Programme interrogation orale n°1

(SPÉ PC)

1ière Colle.

CHAPITRE I : Espaces vectoriels et applications linéaires, matrices et déterminants

I) Calculs matriciels
II) Espaces vectoriels
III) Applications linéaires
Colles : 19-23 sept.

IV) Matrices et applications linéaires
V) Déterminant
Colles : 26-30 sept.

1ière PARTIE : (Cours)

→ Définitions, propriétés, ⊕ 1 démonstration exigible

Preuves :

① : Sous réserve de compatibilité du produit matriciel montrer que : $tr(AB) = tr(BA)$

② Deux matrices semblables possèdent la même trace

③ Montrer la formule du déterminant de Vandermonde

Ref : [Rombaldi] - p376

Polynômes interpolateurs de Lagrange

④ Soient $a_0, a_1, .., a_n$ des scalaires de $\mathbb{K}$ 2-à-2 distincts. Montrer que la famille $(L_0, L_1, .., L_n)$ des polynômes de Lagrange est une base de $\mathbb{K}_n[X]$

⑤ Pour tout polynômes $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a la formule d'interpolation de Lagrange $P = \sum_{j=0}^{n} P(a_j) L_j$

⊕ Bonus : Application ③, ④, ⑤ (Problème d'interpolateurs de Lagrange)

Ref. [DEMAILLY] - p21-23

⑥ Montrer le Thm : Pour $f \in C^0([a,b])$, et $(x_0, .., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 2-à-2 distincts, $\exists ! P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tq $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $P_n(x_i) = f(x_i)$

ORAL 1 : (Colles)

SPÉ PC :

Preuves :

1. Soient $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

On a que :

$$A \times B = \underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & (a_{ij}) & \\ & & \end{pmatrix}}_{m} \underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & (b_{ij}) & \\ & & \end{pmatrix}}_{n} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} a_{1k}b_{k1} & \cdots & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}_{n}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$$

D'où : $$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}\left(\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{ki}$$

$\Sigma\Sigma$ sont finies et $a_{ik}, b_{ki} \in \mathbb{K}$.

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik}$$

De plus, $$B \times A = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}\right)_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq m}} \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$$

Donc $$\boxed{\mathrm{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki} = \mathrm{tr}(AB)}$$

② Soient $A \sim B$, donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq :

$$A = PBP^{-1}.$$

D'où : $$\begin{aligned} tr(A) &= tr(P(BP^{-1})) \\ &= tr((BP^{-1})P) \\ &= tr(B). \end{aligned}$$ on vient d'utiliser ①.

⚠ : $tr(A(BC)) \overset{①}{=} tr((BC)A)$

Mais $tr(ABC) \neq tr(ACB)$ en général !

Contre exemple : Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

~~On a que~~ $\cancel{A.B.C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$

$\cancel{ACB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

On a que : $ABC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$ACB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

D'où $tr(ABC) = 1 \neq 0 = tr(ACB)$.

Scanné avec CamScanner

3) : On veut trouver une expression de :

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} = ? \quad \text{Pour } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n.$$

on a que : • Pour $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_2 - \alpha_1$$

• Pour $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$

$$\begin{array}{ccc} (C_1) & (C_2) & (C_3) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} (C_1') & (C_2') & (C_3') \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_2-\alpha_1 & \alpha_2(\alpha_2-\alpha_1) \\ 1 & \alpha_3-\alpha_1 & \alpha_3(\alpha_3-\alpha_1) \end{vmatrix}$$

où : • $C_1' = C_1$
• $C_2' = C_2 - \alpha_1 C_1$
• $\cancel{C_3' = C_3 - \alpha_1 C_1}$
• $C_3' = C_3 - \alpha_1 C_2$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} \alpha_2-\alpha_1 & \alpha_2(\alpha_2-\alpha_1) \\ \alpha_3-\alpha_1 & \alpha_3(\alpha_3-\alpha_1) \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_2-\alpha_1) \cdot (\alpha_3-\alpha_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 \\ 1 & \alpha_3 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{j=2}^{3} (\alpha_j - \alpha_1) \times \alpha_3 - \alpha_2$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (\alpha_j - \alpha_i)$$

On suppose vrais au rang $n-1$ que : $\det(V(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})) = \prod_{1\leq i<j\leq n-1} (\alpha_j - \alpha_i)$

D'où, pour $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ on a que :

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha_2-\alpha_1 & \alpha_2(\alpha_2-\alpha_1) & \dots & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2-\alpha_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n-\alpha_1 & \alpha_n(\alpha_n-\alpha_1) & \dots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n-\alpha_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_2-\alpha_1 & (\alpha_2-\alpha_1)\times\alpha_2 & \dots & (\alpha_2-\alpha_1)\alpha_2^{n-2} \\ \alpha_3-\alpha_1 & (\alpha_3-\alpha_1)\alpha_3 & \dots & (\alpha_3-\alpha_1)\alpha_3^{n-2} \\ \vdots & & & \\ \alpha_n-\alpha_1 & (\alpha_n-\alpha_1)\alpha_n & \dots & (\alpha_n-\alpha_1)\alpha_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_2-\alpha_1)\times(\alpha_3-\alpha_1)\times\dots\times(\alpha_n-\alpha_1)\times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2^{n-2} \\ 1 & \alpha_3 & \dots & \alpha_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^{n-2} \end{vmatrix}}_{= \det(V(\alpha_2,\dots,\alpha_n))}$$

Rq : on aurait pût faire le même procédé avec les α_n et on aurait eût : $V(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$

$$= \prod_{1<j\leq n} (\alpha_j-\alpha_1) \times \det(V(\alpha_2,\dots,\alpha_n))$$

H.R

$$= \prod_{1<j\leq n} (\alpha_j-\alpha_1) \times \prod_{2\leq i<j\leq n} (\alpha_j-\alpha_i)$$

$$\boxed{= \prod_{1\leq i<j\leq n} (\alpha_j-\alpha_i)}.$$

(1) Par définition : Pour $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ deux-à-deux distincts on a : $\forall\ i \in [\![0,n]\!]$, $L_i(X) := \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$

où les $(L_0, \dots, L_n)$ sont les polynômes de Lagrange.

Par construction on a que : $\forall i, j \in [\![0,n]\!]$,

$$L_i(a_j) = \delta_{ij}$$

On montre le Thm : Polynômes interpolateurs de Lagrange

Les polynômes interpolateurs de Lagrange $(L_0, \dots, L_n)$ forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Pour cela il faut et il suffit de montrer que les $(L_0, \dots, L_n)$ forment une famille libre et génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

Ou encore, comme $\mathbb{K}_n[X]$ est un e.v de dim $n+1$ et que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ a $n+1$ éléments, il suffit de montrer que cette famille est libre. ~~(Par le Thm : dim d'un e.v de dim finie) Toutes les bases sont de mêmes cardinaux~~

~~Par le Thm de la base incomplète :~~
~~En effet, Pour $(v_1, \dots, v_p)$ une famille libre d'un e.v E de dim finie n, il existe $(v_{p+1}, \dots, v_n) \in E$ tq : $(v_1, \dots, v_p, \dots, v_n)$ forme une base de E.~~

Thm/Def : dim d'un e.v
Toutes les bases d'un e.v de dim finie sont de mêmes cardinaux.
On appel $\dim(E) = \# \mathcal{B}$.

Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = 0 \iff \forall x \in \mathbb{K}, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x) = 0$$

$$\Rightarrow \forall j \in [\![0, n]\!], \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \underbrace{L_i(a_j)}_{= \delta_{ij}} = 0$$

$$\Rightarrow \forall j \in [\![0, n]\!], \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \delta_{ij}}_{= \lambda_j} = 0$$

$$\lambda_j = 0$$

CQFD

$\square$

---

5. Pour $P \in \mathbb{K}_n[X]$ on veut montrer la formule d'interpolat° de Lagrange

$$P = \sum_{j=0}^{n} P(a_j) L_j .$$

Comme $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}(L_0, \dots, L_n)$ (Thm 4 montré avant)

On a que : il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que :

$$P = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_j$$

De plus, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $P(a_i) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \underbrace{L_j(a_i)}_{= \delta_{ij}} = \lambda_i$

D'où : $$\boxed{P = \sum_{j=0}^{n} P(a_j) L_j}$$