Programme année de 1^{ire} Spécialité
Janvier - Juin 2024 :

5 avril 2025

Table des matières

1 ALGEBRE

1.1 Suites numériques, modèles discrets

1.2 Equations, fonctions polynômes du second degré

2 ANALYSE

2.1 Dérivation, variations et courbes représentatives des fonctions

2.2 Fonction exponentielle

2.3 Fonctions trigonométriques

3 GEOMETRIE

3.1 Calcul vectoriel et produit scalaire

3.2 Géométrie repérée

4 PROBABILITES ET STATISTIQUES

4.1 Probabilités conditionnelles et indépendance

4.2 Variables aléatoires réelles

5 ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION

6 VOCABULAIRE ENSEMBLISTE ET LOGIQUE

EXERCICES

I) Fonction exponentielle

A) Révisions des bases

Exercice: 0.1 (Vrai / Faux)
Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1. *Pour tous réels a et b, $e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}$*
   Correction : *Vrai, c'est une propriété de l'exponentielle*
2. *Le nombre $-e^{-x}$ est toujours strictement positif*
   Correction : *Faux, en effet $\forall x\in\mathbb{R},\ e^x>0$. On a par exemple $-e^0=-1$*
3. *La droite d'équation $y=x+1$ est tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 1*
   Correction : *Faux, cette équation est tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0*
4. *La tangente à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$ au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation $y=-\frac{1}{4}x$*
   Correction : *Vrai, il suffit de calculer $f'(0)$*

Exercice: 0.2 (Propriétés algébriques)
Simplifier et factoriser si possible les expressions suivantes :

$$A=\frac{e^{x+y}}{e^x}-e^{2y},\quad B=\frac{e^{2x+2y}}{e^x e^{2y}}$$

Correction :

- $A=\frac{e^{x+y}}{e^x}-e^{2y}=\frac{e^x e^y}{e^x}-e^{2y}=e^y(1-e^y)$
- $B=e^x$

B) Approfondissement

Exercice: 0.3 (Cosinus et sinus hyperboliques)
Les fonctions ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ comme :

$$ch(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \text{ et } sh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

1. *Dresser le tableau des signes de ces fonctions*

   Correction :
   - $$\begin{aligned} sh(x)\leq 0 &\Leftrightarrow e^x-e^{-x}\leq 0\\ &\Leftrightarrow e^x\leq e^{-x}\\ &\Leftrightarrow x\leq -x\\ &\Leftrightarrow x\leq 0\end{aligned}$$
   - $$\begin{aligned} ch(x)\geq 0 &\Leftrightarrow e^x+e^{-x}\geq 0\\ &\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

   On trouve alors aisément leurs tableaux de signes.
2. *Calculer ch' et sh'.*
   Quel lien y-a-t-il entre ch' et sh ? Entre sh' et ch ?
   Correction : $\forall x\in\mathbb{R},\ ch'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=sh(x)$.
   et $\forall x\in\mathbb{R},\ sh'(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=ch(x)$.

3. *Dresser les tableaux de variations de ch et sh.*

   Correction :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$ch'(x)$		$-$	0	$+$	
$ch(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$sh'(x)$		$+$	
$sh(x)$	$+\infty$	↗	$+\infty$

4. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$*

   (a) *En dérivant $f : x \mapsto ch^2(x) - sh^2(x)$*

   (b) *Par un calcul algébrique*

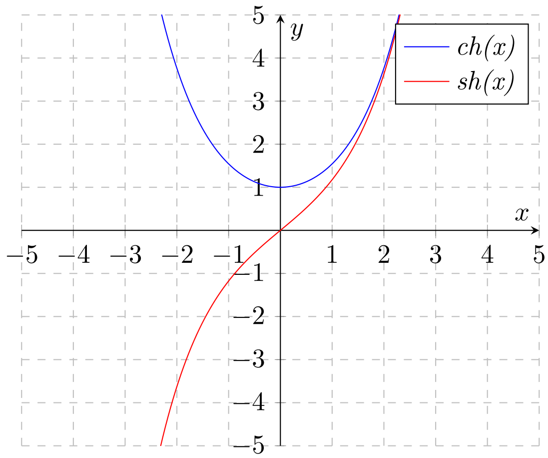
   Correction :$ch^2(x) - sh^2(x) = (\frac{e^x+e^{-x}}{2})^2 - (\frac{e^x-e^{-x}}{2})^2 = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-+e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$

5. *Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $sh(2x) = 2ch(x) \times sh(x)$ et $ch(2x) = ch^2(x) + sh^2(x)$*

   Correction : *On a* $2ch(x) \times sh(x) = 2(\frac{e^x+e^{-x}}{2})(\frac{e^x-e^{-x}}{2}) = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} = sh(2x)$

   Et $ch^2(x) + sh^2(x) = (\frac{e^x+e^{-x}}{2})^2 + (\frac{e^x-e^{-x}}{2})^2 = \cdots = ch(2x)$

6. *Donner une représentation graphique de ch et sh*



II) Fonctions trigonométriques

A) Révisions des bases

Exercice: 0.4
QCM : *Pour chaque question, trouver la bonne réponse :*

	A	B	C
Si $cos(\alpha) = \frac{1}{2}$, *alors* $cos(\pi - \alpha)$ *est égal à :*	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Si $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$ *et si* $sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ *alors* $sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ *vaut :*	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Si $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$ *et si* $cos(\alpha) = \frac{1}{2}$ *alors* $sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ *vaut :*	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
Si $sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ *alors* $sin(\alpha + \pi)$ *est égal à :*	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Si $\alpha \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$ *et si* $sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ *alors* $cos(\alpha)$ *vaut :*	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice: 0.5 (Identité trigonométrique)
Montrer que pour tout réel x on a :

$$(cos(x) + sin(x))^2 + (cos(x) - sin(x))^2 = 2$$

Correction : On a $2(cos(x)^2 + sin(x)^2) = 2$

B) Approfondissement

Exercice: 0.6 (Etablir un encadrement)

1. *On désigne g la fonction numérique définie sur $[0; \pi]$ par :*

$$g(x) = xcos(x) - sin(x)$$

Etudier g et dresser son tableau de variation.
En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0; \pi]$

Correction : *$g'(x) = -xsin(x)$ et on déduit que g est décroissante sur $[0; \pi]$.*
De plus $g(0) = 0$ et $g(\pi) = -\pi$. Donc g est négative sur $[0, \pi]$.

2. *Soit f la fonction numérique définie sur $[0; \pi]$ par :*

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{sin(x)}{x} & , x \in]0; \pi] \end{cases}$$

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ puis étudier les variations de f.

Correction : *On étudie le taux d'accroissement de sin : $x \mapsto sin(x)$ en 0. On a :*

$$\lim_{h \to 0} \frac{sin(0 + h) - sin(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{sin(h)}{h} = sin'(0) = cos(0) = 1$$

D'où : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$.
Pour étudier la variation de f il suffit de l'étudier sur $]0, \pi]$. Et on a :

$$\forall x \in]0, \pi], \; f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

On en déduit par la question 1) que f est strictement décroissante sur $[0, \pi]$

3. *Prouver que, pour tout nombre réel* $x \geq 0$, *on a :*

$$0 \leq x - sin(x) \leq \frac{x^3}{6}$$

(Astuce : On peut introduire la fonction ϕ *définie sur* $[0; +\infty[$ *par :*

$$\phi(x) = sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$$

On calculera les dérivées ϕ', ϕ'', ϕ''' *et on en déduira le signe de* $\phi(x)$*)*

Correction : *On se place dans* $[0, \pi]$ *et on a :*

$$\begin{cases} \phi(x) = sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \\ \phi'(x) = cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \\ \phi''(x) = -sin(x) + x \\ \phi'''(x) = -cos(x) + 1 \end{cases}$$

On trouve que $\phi'''(x) \geq 0$ *donc* ϕ'' *est croissante.*
De plus $\phi''(0) = 0$ *donc elle est positive. Donc* ϕ' *est croissante.*
De même $\phi'(0) = 0$ *donc elle est positive. Donc* ϕ *est croissante.*
Et on a $\phi(0) = 0$ *donc* $\phi(x) \geq 0$

Finalement, De $\phi(x) \geq 0$ *on obtient :* $-sin(x) + x + \frac{x^3}{6} \geq 0 \Rightarrow sin(x) - x \leq \frac{x^3}{6}$
Et de $\phi''(x) \geq 0$ *on obtient :* $-sin(x) + x \geq 0$. *D'où l'inégalité*

III) Calcul vectoriel et produit scalaire

A) Révisions des bases

On note "$\cdot$" le produit scalaire

Exercice: 0.7 (Vrai / Faux)
Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$
   Correction : *Vrai, c'est la définition du produit-scalaire*
2. *Un produit scalaire est toujours positif*
   Correction : *Faux, par exemple avec* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *on a* $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$
3. *Si* $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w}$ *alors* $\vec{u} = \vec{v}$
   Correction : *Faux, par exemple si* $\vec{w} = \vec{0}$
4. *L'ensemble des points* M *du plan tels que* $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ *(où* $k \in \mathbb{R}$*) est un cercle de centre le milieu* $[AB]$.
   Correction : *Faux, on a la propriété* $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$ *où* I *est le milieu de* AB.
   Si on prend AB=2, alors pour les $k < -1$ *les points M définient comme ci-dessus, représentent l'ensemble vide.*
5. *Si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont deux vecteurs non nuls orthogonaux, alors :*

$$||\vec{u} + \vec{v}|| = ||\vec{u} - \vec{v}||$$

   Correction : *Vrai, on utilise les propriétées du produit-scalaire :*
   $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||u \vec{-} v||^2)$ *et* $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(-||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2 + ||u \vec{+} v||^2)$

Exercice: 0.8 (Calcul de longueur)
ABC est un triangle. H est le pied de la hauteur issue de A, et $H \in [BC]$.
On a : $AB = 3$, $BH = 2$ et $HC = 3$.

1. *Calculer* $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$
   Correction : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 10$
2. *En déduire la longueur* AC
   Correction : $AC = \sqrt{14}$

B) Approfondissement

Exercice: 0.9
Dans un repère othonormé, on considère les points $A = (-3; 2)$, $B = (3; 5)$ *et* $C = (5; -4)$.

1. *Calculer* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
   Correction : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 30$
2. *Calculer les distances* AB *et* AC
   Correction : $AB = \sqrt{45}$ *et* $AC = 10$
3. *Déduire des questions précédentes une valeur approchée au degré près de l'angle* $\widehat{BAC}$
   Correction : $\widehat{BAC} \approx 63$ *degrés*
4. *Soit* $D = (1,5; 3)$. *Montrer que* $(CD) \perp (AB)$ *et que* $(BD) \perp (AC)$
   Correction : *On calcule le produit scalaire de ces vecteurs, et on trouve 0*
5. *Que représente le point* D *pour le triangle* ABC *?*
   Correction : *C'est l'orthocentre, car il est l'intersection des hauteurs du triangle*
6. *Soit* H *le point d'intersection des droites* (BD) *et* (AC).
   Sans faire de calcul, expliquer pourquoi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AH \times AC$. *En déduire* $AH = 3cm$
   Correction : *Par définition,* H *est le projeté orthogonal de* B *sur* (AC). *Donc, par définition du produit scalaire,* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AH \times AC$.
   Or $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 30$ *d'après la question 1.*
   Donc $AH \times AC = 30$, *soit* $AH = \frac{30}{AC} = \frac{30}{10} = 3$

IV) Variables aléatoires réelles

A) Révisions des bases

Exercice: 0.10 (Vrai / Faux)
Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. *Soit* X *une variable aléatoire définie sur* $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$*. Alors :* $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(X = x_k)$
   Correction : *Vrai, c'est la définition de l'espérence d'une variable aléatoire.*
2. *Si une variable aléatoire* X *ne prend que des valeurs positives ou nulle, alors* $E(X) \geq 0$
   Correction : *Vrai, on utilise la définition, on voit que c'est une somme de termes toujours positifs dans ce cas là.*
3. *Si* $E(X) \geq 0$ *alors la variable aléatoire* X *ne prend que des valeurs positives ou nulle*
   Correction : *Faux, on prend la loi uniforme sur* $\Omega = \{-1; 1; 2\}$

Exercice: 0.11 (Ticket gagnant)
Un supermarché de San Francisco distribue des tickets à ses 1000 premiers clients. 500 tickets font gagner 10\$*, 90 font gagner* 20\$*, 10 font gagner* 50\$ *et 400 ne font rien gagner. Un ticket est distribué au hasard à chaque client à son passage en caisse.* X *est la variable aléatoire qui à chaque ticket distribué associe le gain inscrit sur celui-ci.*

1. *Déterminer l'ensemble des valeurs prises par* X
   Correction : *X prend les valeurs 0, 10 ,20 et 50*
2. *Dresser le tableau de la loi de probabilité de* X
   Correction :

Gain x_i	0	10	20	50
P(X=x_i)	0,4	0,5	0,09	0,01

3. *Quelle est la probabilité d'obtenir un ticket faisant gagner* 20\$ *ou plus ?*
   Correction : $P(X \geq 20) = 0,1$
4. *Quelle est l'espérance mathématique de la variable aléatoire* X *?*
   Correction : $\mathbb{E}(X) = 7,3$

B) Approfondissement

Exercice: 0.12 (Loi d'une variable aléatoire)
Une urne contient 10 boules blanches et n *boules noires,* n *étant un nombre entier supérieur ou égal à 2.*
Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.
Pour chaque boule blanche obtenue on gagne 2 *et pour une boule noire on perd* 3*. On désigne par* X *la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur*

1. *Le joueur tire une boule*
   (a) *Quelles sont les valeurs prises par* X *?*
   Correction : *X peut prendre* -3 *et* 2
   (b) *Donner, en fonction de* n*, la loi de probabilité de* X
   Correction :

x_i	-3	2
P(X=x_i)	$\frac{n}{10+n}$	$\frac{10}{10+n}$

   (c) *Exprimer* $E(X)$ *en fonction de* n
   Correction : $\mathbb{E}(X) = \frac{-3n+20}{10+n}$
   (d) *Déterminer les valeurs de* n *pour lesquelles le jeu est favorable au joueur.*
   Correction : *Le jeu est favorable aux joueurs si* $\mathbb{E}(X) \geq 0$*. Or,* n *est un nombre positif, donc le jeu est favorable au joueur si et seulement si :*

$$-3n + 20 > 0 \Leftrightarrow n < \frac{20}{3}$$

   n *est un nombre entier supérieur ou égal à 6, donc le jeu est favorable au joueur pour 2,3,4,5 et 6*
2. *Le joueur tire successivement deux boules, et sans remise.*
   (a) *Quelles sont les valeurs possibles pour* X
   Correction : *X peut prendre* -6*,* -1 *et* 4*. Car il peut perdre les deux parties, perdre une partie et gagner l'autre ou il peut gagner les deux parties.*

(b) *Donner la loi de probabilité de X*

Correction : *On peut faire un arbre de probabilités pour s'aider à mieux comprendre les issues de l'expérience aléatoire. On obtiendra alors :*

x_i	-6	-1	4
$P(X=x_i)$	$\frac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)}$	$\frac{20n}{(n+10)(n+9)}$	$\frac{90}{(n+10)(n+9)}$

(c) *Exprimer $E(X)$ en fonction de n*

Correction : $\mathbb{E}(X) = \frac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)}$

(d) *Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le jeu est défavorable au joueur*

Correction : *De même que pour la question 1) on cherche lorsque $\mathbb{E} > 0$. On cherche donc le signe de $-6n^2 - 14n + 360$.*

On obtient les racines $n_1 = \frac{20}{3}$ et $n_2 = -9$. Le coefficient de n^2 étant négatif, on en déduit que $\mathbb{E} > 0$ entre les racines. D'où pour $0 < n < \frac{20}{3}$. Le jeu est donc favorable pour les valeurs 2,3,4,5 et 6. Et défavorable pour les valeurs supérieures à 7.