Chapitre 10 : Géométrie plane

Ref _ [Déclic 2nd _ 2019]

5 avril 2025

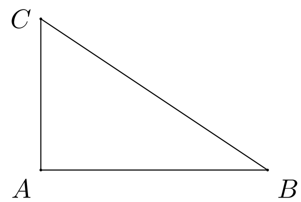
Activité d'introduction

Démonstration du théorème de pythagore par les figures

1 Problèmes de longueur et d'angle

1.1 Calculer des longueurs

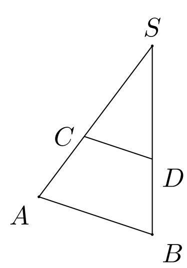
Théorème: (De pythagore (et réciproque))
Si ABC est un triangle rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$
Réciproquement, si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A



Théorème: (De Thales (et réciproque))
On considère deux triangles SAB et SCD tels que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
On a alors les longueurs des triangles SAB et SDC qui sont proportionnelles et vérifient :

$$\frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD} = \frac{AB}{CD}$$

Réciproquement, si les côtés des triangles SAB et SDC sont proportionnels, alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles



Application : Exercice 3 p 103

1.2 Calculer des angles

Propriété:
Dans un triangle rectangle, on note α un autre angle que l'angle droit.
On a les relations trigonométriques suivantes :

$$cos(\alpha) = \frac{adjacent}{hypothenuse} \quad , \; sin(\alpha) = \frac{oppose}{hypothenuse} \quad , \; tan(\alpha) = \frac{oppose}{adjacent}$$

Remarque : On a pour tous $\alpha \in [0;90]$ que $cos(\alpha)$ et $sin(\alpha)$ sont compris entre $]0;1[$ car le côté hypothénuse est le plus grand des trois côtés.

Propriété:
Soit α un angle aigu (angles inférieur à 90°) d'un triangle rectangle, on a la relation trigonométrique suivante :

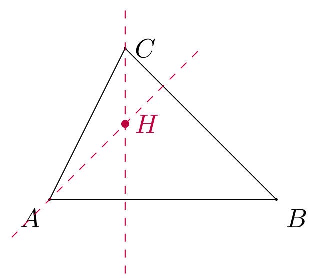
$$cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) = 1$$

Propriété:
Dans un triangle, la somme des angles fait 180°.

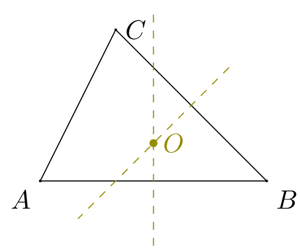
Application : Exercice 1,2 p 103

2 Droites remarquables du triangle

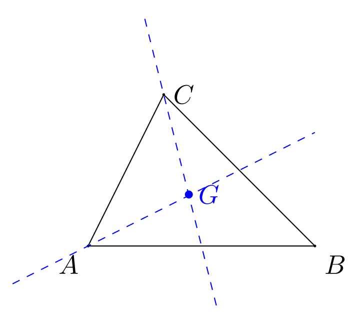
Propriété: (Point concourants des hauteurs)
Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes, et on appel ce point H <u>l'orthocentre</u> du triangle



Propriété: (Point concourants des médiatrices)
Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes, et ce point O est <u>le centre du cercle circonscrit</u> du triangle.



Propriété: (Point concourants des médianes)
Les trois médianes d'un triangle sont concourantes, et ce point G est <u>le centre de gravité</u> du triangle.



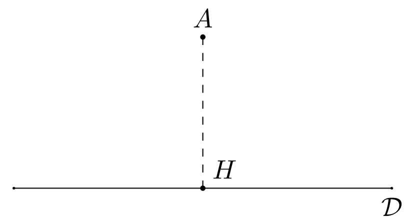
Remarque : Un propriété intéressante du cercle circonscrit qu'on utilisera souvent (surtout l'année prochaine pour les Spé) est la suivante :

Dans un triangle rectangle, l'hypothénuse est un diamètre du cercle circonscrit.
Réciproquement, si B appartient au cerclce de diamètre [AC], alors le triangle ABC est rectangle en B.

3 Projeté orthogonal, symétries et translations

3.1 Projection orthogonale

Définition 1
Soient $\mathcal{D}$ une droite du plan et A un point.
On appelle projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$ le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ avec la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par A.



Propriété:
La distance du point A à la droite $\mathcal{D}$ est la plus petite distance séparant un point de $\mathcal{D}$ avec A. Elle est égale à AH où H est le projeté orthogonal du point A sur $\mathcal{D}$.

Preuve : Notons d la distance entre A et $\mathcal{D}$. Soit M un point de $\mathcal{D}$, distinct de H.
Le triangle AMH est rectangle en H. Grâce au théorème de Pythagore, on peut affirmer que l'hypoténuse [AM] est le plus grand des côtés du triangle AMH. Donc AM>AH.
Ainsi, la plus petite distance séparant A d'un point de $\mathcal{D}$ est égale à AH.
On en déduit que AH=d

Remarque : Par exemple les "hauteurs" d'un triangle sont les projetés orthogonaux des sommets sur leurs côtés opposés.

3.2 symétrie orthogonale d'axe Δ

Définition 2
On considère deux points distincts A et A' et une droite (Δ).
On dit que les points A et A' sont symétriques par rapport à (Δ) si (Δ) est la médiatrice du segment $[AA']$.
Dans le cas où les points A et A' sont confondus, A et A' sont symétriques par rapport à toutes droites passant par A.

3.3 Symétrie de centre O

Définition 3
On considère deux points distincts A et A' et un troisième point O.
A' est le symétrique de A par rapport à O si O est le milieu de [AA'].
Si A et A' sont confondus, ils sont symétriques par rapport à A lui-même.

3.4 Translations

Définition 4
On considère deux points distincts P et P'. On appelle translation qui envoie A sur A' la transformation dont l'image A' d'une figure F est obtenue en faisant glisser la figure F :

1. *selon la direction de la droite (AA'),*
2. *dans le sens de A vers A',*
3. *d'une longueur égale à AA'*

4 Problème concret : J'ai besoin de vous !

Voici mon problème. J'aimerai vous faire un cours propre sur les droites remarquables des triangles.

Pour cela j'aimerais noter proprement le point d'intersection des hauteurs, médiatrices et médianes. Mais j'ai besoin de connaître les coordonnées de ces points pour pouvoir les créer sur mes figures !
Les informations dont je dispose sont les suivantes :

1. **Hauteurs** :
   - les points $A_1 = (1; 2,5)$ et $A_2 = (1; -1)$ appartiennent à ma première droite d_1
   - les points $B_1 = (-0,5; -0,5)$ et $B_2 = (2; 2)$ appartiennent à ma seconde droite d_2
2. **Médiatrices** :
   - les points $A_1 = (1,5; 2,2)$ et $A_2 = (1,5; -1)$ appartiennent à ma première droite d_1
   - les points $B_1 = (2,5; 1,5)$ et $B_2 = (0,5; -0,5)$ appartiennent à ma seconde droite d_2
3. **Médianes** :
   - les points $A_1 = (-1,5; -0,5)$ et $A_2 = (3; 1,5)$ appartiennent à ma première droite d_1
   - les points $B_1 = (0,75; 3)$ et $B_2 = (1,75; -1)$ appartiennent à ma seconde droite d_2

(Les droites d_1 et d_2 étant respectivement les hauteurs, médiatrices et médianes.)

Pouvez vous me donner ces points ? ?