Chapitre 8 : Produit scalaire

Ref [Déclic 1ière spé math _ p 243] / [COURS DE MATHEMATIQUES 2^{e} Collection racine_VUIBERT_1981]

5 avril 2025

Introduction : (*Fiche d'exercices rappels sur les vecteurs*)

1 Produit scalaire dans le plan

1.1 Définitions

Définition 1 (Norme d'un vecteur)
Soit A et B deux points du plan. On note $\vec{u} = \vec{AB}$, le vecteur qui vas de A à B.
La norme du vecteur $\vec{u}$ est la distance AB. On la note $||\vec{u}||$

Remarque : Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a alors :

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Faire visualisation (utilisation du théorème de pythagore)

Exemple: 1.1
On considère $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. On a alors :

$$||\vec{u}|| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

Définition 2 (Produit scalaire)
Soit $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$ deux vecteurs. On note $\theta = \widehat{BAC}$ l'angle dans le sens trigonométrique de ces deux vecteurs.
On définit le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, comme :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times cos(\theta)$$

Ou encore on peut noter : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times cos(\widehat{BAC})$

Faire visualisation (illustration de l'angle θ entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$)

Remarque :

- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, alors le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est égal à 0
- On note également le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme : $< \vec{u}, \vec{v} >$

Propriété: 2.1 (Cas particulier important)
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On a :

1. *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$*
2. *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$*

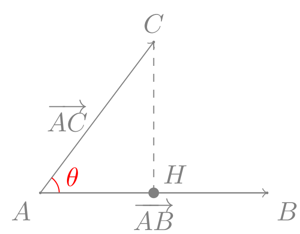
Preuve : C'est direct en remplaçant θ (l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$) par 0 et π

1.2 Orthogonalité et produit scalaire

Propriété: 2.2 (Une autre expression du produit-scalaire par le projeté orthogonal)
Soit A,B et C trois points du plan. On note H le projeté orthogonal de C sur (AB). On a :

- *Si $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ sont de mêmes sens ; $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$*
- *Si $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ sont de sens opposés ; $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH$*

Preuve : • On se place dans le cas où $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ sont de mêmes sens.

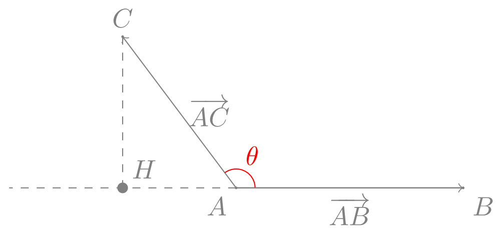


Par définition du cosinus et du projeté orthogonal H de C sur (AB), on a :

$$cos(\widehat{ABC}) = \frac{AH}{AC}$$

Donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times cos(\widehat{ABC}) = AB \times AC$

• On se place dans le cas où $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ sont de sens contraires.

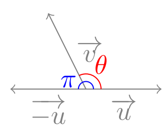


On utilise le lemme suivant :

Lemme : $(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -(\vec{u} \cdot \vec{v})$
En effet, Par définition, comme $||\vec{u}|| = ||-\vec{u}||$, on a :

$$(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = ||-\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times cos(\widehat{-\vec{u},\vec{v}}) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times cos(\widehat{-\vec{u},\vec{v}})$$

Or comme on le voit sur le dessin suivant, les deux vecteur $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ sont colinéaires de sens contraires, donc il forment un angle plat. D'où $\widehat{-\vec{u},\vec{u}} = \pi$ et donc $\widehat{-\vec{u},\vec{v}} = \pi - \theta$



Et par les formules de trigonométries on a : $cos(\pi - \theta) = -cos(\theta) = -cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$. D'où :

$$(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = -(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Ici on a $\vec{AB} = -\vec{BA}$, on obtient donc par le lemme : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-\vec{BA}) \cdot \vec{AC} = -(\vec{BA} \cdot \vec{AC}) = -BA \times AC = -AB \times AC$.
(Car $\vec{BA}$ et $\vec{AC}$ sont de même sens)

Définition 3 (Vecteurs orthogonaux)
On dit que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque les droites qu'ils engendrent sont perpendiculaires.
Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur

Propriété: 3.1
Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques, on a :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Exercices 1,2,3,4 p247

2 Propriétés du produit-scalaire

2.1 Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

• Symétrie

Propriété: 3.2 (symétrie)
Pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

On dit que le produit scalaire est symétrique

Preuve : En effet on a :

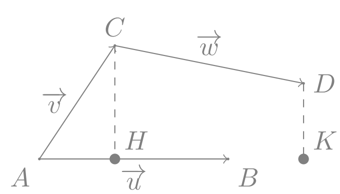
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times cos(\theta) = ||\vec{v}|| \times ||\vec{u}|| \times cos(\theta) = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

• Distributivité du produit-scalaire par rapport à l'addition

Propriété: 3.3
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs du plan, on a :

1. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

Preuve : *On fait la preuve pour le* 1) *le cas* 2) *est analogue.*
Soit A, B, C et D des points tels que : $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$ et $\vec{w} = \vec{CD}$.
On pose H et K les projetés orthogonaux de C et D sur la droite (AB) comme fait ci-dessous :



On obtient donc :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = AB \times AK$$

Par ailleurs

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AH$$
$$\vec{u} \cdot \vec{w} = AB \times HK$$

Or AK=AH+HK , donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = AB \times AK$$

D'où :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$$

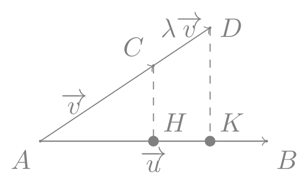
• **Multiplication par un réel λ du produit-scalaire**

Propriété: 3.4
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, et λ un réel quelconque on a :

1. $\vec{u} \cdot k\vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
2. $k\vec{u} \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Preuve : *On fait la preuve pour le 1) le cas 2) est analogue.*
On fait une distinction de cas :

1. *Si $\vec{u} = \vec{0}$, $\vec{v} = \vec{0}$ ou $k = 0$ on montre facilement le résultat*
2. *On suppose $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ ou $k \neq 0$.*
   On pose les points A, B, C et D tels que $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$ et $\lambda\vec{v} = \vec{AD}$. Et on note H et K les projettés orthogonaux de C et D sur la droite (AB) comme fait ci-dessous :



On obtient donc :

$$\vec{u} \cdot \lambda\vec{v} = AB \times AK \qquad (*)$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AH$$

On utilise le théorème de Thalès, on obtient les égalités suivantes :

$$\frac{AK}{AH} = \frac{AD}{AC}$$

Or $AD = \lambda \times AC$ par construction, donc $\frac{AD}{AC} = \frac{\lambda \times AC}{AC} = \lambda$.
Donc finallement :

$$\frac{AK}{AH} = \lambda \Leftrightarrow AK = \lambda \times AH$$

En le remplaçant dans l'expression $(*)$, on obtient le résultat voulu.

Remarque :

1. On peut résumer ces propriétés en disant que le produit scalaire est symétrique et bilinéaire.
   Pourquoi "bilinéaire" ?
   - *"Linéaire" parceque l'on peut aussi voir le "produit-scalaire" comme une fonction appliquée sur un couple de vecteurs, et les propriétés énoncées sont par définition une conservation de la structure des vecteurs.*
   - *"Bi" parcequ'il est linéaire à gauche et à droite.*
2. On peut voir une utilisation pratique de ces propriétés, le produit-scalaire vérifie les identités remarquables !

2.2 Carré scalaire et identitées remarquables du produit scalaire

Définition 4 (Carré scalaire)
On appelle carré scalaire du vecteur $\vec{u}$, noté $\vec{u}^2$, le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui même

Propriété: 4.1 (Propriété direct du carré scalaire)
Pour tous vecteurs $\vec{u}$, on a :

$$\vec{u}^2 = ||\vec{u}||^2$$

Preuve : En effet, on a $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{u}|| \times cos(0) = ||\vec{u}||^2$

Propriété: 4.2 (Les identités remarquables du produit-scalaire)
Pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, on a :

1. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ *(ou encore : $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$)*
2. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ *(ou encore : $||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$)*
3. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$ *(ou encore : $||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$)*

Remarque : Ici il faut faire attention à la notation du carré "$\cdot^2$" qui peut être au sens du produit-scalaire,ou du produit usuel

Exercice: 4.1
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de normes respectives 2 et 3 et tels que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. Calculer :

1. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$
2. $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$
3. $-2\vec{v} \cdot (3\vec{u} - \vec{v})$

2.3 Produit scalaire et normes

Propriété: 4.3
Pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2) = \frac{1}{2}(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2)$$

Preuve :

1. On développe $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$ et on utilise les propriétés de bilinéarité et symétrie du produit scalaire pour trouver le résultat
2. On développe $||\vec{u}-\vec{v}||^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$ et on utilise les propriétés de bilinéarité et symétrie du produit scalaire pour trouver le résultat

Corollaire: 4.1
Soit A,B et C trois points. On a :

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

Preuve : On utilise la propriété précédente ($\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2)$ et on utilise la relation de Chasles

Exemple d'application :On considère un triangle ABC tel que AB=3, AC=5 et BC=6.
On a :

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(3^2+5^2-6^2) = \frac{1}{2}(34-36) = -1$$

2.4 Produit scalaire en repère orthonormé

Propriété: 4.4
Dans un repère orthonormé (O,$\vec{i},\vec{j}$) pour tous vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$$

Preuve : On se place dans un repère (O,$\vec{i},\vec{j}$) et on considère les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
On a donc : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.
On utilise alors la bilinéarité du produit-scalaire, et l'orthogonalité de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ pour conclure.
En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v} &= (x\vec{i}+y\vec{j})\cdot(x'\vec{i}+y'\vec{j}) \\
&= (x\vec{i}\cdot x'\vec{i}) + (x\vec{i}\cdot y'\vec{j}) + (y\vec{j}\cdot x'\vec{i}) + (y\vec{j}\cdot y'\vec{j}) \\
&= xx'(\vec{i}\cdot\vec{i}) + xy'(\vec{i}\cdot\vec{j}) + yx'(\vec{j}\cdot\vec{i}) + yy'(\vec{j}\cdot\vec{j}) \\
&= xx'\times 1 + 0 + 0 + yy'\times 1 \\
&= xx' + yy'
\end{aligned}$$

Faire un dessin du repère orthonormé (O,$\vec{i},\vec{j}$) et des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ dans ce repère.

3 Quelques applications du produit-scalaire

3.1 Une nouvelle approche du théorème de Pythagore

• Une nouvelle preuve au théorème de Pythagore

Théorème 4.1 (Pythagore)
On considère le triangle ABC, on a :

$$ABC \text{ est rectangle en } A \Leftrightarrow \ AB^2 + AC^2 = BC^2$$

Preuve (par le produit-scalaire) :
• " $\Rightarrow$ " Soit ABC un triangle rectangle en A, donc $\vec{BA} \cdot \vec{AC} = 0$ et on a :

$$\begin{aligned} \vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} \quad & \Rightarrow \vec{BC}^2 = (\vec{BA} + \vec{AC})^2 \\ & \Leftrightarrow \vec{BC}^2 = \vec{BA}^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{AC} + \vec{AC}^2 \\ & \Leftrightarrow \vec{BC}^2 = \vec{BA}^2 + \vec{AC}^2 \\ & \Leftrightarrow ||\vec{BC}||^2 = ||\vec{BA}||^2 + ||\vec{AC}||^2 \end{aligned}$$

(Faire un dessin pour se convaincre)

• " $\Leftarrow$ " Soit ABC un triangle quelconque qui vérifie $AB^2 + AC^2 = BC^2 \ *$. Or $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$. Donc en élevant au carré *(au sens du produit scalaire)* on a :

$$\vec{BC}^2 = \vec{BA}^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{AC} + \vec{AC}^2 \Leftrightarrow BA^2 + AC^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{AC}$$

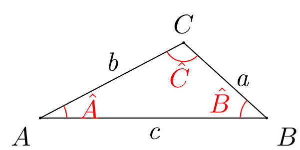
Par identification avec la formule $*$ on obtient :

$$2\vec{BA} \cdot \vec{AC} = 0$$

C'est-à-dire : $\vec{BA}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux. Donc ABC est rectangle en A.

• Une généralisation au théorème de Pythagore : Les formules d'Al-Kashi

Théorème 4.2 (Les formules d'Al-Kashi)
Soit ABC un triangle quelconque :



On a alors les formules suivantes :

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \times b \times c \times cos(\hat{A})$
2. $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \times a \times c \times cos(\hat{B})$
3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times cos(\hat{C})$

Preuve : *On ne montrera que la formule 1), les autres cas sont analogues.*
On a $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = c\times b\times cos(\hat{A})$ et $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \frac{1}{2}(c^2+b^2-a^2)$
Donc $c\times b\times cos(\hat{A}) = \frac{1}{2}(c^2+b^2-a^2) \Leftrightarrow a^2 = b^2+c^2-2\times b\times c\times cos(\hat{A})$

Exercice: 4.2 (Application des formules d'Al-Kashi)

1. *On considère un triangle ABC qui vérifie : AB=4, AC=6 et $\widehat{BAC} = 60°$. Calculer la longueur BC. (On donnera une valeur arrondie au dixième.)*
2. *On considère un triangle ABC qui vérifie : AB=6, AC=5 et CB=4. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC} = 60$ au degré près.*

3.2 Transformation de l'expression $\vec{MA}\cdot\vec{MB}$

Propriété: 4.5
Soit deux points distincts A et B du plan et et I le milieu du segment [AB].
Pour tout point M du plan, on a : $\vec{MA}\cdot\vec{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

Preuve : *(la clef de la preuve est que I est le milieu du segment [AB])*
On a $$\begin{aligned}\vec{MA}\cdot\vec{MB} &= (\vec{MI}+\vec{IA})\cdot(\vec{MI}+\vec{IB})\\ &= \vec{MI}\cdot\vec{MI}+\vec{MI}\cdot\vec{IA}+\vec{IA}\cdot\vec{MI}+\vec{IA}\cdot\vec{BI}\end{aligned}$$
Or on a : $\vec{MI}\cdot\vec{MI} = MI^2$; $\vec{IA}\cdot\vec{BI} = (-\frac{1}{2}\vec{AB})\cdot(\frac{1}{2}\vec{AB}) = \frac{1}{4}AB^2$
Et $\vec{MI}\cdot\vec{IB}+\vec{IA}\cdot\vec{MI} = \vec{MI}\cdot\vec{IB}+\vec{MI}\cdot\vec{IA} = \vec{MI}\cdot(\vec{IB}+\vec{IA})$.
I étant le milieu de [AB] on a $\vec{IB}+\vec{IA} = \vec{0}$ D'où : $\vec{MI}\cdot\vec{0} = 0$
On obtient finalement : $\vec{MA}\cdot\vec{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

Remarque : Ce qui est intéressant dans cette propriété c'est surtout le corollaire qui en découle. Une caractérisation du cercle !

Corollaire: 4.2
Soit deux points distincts A et B du plan et I le milieu du segment [AB]. On a pour tous points M :

L'ensemble des points M du plan tels que $\vec{MA}\cdot\vec{MB} = 0$ représentent les points du cercle de diamètre [AB] et de centre I.

Preuve : On a :

$$\vec{MA}\cdot\vec{MB} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 0 \Leftrightarrow MI^2 = (\frac{1}{2}AB)^2 \Leftrightarrow MI = \frac{1}{2}AB)$$

Ainsi M vérifie, $\vec{MA}\cdot\vec{MB} = 0$, si et seulement si, M appartient au cercle de centre I et de rayan $\frac{1}{2}AB$.

FICHE RECAP : voir p 252 du manuel ! Fiche