Chapitre 6 : Vecteurs et coordonnées dans le plan

Ref _ [Déclic 2nd _ 2019] et [Lionel Ponton]

5 avril 2025

Activité d'introduction

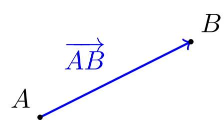
Activité 1 p 128

1 Définitions

1.1 translation et vecteur

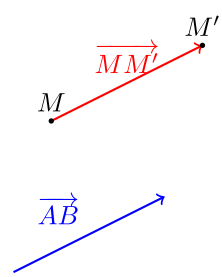
Définition 1
Soit A et B deux points distincts du plan. On définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par :

1. *sa direction qui est donnée par la droite (AB) (ou n'importe quelle parallèle à (AB));*
2. *son sens qui est le sens de A vers B;*
3. *sa norme qui est la longueur AB et que l'on note*



Remarque : Si A, B, C et D sont quatre points distincts alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si ils ont même direction, même sens et même norme c'est-à-dire si et seulement si (AB) est parallèle à (CD), le sens de A vers B est le même que le sens de C vers D et AB = CD.

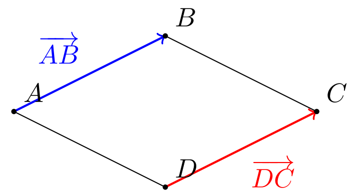
Définition 2
Soit A et B deux points distincts du plan. La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$



1.2 La règle du parallélogramme

Propriété: 2.1
Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan. Le trois affirmations suivantes sont équivalentes :

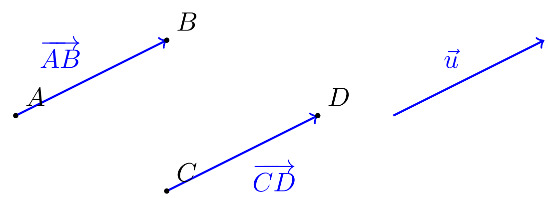
1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
2. *le quadrilatère ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati) ;*
3. *le point D est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.*



Remarque : *Attention, le parallélogramme ABCD se déssine comme ci dessus, car on vas du point A, au point B, au point C puis au point D. Donc c'est bien : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ dans la propriété, et non $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$*

1.3 Notation du vecteur

Définition 3
Si A, B, C et D sont quatre points distincts du plan tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, on dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants d'un même vecteur que l'on peut noter avec une seule lettre, par exemple $\overrightarrow{u}$ (ou $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$,...)



2 Opérations sur les vecteurs

2.1 Additions et soustractions

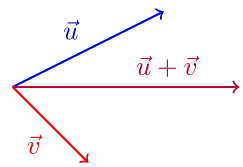
Définition 4
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur. On définit le vecteur opposé de $\overrightarrow{u}$, noté -$\overrightarrow{u}$, de la manière suivante :

1. *si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors -$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$;*
2. *si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ alors -$\overrightarrow{u}$ est le vecteur ayant la même direction et la même norme que $\overrightarrow{u}$ mais ayant le sens contraire.*

Définition 5
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On définit :

1. *la somme de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ comme le vecteur associé à la translation obtenue par l'enchaînement de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$. On note ce vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.*
2. *la différence de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ comme le vecteur $\overrightarrow{u}$ + (-$\overrightarrow{v}$). On note ce vecteur $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}$.*

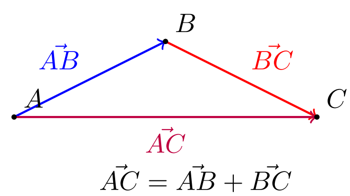
Exemple :



2.1.1 La relation de Chasles

Définition 6 (Relation de Chasles)
Soit A, B et C trois points du plan. Alors, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Visualisation :

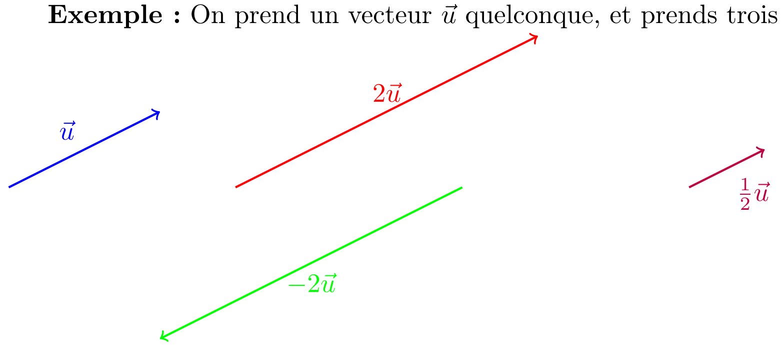


2.2 Multiplications par un réel

Définition 7
Soit $\overrightarrow{u}$ *un vecteur du plan et k un nombre réel. On définit le vecteur* $k\overrightarrow{u}$ *de la manière suivante :*

1. *si* $k=0$ *ou* $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ *alors* $k\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ *;*
2. *si* $k\neq 0$ *et* $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$ *alors* $k\overrightarrow{u}$ *est le vecteur qui a :*
   (a) *le même sens que* $\overrightarrow{u}$ *si* $k>0$ *et le sens contraire si* $k<0$ *;*
   (b) *une norme égale à* $|k|\times||\overrightarrow{u}||$ *;*
   (c) *la même direction que* $\overrightarrow{u}$ *;*

Exemple : On prend un vecteur $\vec{u}$ quelconque, et prends trois réels : 2 ;-2 et $\frac{1}{2}$. On a :



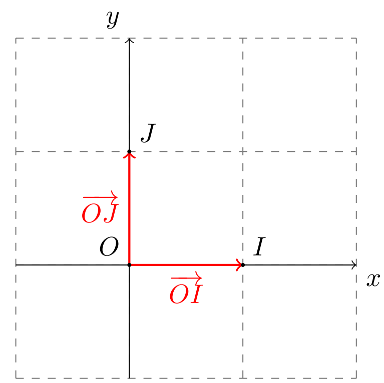
Propriété: 7.1
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *et tous réels k et k', on a :*

1. $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$
2. $(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$
3. $k(\vec{u}-\vec{v})=k\vec{u}-k\vec{v}$
4. $k(k'\vec{u})=(kk')\vec{u}$
5. $k\vec{u}=\vec{0}$ *si et seulement si* $k=0$ *ou* $\vec{u}=\vec{0}$

3 Coordonnées d'un vecteur

3.1 Repère orthonormé

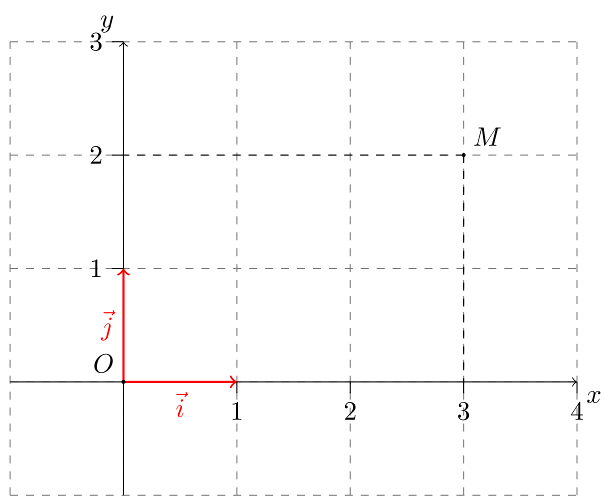
Définition 8
Un repère du plan, défini par trois points non alignés O,I et J, est orthonormé lorsque le triangle OIJ est rectangle isocèle en O.
Le point O est l'origine du repère, la droite (OI) est l'axe des abscisses et la droite (OJ) est l'axe des ordonnées.
On a OI=OJ=1 unité.



Remarque :

- Le repère se note (O ;I ;J) ou (O ;$\overrightarrow{OI}$,$\overrightarrow{OJ}$). En posant $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{j}$, le repère (O ;I ;J) peut aussi s'écrire (O ; $\overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{j}$)
- Dans un repère, tout point M est repéré par un unique couple de nombres réels $(x_M ; y_M)$ appelé coordonnées du point M. On écrit $M = (x_M ; y_M)$.
  x_M est l'abscisse de M et y_M est l'ordonnée de M.

Exemple : M=(x_M ;y_M)=(3 ;2)



3.2 Coordonnées d'un vecteur

Propriété: 8.1

- *Pour tout point* $M = (x;y)$ *dans un repère* $(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j})$*, on a :*

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$$

On dit que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *dans la base* $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j})$

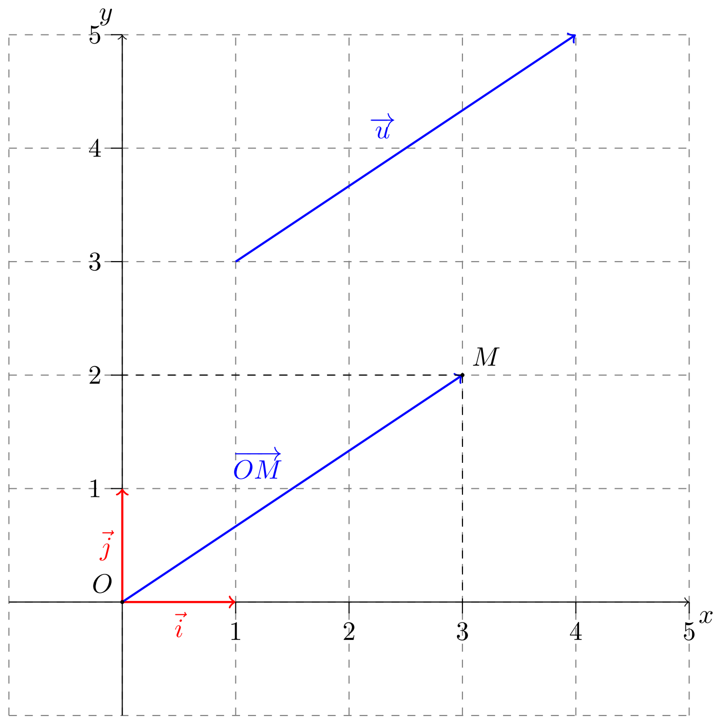
- *Pour tout vecteur* $\overrightarrow{u}$ *dans le repère* $(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j})$ *; il existe un unique couple de réels (x ;y) tel que*

$$\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$$

.

On dit que le vecteur $\overrightarrow{u}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *dans la base* $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j})$

Exemple :



$$Ici\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Propriété: 8.2

Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *deux vecteurs dans un repère* $(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j})$ *et k un réel.*

1. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ *si et seulement si* $x = x'$ *et* $y = y'$
2. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$
3. $k\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Propriété: 8.3

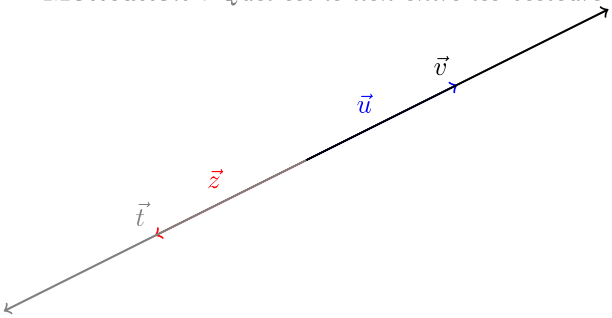
Soient $A = (x_A; y_A)$ *et* $B = (x_B; y_B)$ *dans un repère* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*. On a alors :*

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Preuve : Exercice 67 p 144

4 colinéarité et alignements

Motivation : *Quel est le lien entre les vecteurs suivants : $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{z}$ et $\vec{t}$?*



4.1 Vecteurs colinéaires

Définition 9
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k \times \vec{v}$.
Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.

Exemple: 9.1
On considère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan

1. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées respectives : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ -15 \end{pmatrix}$.*
   On a que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car : $10 = 5 \times 2$ *et* $-15 = 5 \times -3$. *Donc* $\vec{v} = 5 \times \vec{u}$
2. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées respectives : $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{15} \end{pmatrix}$.*
   On a que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car : $\frac{2}{9} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$ *et* $-\frac{1}{5} = \frac{2}{3} \times -\frac{3}{5}$. *Donc* $\vec{v} = \frac{2}{3} \times \vec{u}$
3. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées respectives : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \end{pmatrix}$.*
   On a que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires car : $8 = 4 \times 2$ *mais* $-10 \neq 5 \times 2$

4.2 Déterminant de deux vecteurs

Quand les vecteurs sont "grands" on aimerait avoir une méthode simple et efficace de déterminer si ils sont colinéaire. D'où l'introduction de l'objet mathématique suivant : Le déterminant

Définition 10
Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère du plan et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pour coordonnées respectives dans ce plan : $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
Le nombre $x \times y' - y \times x'$ est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans ce repère. On le note :

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x \times y' - y \times x'$$

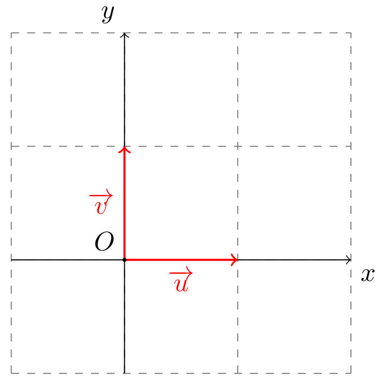
Remarque : On peut observer que le déterminant de deux vecteurs donne l'air du parallélogramme formé par ces vecteurs.

Exemple: 10.1
Dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui ont pour coordonnées respectives dans ce plan : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$$

Le déterminant de ces deux vecteurs est 1.
De plus l'air formé par les vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forme un carré de côté 1. Son air est également égale à 1.

En effet ;



ATTENTION : Le déterminant de deux vecteurs peut être également négatif. Cela représente toujours l'air, le signe du déterminant donne simplement une information sur le sens de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

4.3 Déterminant et propriétés

4.3.1 Utilisation du déterminant

Propriété: 10.1
Dans un repère, on donne les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. et $\vec{u} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, si, et seulement si leur déterminant est nul.
C'est à dire si et seulement si $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x \times y' - y \times x' = 0$

Exemple: 10.2

1. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ -15 \end{pmatrix}$ *sont colinéaires ?*
   Réponse : $2 \times (-15) - (-3) \times 10 = -30 + 30 = 0$. $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont donc colinéaires.*
2. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix}$ *sont colinéaires ?*
   Réponse : $7 \times 8 - (-4) \times 14 = 56 - (-56) = 56 + 56 = 112 \neq 0$. $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *ne sont donc pas colinéaires.*

Propriété: 10.2
On considére A,B,C et D quatre points du plan.

1. *Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont colinéaires.*
2. *Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont colinéaires.*

Exemple: 10.3

1. *Soit les points* $A = (1; -2)$, $B = (4; 3)$ *et* $C = (10; 13)$.
   Pour savoir s'ils sont alignés on calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *:*
   $$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 3-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 10-1 \\ 13-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix}$$
   On a donc $\overrightarrow{AB} = 3 \times \overrightarrow{AC}$. *Donc les points sont alignés.*
2. *Soit les points* $A = (1; 3)$, $B(5; 2)$, $C(6; 5)$ *et* $D = (10; -2)$.
   Pour savoir si les droites (AB) et (CD) sont parallèles on calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *:*
   $$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 10-4 \\ -2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$$
   Le déterminant des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *est* $4 \times (-7) - (-1) \times 6 = -28 + 6 = -22 \neq 0$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *ne sont pas colinéaires, les droites ne sont donc pas parallèles.*

4.3.2 Interprétation géométrique du déterminant

Voir vidéo youtube : "https ://www.youtube.com/watch ?v=zLYLGdpHxl4"
(ou tapper : "Interprétation géométrique du déterminant" sur youtube)