Applications linéaires & matrices

Olivier Nicole

24 mars 2021

Définition 1 – Applications linéaires

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application linéaire (ou morphisme ou, plus rarement, homomorphisme) de $(E, +, \bullet)$ dans $(F, +, \bullet)$ est une fonction φ de E dans F qui vérifie les deux propriétés suivantes :

1. *(additivité)* $\forall u, v \in E$, on a : $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$;
2. *(homogénéité)* $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall u \in E$, on a : $\varphi(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet \varphi(u)$.

L'ensemble des applications linéaires de $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Définition 2 – Endomorphismes

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une application linéaire de $(E, +, \bullet)$ dans $(E, +, \bullet)$ dans lui même est appelée un endomorphisme.
L'ensemble des endomorphismes de $(E, +, \bullet)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.

Définition 3 – Isomorphismes

Un isomorphisme est une application linéaire bijective.
L'ensemble des isomorphismes entre un espace vectoriel $(E, +, \bullet)$ et un autre $(F, +, \bullet)$ est noté $\mathrm{Isom}(E, F)$.

Définition 4 – Automorphismes

Un automorphisme est un morphisme bijectif.
L'ensemble des automorphismes d'un espace linéaire $(E, +, \bullet)$ est noté $\mathcal{GL}(E)$.

Définition 5 – Forme linéaire

Une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dans l'espace $(\mathbb{K}, +, \bullet)$ est appelée une forme linéaire.

Proposition 1

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et φ une fonction de E dans F. Alors φ est une application linéaire de $(E, +, \bullet)$ dans $(F, +, \bullet)$ si et seulement si, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, tout couple de vecteurs $(u, v) \in E^2$, on a : $\varphi(u+\lambda\bullet v) = \varphi(u)+\lambda\bullet\varphi(v)$.

Définition 6 – Noyau d'un morphisme

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle noyau de φ, qu'on note $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ les antécédents de 0. C'est à dire

$$\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \{x \in E \mid \varphi(x) = 0\}$$

Le noyau est donc une partie de l'ensemble E.

Proposition 2

Le noyau d'un morphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de E.

On peut donc se contenter de montrer qu'une partir de E est le noyau d'un morphisme pour savoir que c'est un sous-espace vectoriel. C'est une manière très compacte et pratique de prouver qu'un ensemble est un sous espace vectoriel.

Exemple 1

On prend $E = \mathbb{R}^3$. Montrer que l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0\}$ est un sous espace vectoriel de E.

Exemple 2

Soit E l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On se donne une équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$. Prouver que l'ensemble F des solutions est un espace vectoriel.

Théorème 1

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.
φ est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \{0\}$.

Définition 7 – Image d'un morphisme

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle image de φ, qu'on note $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ l'ensemble des images des éléments de E par φ. C'est à dire

$$\mathrm{Im}\,(\varphi) = \{\varphi(x) \mid x \in E\}$$

L'image est donc une partie de l'ensemble F.

Définition 8 – Rang

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle rang de φ, qu'on note $\operatorname{rg}(\varphi)$ la dimension de son image.

$$\operatorname{rg}(\varphi) = \dim(\operatorname{Im}(\varphi))$$

On définit de la même façon le rang d'une matrice.

Théorème 2 – Théorème du rang (morphismes)

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\dim E = \operatorname{rg}(\varphi) + \dim \operatorname{Ker}(\varphi)$$

Proposition 3

Soit $(E, +, \bullet)$ et $(F, +, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.
On note $n = \dim E$ et $m = \dim F$

- Si $n > m$, φ ne peut pas être injectif et le noyau est au moins de dimension $n - m$.
- Si $n < m$, φ ne peut pas être surjectif et l'image est au plus de dimension n.
- Si φ est injective, alors $n \leqslant m$.
- Si φ est surjective, alors $n \geqslant m$.
- Si φ est bijective, alors $n = m$.

Proposition 4

Soit u un endomorphisme. Il y a équivalence entre.

1. u est bijectif
2. u est injectif
3. u est surjectif

Définition 9 – Matrice

Soient $m, n \in \mathbb{N}$. On appelle une matrice d'éléments de $\mathbb{K}$ à m lignes et à n colonnes une famille d'éléments $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ de $\mathbb{K}$ indexée par les couple (i, j) où i varie entre 1 et m, et j varie entre 1 et n.
On dit aussi que $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ est une matrice de taille $m \times n$.
On note $\mathcal{M}_{m,n}$ l'ensemble des matrices de tailles $m \times n$ d'élément de $\mathbb{K}$.
Enfin, lorsque $m = n$, on dit que les matrices de $\mathcal{M}_{m,n}$ sont carrées de taille m. Dans ce cas, on note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$n \times m$:

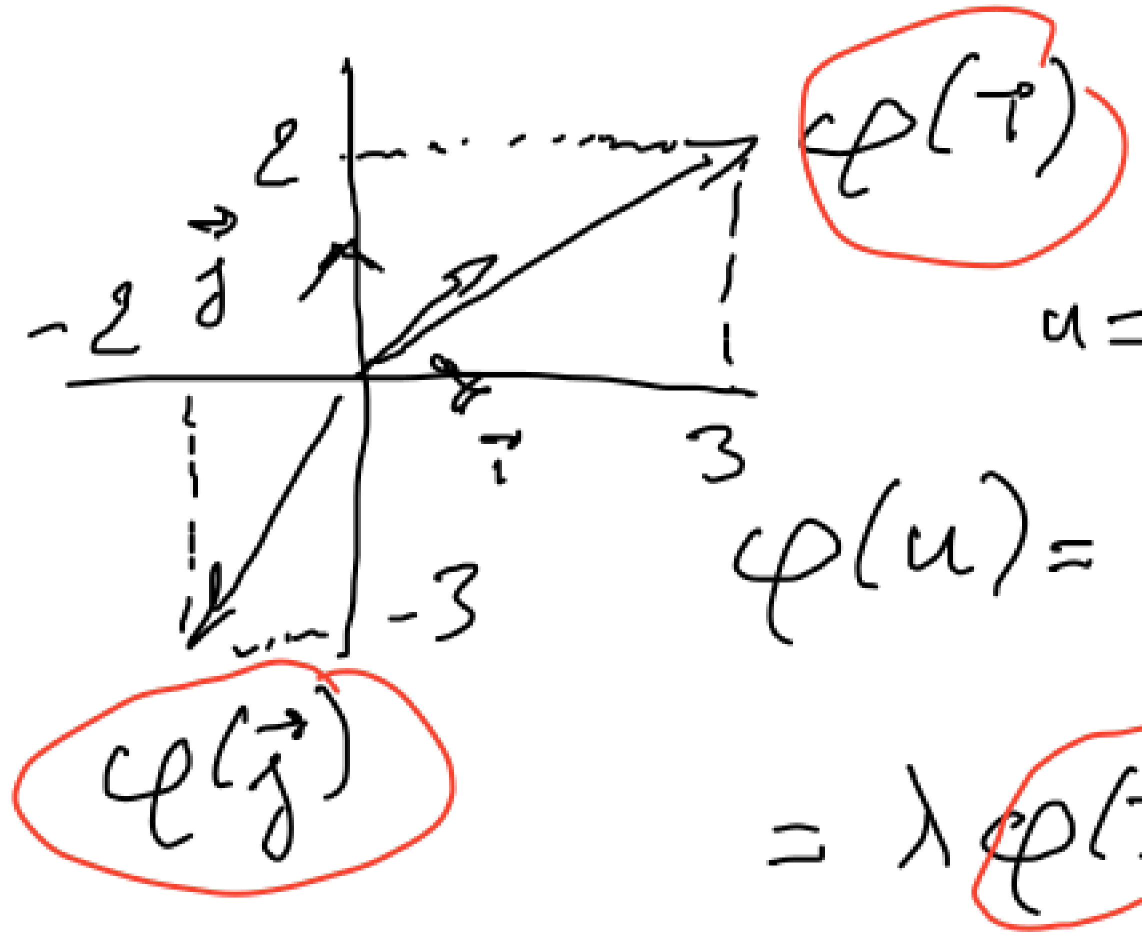
$$\begin{array}{cc} & m \\ n \left\{ \right. & \begin{pmatrix} 2 & 1{,}5 & \vdots \\ 3 & \vdots & \\ -1 & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

Lien entre matrice carrée et endomorphisme

Définition 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. On peut décrire entièrement φ par une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où la colonne i contient la décomposition de $\varphi(e_i)$ dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
On dit que cette matrice est la matrice de φ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \cdots & \varphi(e_n) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} & \begin{pmatrix} \circ & \circ & & \circ \\ \circ & \circ & & \circ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \circ & \circ & & \circ \end{pmatrix} \end{array}$$



$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times \vec{i} + 1 \times \vec{j}$$

$$\varphi(u) = \varphi(\lambda \vec{i} + \mu \vec{j})$$
$$= \lambda \varphi(\vec{i}) + \mu \varphi(\vec{j})$$

$$\varphi(u) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times \varphi(\vec{i}) + 1 \times \varphi(\vec{j})$$
$$= 1 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 2-3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Définition 11

On note $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de dimension $n \times n$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. La matrice I_n représente l'endomorphisme Id_E de n'importe quelle base dans elle-même.

Définition 12 – Somme de matrices

Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ et $B \in \mathcal{M}_{m,n}$. On note $A := (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ et $B := (b_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. La matrice $(a_{i,j} + b_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ est appelée la somme des deux matrices A et B. On la note $A + B$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 2+0 \\ 3+0 & 3+1 \end{pmatrix}$$

1

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Définition 13 – Produit interne

Soient $m, n, o \in \mathbb{N}$ trois entiers positifs. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ et $B \in \mathcal{M}_{n,o}$. On note $A := (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ et $B := (b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq o}$. La matrice $(c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,o}$ définie par :

$$c_{i,j} := \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot b_{k,j},$$

pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq o$, est appelée le produit entre A et B, et est notée $A \times B$.

$m \times n \quad n \times p \quad \Big| \quad m\times n \;,\; n \times 1.$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times (-2) + (-1)(3) \\ 3 \times (-2) + 0 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$(m \times n) \times (n \times p) \longrightarrow (m \times p).$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 2 + 1(-1) & 2 \times (-1) + (-1)\times 0 & 0 \times 2 + 1(-1) \\ 2 \times 1 + 1 \times 0 & 2 \times (-1) + 0 \times 0 & 0 \times 1 + 0 \times 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposition 6 – Associativité de la multiplication

Soient $m, n, o, p \in \mathbb{N}$ quatre entiers. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, $B \in \mathcal{M}_{n,o}$, $C \in \mathcal{M}_{o,p}$ trois matrices à valeur dans $\mathbb{K}$.
Alors :

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C.$$

Proposition 7

Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels munis respectivement de trois bases $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, $(f_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ et $(g_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$. Soient deux applications linéaires $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, .

$$E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$$

Soit M la matrice de u dans les bases $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(f_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ et N la matrice de v dans les bases $(f_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ et $(g_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$.
Alors

$$N \times M$$

est la matrice de

$$v \circ u$$

dans les bases $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(g_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$.

On remarque qu'on fait la multiplication dans le même sens que la composition.

Définition 14 – Matrice inversible

Soit A, une matrice carrée de dimension n. On dit que A est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A \times B = B \times A = I_n$$

B est appelé inverse de A et est noté A^{-1}.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 8

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels de dimension n. Soit e et f respectivement des bases de E et F. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et A la matrice de φ dans les bases e et f. A est inversible si et seulement si φ est un isomorphisme de E dans F.

A^{-1} représente φ^{-1}

Inverser une matrice, méthode 1

Résoudre un système linéaire

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \Big\} n \text{ lignes} \qquad X = \underset{m \times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}} \qquad Y = \underset{m\times 1}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}$$

m col.

$$AX = Y \iff A^{-1}AX = A^{-1}Y \iff I_n X = A^{-1}Y \iff X = A^{-1}Y$$

A matrice $n \times m$. X matrice $m \times 1$

$$AX = Y \iff \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = y_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,m}x_m = y_m \end{cases}$$

$$\iff \cdots \iff \begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1m}y_m \\ x_2 = \cdots \\ \vdots \\ x_m = b_{m,1}y_1 + b_{m,2}y_2 + \cdots + b_{m,n}y_m \end{cases}$$

$$\iff X = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,m} \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$\iff X = BY$$

$$AX = Y \iff X = A^{-1}Y$$
$$\iff X = BY$$
$$\implies B = A^{-1}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Inverser A.

On résout $\begin{cases} 2x_1 + (-1)x_2 = y_1 \\ 1 \times x_1 + 2x_2 = y_2 \end{cases}$ en (x_1, x_2)

$L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2$

$$\iff \begin{cases} \frac{5}{2}x_1 + 0 \times x_2 = y_1 + \frac{1}{2}y_2 \\ x_1 + 2x_2 = y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{2}{5}y_1 + \frac{1}{5}y_2 \\ x_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}x_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 \\ x_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2\right) = -\frac{1}{3}y_1 + \overbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)}^{1/3} y_2 \\ \quad = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}}^{A^{-1}}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverser une matrice, méthode 2

- Utiliser le pivot de Gauss pour transformer M en I_n
- Appliquer la même séquence d'opérations à I_n
- Le résultat est M^{-1}.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

je veux I_2 (sous la partie gauche) — j'aurai M^{-1} (sous la partie droite)

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{2}{5} L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 2/5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & -1/5 & 2/5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & -1/5 & 2/5 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = M^{-1}$$