ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Le génie sans frontières

Corrigé examen intra

INF2010

Sigle du cours

Identification de l'étudiant(e)		
Nom :	**Prénom :**	
Signature :	**Matricule :**	**Groupe :**

Sigle et titre du cours	*Groupe*	*Trimestre*
INF2010 – Structures de données et algorithmes	**Tous**	**20101**
Professeur	*Local*	*Téléphone*
Ettore Merlo, responsable – Tarek Ould Bachir, chargé de cours	**B-505/B-506**	**7128**

Jour	*Date*	*Durée*	*Heure*
Mercredi	**17 février 2009**	**2h00**	**19h00**

Documentation	*Calculatrice*	
☐ Toute ☒ Aucune ☐ Voir directives particulières	☐ Aucune ☐ Programmable ☒ Non programmable	**Les cellulaires, agendas électroniques ou téléavertisseurs sont interdits.**

Directives particulières
Bonne chance à tous!

Important

Cet examen contient 5 questions sur un total de 12 pages (**excluant cette page**)

La pondération de cet examen est de 30 %

Vous devez répondre sur : ☒ le questionnaire ☐ le cahier ☐ les deux

Vous devez remettre le questionnaire : ☒ oui ☐ non

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

Question 1 : Tables de dispersement (16 points)

Considérant une table de dispersement par débordement progressif avec sondage linéaire où Hash(clé) = clé % N + 2·i :

1.1) **(2 point)** Donnez la complexité asymptotique en cas moyen de l'insertion pour cette structure de données :

O(1) puisqu'il s'agit de l'insertion dans une table de dispersement.

1.2) **(10 points)** En vous servant du tableau ci-dessous, donnez l'état de la mémoire d'une table de dispersement par débordement progressif avec sondage linéaire (Hash(clé) = clé % N + 2·i et N = 7) dans laquelle on insère dans l'ordre les paires (object, clé) suivantes : (patate, 7), (tomate, 7), (chou-rave, 7), (brocoli, 7), (vache, 7).

0	**(patate, 7)**
1	**(vache, 7)**
2	**(tomate, 7)**
3	
4	**(chou-rave, 7)**
5	
6	**(brocoli, 7)**

1.3) **(4 points)** Quelle est la complexité asymptotique en cas moyen de l'insertion pour cette structure de données dans le cas où <u>toutes les entrées ont la même clé</u>. Justifiez votre réponse.

Si toutes les clés sont identiques, ceci n'est pas différent d'une insertion dans une liste. Cela se fait donc en O(*n*).

Question 2 : Complexité algorithmique (12 points)

Considérez le bout de code suivant et la fonction **quelleComplexite** qui y est présentée :

```
public class complexite
{
   public static void quelleComplexite(int[] a)
   {
      int i, j, k = 1, n = a.length;
      for(i = 1; i <= n; ++i)
      {
         for(j=1; j*k <= n; ++j)
            a[j-1] += i;

         k = 2*k;
      }
   }

   public static void main(String[] args)
   {
      int[] a = {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0};
      quelleComplexite( a );
      for(int i : a)
      {
         System.out.print( i + " " );
      }
   }
}
```

2.1) **(4 points)** Donnez l'affichage produit par l'exécution de la fonction principale (**main**) :

10 6 3 3 1 1 1 1

2.2) **(8 points)** Quelle est la complexité asymptotique O($f(n)$) de **quelleComplexite(int[] a)**, fonction de la taille n du tableau **int[] a**. Justifiez votre réponse par un calcul.

<u>*Rappel :*</u> $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = 1$

$$\boldsymbol{T(n) = \sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{n}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^{n}(1) + n\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i}\right) \approx n + n = 2n}$$

On a donc une complexité en O(n)

Question 3 : Tris en *n* log(*n*) (24 points)

Exécuter l'algorithme « QuickSort » donné à l'Annexe I pour trier le vecteur suivant. La valeur *cut-off* pour l'algorithme « QuickSort » est 10.

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Vecteur	10	85	23	29	32	56	54	13	49	31	12	33	51	47	9	18

Réponses :

3.1) (**2 points**) Donnez :

Les trois valeurs de « Median3 » à la première récursion :

10, 13, 18

La valeur de la médiane (pivot) :

13

3.2) (**2 points**) Donnez l'état du vecteur après l'exécution de Median 3 de la première récursion :

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Vecteur	**10**	85	23	29	32	56	54	**9**	49	31	12	33	51	47	**13**	**18**

3.3) (**6 points**) Donnez l'état du vecteur après l'exécution du partitionnement de la première récursion :

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Vecteur	**10**	**12**	**9**	**13**	**32**	**56**	**54**	**23**	**49**	**31**	**85**	**33**	**51**	**47**	**29**	**18**

3.4) **(3 points)** La fonction récursive QuickSort sera-telle rappelée après cette première récursion? Justifiez brièvement.

Oui car le pivot a été placé à la case 3, laissant 11 éléments à sa droite.

3.5) **(3 points)** Si la fonction récursive QuickSort devait entrer dans son second niveau de récursion, il n'y aurait au total qu'un seul des deux appels récursifs QuickSort qui lancerait de nouveau Median 3 et le code de partionnement. Expliquez pourquoi.

Ayant 16 éléments au total, de deux choses l'une,

- **Le partitionnement place d'un côté (gauche ou droit) 10 éléments (*cut-off*) et plus, auquel cas l'autre côté compte au plus 4 éléments, et n'appellera pas Median3.**
- **Le partitionnement répartit d'un côté et de l'autre à peu près le même nombre d'éléments (7 et 8 ou 6 et 9) et aucun des appels récursifs n'appelle Median 3.**

Ainsi, si on a une seconde récursion, un seul des deux appels récursifs produira un appel à Median 3.

3.6) **(2 points)** Median 3 est effectivement appelée une seconde fois dans notre exemple. Donnez :

Les trois valeurs de « Median3 » à cette seconde récursion :

32, 31, 18

La valeur de la médiane (pivot) :

31

3.7) (**6 points**) Donnez l'état du vecteur après l'exécution de Median 3 à cette seconde récusion (faites bien attention à l'ordre des appels de récursion! Regardez le code à l'annexe 1 au besoin) :

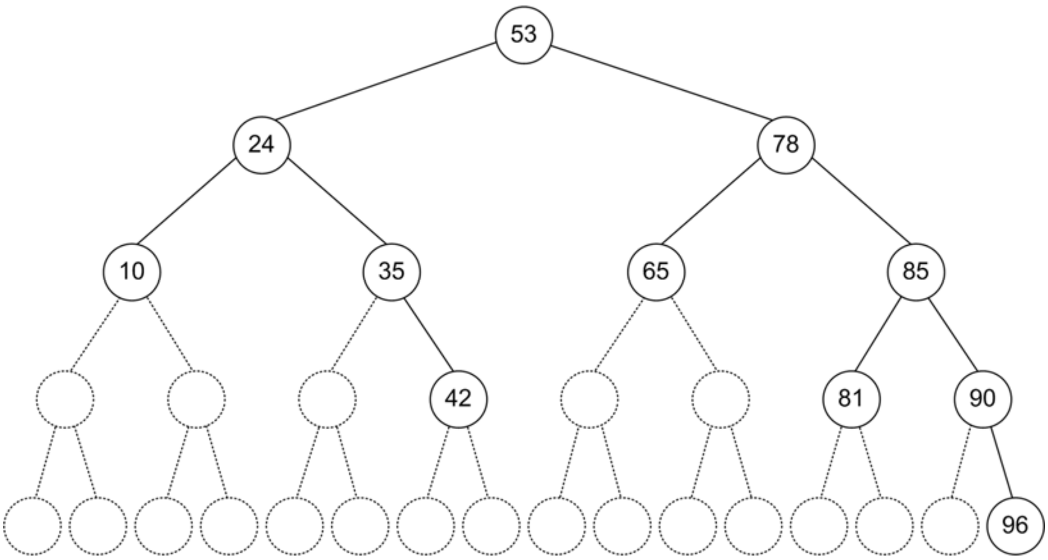
Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Vecteur	<u>*9*</u>	<u>*10*</u>	<u>*12*</u>	<u>*13*</u>	**18**	56	54	23	49	**29**	85	33	51	47	**31**	**32**

Question 4 : Arbres binaire de recherche (24 points)

Considérez les affichages des arbres binaires de recherche suivants. Pour chacun d'eux, donnez la représentation graphique de l'arbre. Dans chaque cas, dîtes si l'arbre binaire est un AVL.

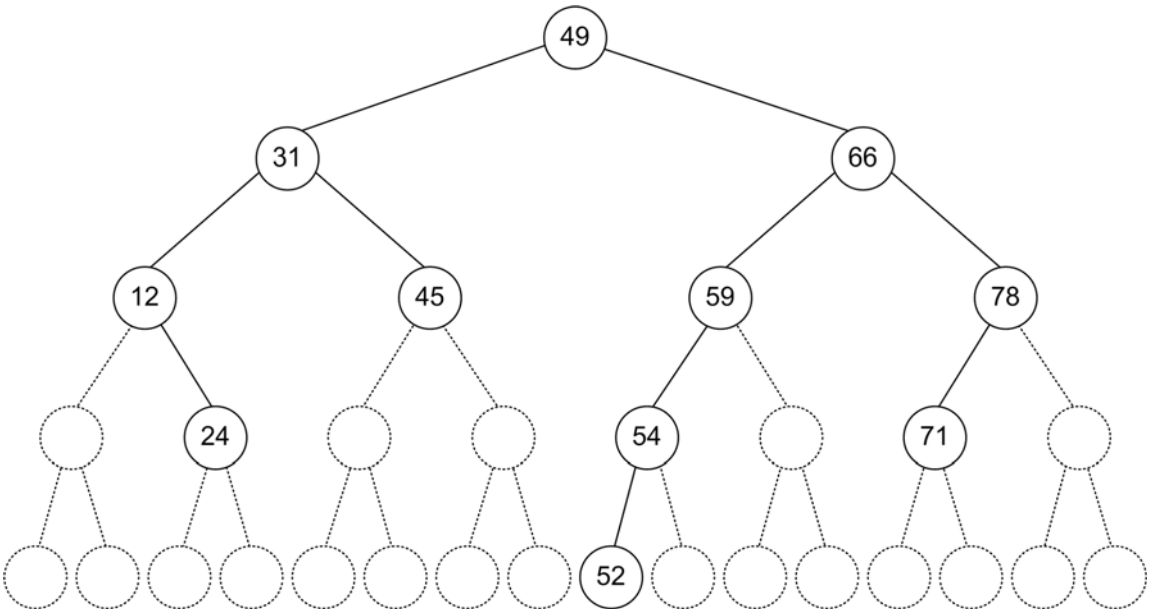
4.1) **(4 points)** L'affichage pré-ordre de l'arbre binaire de recherche donne :

53, 24, 10, 35, 42, 78, 65, 85, 81, 90, 96 AVL? : ____NON________



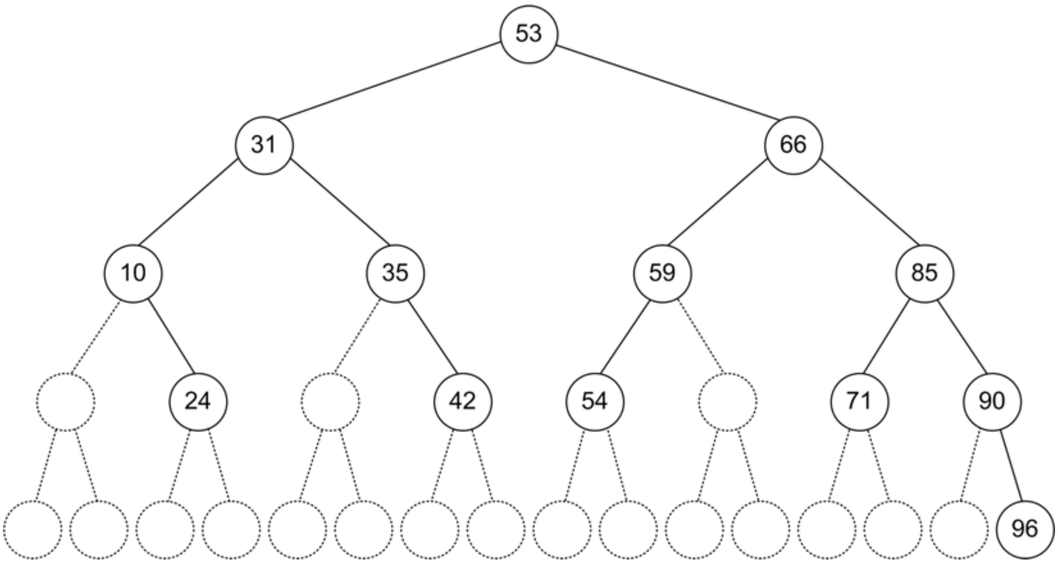
4.2) **(4 points)** L'affichage post-ordre de l'arbre binaire de recherche donne :

24, 12, 45, 31, 52, 54, 59, 71, 78, 66, 49 AVL? : _NON______



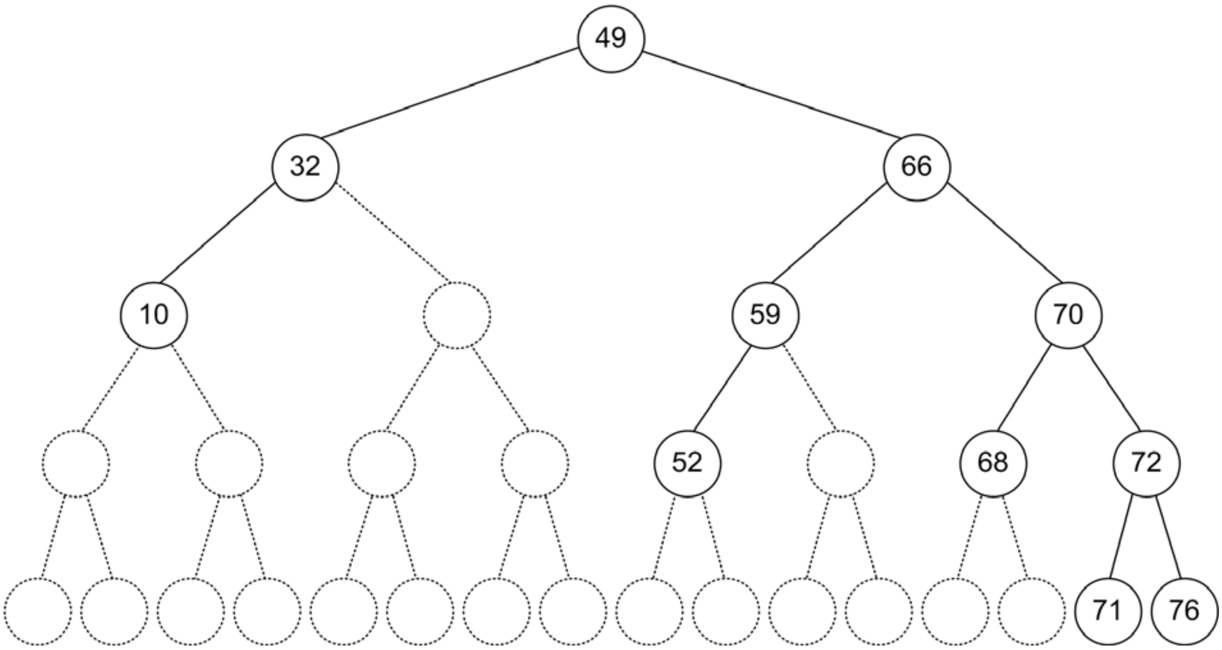
4.3) **(4 points)** L'affichage post-ordre de l'arbre binaire de recherche donne :

24, 10, 42, 35, 31, 54, 59, 71, 96, 90, 85, 66, 53 AVL? : _OUI________



4.4) **(4 points)** L'affichage par niveau de l'arbre binaire de recherche donne :

49, 32, 66, 10, 59, 70, 52, 68, 72, 71, 76 AVL? : _NON________

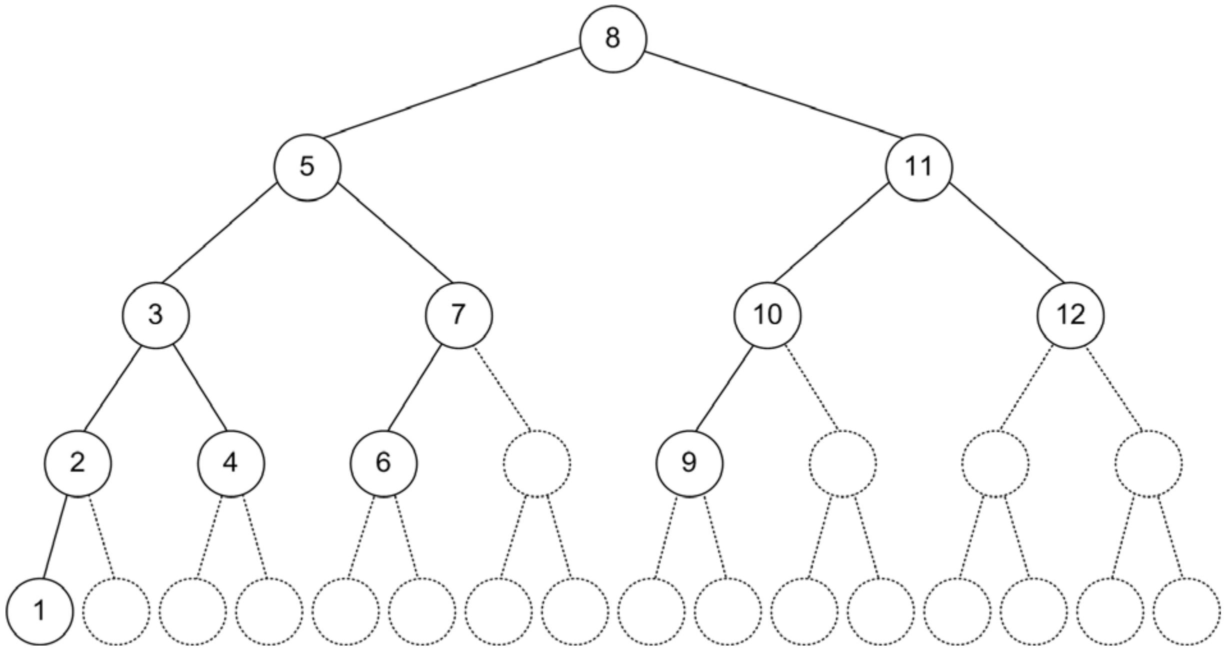


4.5) **(8 points)** L'affichage <u>en ordre</u> d'un arbre binaire de recherche ne permet pas d'en déduire la constitution. Néanmoins, sachant que :

- Le sous-arbre de gauche de chaque nœud de l'arbre binaire de recherche que nous considérons ici, est plus haut que le sous-arbre de droite;
- L'arbre binaire de recherche considéré est un AVL;
- Que la fonction S(h) donnant le nombre minimal contenus dans un AVL respecte la relation S(h) = S(h-1) + S(h-2) + 1; S(0) = 1, S(1) = 2;

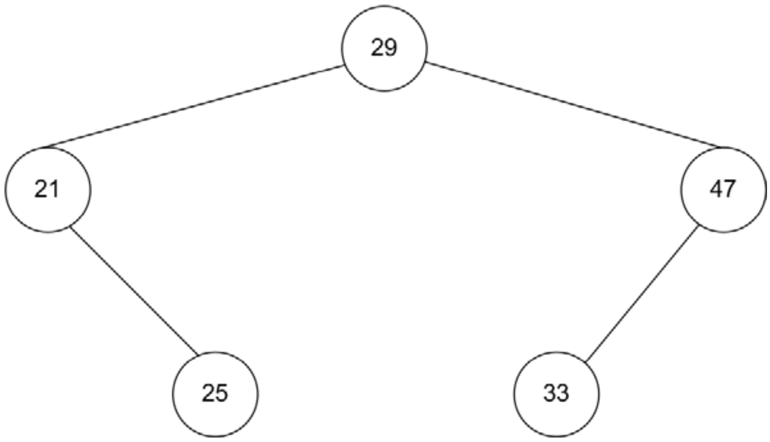
Donnez la représentation graphique de notre arbre AVL dont l'affiche <u>en-ordre</u> est :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12



Question 5 : Arbre binaire de recherche de type AVL (24 points)

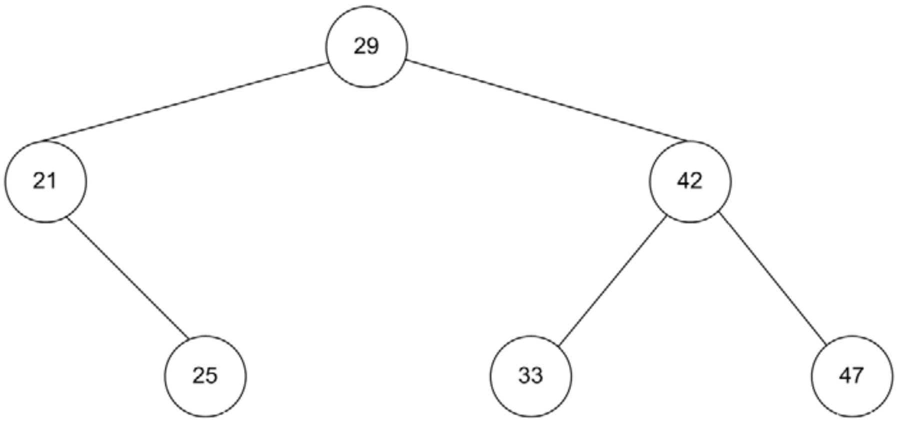
En considérant l'arbre AVL suivant :



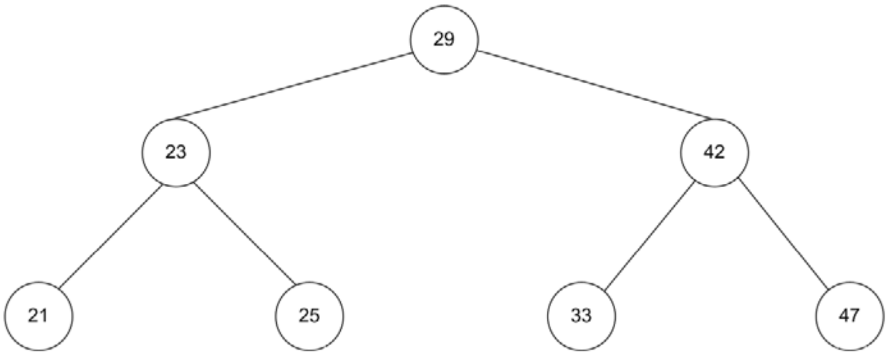
Effectuez l'ensemble des opérations suivantes dans l'ordre en vous servant des arbres ci-dessous :

Insérez 42
Insérez 23
Insérez 51
Insérez 45
Insérez 60
Insérez 30

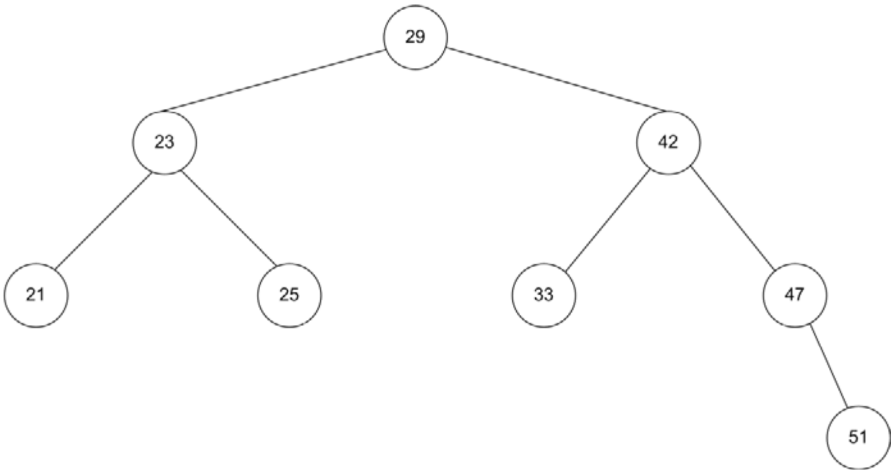
5.1) **(4 pnt)** Insérez 42.



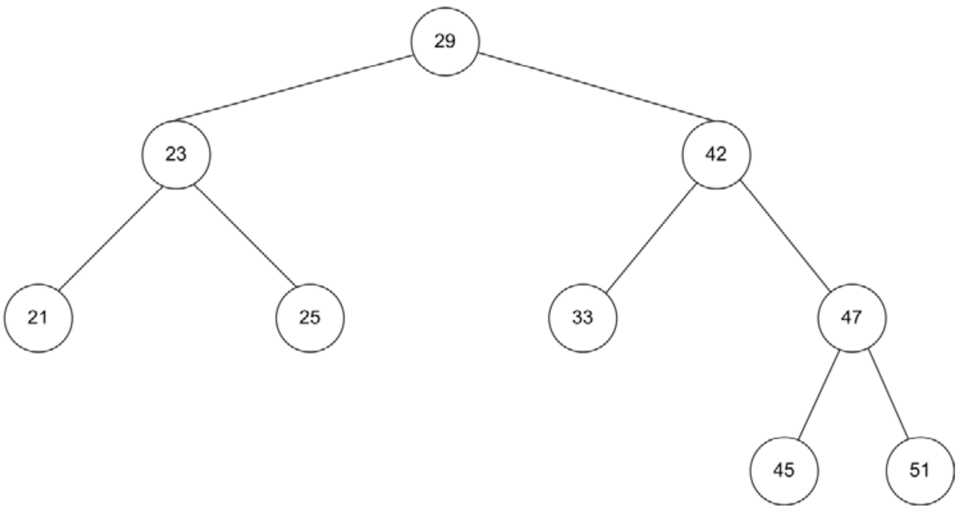
5.2) **(4 pnt)** Insérez 23.



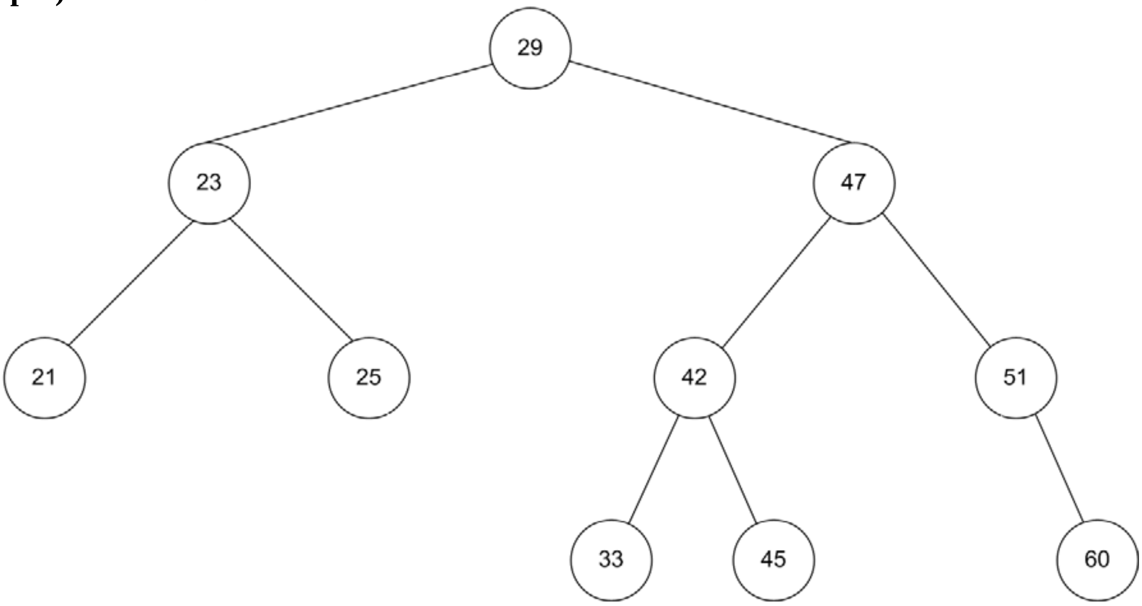
5.3) **(4 pnt)** Insérez 51.



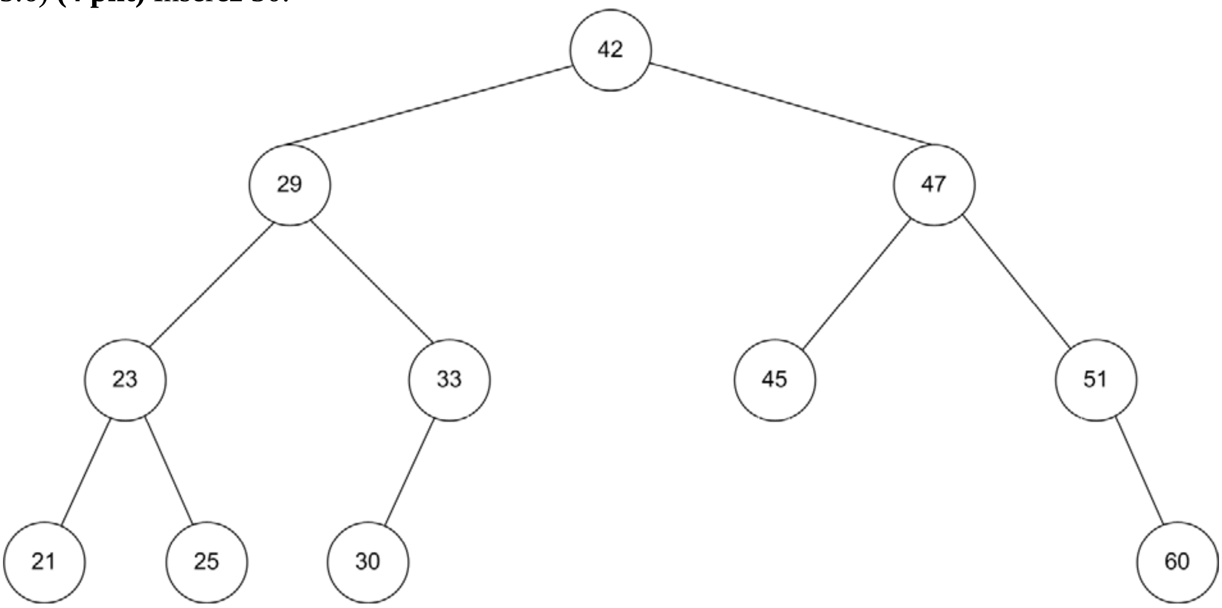
5.4) **(4 pnt)** Insérez 45.



5.5) **(4 pnt)** Insérez 60.



5.6) **(4 pnt)** Insérez 30.



Annexe 1

```
public final class SortIntra
{

    private static final int CUTOFF = 10;

    /**
     * Quicksort
     */
    public static <AnyType extends Comparable<? super AnyType>>
    void quicksort( AnyType [ ] a )
    {
        quicksort( a, 0, a.length - 1 );
    }

    /**
     * Appel interne à quicksort
     * Utilise Median 3 et une valeur limite (cutoff) de 10.
     */
    private static <AnyType extends Comparable<? super AnyType>>
    void quicksort( AnyType [ ] a, int left, int right )
    {
        if( left + CUTOFF <= right )
        {
            AnyType pivot = median3( a, left, right );


            // partitionnement
            int i = left, j = right - 1;
            for( ; ; )
            {
                while( a[ ++i ].compareTo( pivot ) < 0 ) { }
                while( a[ --j ].compareTo( pivot ) > 0 ) { }
                if( i < j )
                    swapReferences( a, i, j );
                else
                    break;
            }

            swapReferences( a, i, right - 1 );
            // fin du partitionnement

            // recursion
            quicksort( a, left, i - 1 );
            quicksort( a, i + 1, right );
        }
        else
            insertionSort( a, left, right );
    }
```

```
    /**
     * Interchange (swap) deux valeurs
     */
    public static <AnyType> void
    swapReferences( AnyType [ ] a, int index1, int index2 )
    {
        AnyType tmp = a[ index1 ];
        a[ index1 ] = a[ index2 ];
        a[ index2 ] = tmp;
    }


    /**
     * Median 3
     */
    private static <AnyType extends Comparable<? super AnyType>>
    AnyType median3( AnyType [ ] a, int left, int right )
    {
        int center = ( left + right ) / 2;
        if( a[ center ].compareTo( a[ left ] ) < 0 )
            swapReferences( a, left, center );
        if( a[ right ].compareTo( a[ left ] ) < 0 )
            swapReferences( a, left, right );
        if( a[ right ].compareTo( a[ center ] ) < 0 )
            swapReferences( a, center, right );

        swapReferences( a, center, right - 1 );
        return a[ right - 1 ];
    }

    /**
     * insertionSort interne.
     * Utilisé par by quicksort.
     */
    private static <AnyType extends Comparable<? super AnyType>>
    void insertionSort( AnyType [ ] a, int left, int right )
    {
        for( int p = left + 1; p <= right; p++ )
        {
            AnyType tmp = a[ p ]; int j;

            for( j = p; j > left && tmp.compareTo( a[ j - 1 ] ) < 0; j-- )
                a[ j ] = a[ j - 1 ];
            a[ j ] = tmp;
        }
    }
    public static void main( String [ ] args )
    {
        Integer [ ] a = {10, 85, 23, 29, 32, 56, 54, 13,
                             49, 31, 12, 33, 51, 47, 9, 18};

        quicksort( a );

        for(Integer valeur : a) System.out.print(valeur + " ");

    }
}
```