Calcul des propositions et des prédicats

Olivier NICOLE

DI ENS

14 septembre 2020

Diapositives originales : Marc CHEVALIER

Présentation

olivier.nicole@ens.fr

À propos de moi :

- Doctorant à l'ENS et au CEA List
- Je travaille sur la preuve (automatisée) de correction de logiciels
- (Très) joignable par mail

But du cours de mathématiques S1

- Raisonner en étant sûr de ne pas faire d'erreurs
- Les techniques de raisonnement classiques, et pourquoi ça marche
- Connaître les opérations élémentaires sur les ensembles.

Syntaxe

- La forme des formules : constituants, règles de grammaire...
- Tout ce qu'on peut faire sur la formule sans lui donner un sens.
- Pas d'évaluation : cf. sémantique.

Syntaxe

Définition 1 – Alphabet

Un symbole (ou lettre) est l'une de ces quatre entités :

- une variable propositionnelle (ou proposition atomique, ou atome) : A, B, C, A_0, ..., A_n ;
- une constante : $\top$, $\bot$;
- un connecteur logique : $\lor$, $\land$, $\neg$;
- une paire de séparateurs : (,).

Syntaxe

Tous les mots ne sont pas raisonnables :

Exemple 1

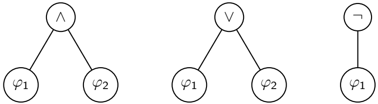
$)((A \vee (\perp$ est un mot sur le bon alphabet.

Syntaxe

Définition 2 – Formules

L'ensemble des formule est définie par induction par :

- les variables et constantes propositionnelles sont des formules ;
- si φ_1 et φ_2 sont des formules :
  - $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ est une formule ;
  - $\varphi_1 \vee \varphi_2$ est une formule ;
  - $\neg\varphi_1$ est une formule ;
  - (φ_1) est une formule.



Syntaxe

Définition 3 – Priorité des opérateurs

Les opérateurs par ordre de priorité décroissante :

- $\neg$;
- $\wedge$;
- $\vee$.

Syntaxe

Toutes les formules sont raisonnables :

- $\top$
- A
- $(A \wedge (\neg A))$
- $((A \vee B) \wedge (\neg A))$
- $((\neg((\neg A) \wedge \bot)) \wedge A)$

sont des formules.

- $()A\vee$
- $A\neg B$

ne sont pas des formules.

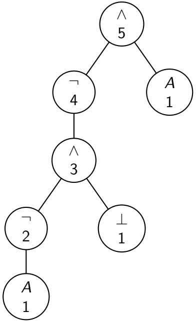
Syntaxe

Définition 4 – Taille d'une formule

$$|\varphi| = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi = A \text{ ou } \varphi = \bot \text{ ou } \varphi = \top \\ 1 + |\varphi_1| & \text{si } \varphi = \neg\varphi_1 \\ 1 + \max\left(|\varphi_1|, |\varphi_2|\right) & \text{si } \varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \text{ ou } \varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \\ |\varphi_1| & \text{si } \varphi = (\varphi_1) \end{cases}$$

Syntaxe

- $\top$ est de taille 1
- A est de taille 1
- $(A \wedge (\neg A))$ est de taille 3
- $((A \vee B) \wedge (\neg A))$ est de taille 3
- $((\neg((\neg A) \wedge \bot)) \wedge A)$ est de taille 5



Syntaxe

Définition 5

$$\mathrm{Var}(\varphi) = \begin{cases} \{A\} & \text{si } \varphi = A \\ \varnothing & \text{si } \varphi = \bot \text{ ou } \varphi = \top \\ \mathrm{Var}(\varphi_1) & \text{si } \varphi = \neg\varphi_1 \text{ ou } \varphi = (\varphi_1) \\ \mathrm{Var}(\varphi_1) \cup \mathrm{Var}(\varphi_2) & \text{si } \varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \text{ ou } \varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \end{cases}$$

Ce sont exactement les variables qui apparaissent dans φ

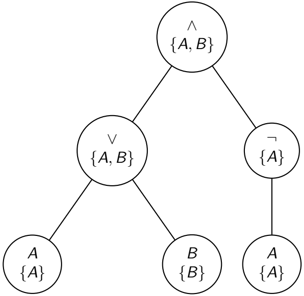
Syntaxe

Proposition 1

Soit φ une formule. Les variables propositionnelles qui apparaissent dans φ sont exactement $\mathrm{Var}(\varphi)$.

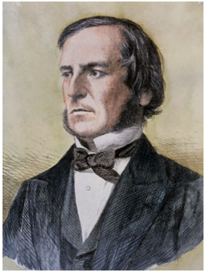
Syntaxe

- $\mathrm{Var}\,(A) = \{A\}$.
- $\mathrm{Var}\,((A \wedge (\neg A))) = \{A\}$.
- $\mathrm{Var}\,(((\neg((\neg A) \wedge \bot)) \wedge A)) = \{A\}$.
- $\mathrm{Var}\,(((A \vee B) \wedge (\neg A))) = \{A, B\}$.



Sémantique

- Sémantique = sens (interprétation, évaluation...)
- Valeur de vérité : $\mathcal{B} = \{\mathit{tt}, \mathit{ff}\}$



George Boole (1815 – 1864)

Sémantique

Définition 6 – Environnement

Soit V un ensemble de variables propositionnelles. Un environnement sur V est une fonction de $V \to \mathcal{B}$.

Sémantique

Définition 7 – Évaluation

Soient φ une formule et V un sur-ensemble fini de $\mathrm{Var}(\varphi)$. Soit σ un environnement sur V. Nous définissons l'évaluation $[\varphi]_\sigma$ de φ sur l'environnement σ par induction de la manière suivante :

- $[\bot]_\sigma = \mathit{ff}$, $[\top]_\sigma = \mathit{tt}$;
- $[A_i]_\sigma = \sigma(A_i)$;
- $[(\varphi)]_\sigma = [\varphi]_\sigma$;
- $[\neg\varphi]_\sigma = \begin{cases} \mathit{tt} & \text{si } [\varphi]_\sigma = \mathit{ff}, \\ \mathit{ff} & \text{sinon ;} \end{cases}$
- $[\varphi_1 \vee \varphi_2]_\sigma = \begin{cases} \mathit{tt} & \text{si } [\varphi_1]_\sigma = \mathit{tt} \text{ ou } [\varphi_2]_\sigma = \mathit{tt}, \\ \mathit{ff} & \text{sinon ;} \end{cases}$
- $[\varphi_1 \wedge \varphi_2]_\sigma = \begin{cases} \mathit{tt} & \text{si } [\varphi_1]_\sigma = \mathit{tt} \text{ et } [\varphi_2]_\sigma = \mathit{tt}, \\ \mathit{ff} & \text{sinon.} \end{cases}$

Sémantique

Remarque 1

En mathématique :

- vrai OU faux = vrai
- vrai OU vrai = vrai

On parle de « ou inclusif ».

Sémantique

Soit σ, l'environnement sur $\{A, B\}$

$$A \mapsto tt$$
$$B \mapsto ff$$

- $[\top]_\sigma = tt$
- $[A]_\sigma = tt$
- $[(\neg A)]_\sigma = ff$
- $[(A \vee B)]_\sigma = tt$
- $[(A \wedge (\neg B))]_\sigma = tt$

Sémantique

Définition 8 – Table de vérité

Soient φ une formule et V un sur-ensemble de $\mathrm{Var}(\varphi)$ non vide. Table de vérité $[\![\varphi]\!]_V := (\sigma \mapsto [\varphi]_\sigma)$

Sémantique

Nous donnons la table de vérité de la formule $(A \vee (\neg B))$ sur l'ensemble de variables $\{A; B; C\}$.

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$[C]_\sigma$	$[(\neg B)]_\sigma$	$[(A \vee (\neg B))]_\sigma$
ff	ff	ff	tt	tt
ff	ff	tt	tt	tt
ff	tt	ff	ff	ff
ff	tt	tt	ff	ff
tt	ff	ff	tt	tt
tt	ff	tt	tt	tt
tt	tt	ff	ff	tt
tt	tt	tt	ff	tt

Sémantique

Nous donnons la table de vérité de la formule $(A \vee ((\neg B) \wedge C))$ sur l'ensemble de variables $\{A; B; C\}$.

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$[C]_\sigma$	$[(\neg B)]_\sigma$	$[((\neg B) \wedge C)]_\sigma$	$[(A \vee ((\neg B) \wedge C))]_\sigma$
ff	*ff*	*ff*	*tt*	*ff*	*ff*
ff	*ff*	*tt*	*tt*	*tt*	*tt*
ff	*tt*	*ff*	*ff*	*ff*	*ff*
ff	*tt*	*tt*	*ff*	*ff*	*ff*
tt	*ff*	*ff*	*tt*	*ff*	*tt*
tt	*ff*	*tt*	*tt*	*tt*	*tt*
tt	*tt*	*ff*	*ff*	*ff*	*tt*
tt	*tt*	*tt*	*ff*	*ff*	*tt*

Sémantique

Définition 9 – Équivalence sémantique

$$[\![\varphi_1]\!]_{\mathsf{Var}(\varphi_1)\cup\mathsf{Var}(\varphi_2)} = [\![\varphi_2]\!]_{\mathsf{Var}(\varphi_1)\cup\mathsf{Var}(\varphi_2)}$$

On note $\varphi_1 \equiv \varphi_2$

Exemple 2

$$((A \land (\neg A)) \lor B) \equiv B$$

Sémantique

Définition 10 – Tautologie

φ est une tautologie si et seulement si $\varphi \equiv \top$.

Exemple 3

La formule $(A \vee (\neg A))$ est une tautologie.

Sémantique

Définition 11 – Contradiction

φ est une contradiction si et seulement si $\varphi \equiv \perp$.

Exemple 4

La formule $(A \wedge (\neg A))$ est une contradiction.

Présentation

Syntaxe

Sémantique

Autres connecteurs

Règles de calcul

Prédicats

Autres connecteurs

Définition 12 – Implication

On introduit le connecteur $\Rightarrow$: $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ est une formule propositionnelle.
On lui donne la sémantique :

$$[(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)]_\sigma = \begin{cases} \mathit{tt} & \text{si } [\varphi_1]_\sigma = \mathit{ff} \text{ ou } [\varphi_2]_\sigma = \mathit{tt} \\ \mathit{ff} & \text{sinon ;} \end{cases}$$

Proposition 2

$$(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \equiv ((\neg\varphi_1) \vee \varphi_2)$$

Proposition 3 – Ex falso (quodlibet)

$(\bot \Rightarrow \varphi_1)$ est une tautologie

Définition 13 – Équivalence

On introduit le connecteur $\Leftrightarrow$: $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ est une formule propositionnelle. On lui donne la sémantique :

$$[(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)]_\sigma = \begin{cases} tt & \text{si } [\varphi_1]_\sigma = [\varphi_2]_\sigma \\ ff & \text{sinon}\,; \end{cases}$$

Proposition 4

$$(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2) \equiv ((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi_1))$$

Règles de calcul

Proposition 5 – De Morgan

Auguste de Morgan
(1806 – 1871)

$$(\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)) \equiv ((\neg\varphi_1) \wedge (\neg\varphi_2))$$
$$(\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)) \equiv ((\neg\varphi_1) \vee (\neg\varphi_2))$$

Règles de calcul

Proposition 6 – Tiers exclu

$$(\neg(\neg\varphi_1)) \equiv \varphi_1$$

Règles de calcul

Proposition 7

La relation $\equiv$ est une relation d'équivalence, c'est à dire :

- $\varphi_1 \equiv \varphi_1$ (réflexivité) ;
- si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\varphi_2 \equiv \varphi_3$ alors $\varphi_1 \equiv \varphi_3$ (transitivité) ;
- si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ alors $\varphi_2 \equiv \varphi_1$ (symétrie).

Règles de calcul

Corollaire 1

$$(\neg(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)) \equiv (\varphi_1 \wedge (\neg\varphi_2))$$

Démonstration.

Tables ou

$$\begin{aligned}(\neg(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)) &\equiv (\neg((\neg\varphi_1) \vee \varphi_2)) \\ &\equiv ((\neg(\neg\varphi_1)) \wedge (\neg\varphi_2)) \\ &\equiv (\varphi_1 \wedge (\neg\varphi_2))\end{aligned}$$

La conclusion s'obtient par transitivité de $\equiv$ $\square$

Prédicats

Définition 14 – Prédicat atomique

Une formule logique avec des variables libres.

Exemple 5

- $x + 2$ n'est pas un prédicat ;
- $1 = \pi$ est une proposition ;
- $x + 2 = 2 + x$ est un prédicat à une place sur $\mathbb{R}$ (on dit aussi d'arité 1, monadique ou unaire) ;
- $x + 2 = y$ est un prédicat à deux places (on dit aussi d'arité 2 ou binaire, ou encore relation binaire) ;

Prédicats

Définition 15 – Prédicat

Un prédicat est formé à partir de prédicat atomique $P(x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n)$, des connecteurs logiques habituels, ainsi que des quantificateurs, que nous allons introduire par la suite.

Prédicats

Exemple 6

Nous donnons maintenant quelques exemples de prédicats :

1. si E est l'ensemble des étudiants de la classe, la phrase :

   « $x \in E$ porte un pull blanc. »

   est un prédicat portant sur les éléments de E.
2. La formule :

   « $n \in \mathbb{N}$ est un nombre premier. »

   est un prédicat portant sur les entiers naturels.

Prédicats

Définition 16 – Quantificateur universel

Soit $P(x)$ un prédicat portant sur les éléments de E. Nous dirons que la propriété $(\forall x \in E, P(x))$ est vraie si et seulement si pour tout élément $x \in E$, $P(x)$ est vrai.

Prédicats

Définition 17 – Quantificateur existentiel

Soit $P(x)$ un prédicat portant sur les éléments de E. Nous dirons que la propriété $(\exists x \in E : P(x))$ est vraie si et seulement si il existe un élément $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vrai.

Prédicats

Exemple 7

Soit X l'ensemble de tous les chats qui existent, ont existé, et existeront un jour. La propriété $\forall x \in X, x$ est gris est faux car il existe des chats qui ne sont pas gris.

Prédicats

Exemple 8

La propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Q}$$

est vraie, car tout entier naturel est un nombre rationnel.

Exemple 9

La propriété suivante :

$$\forall q \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{N}$$

est fausse car $\frac{1}{2}$ est un nombre rationnel qui n'est pas un nombre entier.

Prédicats

Exemple 10

Soit $P(x)$ un prédicat portant sur les éléments de E. La proposition

$$(\forall x \in E, P(x)) \Rightarrow (\exists y \in E : P(y))$$

est satisfaite si et seulement si l'ensemble E n'est pas vide.

Prédicats

Proposition 8

Soit P un prédicat portant sur les éléments de l'ensemble vide. Alors la propriété :

$$\forall x \in \varnothing, P(x).$$

est satisfaite.

Prédicats

Proposition 9

Soit P un prédicat portant sur les éléments de l'ensemble vide. Alors la propriété :

$$\exists x \in \varnothing : P(x).$$

est fausse.

Prédicats

Proposition 10

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $(\forall x \in X, P(x))$;
- $(\neg(\exists x \in X : (\neg P(x))))$.

Prédicats

Proposition 11

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $(\exists x \in X : P(x))$;
- $(\neg(\forall x \in X, (\neg(P(x)))))$.

Prédicats

Axiome 1 – Généralisation ou abstraction

Si nous pouvons prouver la propriété $P(t)$ pour $t \in E$ arbitraire (ie sans utiliser de propriété spécifique de t), alors nous pouvons en déduire la propriété $\forall x \in E, P(x)$.

Prédicats

Axiome 2 – Concrétisation

Si nous pouvons prouver une propriété $\forall x \in E, P(x)$, alors nous pouvons prouver $P(x)$ pour n'importe quel élément $x \in E$ de l'ensemble E.

Prédicats

Axiome 3 – Témoin

Si nous pouvons prouver la propriété $P(e)$ pour un élément $e \in E$ en particulier, alors nous pouvons en déduire la propriété $\exists x \in E : P(x)$.