ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Le génie sans frontières

Questionnaire examen intra

INF2010

Sigle du cours

Identification de l'étudiant(e)		
Nom :	**Prénom :**	
Signature :	**Matricule :**	**Groupe :**

Sigle et titre du cours			*Groupe*	*Trimestre*
INF2010 – Structures de données et algorithmes			**Tous**	**20093**
Professeur			*Local*	*Téléphone*
Ettore Merlo, responsable – T. Ould Bachir, T. Lavoie chargés de cours			**B-415**	**5758**
Jour	*Date*	*Durée*		*Heure*
Mardi	**20 octobre 2009**	**2h00**		**18h30**

Documentation	*Calculatrice*	
☐ Toute ☐ Aucune ☐ Voir directives particulières	☐ Aucune ☐ Programmable ☐ Non programmable	**Les cellulaires, agendas électroniques ou téléavertisseurs sont interdits.**

Directives particulières

Bonne chance à tous!

Important

Cet examen contient **6** questions sur un total de **12** pages **(excluant cette page)**

La pondération de cet examen est de **30 %**

Vous devez répondre sur : ☐ le questionnaire ☐ le cahier ☐ les deux

Vous devez remettre le questionnaire : ☐ oui ☐ non

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

Question 1 : Généralités (10 points)

Répondre par vrai ou par faux (en justifiant brièvement) aux assertions suivantes :

1.1) **(1 point)** La signature suivante est bonne pour implémenter un itérateur sur une liste.

```
public class MaListe<T> implements Iterable<T>
{
    private int theSize;
    private T [ ] theItems;
        ...
    public java.util.Iterator< T > iterator( )
      { return new MonIterateur< T >( this ); }

    public static class MonIterateur implements java.util.Iterator< T >
    {
        ...
    }
}
```

Faux. Il doit être privé et non statique.

1.2) **(1 point)** La signature suivante est bonne pour implémenter un itérateur sur une liste.

```
public class MaListe<T> implements Iterable<T>
{
    private int theSize;
    private T [ ] theItems;
    ...
    public java.util.Iterator< T > iterator( )
      { return new MonIterateur< T >( this ); }

    private static class MonIterateur implements java.util.Iterator< T >
    {
        ...
    }
}
```

Faux. Il doit être privé et non statique.

1.3) **(1 point))** La signature suivante est bonne pour implémenter le nœud d'une liste chaînée.

```
public class MaListeChainee< T > implements Iterable< T >
{
   private Noeud < T > queue;
   private Noeud < T > tete;
   ...
   private static class Noeud< T >
   {
   ...
   }
}
```

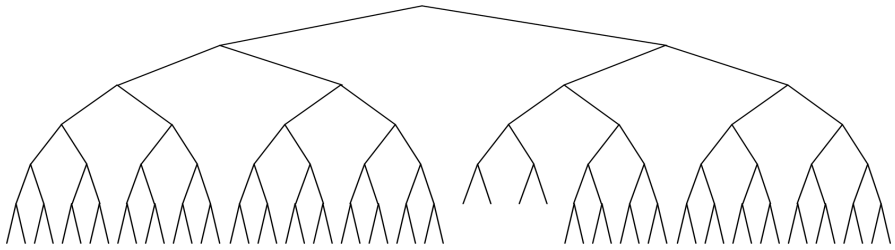
Vrai. Il est bien privé et statique.

1.4) **(1 point)** L'algorithme QuickSort a une complexité O(n log(n)) en tout temps.
Faux. En pire cas il est O(n^2).

1.5) **(1 point)** Un arbre AVL a un temps d'insertion O(n) en tout temps.
Faux. Il est O(log(n)) en tout temps.

1.6) **(1 point)** Un AVL ne peut pas être un arbre binaire complet :
Faux. C'est tout à fait possible.

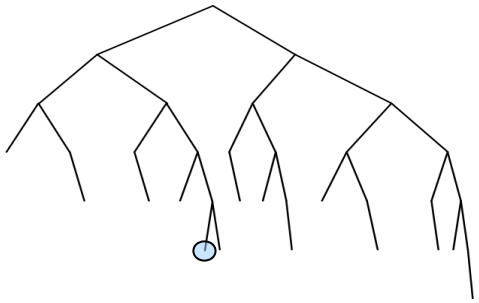
1.7) **(2 point)** Considérez la structure de l'arbre binaire suivant:



7.*a.* Cette structure d'arbre est bien celle d'un arbre binaire complet
Faux. Est n'est pas complète de gauche à droite sur la dernière ligne.

7.*b.* Cette structure d'arbre est bien celle d'un arbre AVL
Vrai. Deux sous-arbres d'un noeud donné ont au plus une différence de hauteur de 1.

8) **(2 point)** Considérez la structure de l'arbre binaire suivant:



8.*a.* Cette structure d'arbre est bien celle d'un arbre AVL
Vrai. Deux sous-arbres d'un noeud donné ont au plus une différence de hauteur de 1.

8.*b.* Cette structure d'arbre est celle du plus petit AVL de cette hauteur (on ne peut retirer aucun élément sans réduire la hauteur de l'arbre)

Faux. Sur la branche de gauche, un élément (une feuille) peut être retiré sans altérer la nature de AVL de l'arbre.

Question 2: Tables de dispersement (23 points)

2.1) **(10 points)** Soit la table de dispersement suivante de taille N = 13:

26	40			17				8		62		

et H(x) = x%N + 3i, la fonction de dispersement avec résolution linéaire des collisions que l'on vous demande d'utiliser. Insérer les éléments suivants dans la table: 4, 1, 33, 10, 19. Indiquez l'état de la table après chaque insertion.

26	40			17			**4**	8		62		

26	40		**1**	17			4	8		62		

26	40		1	17		**33**	4	8		62		

26	40		1	17		33	4	8	**10**	62		

26	40		1	17		33	4	8	**19**	62		

2.2) **(5 points)** Un étudiant implémente une table de dispersement de la manière suivante:

– Si le nombre d'éléments contenus dans la table est supérieur à 75% de la taille de la table, il *double la taille de la table* (N → 2N) et il redisperse (rehash) les éléments.
– La résolution des collisions dans la table se fait par dispersement quadratique.

Commentez cette implémentation sur les points suivants :

- Le choix du facteur de compression limite de 75%;
- La façon de redimensionner de la table;

- **Puisque la table peut-etre plus qu'a moitie pleine, certains elements pourraient ne pas pouvoir etre inseres.**
- **Le strategie de redimensionnement de la table fait en sorte que sa taille ne reste pas premiere, donc certains elements pourraient ne pas pouvoir etre inseres.**
- **ATTENTION: Il est vrai, mais incomplet de dire que le nombre de collisions augmentent drastiquement a cause du facteur de compression limite de 75%.**

2.3) **(8 points)** Deux étudiants doivent résoudre un problème qui nécessite de trier des éléments au fur et à mesure qu'ils sont insérés dans le programme. L'étudiant A traite un problème qui manipule des chaînes de caractères tandis que l'étudiant B traite un problème qui manipule des entiers. Les deux étudiants décident d'utiliser des tables de dispersement pour trier leurs éléments au lieu d'un arbre AVL à cause de la performance supérieure des lectures dans la table de dispersement. Commentez la stratégie de chacun des deux étudiants en vous appuyant sur les questions suivantes.

- Peut-on utiliser un AVL pour maintenir des entiers triés?
- Peut-on utiliser un AVL pour maintenir des *strings* triés?
- Peut-on utiliser une table de dispersement pour maintenir des entiers triés?
- Peut-on utiliser une table de dispersement pour maintenir des *strings* triés?

– **Oui**
– **Oui**
– **Oui, par l'intermediaire d'un counting ou d'un bucket sort.**
– **Non**

Question 3 : Utilisation de listes, piles et files (12 points)

Il a été vu en classe que MergeSort fonctionne très bien lorsqu'on lui passe en paramètre un tableau (vecteur) d'éléments à trier. Pour chacune des structures de données ci-dessous, indiquez si MergeSort est toujours applicable si on remplace le tableau par la structure proposée. Expliquez brièvement et indiquez si la variante de MergeSort sous cette structure de données est interne (i.e. N'utilise pas d'espace mémoire à l'extérieur de la structure de donnée qui est passée originalement en paramètre) ou externe (i.e. Utilise de la mémoire supplémentaire).

3.1) **(4 points)** Liste doublement chaînée

Oui, interne

3.2) **(4 points)** File

Oui, externe

3.3) **(4 points)** Pile

Oui, externe

Question4 : *k*-ième élément (20 points)

Considérer le code source Java donné à l'annexe 1 :

4.1) **(5 points)** Donner le résultat de l'affichage quand la fonction principale (main) est appelée :

```
La valeur médiane est 45
```

4.2) **(5 points)** Dans l'exécution de la fonction principale, combien de fois est appelée la méthode interne: `void Median( AnyType [ ] a, int left, int right )`. Détailler votre réponse.

Une seule fois.

4.3) **(10 points)** Donner l'état du vecteur `a[]` à la fin de l'exécution de la fonction principale:

Le vecteur était

```
12 59 94 3 35 26 77 45 84 25 67 5 91 36 64 74
```

Il devient

```
12 36 5 3 35 26 25 45 84 77 67 94 91 59 64 74
```

Il n'est pas trié!

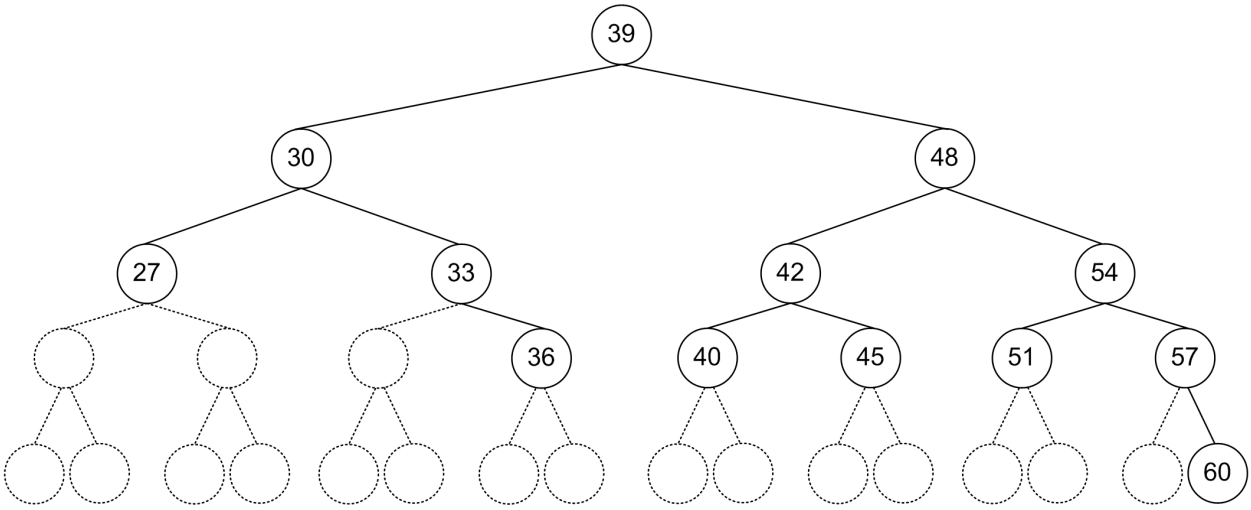
Question 5 : Arbre binaire de recherche de type AVL (20 points)

Vous disposez d'une structure de données implémentant un arbre binaire de recherche de type AVL contenant des entiers.

5.1) **(6 points)** Vous effectuer un affichage post-ordre sur l'arbre et vous obtenez l'affichage suivant.

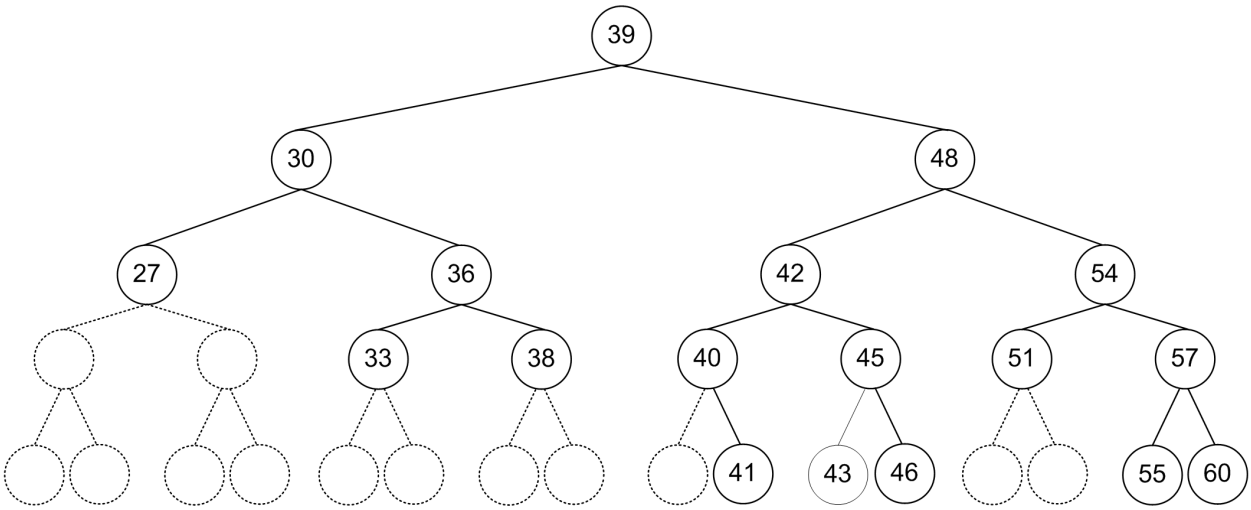
27, 36, 33, 30, 40, 45, 42, 51, 60, 57, 54, 48, 39

Dessiner l'état de l'arbre AVL en mémoire :



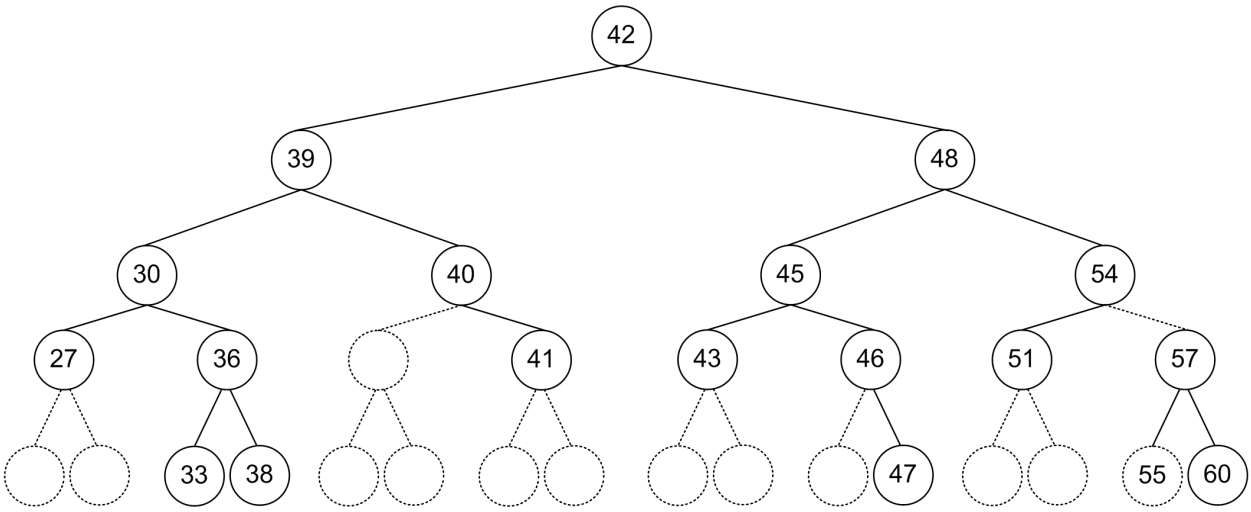
5.2) **(4 points)** On insère dans l'ordre les valeurs suivante : 43, 55, 46, 38, 41.

Dessiner l'état de l'arbre AVL à la fin des insertions :



5.3) **(10 points)** Après avoir inséré les valeurs 43, 55, 46, 38 et 41, on veut insérer 47.

Dessiner l'état de l'arbre AVL à la fin de l'opération :



Question 6: Analyse de complexité (15 points)

6.1) **(5 points)** Donnez la formule de récurrence permettant d'aboutir à la preuve de complexité de MergeSort.

T(N) = 2(T(N/2)) + N

6.2) **(5 points)** Soit N éléments triés suivis de M éléments placés de façon aléatoire. Si M=*log*(N), est-il possible de trier l'ensemble des éléments (M+N) en O(*N*)? Expliquez votre réponse.

Oui, car il suffit d'appliquer MergeSort sur la partie de taille log(N) et ensuite de fusionner la partie de taille N avec la partie de taille log N. Comme Mergesort a une complexite de O(NlogN), trier la partie de droite prend O(logNloglogN). La fusion prend O(N) et puisque O(logNloglogN) < O(N), le tri total prend O(N).

6.3) **(5 points)** En considérant la liste décrite à la question précédente, donnez une borne supérieure à M pour que la liste soit triée en O(*N*). Indice: Observez la différence de complexité pour le cas taille de M = $\sqrt{N}$ et M = N.
Si M = $\sqrt{N}$, alors le tri de la partie de droite prend O($\sqrt{N}log\sqrt{N}$) (< O(N)). Si M = N, alors le tri prend O(NlogN). Puisque $\sqrt{N} = N^{1/2}$ et $N = N^1$, on peut supposer que la borne superieure de M sera une puissance de N inferieure a 1. De maniere generale, il faut verifier que:

$$N^k \log N^k < N, \text{ pour } 0 < k < 1 \text{ et } N > c, \text{ tel que c est un nombre naturel}$$

$$kN^k \log N < N$$

Pour verifier l'existence d'un c qui satisfait l'equation, on prend les derives de chaque expression:

$$k(kN^{k-1}\log N + N^{k-1}) < 1$$

Comme l'expression de gauche est une somme positive multipliee par un reel compris entre 0 et 1 (exclusivement), il suffit qu'elle soit la somme de deux expressions monotones et decroissantes pour que le c recherche existe. N^{k-1} est decroissante. Le terme $N^{k-1}\log N$ peut etre ecrit sous forme fractionnaire: $\log N / N^{1-k}$. Or, le numerateur de la fraction croit plus lentement que le denominateur ce qui implique que la fraction est decroissante. La somme des deux termes est donc strictement decroissante, donc il existe un c qui satisfait l'equation peu importe la valeur de k dans l'intervalle. M est donc borne superieurement par N^k tel que k est le plus nombre reel plus petit que 1.

Annexe 1

```
public final class Sort
{
    /**
     * Méthode permettant d'interchanger  de position deux objets
     * @param a un tableau d'objets.
     * @param index1 L'Indice du premier objet dans a.
     * @param index2 L'Indice du second objet dans a.
     */
    public static <AnyType> void swapReferences( AnyType [ ] a, int index1, int index2 )
    {
        AnyType tmp = a[ index1 ];
        a[ index1 ] = a[ index2 ];
        a[ index2 ] = tmp;
    }

    /**
     * Méthode interne effectuant le median3 pour QuickSort ;)
     */
    private static <AnyType extends Comparable<? super AnyType>>
    AnyType median3( AnyType [ ] a, int left, int right )
    {
        int center = ( left + right ) / 2;
        if( a[ center ].compareTo( a[ left ] ) < 0 )
            swapReferences( a, left, center );
        if( a[ right ].compareTo( a[ left ] ) < 0 )
            swapReferences( a, left, right );
        if( a[ right ].compareTo( a[ center ] ) < 0 )
            swapReferences( a, center, right );

            // Place pivot at position right - 1
        swapReferences( a, center, right - 1 );
        return a[ right - 1 ];
    }



    /**
     * Méthode interne effectuant un InsertionSort sur un sous-tableau
     * @param a        Un tableau de Comparable items.
     * @param left  La position à gauche du sous tableau à trier
     * @param right La position à droite du sous tableau à trier
     */
    private static <AnyType extends Comparable<? super AnyType>>
    void insertionSort( AnyType [ ] a, int left, int right )
    {
        for( int p = left + 1; p <= right; p++ )
        {
            AnyType tmp = a[ p ];
            int j;

            for( j = p; j > left && tmp.compareTo( a[ j - 1 ] ) < 0; j-- )
                a[ j ] = a[ j - 1 ];
            a[ j ] = tmp;
        }
    }

    /**
     * Median
     * @param a un tableau de Comparable.
     */
    public static <AnyType extends Comparable<? super AnyType>>
    void Median( AnyType [ ] a )
    {
       Median( a, 0, a.length - 1 );
    }
```

```
    /**
     * Méthode interne effectuant des appels récursifs.
     * Appelle median3 et un  cutoff de valeur CUTOFF (voir constante final).
     * Places la valeur mediane à sa position sans trier complètement le reste du vecteur.
     * @param a un tableau d'objets Comparable.
     * @param left la position à gauche du sous tableau.
     * @param right la position à droite du sous-tableau.
     */
    private static <AnyType extends Comparable<? super AnyType>>
    void Median( AnyType [ ] a, int left, int right )
    {
        if( left + CUTOFF <= right )
        {
               AnyType pivot = median3( a, left, right );

                // Begin partitioning
            int i = left, j = right - 1;
            for( ; ; )
            {
                while( a[ ++i ].compareTo( pivot ) < 0 ) { }
                while( a[ --j ].compareTo( pivot ) > 0 ) { }
                if( i < j )
                    swapReferences( a, i, j );
                else
                    break;
            }

            swapReferences( a, i, right - 1 );   // Restore pivot

            if( a.length/2 <= i )
               Median( a, left, i - 1 );
            else if( a.length/2 > i + 1 )
               Median( a, i + 1, right );
        }
        else  // Do an insertion sort on the subarray
            insertionSort( a, left, right );
    }


    private static final int CUTOFF = 5;
    private static final int NUM_ITEMS = 16;

    public static void main( String [ ] args )
    {
        Integer [ ] a = {12, 59, 94, 3, 35, 26, 77, 45, 84, 25, 67, 5, 91, 36, 64, 74};

        Sort.Median( a );
        System.out.println( "La valeur médiane est " + a[ NUM_ITEMS/2-1 ]  );
    }
}
```