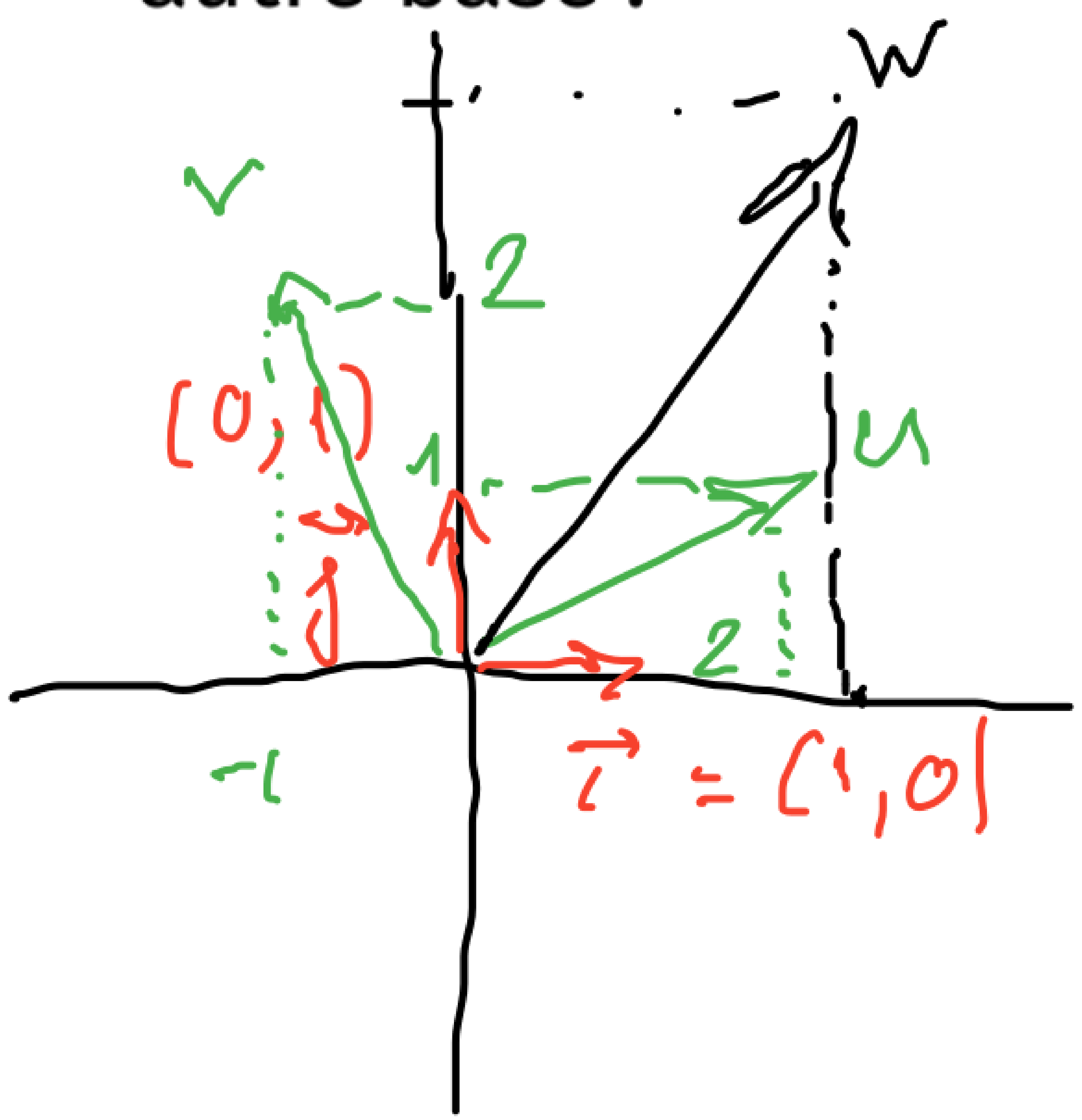
Le changement de base et ses applications

Olivier Nicole

31 mars 2021

1. Comment trouver les coordonnées d'un vecteur dans une autre base ?
2. Comment parler de la matrice d'un endomorphisme dans une autre base ?



$w = \lambda \vec{i} + \mu \vec{j}$

$w = \lambda' u + \mu' v.$

Définition 1 – Matrice de passage

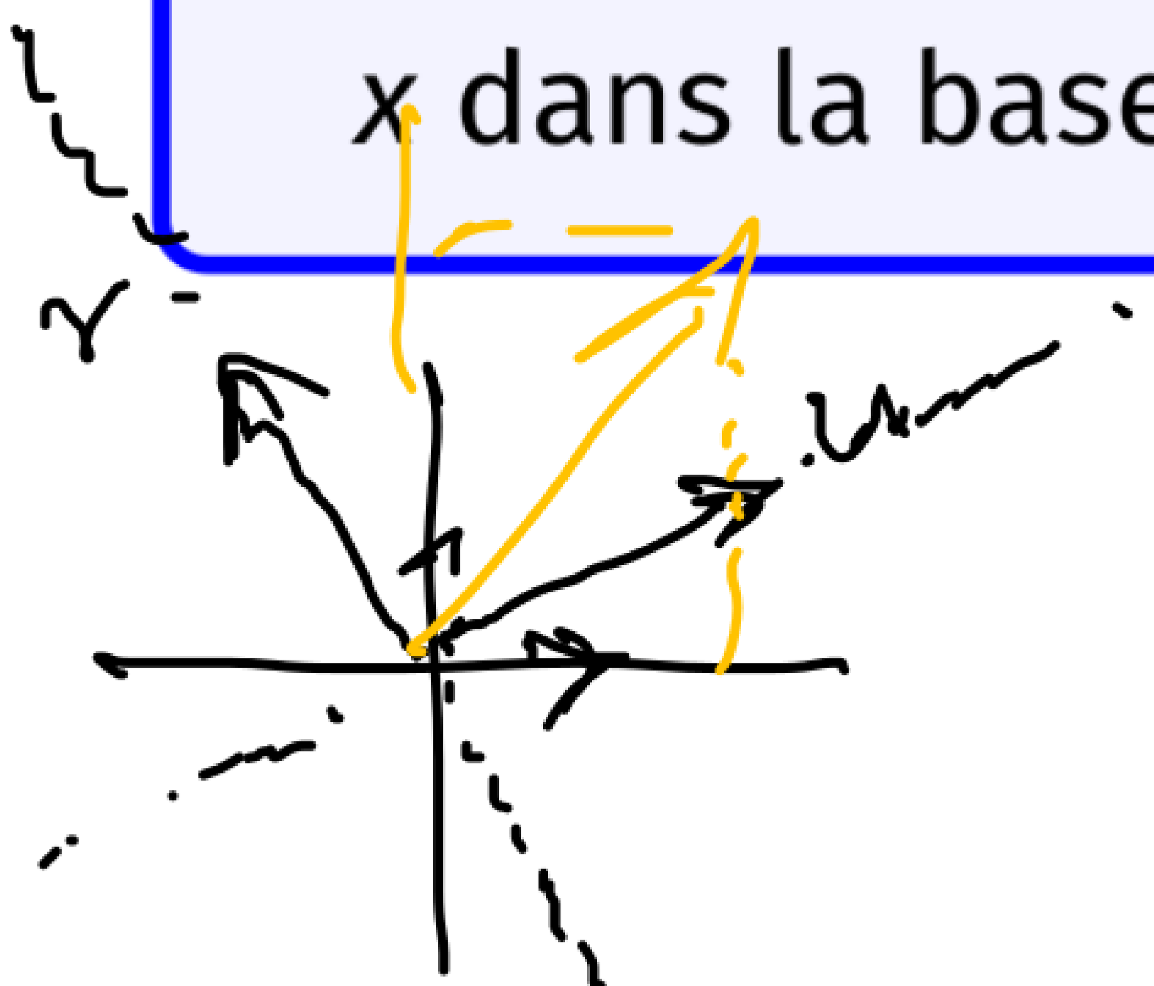
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soient $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E. On appelle *matrice de passage de e dans e'*, notée $P_e^{e'}$, la matrice dont la i-ème colonne contient les coordonnées de e'_i dans la base e.

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ u \quad v \end{array}$$

exprimés dans $(\vec{i}, \vec{j})$

Proposition 1

Si X est une matrice colonne contenant les coordonnées de $x \in E$ dans la base e', alors $P_e^{e'}X$ contient les coordonnées de x dans la base e.



$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}}_{u}$$

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}}_{v}$$

Proposition 2

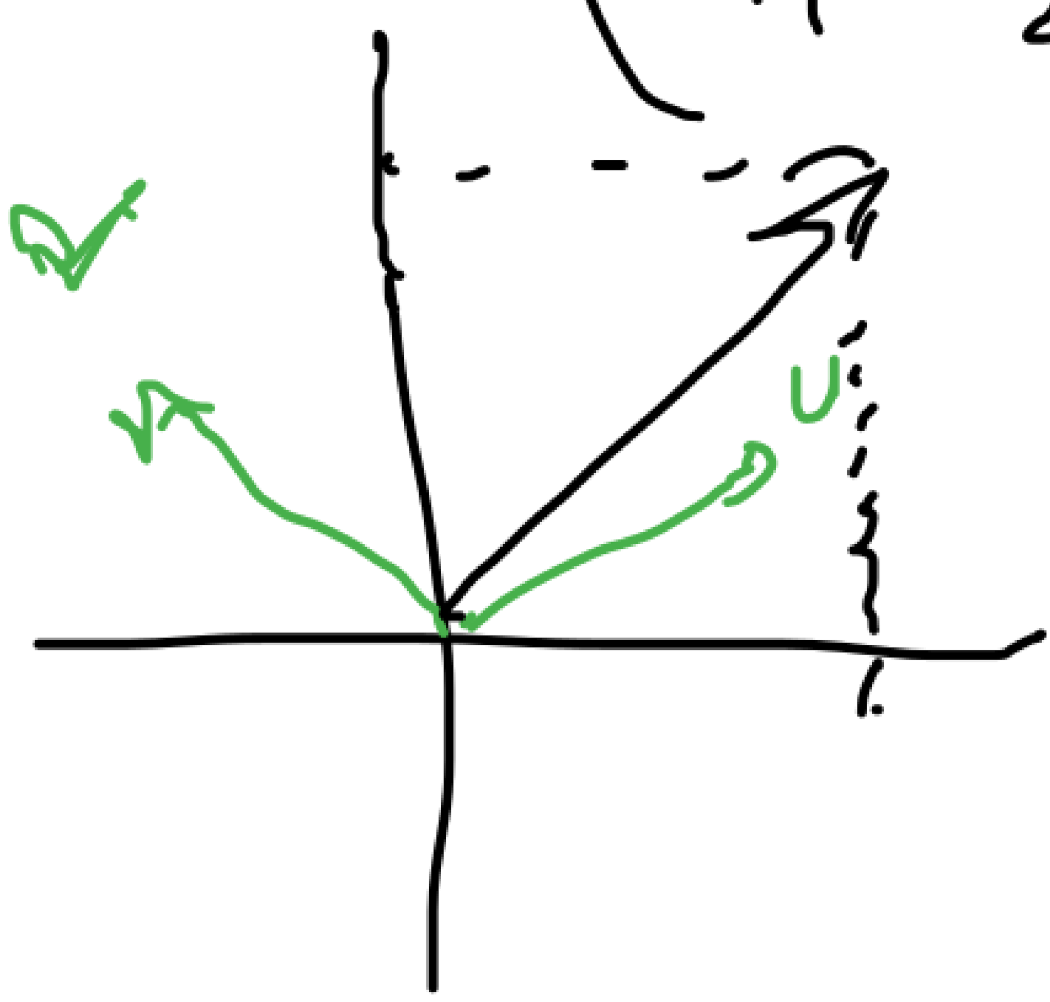
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et e et e' deux bases de E.
La matrice $P_{e'}^{e}$ est inversible et son inverse est $P_{e}^{e'}$.

$$\left(P_{e'}^{e}\right)^{-1} = P_{e}^{e'}$$

$P^{\{u,v\}}_{C}$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Trouver P^{-1}. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$



X les coords de x ds $(\vec{i},\vec{j})$

alors les coords ds $\{u,v\}$ sont $P^{-1}X$.

Comment trouver la matrice d'un endomorphisme dans une autre base ?

Proposition 3

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Soit A la matrice de φ dans la base e. La matrice de φ dans e' est :

$$\left(P_e^{e'}\right)^{-1} A P_e^{e'}$$

La matrice de φ dans la base e est A.

$P = P_e^{e'}$

La matrice de φ dans e' est :

$$P^{-1} A P.$$

X coords de x ds e

AX coords $\varphi(x)$ ds e.

Si X' coords de x ds e' :

$$\underbrace{P^{-1}\underbrace{AP X'}_{\varphi(x) \text{ dans la base } e}}_{\varphi(x) \text{ dans la base } e'}$$

Un type de matrice simple

Définition 2

Une matrice diagonale est une matrice dont seuls les éléments sur la diagonales sont éventuellement non nuls. C'est à dire qu'elles sont de la forme

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

Proposition 4

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n b_n \end{pmatrix}$$

Corollaire 1

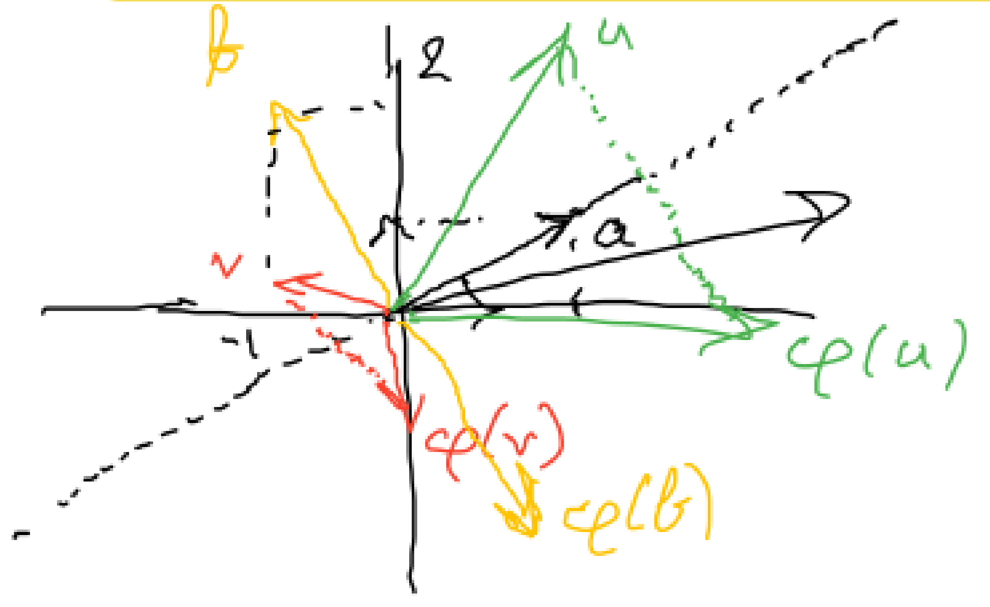
$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2, A^3 \ldots$$

Exemple 1

Considérons la symétrie dont l'axe est porté par le vecteur $(2,1)$. Pouvez-vous trouver une base dans laquelle sa matrice est particulièrement simple ? Pouvez-vous trouver sa matrice dans la base canonique ?



$\varphi(a) = a$

$\varphi(b) = -b$

matrice de φ dans $\{a,b\}$

$\varphi(a) = a = 1\times a + 0\times b$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \varphi(a) \quad \varphi(b) \end{array}$$

matrice de φ dans $\{a,b\}$

$\varphi(b) = -b = 0\times a + (-1) b$

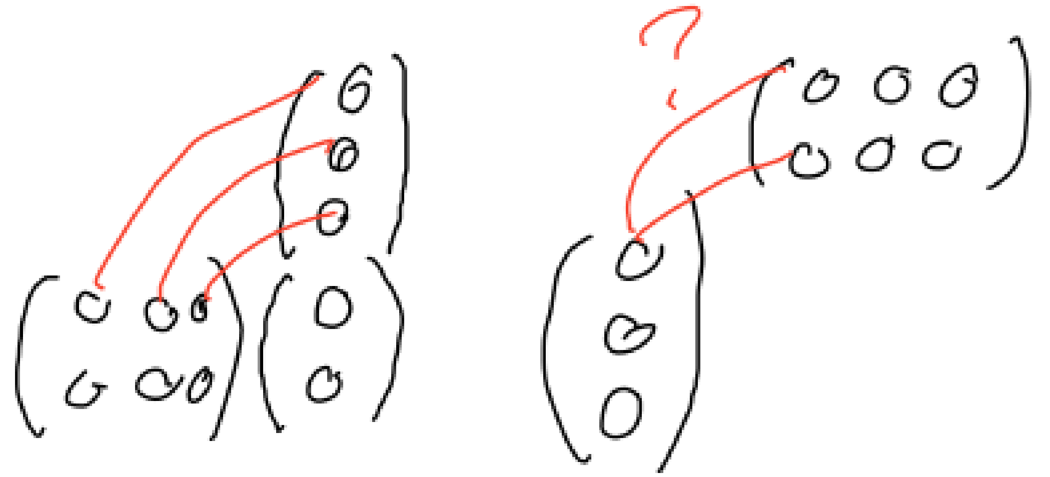
$P = I_{(i,j)}^{(a,b)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

La matrice de φ dans la b.c. est

$B = P^{-1}AP$

$= \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$



On a fait :

$$\text{base bien adaptée} \rightarrow \text{base canonique}$$

Comment faire l'inverse ?

Définition 3

On dit qu'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si on peut la tranformer en matrice diagonale par changement de base.
C'est-à-dire s'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que

$$P^{-1}AP$$

est diagonale.

Proposition 5

Soit A, une matrice diagonalisable, D une matrice diagonale et P une inversible telle que $A = PDP^{-1}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$$

$$A^2 = (PDP^{-1})^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1})$$

$$= PD\underbrace{(PP^{-1})}_{I_n}DP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Définition 4 – Valeur propre d'un endomorphisme

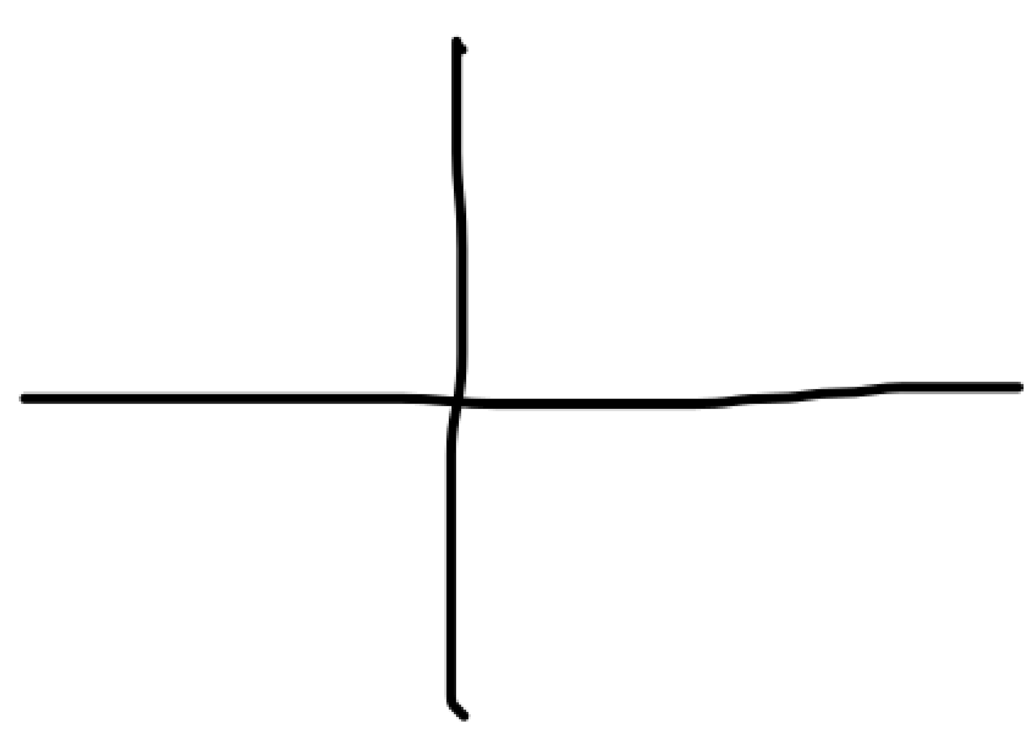
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u s'il existe un vecteur x non nul tel que

$$u(x) = \lambda \cdot x$$

Définition 5 – Valeur propre d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A s'il existe une matrice colonne $x \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ non nulle tel que

$$Ax = \lambda x$$



Définition 6 – Vecteur propre d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $x \in E \setminus \{0\}$ est un vecteur propre de u s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$u(x) = \lambda \cdot x$$

On dit que x est un vecteur propre associé à λ.

Si on trouve une base constituée de vecteurs propres, la matrice de u dans cette base est diagonale.

(u_1, u_2) base de vecteurs propres.

$u(u_1) = \lambda_1 u_1$

$u(u_2) = \lambda_2 u_2$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

mat. de u ds (u_1, u_2)

Définition 7 – Vecteur propre d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $x\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ est un vecteur propre de A s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$Ax = \lambda x$$

On dit que x est un vecteur propre associé à λ.

Définition 8 – Polynôme caractéristique d'une matrice 2×2

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

une matrice à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme :

$$(a - x)(d - x) - bc$$

Théorème 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, λ est valeur propre de A si et seulement si A est racine du polynôme caractéristique de A.

Théorème 2

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Si le polynôme caractéristique de A possède deux racines distinctes, alors A est diagonalisable.

Méthode :

1. Résoudre le polynôme caractéristique et trouver les valeurs propres
2. Trouver 2 vecteurs propres en résolvant le système $AX = \lambda X$ pour chaque valeur propre.
3. On a trouvé une base où la matrice est diagonale.

Exemple 2

La suite de FIBONACCI est définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

Trouver le terme général de cette suite.

On va exprimer le problème en termes de matrices.
Remarque : cette technique fonctionne pour toute suite récurrente linéaire.

$$U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}. \quad U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} + u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}}_{U_n} = AU_n$$

$U_1 = AU_0$

$U_2 = AU_1 = A^2U_0$

$\vdots$

$U_n = A^nU_0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ correspond à un certain $\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dans la base canonique.

Le polynôme carac. de ~~φ~~ α est :
$(1-x)(-x) - 1$.

[Formule générique pour la mat. $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$:
$(a-x)(d-x) - bc$]

$x^2 - x - 1$

$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

donc
$AX = \varphi X$ a des solutions.

Trouver des X t.q. $AX = \varphi X$.
Pour ça, résoudre :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi x \\ \varphi y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \varphi x \\ x = \varphi y \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution, donc $\begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix}$ vect. propre de A.

$$A\begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vérifions que $\begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution de $AX = \varphi X$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi x \\ \varphi y \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi x \\ \varphi y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \varphi x \\ x = \varphi y \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \varphi y + y = \varphi^2 y \\ x = \varphi y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \underbrace{(\varphi^2 - \varphi - 1)}_{0} y \\ x = \varphi y \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x = \varphi y \end{cases}.\ \text{Donc } \begin{cases} x = \varphi \\ y = 1 \end{cases} \text{ est solution.}$$

De même on "résout" $AX = \psi X$.
Une solution est $\begin{pmatrix} \psi \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$A\begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a deux vecteurs propres :

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si $AV = \lambda V$
alors $\alpha(v) = \lambda v$

Ils forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Quelle est la matrice de α dans $\left(\begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi \\ 1 \end{pmatrix}\right)$?

Je sais que $\alpha((\varphi, 1)) = \varphi \cdot (\varphi, 1) = \varphi(\varphi, 1) + 0(\psi, 1)$.
$\alpha((\psi, 1)) = \psi \cdot (\psi, 1)$
$= 0 \cdot (\varphi, 1) + \psi(\psi, 1)$

$$\begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}$$

$\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
Mat. de α dans la b.c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Mat. de α dans $\left(\begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi \\ 1 \end{pmatrix}\right)$: $B = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}$
Donc soit $P = I_{b.c.}^{\left(\begin{smallmatrix} \varphi \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \psi \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}$

Alors :

$$B = P^{-1}AP.$$

$$PB = \overbrace{PP^{-1}}^{I_2}AP$$
$$= AP$$
$$PBP^{-1} = A\underbrace{PP^{-1}}_{I_2} = A$$

$U_n = A^nU_0$.

$A = PBP^{-1}$

donc $U_n = \underbrace{(PBP^{-1})^n}_{PB^nP^{-1}}U_0$

$$U_n = P\underbrace{\begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \psi^n \end{pmatrix}}_{\text{facile à calculer}}P^{-1}U_0$$

$$P\begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \psi^n \end{pmatrix}P^{-1}U_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}P\begin{pmatrix} \varphi^n \\ -\psi^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \varphi^{n+1} - \psi^{n+1} \\ \varphi^n - \psi^n \end{pmatrix}$$

$$U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \varphi^{n+1} - \psi^{n+1} \\ \varphi^n - \psi^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \varphi^{n+1} - \psi^{n+1} \\ \varphi^n - \psi^n \end{pmatrix}$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n).$$

Conclusion

- On peut calculer la matrice d'un endomorphisme dans différentes bases.
- Dans une base bien choisie, la matrice d'un endomorphisme peut être plus simple (par exemple diagonale).
- On aime bien les matrices diagonales pour faire des calculs.
- En suivant une méthode, on peut diagonaliser *certaines* matrices.
- Pour diagonaliser une matrice $n \times n$, il faut résoudre un polynôme de degré n.