Applications linéaires & matrices

Olivier Nicole

24 mars 2021

Définition 1 – Applications linéaires

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application linéaire (ou morphisme ou, plus rarement, homomorphisme) de $(E, +, \bullet)$ dans $(F, +, \bullet)$ est une fonction φ de E dans F qui vérifie les deux propriétés suivantes :

1. *(additivité)* $\forall u, v \in E$, on a : $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$;
2. *(homogénéité)* $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall u \in E$, on a : $\varphi(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet \varphi(u)$.

L'ensemble des applications linéaires de $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Définition 2 – Endomorphismes

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une application linéaire de $(E, +, \bullet)$ dans $(E, +, \bullet)$ dans lui même est appelée un endomorphisme.
L'ensemble des endomorphismes de $(E, +, \bullet)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.

Définition 3 – Isomorphismes

Un isomorphisme est une application linéaire bijective.
L'ensemble des isomorphismes entre un espace vectoriel $(E, +, \bullet)$ et un autre $(F, +, \bullet)$ est noté $\mathrm{Isom}(E, F)$.

Définition 4 – Automorphismes

Un automorphisme est un morphisme bijectif.
L'ensemble des automorphismes d'un espace linéaire $(E, +, \bullet)$ est noté $\mathcal{GL}(E)$.

Définition 5 – Forme linéaire

Une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dans l'espace $(\mathbb{K}, +, \bullet)$ est appelée une forme linéaire.

Proposition 1

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et φ une fonction de E dans F. Alors φ est une application linéaire de $(E, +, \bullet)$ dans $(F, +, \bullet)$ si et seulement si, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, tout couple de vecteurs $(u, v) \in E^2$, on a : $\varphi(u+\lambda \bullet v) = \varphi(u)+\lambda \bullet \varphi(v)$.

Définition 6 – Noyau d'un morphisme

Soit $(E,+,\bullet)$ et $(F,+,\bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle noyau de u, qu'on note $\mathrm{Ker}\,(u)$ les antécédents de 0. C'est à dire

$$\mathrm{Ker}\,(u) = \{x \in E \mid u(x) = 0\} = u^{-1}(\{0\})$$

Le noyau est donc une partie de l'ensemble E.

Proposition 2

Le noyau d'un morphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de E.

On peut donc se contenter de montrer qu'une partir de E est le noyau d'un morphisme pour savoir que c'est un sous-espace vectoriel. C'est une manière très compacte et pratique de prouver qu'un ensemble est un sous espace vectoriel.

Exemple 1

On prend $E = \mathbb{R}^3$. Montrer que l'ensemble $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 2y = 0\right\}$ est un sous espace vectoriel de E.

Exemple 2

Soit E l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On se donne une équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$. Prouver que l'ensemble F des solutions est un espace vectoriel.

Théorème 1

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.
φ est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(u) = \{0\}$.

Définition 7 – Image d'un morphisme

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle image de u, qu'on note $\mathrm{Im}\,(u)$ l'ensemble des images de u. C'est à dire

$$\mathrm{Im}\,(u) = \{u(x) \in F \mid x \in E\} = u(E)$$

Le noyau est donc une partie de l'ensemble F.

Définition 8 – Rang

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle rang de u, qu'on note $\mathrm{rg}\,(u)$ la dimension de son image.

$$\mathrm{rg}\,(u) = \dim(\mathrm{Im}\,(u))$$

Théorème 2 – Théorème du rang (morphismes)

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\dim E = \operatorname{rg}(u) + \dim \operatorname{Ker}(u)$$