Chapitre 9 : La fonction exponentielle
Ref [Déclic 1ière spé math _ p177] / https://www.annales2maths.com/1ere-cours-fonction-exponentielle/

5 avril 2025

Introduction : (*Acivité 2 p 178_ La méthode d'Euler*)

1 Définition et propriétés algébriques

1.1 Définition

Théorème 0.1 (Théorème/Définition (admis))
Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, qui vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) & ,\forall x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On appelle cette fonction, la fonction exponentielle, et on la note exp telle que :

$$exp'(x) = exp(x) \quad et \quad exp(0) = 1$$

Remarque : On a conjecturé l'existence de cette fonction grâce à la méthode d'Euler.

Une propriété essentielle pour la suite :

Propriété: 0.1
La fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

Preuve : On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = exp(x) \times exp(-x).$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
En utilisant la formule $(f \circ g)'$ on a $(exp(-x))' = -exp(-x)$ et on obtient : $g'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
La fonction g est donc constante sur $\mathbb{R}$.
Or $g'(0) = exp(0) \times exp(-0) = 1 \times 1 = 1$.
Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $exp(x) \times exp(-x) = 1$ et la fonction exp ne s'annule donc pas sur $\mathbb{R}$.

1.2 Propriétés algébriques

Propriété: 0.2

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a :

1. $exp(x + y) = exp(x) \times exp(y)$
2. $exp(-x) = \frac{1}{exp(x)}$
3. $exp(x - y) = \frac{exp(x)}{exp(y)}$
4. $exp(n \times x) = (exp(x))^n$

Preuve :

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = exp(a + b - x) \times exp(x).$$

   Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Par un calcul direct on a $f'(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. La fonction f est donc constante sur $\mathbb{R}$.
   Mais $f(0) = exp(a + b) \times exp(0) = exp(a + b)$.
   Ainsi pour tous réels x, on a donc $f(x) = exp(a + b - x) \times exp(x) = exp(a + b)$.
   En particulier, pour $x = b$, on obtient $f(b) = exp(a) \times exp(b) = exp(a + b)$
   Les propriétés suivantes vont découler de celle-ci.
2. $exp(0) = exp(x + (-x)) = exp(x) \times exp(-x)$. Donc $exp(-x) = \frac{1}{exp(x)}$
3. On a :
$$\begin{aligned} exp(x - y) &= exp(x + (-y)) \\ &= exp(x) \times exp(-y) \\ &= exp(x) \times \frac{1}{exp(y)} \\ &= \frac{exp(x)}{exp(y)} \end{aligned}$$
4. On montre le résultat pour $n \in \mathbb{N}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose la suite : $u_n = exp(nx)$.
   On a donc $u_{n+1} = exp((n + 1)x) = exp(nx + x) = exp(nx) \times exp(x) = u_n \times exp(x)$.
   Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $exp(x)$ et de premier terme $exp(0 \times x) = 1$.
   Donc $u_n = exp(nx) = (exp(x))^n \times 1$

   On peut prolonger le résultat pour $n \in \mathbb{Z}$ en utilisant la formule 2)

Exercices 1,2,3,4 p 181

1.3 Notation e^x

Par convention on note $exp(1) = e$ dont la valeur approchée est $2,7182$. On nomme ce nombre la *la constante d'Euler*.

Définition 1
On généralise l'écriture de l'exponentielle à tous les réels x, par : $exp(x) = e^x$.
On note e la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x lui associe e^x

Remarque : Toutes les propriétés vues précédemment se réécrivent de la même manière.

Propriété: 1.1
Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a :

1. $e^{x+y} = e^x \times e^y$
2. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
3. $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
4. $e^{n\times x} = (e^x)^n$

1.4 Lien avec les suites géométriques

Propriété: 1.2
Pour tout réel a, (e^{na}) est une suite géométrique de raison e^a et de premier terme 1.

Preuve : On a pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $e^{na} = (e^a)^n$. On pose $u_n = (e^a)^n$ qui est bien une suite géométrique de raison e^a et de terme initial $u_0 = 1$

Remarque : La fonction exponentielle généralise la notion des suites géométrique sur $\mathbb{R}$.

2 Etude de la fonction exponentielle

2.1 signe et sens de variations

Propriété: 1.3 (positivité de l'exponentielle)
Pour tout réel x, on a $exp(x) > 0$

Preuve : Pour tous $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} exp(x) &= exp(\tfrac{x}{2} + \tfrac{x}{2}) \\ &= exp(\tfrac{x}{2}) \times exp(\tfrac{x}{2}) \\ &= (exp(\tfrac{x}{2}))^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

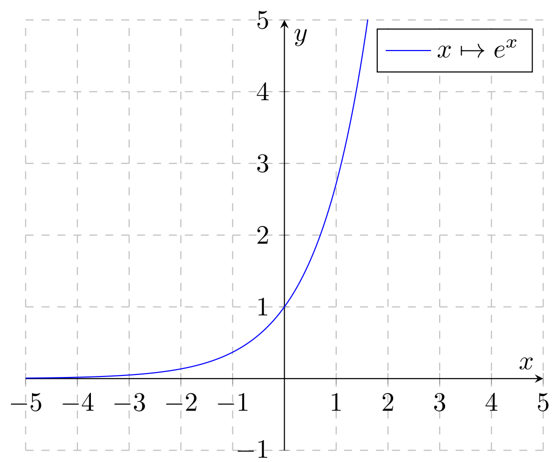
L'inégalité est stricte, car on a montré que l'exponentielle n'est jamais égale à 0.

Propriété: 1.4 (croissance strict de l'exponentielle)
L'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Preuve : Pour tous $x \in \mathbb{R}$, on a $(exp(x))' = exp(x) > 0$.
Donc l'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

On obtient le tableau de variation de la fonction exponentielle et une représentation graphique qui sont :

x	$+\infty$		$+\infty$
$exp'(x)$		$+$	
$exp(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



2.2 Conséquences

Propriété: 1.5

Pour tous réels x et y, on a :

1. $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
2. $e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$
3. $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$

Preuve : 1) Comme la fonction exp est bien définie sur $\mathbb{R}$ alors pour tous réels $x = y$ on a nécessairement $e^x = e^y$. *(Elle ne peut pas prendre deux valeurs pour un point donné.)*
D'autre part, comme cette fonction est strictement croissante alors elle connait nécessairement un unique antécédent par valeurs prises par la fonction.
C'est à dire $e^x = e^y \Rightarrow x = y$
Les points 2) et 3) découlent de la croissance stric de la fonction.

2.3 Dérivée de la fonction

Propriété: 1.6

Pour toutes fonction u dérivables sur $\mathbb{R}$, on a :

$$(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$$

Preuve : On utilise la formule $(f \circ g)' = f' \circ g \times g'$ pour le montrer.
En effet, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{u(x)} = (exp \circ u)(x)$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (e^{u(x)})' &= (exp' \circ u)(x) \times u'(x) \\ &= (exp \circ u)(x) \times u'(x) \\ &= u'(x)e^{u(x)} \end{aligned}$$

Remarque : On a une conséquence directe $\forall a, b \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$

Exercices 7,8,9,10 p 185