Fiche exercice : Chapitre 8_Equations de droites. Systèmes linéaires

Ref [Déclic Mathématiques 2de - 2019]

5 avril 2025

Equation cartésienne d'une droite

Exercices 1,2,3 p 191

Résolution de systèmes linéaires à deux équations et deux inconnues

Exercices 6,7 p 195

Exercices 77 , 78 , 79 p 203

Déterminer l'équation d'une droite parallèle à une droite donnée

Exercices 80 , 81 , 82 p 203

Entrainement

Exercices 38 p 200 : (QCM : équation cartésienne d'une droite)

Exercices 49 p 201 : (Tracer des droites + intersection)

Exercices 55 p 201 : (Tracer des droites + intersection)

Exercice 99 p 205 : (Exercice appliqué)

Exercice 93 p 204 : (Preuve : coefficient directeur d'une droite)

Exercices d'applications sur les systèmes d'équations à deux inconnues :

Exercice : Note d'un élève

Après 4 devoirs, la moyenne d'un élève est 9,5. Quelle doit être sa cinquième note pour que sa moyenne soit de 10 ?

Exercice : Le théâtre

Une salle de théâtre compte 150 places, les unes coûtes 21€, les autres 26€.
Quand la salle est pleine, la recette totale est de 3300€.

Résoudre ce problème par un système de deux équations à deux inconnues

EXERCICES CORRIGEES :

Exercice 3 p 191

Soient $M = (-2; 5), N = (8; 0)$ et $P = (-3; 3)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par P et parallèle à la droite (MN)
2. Le point $R = (15; -6)$ est-il sur la droite d ? Justifier.

1. On cherche la droite d passant par P et parallèle à (MN).
   Donc on cherche les points $X = (x, y)$ où $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{PX}$ est colinéaire à $\vec{MN}$.
   On a : $\vec{PX} = \begin{pmatrix} x+3 \\ y-3 \end{pmatrix}$ et $\vec{MN} = \begin{pmatrix} 8+2 \\ 0-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix}$.
   D'où :
   $$det(\vec{PX}, \vec{MN}) = \begin{vmatrix} x+3 & 10 \\ y-3 & -5 \end{vmatrix} = (x+3) \times (-5) - (y-3) \times 10 = -5x - 10y + 15 = 0$$
   On obtient l'équation cartésienne suivante : $(d) : -5x - 10y + 15 = 0$
2. On remplace les coordonnées du point $R = (15, -6)$ dans l'équation de la droite d. On obtient :
   $$-5 \times 15 - 10 \times (-6) + 15 = -75 + 60 = -15$$
   Donc le point R n'est pas sur la droite d

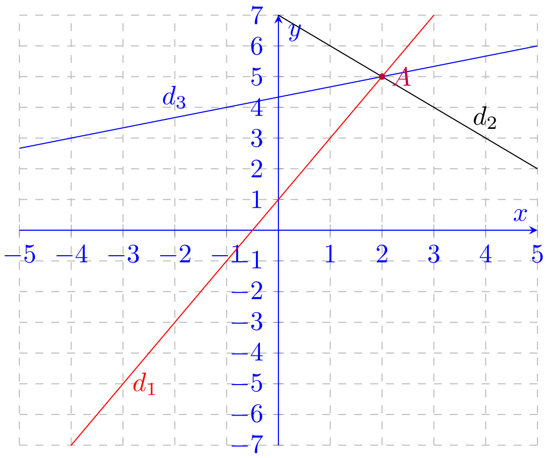
Exercice 49 p 201

On considère trois droites :

$$d_1 : y = 2x + 1 \ ; \ d_2 : y = -x + 7 \ \ et \ \ d_3 : y = \frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$$

1. (a) Tracer dans un repère les trois droites.
   (b) Vérifier graphiquement que les droites sont concourantes en un point A dont on conjecturera les coordonnées.
2. Démontrer la conjecture de la question 1.b.

Correction :



1. (a)
   (b) On peut conjecturer que graphiquement ces trois droites sont concourantes en un point $A = (2; 5)$
2. On résoud le système
   $$(S) : \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 & (d_1) \\ x + y - 7 = 0 & (d_2) \end{cases}$$

Ici on faira la méthode par combinaisons linéaires. On a :

$$(S) \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 2x - y + 1 = 0 & (d_1) \\ 2x + 2y - 14 = 0 & (d_2') = 2 \times (d_2) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 2x - y + 1 = 0 & (d_1) \\ 3y - 15 = 0 & (d_2'') = (d_2') - (d_1) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 2x - y + 1 = 0 & (d_1) \\ y = \frac{15}{3} = 5 & (d_2'') \end{array} \right.$$

On remplace $y = 5$ dans l'équation d_1 on obtient : $2x - 5 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{2} = 2$.
Finalement, le point $A = (2, 5)$ est l'intersection des droites (d_1) et (d_2). On vérifie que ce point appartient également à la droite (d_3). *(c'est-à-dire : qu'il satisfait les conditions de son équation cartésienne.)*
On obtient :

$$5 - \frac{1}{3} \times 2 - \frac{13}{3} = 5 - \frac{2 + 13}{3} = 5 - 5 = 0$$

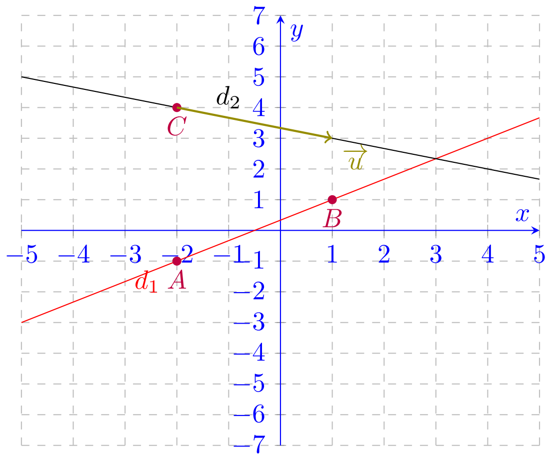
Donc le point A est bien un point concourant aux trois droites $(d_1), (d_2)$ et (d_3)

Exercice 55 p 201

Soit d_1 la droite passant par $A = (-2; -1)$ et $B = (1; 1)$. Soit d_2 la droite passant par $C = (-2; 4)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

1. Tracer les droites d_1 et d_2
2. Déterminer une équation cartésienne de d_1 et d_2
3. Justifier que les droites d_1 et d_2 sont sécantes.
4. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection d_1 et d_2. Vérifier graphiquement.

Correction :

1. 

2. **(méthode brute)**

Droite d_1 : On a $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 - (-2) \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ qui est un vecteur directeur de la droite $d_1 = (AB)$.
On a donc l'équation $d_1 : ax + by + c = 0$ où $a = 2$ et $-b = 3$. D'où :

$$d_1 : 2x - 3y + c = 0$$

De plus $A = (-2; -1) \in d_1$. D'où : $2 \times (-2) - 3 \times (-1) + c = 0 \Leftrightarrow -4 + 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = 1$.
Donc

$$d_1 : 2x - 3y + 1 = 0$$

Droite d_2 : On a $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui est un vecteur directeur de d_2, et $C = (-2; 4) \in d_2$. On cherche à déterminer tous les points $M=(x,y)$ où $x,y\in\mathbb{R}$ qui définissent la droite d_2. On a que :

$$\begin{aligned}
M\in d_2 &\Leftrightarrow \vec{MC}\ et\ \vec{u}\ sont\ colineaires\\
&\Leftrightarrow det(\vec{MC},\vec{u})=0\\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix}-2-x & 3\\ 4-y & -1\end{vmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow (-2-x)\times(-1)-(4-y)\times 3=0\\
&\Leftrightarrow 2+x-12+3y=0\\
&\Leftrightarrow x+3y-10=0
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient l'équation

$$d_2 : x+3y-10=0$$

3. Par une lecture graphique, on conjecture que les deux droites sont sécantes.
4. On résoud le système

$$(S):\begin{cases}2x-3y+1=0 & (d_1)\\ x+3y-10=0 & (d_2)\end{cases}$$

Ici on faira la méthode par combinaisons linéaires. On a :

$$\begin{aligned}
(S) &\Leftrightarrow \begin{cases}2x-3y+1=0 & (d_1)\\ 3x+0y-9=0 & (d_2')=(d_2)+(d_1)\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}2x-3y+1=0 & (d_1)\\ x=\frac{9}{3}=3 & (d_2')\end{cases}
\end{aligned}$$

On remplace $x=3$ dans l'équation d_1 on obtient : $2\times 3-3y+1=0\Leftrightarrow 3y=7\Leftrightarrow y=\frac{7}{3}$.
Finalement, le point $P=(3,\frac{7}{3})$ est l'intersection des droites (d_1) et (d_2).

Exercice : Note d'un élève

On résoud un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{aligned}
(S): &\quad \begin{cases}\frac{S}{4}=9,5\\ \frac{S+x}{5}=10\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}S=4\times 9,5\\ S+x=5\times 10\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}S=38\\ S+x=50\end{cases}
\end{aligned}$$

On obtient donc : $38+x=50\Leftrightarrow x=12$.

Exercice : Le théâtre

On résoud un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{aligned}
(S): &\quad \begin{cases}x+y=150\\ 21x+26y=3300\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}y=150-x\\ 21x+26y=3300\end{cases}
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
21x+26(150-x)=3300 &\Leftrightarrow 21x+26\times 150-26x=3300\\
&\Leftrightarrow 21x+26\times 150-26x=3300\\
&\Leftrightarrow -5x+3900=3300\\
&\Leftrightarrow -5x=-600\\
&\Leftrightarrow x=\frac{-600}{-5}=120
\end{aligned}$$

Et finalement, $y=150-120=30$.
Il y a donc 120 places à 21€ et 30 places à 26€ On obtient donc : $38+x=50\Leftrightarrow x=12$.
l'élève doit avoir une note de 12 pour avoir une moyenne finale de 10.