Université de Liège
Faculté des Sciences Appliquées

Analyse probabiliste de la déficience d'une chaîne de production

Dans le cadre du cours d'éléments du calcul des probabilités

Année Académique 2016-2017

Moitroux Olivier
s152122

Étudiant en 2e Bac Ingénieur Civil
Le 28 avril 2017

Introduction

Ce projet vise à familiariser l'étudiant avec des systèmes de plusieurs variables aléatoires au moyen de la modélisation de la défaillance d'une ligne de production de sirop de Liège.

Questions

Les codes nécessaires à la résolution des différents problèmes posés sont construits autour de quatre scripts Matlab portant le nom de la question (`Qx.m`). Les fonctions satellites nécessaires à leur fonctionnement portent quant à elles un nom qui se veut évocateur vis-à-vis du résultat produit. C'est pourquoi il n'y aura pas de référence systématique aux éléments du code permettant de générer les résultats présentés dans ce rapport.

1 Manipulation des lois de probabilité

(1.a) Il nous est demandé, dans un premier temps, de calculer les lois de probabilités marginales des variables $\mathcal{F}$, $\mathcal{J}$ et $\mathcal{E}$. Après import de la table de contingence fournie, nous calculons pour chaque machine $(\mathcal{F}, \mathcal{J}, \mathcal{E})$ une probabilité pour chaque numéro de panne en nous servant simplement de la définition de la probabilité marginale :

$$P_{\mathcal{F}(i)} \triangleq P(\mathcal{F} = i) = \sum_{j=1}^{5} \sum_{k=1}^{4} P_{\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E}}(i,j,k), \forall i = 1,2,3 \tag{1}$$

Cette expression se dérive naturellement pour les deux autres variables aléatoires. Nous obtenons ainsi les résultats suivants :

État	$\mathcal{F}$	$\mathcal{J}$	$\mathcal{E}$
1	0.5700	0.2419	0.3700
2	0.2200	0.2294	0.1800
3	0.2100	0.2319	0.3000
4	$\nexists$	0.1415	0.1500
5	$\nexists$	0.1553	$\nexists$

Table 1 – Probabilité marginale de $\mathcal{F}, \mathcal{J}, \mathcal{E}$

où les NaN on été remplacés par $\nexists$. L'utilisation des NaN permet de contrôler facilement l'exécution du code. On remarquera que la somme des éléments de chaque colonne donne bien 1, preuve donc que ces variables décrivent entièrement l'état de la ligne de production composée des différentes machines. Ces résultats sont générés à l'aide de `pMarginale.m`.

(1.b) Ensuite, il s'agit de calculer les probabilités conjointes de certaines paires de variables. En nous servant cette fois de la définition de la loi de probabilité conjointe,

$$P_{\mathcal{F},\mathcal{J}}(i,j) \triangleq P(\mathcal{F} = i, \mathcal{J} = j,) \quad \forall i = 1,2,3 \quad et \quad \forall j = 1,2,3,4,5 \tag{2}$$

soit,

$$P_{\mathcal{F},\mathcal{J}}(i,j) = \sum_{k=1}^{4} P_{\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E}}(i,j,k) \tag{3}$$

nous obtenons les résultats repris dans la table 2. Bien sûr, cette dernière formule peut être adaptée pour obtenir les deux autres probabilités conjointes demandées ($P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}, P_{\mathcal{J}\mathcal{E}}$) comme nous pouvons le constater dans `pConjointe.m`.

On vérifie rapidement, grâce à la fonction `sum`, que la somme des éléments vaut toujours bien 1.

Machines	$\mathcal{J}=1$	$\mathcal{J}=2$	$\mathcal{J}=3$	$\mathcal{J}=4$	$\mathcal{J}=5$
$\mathcal{F}=1$	0.13788	0.13076	0.13218	0.080655	0.088521
$\mathcal{F}=2$	0.053218	0.050468	0.051018	0.03113	0.034166
$\mathcal{F}=3$	0.050799	0.048174	0.048699	0.029715	0.032613

TABLE 2 – Loi de probabilité conjointe de $P_{\mathcal{F},\mathcal{J}}$

Machines	$\mathcal{E}=1$	$\mathcal{E}=2$	$\mathcal{E}=3$	$\mathcal{E}=4$
$\mathcal{J}=1$	0.0481	0.0288	0.126	0.039
$\mathcal{J}=2$	0.0629	0.045	0.096	0.0255
$\mathcal{J}=3$	0.111	0.0504	0.045	0.0255
$\mathcal{J}=4$	0.074	0.027	0.018	0.0225
$\mathcal{J}=5$	0.074	0.0288	0.015	0.0375

TABLE 3 – Loi de probabilité conjointe de $P_{\mathcal{J},\mathcal{E}}$

Machines	$\mathcal{E}=1$	$\mathcal{E}=2$	$\mathcal{E}=3$	$\mathcal{E}=4$
$\mathcal{F}=1$	0.2109	0.1026	0.171	0.0855
$\mathcal{F}=2$	0.0814	0.0396	0.066	0.033
$\mathcal{F}=3$	0.0777	0.0378	0.063	0.0315

TABLE 4 – Loi de probabilité conjointe de $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$

(1.c) Notre troisième tâche consiste à calculer des lois de probabilités conditionnelles. La théorie nous montre que :

$$P_{\mathcal{F}|\mathcal{J},\mathcal{E}}(i,j,k) = \frac{P_{\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E}}(i,j,k)}{P_{\mathcal{J},\mathcal{E}}(j,k)} \quad \forall i=1,2,3 \quad \forall j=1,2,3,4,5 \quad \forall k=1,2,3,4 \tag{4}$$

Un rapide coup d'œil nous apprend qu'il est nécessaire d'exploiter nos précédents résultats (Q1.c) pour résoudre le problème. C'est ainsi que nous utiliserons la probabilité conjointe des trois variables aléatoires au numérateur et la probabilité conjointe d'une paire de variables (déjà calculée et que l'on permutera cycliquement) au dénominateur afin de couvrir tous les cas. Les tableaux reprenant les résultats de `pConditionnelle.m` sont disponibles en annexe.

(1.d) Il est toujours bon, dans le cadre du raisonnement probabiliste, de se poser la question de l'indépendance des variables aléatoires manipulées. Une telle propriété pourrait, dans certains cas, simplifier les écritures et faciliter le raisonnement.

Si les variables aléatoires $\mathcal{J}$ et $\mathcal{E}$ sont bel et bien dépendantes l'une de l'autre comme en témoignent les différentes tables de probabilités conditionnelles, force est de constater que tel n'est pas le cas pour la variable aléatoire $\mathcal{F}$ qui se targue de l'indépendance vis-à-vis de $\mathcal{J}$ et $\mathcal{E}$: $\mathcal{F} \perp J$, $\mathcal{F} \perp \mathcal{E}$. Nous pouvons vérifier aisément cette affirmation grâce à la table 6, qui nous apprend que quelque soit les combinaisons de $\mathcal{J}$ et $\mathcal{E}$, la probabilité conditionnelle ne varie que lorsque $\mathcal{F}$ varie également. Plus formellement, on tire :

$$P_{\mathcal{F}|\mathcal{J},\mathcal{E}}(i,j,k) = P_{\mathcal{F}}(i) \quad \forall i=1,2,3 \tag{5}$$

$$P(\mathcal{F}=i,\mathcal{J}=j) = P(\mathcal{F}=i)P(\mathcal{J}=j) \quad \forall i=1,2,3 \quad \forall j=1,2,3,4,5 \tag{6}$$

$$P(\mathcal{F}=i,\mathcal{E}=k) = P(\mathcal{F}=i)P(\mathcal{E}=k) \quad \forall i=1,2,3 \quad \forall k=1,2,3,4 \tag{7}$$

Mettons enfin en évidence que les probabilités obtenues pour $P_{\mathcal{F}|\mathcal{J},\mathcal{E}}(\mathcal{F}|\mathcal{J},\mathcal{E})$ sont bien identiques à celles obtenues dans la première colonne de la table 1.

2 Probabilités des pannes

(2.a) Dans cette section, il s'agira, à partir de plusieurs scénarii de pannes envisagés, d'évaluer les probabilités qu'il y ait une défaillance le mois prochain dans la chaîne de production et que celle-ci se doit d'être mise à l'arrêt. En effet, toutes les machines étant en série, l'arrêt d'une seule d'entre elles suffit à neutraliser l'ensemble de la production. Vu que le système ne possède que deux états (en panne ou en marche), il nous est possible d'utiliser le complémentaire de la probabilité que la chaîne de production fonctionne correctement pour calculer la probabilité d'une défaillance de cette dernière. Soit,

$$P_{en\ panne} = 1 - P_{bon\ fonctionnement} = 1 - P(\mathcal{F} = 1, \mathcal{J} = 1, \mathcal{E} = 1) \tag{8}$$

Cette expression nous permet de calculer une $P_{en\ panne} = 97.26\%$

(2.b) Qu'advient-il toutefois de la probabilité que la chaîne de production soit mise à l'arrêt si un contrôle a récemment eu lieu et que les machines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}$ sont certifiées exempts de défaut pour le prochain mois ? Nous pouvons répondre à cette question en évaluant les probabilités qu'il y ait une défaillance dans la section $\mathcal{J}$ s'occupant des jus. Il y a 4 sources possibles de défaillance pour cet atelier à savoir :

1. L'évaporateur ($\mathcal{J} = 2$)
2. Le mélangeur ($\mathcal{J} = 3$)
3. La pompe ($\mathcal{J} = 4$)
4. La raffineuse ($\mathcal{J} = 5$)

Nous pouvons résumer tout cela avec l'expression

$$P_{\mathcal{J}\ \text{hors service}} = 1 - P(\mathcal{J} = 1 | \mathcal{F} = 1, \mathcal{E} = 1) = \sum_{k=2}^{5} P_{\mathcal{J}|\mathcal{F},\mathcal{E}}(1, k, 1) \tag{9}$$

qui, évaluée, nous mène à $P_{\mathcal{J}\ \text{hors service}} = 87\%$

3 Coût moyen des pannes

Rappelons nous d'une chose, le but d'une ligne de production est bien sûr de produire un bien mais surtout de pouvoir ultérieurement tirer profit de la vente de ce dernier ! Il est dès lors important de pouvoir évaluer les pertes induites par une défaillance dans le processus de production. Nous nous concentrerons sur le coût de réparation des machines et non sur le manque à gagner de l'entreprise lors d'une panne.

(3.a) Afin de quantifier l'impact d'une panne en terme de coûts moyens, il est nécessaire de tenir compte des coûts des dysfonctionnements en les pondérant par leur probabilité d'occurrence. À titre d'illustration, appuyons nous sur le cas de la machine s'occupant des fruits. Notons le coût à sa réparation $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$. Comme expliqué ci-dessus, nous pouvons exprimer son coût moyen de réparation par

$$E\{\mathcal{K}_{\mathcal{F}}\} = \sum_{i=1}^{3} \mathcal{K}_{\mathcal{F}}(i) P_{\mathcal{F}}(i) = 7\,990\,€ \tag{10}$$

Décliner cette expression pour les autres machines, nous mène à :

$$E\{\mathcal{K}_{\mathcal{J}}\} = 10625€ \quad \text{et} \quad E\{\mathcal{K}_{\mathcal{E}}\} = 19\,650\,€$$

Poursuivons avec la variance de ces coûts :

$$V\{\mathcal{K}_{\mathcal{F}}\} = \left(\sum_{i=1}^{5} ((\mathcal{K}_F(i))^2 . P_{\mathcal{F}}(m) \right) - (E\{\mathcal{K}_{\mathcal{F}}\})^2 = 89\,889\,900\,€^2 \tag{11}$$

Ou encore pour les autres machines,

$$V\{\mathcal{K}_{\mathcal{J}}\} = 4\,7048\,000\,€ \quad \text{et} \quad V\{\mathcal{K}_{\mathcal{E}}\} = 349\,627\,500\,€^2$$

Mettons en évidence le fait qu'une panne intervienne dans le processus provoque un grand pic de dépenses pour sa réparation.

(3.b) Cette fois, considérons la chaîne de production dans son ensemble avec la *fonction de coût* $\phi(\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E}) = \mathcal{K}_{\mathcal{F}} + \mathcal{K}_{\mathcal{J}} + \mathcal{K}_{\mathcal{E}}$.

Grâce aux formules précédemment établies, l'espérance et la variance de cette fonction de variables aléatoires peuvent être exprimées de la sorte :

$$E\{\phi(\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E})\} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{4}\phi(i,j,k).P_{\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E}}(i,j,k) = 38\,264.60\,€ \tag{12}$$

$$V\{\phi(\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E})\} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{4}(\phi(i,j,k))^2.P_{\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E}}(i,j,k) - (E\{\phi(\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E})\})^2 = 464\,109\,294.84\,€^2 \tag{13}$$

Vu la forte dispersion des valeurs prises par la fonction ϕ, nous ne sommes pas étonnés d'obtenir une variance aussi élevée avec la fonction `espVar_CoutTot.m`.

La notion de l'espérance de ϕ se réfère au budget mensuel que l'entrepreneur devra consacrer à la maintenance de tout son équipement. Le cours de probabilité nous apprend le théorème de la linéarité de l'espérance mathématique qui « *exprime le fait que l'espérance mathématique d'une combinaison linéaire de variables aléatoires d'espérance finie est la combinaison linéaire correspondante des espérances mathématiques de ces variables* » [1]. On peut donc écrire que

$$E\{\phi(\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E})\} = E\{\mathcal{K}_{\mathcal{F}}\} + E\{\mathcal{K}_{\mathcal{J}}\} + E\{\mathcal{K}_{\mathcal{E}}\}$$

Notons qu'il est nécessaire que les variables aléatoires soient indépendantes afin que l'expression en terme de variance se simplifie en une relation semblable. Étant donné la dépendance entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{J}$ démontrée dans la première section, il n'est pas possible de tirer une telle correspondance linéaire. La raison est que la *covariance* (associée à ces deux variables) intervenant dans l'expression augmente la variance de ϕ. Or, cette covariance ne peut s'annuler que dans le cas de variables aléatoires indépendantes. Nous aurons plutôt :

$$V\{\sum_{n=1}^{3}\mathcal{K}_n(X_n)\} = \sum_{p=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} cov(\mathcal{K}_n(X_n),\mathcal{K}_p(X_p)) \tag{14}$$

Soit, dans notre cas, et vu que la covariance d'une variable avec elle-même équivaut à sa variance,

$$V\{\sum_{n=1}^{3}\mathcal{K}_n(X_n)\} = 2cov(\mathcal{K}_{\mathcal{E}},\mathcal{K}_{\mathcal{J}}) + V\{\mathcal{K}_{\mathcal{F}}\} + V\{\mathcal{K}_{\mathcal{J}}\} + V\{\mathcal{K}_{\mathcal{E}}\} \quad (\neq V\{\mathcal{K}_{\mathcal{F}}\} + V\{\mathcal{K}_{\mathcal{J}}\} + V\{\mathcal{K}_{\mathcal{E}}\}) \tag{15}$$

(3.c) Plaçons-nous maintenant dans des conditions où la machine $\mathcal{F}$ possède des capteurs précis nous garantissant un suivi en temps réel. La démarche est tout à fait semblable à celle utilisée auparavant, mais nous utiliserons ici les probabilités conditionnelles relatives aux différents scénarii envisageables. Ceux-ci sont au nombre de trois et correspondent aux différents états que peut prendre la machine $\mathcal{F}$. On calcule alors l'espérance comme suit :

$$E\{\phi(\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E})|\mathcal{F}=i\} = \sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{4}\phi(i,j,k).P_{\mathcal{J},\mathcal{E}|\mathcal{F}}(i,j,k) \quad \forall i = 1,2,3 \tag{16}$$

Sur base des résultats obtenus, on détermine ensuite la variance :

1. Sans hypothèse d'indépendance entre les variables aléatoires en question.

s

$$V\{\phi(\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E})|\mathcal{F}=i\} = \left(\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{4}(\phi(i,j,k))^2.P_{\mathcal{J},\mathcal{E}|\mathcal{F}}(i,j,k)\right) - (E\{\phi(\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E})|\mathcal{F}=i\})^2 \quad \forall i=1,2,3 \quad (17)$$

Après calcul de l'ensemble des valeurs dans Matlab (`espVar_CoutCond.m`), nous obtenons les résultats repris dans la table 5. Nous savons que, lorsque deux variables aléatoires sont indépendantes, la probabilité

État	$E\{\phi(\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E})\|\mathcal{F}=i\}$	$V\{\phi(\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E})\|\mathcal{F}=i\}$
i = 1	30 274.60 €	374 219 394.84 €^{2}
i = 2	52 274.60 €	374 219 394.84 €^{2}
i = 3	45 274.60 €	374 219 394.84 €^{2}

TABLE 5 – Espérance et variance conditionnelle de $\phi(\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E})$ connaissant $\mathcal{F}$

de l'une sachant l'autre est constante quelque soit la valeur de i. La réciproque est par contre fausse, c'est pourquoi nous ne pouvons déduire de ces résultats que les variables aléatoires sont indépendantes. Seuls nos résultats précédents nous permettent d'affirmer que $\mathcal{F}$ est indépendante de $\mathcal{J}$ et $\mathcal{E}$. Nous pouvons calculer l'espérance de ces 3 situations à l'aide de :

$$E\{E\{\phi(\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E})|\mathcal{F}\}\} = \sum_{i=1}^{3} E\{\phi(\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E})|\mathcal{F}=i\}.P_{\mathcal{F}}(i) = 38\,264.60\,€ \quad (18)$$

Il est heureux d'obtenir les mêmes résultats qu'au point 3.b (equation 12), preuve que le *théorème de l'espérance totale* est bien vérifié.

Le *théorème de la variance totale* sera quant à lui vérifié à l'aide de :

$$V\{E\{\phi(\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E})|\mathcal{F}\}\} = E\{\,(E\{\phi(\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E})|\mathcal{F}\} - E\{E\{\phi(\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E})|\mathcal{F}\}\})^2\,\} \quad (19)$$

Soit,

$$V\{E\{\phi(\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E})|\mathcal{F}\}\} = \sum_{i=1}^{3}[(E\{\phi(\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E})|\mathcal{F}=i\} - E\{E\{\phi(\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E})|\mathcal{F}=i\}\})^2.P_{\mathcal{F}}(i)] \quad (20)$$

Ce qui nous donne le terme temporaire :

$$E\{(E\{\phi(\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E})|\mathcal{F}\} - 38\,264.60)^2\} \quad (21)$$

Finalement, nous obtenons bien l'équivalence avec l'équation 13 attendue :

$$E\{V\{\phi(\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E})|\mathcal{F}\}\} + V\{E\{\phi(\mathcal{F},\mathcal{J},\mathcal{E})|\mathcal{F})\}\} = 464\,109\,294.84\,€^2 \quad (22)$$

4 Borne supérieure du coût des pannes

(a) Dans cette dernière partie il nous est demandé de calculer une borne supérieure du coût de réparation pour chaque panne de chaque machine telle que la probabilité que le coût soit supérieur à la borne soit <= 0.1.

(i) En isolant la variable aléatoire $\mathcal{X}$ dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev que voici :

$$P(|\mathcal{X}-\mu_{\mathcal{X}}| \geq c\sigma_{\mathcal{X}}) \leq \frac{1}{c^2}\,,\,\forall c>0 \quad (23)$$

nous obtenons, à condition de considérer que $(\mathcal{X}-\mu_{\mathcal{X}})$ est positif et en choisissant $c=\sqrt{10}$:

$$P(\mathcal{X} \geq \mu_{\mathcal{X}} + \sqrt{10}\sigma_{\mathcal{X}}) \leq 0.1 \quad (24)$$

La borne supérieure du coût de réparation nous est alors donnée par l'expression $(\mathcal{X}-\mu_{\mathcal{X}})$. Les résultats obtenus (par `borneBT.m`) sont reportés dans la table 6.

	$\mathcal{F} = k$		$\mathcal{J} = k$		$\mathcal{E} = k$	
k	B-T	$\mathcal{N}$	B-T	$\mathcal{N}$	B-T	$\mathcal{N}$
1	0	0	0	0	0	0
2	23581.14	22640.78	17213.59	15897.09	31581.14	30640.78
3	17213.59	15897.09	18632.46	18256.31	23162.28	21281.55
4	/	/	7474.34	7192.23	58478.51	56409.71
5	/	/	13790.57	13320.39	/	/

TABLE 6 – Bornes supérieures des coûts calculés d'après l'inégalité de Bienayme-Tchebyshev (B-T) ou d'après une distribution normale $\mathcal{N}$

(ii) Une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2, notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si sa densité est

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \tag{25}$$

Or, par définition, la densité nous est donnée par

$$P(\mathcal{X} \geq b) = \int_b^{+\infty} f_{\mathcal{X}}(x)dx \tag{26}$$

De cette manière, il nous faut résoudre l'équation

$$\int_b^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dx = 0.1 \tag{27}$$

afin de déterminer le coût de réparation b. Les résultats de `borneN.M`sont également repris dans la table 6.

(iii) Nous remarquons que les résultats obtenus dans le cas d'une distribution normale sont toujours inférieures en valeur par rapport à ceux obtenus à l'aide de l'inégalité de Bienayme-Tchebyshev. Cela s'explique par le fait que cette dernière ne fournit qu'une borne supérieure de la probabilité de la variable aléatoire (d'espérance μ et d'écart-type σ), alors que le fait de supposer une répartition normale nous apporte la répartition exacte de la variable aléatoire. De cette manière, les bornes obtenues à l'aide de la répartition normale sont plus restrictives et plus précises.

Annexes

5 TABLES

5.1 Q1.C

	$\mathcal{J}=1$	$\mathcal{J}=2$	$\mathcal{J}=3$	$\mathcal{J}=4$	$\mathcal{J}=5$	
$\mathcal{F}=1$	0.57	0.57	0.57	0.57	0.57	$\mathcal{E}=1$
$\mathcal{F}=2$	0.22	0.22	0.22	0.22	0.22	
$\mathcal{F}=3$	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	
$\mathcal{F}=1$	0.57	0.57	0.57	0.57	0.57	$\mathcal{E}=2$
$\mathcal{F}=2$	0.22	0.22	0.22	0.22	0.22	
$\mathcal{F}=3$	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	
$\mathcal{F}=1$	0.57	0.57	0.57	0.57	0.57	$\mathcal{E}=3$
$\mathcal{F}=2$	0.22	0.22	0.22	0.22	0.22	
$\mathcal{F}=3$	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	
$\mathcal{F}=1$	0.57	0.57	0.57	0.57	0.57	$\mathcal{E}=4$
$\mathcal{F}=2$	0.22	0.22	0.22	0.22	0.22	
$\mathcal{F}=3$	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	

TABLE 7 – Loi de probabilité conditionnelle : $P_{\mathcal{F}|\mathcal{J},\mathcal{E}}(\mathcal{F}|\mathcal{J},\mathcal{E})$

	$\mathcal{J}=1$	$\mathcal{J}=2$	$\mathcal{J}=3$	$\mathcal{J}=4$	$\mathcal{J}=5$	
$\mathcal{F}=1$	0.13	0.17	0.3	0.2	0.2	$\mathcal{E}=1$
$\mathcal{F}=2$	0.13	0.17	0.3	0.2	0.2	
$\mathcal{F}=3$	0.13	0.17	0.3	0.2	0.2	
$\mathcal{F}=1$	0.16	0.25	0.28	0.15	0.16	$\mathcal{E}=2$
$\mathcal{F}=2$	0.16	0.25	0.28	0.15	0.16	
$\mathcal{F}=3$	0.16	0.25	0.28	0.15	0.16	
$\mathcal{F}=1$	0.42	0.32	0.15	0.06	0.05	$\mathcal{E}=3$
$\mathcal{F}=2$	0.42	0.32	0.15	0.06	0.05	
$\mathcal{F}=3$	0.42	0.32	0.15	0.06	0.05	
$\mathcal{F}=1$	0.26	0.17	0.17	0.15	0.25	$\mathcal{E}=4$
$\mathcal{F}=2$	0.26	0.17	0.17	0.15	0.25	
$\mathcal{F}=3$	0.26	0.17	0.17	0.15	0.25	

TABLE 8 – Loi de probabilité conditionnelle : $P_{\mathcal{J}|\mathcal{F},\mathcal{E}}(\mathcal{J}|\mathcal{F},\mathcal{E})$

	$\mathcal{J}=1$	$\mathcal{J}=2$	$\mathcal{J}=3$	$\mathcal{J}=4$	$\mathcal{J}=5$	
$\mathcal{F}=1$	0.19884	0.27419	0.47865	0.52297	0.4765	
$\mathcal{F}=2$	0.19884	0.27419	0.47865	0.52297	0.4765	$\mathcal{E}=1$
$\mathcal{F}=3$	0.19884	0.27419	0.47865	0.52297	0.4765	
$\mathcal{F}=1$	0.11906	0.19616	0.21734	0.19081	0.18545	
$\mathcal{F}=2$	0.11906	0.19616	0.21734	0.19081	0.18545	$\mathcal{E}=2$
$\mathcal{F}=3$	0.11906	0.19616	0.21734	0.19081	0.18545	
$\mathcal{F}=1$	0.52088	0.41848	0.19405	0.12721	0.096587	
$\mathcal{F}=2$	0.52088	0.41848	0.19405	0.12721	0.096587	$\mathcal{E}=3$
$\mathcal{F}=3$	0.52088	0.41848	0.19405	0.12721	0.096587	
$\mathcal{F}=1$	0.16122	0.11116	0.10996	0.15901	0.24147	
$\mathcal{F}=2$	0.16122	0.11116	0.10996	0.15901	0.24147	$\mathcal{E}=4$
$\mathcal{F}=3$	0.16122	0.11116	0.10996	0.15901	0.24147	

TABLE 9 – Loi de probabilité conditionnelle : $P_{\mathcal{E}|\mathcal{F},\mathcal{J}}(\mathcal{E}|\mathcal{F},\mathcal{J})$

6 CODES

6.1 Q1.m

```
% Resolution de la question 1
format bank;
% Importation des donnees
load('FJE.mat')

% Probabilites marginales
disp('a) Probabilites marginales :');
Pm_F = pMarginale(FJE, 'F')
Pm_J = pMarginale(FJE, 'J')
Pm_E = pMarginale(FJE, 'E')

% Export vers latex
% matrix2latex([Pm_F Pm_J Pm_E], 'Q1a.tex', 'alignment', 'c');

% Probabilites conjointes
disp('b) Probabilites conjointes :');
[Pc_FE, Pc_FJ, Pc_JE] = pConjointe(FJE)

% Probabilites conditionnelles
disp('c) Probabilites conditionnelles :');
[PCj_FE, PCe_FJ, PCf_JE] = pConditionnelle(FJE)
```

6.2 pMarginale.m

```
function P = pMarginale(FJE, machine)
% Calcule la probabilite marginale demandee a la question 1 pour 1 machine
% IN : FJE, nom machine au format majuscule
% OUT : P, vecteur contenant les P_marginales d'une machine

hauteur    = length(FJE(:,1,1));
largeur    = length(FJE(1,:,1));
profondeur = length(FJE(1,1,:));
maxDim = max([hauteur, largeur, profondeur]);
```

```
P = zeros(1,maxDim);

if machine == 'F'
    for num_panne=1:hauteur % plan horizontal
        for j=1:largeur
            for e=1:profondeur
                P(1,num_panne) = P(1,num_panne) + FJE(num_panne, j, e);
            end
        end
        P(hauteur+1:maxDim)= NaN;
    end

elseif machine == 'J'
    for num_panne =1:largeur
        for f=1:hauteur
            for e=1:profondeur
                P(1, num_panne) = P(1,num_panne) + FJE(f,num_panne, e);
            end
        end
    end

elseif machine == 'E'
    for num_panne=1:profondeur
        for f=1:hauteur
            for j=1:largeur
                P(1, num_panne) = P(1,num_panne) + FJE(f,j, num_panne);
            end
        end
    end
    P(profondeur+1:maxDim)= NaN;
end

end
```

6.3 pConjointe.m

```
function [Pc_FE, Pc_FJ, Pc_JE] = pConjointe(FJE)
% Calcule les lois de probabilites conjointes se
% rapportant aux differentes paires de variables de la Q1.b
% IN : FJE
% OUT : [Pc_FE, Pc_FJ, Pc_JE]

% Initialisation
hauteur    = length(FJE(:,1,1));
largeur    = length(FJE(1,:,1));
profondeur = length(FJE(1,1,:));

Pc_FE = zeros(hauteur,profondeur);
Pc_FJ = zeros(hauteur,largeur);
Pc_JE = zeros(largeur,profondeur);

% Calcul des probabilites conjointes

% Pc_FE
for f=1:hauteur
```

```
    for j=1:largeur
        for e=1:profondeur
            Pc_FE(f,e)=Pc_FE(f,e)+FJE(f,j,e);
        end
    end
end

% Pc_FJ
for f=1:hauteur
    for j=1:largeur
        for e=1:profondeur
            Pc_FJ(f,j)=Pc_FJ(f,j)+FJE(f,j,e);
        end
    end
end

% Pc_JE
for f=1:hauteur
    for j=1:largeur
        for e=1:profondeur
            Pc_JE(j,e)=Pc_JE(j,e)+FJE(f,j,e);
        end
    end
end
% Export des donnees vers latex
% matrix2latex(Pc_FJ,'Q1b1.tex','alignment','c');
% matrix2latex(Pc_JE,'Q1b2.tex','alignment','c');
% matrix2latex(Pc_FE,'Q1b3.tex','alignment','c');
end
```

6.4 pConditionnelle.m

```
function [ PCj_FE, PCe_FJ, PCf_JE ] = pConditionnelle( FJE )
% Calcule les lois de probabilites conditionnelles de la Q1.c
% IN : FJE
% OUT : [ PCj_FE, PCe_FJ, PCf_JE ]

% Calcul des probabilites conjointes
[Pc_FE, Pc_FJ, Pc_JE]= pConjointe(FJE);

% Initialisation
hauteur     = length(FJE(:,1,1));
largeur     = length(FJE(1,:,1));
profondeur  = length(FJE(1,1,:));

PCj_FE = zeros(hauteur,largeur,profondeur);
PCe_FJ = zeros(hauteur,largeur,profondeur);
PCf_JE = zeros(hauteur,largeur,profondeur);

% Calcul des probabilites conditionnelles
for f=1:hauteur
    for j=1:largeur
        for e=1:profondeur
            PCf_JE(f,j,e)=(FJE(f,j,e))/(Pc_JE(j,e));
            PCj_FE(f,j,e)=(FJE(f,j,e))/(Pc_FE(f,e));
```

```
            PCe_FJ(f,j,e)=(FJE(f,j,e))/(Pc_FJ(f,j));
        end
    end
end

% Export
% matrix2latex(PCf_JE(:,:,1),'Q1c1_1.tex','alignment','c');
% matrix2latex(PCf_JE(:,:,2),'Q1c1_2.tex','alignment','c');
% matrix2latex(PCf_JE(:,:,3),'Q1c1_3.tex','alignment','c');
% matrix2latex(PCf_JE(:,:,4),'Q1c1_4.tex','alignment','c');
%
% matrix2latex(PCj_FE(:,:,1),'Q1c2_1.tex','alignment','c');
% matrix2latex(PCj_FE(:,:,2),'Q1c2_2.tex','alignment','c');
% matrix2latex(PCj_FE(:,:,3),'Q1c2_3.tex','alignment','c');
% matrix2latex(PCj_FE(:,:,4),'Q1c2_4.tex','alignment','c');
%
% matrix2latex(PCe_FJ(:,:,1),'Q1c3_1.tex','alignment','c');
% matrix2latex(PCe_FJ(:,:,2),'Q1c3_2.tex','alignment','c');
% matrix2latex(PCe_FJ(:,:,3),'Q1c3_3.tex','alignment','c');
% matrix2latex(PCe_FJ(:,:,4),'Q1c3_4.tex','alignment','c');

end
```

6.5 Q2.m

```
% Resolution question 2
format bank;
% Importation des donnees
load('FJE.mat');

% Q2.a
disp('1) Probabilite que la chaine de production tombe en panne le mois prochain');
P_panne = pPanne(FJE)

% Q2.b
disp('2) Probabilite que J tombe en panne si F et E ont ete controlees');
P_panneJ = pPanneCond(FJE)
```

6.6 importCouts.m

```
function[Cout_F, Cout_J, Cout_E]= importCouts()
% Fixe les couts des diverses pannes
% IN : /
% OUT : [Cout_F, Cout_J, Cout_E]

Cout_F=[0, 22000, 15000];
Cout_J=[0, 15000, 18000, 7000, 13000];
Cout_E=[0, 30000, 20000, 55000];

end
```

6.7 pPanne.m

```
function[P]=pPanne(FJE)
% Fonction qui calcule la probabilite que la chaine de production tombe en
```

```
% panne au cours du prochain mois
% IN : FJE
% OUT : P

% Resolution
P = 1-FJE(1,1,1);

end
```

6.8 pPanneCond.m

```
function [P_panneJ] = pPanneCond(FJE)
% Calcule la probabilite que la machine J tombe en panne si les deux autres
%sont considerees a coup sur comme operationnelles
% IN : FJE
% OUT : P_panneJ

% Initialisation
[PCj_FE, ~, ~] = pConditionnelle(FJE);
P_panneJ = 0;

% Calcul des probabilites se rapportant aux 4 pannes
% envisageables

for j=2:length(FJE(1,:,1))
    P_panneJ = P_panneJ + PCj_FE(1,j,1);
end

end
```

6.9 Q3.m

```
% Resolution question 3
format bank;
% Importation des donnees
load('FJE.mat');

% Q3.a
disp('1) Cout moyen lie a la necessite de reparer une machine et calcul de la variance');
[Cmoy_F, Cmoy_J, Cmoy_E] = coutMoyen(FJE)
[Cvar_F, Cvar_J, Cvar_E] = coutVariance(FJE)

% Q3.b
disp('2) Esperance et variance du budget total de maintenance des machines');
[esp_CoutTot, var_CoutTot] = espVar_CoutTot(FJE)

% Q3.c
disp('3) Esperance et variance conditionnelles de la fonction cout connaissant F');
[esp_CoutCond, var_CoutCond, espTot, varTot] = espVar_CoutCond(FJE)

% Export
% matrix2latex([esp_CoutCond var_CoutCond],'Q3d.tex','alignment','c');
```

6.10 coutMoyen.m

```
function [Cmoy_F, Cmoy_J, Cmoy_E] = coutMoyen(FJE)
% Determine les couts moyens lies a la necessite de reparer chacune des
% machines
% IN : FJE
% OUT : [Cmoy_F, Cmoy_J, Cmoy_E]

% Initialisation
hauteur    = length(FJE(:,1,1));
largeur    = length(FJE(1,:,1));
profondeur = length(FJE(1,1,:));
[cout_F, cout_J, cout_E]=importCouts;% a adapter si FJE change

% Calcul des probabilites marginales
Pm_F = pMarginale(FJE, 'F');
Pm_J = pMarginale(FJE, 'J');
Pm_E = pMarginale(FJE, 'E');

% Initialisation 2
Cmoy_F = 0;
Cmoy_J = 0;
Cmoy_E = 0;

% Calcul des couts moyens

% Maintenance de F
for k=1:hauteur
    Cmoy_F = Cmoy_F + cout_F(k)*Pm_F(k);
end

% Maintenance de J
for k=1:largeur
    Cmoy_J = Cmoy_J + cout_J(k)*Pm_J(k);
end

% Maintenance de E
for k=1:profondeur
    Cmoy_E = Cmoy_E+cout_E(k)*Pm_E(k);
end

end
```

6.11 coutVariance.m

```
function [Cvar_F, Cvar_J, Cvar_E] = coutVariance(FJE)
% Calcule les variances des couts engendres par
% la maintenance de toutes les machines
% IN : FJE
% OUT : [Cvar_F, Cvar_J, Cvar_E]

% Initialisation
hauteur    = length(FJE(:,1,1));
largeur    = length(FJE(1,:,1));
profondeur = length(FJE(1,1,:));
[Cout_F, Cout_J, Cout_E] = importCouts(); % a adapter si FJE change
Cvar_F = 0;
```

```
Cvar_J = 0;
Cvar_E = 0;

% Calcul des probabilites marginales
Pm_F = pMarginale(FJE, 'F');
Pm_J = pMarginale(FJE, 'J');
Pm_E = pMarginale(FJE, 'E');

% Calcul des couts moyens
[Cmoy_F, Cmoy_J, Cmoy_E] = coutMoyen(FJE);

% Calcul de la variance des couts de F
for k=1:hauteur
    Cvar_F = Cvar_F +(Cout_F(k)^2)*Pm_F(k);
end
Cvar_F = Cvar_F - Cmoy_F^2;

% Calcul de la variance des couts de J
for k=1:largeur
    Cvar_J = Cvar_J + (Cout_J(k)^2)*Pm_J(k);
end
Cvar_J = Cvar_J - Cmoy_J^2;

% Calcul de la variance des couts de E
for k=1:profondeur
    Cvar_E = Cvar_E + (Cout_E(k)^2)*Pm_E(k);
end
Cvar_E = Cvar_E - Cmoy_E^2;

end
```

6.12 espVar_CoutTot.m

```
function[esp_CoutTot, var_CoutTot]= espVar_CoutTot(FJE)
% Calcule l'esperance et la variance de la fonction de cout liee a
% l'entretien de l'ensemble de la chaine de production.
% IN : FJE
% OUT : [esp_CoutTot, var_CoutTot]

% Importation des donnees
[cout_F, cout_J, cout_E] = importCouts;

% Initialisation
hauteur     = length(FJE(:,1,1));
largeur     = length(FJE(1,:,1));
profondeur  = length(FJE(1,1,:));
esp_CoutTot = 0;
var_CoutTot = 0;

% Esperance de la fonction de cout :
for f=1:hauteur
    for j=1:largeur
        for e=1:profondeur
            esp_CoutTot = esp_CoutTot + FJE(f,j,e)*(cout_F(f)+cout_J(j)+cout_E(e));
        end
```

```
    end
end

% Variance de la fonction de cout :
for f=1:hauteur
    for j=1:largeur
        for e=1:profondeur
            var_CoutTot= var_CoutTot+FJE(f,j,e)*(cout_F(f)+cout_J(j)+cout_E(e))^2;
        end
    end
end

var_CoutTot = var_CoutTot - esp_CoutTot^2;

end
```

6.13 `espVar_CoutCond.m`

```
function [esp_CoutCond, var_CoutCond, espTot, varTot] = espVar_CoutCond(FJE)
% Calcule l'esperance conditionnelle et la variance conditionnelle de la
% fonction cout phi connaissant F. Fournit egalement la preuve des theoremes de
% l'esperance totales et de la variance totale via espTot et varTot
% IN : FJE
% OUT : [esp_CoutCond, var_CoutCond, espTot, varTot]

% Initialisation
hauteur     = length(FJE(:,1,1));
largeur     = length(FJE(1,:,1));
profondeur  = length(FJE(1,1,:));
[Cout_F, Cout_J, Cout_E] = importCouts(); % a adapter si FJE change

esp_CoutCond = zeros(max([hauteur, largeur, profondeur]),1);
tmp = zeros(max([hauteur, largeur, profondeur]),1);

% Calcul des probabilites marginales
Pm_F = pMarginale(FJE, 'F');

% Esperance de phi sachant que F = i (et terme temporaire pour la variance)
for f=1:hauteur
    for j=1:largeur
        for e=1:profondeur
            esp_CoutCond(f)=esp_CoutCond(f)+(Cout_F(f)+Cout_J(j)+Cout_E(e))*(FJE(f,j,e)/Pm_
            tmp(f)=tmp(f)+(Cout_F(f)+Cout_J(j)+Cout_E(e)).^2*(FJE(f,j,e)/Pm_F(f));
        end
    end
end

% Variance de phi sachant que F = i
var_CoutCond = tmp - esp_CoutCond.^2;

% Calcul de l'esperance totale
espTot = 0;
for f=1:hauteur
    espTot = espTot + esp_CoutCond(f)*Pm_F(f);
end
```

```
% Calcul de la variance totale
t1 = 0; % 1er terme de l'equ.
t2 = 0; % 2e terme de l'equ

for f=1:hauteur
    t1 = t1 + ( (esp_CoutCond(f) - espTot)^2 )*  Pm_F(f);
end

for f=1:hauteur
    t2 = t2 + var_CoutCond(f)* Pm_F(f);
end

varTot = t1 + t2;

end
```

6.14 `Q4.m`

```
% Resolution de la question 4
format bank;
load('FJE.mat');

% Initialisation
Var_F = [0, 500^2, 700^2];
Var_J = [0, 700^2, 200^2, 150^2, 250^2];
Var_E = [0, 500^2, 1000^2, 1100^2];

% Q4.a1
disp('1) Borne superieure du cout de reparation selon Bienayme-Tchebyshev');
[borneBT_F,borneBT_J,borneBT_E] = borneBT(Var_F, Var_J, Var_E)

% Q4.a2
disp('2) Borne superieure du cout de reparation selon distribution normale');
[borneNorm_F, borneNorm_J, borneNorm_E] = borneN(FJE, Var_F, Var_J, Var_E)
```

6.15 `borneBT.m`

```
function [borneBT_F,borneBT_J,borneBT_E] = borneBT(Var_F, Var_J, Var_E)
% Resolution via Bienayme-Tchebyshev : calcule la borne superieur du cout
% de reparation de chaque machine pour chaque panne telle que la
% probabilite que le cout soit superieur a la borne soit <=0.1
% IN : [Var_F, Var_J, Var_E] (les variances)
% OUT : [borneBT_F,borneBT_J,borneBT_E]

% De Bienayme-Tchebyshev, on tire:
c = sqrt(10);

% Initialisation
[Esp_F, Esp_J, Esp_E]= importCouts();

% On isole X dans la formule ( avec ecart-type == sqrt(variance))
borneBT_F = sqrt(Var_F) * c + Esp_F;
borneBT_J = sqrt(Var_J) * c + Esp_J;
borneBT_E = sqrt(Var_E) * c + Esp_E;
```

```
end
```

6.16 borneN.m

```
function [borneNorm_F, borneNorm_J, borneNorm_E] = borneN(FJE, Var_F, Var_J, Var_E)
% Calcule la borne superieur du cout de reparation de chaque machine pour
% chaque panne telle que la probabilite que le cout soit superieur a la
% borne soit <=0.1 dans le cas d'une distribution normale.
% IN : [FJE, Var_F, Var_J, Var_E] (FJE et les variances)
% OUT : [borneNorm_F, borneNorm_J, borneNorm_E]

% Initialisation
hauteur     = length(FJE(:,1,1));
largeur     = length(FJE(1,:,1));
profondeur  = length(FJE(1,1,:));

% Esperance
[Esp_F, Esp_J, Esp_E]= importCouts();

% Ecart-type
eType_F = sqrt(Var_F);
eType_J = sqrt(Var_J);
eType_E = sqrt(Var_E);
[borneBT_F,borneBT_J,borneBT_E] = borneBT(Var_F, Var_J, Var_E);

% Preallocation memoire
borneNorm_F = zeros(hauteur,1);
borneNorm_J = zeros(largeur,1);
borneNorm_E = zeros(profondeur,1);

% Resolution de l'integrale (cfr rapport)
for k=2:hauteur
    funct = @(x) (1/(eType_F(k)*sqrt(2*pi)))*exp(-(1/2)*((x-Esp_F(k))/eType_F(k)).^2);
        integ = @(b) integral(funct,b,Inf);
        borneNorm_F(k) = fzero(@(b) integ(b)-0.1,borneBT_F(k));
end

for k=2:largeur
    funct = @(x) (1/(eType_J(k)*sqrt(2*pi)))*exp(-(1/2)*((x-Esp_J(k))/eType_J(k)).^2);
        integ = @(b) integral(funct,b,Inf);
        borneNorm_J(k) = fzero(@(b) integ(b)-0.1,borneBT_J(k));
end

for k=2:profondeur
    funct = @(x) (1/(eType_E(k)*sqrt(2*pi)))*exp(-(1/2)*((x-Esp_E(k))/eType_E(k)).^2);
        integ = @(b) integral(funct,b,Inf);
        borneNorm_E(k) = fzero(@(b) integ(b)-0.1,borneBT_E(k));
end

end
```