Devoir 4 MTH 6415

Olivier Sirois 1626107, Corey Ducharme

2018-01-01

4.19 (3.19 ed. 4)

a)

Comme montrer dans l'énoncé de b). Une décision optimale est prise si on trouve un stationnement lorsqu'il nous reste seulement $k*$ essaies restants. Sachant cela, on peut traduire cette information sous forme:

$$minE\{J_k(x_k)\} = \begin{cases} p * k + (1-p) * E\{J_{k-1}(x_{k-1})\}, & \text{si } E > k* \\ E\{J_{k-1}(x_{k-1})\}, & \text{si } E < k* \end{cases}$$

qui peut être représenté comme étant:

$$minE\{J_k(x_k)\} = \begin{cases} p * k + (1-p) * E\{J_{k-1}(x_{k-1})\}, & \text{si } E > k* \\ p * E\{J_{k-1}(x_{k-1})\} + (1-p)E\{J_{k-1}(x_{k-1})\}, & \text{si } E < k* \end{cases}$$

Étant donnée que $p+(1-p) = 1$. En agrégeant ces deux cas, il est correct de dire:

$$minE\{J_k(x_k)\} = p * min(k, E\{J_{k-1}(x_{k-1}\}) + (1-p) * E\{J_{k-1}(x_{k-1})\}$$

en définissant $minE\{J_k(x_k)\} = F_k$,comme mentionné dans l'énoncé, on revient à l'équation originale, soit:

$$F_k = p * min(k, F_{k-1}) + (1-p) * F_{k-1}, q = (1-p).$$

b)

Pour cette question, on nous demande de confirmer l'optimalité de la politique expliqué dans l'énoncé. Comme nous l'avons vu dans la question a), la fonction J utilise le minimum entre k et F_k. Si on réussi à prouver qu'il y a seulement un point d'intersection entre k et F_k, on est capable d'un déduire que la politique aura la forme décrite dans l'énoncé.

en utilisant les définitions de la question précédent et en commençant avec $F_0 = C$, on peut dire:

$$F_1(1) = p * min(1, C) + q * C$$
$$F_2(2) = p * min(2, C) + q * F_1(1) = p * min(2, C) + q * p * min(1, C) + q^2 * C$$
$$F_3(3) = p * min(3, C) + q * F_2(2) = p * min(3, C) + q * p * min(2, C) + q^2 * p * min(1, C) + q^3 * C$$

de forme plus générale :

$$F_k(k) = \begin{cases} q^k C + \sum_{i=1}^{k} i q^{k-i} p, & \text{si } k < C \\ q^k C + \sum_{i=1}^{C} i q^{k-i} p + \sum_{i=C}^{k} C q^{k-i} p, & \text{si } k > C \end{cases}$$

on peut alors traduire cette forme en différence:

$$F_k - F_{k-1} = q^k C - q^{k-1} C + kp$$

alors:

$$\begin{aligned} F_0 &= C \\ F_1 &= F_0 + q^1 C - q^0 C + p \\ F_2 &= F_1 + q^2 C - q^1 C + 2p... \\ F_i &= F_{i-1} + q^{i-1} C(q-1) + ip \end{aligned}$$

En plaçant notre équivalence dans la dernière équation, on peut voir que si un i satisfait à $q^{i-1} < (pC+q)^{-1}$, la partie de droite $(q^{i-1}C(q-1)+ip)$ est strictement décroissant dans le sens i (k). Notre seuil de décision est la valeur du cout de stationnement (k) qui est évidemment strictement croissant dans le sens de k. ce qui nous guarantit un seul point d'intersection qui correspond au seul seuil de décision sur lequel on va commencer à se stationner.

4.16 (3.16 de l'ed. 4)

Pour ce problème, on peut se fier à l'example 3.4.1 (ed. 4) du livre de Bertsekas pour commencer. Évidemment, il y a certaines différences. On peut commencer par définir l'état de notre problème:

$x_{k+1} = max(x_k, w_k)$

Étant donné que nous conservons toutes les offres, On peut dire que l'état serait la meilleur offre que nous avons eu jusqu'à présent. ou x_k est l'offre et que w_k est la prochaine offre que nous recevront. Si l'offre recu est meilleur, elle prendra la place de x_k, sinon x_k restera.

On peut charactérisé les équations de programmation dynamique comme étant:

$V_N(x_N) = x_N$

et:

$$V_k(x_k) = max[x_k, E[V_{k+1}(max(x_k, E[\omega_k])] - c * (N-k)]$$

Étant donnée qu'on conserve toutes les offres déjà eu auparavant, on peut assumer que l'ensemble T est absorbant. l'offre effective ne peut pas diminuer, alors selon le 'one step lookahed stopping rule', il s'ensuit que la première offre qui est égale ou excède $\bar{\alpha}$ est optimale. Il est ensuite logique d'assumer que:

$$\alpha_k = E\{max(x_{k+1}, E[\omega_{k+1}])\} - c * (N-k)$$

ou la limite asymptotique de α_k qui peut être défini comme étant:

$$\bar{\alpha} = P(\bar{\alpha})\bar{\alpha} + \int_{\bar{\alpha}}^{\infty} \omega dP(\omega)$$