

Familles libres

ooooooooooooooo

Pivot de Gauss

ooo

Familles génératrices

ooooooo

Bases, dimensions

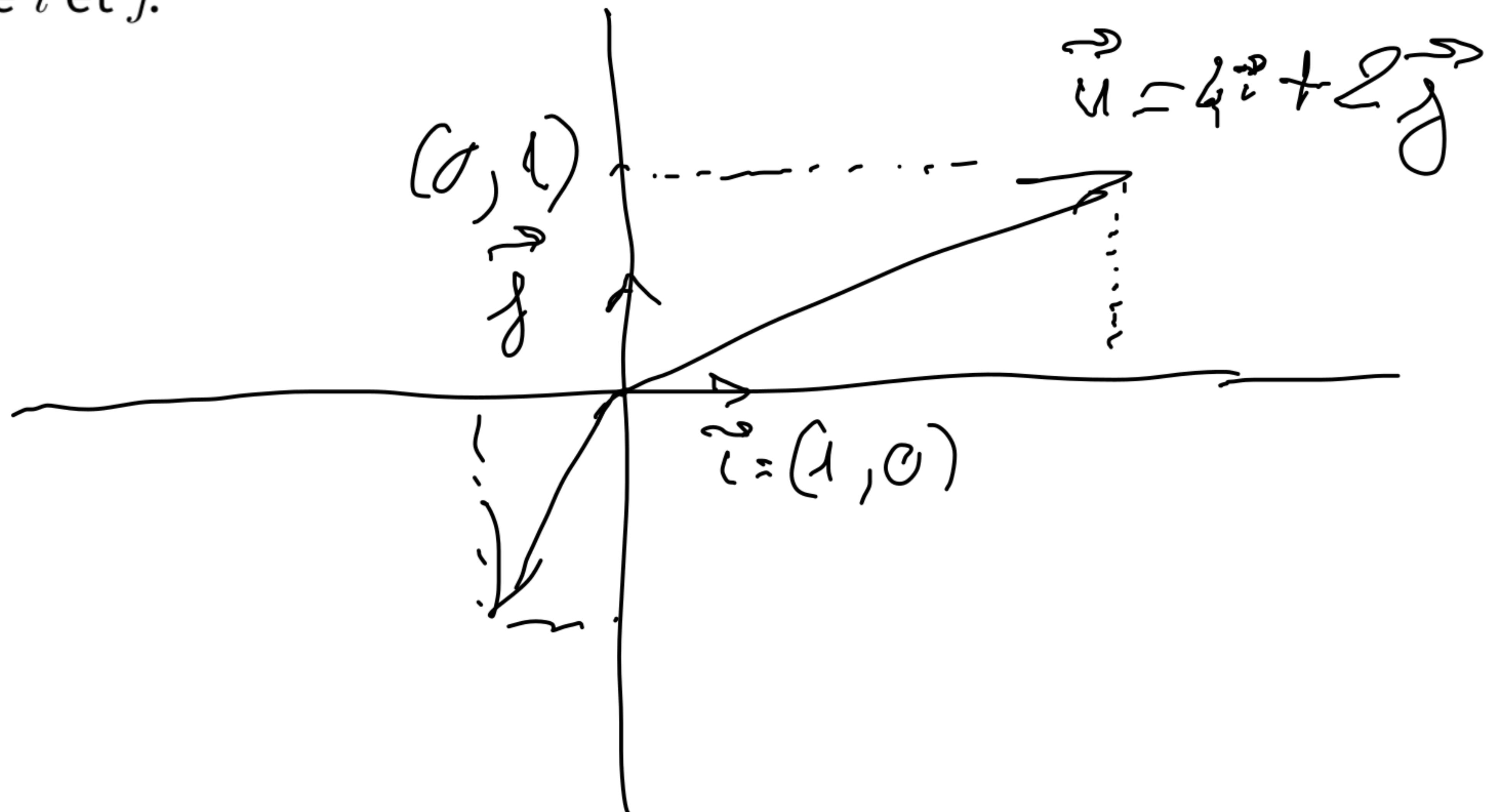
oooooooooooo

Familles de vecteurs

Olivier Nicole

22 mars 2021

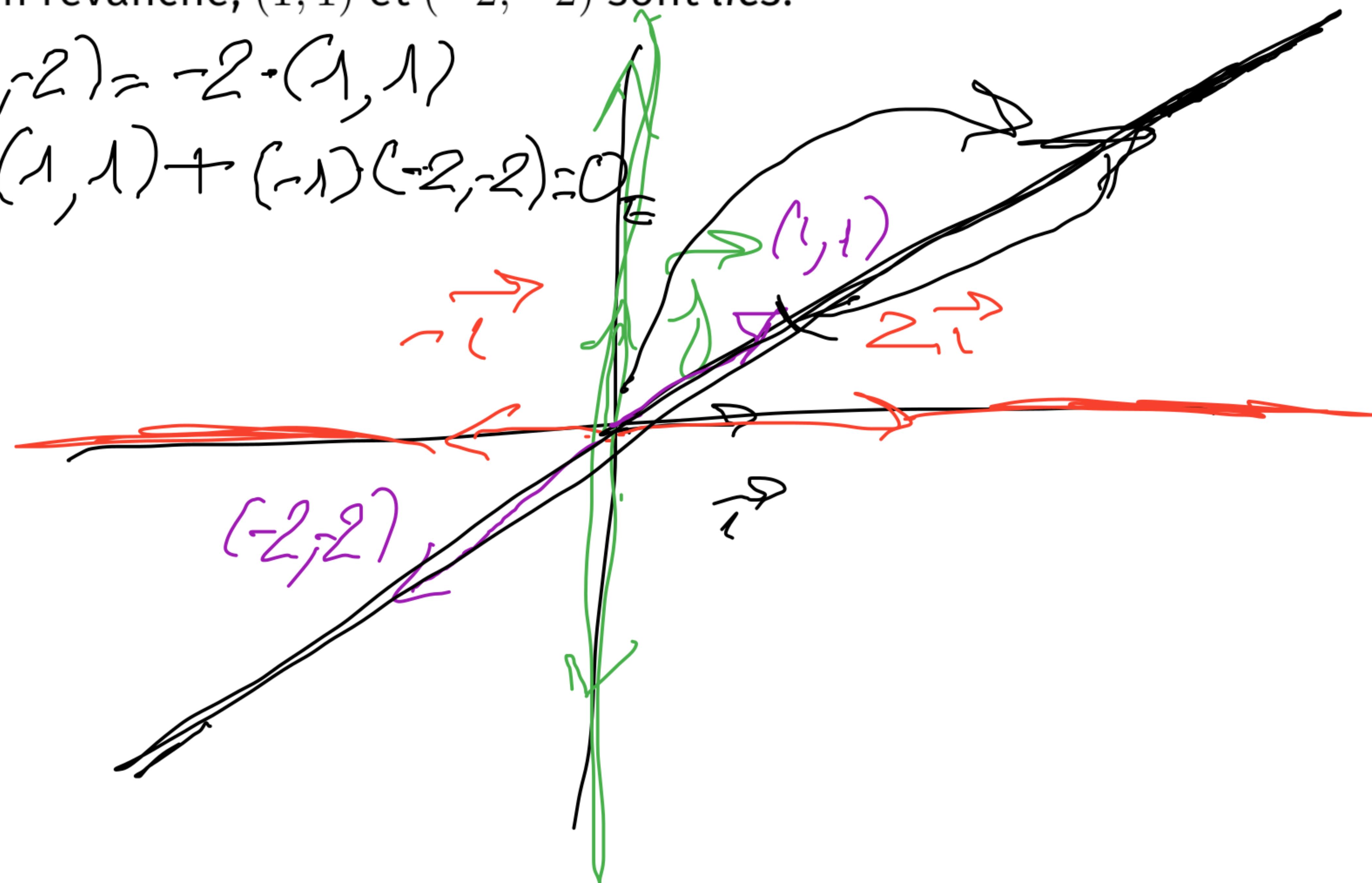
Tout vecteur de \mathbb{R}^2 peut s'écrire comme une *combinaison linéaire* de \vec{i} et \vec{j} .



On dit que (\vec{i}, \vec{j}) est libre : on ne peut pas construire \vec{i} à partir de \vec{j} , et inversement.

En revanche, $(1, 1)$ et $(-2, -2)$ sont liés.

$$(-2, -2) = -2 \cdot (1, 1)$$
$$-2(1, 1) + (-1)(-2, -2) = 0$$



Familles libres

ooo●oooooooooooo

Pivot de Gauss

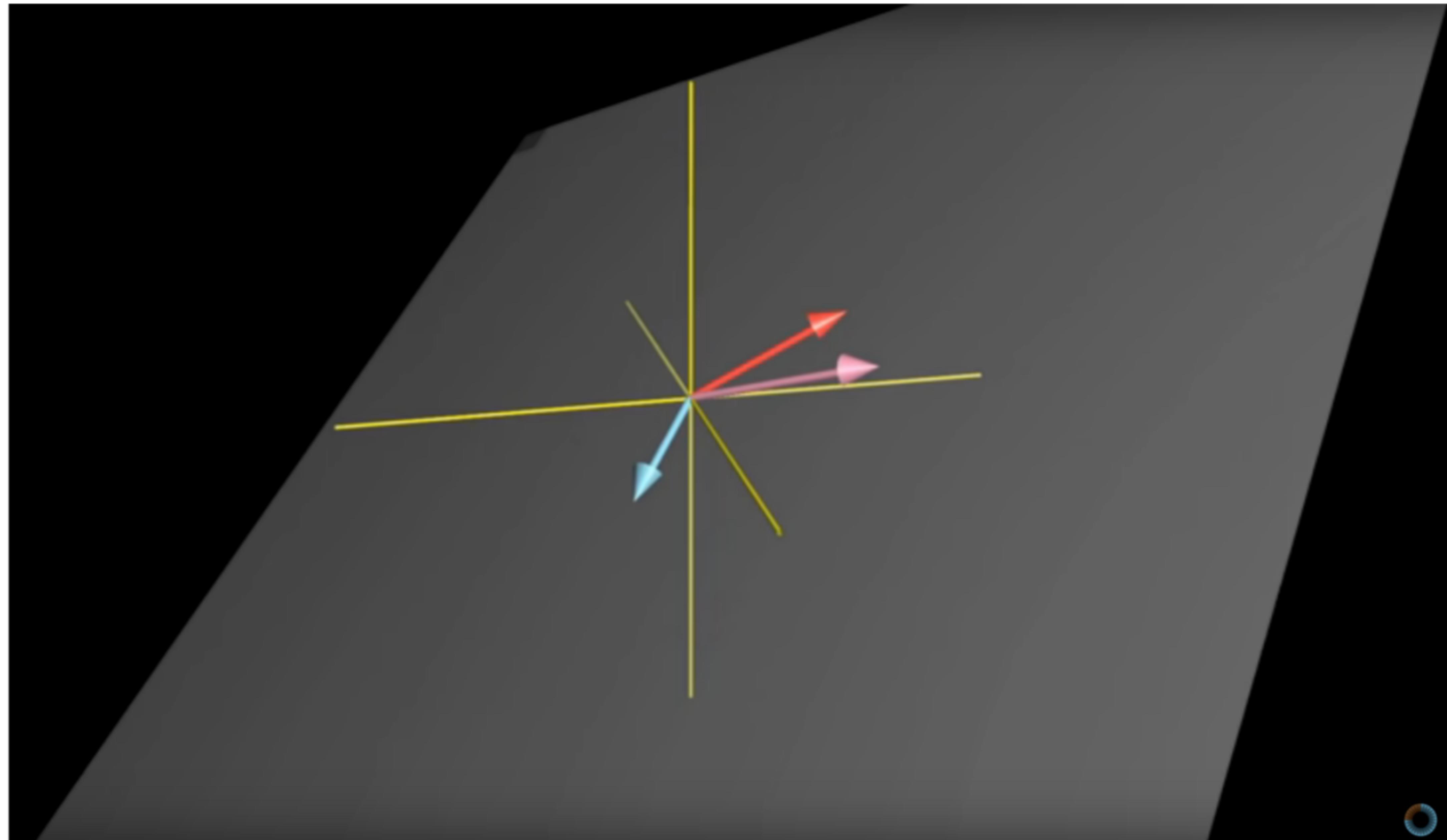
ooo

Familles génératrices

ooooooo

Bases, dimensions

oooooooooooo

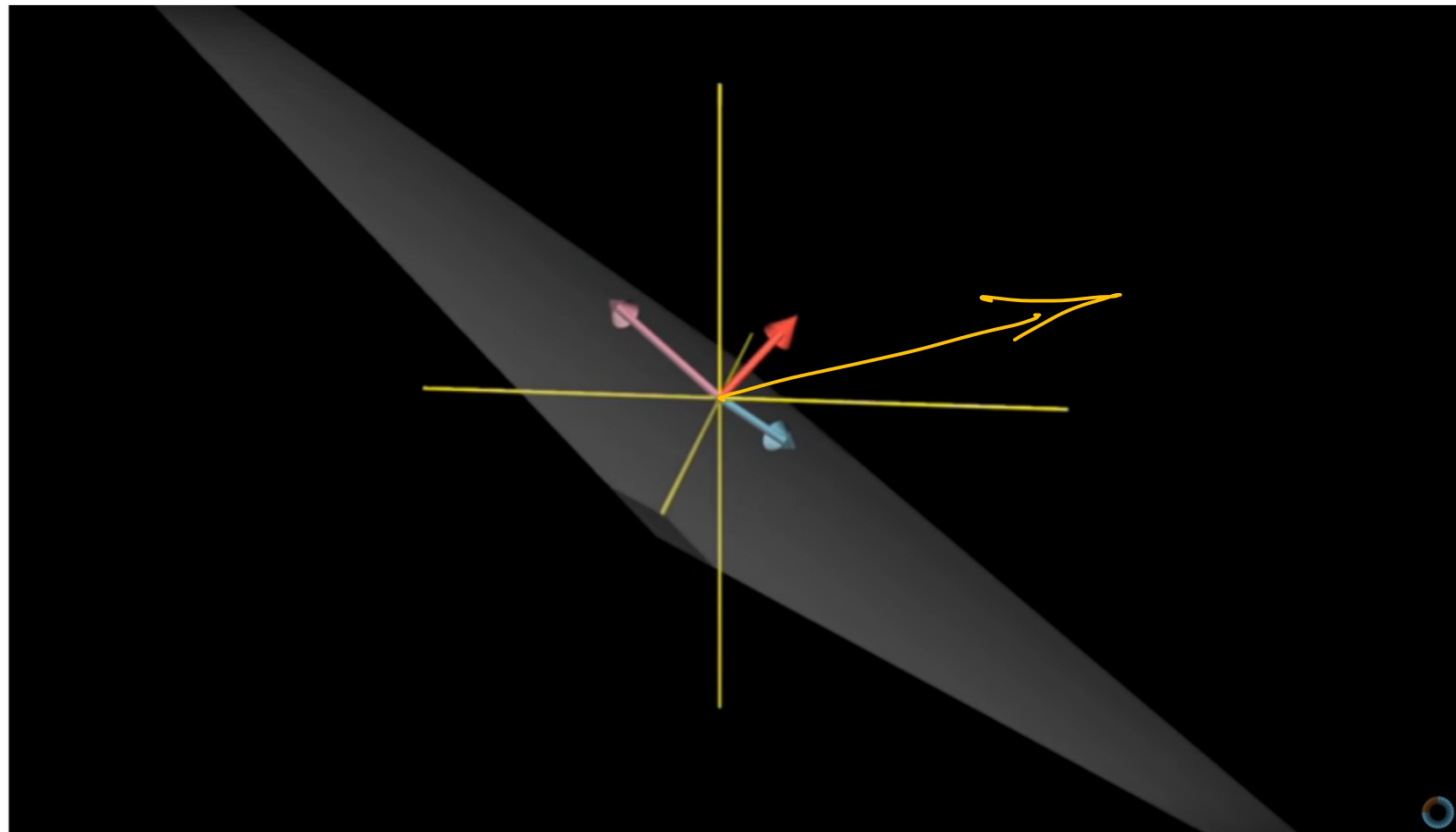


Familles libres
oooo●oooooooooooo

Pivot de Gauss
ooo

Familles génératrices
oooooooo

Bases, dimensions
oooooooooooo



Familles libres
oooo●oooooooooooo

Pivot de Gauss
ooo

Familles génératrices
oooooooo

Bases, dimensions
oooooooooooo

$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \sum_{i=0}^n \lambda_i u_i = 0_E$
 et $\exists i, \lambda_i \neq 0.$

$$\begin{aligned} \sim(A \Rightarrow B) \\ \equiv A \wedge \sim B \\ 0_E + 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

Définition 1

Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Une famille finie (u_1, \dots, u_n) d'éléments de E est dite libre si et seulement si pour toute famille de scalaire $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on a :

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i \bullet u_i = 0_E \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

(u, v, w) .

$$\begin{aligned} (v, w) \text{ liée} &\iff \exists (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3, \lambda u + \mu v + \nu w = 0 \\ &\iff w = \frac{1}{\nu} (\lambda u + \mu v) = \frac{\lambda}{\nu} u + \frac{\mu}{\nu} v \end{aligned}$$

non
Ex $u + 3v$ triviale

Proposition 1

Si $(E, +, \bullet)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel, alors les familles libres ne contiennent pas l'élément 0_E .

$$\begin{aligned} u &= (1, 0) \\ v &= (0, 0) \end{aligned}$$



$$0 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 0) = (0, 0)$$

Familles libres
oooooooo●oooooooo

Pivot de Gauss
ooo

Familles génératrices
oooooooo

Bases, dimensions
oooooooooooo

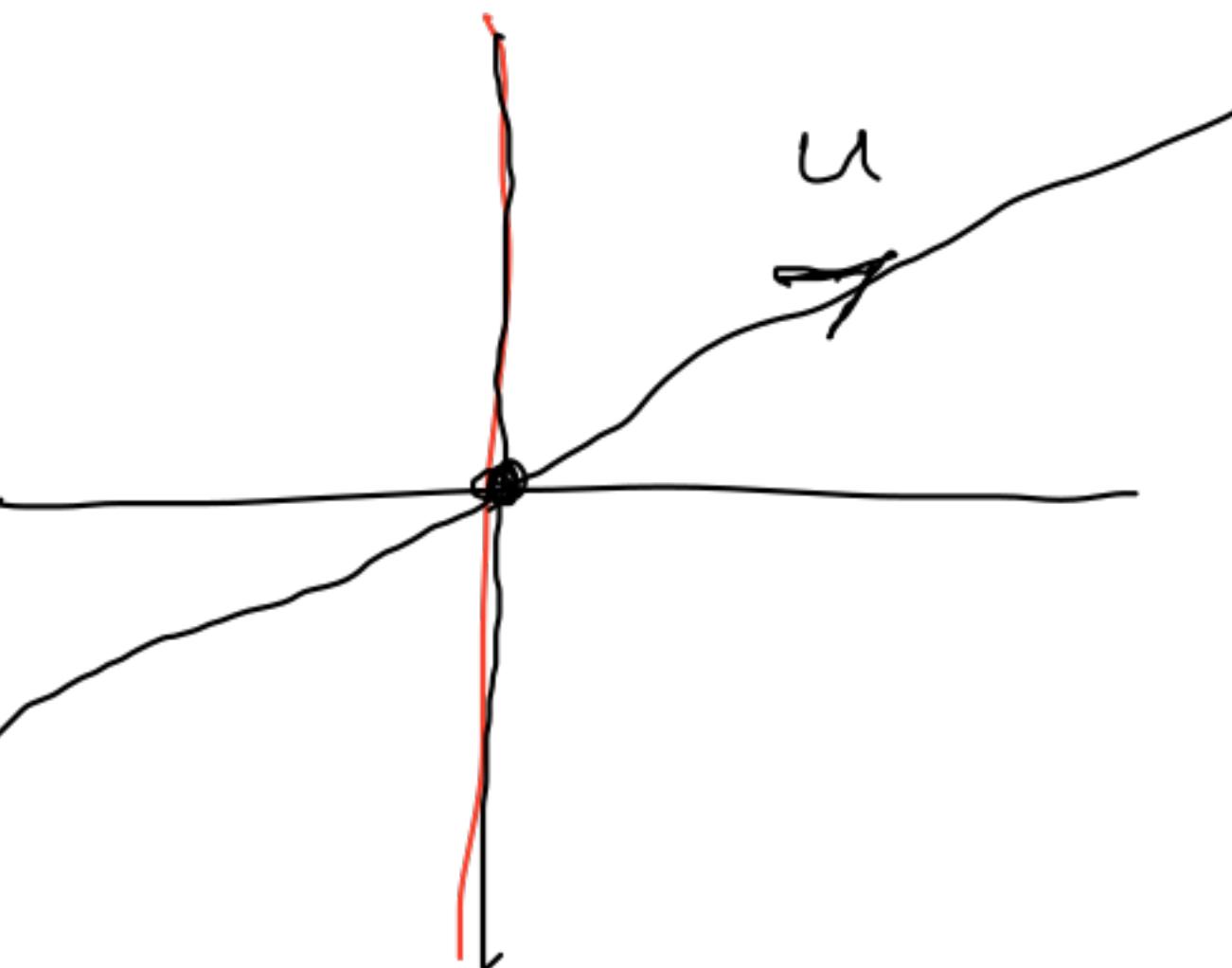
Exercice 1

Montrer que la famille $((1, 1, 0), (-1, 1, 0))$ est libre dans $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Fait au cours précédent.

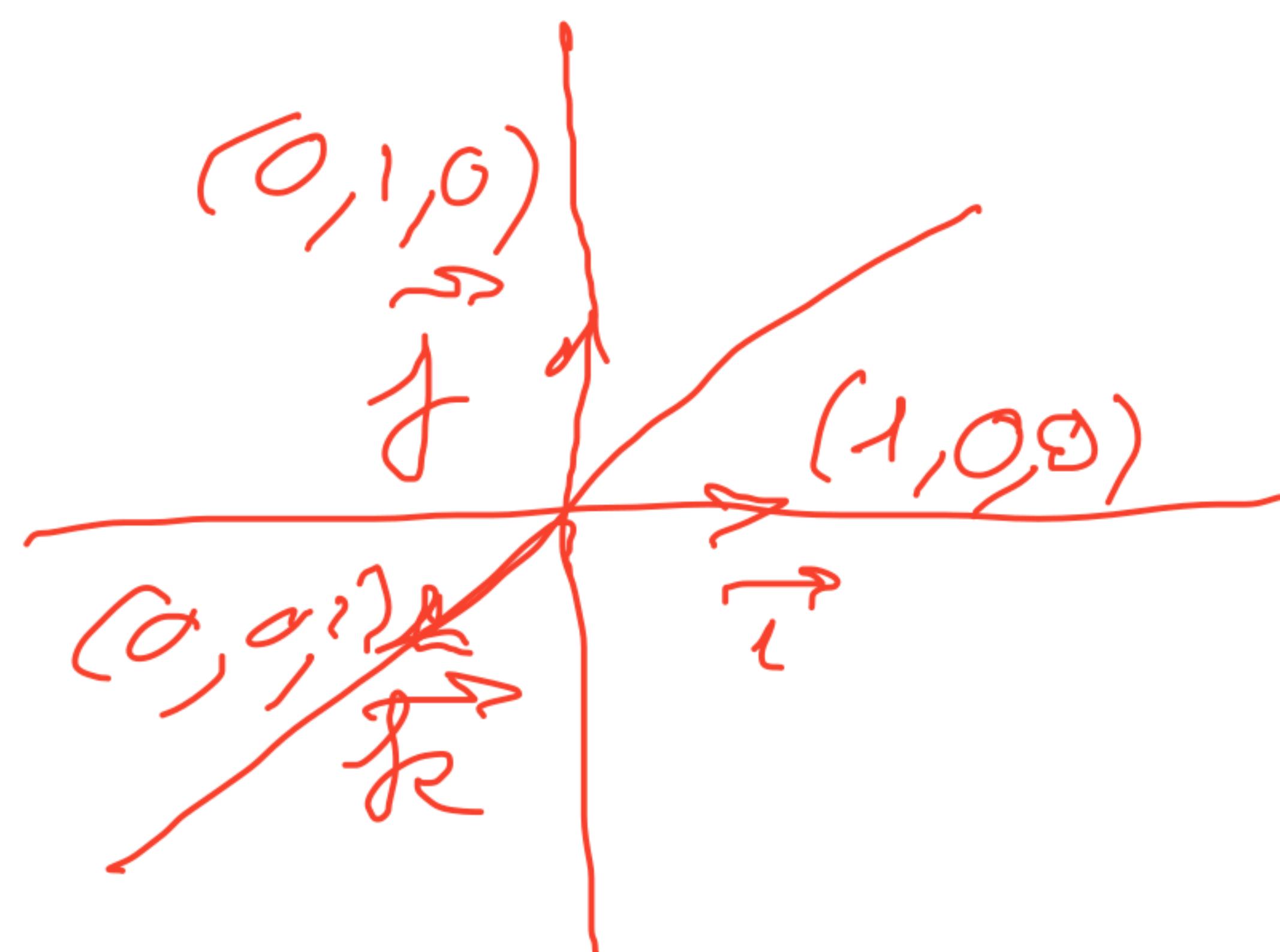
Soyant $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ t. q. $\left\{ \begin{array}{l} \lambda(1, 1, 0) + \mu(-1, 1, 0) \\ = \mathbf{0}_\mathbb{R} \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow (\lambda, \lambda, 0) + (\mu, \mu, 0) = (0, 0, 0) \\ & \Leftrightarrow (\lambda - \mu, \lambda + \mu, 0) = (0, 0, 0) \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda - \mu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$



Exemple 1

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$, l'espace vectoriel des n -uplets de scalaires, muni de l'addition et la multiplication coordonnée par coordonnée. La famille $(\delta_k)_{1 \leq k \leq n}$ de vecteurs telle que δ_k a toutes ses coordonnées égales à 0, sauf la k -ième coordonnée qui vaut 1 est libre. Ainsi par exemple $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une famille libre de \mathbb{R}^3 .



Familles libres
oooooooo●ooooo

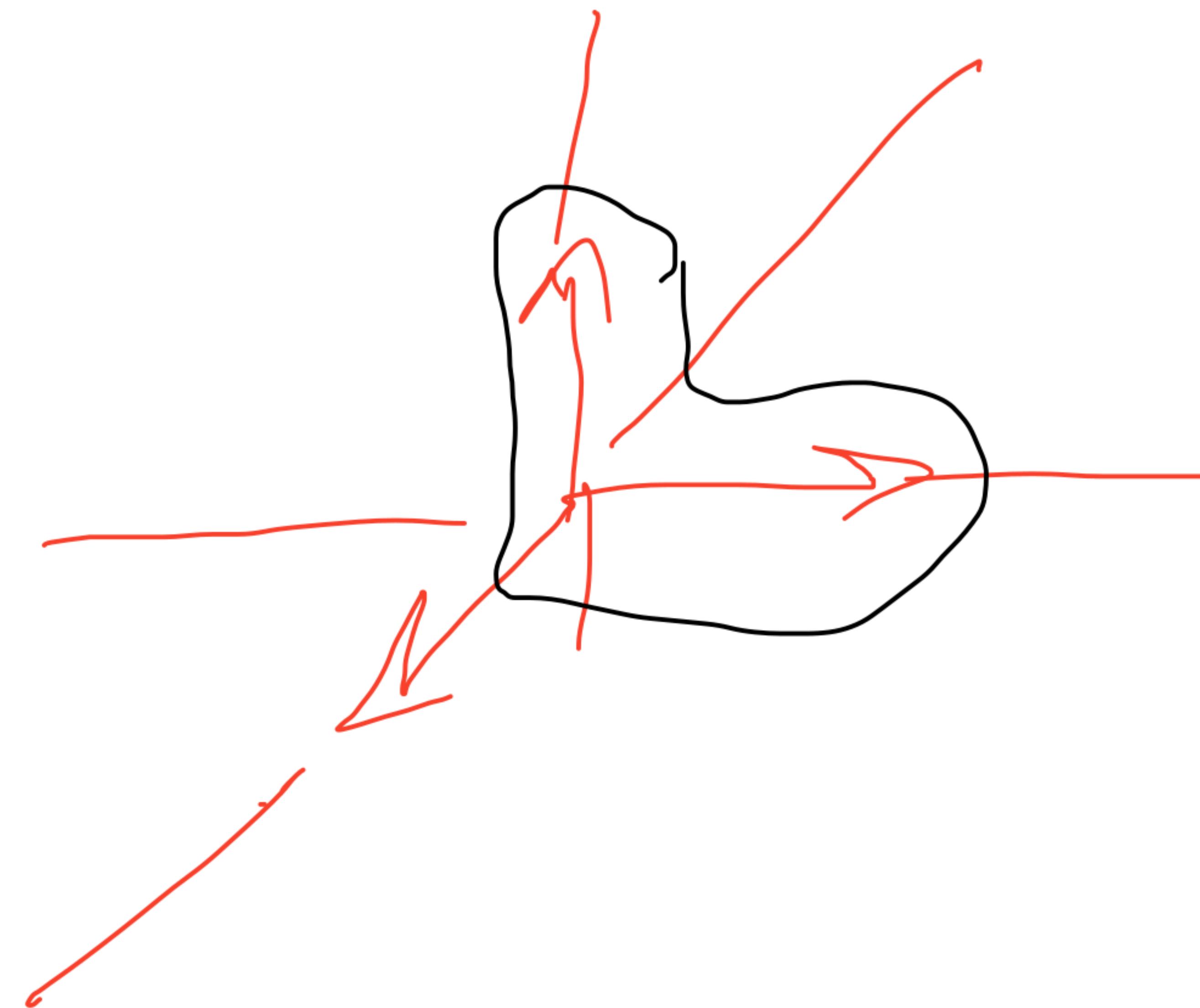
Pivot de Gauss
ooo

Familles génératrices
oooooooo

Bases, dimensions
oooooooooooo

Proposition 2

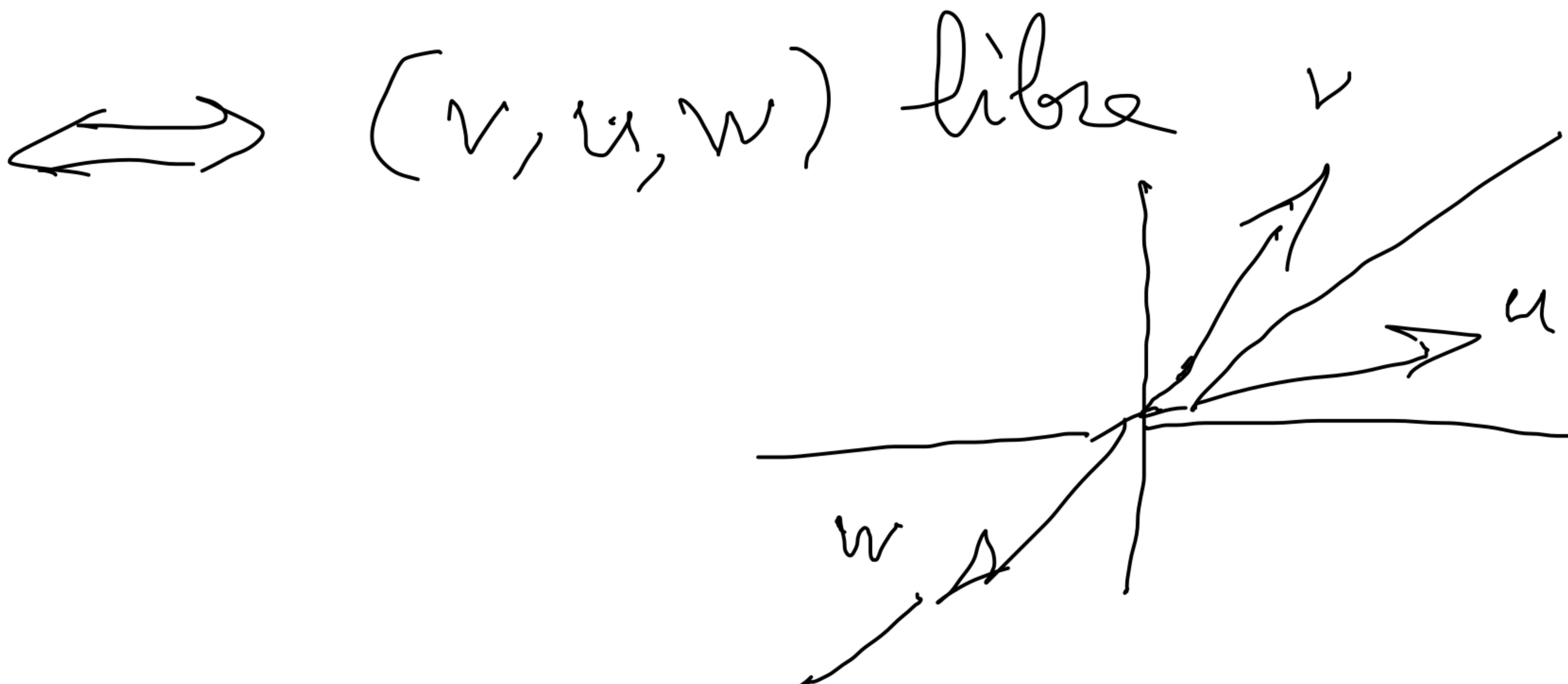
Une sous-famille d'une famille libre est libre.



Proposition 3

Une famille libre reste libre si on change l'ordre de ses éléments. Inversement, si elle est liée, elle reste liée.

(u, v, w) libre



Proposition 4

Multiplier un élément d'une famille par un scalaire non nul ne change pas son caractère libre ou lié.

(u, v) libre

$\xrightarrow{\quad}$ $(u, 3v)$ libre

(u_1, \dots, u_n) libre

$\xrightarrow{\quad}$ $(u_1, \dots, \lambda u_i, \dots, u_n)$ si $\lambda \neq 0$

Proposition 5

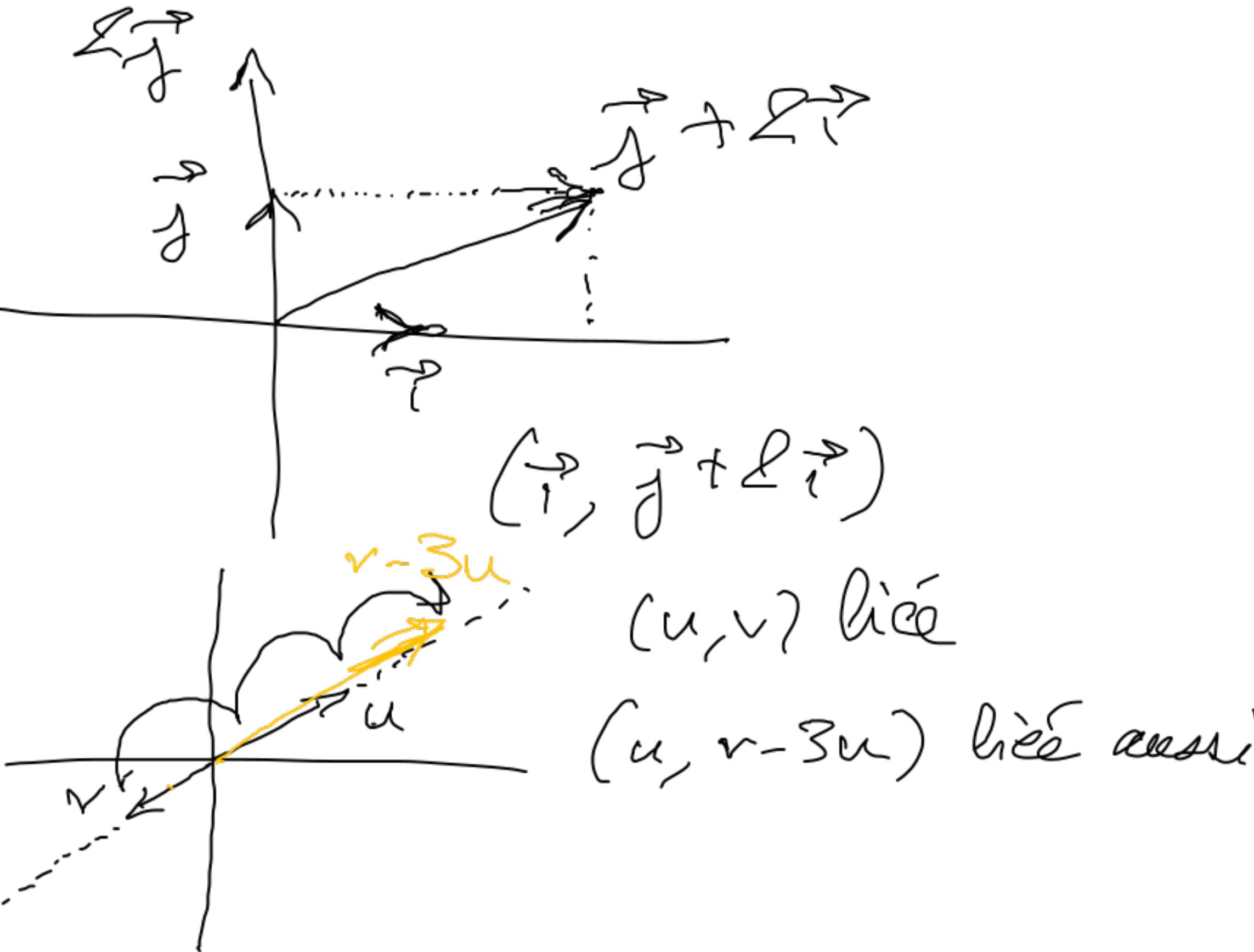
Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I . Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I tels que $i_0 \neq j_0$. Soit $(v_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} := u_{i_0} + \lambda \bullet u_{j_0} \\ v_i := u_i \quad \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est libre.

(u_1, u_2, \dots, u_n) libre

$\Leftrightarrow (u_1, u_2, u_3 - 5u_1, \dots, u_n)$ libre



Proposition 6

Soient m et n deux entiers positifs.. Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq m} \in (\mathbb{K}^n)^m$ une famille de m vecteurs du \mathbb{K} -espace vectoriel $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$. Si $(u_i)_{1 \leq i \leq m}$ est échelonnée, et que tous ses membres sont non nuls, alors elle est libre. Une famille échelonnée, c'est une famille où pour chaque vecteur, l'indice de la dernière composante non nulle est différent.

Si on écrit les vecteurs d'une famille échelonnée les uns au-dessus des autres dans un certain ordre, on obtient une sorte d'escalier :

$$\begin{array}{cccc} (1, & 0, & 0, & 0) \\ (1, & 1, & 0, & 0) \\ (1, & 1, & 1, & 0) \end{array}$$

est échelonnée (et donc libre).

Familles libres
oooooooooooooo•

Pivot de Gauss
ooo

Familles génératrices
ooooooo

Bases, dimensions
oooooooooooo

$$\begin{pmatrix} 1, & -5, & 0, & 0 \\ -1, & 2, & 19/7, & 0 \\ 0, & 8, & 7, & -1 \end{pmatrix}$$

l'est aussi. En revanche,

$$\begin{pmatrix} -1, & 5, & 0 \\ 1, & 12, & 3 \\ 1/3, & 8, & 7 \end{pmatrix}$$

n'est pas échelonnée.

$$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 0, & 2, & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a(1, 1, 0) + b(0, 2, 1) = 0$

$$(a, a, 0) + (0, 2b, b) = 0$$

$$(a, a+2b, b) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a+2b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a+0 = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Le pivot de Gauss

Trois opérations qui **transforment** une famille de vecteurs mais conservent son caractère **libre ou lié**.

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

$$L_i \leftarrow \lambda L_i \quad (\lambda \neq 0)$$

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$$

$$(0, 1, 0)$$

$$(2, 1, -1)$$

$$(4, 0, 0)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$(0, 1, 0)$$

$$(2-0, 1-1, -1-0) \rightarrow$$

$$(2, 0, -1)$$

$$(0, 1, 0)$$

$$(2, 0, -1)$$

$$(4, 0, 0)$$

Exemple 2

Montrer que la famille $((1, 1, 0), (-1, 1, 0), (2, 3, 0))$ est liée dans $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

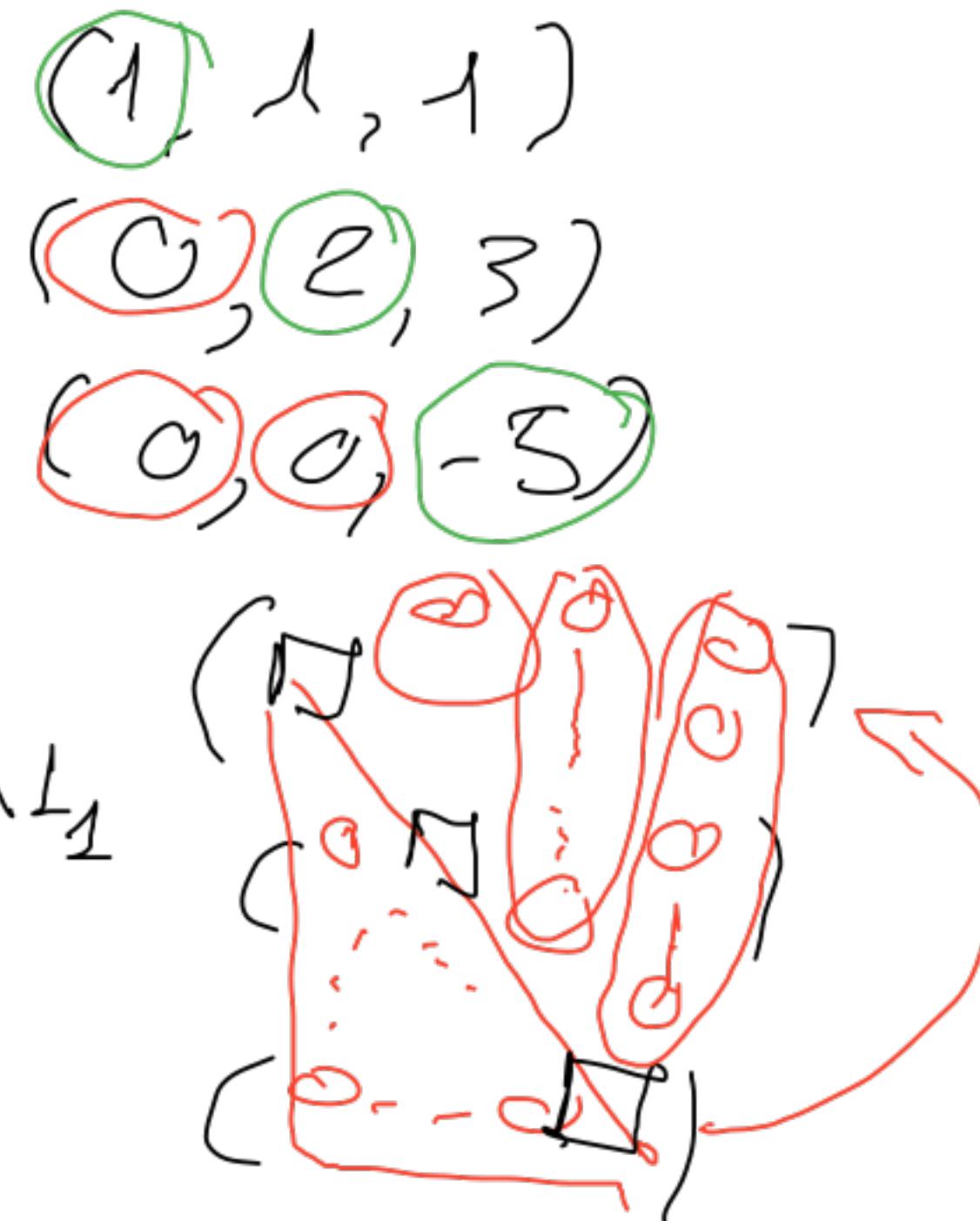
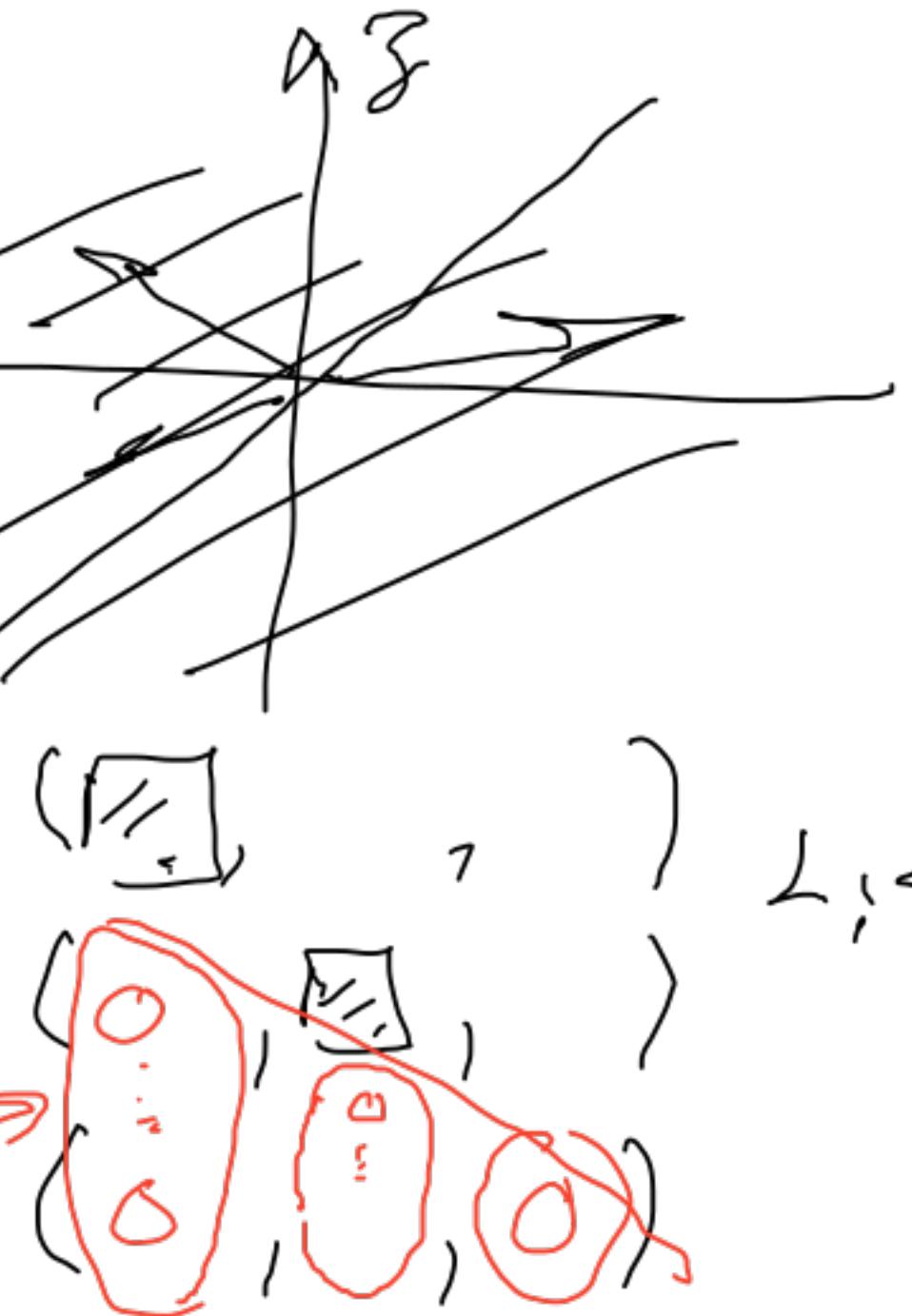
$$\begin{pmatrix} (1, 1, 0) & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 & (1, 1, 0) & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ (-1, 1, 0) & \rightarrow & (0, 2, 0) & \rightarrow (1, 1, 0) \\ (2, 3, 0) & & (2, 3, 0) & (0, 2, 0) \\ & & & (0, 1, 0) \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$

$$\begin{pmatrix} (1, 1, 0) & u \\ (0, 0, 0) & v \\ (0, 1, 0) & w \end{pmatrix}$$

liée. Donc la famille initiale est liée aussi.

$0 \cdot u + 3v + 0w = 0$



Exercice 2

Montrer que la famille $((1, 0, 1), (0, 2, -1), (2, -2, 3))$ est liée dans $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

$(1, 0, 1)$ $L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_1$, $(1, 0, 1)$
 $(0, 2, -1)$ \rightarrow $(0, 2, -1)$
 $(2, -2, 3)$ $(0, -2, 1)$
 \nearrow
 $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$
 $(0, 0, 1)$
 $(0, 2, -1)$
 $(0, 0, 0)$

donc la famille
 est liée.

donc la famille intime
est liée.

$$L_3 = L_1 - L_2$$

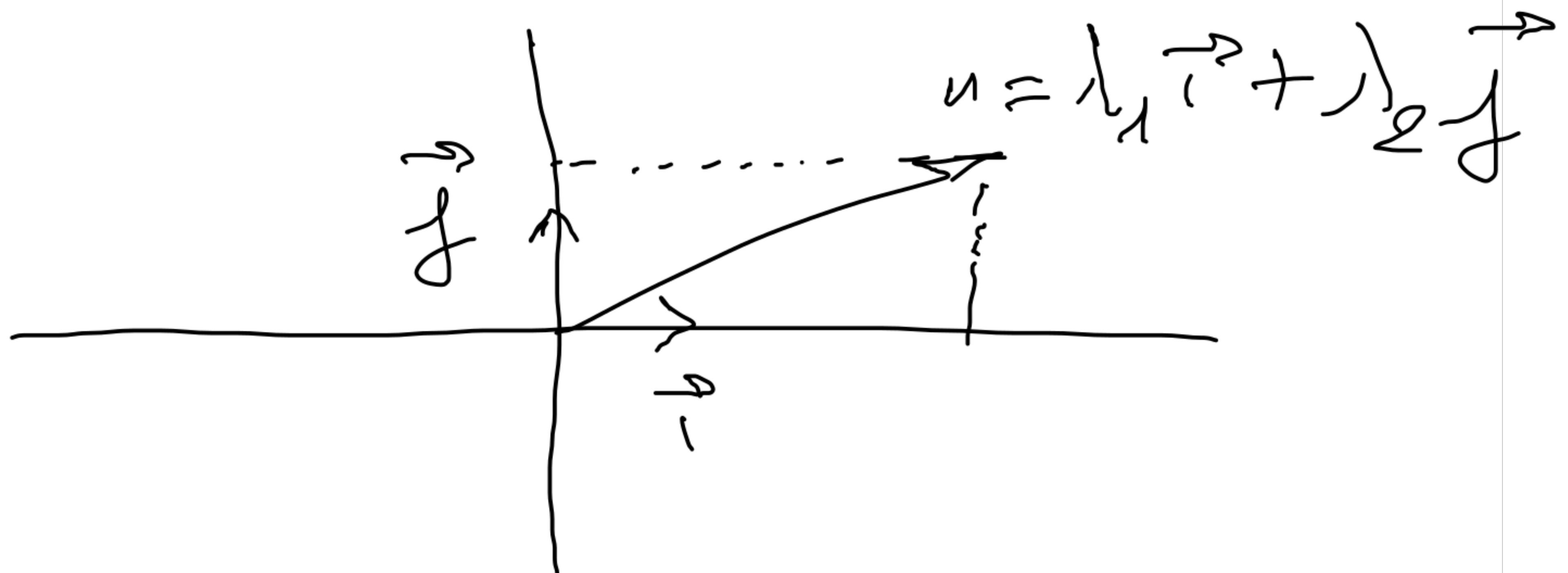
$$-2L_1 + L_2 + L_3 = O_{\mathbb{E}}$$

(L_1, L_2, L_3) est lié.

Définition 2

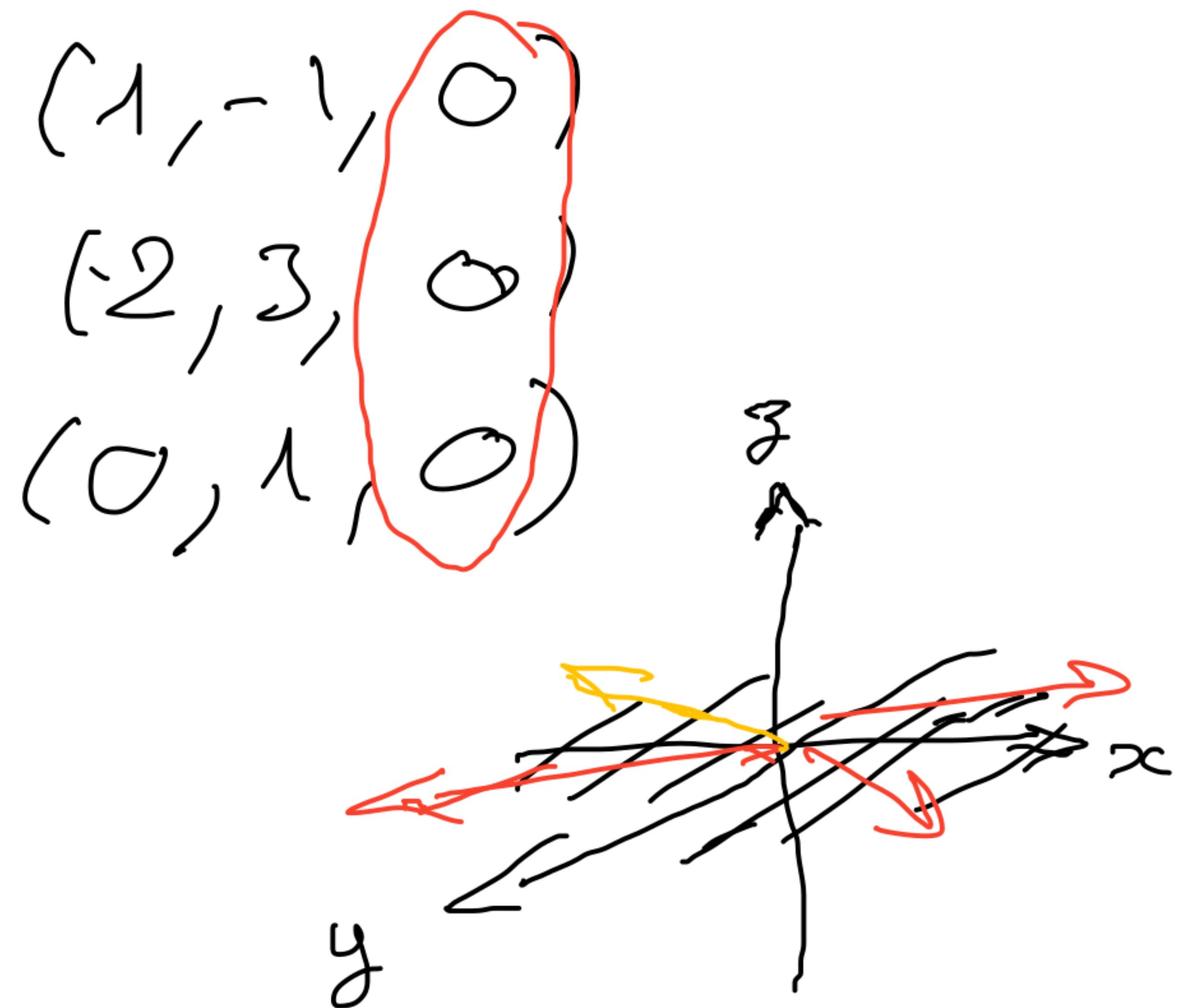
Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble. Une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est dite génératrice de $(E, +, \bullet)$ si et seulement si pour tout élément $u \in E$, il existe un sous-ensemble fini $J \subseteq I$ et une famille de scalaire $(\lambda_j)_{j \in J}$, tels que :

$$\sum_{j \in J} \lambda_j \bullet u_j = u.$$



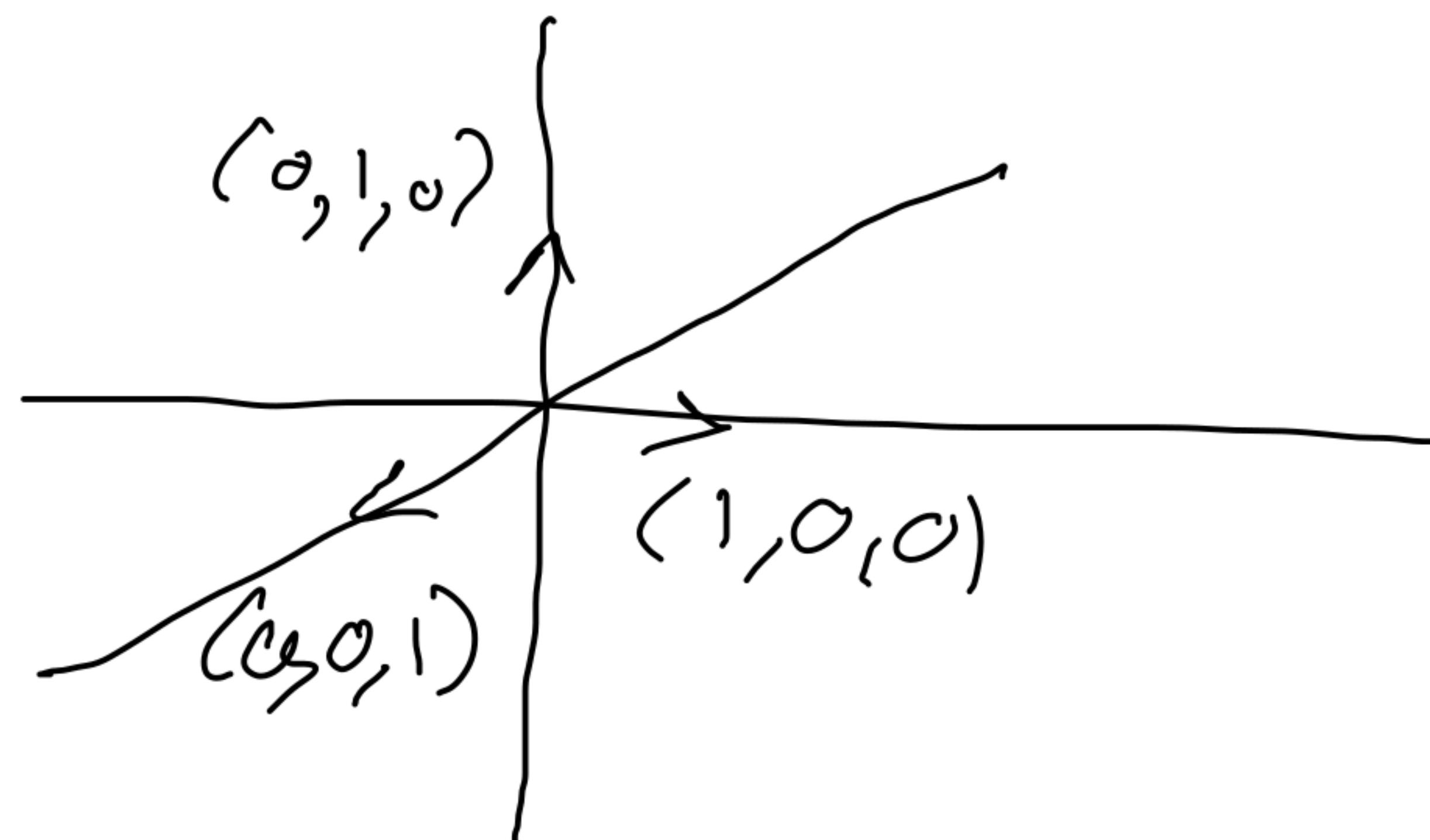
Proposition 7

Si, en mettant les vecteurs d'une famille les uns au-dessus des autres, il apparaît une colonne nulle, alors la famille n'est pas génératrice.



Exemple 3

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$, l'espace vectoriel des n-uplets de scalaires, muni de l'addition et la multiplication coordonnée par coordonnée. La famille $(\delta^k)_{1 \leq k \leq n}$ de vecteurs telle que δ_k a toutes ses coordonnées égales à 0, sauf la k -ième coordonnée qui vaut 1 est génératrice.



Familles libres
ooooooooooooooo

Pivot de Gauss
ooo

Familles génératrices
ooo•ooo

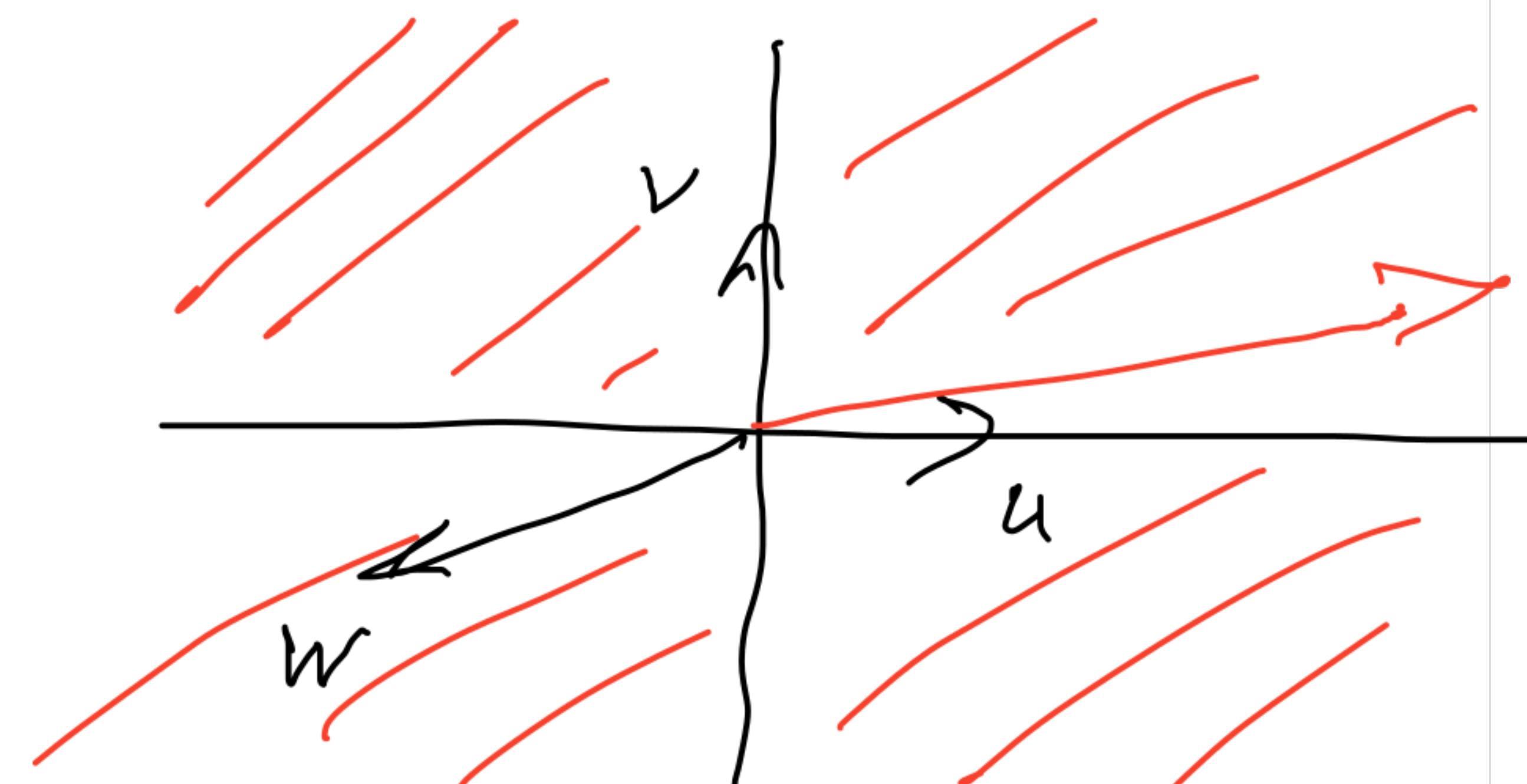
Bases, dimensions
oooooooooooo

Proposition 8

Si on ajoute des vecteurs à une famille génératrice, on obtient une famille génératrice.

(u, v) gén.

$\Rightarrow (u, v, w)$ gén.



Familles libres

ooooooooooooooo

Pivot de Gauss

ooo

Familles génératrices

oooo●oo

Bases, dimensions

oooooooooooo

Proposition 9

Changer l'ordre des vecteurs d'une famille ne change pas le caractère générateur ou non générateur.

Familles libres

ooooooooooooooo

Pivot de Gauss

ooo

Familles génératrices

oooooo●o

Bases, dimensions

ooooooooooo

Proposition 10

Multiplier un élément d'une famille par un scalaire non nul ne change pas le caractère générateur ou non générateur.

Proposition 11

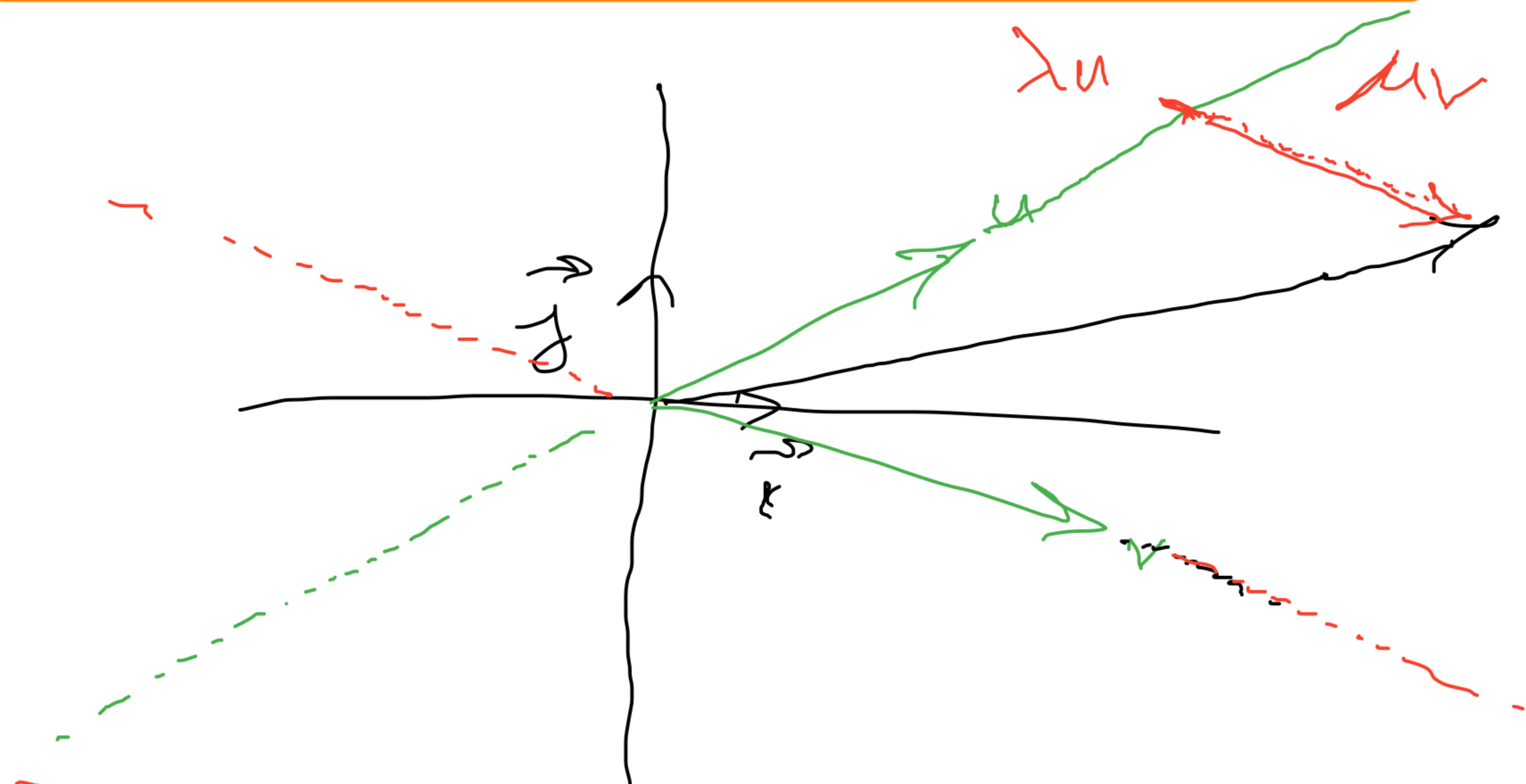
Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I . Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I tels que $i_0 \neq j_0$. Soit $(v_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

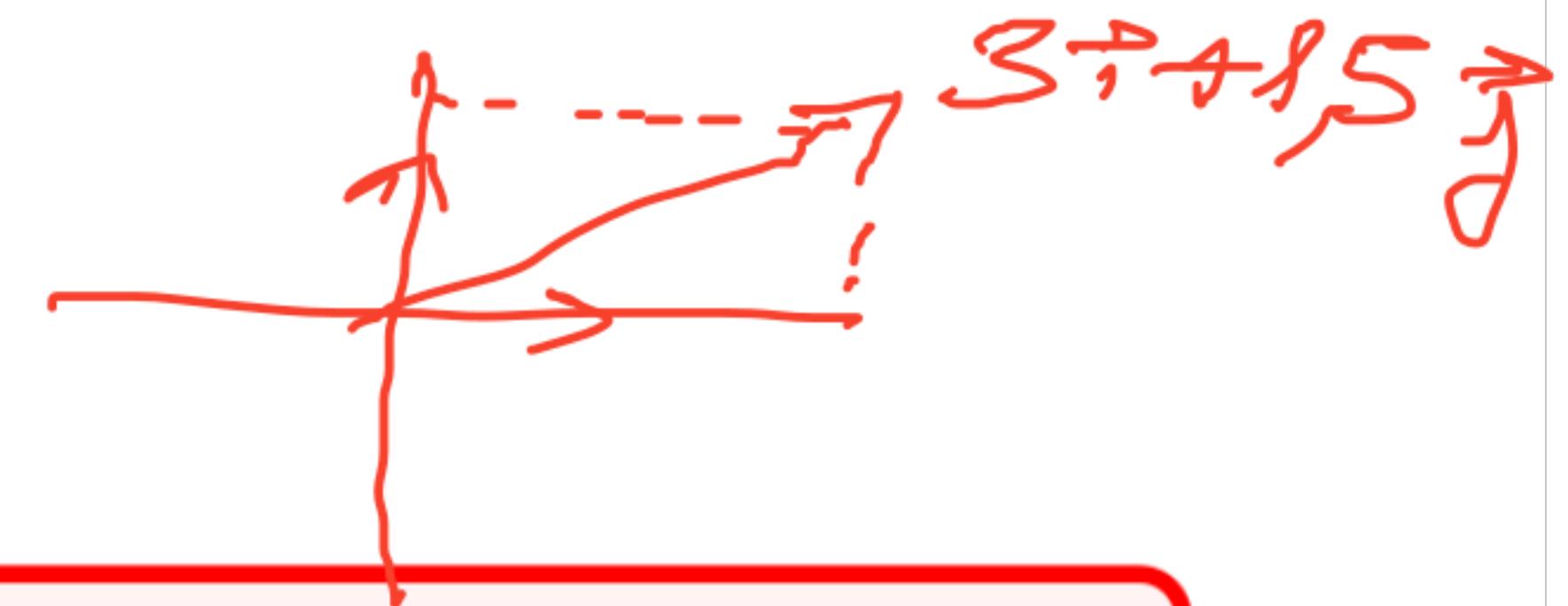
$$\begin{cases} v_{i_0} := u_{i_0} + \lambda \bullet u_{j_0} \\ v_i := u_i \end{cases} \quad \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est génératrice si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est génératrice.

Définition 3

Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. On appelle base de E toute famille d'éléments de E qui est à la fois libre et génératrice de E .





Théorème 1

Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I , tel que $(u_i)_{i \in I}$ soit une base de E .

Alors pour tout vecteur $u \in E$, il existe un unique sous-ensemble $J \subseteq I$ et une unique famille $(\lambda_j)_{j \in J}$ de scalaires non nuls tel que :

$$u = \sum_{j \in J} \lambda_j \bullet u_j.$$

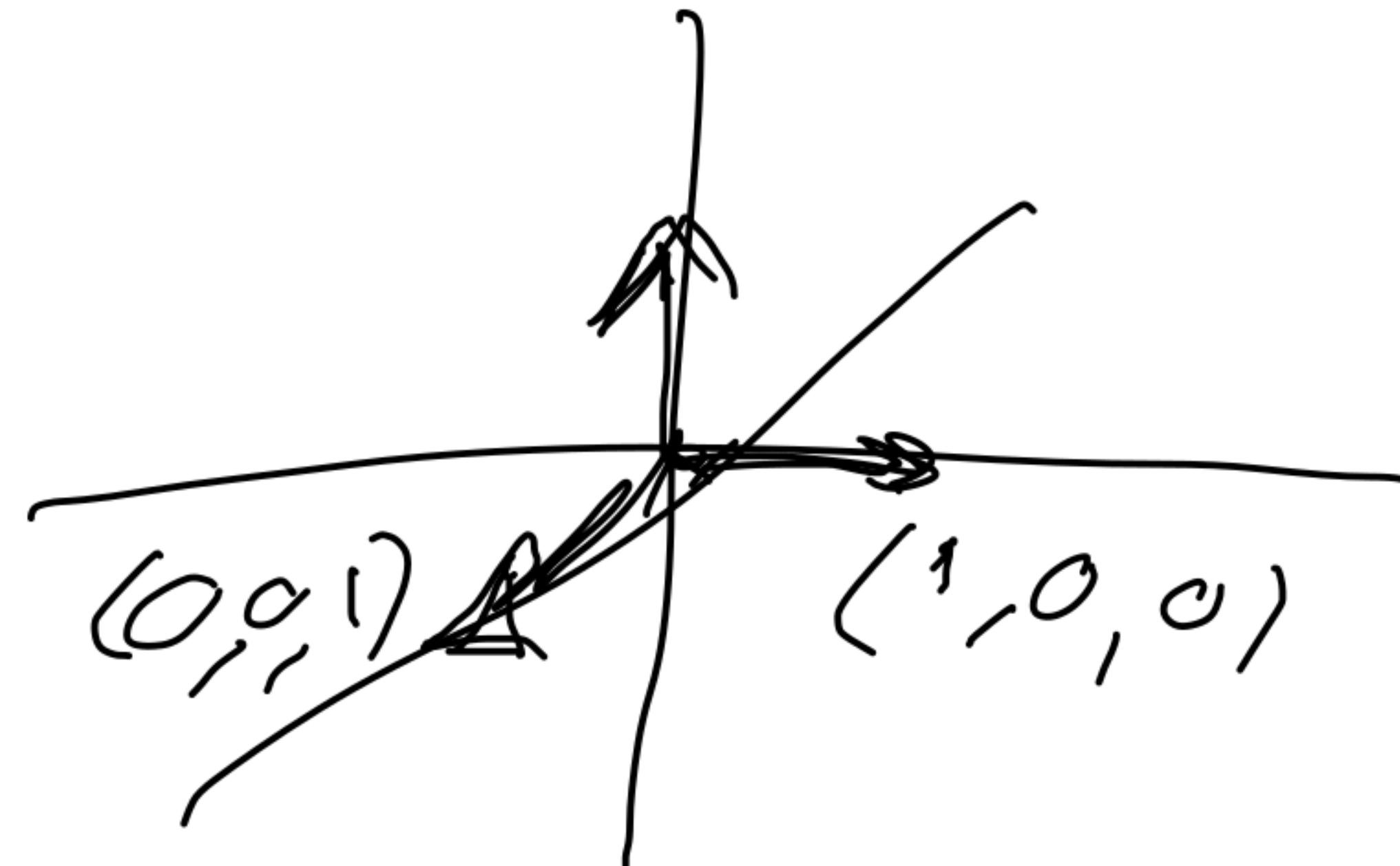
Ainsi tout vecteur admet une décomposition unique dans une base.

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_n u_n$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \mu_1 \wedge \lambda_2 = \mu_2 \wedge \dots \wedge \lambda_n = \mu_n$$

Exemple 4

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $(\delta_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{K}^n)^n$ la famille de n vecteurs de \mathbb{K}^n telle que la j -ième coordonnée du i -ième vecteur soit égale à 0 si $i \neq j$ et à 1 sinon. Alors $(\delta_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{K}^n)^n$ est une base de $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ (on dit que c'est la base canonique de \mathbb{K}^n).



Familles libres
ooooooooooooooo

Pivot de Gauss
ooo

Familles génératrices
ooooooo

Bases, dimensions
ooo•oooooo

Proposition 12

Les opérations du pivot de Gauss, appliquées à une base, résultent en une base.

Théorème 2 – Théorème « de la base incomplète »

Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit (u_1, u_2, \dots, u_n) une famille génératrice de E , telle que (u_1, u_2, \dots, u_k) soit une famille libre (avec $k \leq n$).

Alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq p \leq n$ et (u_1, u_2, \dots, u_p) est une base de E .

$$(u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_p, \dots, u_n)$$

libre

base

Familles libres
ooooooooooooooo

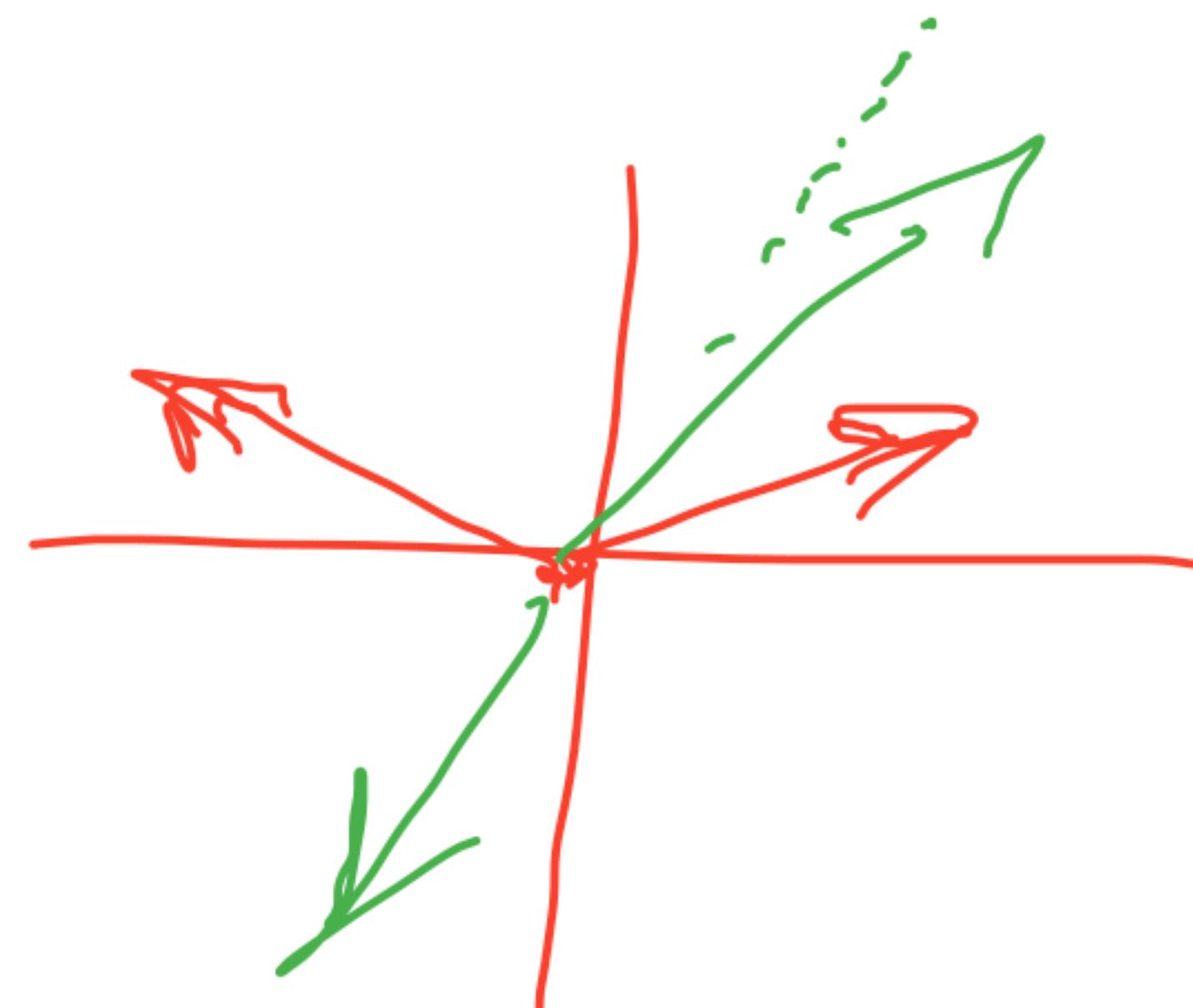
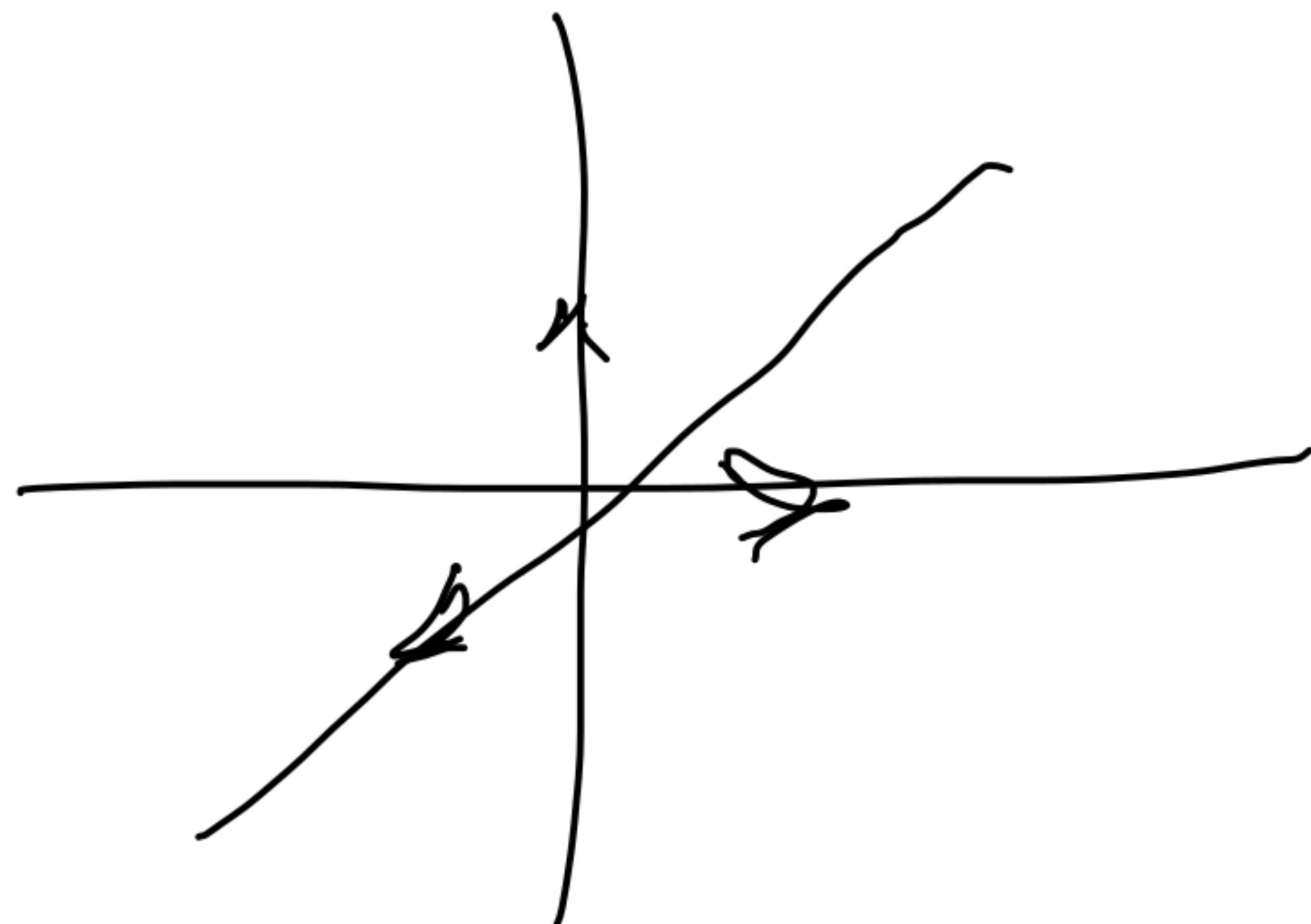
Pivot de Gauss
ooo

Familles génératrices
ooooooo

Bases, dimensions
ooooo●oooo

Théorème 3

Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. Alors toutes les bases de $(E, +, \bullet)$ ont le même cardinal.



Familles libres
ooooooooooooooo

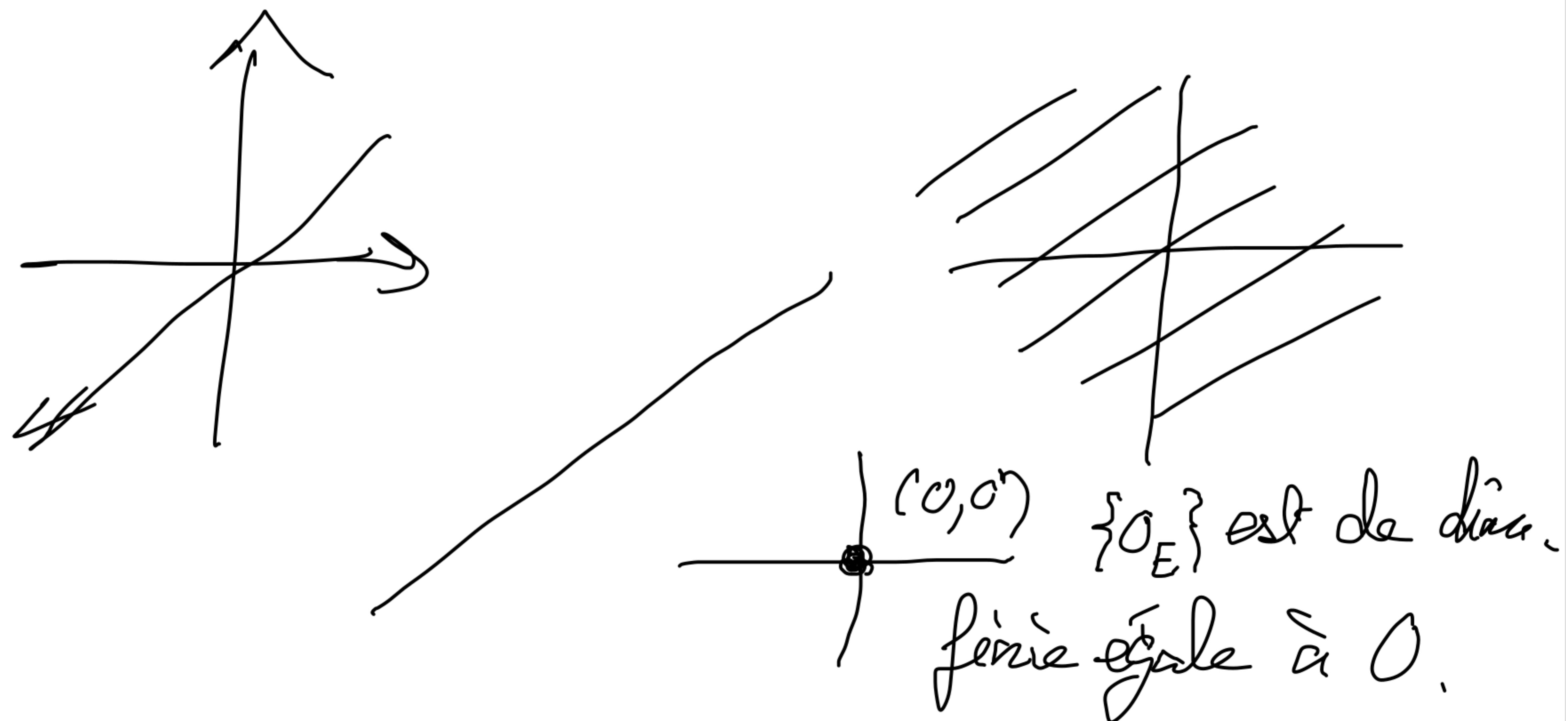
Pivot de Gauss
ooo

Familles génératrices
ooooooo

Bases, dimensions
oooooo•ooo

Définition 4

Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. On dit que $(E, +, \bullet)$ est de dimension finie et on appelle dimension de $(E, +, \bullet)$ le cardinal des bases de E .



Familles libres
ooooooooooooooo

Pivot de Gauss
ooo

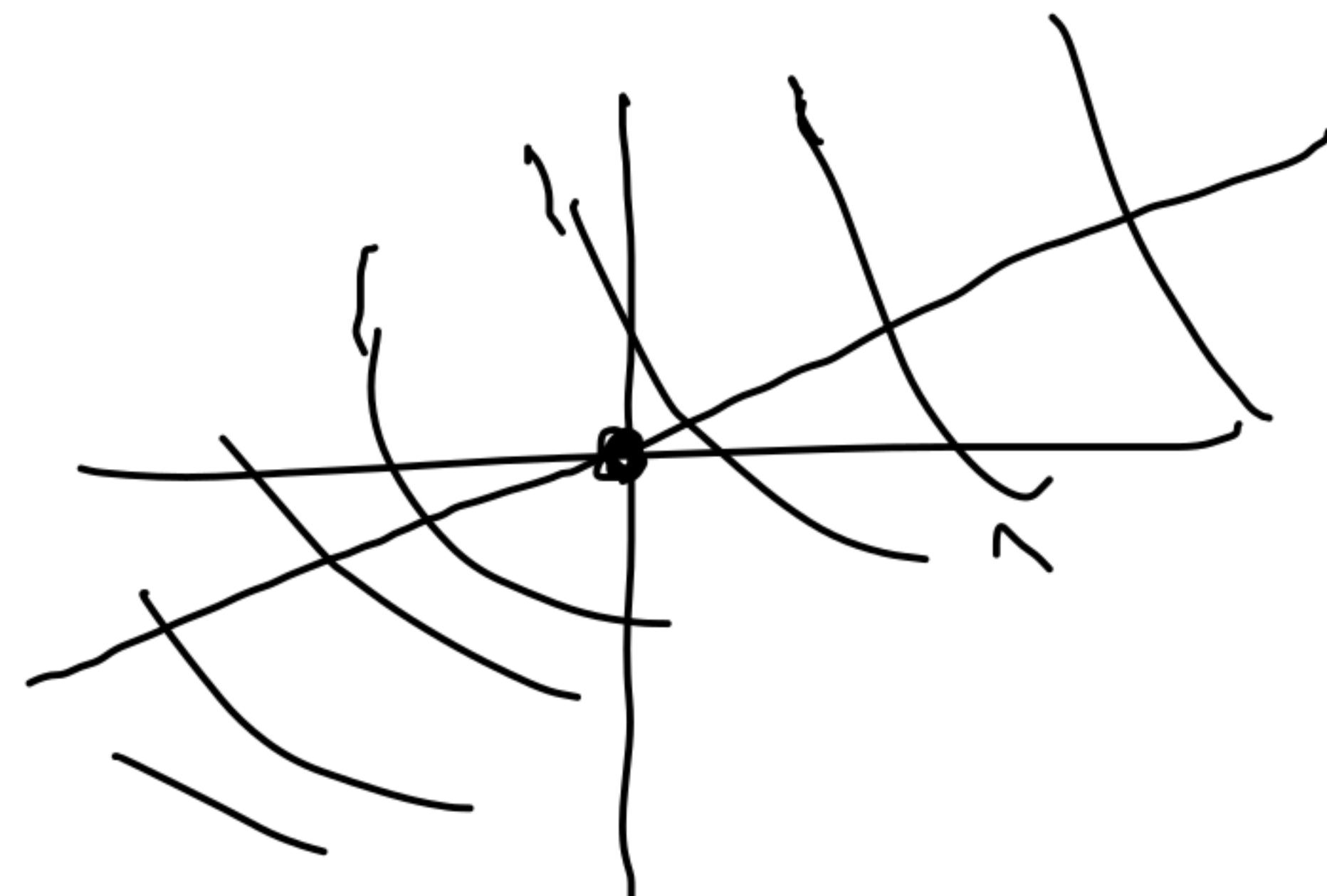
Familles génératrices
ooooooo

Bases, dimensions
ooooooo●ooo

Proposition 13

Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit F un sous-espace vectoriel de $(E, +, \bullet)$. Si E et F sont de dimensions finies et égales. Alors $E = F$.

$$\dim E \leq \dim F$$



Proposition 14

Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension fini égale à n . Alors toute famille libre de n élément est une base.

Proposition 15

Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension fini égale à n . Alors toute famille génératrice de n élément est une base.

Familles libres
ooooooooooooooo

Pivot de Gauss
ooo

Familles génératrices
ooooooo

Bases, dimensions
oooooooo●

Exercice 3

Montrer que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est une base de \mathbb{R}^3 (muni des opérations vectorielles usuelles).