Chapitre 8 : Equations de droites. Systèmes linéaires

Ref _ [Déclic 2nd _ 2019] et [Yvan Monka]

5 avril 2025

Introduction

0.1 Activité d'introduction

Activité 1 p 188

0.2 Qu'est-ce qu'une équation de droite ?

On a déjà rencontré les fonctions affines, qui sont de la forme $f(x) = mx + p$ *(où m et p sont des réels fixés).*
Si on se donne un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on peut le représenter graphiquement par une droite D, qui contient tous les points de coordonnées $(x; y)$ où $y = mx + p$.

Un exemple

On pose $f(x) = -3x + 2$.
On calcule : $f(1) = -1$; $(f(2) = -4)$; $f(3) = -7$. Donc les points : $(1; -1)$; $(2; -4)$; $(3; -7)$ sont des points de la droite D représentative de f.
Inversement le point $A = (-1; 5) \in D$ car $f(-1) = 5$ et le point $B = (2; 5) \notin D$ car $f(2) \neq 5$
De façon plus générale pour tout point $M = (x; y)$ où $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

- Si $y = -3x + 2$ alors M est un point de D
- Si $y \neq -3x + 2$ alors M n'est pas un point de D

Autrement dit, les coordonnées de points de D sont les solutions de *l'équation à deux inconnues* y=-3x+2.
On dit donc que y=-3x+2 est une *équation réduite de la droite D.*

Pourquoi la nomme t'on "équation réduite" ? Parceque sous sa forme la plus générale (appelée "équation cartésienne"), une équation de droite s'écrit $ax + by + c = 0$.

- *Pour $b \neq 0$ on trouve $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-a}{b}x + \frac{-c}{b}$, en posant $m = \frac{-a}{b}$ et $p = \frac{-c}{b}$ on a bien l'équation réduite.*
- *Pour $b = 0$ on trouve le cas trivial d'une droite verticale donnée par $x = \frac{-c}{a}$*

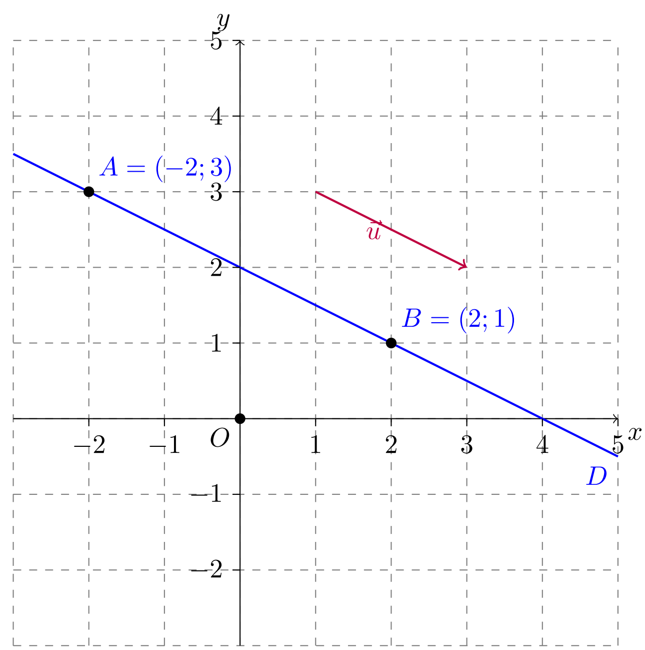
1 Equations de droites

1.1 Vecteur directeur d'une droite

Définition 1 (Vecteur directeur d'une droite)
Soit D une droite du plan, et A,B deux points de cette droite. On appelle vecteur directeur de la droite D tous vecteurs $\vec{u}$ colinéaires avec $\vec{AB}$

Exemple: 1.1
On considère la droite D passant par les points $A = (-2; 3)$ et $B = (2; 1)$. On a :

- *Le vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ qui est un vecteur directeur de D*
- *Le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ donc $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de D.*



Propriété: 1.1
Une droite D peut être définie par la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u}$. On a alors :

$$M \in D \Leftrightarrow \vec{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}$$

1.2 Equation cartésienne $ax + by + c = 0$

Définition 2 (Equation cartésienne)
Dans un repère du plan, les coordonnées $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ de tous les points M d'une droite D vérifient une équation de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

où a, b et c sont des nombres réels tels que a et b ne sont pas simultanément nuls.
Une telle équation s'appelle une équation cartésienne de la droite D

Propriété: 2.1
Le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$

Preuve : *On considère D une droite passant par $A=(x_0;y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$.*
Un point $M=(x;y)\in D$, si et seulement si, les vecteurs $\vec{AM}=\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$ et $\vec{u}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ sont colinéaires.
C'est à dire : $det(\vec{AM},\vec{u})=0 \Leftrightarrow (x-x_0)\beta-(y-y_0)\alpha=0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \beta x-\alpha y+ay_0-\beta x_0=0$
Cette équation peut s'écrire : $ax+by+c=0$ avec $a=\beta$, $b=-\alpha$ et $c=\alpha y_0-\beta x_0$.
D'où $\vec{u}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

Exemple: 2.1
Un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $4x-5y-1=0$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$.
En effet, $a=4$ et $b=-5$ ici.

Exercice: 2.1 (Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur)

1. *Déterminer une équation cartésienne de la droite D passant par le point $A=(3;1)$ et du vecteur directeur $\vec{u}=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$*
2. *Déterminer une équation cartésienne de la droite D' passant par les points : $B=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$*

1.3 Equation réduite $y=mx+p$

Exemple : Soit D une droite d'équation cartésienne $4x+y-6=0$.
On a alors l'équation réduite de D qui est : $y=-4x+6$

Propriété: 2.2
Soit D une droite.

1. ***Si D est parallèle à l'axe des ordonnées :*** *alors l'équation de D est de la forme $x=n$*
2. ***Si D n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées :*** *alors l'équation de D est de la forme $y=mx+p$*

Preuve :

- *Pour $b\neq 0$ on trouve $ax+by+c=0 \Leftrightarrow y=\frac{-a}{b}x+\frac{-c}{b}$, en posant $m=\frac{-a}{b}$ et $p=\frac{-c}{b}$ on a bien l'équation réduite.*
- *Pour $b=0$ on trouve le cas trivial d'une droite verticale donnée par $x=\frac{-c}{a}=n$*

Définition 3 (Equation réduite)
On appelle équation réduite d'une droite D toutes équations de la forme $y=mx+p$ où $m,p\in\mathbb{R}$

Remarque : On appelle "m" la pente ou le coefficient directeur de la droite D, et "p" l'ordonnée à l'origine de la droite D.

Exercice: 3.1 (Passer d'une équation cartésienne à l'équation réduite et réciproquement)

1. *Soit la droite D d'équation cartésienne $6x+3y-5=0$. Déterminer l'équation réduite de D.*
2. *Soit la droite D' d'équation réduite $y=6x-5$. Déterminer une équation catésienne de D'.*

Exercice: 3.2 (Représenter graphiquement une droite d'équation réduite donnée)
Dans un repère, tracer les droites D_1 , D_2 et D_3, d'équations respectives :

$$y=2x+3\ ,\ y=4\ ,\ x=3$$

2 Système de deux équations à deux inconnues

Les exemples de cette partie sont entièrement pris du cours "Systèmes d'équations et droites" de Yvan Monka. Je vous invite à le regarder si il y a des problèmes

2.1 Exemple d'introduction et définition

Exemple d'introduction

Soit deux équations à deux inconnues x et y :

$$2x - y = 0 \textit{ et } 3x - 4y = -5$$

Elles forment ce qu'on appelle un système de deux équations à deux inconnues.
Et on note : $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases}$

Un couple de nombres qui vérifie les deux équations est appelé solution du système. Ici, le coupe $(1\,;\,2)$ est solution. En effet :

$$\begin{cases} 2 \times 1 - 2 = 0 \\ 3 \times 1 - 4 \times 2 = -5 \end{cases}$$

Dans ce chapitre, on verra deux méthodes permettant de résoudre de tels systèmes

Définition

Définition 4
Un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y est un système qui peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où a, b, c, a', b' et c' sont des réels fixés avec $(a; b) \neq (0; 0)$ et $(a'; b') \neq (0; 0)$
(C'est à dire, qu'ils ne peuvent pas être simultanéments égaux à 0)

Une solution de ce système est un couple $(x; y)$ de nombres réels tel que x et y vérifient simultanément les deux équations.

Remarque : Résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues, c'est déterminer tous les couples $(x; y)$ solution de ce système

2.2 Méthodes de résolutions

2.2.1 Méthode de substitution

Méthode formelle :

- On exprime une des inconnues en fonction de l'autre à l'aide d'une équation
- On reporte l'expression obtenue dans l'autre équation
- On résout cette dernière équation, à une seule inconnue
- On en déduit l'autre inconnue

Exemple appliqué : On veut résoudre le système d'équations : $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 4y = 14 \end{cases}$, on utilise la méthode de substitution :
Faire la méthode de substitution en isolant le x pour commencer

2.2.2 Méthode des combinaisons linéaires

Méthode formelle :

- On multiplie les deux membres de chaque équation par un nombre de façon à aboutir à deux coefficients opposés devant l'une des inconnues
- On ajoute membre à membre les deux équations et on résout l'équation ainsi obtenue
- On en déduit l'autre inconnue

Exemple appliqué : On veut résoudre le système d'équations : $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$, on utilise la méthode de combinaisons linéaires :
Faire la méthode de combinaisons linéaires

2.3 Interprétation géométrique

2.3.1 Système admettant une unique solution

On considère le système d'équations : $\begin{cases} -2x + y = 0 \\ 4x - y = 4 \end{cases}$
Résoudre le système + donner une interprétation géométrique

2.3.2 Système n'admettant pas de solution

On considère le système d'équations : $\begin{cases} -3x + y = 1 \\ 6x - 2y = 6 \end{cases}$
Résoudre le système + donner une interprétation géométrique

2.3.3 Système admettant une infinité de solutions

On considère le système d'équations : $\begin{cases} -6x - 3y = -6 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

Résoudre le système + donner une interprétation géométrique

3 BONUS

3.1 Résolution de système à deux équations et deux inconnues : La méthode de Cramer

On considère dans cette partie le système $(S) : \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ où a, b, c, d, e, f sont des réels.

Définition 5 (Système de Cramer)
On dit que le système (S) est de "Cramer" si le déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

Théorème 5.1 (Formule de Cramer pour les systèmes 2×2)

***Si** (S) est un système de Cramer*

***Alors** il y a un unique couple de solution au système qui est donné par* $x = \dfrac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$ *et* $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$

Remarque :

1. La preuve est hors programme, mais vous pouvez vous convaincre que ce théorème fonctionne avec les exemples que l'on a fait plus haut. (Attention de bien vérifier que le système est de Cramer !)
2. Même si vous ne comprenez pas ce qu'il se passe, vous pouvez constater encore une fois l'utilisation du déterminant... C'est un objet mathématique remarquable qui n'a pas fini de vous surprendre.

3.2 Notion d'équivalence entre les systèmes

3.2.1 Rappel : (La balance à plateaux)

Soit x et y deux quantités qui vérifient : $x = y$. On a :

1. Pour tous nombre réels k, $x + k = y + k$
2. Pour tous nombre réels différent de 0 a, $a \times x = a \times y$

***Remarque** : Voir l'égalité entre les quantités comme une balance à plateau, il faut faire les mêmes oppérations à gauche et à droite de l'égalité pour la préserver.*

3.2.2 Equivalence entre systèmes

On considère le système $(S) : \begin{cases} ax + by = e & (L_1) \\ cx + dy = f & (L_2) \end{cases}$ où a, b, c, d, e, f sont des réels. On a :

- Prenons l'équation $(L_1) : ax + by = e$ on a par la même idée du Rappel que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^* \ (L_1) \Leftrightarrow \alpha \times \alpha(ax + by) = \alpha \times e$$

  Donc $(S) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \begin{cases} \alpha(ax + by) = \alpha e & (L_1)' = \alpha \times (L_1) \\ cx + dy = f & (L_2) \end{cases}$

- De même reprenons $(L_1) : ax + by = e$ on a par la même idée du Rappel que :

$$\forall k \in \mathbb{R} \ (L_1) \Leftrightarrow k + (ax + by) = k + e$$

  En particulier on peut prendre $k = cx + dy = f$.
  D'où $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} (cx + dy) + (ax + by) = f + e & (L_1)' = (L_1) + (L_2) \\ cx + dy = f & (L_2) \end{cases}$