Structures de données et algorithmes
Projet 2: arbres binaires de recherches

Pierre Geurts – Jean-Michel Begon – Romain Mormont

24 mars 2017

1 Objectif

L'objectif du projet est d'écrire un algorithme permettant de retrouver toutes les villes comprises dans un carreau rectangulaire délimité par les points de latitude et longitude $(\phi_1, \lambda_1), (\phi_2, \lambda_1), (\phi_1, \lambda_2), (\phi_2, \lambda_2)$. Pour ce faire nous nous proposons d'étudier les trois approches suivantes :

Un arbre binaire de recherche La première approche, la plus simple, consiste à stocker les villes en utilisant une des coordonnée comme clé (par exemple la latitude). Il s'agira donc de

1. Rechercher S_ϕ, l'ensemble des villes comprises entre deux latitudes.
2. Filtrer S_ϕ pour ne garder que les villes comprises entre deux longitudes S.

Deux arbres binaires de recherche La seconde approche, consiste à stocker les villes dans deux arbres binaires de recherche. Le premier admet comme clé les latitudes des villes et le second leur longitude. Il s'agira donc de

1. Rechercher S_ϕ, toutes les villes comprises entre deux latitudes ;
2. Rechercher S_λ, toutes les villes comprises entre deux longitudes ;
3. Calculer l'intersection de ces deux ensembles : $S = S_\phi \cap S_\lambda$.

Un arbre binaire de recherche avec Z-score La troisième approche repose sur un seul arbre de recherche qui utilise comme clé une combinaison de la latitude et de la longitude $k = Z(\phi, \lambda)$ qui garantit que $Z(\phi_m, \lambda_m) \leq Z(\phi, \lambda) \leq Z(\phi_M, \lambda_M)$ pour $\phi_m \leq \phi \leq \phi_M \wedge \lambda_m \leq \lambda \leq \lambda_M$. On peut alors retrouver les villes de la manière suivante :

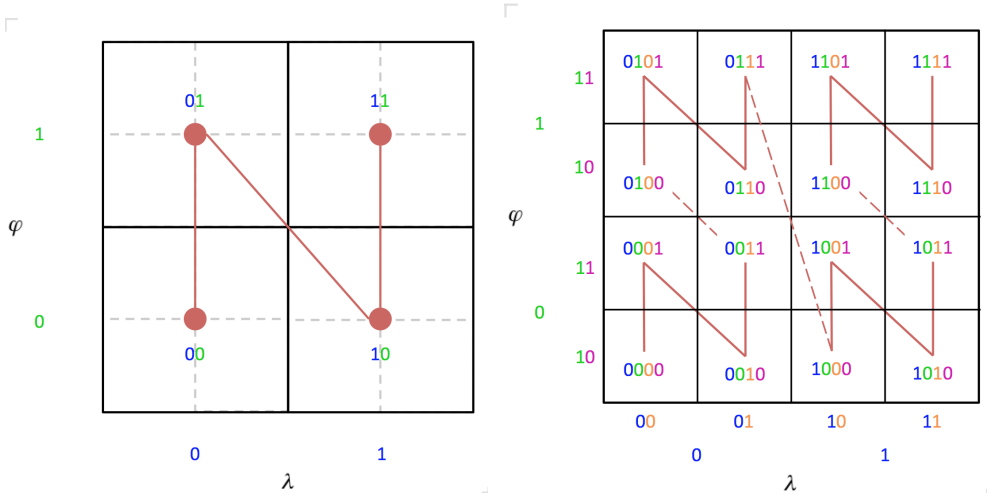
1. On recherche S_Z, toutes les villes dont les clés sont comprises entre $Z(\phi_m, \lambda_m)$ et $Z(\phi_M, \lambda_M)$ où $\phi_m = \min\{\phi_1, \phi_2\}$, $\lambda_m = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\phi_M = \max\{\phi_1, \phi_2\}$ et $\lambda_M = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$.
2. On filtre S_Z pour ne garder que l'ensemble S des bonnes villes.

On utilisera le code de Morton comme fonction Z. Celui-ci consiste à entrelacer les bits des coordonnées (figure 1).

2 Implémentation

Afin de réaliser le projet, il est nécessaire d'implémenter un arbre binaire de recherche ainsi que l'algorithme d'intersection. Nous utiliserons des listes liées pour contenir les ensembles de villes.

L'algorithme général de recherche des villes est quant à lui défini dans le fichier `findCities.h`.



(a) Code 2 bits (b) Code 4 bits

FIGURE 1 – Codes de Morton à différentes échelles

2.1 Arbre binaire de recherche

Il s'agit d'implémenter un arbre binaire de recherche générique ; les clés et les valeurs associées sont de type `const void*`. Dans le cadre du projet, les clés seront soit des réels (latitude et longitude), soit des entiers (code de Morton). Les valeurs seront toujours un type reprenant la ville et ses coordonnées (`City`).

En ce qui concerne l'arbre binaire de recherche, nous vous demandons d'implémenter les opérations suivantes :

`newBST` qui crée un nouvel arbre binaire de recherche vide ;

`freeBST` qui libère la mémoire allouée par/pour la structure de l'arbre ;

`sizeOfBST` qui retourne le nombre de villes contenues dans l'arbre ;

`insertInBST` qui permet d'ajouter une nouvelle paire coordonnée-ville dans l'arbre ;

`getInRange` qui renvoie une liste liée contenant les villes comprises dans l'intervalle spécifié en argument.

Ces opérations sont reprises dans l'interface `BinarySearchTree.h`.

Vu la nature du problème, il est nécessaire d'implémenter des arbres qui peuvent contenir plusieurs instances de la même clé.

2.2 Intersection

Le fichier `intersection.h` déclare la fonction `intersect` qui renvoie une liste liée contenant l'intersection des deux listes liées fournies en entrée. Afin de rester générique, cette fonction prend également en entrée une fonction de comparaison définissant un ordre total sur les éléments des listes.

2.3 Fichiers à rendre

`BinarySearchTree.c` l'implémentation de l'arbre binaire de recherche.

`intersect.c` l'implémentation de l'intersection.

`findCities1BST.c` l'implémentation de l'algorithme de recherche des villes utilisant un arbre binaire de recherche sur les latitudes.

`findCities2BST.c` l'implémentation de l'algorithme de recherche des villes utilisant deux arbres binaires de recherche.

`findCitiesZBST.c` l'implémentation de l'algorithme de recherche des villes utilisant un arbre binaire de recherche sur le code de Morton.

2.4 Fichiers fournis

Afin de vous aider, nous vous fournissons également les fichiers suivants :

`main.c` un fichier chargé de parser la liste des villes, de prendre les coordonnées du carreau, de créer une liste liée contenant les villes et de filtrer celles en dehors du carreau.

`City.h` la définition de la structure `City`.

`LinkedList.*` les fichiers relatifs à la liste liée.

`zscore.*` les fichiers relatif à l'encodage de Morton.

`findCitiesList.c` une implémentation de `findCities` sur base des listes liées.

Ainsi que plusieurs fichiers `.csv` contenant des villes.

3 Analyse théorique et empirique

Dans le rapport, nous vous demandons de répondre aux questions suivantes :

1. Expliquez brièvement vos choix d'implémentation.
2. Donnez le pseudo-code de la fonction `getInRange`.
3. Analysez sa complexité dans le pire et dans le meilleur cas en fonction de N, le nombre de nœuds dans l'arbre.
4. Donnez le pseudo-code de la fonction `intersect`.
5. Analysez sa complexité dans le pire et dans le meilleur cas en fonction de M et N, la taille de la première et deuxième liste respectivement. Sans perte de généralité, on supposera que $M \leq N$.
6. Comparez empiriquement les trois approches. Pour ce faire, procédez comme suit :
   (a) Répéter K fois :
      i. Tirer uniformément au hasard deux points délimitant une zone
      $$(\phi_A, \lambda_A), (\phi_B, \lambda_A), (\phi_A, \lambda_B), (\phi_B, \lambda_B)$$
      ii. Mesurer le temps de recherche [1] des villes présentes dans cette zone pour chacune des approches.
   (b) Calculer la moyenne des K temps de recherche pour chacune des approche.
   (c) Commenter brièvement ces résultats.

   Afin d'avoir des situations comparables, assurez-vous que les arbres de recherche des différentes méthodes ont des formes similaires.

1. Ce temps ne doit pas inclure le temps de construction des arbres

4 Deadline et soumission

Le projet est à réaliser **individuellement** pour le **21 avril 2017, 23h59** au plus tard. Il doit être soumis via la plateforme de soumission (`http://submit.run.montefiore.ulg.ac.be/`).

Le projet doit être rendu sous la forme d'une archive `tar.gz` contenant :

1. Votre rapport (5 pages maximum) au format PDF. Soyez bref mais précis et respectez bien la numération des (sous-)questions.
2. Les fichiers mentionnés à la section 2.3.

Vos fichiers seront évalués avec les commandes :

```
gcc main.c LinkedList.c BinarySearchTree.c findCities1BST.c --std=c99 --pedantic -Wall -Wextra
-Wmissing-prototypes -o boxsearch
```

```
gcc main.c LinkedList.c BinarySearchTree.c intersec.c findCities2BST.c --std=c99 --pedantic -Wall
-Wextra -Wmissing-prototypes -o boxsearch
```

```
gcc main.c LinkedList.c BinarySearchTree.c zscore.c findCitiesZBST.c --std=c99 --pedantic -Wall
-Wextra -Wmissing-prototypes -o boxsearch
```

sur les machines ms8xx en substituant adéquatement l'algorithme de recherche. Ceci implique que :

— Les noms des fichiers doivent être respectés.
— Le projet doit être réalisé dans le standard C99.
— La présence de *warnings* impactera négativement la cote finale.
— Un projet qui ne compile pas avec ces commandes sur ces machines recevra une cote nulle (pour la partie code du projet).

Un projet non rendu à temps recevra une cote globale nulle. En cas de plagiat avéré, l'étudiant se verra affecter une cote nulle à l'ensemble des projets.

Les critères de correction sont précisés sur la page web des projets.

Bon travail !

A Recherche optimale dans un intervalle

Le code de Morton pour la recherche dans un intervalle multidimensionnel a le désavantage de nécessiter un filtrage a posteriori. En 1981, Tropf et Herzog, dans leur article *Multidimensional Range Search In Dynamically Balanced Trees*, ont proposé une approche permettant d'éviter ce post-processing.

Il existe également d'autres structures de données plus adaptées aux problèmes en 2D+ (kD-tree, Quadtree, R-tree, etc.).

B Space filling curve

Suite au travaux de Cantor sur l'infini et la cardinalité, Peano (plus connu pour son axiomatisation des naturels) introduisit en 1890 la première courbe remplissant l'espace. Cette courbe montre notamment qu'il y autant de nombres dans l'intervalle $[0, 1]$ que dans le plan $[0, 1] \times [0, 1]$. Le code de Morton (1966) définit également une telle courbe. Son schéma d'encodage simple l'a popularisé dans le milieu des systèmes d'informations géographiques (*Geographic information systems*, GIS), notamment.

Deux vidéos qui traitent du sujet :
— `https://www.youtube.com/watch?v=u-W1jXq5JGg`
— `https://www.youtube.com/watch?v=DuiryHHTrjU`