### Olivier Nicole

Déduction

Prouver  $(arphi_{f 1}eearphi_{f 2})$ 

 $\mathsf{Prouver} \ (arphi_{f 1} \wedge arphi_{f 2})$ 

Le raisonnement p contraposition

Le raisonnement pa 'absurde

reuve par cas

Avec des quantificateurs

## Raisonnement

Olivier Nicole oliver.nicole@ens.fr

DI ENS

16 septembre 2019

Frouver  $(\varphi_1 \land \varphi_2)$ 

contraposition

i absurde

Preuve par cas

Avec des quantificateur

Déduction

Prouver  $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ 

Prouver  $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ 

Le raisonnement par contraposition

Le raisonnement par l'absurde

Preuve par cas

Avec des quantificateurs

# Déduction

### Olivier Nicole

# Déduction

### Déduction

Prouver (φ1 V φ5

Prouver  $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ 

Le raisonnement pa contraposition

\_e raisonnement pai 'absurde

Preuve par car

Avec des quantificateurs

## **Proposition 1** – Modus ponens

Si  $\varphi_1$  et  $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$  sont des tautologies, alors  $\varphi_2$  est une tautologie.

16 septembre 2019

### Olivier Nicole

# Déduction

\_ /

Prouver  $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ 

Le raisonnement pa

\_e raisonnement pa 'absurde

reuve par cas

Avec des quantificateurs

# Déduction

## Exemple 1

(« Je pense »  $\Rightarrow$  « je suis ») or « je pense » donc « je suis ».

### Olivier Nicole

#### Déduction

## Déduction

# **Proposition 2**

- 1. Si  $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$  et  $\varphi_1$  sont des tautologies, alors  $\varphi_2$  est une tautologie;
- 2. Si  $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$  et  $\varphi_2$  sont des tautologies, alors  $\varphi_1$  est une tautologie.

On peut utiliser une équivalence comme des implications dans les deux sens.

Prouver  $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ 

Olivier Nicole

Prouver  $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ 

Déduction

Prouver  $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ 

Prouver  $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ 

Le raisonnement par contraposition

Le raisonnement pai l'absurde

Preuve par cas

Avec des quantificateurs

## Théorème 1

Pour prouver  $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ , il suffit de prouver soit  $\varphi_1$ , soit  $\varphi_2$ .

Le raisonnement pa

Preuve par cas

Avec des ausp

Avec des quantificateu

### Déduction

Prouver  $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ 

Prouver  $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ 

Le raisonnement par contraposition

Le raisonnement par l'absurde

Preuve par cas

Avec des quantificateurs

Olivier Nicole

Prouver (101 V 102

Prouver  $(\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ 

Le raisonnement par contraposition

\_e raisonnement par 'absurde

Preuve par cas

Avec des quantificateur

# Prouver $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$

### Théorème 2

Si on a prouvé  $\varphi_1$  et qu'on a prouvé  $\varphi_2$ , alors on a prouvé  $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ .

16 septembre 2019

10 / 27

Ça va sans dire, mais il fallait quand même le dire. . .

Prouver  $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ 

Prouver  $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ 

# Le raisonnement par contraposition

Le raisonnement par l'absurde

Preuve par cas

Avec des quantificateurs

Prouver (103 V 103

Prouver  $(\varphi_{\mathbf{1}} \wedge \varphi_{\mathbf{2}})$ 

## Le raisonnement par contraposition

Le raisonnement pa l'absurde

D.....

Avec des quantificateurs

**Théorème 3** – Contraposée

La formule  $((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \Leftrightarrow ((\neg \varphi_2) \Rightarrow (\neg \varphi_1)))$  est une tautologie.

16 septembre 2019

Prouver (104 V 105

 $\mathsf{Prouver}\ (\varphi_{\mathbf{1}} \wedge \varphi_{\mathbf{2}})$ 

## Le raisonnement par contraposition

Le raisonnement pa l'absurde

Avec des quantificateurs

## Exemple 2

( « Je pense »  $\Rightarrow$  « Je suis »)  $\Leftrightarrow$  ( « Je ne suis pas »  $\Rightarrow$  « Je ne pense pas »)

#### Olivier Nicole

DOLL ST

Prouver (104 V 105

Prouver (∅1 ∧ ∅2)

Le raisonnement par

Le raisonnement pa

Preuve par c

Avec des quantificateur

# Le raisonnement par contraposition

## Exemple 3

Nous pouvons montrer que pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$ , si x est plus petit que tous les réels strictement positifs, alors x est inférieur ou égal à 0.

### Démonstration.

On va prouver la contraposée :

 $(x > 0 \Rightarrow \text{il existe un réel strictement positif plus petit que } x)$ 

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On suppose x strictement positif.

 $\frac{x}{2} > 0$  et  $\frac{x}{2} < x$ . Donc il existe un réel strictement positif plus petit que x.

#### Olivier Nicole

# Le raisonnement par contraposition

Déduction

Prouver (wa V wa

Prouver  $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ 

# Le raisonnement par

Le raisonnement pal'absurde

Preuve par c

Avec des quantificateurs

### Corollaire 1 - Modus tollens

Si  $(\varphi_1\Rightarrow\varphi_2)$  et  $(\neg\varphi_2)$  sont des tautologies, alors  $(\neg\varphi_1)$  est une tautologie.

### Démonstration.

On utilise la contraposée de  $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$  qui est équivalent à  $((\neg \varphi_2) \Rightarrow (\neg \varphi_1))$  or, comme on a  $(\neg \varphi_2)$ , on applique le modus ponens pour déduire  $(\neg \varphi_1)$ .

### Olivier Nicole

Déduction

Prouver  $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ 

Prouver  $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ 

Le raisonnement pa

Le raisonnement par l'absurde

Preuve par cas

Avec des quantificate

Déduction

Prouver  $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ 

Prouver  $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ 

Le raisonnement par contraposition

Le raisonnement par l'absurde

Preuve par cas

Avec des quantificateurs

Olivier Nicole

# Le raisonnement par l'absurde

Déduction

Prouver (101 V 102

Prouver  $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ 

Le raisonnement pa

#### Le raisonnement par l'absurde

Preuve par ca

Avec des quantificateurs

## **Théorème 4** – Raisonnement par l'absurde

La formule  $(((\neg \varphi) \Rightarrow \bot) \Rightarrow \varphi)$  est une tautologie.

En français : si  $(\neg \varphi)$  mène à une contradiction, alors  $(\neg \varphi)$  est faux (donc  $\varphi$  est vrai).

16 septembre 2019

Olivier Nicole

# Le raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde

## Exemple 4

Montrer que  $\sqrt{2}$  n'est pas un nombre rationnel.

### Démonstration.

Par l'absurde, on prouve  $\varphi := \sqrt{2} \notin \mathbb{O}$ .

On va prouver que  $(\neg \varphi)$  (c'est à dire  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ) implique une contradiction, c'est à dire  $(\varphi \Rightarrow \bot)$ . Or on sait que  $(((\neg \varphi) \Rightarrow \bot) \Rightarrow \varphi)$ , donc  $\varphi$  (modus ponens).

### Olivier Nicole

### duction

Prouver  $(arphi_{f 1}eearphi_{f 2}$ 

e raisonnement pa

contraposition

Preuve par cas

### recive par ca

Avec des quantificates

Déduction

Prouver  $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ 

Prouver  $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ 

Le raisonnement par contraposition

Le raisonnement par l'absurde

Preuve par cas

Avec des quantificateurs

Olivier Nicole

Preuve par cas

Preuve par cas

## Théorème 5

La formule  $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \Rightarrow \varphi) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi)$  est une tautologie.

### Olivier Nicole

### Preuve par cas

# Preuve par cas

## Exemple 5

Démontrer que pour tout entier naturel n, l'entier  $n \cdot (n+1)$  est divisible par

Raisonnement

## Démonstration.

On veut prouver  $\varphi := n \cdot (n+1)$  est pair.

### Olivier Nicole

#### . . . . . .

Prouver (104 V 105

Prouver (Ø1 A Ø2)

Le raisonnement p

Le raisonnement par

### Preuve par cas

Avec des quantificateurs

# Preuve par cas

## Exemple 6

Démontrer que pour tout entier naturel n, l'entier  $n \cdot (n+1)$  est divisible par 2.

### Démonstration.

On veut prouver  $\varphi := n \cdot (n+1)$  est pair.

Les deux cas :  $\varphi_1 := n$  est pair ;  $\varphi_2 := n$  est impair

- $\varphi_1$  On suppose n pair, donc n est divisible par 2,  $n \cdot (n+1)$  est divisible par 2.
- $\varphi_2$  On suppose n impair, donc n+1 est divisible par 2,  $n \cdot (n+1)$  est divisible par 2.

De plus,  $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$  est vrai, donc  $\varphi$  est vrai.

# Raisonnement Olivier Nicole

Avec des quantificateurs

Avec des quantificateurs

Olivier Nicole (DI ENS) Raisonnement

16 septembre 2019

Olivier Nicole

# Avec des quantificateurs

Déduction

Prouver (101 V 10

Prouver  $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ 

\_e raisonnement pa

Le raisonnement par l'absurde

Drauwa par car

Avec des quantificateurs

### **Axiome 1** – Généralisation ou abstraction

Si nous pouvons prouver la propriété P(t) pour  $t \in E$  arbitraire (ie sans utiliser de propriété spécifique de t), alors nous pouvons en déduire la propriété  $\forall x \in E, P(x)$ .

Olivier Nicole

# Avec des quantificateurs

Déduction

Prouver ( ( ) V ()

Prouver  $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ 

Le raisonnement pa

Le raisonnement par l'absurde

Preuve par car

Avec des quantificateurs

### Axiome 2 - Concrétisation

Si nous pouvons prouver une propriété  $\forall x \in E, P(x)$ , alors nous pouvons prouver P(x) pour n'importe quel élément  $x \in E$  de l'ensemble E.

Olivier Nicole

# Avec des quantificateurs

Déduction

Prouver ( ( ) V ()

Prouver  $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ 

Le raisonnement pa

Le raisonnement pa l'absurde

Preuve par car

Avec des quantificateurs

### Axiome 3 - Témoin

Si nous pouvons prouver la propriété P(e) pour un élément  $e \in E$  en particulier, alors nous pouvons en déduire la propriété  $\exists x \in E : P(x)$ .

### Olivier Nicole

Avec des quantificateurs

# Avec des quantificateurs

# Exemple 7

Montrons que le double de tout réel positif ou nul, est un réel positif ou nul.

26 / 27

16 septembre 2019 Raisonnement

### Olivier Nicole

Déduction

Prouver (104 V 105

Prouver  $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ 

Le raisonnement pa

Le raisonnement pa

Preuve par car

Avec des quantificateurs

# Avec des quantificateurs

## Exemple 8

Montrons que le double de tout réel positif ou nul, est un réel positif ou nul. Soit  $x \in \mathbb{R}^+$ , nous avons :

$$0 \leqslant x$$
 et

$$0 \leqslant x$$

D'où:

$$0 + 0 \le x + x$$

Puis:

$$0 \le 2 \cdot x$$

Ainsi,  $\forall x \in \mathbb{R}^+, 2 \cdot x \in \mathbb{R}^+$ .

Olivier Nicole

# Avec des quantificateurs

Déduction

Prouver (101 V 10

Prouver  $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ 

Le raisonnement pa

Le raisonnement par l'absurde

Preuve par cas

Avec des quantificateurs

Un exemple de preuve erronée :

## Exemple 9

Montrons que le prédécesseur de tout entier naturel est un entier naturel. Le prédecesseur de l'entier naturel 1 est 0. Or 0 est un entier naturel donc  $\forall n \in \mathbb{N}, (n-1) \in \mathbb{N}$ . Ce raisonnement est bien entendu erroné. Nous avons en réalité montré que :

$$\exists n \in \mathbb{N} : (n-1) \in \mathbb{N}$$