TD : Théorie des ensembles

inspiré de Marc Chevalier

Exercice 1:

Soient A et B deux ensembles. On a défini la différence symétrique de A et B comme :

$$A\Delta B \overset{\text{def}}{=} (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Montrer qu'une expression alternative est :

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Exercice 2:

Soient A et B deux ensembles tels que $A \subseteq B$.

(a) Quels sont les ensembles X tels que $A \cup X = B \cap X$?

(b) Quels sont les ensembles X tels que $A \cup X = B \setminus X$?

Exercice 3:

Supposons que H l'ensemble de tous les ensembles existe. Nous définissons l'ensemble F suivant :

$$F := \{E \in H \mid E \notin E\}$$

(a) Montrer que $F \in F \Rightarrow F \notin F$.

(b) Montrer que $F \notin F \Rightarrow F \in F$.

(c) Qu'en concluez-vous ?

Exercice 4:

Soient E un ensemble et $P(x \in E)$ un prédicat portant sur un élément $x \in E$ de l'ensemble E. Parmi les assertions suivantes, laquelle/lesquelles est/sont toujours vraie/-vraies :

(a) $[\forall x \in E, (P(x) \wedge P(x))] \Rightarrow [\forall x \in E, (P(x) \vee P(x))]$

(b) $[\exists x \in E : P(x)] \Rightarrow [\exists x \in E : P(x) \wedge P(x)]$.