19/09/22 :

Exercices :

L2 Math / Polytech

Exercice 12 : On définit : $f : \mathbb{R}\setminus\{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x^2+3x+3}{x+1}$$

1) Etudier les variations de f

2) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition

3) Calculer les limites en $+/- \infty$ de l'expression :

$$f(x) - (x+2)$$

En déduire que la droite d'équation $y = x+2$ est asymptote au graphe de f.

4) Déterminer la position du graphe par rapport à cette asymptote

5) Tracer le graphe de f.

Exercice 12 : $f : \mathbb{R}\setminus\{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x^2+3x+3}{x+1}$$

1) Pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, on a que :

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x+1)-(x^2+3x+3)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2+5x+3-x^2-3x-3}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

Donc $f'(x) > 0 \iff \dfrac{x^2+2x}{\underbrace{(x+1)^2}_{>0}} > 0$

$$\iff x^2+2x > 0$$

$$\iff x(x+2) > 0$$

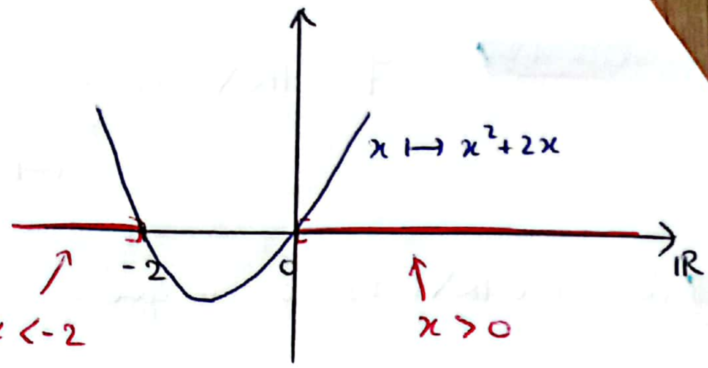
$$\iff \begin{cases} x > 0 \text{ et } x+2 > 0 \iff x > -2 \\ \text{ou} \\ x < 0 \text{ et } x+2 < 0 \iff x < -2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x > 0 \\ \text{ou} \\ x < -2 \end{cases}$$

(*) Visualisation :

$$x^2 + 2x = 0$$

$$\iff x(x+2) = 0$$



D'où la fonction f est croissante sur les intervalles : $]-\infty, -2]$ et $[0, +\infty[$.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$

2) • $f(-2) = \dfrac{4-6+3}{-1} = -1$

• $f(0) = 3$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\left(\text{car } f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x+1} = \dfrac{x + 3 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right)$

• $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ (x > -1)}} f(x) = +\infty$

• $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ (x < -1)}} f(x) = -\infty$

3) $f(x) - (x+2) = \dfrac{x^2 + 3x + 3 - (x+2)(x+1)}{x+1}$

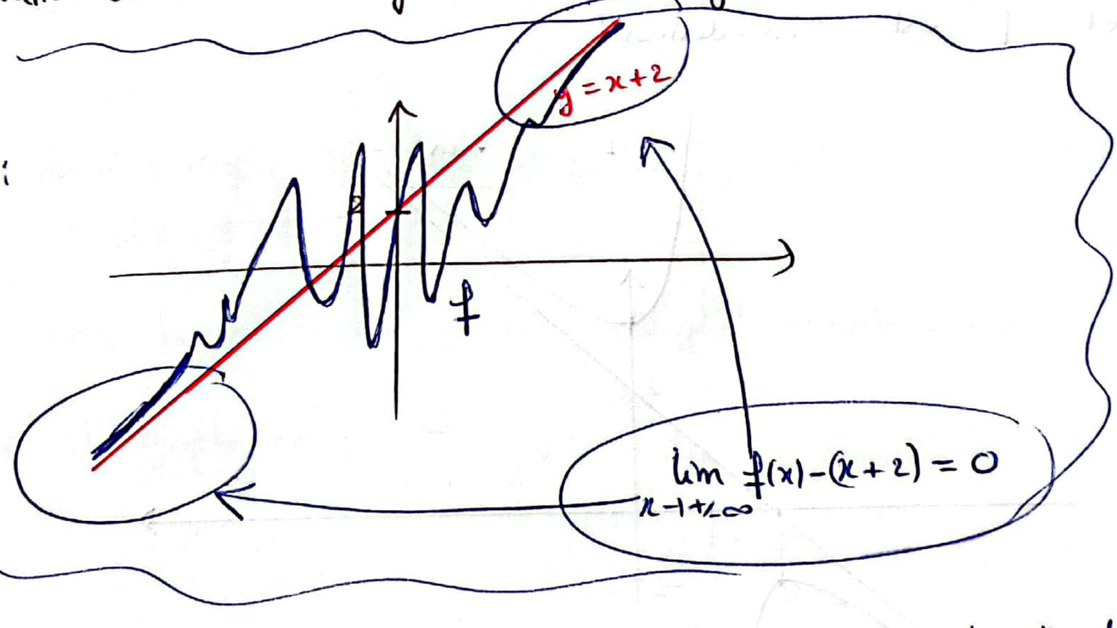
$$= \frac{1}{x+1}$$

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (x+2)\right) = 0$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - (x+2)\right) = 0$

Donc l'équation de la droite $y = x+2$ est asymptote au graphe f.

Visualisation :



Remarque : Sans savoir comment se comporte f (sur son intervalle de définition)

on sait qu'en $+/- \infty$ f se comporte comme la fonction

$x \mapsto x+2$

4) On a pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ que :

$$f(x) - (x+2) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 1 > 0$$

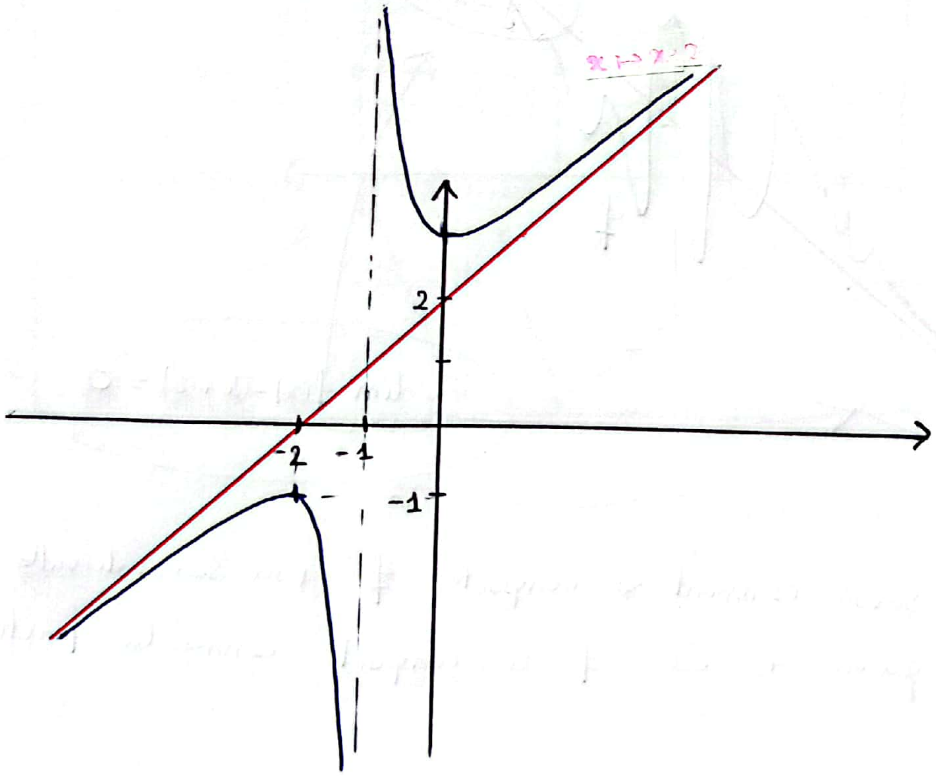
$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x > -1}$$

⚠ : Je n'ai pas utilisé la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ ici.
Le signe de $\frac{1}{x+1}$ dépend simplement du signe de $x+1$.

Donc f est "au dessus" de la fonction $x \mapsto x+2$ sur $]-\infty, -1[$

et f est "en-dessous" ____________ sur $]-1, +\infty[$.

5)



— : $f : x \mapsto f(x)$

— : $y : x \mapsto x+2$