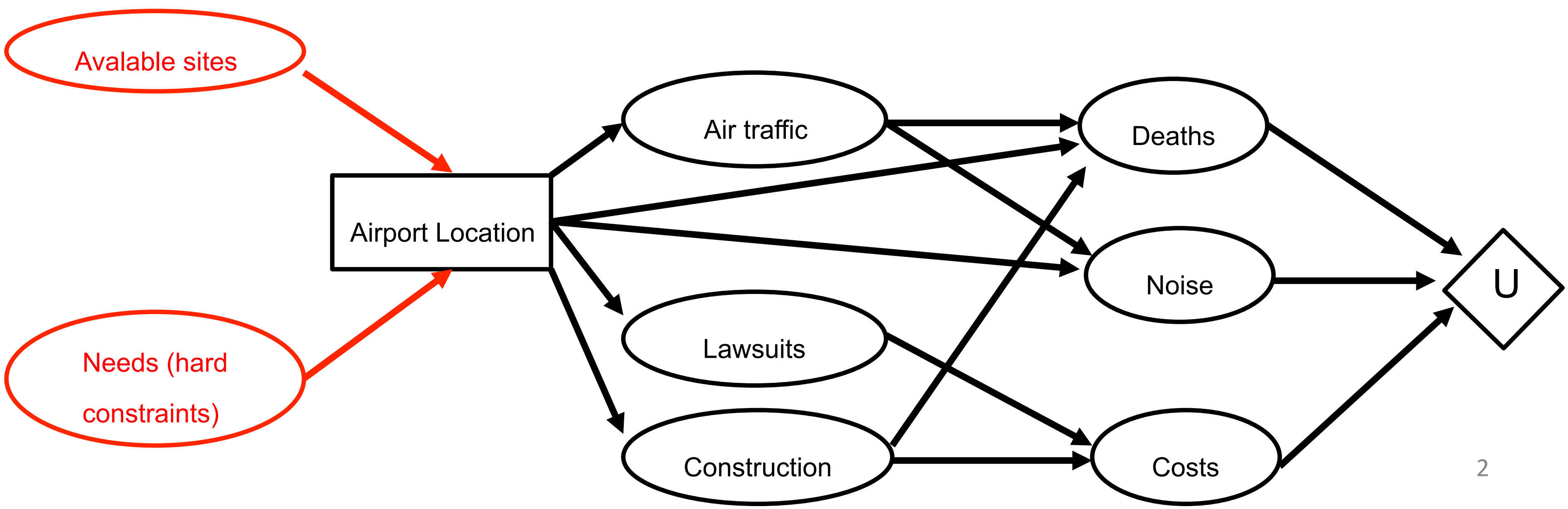
Reinforcement Learning (RL) and Deep RL

Single Decisions & Decision networks

- We can extend Bayesian networks to include *action nodes* (rectangles) and *utility (or reward) nodes* (diamonds)
- Example: Starting with available sites and needs, identify actions consisting of decisions regarding where to construct an airport.
- We can model the distribution over the air traffic, potential lawsuits and construction; then the number of deaths, the amount of noise and costs, then map these to a utility



More complex decisions

- We can use the idea of maximizing the expected utility or expected value of outcomes to select which action to take
- However, more complex problems require many action decisions to be taken over time
- *Reinforcement learning* deals with the idea of determining how an 'agent' should take actions so as to maximize rewards over time
- A modeling framework has been proposed to describe this setup known as a *Markov Decision Process or MDPs*

Reinforcement Learning

- In statistical learning we *maximize the likelihood* of data or *minimize a loss* function
- In reinforcement learning we add to our framework the idea of being able to obtain different *rewards* for being in different *states*
- We wish to *maximize the expected value of rewards*, using a discount factor for future rewards
- We can create a model of the future including the probability of arriving in different states as a result of actions we may take
- The mapping from our current state to the action we will take is known as the *policy*

A Markov Decision Process (MDP) as a decision network

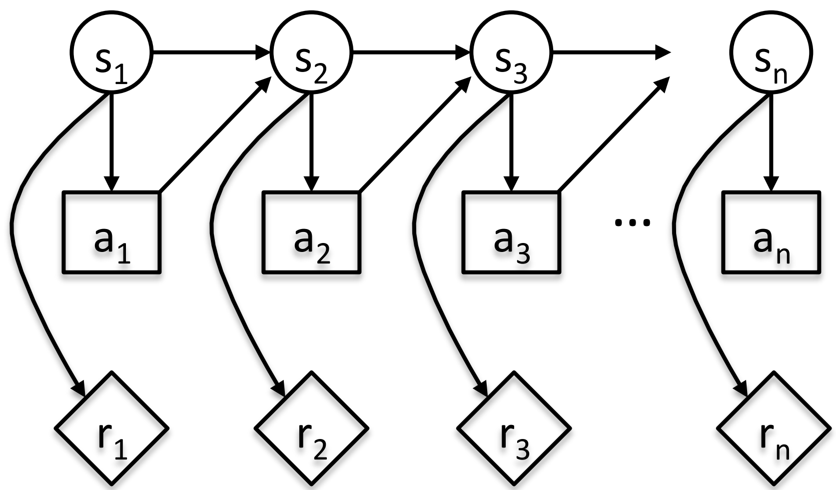
- We can use MDPs to visualize RL problem setups

We have:

states, s_t
actions, a_t

and

rewards, r_t



- Goal: Given the parameters
  $R(s)$, $P(s_1)=s_o$, $P(s_{i+1}|s_i, a_i)=T(s',s,a)$, γ
- Calculate the policy $a=\pi(s)$ that maximizes

$$E\left[\sum_{t=1}^{\infty}\gamma^t R(s_t) \mid \pi(s)\right] = V_\pi(s) = R(s) + \gamma \sum_{s'} P(s' \mid s, \pi(s)) V_\pi(s')$$

The infinite sum of discounted expected future rewards in recursive form

$$E\left[\sum_{t=1}^{\infty}\gamma^t R(s_t) \mid \pi(s)\right]$$

$$= \sum_{s_1}\sum_{s_2}\cdots\sum_{s_\infty} P(s_1, s_2, \ldots, s_\infty \mid \pi(s))\left[\sum_{t=1}^{\infty}\gamma^t R(s_t)\right]$$

$$= R(s_1) + \gamma\sum_{s_2} P(s_2 \mid s_1, \pi(s_1))R(s_2) + \gamma^2\sum_{s_2} P(s_2 \mid s_1, \pi(s_1))\sum_{s_3} P(s_3 \mid s_2, \pi(s_2))R(s_3) + \gamma^3\cdots$$

$$= R(s) + \gamma\sum_{s'} P(s' \mid s, \pi(s))\left[R(s') + \gamma\sum_{s''} P(s'' \mid s', \pi(s'))V_\pi(s'')\right]$$

$$= V_\pi(s)$$

$$V_\pi(s) = R(s) + \gamma\sum_{s'} P(s' \mid s, \pi(s))V_\pi(s')$$

- This is a so called Bellman equation: a recursion for expected rewards
- We have the expected reward of being in state s and following a policy π(s)

Choosing among different policies

- An optimal policy maximizes the expected value:

$$E\left[\sum_{t=1}^{\infty}\gamma^{t}R(s_{t}) \mid \pi(s)\right]$$

- Let the value function V(s) represent the value of being in a given state
- Given a V(s), the one step greedy policy is

$$\pi(s) = \arg\max_{a}\left[\sum_{s'}P(s' \mid a,s)V(s')\right]$$

- **Key idea**: if V(s) is the value function of an optimal policy, then the (one step greedy) equation above will give us that optimal policy

Value Iteration

- Given a model for P (s'| s, a) and R (s) one can compute an optimal policy with Value Iteration and greedy policy recovery
- **Value Iteration**: an iterative procedure to calculate the value function of an optimal policy, without the need to have an optimal policy,
- **Greedy policy recovery**: gives us $\pi_g(s)$ as a function of a given value function v(s)
  - When v = v * is the value function of a optimal policy, then π * is also optimal

(Classical) Value Iteration

- The utility or value of a state is the immediate reward associated with that state plus the discounted expected future value of the next state (given the agent choses the optimal action)

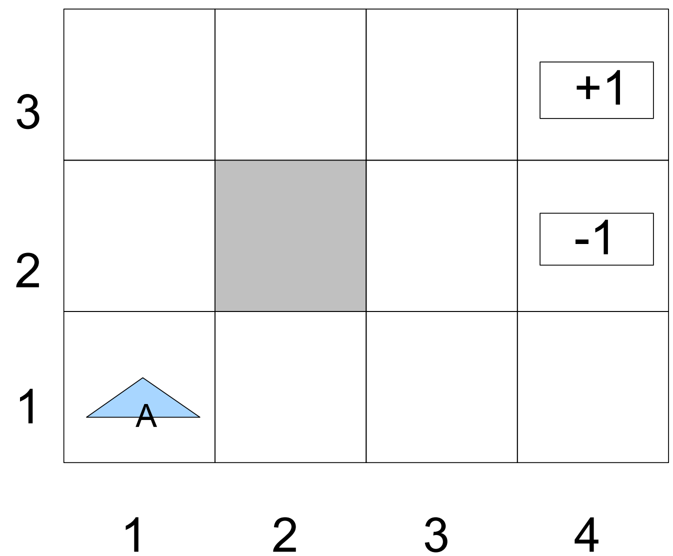
$$\mathbf{v}_{i+1}(s) = \max_a \left[\mathbf{r}(s) + \gamma \sum_{s'} \mathbf{v}_i(s') P(s' \mid s, a) \right] \rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{r} + \gamma \mathbf{P}^{a^*} \mathbf{v}$$

- This is the basis of the value iteration algorithm
- Iterations of value iteration are guaranteed to converge to the value function of an optimal policy, but (key) *the algorithm does not require the use of an optimal policy during iterations*

Algorithme – itération de la valeur

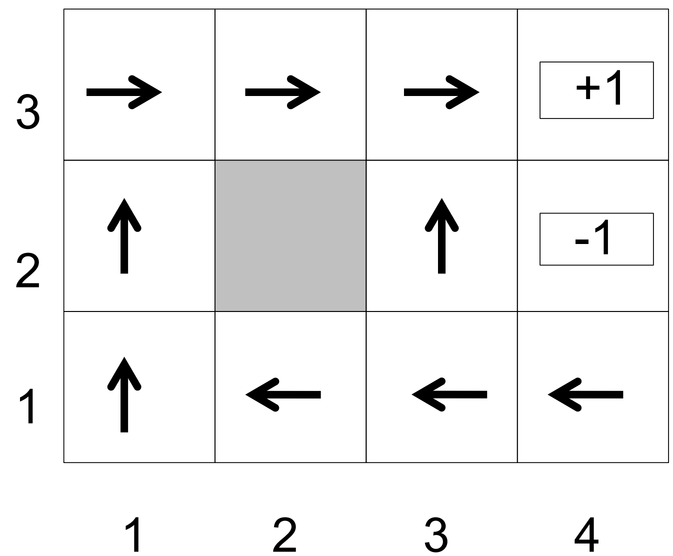
fonction ITERATION-VALEUR(*pdm*,ε) **retourne** fonction d'utilité
entrées: *pdm,* un processus de décision markovien
ε, erreur maximale permise
V' est une fonction d'utilité initiale telle que V'(x) = 0
S est l'ensemble des états de *pdm*
répéter:
$V \leftarrow V'$
$\delta \leftarrow 0$
pour chaque $s \in S$ faire:
$V'[s] \leftarrow R[s] + \gamma \max_a \sum_{s'} T(s,a,s')\, V[s']$
si $|V'[s] - V[s]| > \delta$ **alors** $\delta \leftarrow |V'[s] - V[s]|$
jusqu'à $\delta < \varepsilon(1-\gamma)/\gamma$
retourner V

Exemple



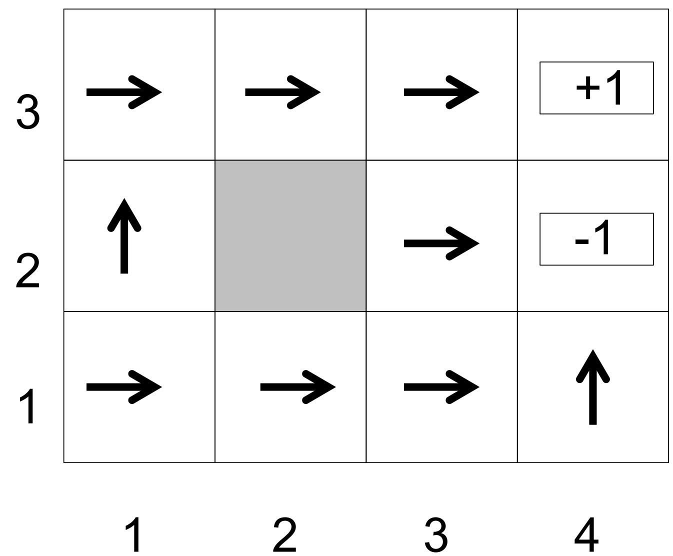
Récompense de -0,04 pour chaque case non finale
Probabilité d'avancer à la case suivante: 0,8
Probabilité de se déplacer sur une case latérale: 0,1

Exemple – politique optimale



Récompense de -0,04 pour chaque case non finale
Probabilité d'avancer à la case suivante: 0,8
Probabilité de se déplacer sur une case latérale: 0,1

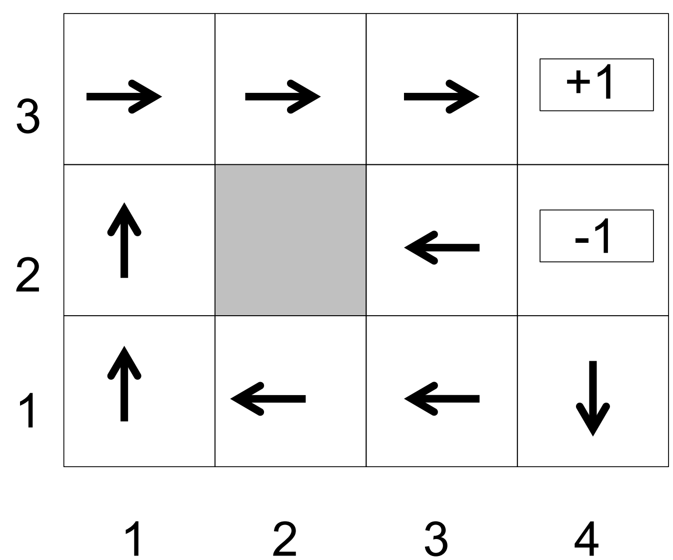
Exemple – politique optimale



L'agent se précipite le plus vite possible vers l'état final le plus proche, même s'il est le moins intéressant

Récompense inférieure à -1,6284 pour chaque case non finale
Probabilité d'avancer à la case suivante: 0,8
Probabilité de se déplacer sur une case latérale: 0,1

Exemple – politique optimale



L'agent ne prend aucun risque

Récompense entre -0,0221 et 0 pour chaque case non finale
Probabilité d'avancer à la case suivante: 0,8
Probabilité de se déplacer sur une case latérale: 0,1

Itération de la valeur -simulation

3	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0		0.0	0.0
1	0.0	0.0	0.0	0.0
	1	2	3	4

$\gamma = 1$

Itération de la valeur -simulation

	1	2	3	4
3	-0.04	-0.04	-0.04	1
2	-0.04		-0.04	-1
1	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04

meilleure action: *droite*

U = -0,04 + 0,8*1 -

-0,1*0,04 – 0,1*0,04

= 0,752

meilleure action: *gauche*

U = -0,04 – 0,8*0,04

-0,1*0,04 – 0,1*0,04

= -0,08

$\gamma = 1$

Itération de la valeur -simulation

3	-0.08	-0.08	0,752	1
2	-0.08		-0.08	-1
1	-0.08	-0.08	-0.08	-0.08
	1	2	3	4

meilleure action: *droite*

U = -0,04 + 0,8*1 -

+0,1*0,752 – 0,1*0,08

= 0,827

meilleure action: *haut*

U = -0,04 + 0,8*0,752

-0,1*1 – 0,1*0,08

= 0,454

$\gamma = 1$

Itération de la valeur -simulation

3	-0.12	0,546	0,827	1
2	-0.12		0,454	-1
1	-0.12	-0.12	-0.12	-0.12
	1	2	3	4

$\gamma = 1$

Itération de la valeur -simulation

3	0,372	0,731	0,888	1
2	-0.16		0,567	-1
1	-0.16	-0.16	0,299	-0.16
	1	2	3	4

$\gamma = 1$

Itération de la valeur -simulation

Valeurs finales:

3	0,812	0,868	0,918	1
2	0,762		0,660	-1
1	0,705	0,655	0,611	0,388
	1	2	3	4

$\gamma = 1$

Policy Iteration

Itération de la politique

- **Itération de la politique** : une (autre) procédure itérative pour calculer une politique optimale étant donné P(s'|s,a) et r(s)
  - Initialiser $\pi_0(s)$ (ex. aléatoirement) et évaluera $\mathbf{v}_0(s)$
  Répéter
  - Calculer *la politique gloutonne* « one step » $\pi_{i+1}(s)$
  - Utiliser « policy evaluation » à obtenir $\mathbf{v}_{i+1}(s)$
  - Arrêter quand la différence entre $\mathbf{v}_{i+1}$ et $\mathbf{v}_i$ est petite
- **« Policy Evaluation » -- l'obtention de l'utilité de chaque état, ou :** étant donné une politique $\pi(s)$, et un modèle de transition P(s'|s,a) connu, il est possible d'obtenir l'utilité U(s) ou la fonction de valeur $\mathbf{v}(s)$ de chaque état

L’évaluation d’une politique

- Étant donné une politique π(s), on peut obtenir la fonction de la valeur **v**(s) « the value function » (ou la fonction d’utilité U(s)) avec la solution d'un système linéaire d'équations

$$\mathbf{v}_{\pi}(s) = \mathbf{r}(s) + \gamma \sum_{s'} \mathbf{v}_{\pi}(s') P(s' \mid s, \pi(s))$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} + \gamma \mathbf{P} \mathbf{v}$$

$$(I - \gamma \mathbf{P}) \mathbf{v} = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{v} = (I - \gamma \mathbf{P})^{-1} \mathbf{r}$$

- Étant donné les actions a=π(s) et donc une matrice P, composée de P(s’|s,a)

Itération de la valeur vs. politique

- Nous sommes assurés de converger vers la solution optimale avec les deux approches : a) l'itération de la valeur et b) l'itération de la politique
- Toutefois chaque itération est (possiblement) moins chère avec l'itération de la valeur parce qu'on n'a pas besoin d'évaluer la politique (ex. obtenir la solution à un système d'équations linéaire)

Algorithme – itération de la politique

- En principe l'évaluation d'une politique exige la résolution d'une série d'équations linéaires
- On peut simplifier en itérant *k* fois la mise à jour suivante:

$$U_{i+1}(s) \leftarrow R(s) + \gamma \sum_{s'} T(s, \pi_i(s), s')\, U_i[s']$$

Algorithme – itération de la politique

fonction ITERATION-POLITIQUE(*pdm,*ε) **retourne** fonction d'utilité
  entrées: *pdm,* un processus de décision markovien
        ε*,* erreur maximale permise
  π est une politique initialisée aléatoirement
  S est l'ensemble des états de *pdm*
  répéter:
    U ← EVALUATION-POLITIQUE(π, U, *pdm*)
    inchangé ← *true*
    pour chaque $s \in S$ faire:
      si $\max_a \sum_{s'} T(s,a,s')\, U[s'] > \sum_{s'} T(s,\pi[s],s')\, U[s']$ **alors**
        $\pi[s]$ **=** $\arg\max_a \sum_{s'} T(s,a,s')\, U[s']$
        inchangé = *false*
    jusqu'à *inchangé*
  retourner π

Notez Bien

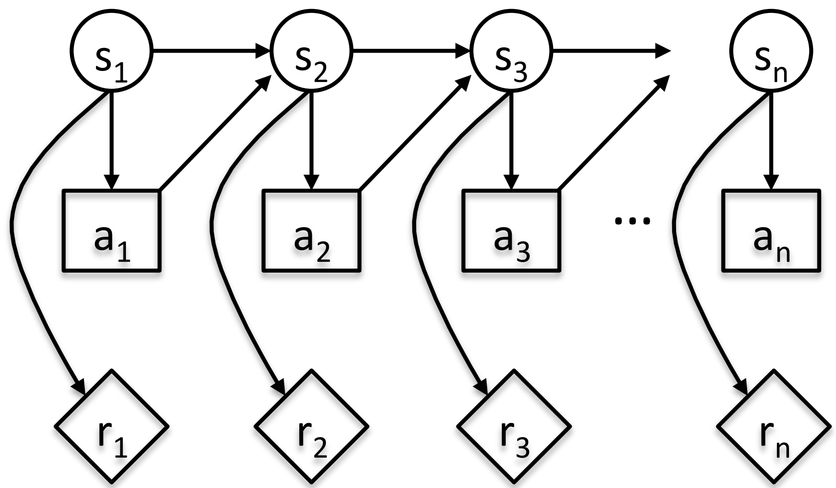
- Dans le deux cas : itération de la valeur et itération de la politique les connues sont:
  $R(s)$, $P(s_1)=s_o$, $P(s_{i+1} | s_i, a_i)=T(s',s,a)$, γ

Nous avons:

états, s_t
actions, a_t

et

récompenses, r_t



- Notre but est de calculer la politique $a=\pi(s)$ qui va maximiser

$$E\left[\sum_{t=1}^{\infty}\gamma^t R(s_t) \mid \pi(s)\right] = V_\pi(s) = R(s) + \gamma \sum_{s'} P(s' \mid s, \pi(s)) V_\pi(s')$$

- **Cependant, les connus ci-dessus ne sont pas toujours connus.**

Apprentissage par renforcement

- Apprentissage passif:
  - <u>On ne connaît pas le modèle de transition</u>
  - On **connaît** la politique
  - On veut déterminer les valeurs d'utilité
- Apprentissage actif:
  - <u>On ne connaît pas le modèle de transition</u>
  - On **ne connaît pas** la politique
  - On veut déterminer la politique

Apprentissage passif: estimation directe

- On fait un ensemble d'essais, chacun comprenant une séquence de transitions
- Pour chaque occurrence d'une transition, on calcule l'utilité
- Pour chaque transition, on calcule la moyenne des valeurs obtenues
- Cet algorithme converge lentement

Apprentissage passif: programmation dynamique adaptative

fonction AGENT-PDA-PASSIF(*s′, r′*) **retourne** une action
entrées: *s′,* état actuellement perçu
r′, récompense actuellement perçue
π est une politique fixe
pdm est le processus de décision markovien défini par U, R et T
s, a, état et action précédents, initialement nuls
si *s′* est nouveau **alors faire** $U[s'] \leftarrow r'$; $R[s'] \leftarrow r'$
si *s′* non nul **alors faire**
incrémenter $N_{sa}[s,a]$ et $N_{sas'}[s,a,s']$
pour tout *t* tel que $N_{sas'}[s,a,t] \neq 0$ **faire**
$T[s,a,t] \leftarrow N_{sas'}[s,a,t] \;/\; N_{sa}[s,a]$
U ← DETERMINER-VALEUR(π, U, *pdm*)
si TERMINAL?[*s′*] **alors** *s,a* ← nul **sinon** *s,a* ← *s′*, π[*s′*]
retourner a

Apprentissage actif

- Rappel, ici :
  - <u>On ne connaît pas le modèle de transition</u>
  - On **ne connaît pas** la politique
  - On veut déterminer la politique
- On peut adapter l'algorithme d'apprentissage passif avec un « model based approach »
- On apprend d'abord le modèle de transition
- Puis on applique un algorithme pour obtenir la politique optimale
- On répète

Apprentissage actif

- Une question: l'agent doit-il choisir la prochaine action selon sa politique optimale courante?
- Réponse: pas toujours.
- L'agent doit aussi faire un peu d'exploration
- Une méthode simple: choisir une action aléatoirement une fois de temps en temps
- Une meilleure approche: donner du poids à des actions rarement choisies, tout en essayant d'éviter des actions qui sont reconnues pour leur peu d'utilité

Q-Learning

- Allows us to learn an (optimal) policy
- Doesn't use a model of the environment!
  - It is a "model free method"
- Based on using an **action-value** "*Q*" function
- If $V^*(s)$ is the expected value of following the optimal policy in state *s*
- $Q^*(s,a)$ is the expected value of taking action *a* in state *s* - then following the optimal policy

Q*(s,a) and V*(s)

- Defined as functions of one another

$$
\begin{aligned}
Q^*(s,a) &= \sum_{s'} P(s'|a,s)\left(r(s,a,s') + \gamma V^*(s')\right) \\
V^*(s) &= \max_a Q^*(s,a) \\
\pi^*(s) &= \arg\max_a Q^*(s,a)
\end{aligned}
$$

Ex. see slides from Kevin L.B. @ UBC & many others…

Asynchronous Value Iteration

- Key observation: need not loop over all states - could consider states one at a time
  (Provably convergent if we visit infinitely often)
- Usually Implemented by storing Q(s,a)

Value Iteration Revisited - using Qs, becomes

- Randomly initialize $V_i(s)$, then update

$$
\begin{aligned}
Q_{i+1}(s,a) &= \sum_{s'} P(s'|a,s)\left(r(s,a,s') + \gamma V_i(s')\right) \\
V_{i+1}(s) &= \max_a Q_{i+1}(s,a)
\end{aligned}
$$

- Could combine the above to get a modified update to V for value iteration

$$V_{i+1}(s) = \max_a \sum_{s'} P(s'|a,s)\left(r(s,a,s') + \gamma V_i(s')\right)$$

Policy Iteration Revisited – using Qs becomes

- In Policy Iteration we had iterations of the form:

$$\mathbf{v}_{\pi}(s) = \mathbf{r}(s) + \gamma \sum_{s'} \mathbf{v}_{\pi}(s')P(s' \mid s, \pi(s)) \rightarrow \mathbf{v} = (I - \gamma \mathbf{P})^{-1}\mathbf{r}$$

- Rather than solving a linear system we could use an approach called TD(0)

$$\mathbf{v}_{i+1}(s) = \mathbf{v}_{i}(s) + \alpha\left[\left(\mathbf{r}(s') + \gamma \mathbf{v}_{i}(s')\right) - \mathbf{v}_{i}(s)\right]$$

- With Qs we have

$$\mathbf{Q}_{\pi}(s,a) = +\sum_{s'} P(s' \mid s, \pi(s))\left[\mathbf{r}(s,a,s') + \gamma \mathbf{v}_{\pi}(s')\right]$$

Comparing Value & Policy Iteration vs "Q Learning"

- In Value Iteration we iterate:

$$\mathbf{v}_{i+1}(s) = \max_a \left[\mathbf{r}(s) + \gamma \sum_{s'} \mathbf{v}_i(s') P(s' \mid s, a) \right] \rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{r} + \gamma \mathbf{P}^{a*} \mathbf{v}$$

- In Policy Iteration we evaluate the policy, iterating:

$$\mathbf{v}_\pi(s) = \mathbf{r}(s) + \gamma \sum_{s'} \mathbf{v}_\pi(s') P(s' \mid s, \pi(s)) \rightarrow \mathbf{v} = (I - \gamma \mathbf{P})^{-1} \mathbf{r}$$

  – Then update the policy and repeat (evaluating it)

- Q-Learning is based on the so-called TD(0) approach where we have updates

$$v_{i+1}(s) = v_i(s) + \alpha \left[\left(r(s') + \gamma v_i(s') \right) - v_i(s) \right]$$

- Where <s,a,r,s'> are *experience tuples*
- Intuition: $r(s') + \gamma v_i(s')$ gives a better estimate of v

Q-learning goes Deep

- Formulated using Q functions we have

$$Q_{i+1}(s,a) = Q_i(s,a) + \alpha\left[\left(r(s') + \gamma \max_{a'} Q_i(s',a')\right) - Q_i(s,a)\right]$$

critic actor

- *Enter Deep Learning*: parameterize Q(s,a;θ) using a deep convolutional neural network and learn via gradient descent using the loss

$$L(\theta_i) = E\left[\left(\left[r(s') + \gamma \max_{a'} Q_i(s',a';\theta_i^-)\right] - Q_i(s,a;\theta_i)\right)^2\right] \quad \tilde{P}(s,a,r,s')$$

- The expectation is with respect to mini-batches of experience vectors <s,a,r,s'>

Updates

$$L(\theta_i) = E\left[\left(\left[r(s') + \gamma \max_{a'} Q_i(s', a'; \theta_i^-)\right] - Q_i(s, a; \theta_i)\right)^2\right] \quad \tilde{P}(s, a, r, s')$$

- Where θ_i are the parameters of the Q-network at iteration *i*
- θ_i^- are the network parameters used to compute the target at iteration *i*
- The target network parameters are only updated with the Q-network parameters every C steps
- Updates applied to samples drawn uniformly from experiences to create mini-batches

Q-Learning

- Goal is to obtain a policy for an agent which doesn't have a transition model for the environment or even the reward function.
- Simply choose the action that maximizes Q based on our current estimate
- Occasionally select a random action
- As time goes on, take fewer random actions

Mnih et al., (2015) "Human-level control through deep reinforcement learning", i.e. Teaching computers to Play Atari Games

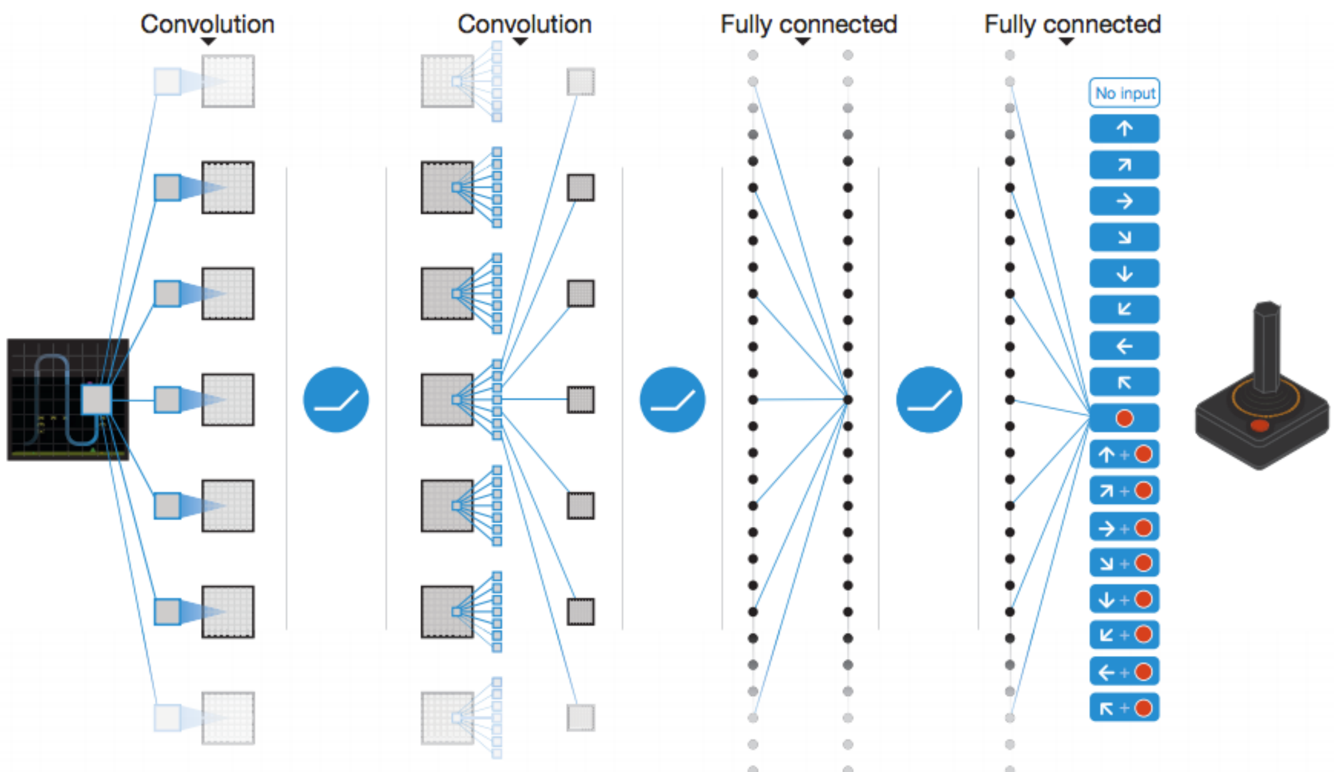


Figure 1 | Schematic illustration of the convolutional neural network. The details of the architecture are explained in the Methods. The input to the neural network consists of an 84 × 84 × 4 image produced by the preprocessing map ϕ, followed by three convolutional layers (note: snaking blue line symbolizes sliding of each filter across input image) and two fully connected layers with a single output for each valid action. Each hidden layer is followe by a rectifier nonlinearity (that is, $\max(0,x)$).

Apprentissage actif (suite)

- Comment faire?
- On utilise l'équation suivante pour la mise à jour d'une valeur d'utilité :

$$U^+(s) = R(s) + \gamma \max_a f\left(\sum_{s'} T(s,a,s')U^+(s'),\ N(a,s) \right)$$

$$f(u,n) = \begin{cases} R^+ & \text{si } n < K \\ u & \text{sinon} \end{cases}$$

K est une constante fixée

R^+ est un estimé de la meilleure récompense possible