Ensembles et relations

Olivier Nicole[*]
DI ENS

Septembre 2019

Table des matières

1 Ensembles et éléments

Définition 1 – Ensemble

Un ensemble est une collection non ordonnée et sans répétition d'objets.
Si a, b, c sont des éléments, nous notons $\{a, b, c\}$ l'ensemble formé des éléments a, b, et c.

Définition 2 – Cardinal

Le cardinal d'un ensemble est le nombre d'élément qu'il contient. Le cardinal d'un ensemble est noté $\mathrm{card}(A)$ ou $|A|$.

Définition 3 – Appartenance

Nous notons :

$$x \in X$$

le fait qu'un objet x soit un élément de l'ensemble X.

[*] Ce document est repris du cours de Marc Chevalier, avec son aimable autorisation. `https://teaching.marc-chevalier.com`

2 Axiomes

2.1 Extensionnalité

Axiome 1 – Extensionnalité

Nous dirons que deux ensembles X et Y sont égaux si et seulement si les deux assertions suivantes sont satisfaites :

1. tout élément de l'ensemble X est un élément de l'ensemble Y ;
2. tout élément de l'ensemble Y est un élément de l'ensemble X.

2.2 Axiomes constructifs

Dans cette section, nous considérons deux ensembles A et B.

2.2.1 Paire

Axiome 2 – Paire

Étant donné deux éléments a et b, il existe un ensemble $\{a, b\}$.

2.2.2 Réunion

Notation 1 – Réunion

La réunion de A et B est notée $A \cup B$.

2.2.3 L'ensemble des parties

Définition 4 – Partie

Si X est une collection d'objets tous éléments de A, nous disons que X est une partie (ou un sous-ensemble) de A, ce que nous notons $X \subseteq A$.

Proposition 1

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$$

Axiome 3 – Axiome de l'ensemble des parties

La collection de toutes les parties de l'ensemble A est un ensemble.

Notation 2 – Ensemble des parties

L'ensemble de toutes les parties de l'ensemble A est noté $\mathcal{P}(A)$.

2.2.4 Schéma d'axiomes de compréhension

Axiome 4 – Compréhension

Toute collection d'objets tous éléments de A est un ensemble.

Proposition 2

Si A est un ensemble et P un prédicat portant sur les éléments de A. Alors la partie de A tel que P est vrai, est un ensemble. Nous la notons :

$$\{x \in A \mid P(x)\}$$

2.2.4.1 Intersection

Définition 5 – Intersection

Nous appelons intersection de A et de B la collection des objets qui sont à la fois éléments de l'ensemble A et éléments de l'ensemble B, et la notons $A \cap B$.

2.2.4.2 Différence

Notation 3 – Différence

Nous notons $A \setminus B$ l'ensemble des éléments de l'ensemble A qui ne sont pas des éléments de l'ensemble B.

Définition 6 – Complémentaire

Soit E un ensemble et F une partie de E. On appelle le complémentaire de F dans E l'ensemble $E \setminus F$.
Le complémentaire de F dans E est noté $\complement_E F$. Si E est clair d'après le contexte, on peut simplement parler du complémentaire de F et le noter $\complement F$.

2.2.4.3 Différence symétrique

Proposition 3

La collection des objets qui sont élément de l'ensemble A ou élément de l'ensemble B, mais pas les deux, est un ensemble.

Définition 7 – Différence symétrique

Nous notons $A\Delta B$ l'ensemble des objets qui sont des éléments de l'ensemble A ou des éléments de l'ensemble B, mais pas des deux, c'est à dire

$$A\Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Proposition 4

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

2.2.5 L'infini

Axiome 5

Il existe un ensemble infini.

3 Ensemble particuliers

3.1 Couple et produit cartésien

Définition 8

Soit A et B deux ensembles. On appelle produit cartésien de A et B l'ensemble noté $A \times B$ défini par

$$A \times B = \{z \mid \exists a \in A : \exists b \in B : z = (a, b)\}$$

Notation 4

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$$

Notation 5

$$A^2 = A \times A$$
$$A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$$

3.2 Ensembles numériques

Notation 6

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$.

Notation 7

Étant donné un ensemble numérique A, on note $A^* := A \setminus \{0\}$.

Notation 8

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs $\{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$.

Notation 9

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels, c'est à dire l'ensemble des nombres qu'on peut écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

Notation 10

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels.

Notation 11

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des complexes.

3.3 Notations usuelles

Notation 12

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des entiers plus grands que a et plus petits que b.

Notation 13

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $[a, b]$ l'ensemble des réels entre a et b. On appelle ces ensemble des intervalles (ou intervalles fermés).

Proposition 5

Si $a \neq b$, $[a, b]$ a une infinité d'éléments.

Notation 14

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

— $]a, b] = [a, b] \setminus \{a\}$ (intervalle (semi-)ouvert à gauche)
— $[a, b[= [a, b] \setminus \{b\}$ (intervalle (semi-)ouvert à droite)
— $]a, b[= [a, b] \setminus \{a, b\}$ (intervalle ouvert)

Notation 15

Pour tout $a \in \mathbb{R}$

— $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$
— $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
— $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$
— $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
— $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$