

MATH0062-1 - Éléments du Calcul des Probabilités

Projet 2

Généralités

Le deuxième travail du cours d'*éléments de probabilités* portera sur un problème plus réaliste que lors du premier projet. Il s'agira de la modélisation de la défaillance d'une ligne de production. Ce travail a pour but de familiariser les étudiants avec des systèmes de plusieurs variables aléatoires.

Ce travail devra être réalisé individuellement. Chaque étudiant devra rendre d'une part un rapport dont le nombre de pages conseillé (hormis annexes) est de 6 et d'autre part ses codes sources MATLAB. Ce rapport devra respecter les indications du guide-line <http://www.montefiore.ulg.ac.be/~lduchesne/proba/guidelines.pdf>. Toutes vos questions pour ce projet doivent être envoyées à l.duchesne@ulg.ac.be.

Le travail devra être rendu sous forme d'archive `.zip` au plus tard pour le lundi 28/04/2017 23h59 via la page <http://submit.montefiore.ulg.ac.be>.

Notez qu'au delà de la deadline, il ne sera plus possible de rendre le projet.

Présentation du problème

Une entreprise produit du sirop de Liège. Vous êtes engagé en tant qu'ingénieur production. Votre première mission sera l'étude de la fiabilité de la ligne de production. Cette dernière est composée de trois étapes : le traitement des différents fruits (pommes, poires, dates etc), le traitement du jus obtenu et finalement l'emballage.

On modélise les pannes pouvant survenir sur chaque machine de la ligne de production par des variables aléatoires discrètes : \mathcal{F} pour les fruits, \mathcal{J} pour le jus obtenu et \mathcal{E} pour la partie concernant l'emballage. Chaque variable aléatoire modélise le fait que cette section dans la ligne de production rencontre un certain type de panne au cours du prochain mois. Les tables 1 décrivent les valeurs des variables aléatoires associées aux différentes pannes. Par exemple, si la variable \mathcal{J} prend la valeur 2, cela indique que l'évaporateur subira une panne au cours du mois qui vient. Évidemment, plusieurs machines peuvent tomber en panne au cours du même mois, mais on suppose qu'une machine ne subit au plus qu'une panne par mois, puisque, dès qu'une panne est constatée, la totalité de la machine est passée au crible afin de prévenir les éventuelles autres pannes pouvant survenir dans le courant du même mois.

\mathcal{F}	Description
1	Pas de panne
2	Panne de Cuiseuse
3	Panne Presses

\mathcal{J}	Description
1	Pas de panne
2	Panne évaporateur
3	Panne mélangeur
4	Panne pompe
5	Panne raffineuse

\mathcal{E}	Description
1	Pas de panne
2	Panne remplisseuse
3	Panne à l'envoi au tunnel de refroidissement
4	Panne à l'embaqueteuse

TABLE 1 – Variables aléatoires décrivant les pannes possibles des machines composant la ligne de production

Ces machines sont utilisées depuis la création de l'entreprise. Les employés qui vous ont précédé au poste d'ingénieur de production ont maintenu un descriptif précis détaillant, mois après mois, toutes les pannes survenues sur les machines de la ligne de production. Ces statistiques ont permis de créer une table décrivant les probabilités que des pannes arrêtent la ligne de production. Ces probabilités sont données sous forme d'un tableau tri-dimensionnel dont la première composante correspond à la variable \mathcal{F} , la deuxième correspond à la variable \mathcal{J} et la troisième correspond à la variable \mathcal{E} . L'ordre des pannes donné dans la table 1 est respecté dans ce tableau de probabilités. Ce tableau est donné sous forme d'un fichier MATLAB.

Questions

1. Manipulation des lois de probabilités

- Calculez les lois de probabilités marginales des variables \mathcal{F} , \mathcal{J} et \mathcal{E} .
- Calculez les lois de probabilités conjointes des paires de variables $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$, $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ et $(\mathcal{J}, \mathcal{E})$.
- Calculez les lois de probabilités conditionnelles suivantes $P_{\mathcal{F}|\mathcal{J},\mathcal{E}}(\mathcal{F}|\mathcal{J},\mathcal{E})$, $P_{\mathcal{J}|\mathcal{F},\mathcal{E}}(\mathcal{J}|\mathcal{F},\mathcal{E})$ et $P_{\mathcal{E}|\mathcal{F},\mathcal{J}}(\mathcal{E}|\mathcal{F},\mathcal{J})$.
- Que pouvez-vous déduire des lois de probabilités calculées précédemment en termes de relations entre les variables aléatoires ?

2. Probabilités des pannes






- Calculez la probabilité que la chaîne de production tombe en panne au cours du prochain mois.
- Calculez la probabilité que la machine \mathcal{J} tombe en panne sachant que \mathcal{F} et \mathcal{E} ont été contrôlées et ne tomberont pas en panne au cours du mois.

3. Coût moyen des pannes

Considérons maintenant le coût de ces pannes. La ligne de production est telle que, si une machine tombe en panne, la production entière est arrêtée. Si tel est le cas, le coût pour l'entreprise dépend de la ou des machines endommagées et de la ou des pannes rencontrées. Si des pannes surviennent simultanément, les frais de réparation sont additionnés. La table 2 détaille le coût des diverses pannes.

Coût \mathcal{F} (€)		Coût \mathcal{J} (€)		Coût \mathcal{E} (€)	
\mathcal{F}	$\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$	\mathcal{J}	$\mathcal{K}_{\mathcal{J}}$	\mathcal{E}	$\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$
1	0	1	0	1	0
2	22 000	2	15 000	2	30 000
3	15 000	3	18 000	3	20 000
		4	7 000	4	55 000
		5	13 000		

TABLE 2 – Description des coûts liés aux différentes pannes.

-  Calculez, pour chaque machine, le coût moyen lié à la nécessité de la réparer. Calculez également les variances de ces coûts.
- Soit la fonction coût $\phi(\mathcal{F}, \mathcal{J}, \mathcal{E}) = \mathcal{K}_{\mathcal{F}} + \mathcal{K}_{\mathcal{J}} + \mathcal{K}_{\mathcal{E}}$.
 -  Calculez l'espérance de $\phi(\mathcal{F}, \mathcal{J}, \mathcal{E})$ ainsi que sa variance.
 - À quelle notion concrète correspond l'espérance de ϕ ?
 - Quelle relation existe-t-il entre $E\{\phi(\mathcal{F}, \mathcal{J}, \mathcal{E})\}$ et les espérances calculées au point 3a ? Cette relation s'applique-t-elle aussi pour la variance ? Sinon, comment expliquez-vous cette différence ?
- Supposons maintenant que nous pouvons connaître exactement l'état de la machine \mathcal{F} grâce à des capteurs très précis placés en son sein.
 -  Calculez l'espérance conditionnelle et la variance conditionnelle de $\phi(\mathcal{F}, \mathcal{J}, \mathcal{E})$ connaissant \mathcal{F} . Que pouvez vous en déduire ?
 -  Vérifiez le théorème de l'espérance totale.
 -  Vérifiez le théorème de la variance totale.

4. Borne supérieure du coût des pannes

En pratique, les coûts associés à une panne ne sont pas fixes. En effet, le prix de la réparation peut fluctuer au cours du temps (coût du personnel, vieille pièce, ...), ce qui est modélisé par une variance associée à chaque cas. La table 3 détaille l'espérance et la variance des coûts des diverses pannes.



- Calculez une borne supérieure du coût de réparation pour chaque panne de chaque machine telle que la probabilité que le coût soit supérieur à la borne soit $\leq 0,1$:

$\mathcal{K}_{\mathcal{F}} (\text{€})$		
\mathcal{F}	Esp	Var
1	0	0
2	22 000	500^2
3	15 000	700^2

$\mathcal{K}_{\mathcal{J}} (\text{€})$		
\mathcal{J}	Esp	Var
1	0	0
2	15 000	700^2
3	18 000	200^2
4	7 000	150^2
5	13 000	250^2

$\mathcal{K}_{\mathcal{E}} (\text{€})$		
\mathcal{E}	Esp	Var
1	0	0
2	30 000	500^2
3	20 000	1000^2
4	55 000	1100^2

TABLE 3 – Espérances et variances des coûts liés aux différentes pannes.

-  Dans le cas où vous n’avez aucune information sur la loi de répartition des coûts des pannes (pensez à l’inégalité de Bienaymé-Tchebyshev, en sachant qu’on peut considérer que $(\mathcal{X} - \mu_{\mathcal{X}})$ est positif en pratique).
-  Dans le cas où vous supposez la répartition normale.
- Comparez les résultats obtenus aux points 4(a)i et 4(a)ii. Comment expliquez-vous les différences ?

Rapport

Le rapport doit contenir les réponses aux questions posées ci-dessus, ainsi que les raisonnements et les calculs symboliques qui vous ont permis de les obtenir. N’oubliez pas d’inclure dans le rapport les valeurs numériques répondant aux questions posées. Les lois de probabilités que vous avez calculées seront formatées sous forme de tableau dans le rapport.

Suggestions :

- Si vous utilisez \LaTeX , vous pouvez utiliser des macros afin d’alléger votre code. Par exemple : `\newcommand{\F}{\mathcal{F}}` qui remplacera chaque instance de `\F` par `\mathcal{F}`.
- Il existe également des [scripts](#) permettant d’exporter une matrice de MATLAB vers un tableau \LaTeX .
- Si vous le désirez, vous pouvez utiliser la fonction matlab [bsxfun](#) qui permet d’appliquer une opération (addition, division,...) à 2 matrices dont les dimensions ne correspondent pas au lieu d’appeler plusieurs fois l’opération dans une boucle.

Données

La loi conjointe des trois variables étudiées est donnée sous forme d’un fichier MATLAB nommé `FJE.mat`. Pour charger la matrice en mémoire, il suffit d’entrer la commande suivante : `load('FJE.mat')`. Vous disposerez alors d’une matrice nommée `FJE` qui sera disponible en mémoire et qui contient la loi conjointe.