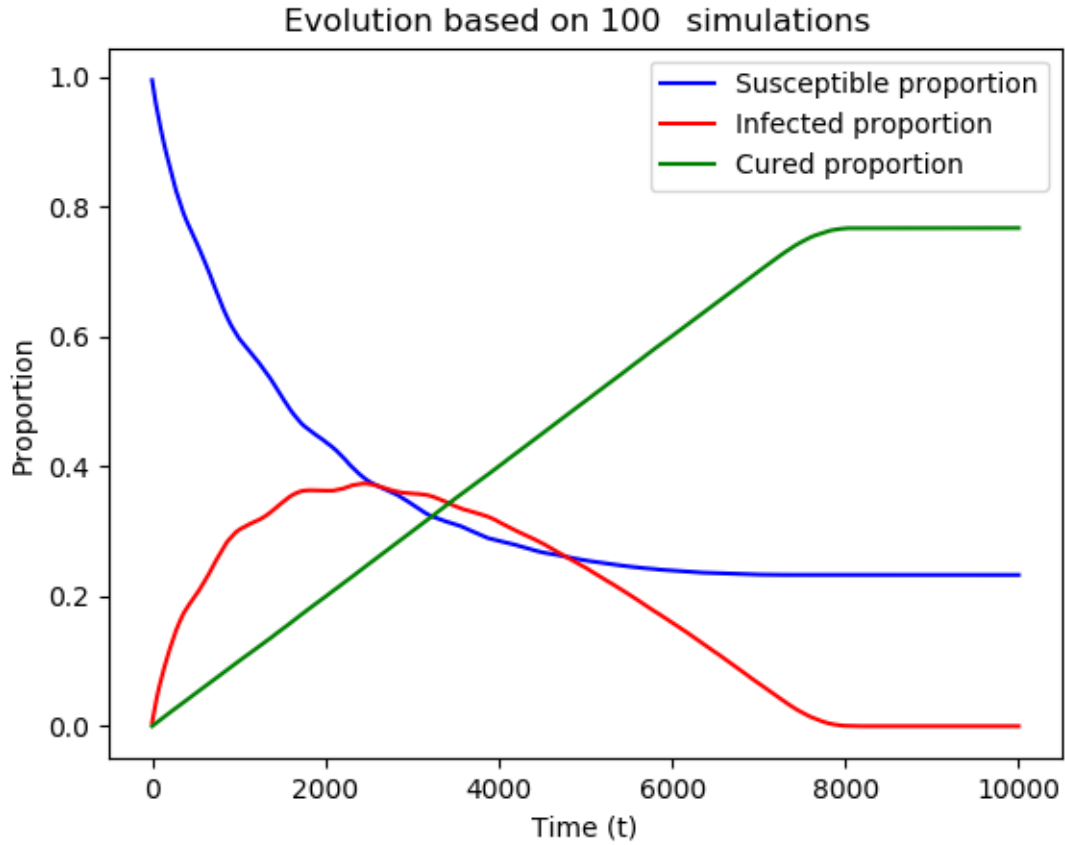


FIGURE 7 – Évolution des proportions d’individus, dont les relations sont modélisées par la matrice  $W_{big}$ , dans chacune des catégories au cours du temps avec des mesures de confinement prises telles qu’une personne a au maximum 6 interactions physiques avec d’autres personnes

(c) Vacciner un certain pourcentage de la population correspond à ajouter cette proportion d’individus dans l’état ‘R’ à l’instant  $t = 0$ . Le graphique de la figure 8 représente la situation où 30% de la population est vaccinée. Celui-ci permet également d’avoir une proportion d’individus qui n’est jamais infectée et de réduire le temps moyen de disparition du virus qui vaut 43,42 unités de temps.

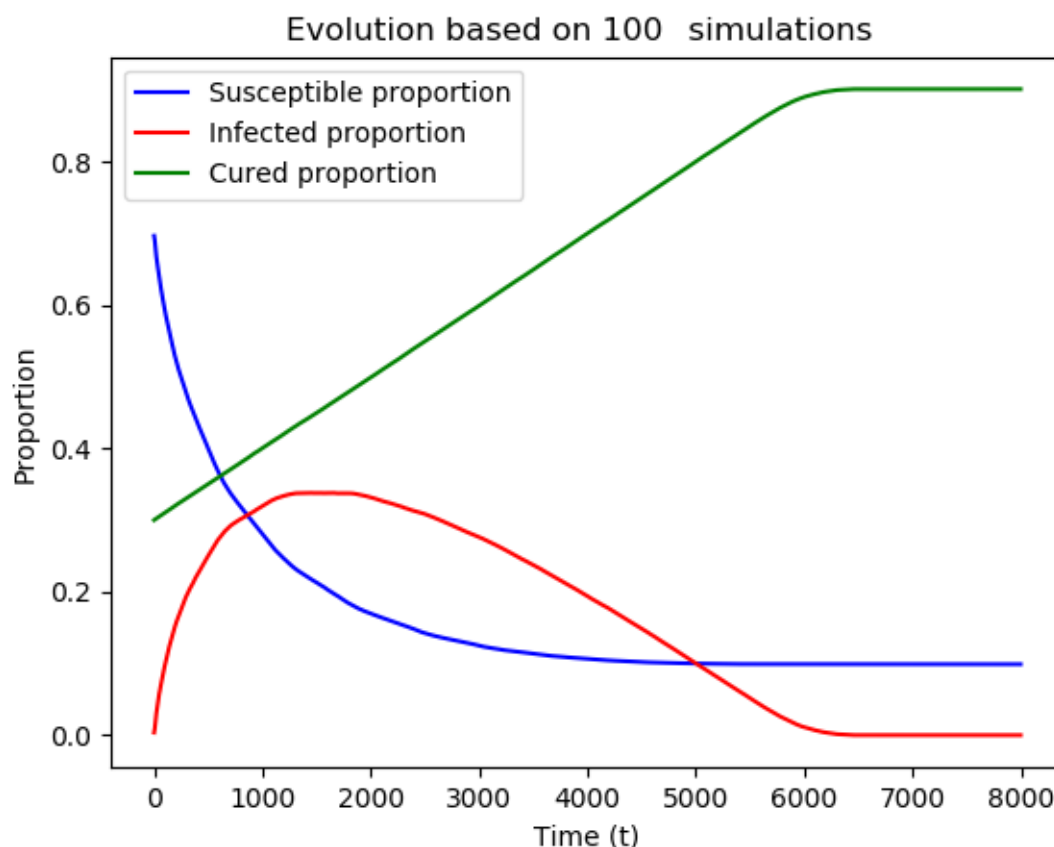


FIGURE 8 – Évolution des proportions d’individus, dont les relations sont modélisées par la matrice  $W_{big}$ , dans chacune des catégories au cours du temps avec une proportion de 30% d’individus vaccinés

(d) Traiter les patients avec un médicament qui permettrait d’accélérer la guérison revient à augmenter la probabilité de guérison  $\mu$ . En augmentant la probabilité de guérison à 0.5, on voit sur la figure 9 que la principale amélioration est le temps moyen nécessaire à la disparition du virus qui vaut 21,08 unités de temps. On remarque également qu’une proportion d’individus ne se fait pas infecter.

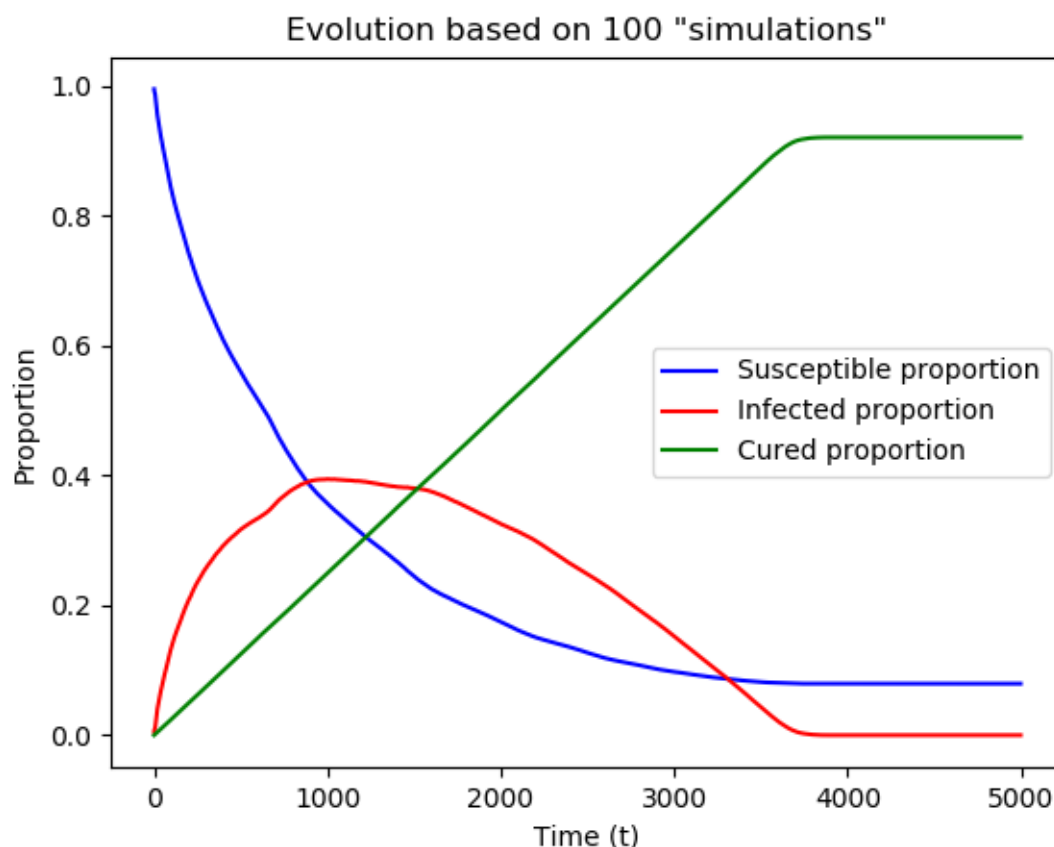


FIGURE 9 – Évolution des proportions d’individus, dont les relations sont modélisées par la matrice  $W_{big}$ , dans chacune des catégories au cours du temps avec une accélération de guérison :  $\mu = 0.5$

#### 4.4.1 Comparaison des différentes mesures

Si on fixe un nombre de lits disponibles pour une hospitalisation à 13, soit 6,5 lits pour 1000 habitants<sup>14</sup> et que l’on suppose que 5% des personnes infectées ont besoin d’être hospitalisées, cela revient ainsi à veiller à avoir une proportion d’infectés ne dépassant pas  $\frac{13}{2000 \times 0,05} = 0.13$ . Voici les valeurs minimales des différentes mesures à prendre :

(a) Pour cette mesure, il faut arriver à réduire la probabilité de transmission à 0.09. Dans ce cas on obtient le graphique de la figure 10.

14. Source : [https://www.indexmundi.com/fr/belgique/lits\\_d\\_hopitaux\\_par\\_habitant.html](https://www.indexmundi.com/fr/belgique/lits_d_hopitaux_par_habitant.html).

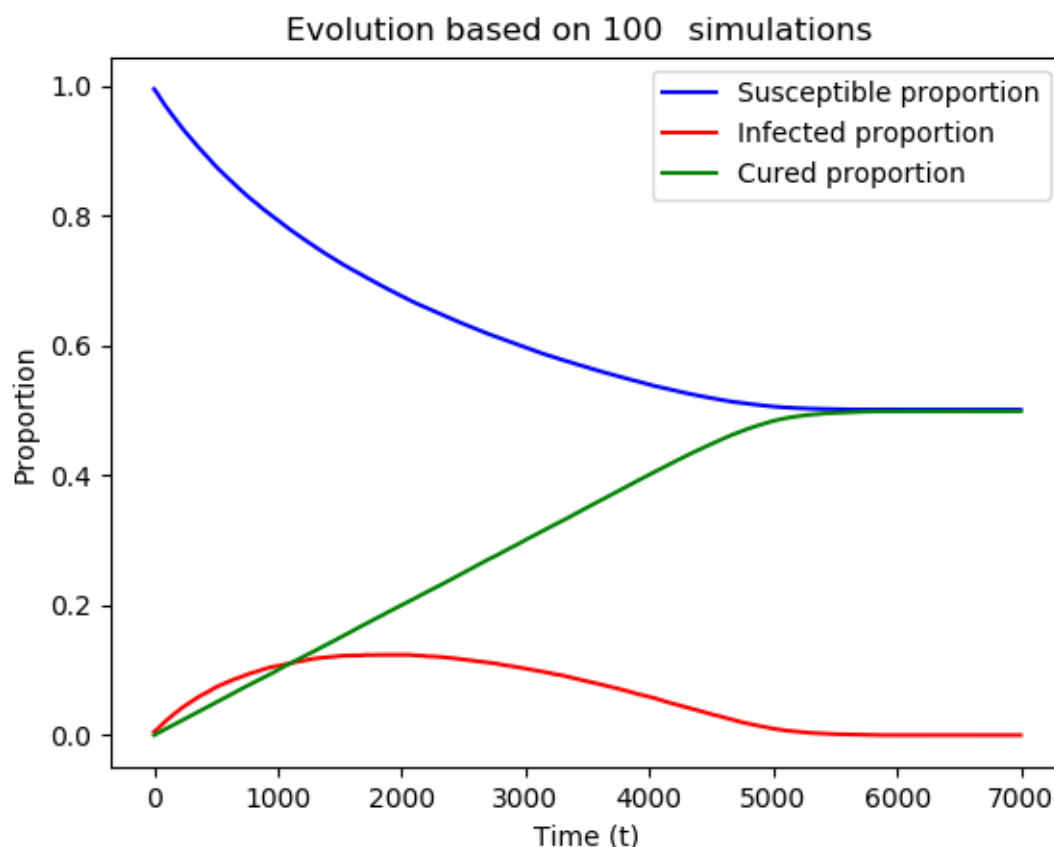


FIGURE 10 – Évolution des proportions d’individus, dont les relations sont modélisées par la matrice  $W_{big}$ , dans chacune des catégories au cours du temps avec une probabilité de transmission de la maladie réduite :  $\beta = 0.09$

(b) Il faut ici réduire les contacts entre individus de façon à avoir maximum 3 contacts par individu<sup>15</sup>. Le résultat correspondant est représenté sur le graphique de la figure 11.

---

15. En partant de la matrice  $W$  initiale ; c’est-à-dire que si une personne avait moins de 3 interactions, de nouvelles relations ne sont pas créées.

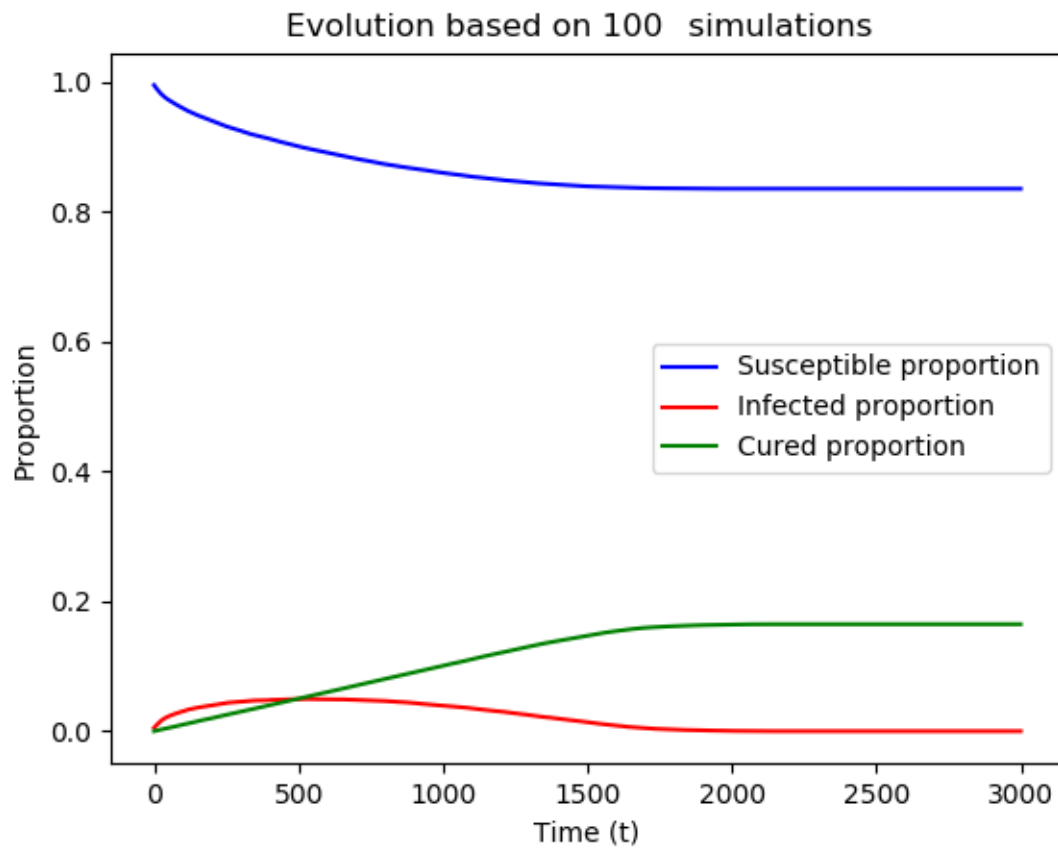


FIGURE 11 – Évolution des proportions d’individus, dont les relations sont modélisées par la matrice  $W_{big}$ , dans chacune des catégories au cours du temps avec des mesures de confinement prises telles qu’une personne a au maximum 3 interactions physiques avec d’autres personnes

(c) Il faut qu’initialement environ 55% de la population soit vaccinée pour respecter la limite de lits d’hôpitaux disponibles, le graphique de la figure 12 représente cette situation.



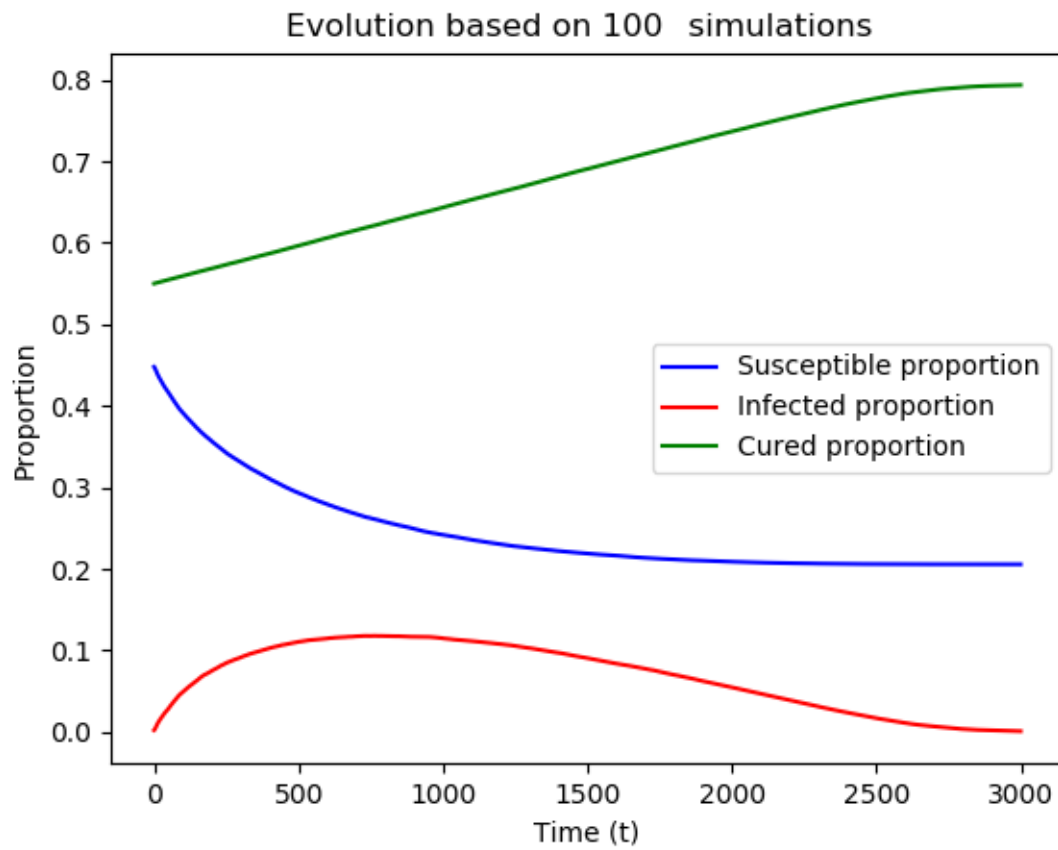


FIGURE 12 – Évolution des proportions d’individus, dont les relations sont modélisées par la matrice  $W_{big}$ , dans chacune des catégories au cours du temps avec une proportion initiale d’individus vaccinés de 55%

(d) Enfin, en faisant passer la probabilité  $\mu$  de guérison à 1, le nombre de lits d’hôpitaux disponibles est quand même dépassé. Ceci peut être observé sur la figure 13.

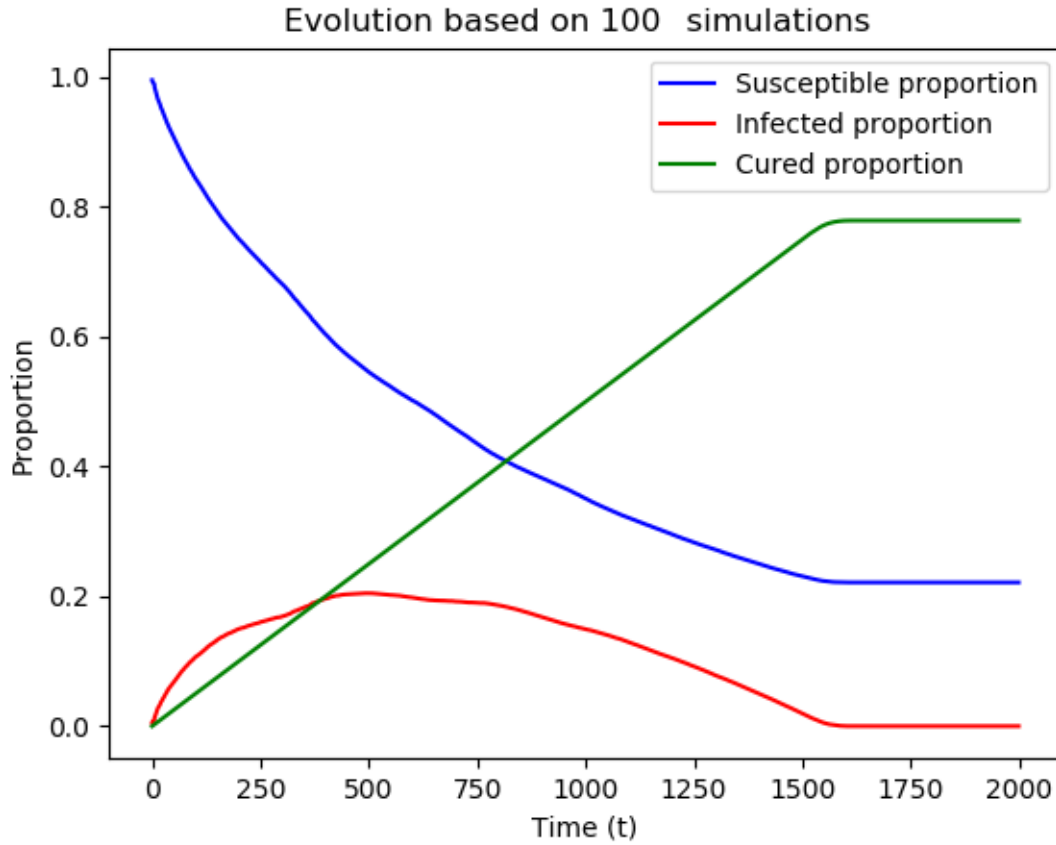


FIGURE 13 – Évolution des proportions d’individus, dont les relations sont modélisées par la matrice  $W_{big}$ , dans chacune des catégories au cours du temps avec une accélération de la guérison du virus :  $\mu = 1$

On peut enfin comparer le temps moyen de disparition du virus selon les différentes mesures prises. On obtient ainsi ce classement de durée décroissante :  $(a) > (b) > (c) > (d)$ . On conclut donc que la mesure (d) a pour principal effet de diminuer la durée de l’épidémie mais pas spécialement la proportion d’individus infectés. Cette mesure pourrait donc être prise quand la maladie n’est pas importante et qu’il n’y a donc besoin d’hospitalisation que pour une proportion négligeable de la population. Les autres mesures<sup>16</sup> ont à la fois l’avantage de diminuer la proportion d’individus infectés et le temps de disparition du virus.

16. Pouvant être combinées les unes avec les autres.