Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f - 3f + 2Id = 0$.
Montrer que f est un automorphisme et déterminer l'automorphisme réciproque.

On étudie la population d'un animal quelconque. Les individus peuvent appartenir à deux catégorie : les juvéniles et les adultes. À chaque pas de temps, une fraction $s \in [0, 1]$ des juvéniles survivent et deviennent adultes, les adultes font en moyenne $f \in \mathbb{R}^+$ petits et meurent.
On a donc à chaque pas de temps

$$g : (j, a) \mapsto (fa, sj)$$

Exprimer l'ensemble des effectifs stationnaires de la population (quantité constante de juvéniles et d'adultes) comme le noyau d'une application linéaire.
Trouver une condition pour avoir des populations stationnaires non triviales (ie. $\neq 0$). Que se passe-t-il sinon ?

Soit

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) &\to \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})\\ f &\mapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(t)dt\right)\end{aligned}$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Soit

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + 2x_2 + 2x_3)$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) celle de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Donner la dimension et une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$, et la dimension et une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Même exercice avec

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (-2x_1 + x_2 + x_3, x_1 - 2x_2 + x_3) \end{aligned}$$