Devoir 4 MTH 6415

Olivier Sirois 1626107, Corey Ducharme

2018-01-01

4.19 (3.19 ed. 4)

a)

Comme montrer dans l'énoncé de b). Une décision optimale est prise si on trouve un stationnement lorsqu'il nous reste seulement $k*$ essaies restants. Sachant cela, on peut traduire cette information sous forme:

$$minE\{J_k(x_k)\} = \begin{cases} p * k + (1-p) * E\{J_{k-1}(x_{k-1})\}, & \text{si } E > k* \\ E\{J_{k-1}(x_{k-1})\}, & \text{si } E < k* \end{cases}$$

qui peut être représenté comme étant:

$$minE\{J_k(x_k)\} = \begin{cases} p * k + (1-p) * E\{J_{k-1}(x_{k-1})\}, & \text{si } E > k* \\ p * E\{J_{k-1}(x_{k-1})\} + (1-p)E\{J_{k-1}(x_{k-1})\}, & \text{si } E < k* \end{cases}$$

Étant donnée que $p+(1-p) = 1$. En agrégeant ces deux cas, il est correct de dire:

$$minE\{J_k(x_k)\} = p * min(k, E\{J_{k-1}(x_{k-1}\}) + (1-p) * E\{J_{k-1}(x_{k-1})\}$$

en définissant $minE\{J_k(x_k)\} = F_k$,comme mentionné dans l'énoncé, on revient à l'équation originale, soit:

$$F_k = p * min(k, F_{k-1}) + (1-p) * F_{k-1}, q = (1-p).$$

b)

Pour cette question, on nous demande de confirmer l'optimalité de la politique expliqué dans l'énoncé. Comme nous l'avons vu dans la question a), la fonction J utilise le minimum entre k et F_k. Si on réussi à prouver qu'il y a seulement un point d'intersection entre k et F_k, on est capable d'un déduire que la politique aura la forme décrite dans l'énoncé.

en utilisant les définitions de la question précédent et en commençant avec $F_0 = C$, on peut dire:

$$\begin{aligned} F_1(1) &= p * min(1, C) + q * C \\ F_2(2) = p * min(2, C) + q * F_1(1) &= p * min(2, C) + q * p * min(1, C) + q^2 * C \\ F_3(3) = p * min(3, C) + q * F_2(2) = p * min(3, C) + q * p * min(2, C) + q^2 * p * min(1, C) &+ q^3 * C \end{aligned}$$

de forme plus générale :

$$F_k(k) = \begin{cases} q^kC + \sum\limits_{i=1}^{k} iq^{k-i}p, & \text{si } k < C \\ q^kC + \sum\limits_{i=1}^{C} iq^{k-i}p + \sum\limits_{i=C}^{k} Cq^{k-i}p, & \text{si } k > C \end{cases}$$

on peut alors traduire cette forme en différence:

$$F_k - F_{k-1} = q^kC - q^{k-1}C + kp$$

alors:

$$\begin{aligned} F_0 &= C \\ F_1 &= F_0 + q^1C - q^0C + p \\ F_2 &= F_1 + q^2C - q^1C + 2p... \end{aligned}$$

Avec un peu de manipulation, on peut voir que pour tout i satisfaisant à l'équation de l'énoncé, $F_i - F_{i-1} < 1$. cela nous assure donc que nous aura seulement une intersection avec k qui correspondera au seuil de la politique. Parallèlement, la valeur d'i ou l'équation dans l'énoncé ne tiendra plus ce qui vérifie l'énoncé.

4.16 (3.16 de l'ed. 4)

Pour ce problème, on peut se fier à l'example 3.4.1 (ed. 4) du livre de Bertsekas pour commencer. Évidemment, il y a certaines différences. On peut commencer par définir l'état de notre problème:

$x_{k+1} = max(x_k, w_k)$

Étant donné que nous conservons toutes les offres, On peut dire que l'état serait la meilleur offre que nous avons eu jusqu'à présent. ou x_k est l'offre et que w_k est la prochaine offre que nous recevront. Si l'offre recu est meilleur, elle prendra la place de x_k, sinon x_k restera.

On peut charactérisé les équations de programmation dynamique comme étant:

$V_N(x_N) = x_N$

et:

$V_k(x_k) = max[x_k, E[V_{k+1}(max(x_k, E[\omega_k]))] - c * (N - k)]$

Étant donnée qu'on conserve toutes les offres déjà eu auparavant, on peut assumer que l'ensemble T est absorbant. l'offre effective ne peut pas diminuer, alors selon le 'one step lookahed stopping rule', il s'ensuit que la première offre qui est égale ou excède $\bar{\alpha}$ est optimale. Il est ensuite logique d'assumer que:

$\alpha_k = E\{max(x_{k+1}, E[\omega_{k+1}])\} - c * (N - k)$

ou la limite asymptotique de α_k qui peut être défini comme étant:

$\bar{\alpha} = P(\bar{\alpha})\bar{\alpha} + \int\limits_{\bar{\alpha}}^{\infty} \omega dP(\omega)$

1.14 (1.21 de l'ed. 4)

Pour ce numéro on nous demande de vérifier l'optimalité des politiques décrites en a), b) et c). Nous allons premièrement commencer par généraliser le critère de sélection de u pour chaque étape.

étant donné que pour la prise de décision nous avons pas encore l'information pour chacune des valeurs w étant donné sa stochasticité, nous allons généraliser $w_k = \bar{w}$, $\forall k$

$$J_N(x_N) = x_N \rightarrow \text{aucune décision}$$
$$J_{N-1}(x_{N-1}) = (1 - u_{N-1}) * x_{N-1} + J_N(x_{N-1} + x_{N-1} * \bar{w} * u_{N-1}) =$$
$$J_{N-1}(x_{N-1}) = x_{N-1}(2 + u_{N-1}(\bar{w} - 1))$$
$$J_{N-2}(x_{N-2}) = (1 - u_{N-2}) * x_{N-2} + (x_{N-2} + x_{N-2} * u_{N-2} * \bar{w})(2 + u_{N-1}(\bar{w} - 1))...$$

Comme vous pouvez le voir, la fonction J commence déjà à etre très grande. Par contre, nous pouvons analyser la prise de chaque décision à partir de J_N. Évidemment, aucune décision ne peut être prise à J_N étant donné que c'est l'état final. Par contre, lorsqu'on remonte à J_{N-1}, on peut voir que sa dérivé donne tout simplement $(\bar{w} - 1)$.

a)

Sachant que $\bar{w} > 1$, nous savons que la première décision est $u_{N-1} = 1$ vu que $(\bar{w} - 1)$ est strictement positif. Pour maximiser le terme nous allons donc utiliser u_{N-1} jusqu'à sa limite positive qui est de 1.

Évidemment, on ne peut pas confirmer que toute les étapes vont se comporter de cette manière. Cependant, nous pouvons fixer la valeur de u_{N-1} à 1 et le transmettre ensuite dans le terme J_{N-2}. Cela nous donnera donc:

$$\begin{aligned} J_{N-1} &= x_{N-1}(2+(1)*(\bar{w}-1)) = x_{N-1}(1+\bar{w}) \\ J_{N-2} &= (1-u_{N-2})*x_{N-2} + (x_{N-2} + x_{N-2}*u_{N-2}*\bar{w})(1+\bar{w}) = ... \\ J_{N-2} &= x_{N-2}(2+\bar{w}+u_{N-2}(\bar{w}+\bar{w}^2-1)) \end{aligned}$$

Encore une fois, le terme $(\bar{w}+\bar{w}^2-1)$ est strictement positif étant donné que $\bar{w}>1$. En continuant jusqu'à k, on peut ainsi voir que le terme à l'intérieur du u donne:

$$J_{N-k} = x_{N-k}(....+\underline{u_{N-k}(\bar{w}*(\bar{w}+1)^{k-1}-1)})$$

qui est strictement croissant dans le cas de $\bar{w}>1$, ce qui confirme donc que la décision sera $u_k = 1, \forall k$

b)

Dans le cas de $0<\bar{w}<\frac{1}{N}$, on peut voir dès le départ que la décision pour J_{N-1} sera 0. De la, nous pouvons repartir de la pour trouver J_{N-2}. Donc:

$$\begin{aligned} J_{N-1} &= x_N(2) \\ J_{N-2} &= x_{N-2}(3+u_{N-2}(2\bar{w}-1)) \\ J_{N-3} &= x_{N-3}(4+u_{N-3}(3\bar{w}-1))... \\ J_{N-k} &= x_{N-k}(k+1+u_{N-k}(k\bar{w}-1)) \\ &\& \\ J_{N-N} = J_0 &= x_0(N+1+u_0(N\bar{w}-1)) \end{aligned}$$

On peut voir que tant que $(k\bar{w}-1)<0$, nous allons prendre comme décision $u_k=0$ étant donné que le maximum de J se trouve au point ou u est minimale, soit 0 (sa limite inférieur). Évidemment, on peut voir aussi qu'avec $\bar{w}=\frac{1}{N}$, nous avons au point J_0: $(\frac{N}{N}-1)=0$, ce qui démontre qu'à la limite supérieur de notre plage pour $\bar{w}$ nous avons une décision indécise, tandis qu'avec n'importe quel valeur de $\bar{w}<\frac{1}{N}$, nous aurons $(k\bar{w}-1)<0, \forall k$.

c)

Évidemment, pour cette question nous commençons avec une valeur de $\bar{w} \leq 1$, nous pouvons déjà voir que la valeur de $(\bar{w} - 1)$ sera inférieur ou égale à 0, ce qui implique que notre première décision sera presque assurément $u_{N-1} = 0$. Évidemment, on peut réutiliser notre formule développer en b) pour trouver la valeur de k' qui rendra $(k'\bar{w} - 1) \geq 0 \rightarrow \bar{w} \geq \frac{1}{k'}$.

Par contre, le système est discrèt. Alors nous ne pouvons pas simplement utiliser cette formule directement. Par contre, en discrétisant la formule, nous allons nécessairement avoir une valeur $\bar{k}$ dans lequel notre seuil se trouvera entre $\bar{k}$ et $\bar{k} + 1$, ce qui nous ramène donc à la forme :

$\frac{1}{\bar{k}+1} < \bar{w} \leq \frac{1}{\bar{k}}$

alors, pour les valeurs ou $0 \leq k \leq \bar{k}$, nous aurons $u_{N-k} = 0$, et pour les valeurs ou $N \geq k \geq \bar{k} + 1$, nous aurons $u_{N-k} = 1$, ce qui correspond à l'énoncé.