

Éléments de processus stochastiques

Analyse d'un treillis de propriétés aléatoires

Romain COMPAGNIE Olivier MOITROUX Paolo LÉONARD
3e bachelier ingénieur civil

Année académique 2017-2018



Table des matières

1	Introduction	2
2	Propriétés équivalentes des raideurs des barres	3
2.1	Approximation analytique de la moyenne et de l'écart-type de EA_{eq}	3
2.1.a	Moyenne	4
2.1.b	Ecart-type	5
2.2	Résolution du problème par simulations	6
2.2.a	Génération d'une réalisation de $\alpha_k(s)$	7
2.2.b	Analyse des résultats et comparaison avec la solution analytique	7
2.3	Interprétation des résultats	11
2.4	Conclusion	11
3	Calcul des déplacements et efforts dans un treillis aléatoire	12
3.1	Approximation analytique des déplacements et des efforts	12
3.1.a	Moyenne des déplacements	13
3.1.b	Écart-type des déplacements	13
3.1.c	Moyenne des efforts	15
3.1.d	Écart-type des efforts	15
3.2	Résolution par simulations	16
3.3	Premier treillis	16
3.3.a	Analyse des déplacements	16
3.3.b	Analyse des efforts	18
3.4	Deuxième treillis	18
3.4.a	Analyse des déplacements	18
3.4.b	Analyse des efforts	20
3.5	Treillis personnel	20
3.5.a	Analyse des déplacements	21
3.5.b	Analyse des efforts	23
3.6	Commentaire quant aux résultats	23
4	Conclusion	26
5	Bibliographie	27

1 | Introduction

Ce projet a pour but l'analyse d'un treillis dont les propriétés mécaniques sont aléatoires. Ceci se traduit par des poutres dont la raideur extensionnelle EA est variable sur leur longueur.

En moyenne, nous avons un module de Young $E = 8000 \text{ MPa}$ et une section droite $A = 50 \times 50 \text{ mm}^2$. La raideur extensionnelle moyenne vaut alors $EA_0 = 20 \times 10^6 \text{ N}$.

Le treillis est représenté par un treillis idéal dont les poutres ont un poids propre nul et ne transmettent que de l'effort axial.

Démarche

Pour analyser la manière dont un treillis dont la raideur extensionnelle de chacune des poutres qui le composent est variable le long de celles-ci va se déformer lorsqu'il est soumis à des charges, on commence par analyser la raideur extensionnelle équivalente EA_{eq} de chacune des barres. La détermination de la forme de la densité de probabilité de EA_{eq} ainsi que sa moyenne et son écart-type permettent alors d'analyser les déplacements de chaque noeud et les efforts dans chacune des barres en résolvant celui-ci. Une approximation de la moyenne et de l'écart-type des déplacements et des efforts peut alors être obtenue.

Pour ces deux analyses, celle de la densité de probabilité de la raideur extensionnelle équivalente EA_{eq} , et celle des déplacements de chaque noeud et des efforts dans chaque barre dans le treillis, on procède en deux étapes. On détermine une approximation analytique des grandeurs à analyser, les moyennes et écart-types, puis on résout le problème par simulation en vue de confirmer les hypothèses effectuées quant à la forme des densités de probabilité et les approximations analytiques des moyennes et écart-types.

Modélisation

Ce problème est modélisé au moyen d'une raideur extensionnelle variable le long de chacune des poutres du treillis. Celle-ci est modélisée dans chaque barre k par

$$EA_k(s) = EA_0(1 + \alpha_k(s)) \quad (1.1)$$

où s est la coordonnée comptée dans la direction de la barre, à partir d'un noeud à l'extrémité de celle-ci, et $\alpha_k(s)$ représente un processus aléatoire stationnaire de moyenne nulle et dont la fonction d'autocorrélation est donnée par

$$R_{\alpha_k}(\Delta s) = \sigma_\alpha^2 e^{-\Delta s/l} \quad (1.2)$$

où σ_α représente l'écart-type de la petite fluctuation α_k et l une longueur de corrélation. Ces paramètres dépendent uniquement du matériau et du procédé de mise en forme des sections droites et sont constantes dans le treillis.

2 | Propriétés équivalentes des raideurs des barres

La raideur équivalente d'une barre de treillis est obtenue par

$$EA_{eq} = \frac{L}{\int_0^L \frac{ds}{EA_k(s)}} \quad (2.1)$$

où L représente la longueur de la barre.

En utilisant l'Eq. 1.1, on obtient

$$EA_{eq} = \frac{L}{\int_0^L \frac{ds}{EA_0(1+\alpha_k(s))}} \quad (2.2)$$

On définit la longueur de corrélation normalisée $l^* = l/L$.

2.1 Approximation analytique de la moyenne et de l'écart-type de EA_{eq}

Il est possible d'obtenir une approximation analytique de la moyenne et de l'écart-type de EA_{eq} en fonction de σ_α , de la longueur de corrélation l et de la longueur de la barre L , en utilisant des développements de Taylor limités.

$$EA_k(s) = EA_0(1 + \alpha_k(s)) \quad (2.3)$$

$$R_{\alpha_k}(\delta s) = \sigma_\alpha^2 e^{-\delta s/l} \quad (2.4)$$

$$EA_{eq} = \frac{L}{\int_0^L \frac{ds}{EA_k(s)}} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} EA_{eq} &= \frac{L}{\int_0^l \frac{ds}{EA_0(1+\alpha_k(s))}} \\ &= \frac{EA_0 L}{\int_0^l \frac{ds}{1+\alpha_k(s)}} \\ &= \frac{EA_0}{\int_0^1 \frac{d\xi}{1+\alpha_k(L\xi)}} \quad , s = \xi * L \end{aligned} \quad (2.6)$$

En tenant compte du fait que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + O(x^3) \quad , x \rightarrow 0 \quad (2.7)$$

On peut simplifier l'équation 2.6 en

$$\begin{aligned} EA_{eq} &\simeq \frac{EA_0}{\int_0^1 (1 - \alpha_k(L\xi) + \alpha_k^2(L\xi)) d\xi} \\ &= \frac{EA_0}{1 - \int_0^1 \alpha_k(L\xi) d\xi + \int_0^1 \alpha_k^2(L\xi) d\xi} \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.1.a Moyenne

En partant de la simplification de l'équation (2.6) :

$$EA_{eq} \simeq \frac{EA_0}{1 - \int_0^1 \alpha_k(L\xi) d\xi + \int_0^1 \alpha_k^2(L\xi) d\xi} \quad (2.9)$$

On peut alors calculer la moyenne ou l'**espérance** de la raideur extensionnelle équivalente :

$$E[EA_{eq}] = E \left[\frac{EA_0}{1 - \int_0^1 \alpha_k(L\xi) d\xi + \int_0^1 \alpha_k^2(L\xi) d\xi} \right] \quad (2.10)$$

En tenant compte de

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + O(x^3), \quad x \rightarrow 0$$

on peut encore une fois simplifier l'équation (2.10) en

$$\begin{aligned} E[EA_{eq}] &\simeq E \left[EA_0 \left(1 + \left(\int_0^1 \alpha_k(L\xi) d\xi - \int_0^1 \alpha_k^2(L\xi) d\xi \right) + \left(\int_0^1 \alpha_k(L\xi) d\xi - \int_0^1 \alpha_k^2(L\xi) d\xi \right)^2 \right) \right] \\ &\simeq EA_0 \left(E[1] + E \left[\int_0^1 \alpha_k(L\xi) d\xi \right] - E \left[\int_0^1 \alpha_k^2(L\xi) d\xi \right] + E \left[\left(\int_0^1 \alpha_k(L\xi) d\xi \right)^2 \right] \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

car on néglige les termes suivants, étant proportionnels à des puissances de α_k supérieures à 2

$$\left(\int_0^1 \alpha_k(L\xi) d\xi \right) \left(\int_0^1 \alpha_k^2(L\xi) d\xi \right) \simeq 0, \quad \left(\int_0^1 \alpha_k^2(L\xi) d\xi \right)^2 \simeq 0 \quad (2.12)$$

On distingue trois espérances qu'on peut calculer séparément car on sait que l'espérance d'une somme est la somme des espérances selon le principe de linéarité. Ainsi on calcule les équations (2.13), (2.14), (2.16).

Par les propriétés de l'espérance on sait que :

$$E[1] = 1 \quad (2.13)$$

La moyenne de α_k est donnée et vaut 0. Or l'intégrale d'une valeur nulle est égale à 0, on a donc :

$$E \left[\int_0^1 \alpha_k(L\xi) d\xi \right] = \int_0^1 E[\alpha_k(L\xi)] d\xi = 0 \quad (2.14)$$

La variance de α_k est donnée et vaut σ_α^2 . On a alors

$$E \left[\int_0^1 \alpha_k^2(L\xi) d\xi \right] = \int_0^1 E[\alpha_k^2(L\xi)] d\xi = \int_0^1 V[\alpha_k(L\xi)] d\xi = \sigma_\alpha^2 \quad (2.15)$$

L'espérance du 3ème membre est plus compliquée à calculer, il faut partir de la définition de l'espérance pour trouver une solution convenable.

$$E \left[\left(\int_0^1 \alpha_k(L\xi) d\xi \right)^2 \right] = E \left[\int_0^1 \int_0^1 \alpha_k(L\alpha) \alpha_k(L\beta) d\beta d\alpha \right] \quad (2.16)$$

Pour une variable aléatoire X dont les échantillons sont notés x_i et $F_X(x)$ la fonction de distribution, la définition analytique de l'espérance est

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x)$$

Appliquée à (2.16) on obtient

$$E \left[\int_0^1 \alpha_k^2(L\xi) d\xi \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^1 \int_0^1 \alpha_k^{(L\alpha)} \alpha_k^{(L\beta)} d\alpha d\beta \right) p \left(\alpha_k^{(L\alpha)}, L\alpha, \alpha_k^{(L\beta)}, L\beta \right) d\alpha_k^{(L\alpha)} d\alpha_k^{(L\beta)} \quad (2.17)$$

On réarrange les intégrales pour faciliter la résolution

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(L\alpha)} \alpha_k^{(L\beta)} p \left(\alpha_k^{(L\alpha)}, L\alpha, \alpha_k^{(L\beta)}, L\beta \right) d\alpha_k^{(L\alpha)} \alpha_k^{(L\beta)} \right) d\alpha d\beta \quad (2.18)$$

On fait intervenir la fonction de corrélation R_{α_k}

$$= \int_0^1 \int_0^1 R_{\alpha_k} (|L\alpha - L\beta|) d\alpha d\beta \quad (2.19)$$

De l'énoncé on sait que $R_{\alpha_k} = \sigma_\alpha^2 e^{\frac{-L|\alpha-\beta|}{l}}$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \int_0^1 \sigma_\alpha^2 e^{\frac{-L|\alpha-\beta|}{l}} d\alpha d\beta \\ &= \int_0^1 \left(\int_\beta^1 \sigma_\alpha^2 e^{\frac{-L(\alpha-\beta)}{l}} d\alpha + \int_0^\beta \sigma_\alpha^2 e^{\frac{-L(\beta-\alpha)}{l}} d\alpha \right) d\beta \end{aligned} \quad (2.20)$$

On résout les intégrales

$$\begin{aligned} &= \sigma_\alpha^2 \int_0^1 \left(\left[\frac{e^{\frac{-L(\alpha-\beta)}{l}}}{\frac{-L}{l}} \right]_\beta^1 + \left[\frac{e^{\frac{-L(\beta-\alpha)}{l}}}{\frac{-L}{l}} \right]_0^\beta \right) d\beta \\ &= \sigma_\alpha^2 \int_0^1 \left(-\frac{l}{L} e^{\frac{-L(\beta-1)}{l}} + \frac{l}{L} + \frac{l}{L} - \frac{l}{L} e^{\frac{-L\beta}{l}} \right) d\beta \\ &= \sigma_\alpha^2 \frac{l}{L} \left[2 - \frac{e^{\frac{-L(\beta-1)}{l}}}{\frac{L}{l}} + \frac{e^{\frac{-L\beta}{l}}}{\frac{L}{l}} \right]_0^1 \\ &= \sigma_\alpha^2 \frac{l}{L} \left(2 - \frac{l}{L} + \frac{l}{L} e^{\frac{-L}{l}} + \frac{l}{L} e^{\frac{-L}{l}} - \frac{l}{L} \right) \\ &= 2\sigma_\alpha^2 \frac{l}{L} \left(1 - \frac{l}{L} + \frac{l}{L} e^{\frac{-L}{l}} \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

On obtient finalement une expression simplifiée de la moyenne de la raideur extensionnelle variable

$$E[EA_{eq}] = EA_0 \left(1 - \sigma_\alpha^2 + 2\sigma_\alpha^2 \frac{l}{L} \left(1 - \frac{l}{L} + \frac{l}{L} e^{\frac{-L}{l}} \right) \right) \quad (2.22)$$

2.1.b Ecart-type

$$V[EA_{eq}] = E[EA_{eq}^2] - (E[EA_{eq}])^2 \quad (2.23)$$

On a alors

$$\begin{aligned}
(E[EA_{eq}])^2 &\simeq \left(1 - \sigma_\alpha^2 + 2\sigma_\alpha^2 \frac{l}{L} \left(1 - \frac{l}{L} + \frac{l}{L} e^{-\frac{l}{L}}\right)\right)^2 \\
&\simeq 1 - 2\sigma_\alpha^2 + 4\sigma_\alpha^2 \frac{l}{L} \left(1 - \frac{l}{L} + \frac{l}{L} e^{-\frac{l}{L}}\right)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Si on néglige les termes comportant des puissances de σ_α supérieures à 2. On a aussi, par l'équation...

$$\begin{aligned}
E[EA_{eq}^2] &= E \left[\left(\frac{EA_0}{1 - \int_0^1 \sigma_\alpha(L\xi) d\xi - \int_0^1 \sigma_\alpha^2(L\xi) d\xi} \right)^2 \right] \\
&= EA_0^2 E \left[\frac{1}{\left(1 - \left(\int_0^1 \sigma_\alpha(L\xi) d\xi + \int_0^1 \sigma_\alpha^2(L\xi) d\xi\right)\right)^2} \right]
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Or par Taylor,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + O(x^3), x \rightarrow 0$$

On a donc

$$\begin{aligned}
E[EA_{eq}^2] &\simeq EA_0^2 \left(1 + 2E \left[\int_0^1 \sigma_\alpha(L\xi) d\xi \right] - 2E \left[\int_0^1 \sigma_\alpha^2(L\xi) d\xi \right] \right. \\
&\quad \left. + 3E \left[\left(\int_0^1 \sigma_\alpha(L\xi) d\xi \right)^2 \right] \right)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Si on néglige les termes comportant des puissances de σ_α supérieures à 2. On a finalement

$$E[EA_{eq}^2] \simeq EA_0^2 \left[1 - 2\sigma_\alpha^2 + 6\sigma_\alpha^2 \frac{l}{L} \left(1 - \frac{l}{L} + \frac{l}{L} e^{-\frac{l}{L}}\right) \right] \tag{2.27}$$

On obtient alors

$$V[EA_{eq}] = 2\sigma_\alpha^2 \frac{l}{L} \left(1 - \frac{l}{L} + \frac{l}{L} e^{-\frac{l}{L}}\right) \tag{2.28}$$

L'écart-type est donné par

$$\sigma_{EA_{eq}} = \sqrt{V[EA_{eq}]} \tag{2.29}$$

2.2 Résolution du problème par simulations

En discrétisant la coordonnée s de la barre en l'indice i , il est possible d'obtenir des réalisations numériques de EA_{eq} au moyen de réalisations de $\alpha_k(i)$, processus aléatoire discret possédant les mêmes caractéristiques que le processus $\alpha_k(s)$.

2.2.a Génération d'une réalisation de $\alpha_k(s)$

A partir d'une réalisation d'un processus aléatoire gaussien discret $w(i)$ de moyenne nulle et à autocorrélation nulle, il est possible de générer une réalisation discrète $\alpha_k(i)$ du processus aléatoire stationnaire et de moyenne nulle $\alpha_k(s)$ dont la fonction d'autocorrélation est donnée à l'Eq. 1.2. Le calcul de la suite des $\alpha_k(i)$ à partir de la suite des $w(i)$ peut se faire de la manière suivante.

$$\alpha_k(i) = \phi \alpha_k(i-1) + (1-\phi)w(i) \quad (2.30)$$

Pour garantir le respect des caractéristiques de la suite des $\alpha_k(i)$, on impose les conditions suivantes sur ϕ et sur l'écart-type de w .

$$\phi = e^{-\Delta s/L}, \quad \sigma_w = \sigma_\alpha \sqrt{\frac{1+\phi}{1-\phi}} \quad (2.31)$$

En effet, les réalisations $\alpha_k(i)$ vérifient alors bien les conditions imposées.

La moyenne de $\alpha_k(i)$ est nulle pour tout i par récurrence car

$$E[\phi \alpha_k(i-1) + (1-\phi)w(i)] = \phi E[\alpha_k(i-1)] + (1-\phi)E[w(i)] = 0 \quad (2.32)$$

car on impose $E[w(i)] = 0$ et $E[\alpha_k(1)] = 0$.

La variance de $\alpha_k(i)$ vaut alors bien σ_α^2 pour tout i par récurrence car

$$\begin{aligned} V[\alpha_k(i)] &= E[\alpha_k^2(i)] \\ &= \phi^2 E[\alpha_k^2(i-1)] + 2\phi(1-\phi)E[\alpha_k(i-1)]E[w(i)] + (1-\phi)^2 E[w^2(i)] \\ &= \sigma_\alpha^2 \end{aligned} \quad (2.33)$$

car $\alpha_k(i-1) \perp w(i)$, on impose $E[\alpha_k^2(1)] = \sigma_\alpha^2$ et ϕ et $E[w^2(i)] = \sigma_w^2$ sont donnés par l'équation 2.31.

Enfin, on a bien pour tout i

$$\begin{aligned} E[\alpha_k(i)\alpha_k(i-1)] &= \phi E[\alpha_k^2(i-1)] + (1-\phi)E[w(i)\alpha_k(i-1)] \\ &= \phi E[\alpha_k^2(i-1)] \\ &= \sigma_\alpha^2 e^{-\Delta s/L} \\ &= R_{\alpha_k}(\Delta s) \end{aligned} \quad (2.34)$$

car $\alpha_k(i-1) \perp w(i)$ et ϕ est donné à l'Eq. 2.31.

Pour éviter la phase transitoire et garantir la validité des résultats ci-dessus, il convient de choisir $\alpha_k(1)$ selon la distribution invariante, ce qui se traduit par la condition

$$\alpha_k(1) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\alpha^2) \quad (2.35)$$

2.2.b Analyse des résultats et comparaison avec la solution analytique

A partir de réalisation de $\alpha_k(i)$, on calcule des réalisations de EA_{eq} . Le nombre de points de discrétisation dans la barre est choisi à $n = 1000$. On obtient ensuite, pour des valeurs de σ_α et l^* fixées des distributions à partir de $N = 100000$ échantillons.

Distribution de probabilité

La distribution de probabilité obtenue pour différentes valeurs de σ_α variant entre 0.01 et 0.2 avec l^* fixé est représentée à la Fig. 2.1. La distribution de probabilité obtenue pour différentes valeurs de l^* variant entre 0.01 et 2 avec σ_α fixé est représentée à la Fig. 2.2.

On remarque que les distributions de probabilité ont l'allure de distributions gaussiennes, de moyenne constante et approximativement égale à EA_0 . Comme attendu, lorsque σ_α augmente, l'écart-type de la

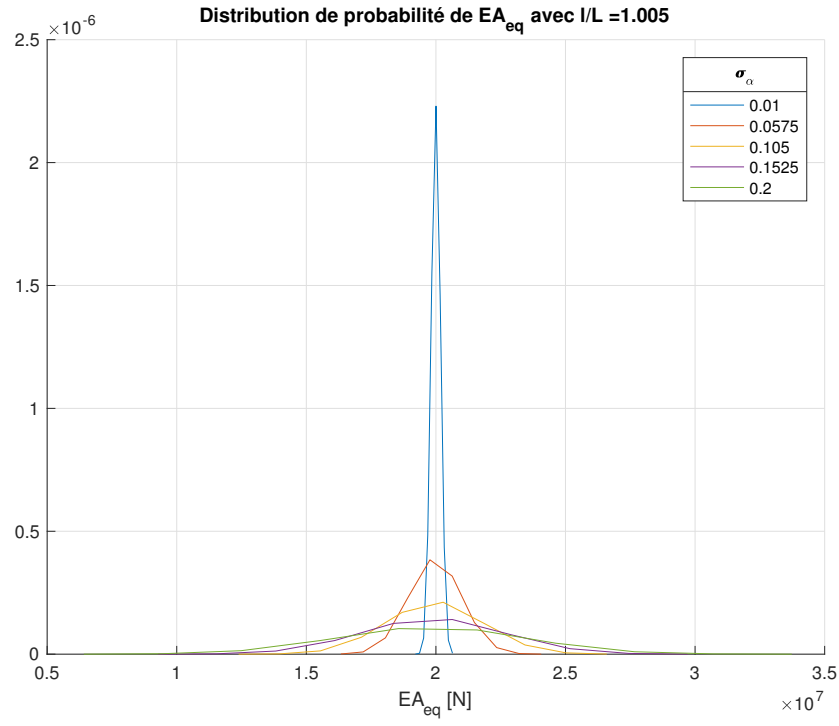


FIGURE 2.1 – Distribution de probabilité pour différentes valeurs de σ_α

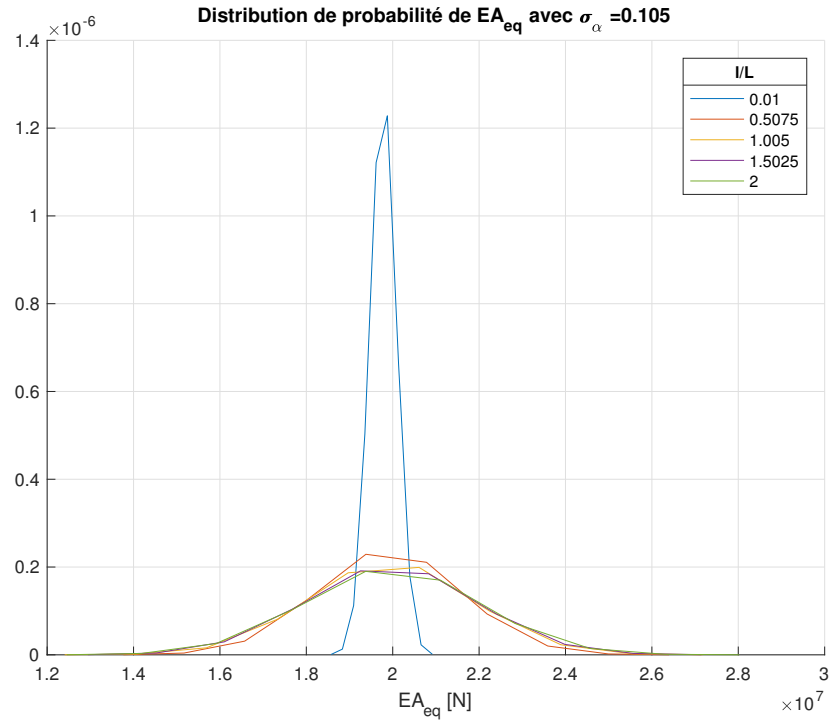


FIGURE 2.2 – Distribution de probabilité pour différentes valeurs de l^*

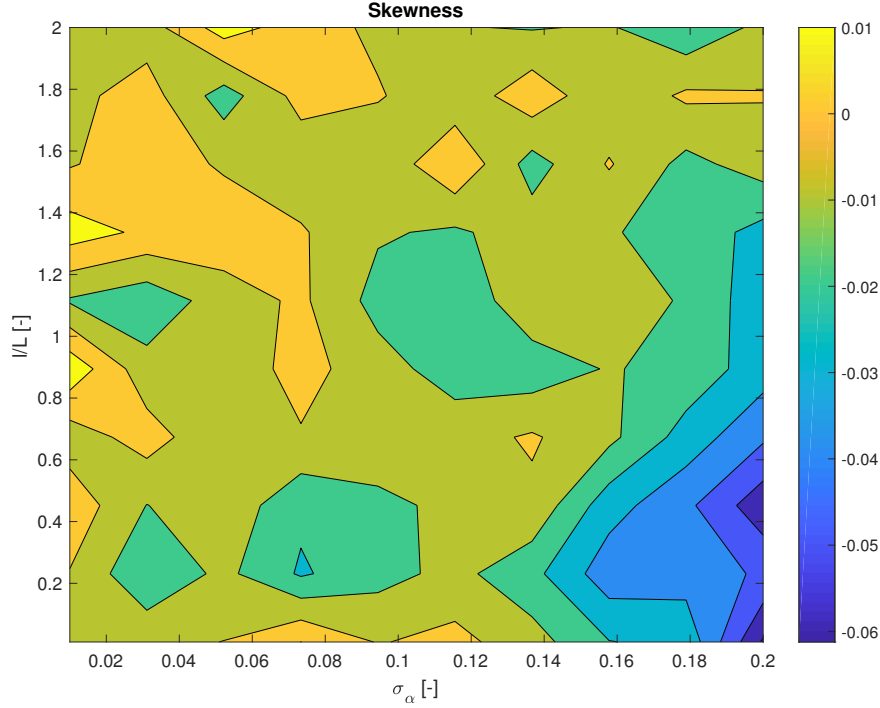


FIGURE 2.3 – Représentation du skewness pour différent σ_α

distribution augmente, ce qui se traduit par une courbe aplatie. La longueur de corrélation normalisée l^* a moins d'influence sur la distribution, à l'exception du cas où $l^* \ll$, qui mène à un écart-type relativement faible.

skewness et kurtosis

Le *skewness* et le *kurtosis* pour différentes valeurs de σ_α et de l^* sont représentés respectivement aux Fig. 2.3 et 2.4.

Pour σ_α variant entre 0.01 et 0.2 et l^* variant entre 0.01 et 2, la valeur minimale du *skewness* vaut -0.0612 , tandis que sa valeur maximale vaut 0.0171 . Le *skewness* est donc proche de 0. Quant au *kurtosis*, ses valeurs minimale et maximale valent respectivement 2.9565 et 3.3739 , ce qui est proche de 3. Ceci est caractéristique d'une distribution gaussienne et supporte l'hypothèse d'une distribution normale.

On constate que le *skewness* et le *kurtosis* sont maximales en valeur absolue lorsque $\sigma_\alpha \gg$ et $l^* \ll$.

Analyse des moyennes et écart-types et comparaison avec la solution analytique

Les Fig. 2.5 et 2.6 montrent respectivement l'évolution de la moyenne et de l'écart-type de EA_{eq} pour différentes valeurs de l^* , en fonction de σ_α . Les résultats obtenus par résolution analytique approchée et par simulation y sont présentés.

Malgré une légère variabilité attendue dans les résultats obtenus par simulations et la présence d'une valeur aberrante pour l'écart-type, les approximations analytiques des moyennes et écart-types mènent à des résultats similaires à ceux obtenus par simulation, lorsque l^* et σ_α varient.

On constate que la moyenne décroît lorsque σ_α augmente, plus sensiblement lorsque $l^* \ll$. Pour ce qui est de l'écart-type, celui-ci augmente logiquement avec σ_α . La croissance est cependant plus faible lorsque $l^* \ll$.

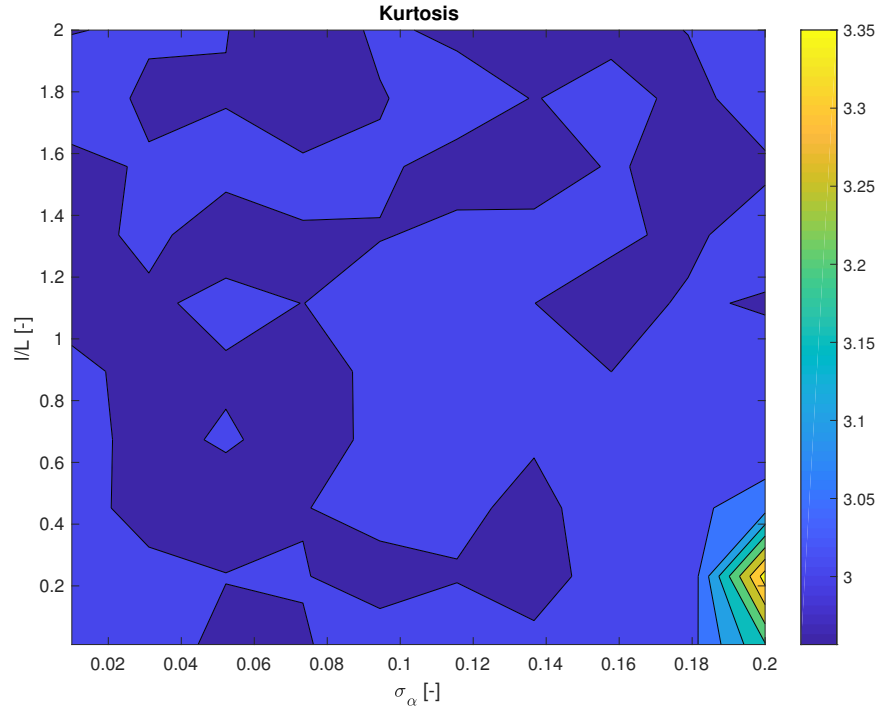


FIGURE 2.4 – Représentation du kurtosis pour différent σ_α

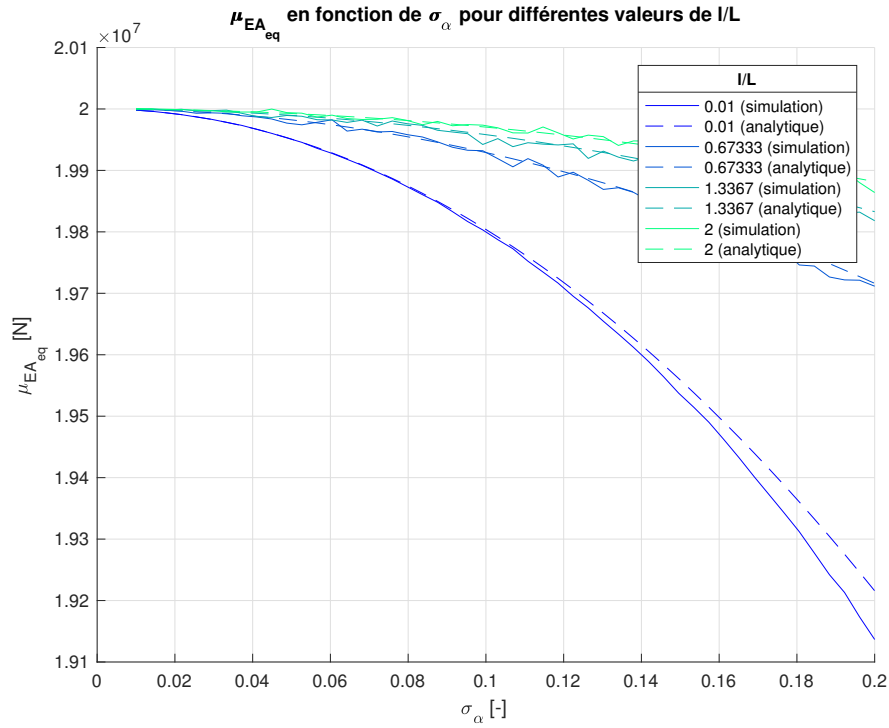


FIGURE 2.5 – Evolution de la moyenne de EA_{eq} pour différentes valeurs de l^* , en fonction de σ_α

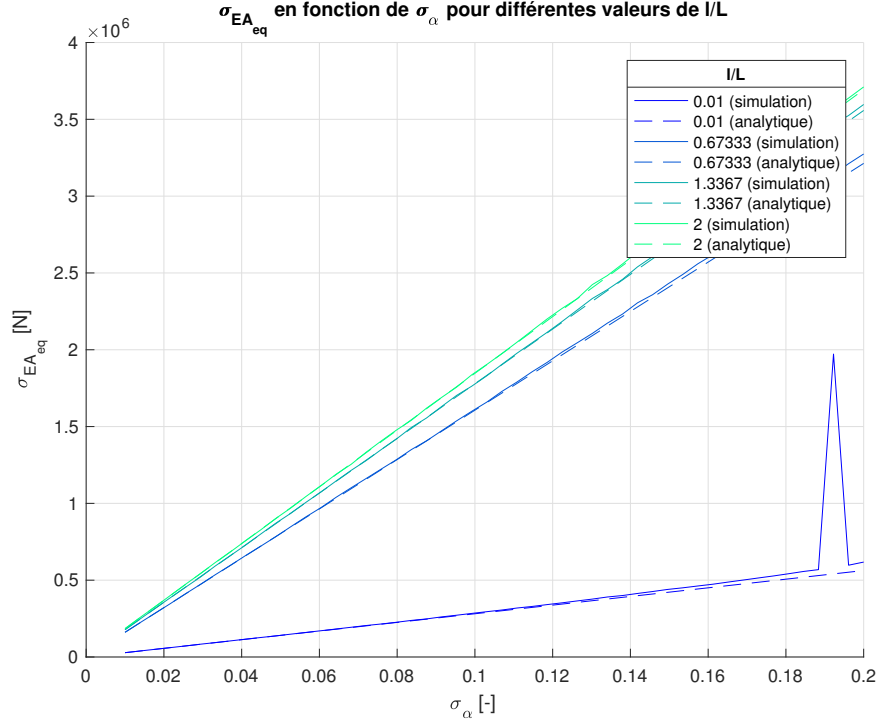


FIGURE 2.6 – Evolution de l'écart-type de EA_{eq} pour différentes valeurs de l^* , en fonction de σ_α

2.3 Interprétation des résultats

On constate que la rigidité extensionnelle équivalente diminue lorsque σ_α augmente et l^* diminue. En effet, une plus grande variabilité de la rigidité ponctuelle augmente la probabilité d'obtenir des valeurs sensiblement plus faibles de rigidité par endroits dans la poutre, et celles-ci auront un impact important sur la rigidité équivalente. Si la poutre possède des sections plus faibles, une elongation importante pourra se produire dans ces régions qui augmentera directement l'elongation totale de la structure, menant à une rigidité équivalente plus faible.

2.4 Conclusion

A partir des résultats obtenus, on peut supposer une distribution normale de la raideur équivalente dans chacune des barres. La validité des hypothèses et la pertinence des approximations effectuées pour obtenir une solution analytique sont confirmées par la comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes.

3 | Calcul des déplacements et efforts dans un treillis aléatoire

A partir de la connaissance des raideurs équivalentes EA_{eq} de chacune des barres, on peut résoudre le treillis au moyen des équations suivantes.

Le vecteur des déplacements \mathbf{x} est obtenu par

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{p} \quad (3.1)$$

où \mathbf{p} est un vecteur représentant les sollicitations sur le treillis et \mathbf{K} est la matrice de raideur dépendant de la géométrie du treillis, qui est donnée par

$$\mathbf{K} = \sum_k \mathbf{K}_{el}^{(k)} (1 + \alpha_k) = \mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K}, \quad \Delta\mathbf{K} = \sum_k \mathbf{K}_{el}^{(k)} \alpha_k \quad (3.2)$$

Le coefficient aléatoire α_k se calcule pour chaque barre à partir de sa raideur extensionnelle équivalente par

$$\alpha_k = \frac{EA_{eq} - EA_0}{EA_0} \quad (3.3)$$

Les vecteur des efforts dans chacune des barres \mathbf{F} est obtenu par

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}\mathbf{x} \quad (3.4)$$

où \mathbf{B} est une matrice dépendant de la géométrie du treillis, qui est donnée par

$$\mathbf{B} = \sum_k \mathbf{B}_{el}^{(k)} (1 + \alpha_k) = \mathbf{B}_0 + \Delta\mathbf{B}, \quad \Delta\mathbf{B} = \sum_k \mathbf{B}_{el}^{(k)} \alpha_k \quad (3.5)$$

3.1 Approximation analytique des déplacements et des efforts

En utilisant un développement de Taylor limité et en négligeant certains termes, on peut obtenir une approximation de la moyenne et de l'écart-type des déplacements de chaque noeud et des efforts dans chacune des barres, en fonction des matrices et vecteurs connus \mathbf{K}_0 , $\mathbf{K}_{el}^{(k)}$, \mathbf{B}_0 , $\mathbf{B}_{el}^{(k)}$ et \mathbf{x}_0 et de l'espérance et de la variance des coefficients aléatoires α_k .

On a

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{p}, \mathbf{K} = \sum_k \mathbf{K}_{el}^{(k)} (1 + \alpha_k) = \sum_k \mathbf{K}_{el}^{(k)} + \sum_k \alpha_k \mathbf{K}_{el}^{(k)} \quad (3.6)$$

, avec

$$\sum_k \mathbf{K}_{el}^{(k)} = \mathbf{K}_0 \text{ et } \sum_k \alpha_k \mathbf{K}_{el}^{(k)} = \Delta\mathbf{K} \quad (3.7)$$

En réécrivant les équations, on obtient \mathbf{x} .

$$(\mathbf{K}_0 + \Delta \mathbf{K}) \mathbf{x} = \mathbf{p} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{K}_0 \left(\mathbf{I} + \mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K} \right) \mathbf{x} = \mathbf{p} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K} \right)^{-1} \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{p} \quad (3.10)$$

$$= \left(\mathbf{I} + \mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K} \right)^{-1} \mathbf{x}_0 \quad (3.11)$$

Or, par Taylor, on a

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + O(x^2), \quad x \rightarrow 0 \quad (3.12)$$

Il vient alors

$$\mathbf{x} \simeq \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K} \right) \mathbf{x}_0 \quad (3.13)$$

3.1.a Moyenne des déplacements

Le vecteur des espérances des déplacements est donné par

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}] &= E \left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K} \right) \mathbf{x}_0 \right] \\ &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_0^{-1} E[\Delta \mathbf{K}] \right) \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

$E[\Delta \mathbf{K}]$ est donné par

$$E[\Delta \mathbf{K}] = E \left[\sum_k \alpha_k \mathbf{K}_{el}^{(k)} \right] = \sum_k E[\alpha_k] \mathbf{K}_{el}^{(k)} \quad (3.15)$$

Il vient finalement

$$E[\mathbf{x}] = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_0^{-1} \sum_k E[\alpha_k] \mathbf{K}_{el}^{(k)} \right) \mathbf{x}_0 \quad (3.16)$$

3.1.b Écart-type des déplacements

La vecteur des variances des déplacements est donné par

$$\text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = E[\mathbf{x} \mathbf{x}^T] - E[\mathbf{x}] E[\mathbf{x}]^T \quad (3.17)$$

$E[\mathbf{x} \mathbf{x}^T]$ est donné par

$$E[\mathbf{x} \mathbf{x}^T] = E \left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K} \right) \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K} \right)^T \right] \quad (3.18)$$

On a

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K} \right)^T = \mathbf{I} - \Delta \mathbf{K}^T (\mathbf{K}_0^{-1})^T \quad (3.19)$$

Il vient alors

$$E [xx^T] = x_0 x_0^T - K_0^{-1} E[\Delta K] x_0 x_0^T - x_0 x_0^T E[\Delta K]^T (K_0^{-1})^T + K_0^{-1} E [\Delta K x_0 x_0^T \Delta K^T] (K_0^{-1})^T \quad (3.20)$$

$E [\Delta K x_0 x_0^T \Delta K^T]$ est donné par

$$\begin{aligned} E [\Delta K x_0 x_0^T \Delta K^T] &= E \left[\left(\sum_i \alpha_i K_{el}^{(i)} \right) x_0 x_0^T \left(\sum_j \alpha_j K_{el}^{(j)} \right)^T \right] \\ &= \sum_i \sum_j E [\alpha_i \alpha_j] K_{el}^{(i)} x_0 x_0^T K_{el}^{(j)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Or si $i \neq j$, $K_{el}^{(i)}$ et $K_{el}^{(j)}$ étant des matrices creuses,

$$K_{el}^{(i)} x_0 x_0^T K_{el}^{(j)} \simeq 0 \quad (3.22)$$

On a alors

$$E [\Delta K x_0 x_0^T \Delta K^T] \simeq \sum_k E [\alpha_k^2] \left(K_{el}^{(k)} x_0 \right) \left(K_{el}^{(k)} x_0 \right)^T \quad (3.23)$$

En tenant compte du fait que

$$E [\alpha_k^2] = V [\alpha_k] + (E [\alpha_k])^2 \quad (3.24)$$

il vient alors

$$\begin{aligned} E [xx^T] &= x_0 x_0^T - K_0^{-1} E [\Delta K] x_0 x_0^T - \left(K_0^{-1} E [\Delta K] x_0 x_0^T \right)^T \\ &\quad + \sum_k \left(V [\alpha_k] + (E [\alpha_k])^2 \right) K_0^{-1} K_{el}^{(k)} x_0 \left(K_0^{-1} K_{el}^{(k)} x_0 \right)^T \end{aligned} \quad (3.25)$$

On a aussi

$$\begin{aligned} E[x]E[x]^T &= \left(x_0 - K_0^{-1} E[\Delta K] x_0 \right) \left(x_0^T - x_0^T E[\Delta K]^T (K_0^{-1})^T \right) \\ &= x_0 x_0^T - K_0^{-1} E[\Delta K] x_0 x_0^T - x_0 x_0^T E[\Delta K]^T (K_0^{-1})^T \\ &\quad + K_0^{-1} E[\Delta K] x_0 x_0^T E[\Delta K]^T (K_0^{-1})^T \end{aligned} \quad (3.26)$$

On a finalement

$$cov(x, x) = \sum_k \left(V[\alpha_k] + (E[\alpha_k])^2 \right) K_0^{-1} K_{el}^{(k)} x_0 \left(K_0^{-1} K_{el}^{(k)} x_0 \right)^T - K_0^{-1} E[\Delta K] x_0 x_0^T E[\Delta K]^T (K_0^{-1})^T \quad (3.27)$$

Or

$$E[\Delta K] = \sum_k E[\alpha_k] K_{el}^{(k)}$$

Et pour $i \neq j$ on a $K_{el}^{(i)} x_0 x_0^T (K_{el}^{(j)})^T \simeq 0$

Donc

$$cov(x, x) \simeq \sum_k V[\alpha_k] K_0^{-1} K_{el}^{(k)} x_0 \left(K_0^{-1} K_{el}^{(k)} x_0 \right)^T \quad (3.28)$$

Pour trouver la variance de \mathbf{x} on prend la diagonale de $cov(\mathbf{x}, \mathbf{x})$:

$$V[\mathbf{x}] = diag(cov(\mathbf{x}, \mathbf{x}))$$

3.1.c Moyenne des efforts

Le vecteur des espérances des efforts est donné par

$$\begin{aligned} E[\mathbf{F}] &= E[\mathbf{B}\mathbf{x}] = E\left[(\mathbf{B}_0 + \Delta\mathbf{B})\left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_0^{-1}\Delta\mathbf{K}\right)\mathbf{x}_0\right] \\ &= \mathbf{B}_0\mathbf{x}_0 + E[\Delta\mathbf{B}]\mathbf{x}_0 - \mathbf{B}_0\mathbf{K}_0^{-1}E[\Delta\mathbf{K}]\mathbf{x}_0 - E\left[\Delta\mathbf{B}\mathbf{K}_0^{-1}\Delta\mathbf{K}\right]\mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Or on a

$$\mathbf{B}_0\mathbf{x}_0 = \mathbf{F}_0 \quad (3.30)$$

$$E[\Delta\mathbf{B}] = \sum_k E[\alpha_k] \mathbf{B}_{el}^{(k)} \quad (3.31)$$

$$E[\Delta\mathbf{K}] = \sum_k E[\alpha_k] \mathbf{K}_{el}^{(k)} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} E[\Delta\mathbf{B}\mathbf{K}_0^{-1}\Delta\mathbf{K}] &= E\left[\left(\sum_i \alpha_i \mathbf{B}_{el}^{(i)}\right) \mathbf{K}_0^{-1} \left(\sum_j \alpha_j \mathbf{K}_{el}^{(j)}\right)\right] \\ &= \sum_i \sum_j E[\alpha_i \alpha_j] \mathbf{B}_{el}^{(i)} \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{K}_{el}^{(j)} \\ &\simeq \sum_k E[\alpha_k^2] \mathbf{B}_{el}^{(k)} \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{K}_{el}^{(k)} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Car on néglige les termes où $i \neq j$. On a finalement

$$\begin{aligned} E[\mathbf{F}] &\simeq \mathbf{B}_0\mathbf{x}_0 + \sum_k E[\alpha_k^2] \mathbf{B}_{el}^{(k)} - \mathbf{B}_0\mathbf{K}_0^{-1} \sum_k E[\alpha_k^2] \mathbf{K}_{el}^{(k)} \mathbf{x}_0 \\ &\quad - \sum_k \left(V[\alpha_k] + (E[\alpha_k])^2\right) \mathbf{B}_{el}^{(k)} \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{K}_{el}^{(k)} \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

3.1.d Écart-type des efforts

La matrice des covariances des efforts est donné par

$$\begin{aligned} cov(\mathbf{F}, \mathbf{F}) &= E[\Delta\mathbf{F}\mathbf{F}^T] \\ &= E\left[\left(\Delta\mathbf{B}\mathbf{x}_0 - \mathbf{B}_0\mathbf{K}_0^{-1}\Delta\mathbf{K}\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{B}\mathbf{K}_0^{-1}\Delta\mathbf{K}\mathbf{x}_0\right)\right. \\ &\quad \left.\left(\mathbf{x}_0^T \Delta\mathbf{B}^T - \mathbf{x}_0^T \Delta\mathbf{K}^T (\mathbf{K}_0^{-1})^T \mathbf{B}_0^T + \mathbf{x}_0^T \Delta\mathbf{K}^T (\mathbf{K}_0^{-1})^T \Delta\mathbf{B}^T\right)\right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

On a alors, en négligeant les termes comportant plus de deux Δ et en négligeant les sommes termes comportant de produits de matrices élémentaires d'indices différents,

$$E[\Delta \mathbf{F} \mathbf{F}^T] = \sum_k \left(V[\alpha_k] + (E[\alpha_k])^2 \right) \left[\mathbf{B}_{el}^{(k)} - \mathbf{B}_{el}^{(k)} \mathbf{K}_{el}^{(k)} (\mathbf{K}_0^{-1})^T (\mathbf{B}_0)^T \right. \\ \left. - \left(\mathbf{B}_{el}^{(k)} \mathbf{K}_{el}^{(k)} (\mathbf{K}_0^{-1})^T (\mathbf{B}_0)^T \right)^T + \mathbf{B}_0 \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{K}_{el}^{(k)} \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T (\mathbf{K}_{el}^{(k)})^T (\mathbf{K}_0^{-1})^T (\mathbf{B}_0)^T \right] \quad (3.36)$$

Le vecteur des variances des efforts est alors donné par :

$$V[\mathbf{F}] = \text{diag}(\text{cov}(\mathbf{F}, \mathbf{F})) \quad (3.37)$$

3.2 Résolution par simulations

Le problème peut être résolu par simulations. En effet, en générant des tirages aléatoires de raideurs extensionnelles équivalentes de chacune des barres selon une loi gaussienne dont la moyenne et la variance en fonction de σ_α , l et L a été déterminée précédemment, on peut obtenir une distribution des déplacements de chaque noeud et des efforts dans chacune des barres. Pour garantir la précision des résultats, un nombre $N = 10000$ de tirages aléatoires de raideurs équivalentes ont été effectués.

3.3 Premier treillis

Le premier treillis analysé est représenté à la Fig. 3.1.

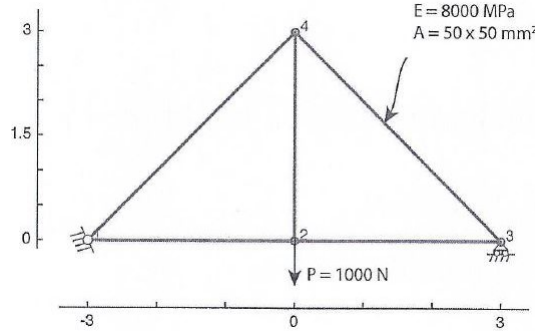


FIGURE 3.1 – Premier treillis étudié

3.3.a Analyse des déplacements

Distribution de probabilité

x_i et y_i sont les déplacements du noeud i . Selon les degrés de liberté des noeuds considérés, certains déplacements peuvent être bloqués.

La distribution des déplacements de chaque noeud obtenue par simulation est représentée à la Fig. 3.2. Elle est affichée pour deux valeurs de l^* et une valeur petite de σ_α . Lorsque l^* devient plus grande, c'est à dire que la longueur de corrélation devient plus grande, alors la probabilité que les noeuds se déplacent suite à une déformation est plus petite. Ainsi on peut dire que si la longueur de corrélation est petite, nous avons de plus grande chance de variabilité dans les structures.

On remarque ainsi sur les Fig. 3.2 que les déplacements des noeuds ont plus de chance de se produire lorsque l^* est petite.

Sur les Fig. 3.2 on compare les distributions de déplacement obtenue par simulation à celles obtenues analytiquement. Le décalage entre ces résultats est expliqué par une différence de moyenne entre ceux-ci.

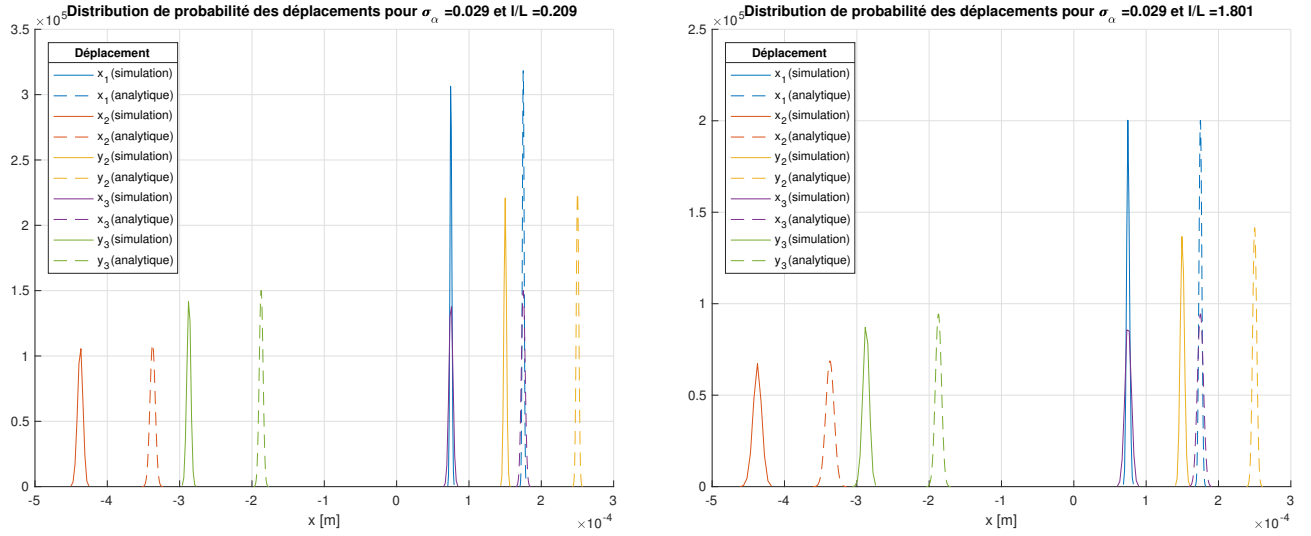


FIGURE 3.2 – Distribution des déplacements des différents noeuds lorsque l^* varie et σ_α est petit

Lorsqu'on agrandit également l'écart-type σ_α , on constate que la rigidité extensionnelle diminue avec une augmentation de σ_α et une diminution de l^* . Ainsi on peut remarquer visuellement sur les Fig. 3.3 que si on augmente l'écart-type alors les courbes de déplacement ont une plus grande variabilité dans la distribution des déplacements (par exemple le range de valeur que x_2 peut prendre est plus grand sur la Fig. 3.3 que sur 3.2).

On remarque également un décalage entre les résultats analytiques et ceux obtenus par simulation qui est dû à une différence de moyenne.

On remarque que la distribution de probabilité diminue alors que la longueur de corrélation augmente sur la Fig. 3.3. En effet, l'aire sous les courbes de distributions de probabilités doit rester égale à 1, ainsi si la distribution de déplacement est élargie (ce qui est dû à un σ_α plus élevé) alors les distributions de probabilités des noeuds ont des pics plus bas que si σ_α était plus petit.

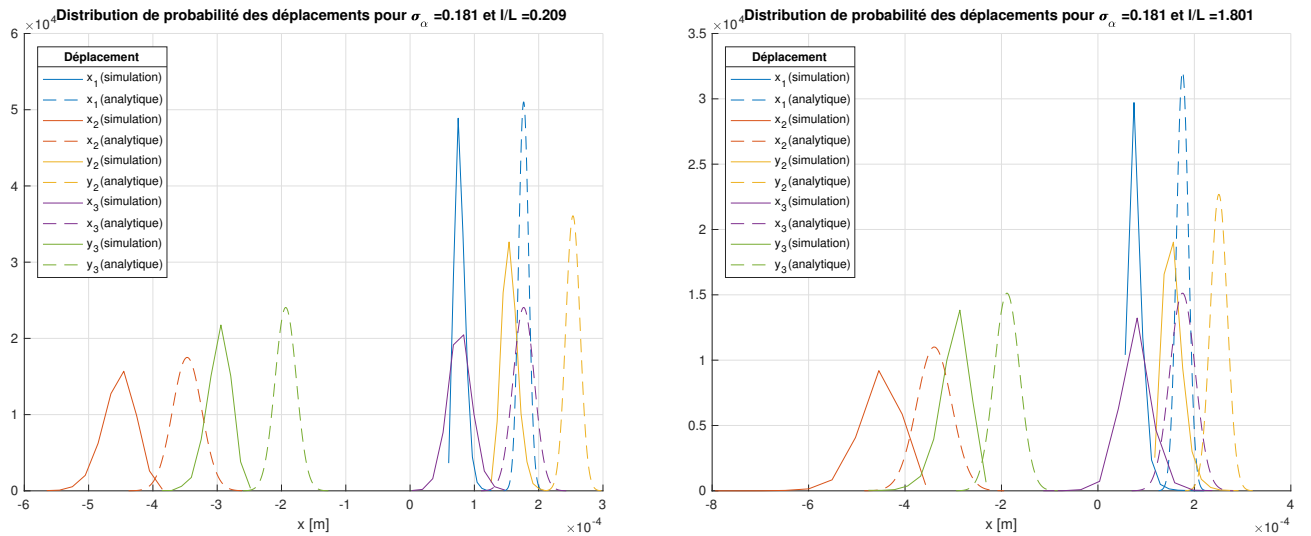


FIGURE 3.3 – Distribution des déplacements des différents noeuds lorsque l^* varie et σ_α est grand

Déplacements moyens

Sa déformée analytique est représentée par la Fig. 3.4. Le déformée obtenue de manière stochastique subit très peu de changement par rapport à au schéma de base du treillis, par soucis d'espace nous ne la représentons pas ici.

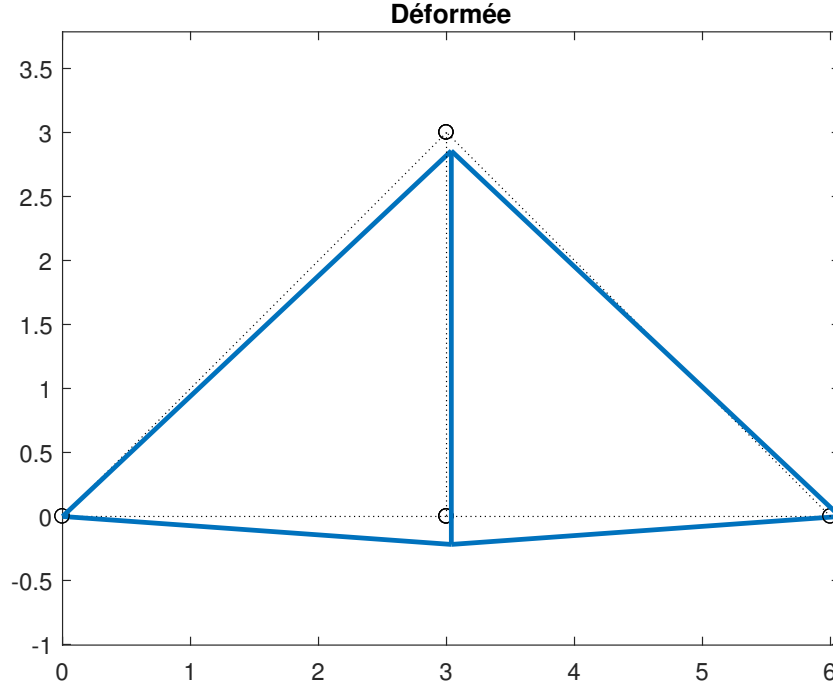


FIGURE 3.4 – Déformée du premier treillis représentée par MATLAB

3.3.b Analyse des efforts

Les distributions des différences d'efforts dans les barres sont représentées aux Fig. 3.5 et 3.6. On constate qu'il y a peu de variabilité.

3.4 Deuxième treillis

Le second treillis analysé est représenté à la Fig. 3.7. Sa déformée selon MATLAB est représentée par la Fig. 3.10.

3.4.a Analyse des déplacements

Distribution de probabilité

Lorsque σ_α est petit et que l^* varie on remarque sur les Fig. 3.8 que les résultats obtenus par simulation et ceux obtenus analytiquement sont décalés de 1m. Ce décalage est encore une fois dû à une différence de moyenne. La probabilité de déplacement augmente quand la longueur de corrélation croît.

Lorsqu'on augmente l'écart-type comme sur la Fig. 3.9 on voit que la distribution de déplacement prend plus de valeurs.

Si la distribution de déplacement prend plus de valeurs alors les pics de probabilités des différents noeuds sont moins élevés comme on le voit sur la Fig. 3.9.

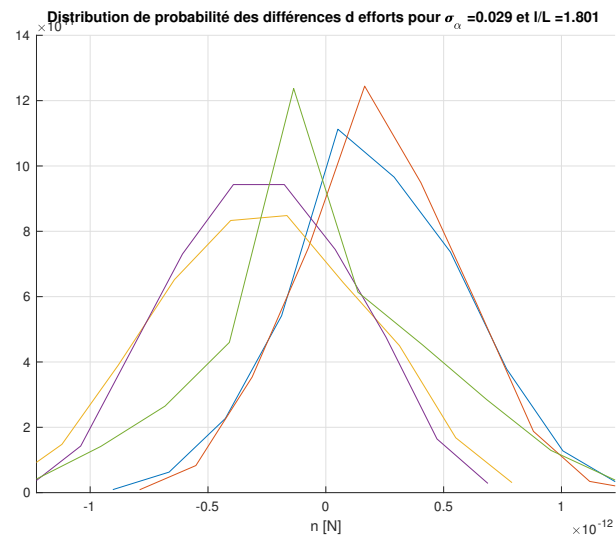
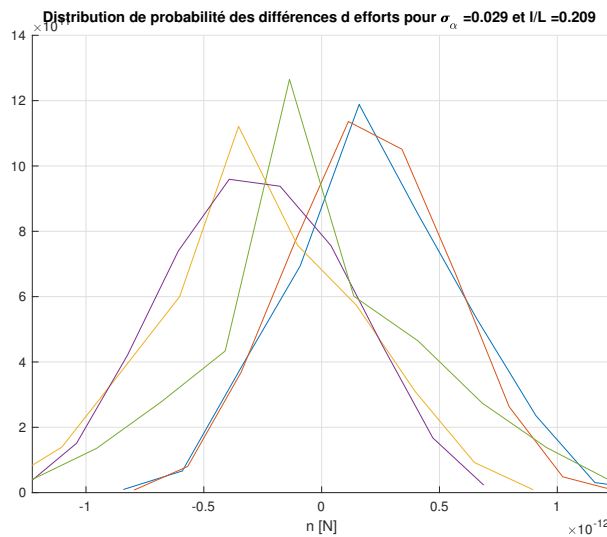


FIGURE 3.5 – Distribution des différences d'efforts dans les différentes barres lorsque l^* varie et σ_α est petit

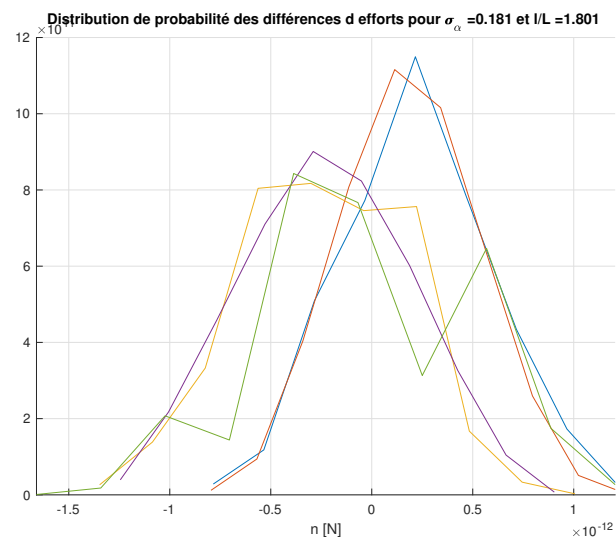
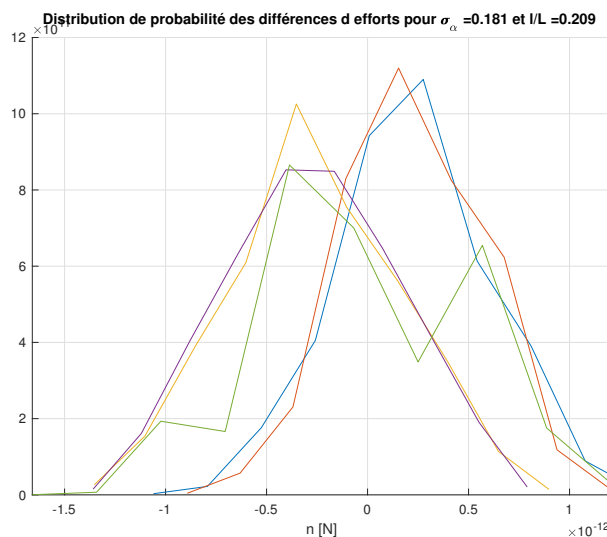


FIGURE 3.6 – Distribution des différences d'efforts dans les différentes barres lorsque l^* varie et σ_α est petit

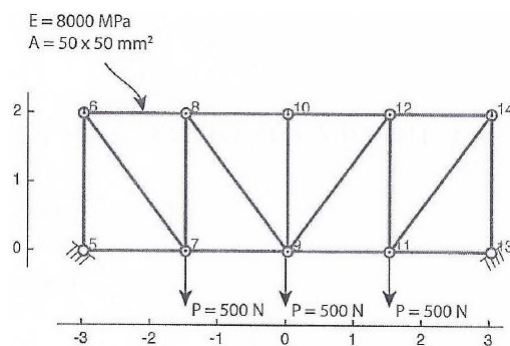


FIGURE 3.7 – Second treillis étudié.

Déplacements moyens

Le déplacement moyen du treillis 2 est affiché sur la Fig. 3.10. Ici aussi on ne montre pas la déformée obtenue stochastiquement car elle change très peu par rapport à la structure de base.

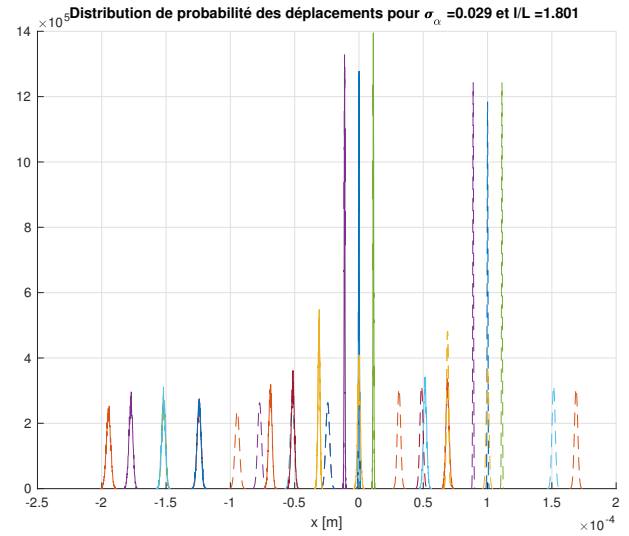
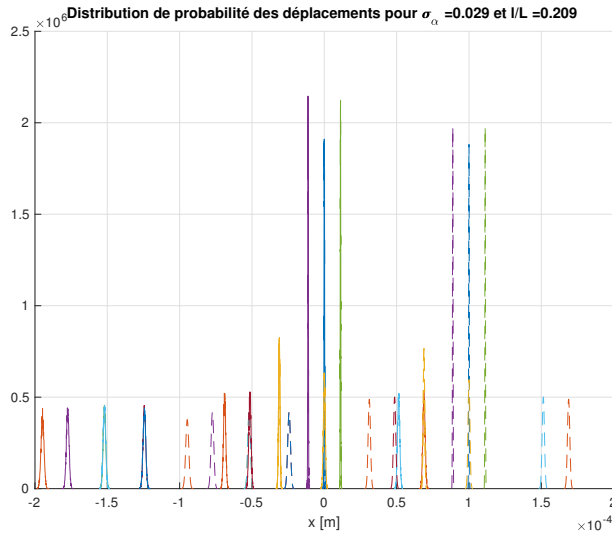


FIGURE 3.8 – Distribution des déplacements des différents noeuds lorsque l^* varie et σ_α est petit

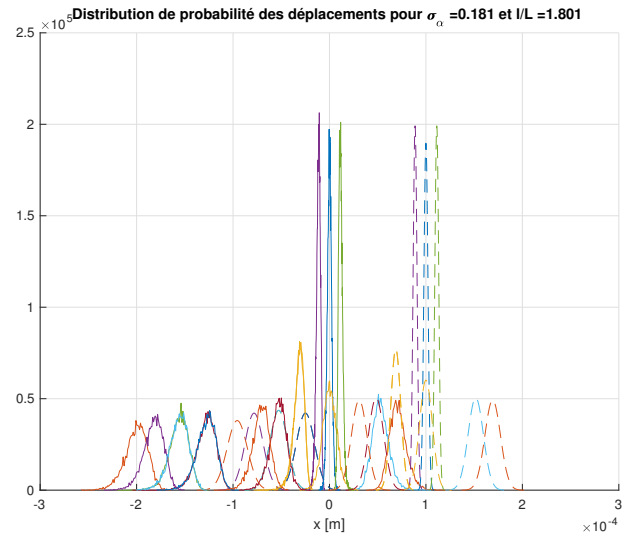
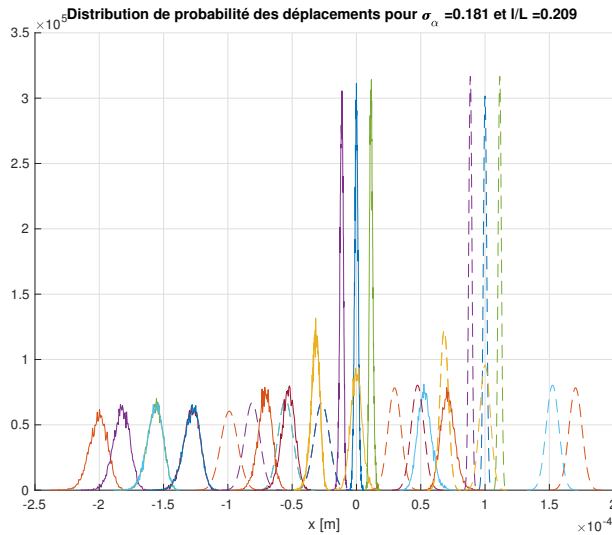


FIGURE 3.9 – Distribution des déplacements des différents noeuds lorsque l^* varie et σ_α est grand

3.4.b Analyse des efforts

Les distributions des différences d'efforts dans les barres sont représentées aux Fig. 3.11 et 3.12. On constate qu'il y a peu de variabilité.

3.5 Treillis personnel

Nous avons choisi pour le treillis personnel de prendre un treillis classique avec un poids de 500N à l'extrémité droite dirigé vers le bas. La déformée du dernier treillis selon MATLAB est représentée par la Fig. 3.16.

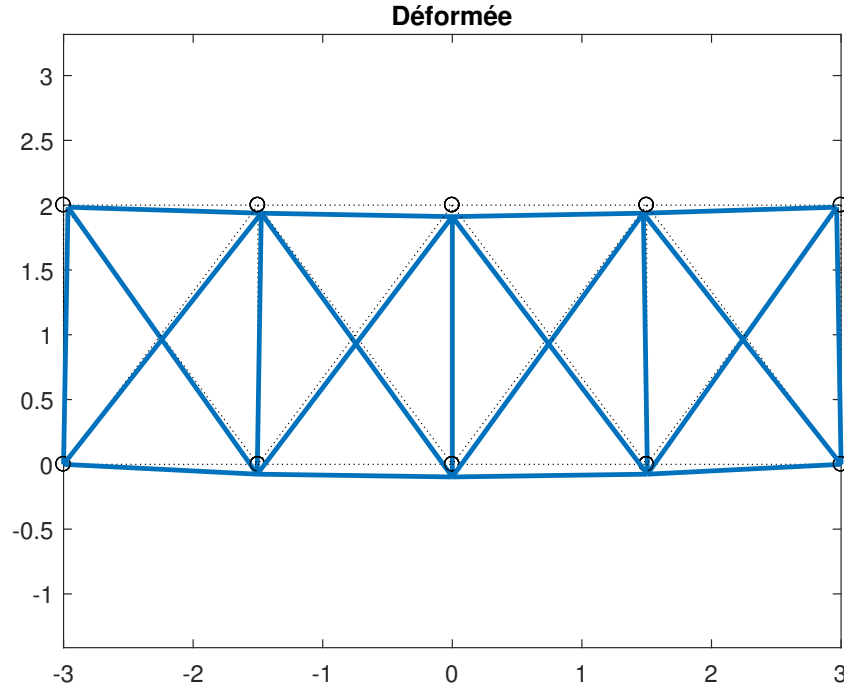


FIGURE 3.10 – Déformée du second treillis représentée par MATLAB

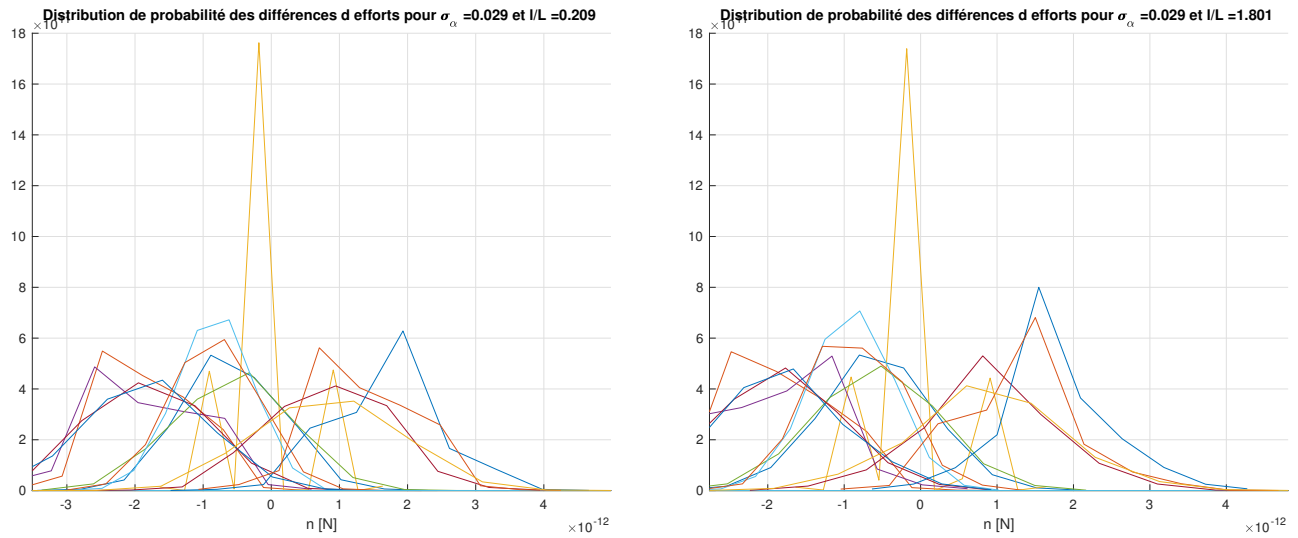


FIGURE 3.11 – Distribution des différences d'efforts dans les différentes barres lorsque l^* varie et σ_α est petit

3.5.a Analyse des déplacements

Distribution de probabilité

Les différentes distributions de probabilité des déplacements sont affichées sur les Fig. 3.14 et Fig. 3.15. Sur la Fig. 3.14, σ_α est petit et ainsi la distribution des déplacements est petite. Lorsque l croît, la probabilité augmente.

Sur la Fig. 3.15, σ_α est grand et ainsi la distribution des déplacements est élargie. Si la distribution est élargie

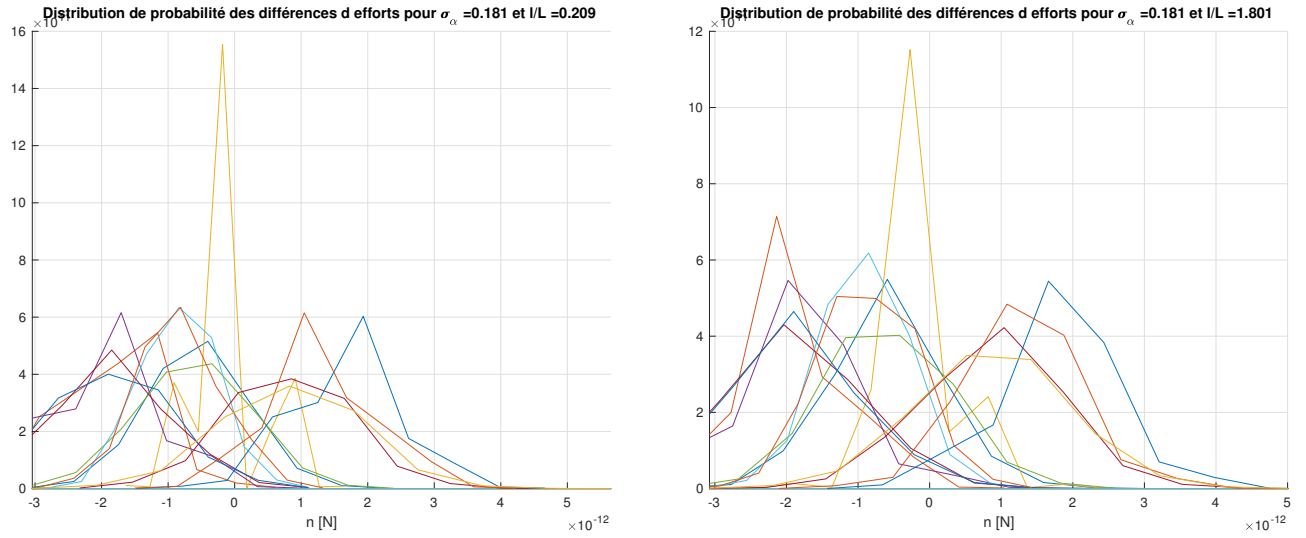


FIGURE 3.12 – Distribution des différences d'efforts dans les différentes barres lorsque l^* varie et σ_α est petit

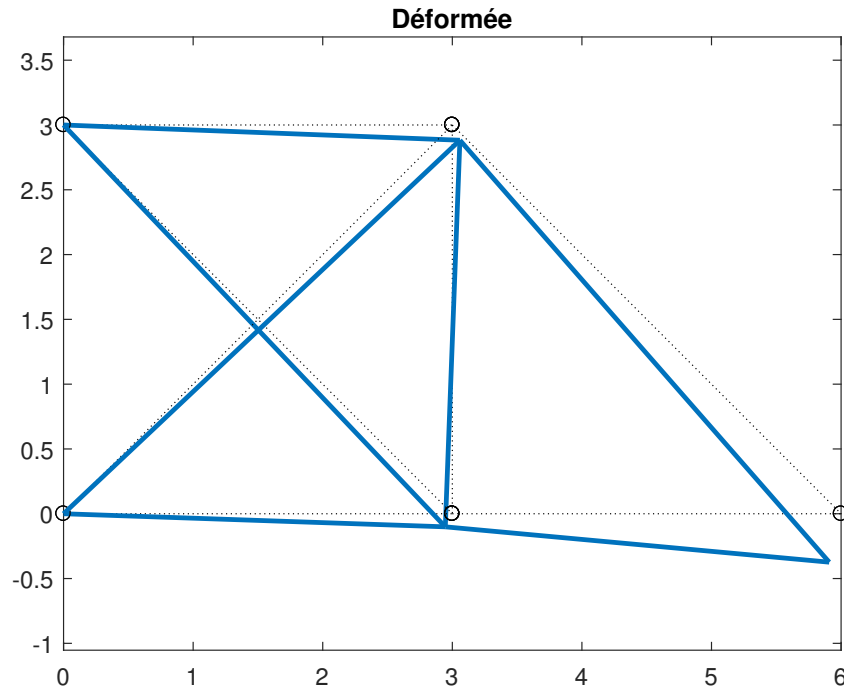


FIGURE 3.13 – Déformée du dernier treillis représentée par MATLAB

alors la distribution de probabilité diminue comme on le voit lorsqu'on compare les deux graphiques de la Fig. 3.15.

Déplacements moyens

Le déplacement moyen du treillis 3 est affiché sur la Fig. 3.16. Ici aussi on ne montre pas la déformée obtenue stochastiquement car elle change très peu par rapport à la structure de base.

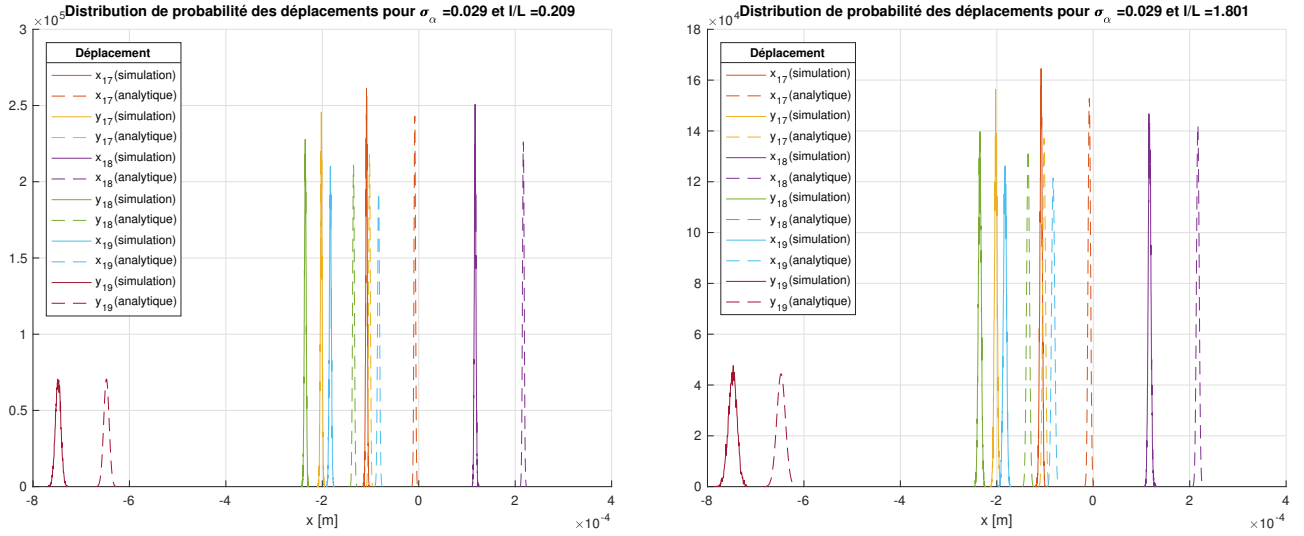


FIGURE 3.14 – Distribution des déplacements des différents noeuds lorsque l^* varie et σ_α est petit

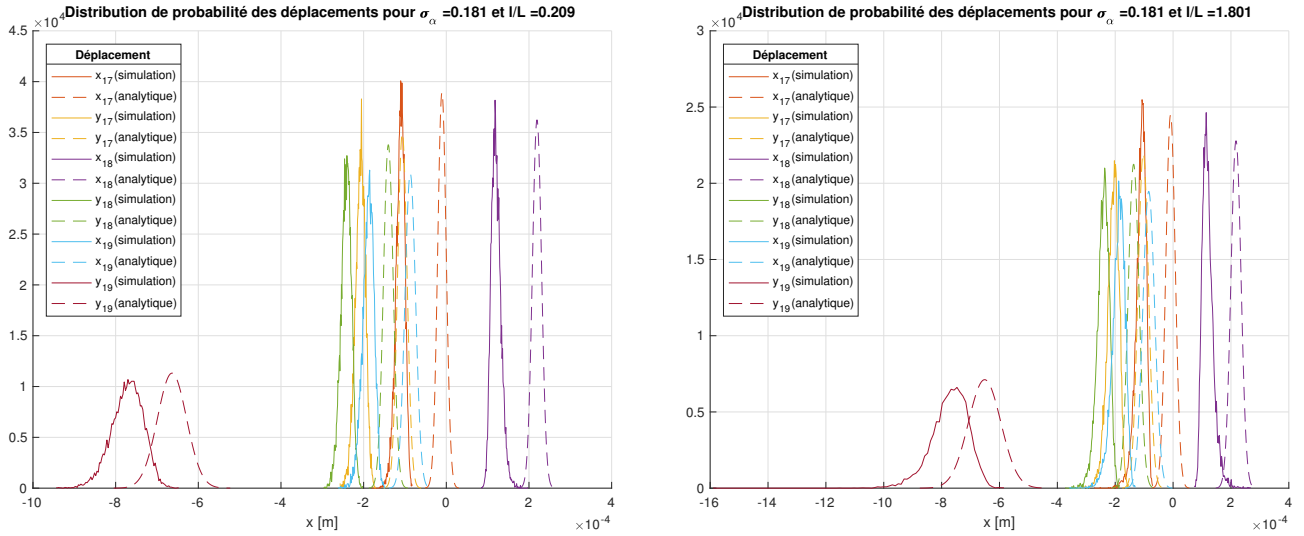


FIGURE 3.15 – Distribution des déplacements des différents noeuds lorsque l^* varie et σ_α est grand

3.5.b Analyse des efforts

Les distributions des différences d'efforts dans les barres sont représentées aux Fig. 3.17 et 3.18. On constate qu'il y a peu de variabilité.

3.6 Commentaire quant aux résultats

Les distributions, moyennes et écart-types des déplacements et efforts ont ici été analysés indépendamment les uns des autres. Une analyse plus fine pourrait inclure une analyse de la corrélation entre les déplacements des différents noeuds et entre les efforts dans les différentes barres. En effet, le déplacement et les efforts sont liés entre eux pour des raideurs équivalentes dans chacune des barres fixées.

Pour analyser plus en profondeur une structure, en particulier du point de vue de sa résistance à l'effort, la résistance de chacune des barres pourrait être analysée. Celle-ci pourrait être représentée par un processus aléatoire, de manière similaire à la raideur extensionnelle. La probabilité de rupture d'une barre dans la structure pourrait ainsi être caractérisée, permettant d'identifier les points faibles de la structure.

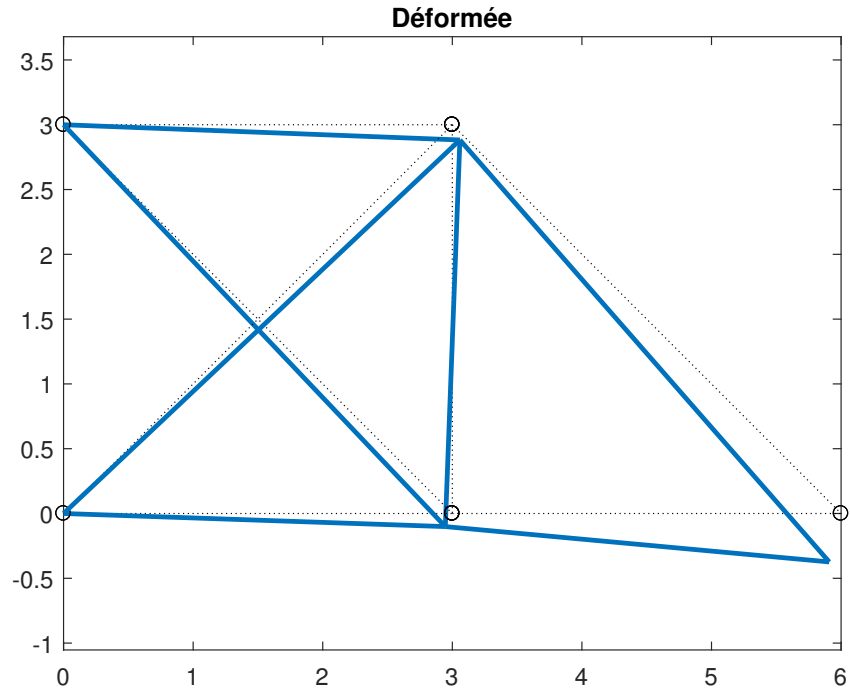


FIGURE 3.16 – Déformée du troisième treillis représentée par MATLAB

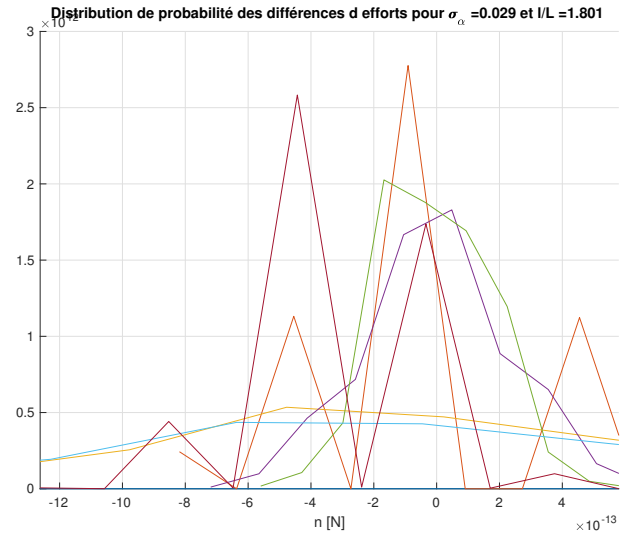
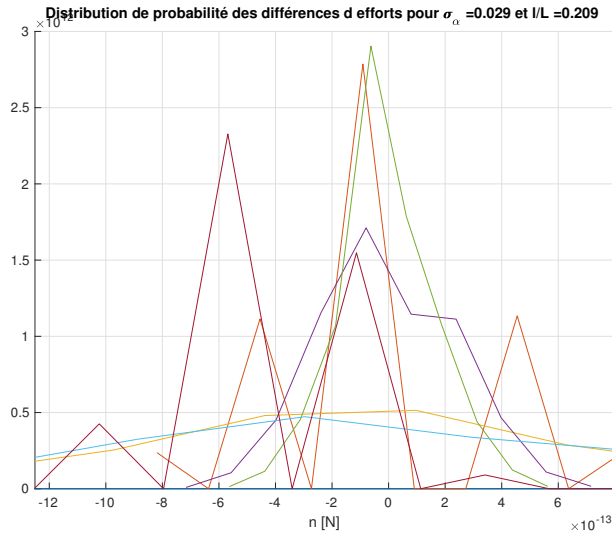


FIGURE 3.17 – Distribution des différences d'efforts dans les différentes barres lorsque l^* varie et σ_α est petit

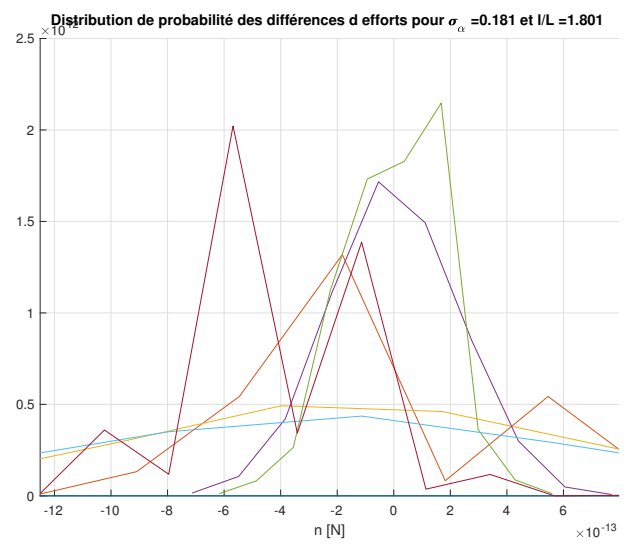
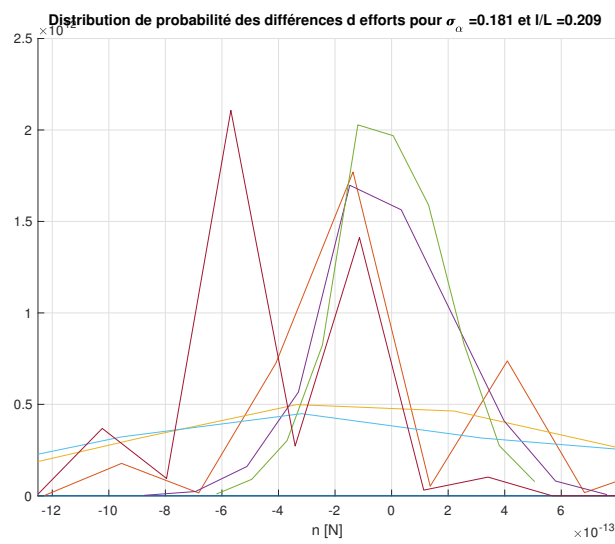


FIGURE 3.18 – Distribution des différences d'efforts dans les différentes barres lorsque l^* varie et σ_α est petit

4 | Conclusion

Ce projet nous a permis de nous familiariser avec l'application de méthodes stochastiques dans des problèmes classiques d'ingénierie. Cela permet une description plus fidèle de la réalité, les variables déterministes n'étant qu'une idéalisation. En effet, la prise en compte de la variabilité de certains paramètres d'un problème peut mener à des résultats dont l'analyse mène à des conclusions plus nuancées que ceux obtenus par modélisation déterministe.

Le cadre mathématique général des statistiques et de l'étude des processus stochastique fournit les fondements théoriques de la modélisation. Cependant, les méthodes analytiques développées par cette approche ne sont pas toujours applicables aisément dans des problèmes particuliers. Une résolution par simulations dont la précision augmente avec le nombre de tirages effectués peut être mise en place dans un grand nombre de problèmes et permet généralement d'obtenir des informations intéressantes sur le problème étudié, telles qu'une approximation de la distribution de probabilité d'une grandeur du problème. Cependant, une simulation stochastique précise d'un problème peut être sujette à instabilités numériques et requérir un temps de calcul important. Il est donc intéressant d'utiliser conjointement des développements analytiques (éventuellement approximatifs) et des résultats obtenus par simulation. En effet, la simulation permet par exemple de justifier des hypothèses et des approximations effectuées lors des développements analytiques, qui se révèlent ensuite plus efficaces lorsqu'ils sont implémentés en regard des ressources de calcul nécessaires.

5 | Bibliographie

- WEHENKEL LOUIS, *Elément du calcul des probabilités*, Faculté des Sciences Appliquées-ULiège, année académique 2016-2017
- WEHENKEL LOUIS, *Elément de statistiques*, Faculté des Sciences Appliquées-ULiège, année académique 2017-2018
- ARNST MAARTEN, DENOEL VINCENT, GEURTS PIERRE, WEHENKEL LOUIS *Eléments de processus stochastiques*, Faculté des Sciences Appliquées-ULiège, année académique 2017-2018