Ensembles et relations

Olivier Nicole*
DI ENS

Septembre 2019

Résumé

La notion d'ensemble est couramment utilisée en mathématiques, et ce dès les plus petites classes. Or définir ce qu'est un ensemble est loin d'être simple. D'une part, comme le remarqua Bertrand Russel au début du XX^e siècle, il ne peut existe un ensemble contenant tous les ensembles *. D'autre part, nous ne savons pas si la théorie des ensembles est cohérente ou non (c'est-à-dire si ces axiomes ne mènent pas à une contradiction).

Dans ce cours nous donnons quelques notions de théorie de ensembles. Nous introduisons des axiomes et des propriétés qui permettent de former des nouveaux ensembles à partir d'ensembles existants. Enfin, nous expliquons comment construire les notions de relations et de fonctions à partir de la notion d'ensembles.

Table des matières

*Ce document est repris du cours de Marc Chevalier, avec son aimable autorisation. `https://teaching.marc-chevalier.com`

*. Quelques détails sont donnés plus loin dans ce document.

1 Ensembles et éléments

Les concepts mathématiques doivent refléter les intuitions, mais formellement, on définit chaque notion sur les notions définies précédemment. Mais il faut bien commencer quelque part. En dessous de toutes les mathématiques on a les ensembles. Comme on construit tout à partir des ensembles, on ne peut pas construire les ensembles depuis autre chose. On a donc besoin d'admettre que les ensembles existent et qu'ils vérifient quelques propriétés simples. On appelle ça des axiomes. Les mathématiques que vous connaissez sont entièrement construites sur 9 axiomes, dont la plupart ont des énoncés extrêmement simples.

Nous définissons les ensembles comme des collections non ordonnée et sans répétition d'objets. Cependant toutes les collections d'objets ne sont pas des ensembles. Donc il convient quand on définit un ensemble, de justifier que c'est effectivement un ensemble. Il existe d'autres théories avancées permettant de travailler avec des collections non ordonnées et sans répétitions qui ne sont pas des ensembles (et ne vérifient pas certaines propriétés pourtant intuitives). Nous n'aborderons pas ces théories[†].

Dans une théorie axiomatique, il est bon de prouver que les axiomes ne sont pas contradictoires, faute de quoi, on peut prouver n'importe quoi. On parle de cohérence. On ne traitera pas de ce sujet beaucoup trop technique.

Définition 1 – Ensemble

Un ensemble est une collection non ordonnée et sans répétition d'objets.
Si a, b, c sont des éléments, nous notons $\{a, b, c\}$ l'ensemble formé des éléments a, b, et c.

Exemple 1

Nous donnons quelques exemples d'ensembles finis :
— $\{\text{bleu}, \text{rouge}\}$,
— l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ des chiffres dans le systèmes décimal ;
— l'ensemble vide $\varnothing$ est un ensemble ;
et quelques exemples d'ensembles infinis :

†. Les plus curieux iront voir la théorie des classes qui étend la théorie des ensembles.

— l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers natures ;
— l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels ;
— l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ;
— l'ensemble $[0; 1]$ des réels compris entre 0 et 1.

Profitons de cet exemple pour remarquer que dans les intervalles j'utilise un point-virgule comme séparateur. Ce n'est clairement pas unanime. Souvent, on utile simplement une virgule, notamment dans le cas où les deux extrémités sont notées avec des lettres. Mais le point virgule permet de ne pas confondre avec un séparateur décimal dans le cas de nombres explicites. Mais de toute façon, vous n'êtes plus en maternelle (et je ne fais pas de physique), on n'écrit plus de nombres à virgules, mais des fractions !

Définition 2 – Cardinal

Le cardinal d'un ensemble est le nombre d'élément qu'il contient. Le cardinal d'un ensemble est noté $\mathrm{card}(A)$ ou $|A|$.

Les anglo-saxons écrivent plutôt $\#A$.

Un ensemble est caractérisé par ses éléments. Nous définissons la notion d'appartenance ci-dessous.

Définition 3 – Appartenance

Nous notons :

$$x \in X$$

le fait qu'un objet x soit un élément de l'ensemble X.

Exemple 2

Nous avons :
— $\mathrm{bleu} \in \{\mathrm{bleu}, \mathrm{rouge}\}$;
— $\mathrm{jaune} \notin \{\mathrm{bleu}, \mathrm{rouge}\}$;
— $0 \in \mathbb{N}$;
— $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$;
— $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2 Axiomes

Dans la théorie des ensembles, tout est fait d'ensembles. TOUT ! Les fonctions, les nombres. Donc les quantificateurs portent sur tous les ensembles. Quand on écrit $\forall A$, cela signifie « pour tout ensemble A », et de même pour $\exists A$.

2.1 Extensionnalité

Axiome 1 – Extensionnalité

Nous dirons que deux ensembles X et Y sont égaux si et seulement si les deux assertions suivantes sont satisfaites :

1. tout élément de l'ensemble X est un élément de l'ensemble Y ;
2. tout élément de l'ensemble Y est un élément de l'ensemble X.

On peut l'écrire pompeusement $\forall A, \forall B, (\forall x, (x \in A \Leftrightarrow x \in B)) \Rightarrow A = B$.

Exemple 3

Par exemple, nous avons :

— $\{\text{bleu}, \text{rouge}\} = \{\text{rouge}, \text{bleu}\}$;
— $\{\text{jaune}, \text{rouge}\} \neq \{\text{rouge}, \text{bleu}\}$.

2.2 Axiomes constructifs

Nous montrons maintenant comment construire de nouveaux ensembles à partir d'ensembles existants. À priori, nous ne savons pas quels ensembles existent, donc nous avons besoin d'axiome pour justifier l'existence de certaines constructions. Nous essayons d'introduire aussi peu d'axiomes que possibles pour justifier l'existence de la réunion, l'intersection, l'ensemble des parties, et le produit cartésien.

Dans cette section, nous considérons deux ensembles A et B.

2.2.1 Paire

Axiome 2 – Paire

Étant donné deux éléments a et b, il existe un ensemble $\{a, b\}$.

La version mathématique s'écrit $\forall a, \forall b, \exists C : \forall x, x \in C \Leftrightarrow x = a \vee x = b$.

2.2.2 Réunion

Rien ne nous permet de prouver que la réunion de deux ensembles est un ensemble. Nous devons le supposer :

Axiome 3 – Réunion

La collection des éléments de A et des éléments de B est un ensemble et est appelée réunion (ou union) de A et B.

Notation 1 – Réunion

La réunion de A et B est notée $A \cup B$.

Exemple 4

Par exemple, nous avons :

— $\{1, 2\} \cup \{6, 4\} = \{1, 4, 2, 6\}$;

— $\{1, 3, 4\} \cup \{5, 1, 2\} = \{5, 2, 3, 1, 4\}$.

2.2.3 L'ensemble des parties

Les axiomes précédents permettent d'ajouter des éléments externes au compte-goutte. Ici, on présente un axiome qui permet de construire un ensemble beaucoup plus gros que l'ensemble de base.

Définition 4 – Partie

Si X est une collection d'objets tous éléments de A, nous disons que X est une partie (ou un sous-ensemble) de A, ce que nous notons $X \subseteq A$.

En d'autres termes, $X \subseteq A \Leftrightarrow (\forall x, x \in X \Rightarrow x \in A)$.

On dit aussi que A est un sous ensemble de B (ou une partie de B, cf. infra).

Exemple 5

Nous avons :

— $\{\text{bleu}\} \subseteq \{\text{bleu}, \text{rouge}\}$

— $\varnothing \subseteq \{\text{bleu}, \text{rouge}\}$

— $\{\text{bleu}, \text{rouge}\} \subseteq \{\text{bleu}, \text{rouge}\}$

En particulier, un ensemble est toujours inclus dans lui-même, et l'ensemble vide est inclus dans tous les ensembles.

On peut aussi reformuler l'axiome d'extensionnalité d'une façon très pratique.

Proposition 1

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$$

Ainsi, pour prouver que deux ensembles sont égaux, il suffit de prouver que chacun contient l'autre.

Profitons de ce passage pour une remarque de notation. L'inclusion au sens large (celle qui autorise l'égalité) est notée $\subseteq$. L'inclusion stricte (qui exclut l'égalité) peut être notée $\subsetneq$. Il existe la notation $\subset$; je la déconseille fortement car clairement ambiguë. Elle est souvent sous entendue au sens large, mais ne l'explicite pas.

Finalement, nous devons supposer que la collection de toutes les parties d'un ensemble est un ensemble car les axiomes précédents ne permettent pas de le déduire.

Axiome 4 – Axiome de l'ensemble des parties

La collection de toutes les parties de l'ensemble A est un ensemble.

De façon savante, on peut écrire cet axiome $\forall A, \exists B : \forall X, X \subseteq A \Leftrightarrow X \in B$.

Notation 2 – Ensemble des parties

L'ensemble de toutes les parties de l'ensemble A est noté $\mathcal{P}(A)$.

Les anglo-saxons l'écrivent 2^A. Barbares !

Exemple 6

Par exemple, nous avons :

$$\mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) = \left\{ \begin{array}{l} \varnothing, \\ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \\ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \\ \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \\ \{1,2,3,4\} \end{array} \right\}$$

Proposition 2

Soit S un ensemble fini avec n éléments. Alors $\mathcal{P}(S)$ est un ensemble fini avec 2^n éléments.

Démonstration. Une partie est caractérisée par l'absence, ou la présence de chaque élément. Il y a donc 2^n possibilités. □

2.2.4 Schéma d'axiomes de compréhension

L'intersection entre deux ensembles, la différence entre ensembles , et la différence symétrique sont tous des parties d'un autre ensemble. Pour justifier leur existence, il suffit de supposer qu'une partie d'un ensemble est elle-même un ensemble.

Axiome 5 – Compréhension

Toute collection d'objets tous éléments de A est un ensemble.

Proposition 3

Si A est un ensemble et P un prédicat portant sur les éléments de A. Alors la partie de A tel que P est vrai, est un ensemble. Nous la notons :

$$\{x \in A \mid P(x)\}$$

Démonstration. C'est une partie de A qui est un ensemble. C'est donc un ensemble par l'axiome de compréhension. □

On parle de schéma d'axiome car ça marche pour n'importe quel prédicat P. Il y a donc une infinité d'axiomes de ce modèle là. En effet, on ne peut pas quantifier sur un prédicat.

Exemple 7

L'ensemble des nombres pairs est noté :

$$\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \text{ divise } x\}.$$

qu'on peut réécrire

$$\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} : x = 2y\}$$

on peut aussi trouver

$$\{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$$

Cette dernière notation est un peu moins rigoureuse car ce n'est pas vraiment une définition avec un prédicat. Cependant elle est très pratique et souvent utilisée.

On peut pousser le vice plus loin : considérer l'ensemble des éléments de A qui vérifie une propriété toujours fausse. C'est à dire $\{x \in A \mid \bot\}$. C'est l'ensemble vide. Il est intéressant de noter que c'est une conséquence de l'axiome de compréhension et qu'il n'est pas utile, contrairement à ce que font certains auteurs peu dignes de confiance, d'introduire un axiome rien que pour ça [‡].

L'ensemble vide est généralement noté $\varnothing$. Toutefois, on peut aussi trouver la notation $\{\}$.

Profitons-en pour distinguer deux choses : $\varnothing$ et $\{\varnothing\}$. $\varnothing$ est un ensemble ne contenant aucun élément. $\{\varnothing\}$ est un ensemble qui contient un élément : l'ensemble vide.

Il est intéressant de constater que c'est à cause de l'axiome de compréhension qu'il ne peut exister un ensemble de tous les ensembles, c'est-à-dire un ensemble A tel que $\forall B, B \in A$. Si vous ne voyez pas comment démontrer que A n'existe pas,

‡. Inutile, mais pas logiquement faux ou problématique.

il vous sera sans doute utile de savoir que son existence mène au fameux paradoxe de Russel.

2.2.4.1 Intersection

Nous pouvons définir la notion d'intersection de deux ensembles.

Définition 5 – Intersection

Nous appelons intersection de A et de B la collection des objets qui sont à la fois éléments de l'ensemble A et éléments de l'ensemble B, et la notons $A \cap B$.

Démonstration. Soit A et B des ensembles. L'intersection peut s'exprimer comme $\{x \in A \mid x \in B\}$. D'après l'axiome de compréhension, c'est un ensemble. □

Exemple 8

Par exemple, nous avons :
- $\{1,2\} \cap \{6,4\} = \varnothing$;
- $\{1,3,4\} \cap \{5,1,2\} = \{1\}$.

2.2.4.2 Différence

Nous pouvons donc définir la différence entre deux ensembles.

Notation 3 – Différence

Nous notons $A \setminus B$ l'ensemble des éléments de l'ensemble A qui ne sont pas des éléments de l'ensemble B.

Exemple 9

Par exemple, nous avons :
- $\{1,2\} \setminus \{6,4\} = \{1,2\}$;
- $\{6,4\} \setminus \{1,2\} = \{6,4\}$;
- $\{1,3,4\} \setminus \{5,1,2\} = \{3,4\}$;
- $\{5,1,2\} \setminus \{1,3,4\} = \{5,2\}$;

Définition 6 – Complémentaire

Soit E un ensemble et F une partie de E. On appelle le complémentaire de F dans E l'ensemble $E \setminus F$.
Le complémentaire de F dans E est noté $\complement_E F$. Si E est clair d'après le contexte, on peut simplement parler du complémentaire de F et le noter

$\complement F$.

2.2.4.3 Différence symétrique

La différence symétrique qui contient tous les éléments de l'ensemble A et tous les éléments de B qui ne sont pas à la fois élément de l'ensemble A et élément de l'ensemble B est un ensemble car il peut être obtenu à partir de la réunion et de la différence entre deux ensembles.

Proposition 4

La collection des objets qui sont élément de l'ensemble A ou élément de l'ensemble B, mais pas les deux, est un ensemble.

Par la propriété de différence, $A \setminus B$ et $B \setminus A$ sont des ensembles. Puis par la propriété de réunion, $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ est un ensemble. Or tous ces éléments sont soit dans l'ensemble A doit dans l'ensemble B, mais pas les deux, et réciproquement, tous les élément qui soit soit dans l'ensemble A ou dans l'ensemble B sans être dans les deux sont dans cet ensemble.

Nous pouvons donc définir la différence symétrique entre deux ensembles.

Définition 7 – Différence symétrique

Nous notons $A\Delta B$ l'ensemble des objets qui sont des éléments de l'ensemble A ou des éléments de l'ensemble B, mais pas des deux, c'est à dire

$$A\Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Proposition 5

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Exemple 10

Par exemple, nous avons :

— $\{1,2\}\Delta\{6,4\} = \{1,2,6,4\}$
— $\{6,4\}\Delta\{1,2\} = \{1,2,6,4\}$
— $\{1,3,4\}\Delta\{5,1,2\} = \{2,3,4,5\}$
— $\{5,1,2\}\Delta\{1,3,4\} = \{2,3,4,5\}$

2.2.5 L'infini

Jusqu'à présent le seul ensemble qu'on peut vraiment construire à partir de rien, c'est l'ensemble vide. Il a un cardinal nul. En utilisant l'axiome de l'ensemble des parties, on peut obtenir un ensemble de cardinal 1, puis 2, 4, 16... Mais cela reste des ensembles finis. Si on fait des unions d'ensemble finis, on garde des ensembles finis. Il n'est pas a priori évident qu'il existe au moins un ensemble infini. Prenons un axiome !

Axiome 6

Il existe un ensemble infini.

3 Ensemble particuliers

Nous avons déjà parlé de l'ensemble vide que l'on note $\varnothing$.

3.1 Couple et produit cartésien

À partir de deux objets a et b, on peut construire le couple (a, b). Les couples possèdent la propriété fondamentale

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow (a = a' \wedge b = b')$$

Définition 8

Soit A et B deux ensembles. On appelle produit cartésien de A et B l'ensemble noté $A \times B$ défini par

$$A \times B = \{z \mid \exists a \in A : \exists b \in B : z = (a, b)\}$$

Exemple 11

$(1, \pi) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, puisque $1 \in \mathbb{N}$ et $\pi \in \mathbb{R}$.

On peut alors écrire $\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \ldots$ pour dire que a est naturel et b réel.

Remarque 1

Dans la pratique, on note

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

De même, à partir de trois objets a, b et c, on peut construire le triplet (a, b, c). Les triplets possèdent la propriété fondamentale

$$(a, b, c) = (a', b', c') \Leftrightarrow (a = a' \wedge b = b' \wedge c = c')$$

Étant donnés trois ensembles A, B et C, on peut construire l'ensemble noté $A \times B \times C$ défini par

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$$

Plus généralement, à partir de n objets, $(a_1, \dots, a_n)$, on peut construire le n-uplet $(a_1, \dots, a_n)$ et étant donné n ensembles $A_1, \dots, A_n$, on peut construire l'ensemble $A_1 \times \dots \times A_n$ défini par

Notation 4

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$$

Notation 5

$$\begin{aligned} A^2 &= A \times A \\ A^n &= \underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ fois}} \end{aligned}$$

Remarque 2

On a $A \times B \neq B \times A$, sauf si $A = B$.

De cette façon, si on écrit $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \dots$ cela signifie que a, b et c sont des réels.

3.2 Ensembles numériques

Notation 6

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

Notation 7

Étant donné un ensemble numérique A, on note $A^* := A \setminus \{0\}$.

Par exemple $\mathbb{N}^*$ est l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

Notation 8

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs $\{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

Notation 9

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels, c'est à dire l'ensemble des nombres qu'on peut écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

On remarque l'usage de la paire. Ici, cela signifie que $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$. Ce sont deux entiers relatifs, mais q est nécessairement non nul.

Notation 10

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels.

Notation 11

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des complexes.

3.3 Notations usuelles

Notation 12

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, on note $[\![a,b]\!]$ l'ensemble des entiers plus grands que a et plus petits que b.

On peut réécrire par compréhension $[\![a,b]\!] = \{x \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$. Donc en particulier si $a > b$, $[\![a,b]\!] = \varnothing$.

Profitons en pour examiner l'usage de « plus grand » et « plus petit ». En français, les inégalités sont toujours à prendre au sens large. Cela signifie donc « plus grand ou égal » et « plus petit ou égal ». Pour exclure le cas d'égalité, on utilise « strictement ». En anglais, par défaut, les inégalités sont à prendre au sens strict. Il faut alors ajouter “or equal” ou utiliser la négation de la propriété inverse. Par exemple « positive » signifie « strictement positif ». Mais pour traduire « positif (au sens large) », on dira « non-negative ». Cela a des conséquences catastrophiques dans le vocabulaire lié aux fonctions. Se référer au lexique.

Exemple 12

— $[\![2,2]\!] = \{2\}$
— $[\![0,2]\!] = \{0,1,2\}$
— $[\![2,0]\!] = \varnothing$

Notation 13

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on note $[a,b]$ l'ensemble des réels entre a et b. On appelle ces ensemble des intervalles (ou intervalles fermés).

Formellement $[a, b] = \{t \cdot a + (1-t) \cdot b \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Cela a une conséquence importante : $[a, b] = [b, a]$, contrairement aux intervalles entiers.

Proposition 6

Si $a \neq b$, $[a, b]$ a une infinité d'éléments.

On dit que l'intervalle est non trivial s'il contient une infinité d'éléments.

Proposition 7

Si $[a, b]$ contient au moins deux éléments, alors il en contient une infinité.

Notation 14

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

- $]a, b] = [a, b] \setminus \{a\}$ (intervalle (semi-)ouvert à gauche)
- $[a, b[= [a, b] \setminus \{b\}$ (intervalle (semi-)ouvert à droite)
- $]a, b[= [a, b] \setminus \{a, b\}$ (intervalle ouvert)

Les anglo-saxons écrivent respectivement $(a, b]$ $[a, b)$ et (a, b). Le dernier est ambigu car il s'agit de la même notation que le couple (a, b). Les notations et le vocabulaire français sont très souvent meilleurs (à quelques exceptions près que nous verrons peut être au second semestre). Ces notations foireuses sont dans la norme ISO 31-11, pour des raisons politiques.

Notation 15

Pour tout $a \in \mathbb{R}$

- $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$
- $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
- $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Contrairement à une idée largement répandue, fermer l'intervalle du côté d'un infini n'est pas totalement absurde. Cependant, cela dépasse très largement le cadre de ce cours et sera donc exclu.

La notation $]-\infty, +\infty[$ est légale, par cohérence, mais très inutile.