Act-2001 – Modèles en assurance vie – exercices additionnels

Etienne Marceau

9 avril 2017

1 Modèles de durée de vie

1. **(Traditionnel).** Soit une fonction $\mu(x) > 0$, $x \geq 0$. Soit une v.a. continue positive X dont la fonction de survie satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\mathrm{d}\overline{F}_X(x) = -\mu(x)\,\overline{F}_X(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{pour } x \geq 0 \text{ avec } \overline{F}_X(0) = 1.$$

$$\mathrm{d}\overline{F}_X(x) = -\mu(x)\,\overline{F}_X(x)\,\mathrm{d}x,$$

Résoudre cette équation différentielle pour trouver la solution $\overline{F}_X(x)$.

2. **(Traditionnel).** Soit la v.a. discrète $K_x = [T_x]$. À partir des données canadiennes, on a obtenu la fonction suivante :

$$\ln\left(\frac{q_x}{1-q_x}\right) = -7.6 + 0.09 \times x, \quad \text{pour} \quad x = 40, 41, ..., 90 \quad .$$

Question : Calculer $\Pr(K_{55} = 1)$ et $E[\min(K_{55}; 2)]$.

Solution :
On déduit

$$\frac{q_x}{1-q_x} = e^{-7.6} e^{0.09x}$$

On déduit

$$q_x = \frac{e^{-7.6} e^{0.09x}}{1 + e^{-7.6} e^{0.09x}}$$

On a

$$\begin{aligned}
\Pr(K_{55} = 1) &= p_{55} - {}_2p_{55} \\
&= \frac{1}{1 + e^{-7.6} e^{0.09 \times 55}} - \frac{1}{1 + e^{-7.6} e^{0.09 \times 55}} \frac{1}{1 + e^{-7.6} e^{0.09 \times 56}} \\
&= : 6.\,702\,233\,312\,62 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
E[\min(K_{55}; 2)] &= p_{55} + {}_2p_{55} \\
&= \frac{1}{1 + e^{-7.6} e^{0.09 \times 55}} + \frac{1}{1 + e^{-7.6} e^{0.09 \times 55}} \frac{1}{1 + e^{-7.6} e^{0.09 \times 56}} \\
&= 1.\,800\,999648
\end{aligned}$$

3. **(Traditionnel).** No et Mie réalisent une étude sur les données de mortalité de la population canadienne, dont les résultats sont les suivants :

No obtient	$\mu_x = \beta_0 + \beta_1 x$	, $x \in [40, 90]$,	avec	$\beta_0 = -9.9$	et	$\beta_1 = 0.097$;
Mie obtient	$\ln(\mu_x) = \beta_0' + \beta_1' x$	, $x \in [40, 90]$,	avec	$\beta_0' = -10.1$	et	$\beta_1' = 0.085$.

Question : Vous n'avez pas le temps de refaire leurs analyses. Choisir un seul modèle parmi les modèles de No et Mie en motivant votre choix sur vos observations sur les données de mortalité dans les pays occidentaux. Ensuite, calculer la probabilité qu'un individu de 60 ans survive 2 ans.

Solution :
On choisit le modèle de Mie

$$ln\left(\overline{\mu}_x\right) = \beta_0' + \beta_1' x$$

Pattern linéaire de $ln\left(\mu_x\right)$ pour $x \in [40, 90]$ (observation pour les pays occidentaux)
On a

$$\mu_x = e^{\beta_0' + \beta_1' x}$$

On a

$$\Pr\left(T_{60} > 2\right) = \exp\left(-e^{-7.75+0.085\times 60}\left(\frac{e^{0.085\times 2} - 1}{0.085}\right)\right) = 0.857\,251\,723\,756$$

4. **(Traditionnel).** À la suite d'une catastrophe nucléaire (e.g. Tchernobyl), la durée de vie d'un individu d'âge x est représentée par la v.a.

$$T_x = \min(Y_x, U, V, W)$$

où

$Y_x \sim Gompertz(\beta e^{\gamma x}, \gamma)$ ($\beta = 0.00004$, $\gamma = \ln(1.1)$)	(loi de mortalité avant la catastrophe)
$U \sim Exp(0.014)$	(cancers)
$V \sim Exp(0.017)$	(maladies dégénératives)
$W \sim Exp(0.009)$	(autres complications)

sont des v.a. indépendantes.
Question : Développer l'expression de $\overline{F}_{T_x}(t)$, $t \geq 0$.

Solution : On a

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{T_x}(t) &= \Pr(T_x > t) = \Pr(\min(Y_x, U, V, W) > t) \\
&= \Pr(Y_x > t, U > t, V > t, W > t) \\
&= \Pr(Y_x > t)\Pr(U > t)\Pr(V > t)\Pr(W > t) \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{\beta \mathrm{e}^{\gamma x}}{\gamma}\left(\mathrm{e}^{\gamma t}-1\right)}\mathrm{e}^{-0.014t}\mathrm{e}^{-0.017t}\mathrm{e}^{-0.009t} \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{\beta \mathrm{e}^{\gamma x}}{\gamma}\left(\mathrm{e}^{\gamma t}-1\right)}\mathrm{e}^{-0.04t}
\end{aligned}$$

5. **(Traditonnel).** On considère un groupe de $m = 1000000$ (1 million) de nouveau-nés dont les durées de vie sont représentés par les v.a. iid $X_1, ..., X_n$ avec $X_i \sim X \sim Gompertz\left(\beta, \gamma\right)$ avec $\mu\left(x\right) = \beta e^{\gamma x}$, $x \geq 0$ ($\beta = 0.0005$ et $\gamma = \ln 1.1$).

   Questions :

   (a) Développer l'expression de l'âge x_m tel que le nombre espéré de survivants à l'âge x_m soit égal à 1. Calculer sa valeur selon les hypothèses fournies.

   (b) Est-ce que l'âge x_m est une fonction croissante ou décroissante du paramètre β ?

   Solution :

   (a) Développer l'expression de l'âge x_m tel que le nombre espéré de survivants à l'âge x_m soit égal à 1. Calculer sa valeur selon les hypothèses fournies.

      i. $N_x = \#$ de survivants à l'âge x parmi les nouveau-nés
      ii. $E\left[N_x\right] = \#$ espéré de survivants à l'âge x
      iii. $E\left[N_x\right] = m \times \overline{F}_X\left(x\right) = c$
      iv. On chercher x tq $m \times \overline{F}_X\left(x\right) = c$
      v. $x_m = F_X^{-1}\left(1 - \frac{c}{m}\right)$
      vi. $\Rightarrow x_{100000} = F_X^{-1}\left(1 - \frac{1}{1000000}\right)$
      vii. $x_{100000} = \frac{1}{\gamma}\ln\left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\ln\left(\frac{1}{1000000}\right)\right) = \frac{1}{\gamma}\ln\left(1 + \frac{\gamma}{\beta}\ln\left(1000000\right)\right)$

   (b) Est-ce que l'âge x_m est une fonction croissante ou décroissante du paramètre β ?

      i. x_m est clairement une fonction décroissante en β

6. **(Traditionnel).** Soit la v.a. discrète $\Theta_x \in \{1,2\}$ où $\{\Theta_x = 1\}$ signifie que l'individu est non-fumeur et $\{\Theta_x = 2\}$ signifie que l'individu est fumeur. De plus, $\eta_x(j) = \Pr(\Theta_x = j)$ désigne la probabilité qu'un individu d'âge x, qui est tiré au hasard au sein de la population d'âge x d'un pays, soit non-fumeur (pour $j = 1$) ou fumeur (pour $j = 2$).
La quantité $\eta_x(j)$ s'interprête aussi comme étant la proportion d'individus d'âge x qui sont non-fumeurs ou fumeurs.
Soit la v.a. T_x qui représente la durée de vie d'individu d'âge x. Sachant que $\{\Theta_x = j\}$, $(T_x|\Theta_x = j) \sim Gompertz\left(\beta_j e^{\gamma x}, \gamma\right)$, avec $\beta_1 = 0.0004$, $\beta_2 = 0.0008$, $\gamma = \ln(1.1)$.
De plus, on a $\eta_{40}(1) = 0.8$ et $\eta_{40}(2) = 0.2$.
Questions :
   (a) Développer l'expression de $F_{T_{40}}(t)$ en fonction de $\eta_{40}(1)$, $\eta_{40}(2)$ et de fonctions de survie de loi Gompertz.
   (b) Si l'individu de 40 ans a survécu jusqu'à 80 ans, quelle est la probabilité qu'il soit non-fumeur ? ou qu'il soit fumeur ? Cela revient à calculer $\eta_{80}(1)$ et $\eta_{80}(2)$. Intuitivement, est-ce que $\eta_{80}(1) = \eta_{40}(1)$ et $\eta_{80}(2) = \eta_{40}(2)$? Interpréter.
   (c) Développer l'expression de $F_{T_{80}}(t)$.

Solution :
   (a) Développer l'expression de $F_{T_{40}}(t)$ en fonction de $\eta_{40}(1)$, $\eta_{40}(2)$ et de fonctions de survie de loi Gompertz.
      – $F_{T_{40}}(t) = \sum_{j=1}^{2} \eta_{40}(j) F_{T_{40}|\Theta_x=j}(t) = \sum_{j=1}^{2} \eta_{40}(\theta_j)\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\beta_j}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma 40}\left(\mathrm{e}^{\gamma t}-1\right)}\right)$
   (b) Si l'individu de 40 ans a survécu jusqu'à 80 ans, quelle est la probabilité qu'il soit non-fumeur ? ou qu'il soit fumeur ? Cela revient à calculer $\eta_{80}(1)$ et $\eta_{80}(2)$. Intuitivement, est-ce que $\eta_{80}(1) = \eta_{40}(1)$ et $\eta_{80}(2) = \eta_{40}(2)$? Interpréter.
      – $\eta_{80}(1) = \Pr(\Theta_{80} = 1|T_{40} > 40) = \frac{\overline{F}_{T_{40}}(40)\eta_{40}(1)}{\overline{F}_{T_{40}}(t)}$
      – $\eta_{80}(1) = \frac{\overline{F}_{T_{40|\Theta_{40}=1}}(40)\eta_{40}(1)}{\overline{F}_{T_{40|\Theta_{40}=1}}(40)\eta_{40}(1)+\overline{F}T_{40|\Theta_{40}=2}(40)\eta_{40}(2)}$
      – $\eta_{80}(1) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\beta_1}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma 40}\left(\mathrm{e}^{\gamma 40}-1\right)}\times 0.8}{\mathrm{e}^{-\frac{\beta_1}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma 40}\left(\mathrm{e}^{\gamma 40}-1\right)}\times 0.8+\mathrm{e}^{-\frac{\beta_2}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma 40}\left(\mathrm{e}^{\gamma 40}-1\right)}\times 0.2}$
      – $\Rightarrow \eta_{80}(1) = \ldots$
      – $\eta_{80}(2) = \Pr(\Theta_{80} = 2|T_{40} > 40) = \frac{\overline{F}_{T_{40}}(40)\eta_{40}(2)}{\overline{F}_{T_{40}}(t)}$
      – $\eta_{80}(2) = \frac{\overline{F}_{T_{40|\Theta_{40}=1}}(40)\eta_{40}(2)}{\overline{F}_{T_{40|\Theta_{40}=1}}(40)\eta_{40}(1)+\overline{F}T_{40|\Theta_{40}=2}(40)\eta_{40}(2)}$
      – $\eta_{80}(2) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\beta_2}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma 40}\left(\mathrm{e}^{\gamma 40}-1\right)}\times 0.2}{\mathrm{e}^{-\frac{\beta_1}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma 40}\left(\mathrm{e}^{\gamma 40}-1\right)}\times 0.8+\mathrm{e}^{-\frac{\beta_2}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma 40}\left(\mathrm{e}^{\gamma 40}-1\right)}\times 0.2}$
      – $\Rightarrow \eta_{80}(2) = \ldots$
      – $\eta_{80}(1) > \eta_{40}(1)$: la proportion de survivants non-fumeurs à un âge élevé est plus grande.
      – c'est normal, car on assume que la probabilité de survie des fumeurs est plus faible que celle des non-fumeurs
   (c) Développer l'expression de $F_{T_{80}}(t)$.
      – $F_{T_{80}}(t) = 1 - \overline{F}_{T_{80}}(t)$
      – $\overline{F}_{T_{80}}(t) = \Pr(T_{80} > t) = \Pr(T_{40} > 40 + t|T_{40} > 40)$

- $\overline{F}_{T_{80}}(t) = \frac{\overline{F}_{T_{80}}(40+t)}{\overline{F}_{T_{40}}(40)}$
- $\overline{F}_{T_{80}}(t) = \dfrac{\sum_{j=1}^{2} \eta_{40}(\theta_j) \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\beta_2}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma 40}\left(\mathrm{e}^{\gamma 40}-1\right)}}{\mathrm{e}^{-\frac{\beta_2}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma 40}\left(\mathrm{e}^{\gamma 40}-1\right)}} \left(\mathrm{e}^{-\frac{\beta_j}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma 40}\left(\mathrm{e}^{\gamma(t+40)}-1\right)}\right)}{\sum_{j=1}^{2} \eta_{40}(\theta_j)\left(\mathrm{e}^{-\frac{\beta_j}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma 40}\left(\mathrm{e}^{\gamma(40)}-1\right)}\right)}$
- $\overline{F}_{T_{80}}(t) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\eta_{40}(\theta_j)\mathrm{e}^{-\frac{\beta_2}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma 40}\left(\mathrm{e}^{\gamma 40}-1\right)}}{\sum_{j=1}^{2} \eta_{40}(\theta_j)\left(\mathrm{e}^{-\frac{\beta_j}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma 40}\left(\mathrm{e}^{\gamma(40)}-1\right)}\right)} \left(\mathrm{e}^{-\frac{\beta_j}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma 40}\left(\mathrm{e}^{\gamma(t+40)}-1\right)}\mathrm{e}^{+\frac{\beta_2}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma 40}\left(\mathrm{e}^{\gamma 40}-1\right)}\right)$
- $\overline{F}_{T_{80}}(t) = \sum_{j=1}^{2} \eta_{80}(\theta_j)\left(\mathrm{e}^{-\frac{\beta_j}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma 80}\left(\mathrm{e}^{\gamma t}-1\right)}\right)$

7. **(Informatique).** On considère un individu d'âge x dont la durée de vie est définie par la v.a. T_x. On effectue les calculs en supposant la loi Makeham avec les paramètres ($\alpha = 0.001, \beta = 0.00005, \gamma = \ln(1.$
On sait que

$$T_x = \min(W, Y_x)$$

où W et Y_x sont des v.a. indépendantes avec

$$W \sim Exp(\alpha) \text{ (cause accidentelle)}$$

et

$$Y_x \sim Gompertz(\beta e^{\gamma x}, \gamma) \text{ (cause "biologique").}$$

Deux approches (**#1** et **#2**) sont considérées pour évaluer les trois probabilités suivantes :

$$\varphi_1 = E\left[1_{\{T_x \leq n\}}\right] \quad ; \quad \varphi_2 = E\left[1_{\{T_x \leq n \cap T_x = W\}}\right] \quad \text{et} \quad \varphi_3 = E\left[1_{\{T_x \leq n \cap T_x = Y_x\}}\right].$$

Générateur de nombres pseudo-aléatoires. On utilise le générateur congruentiel linéaire ($a = 41358$, $m = 2^{31} - 1$, $x_0 = 20150418$) pour générer 1000 (mille) réalisations de $\left(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}\right)$ de (U_1, U_2) où

$$U_i^{(j)} = \frac{x_{2(j-1)+i}}{m}, \ j = 1, 2, ..., 1000 \text{ et } i = 1, 2,$$

avec $x_l = \mathrm{mod}(a \times x_{l-1}; m)$, $l = 1, 2, ..., 2000$. Exemple : $U_1^{(1)} = \frac{x_1}{m}$, $U_2^{(1)} = \frac{x_2}{m}$, $U_1^{(2)} = \frac{x_3}{m}$, $U_2^{(2)} = \frac{x_4}{m}$, ..., $U_2^{(1000)} = \frac{x_{2000}}{m}$. On obtient :

j	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$
1	0.073263705	0.040303568
1000	0.216409247	0.253637578

On utilise la réalisation $U_1^{(j)}$ pour simuler une réalisation $W^{(j)}$.
On utilise la réalisation $U_2^{(j)}$ pour simuler une réalisation $Y_x^{(j)}$.
On fixe $x = 30$ et $n = 50$.
Questions : (Approche #1 = (a)-(f) ; Approche #2 = (g))

(a) Utiliser la méthode inverse pour produire $n_{sim} = 1000$ réalisations de $\left(W^{(j)}, Y_x^{(j)}, T_x^{(j)}\right)$ de (W, Y_x, T_x) :
   i. Indiquer la méthode pour chacune des 3 v.a.
   ii. Indiquer la réalisation #1 de (W, Y_x, T_x).
   iii. Indiquer la réalisation #1000 de (W, Y_x, T_x).
   iv. Vérification. Valeurs de la réalisation #2 : 2079 :2882163 ; 44 :23507194 ; 44 :23507194

(b) Interpréter et comparer les quantités φ_1, φ_2 et φ_3.
   – $\widetilde{\varphi}_1$ correspond la probabilité que T_x prenne une valeur inférieure ou égale à 50 ;
   – $\widetilde{\varphi}_2$ correspond la probabilité que T_x prenne une valeur inférieure ou égale à 50 **et** que $W < Y_x$. Autrement dit, il s'agit de la probabilité d'un décès accidentel dans les 50 prochaines années ;
   – $\widetilde{\varphi}_3$ correspond la probabilité que T_x prenne une valeur inférieure ou égale à 50 **et** que $Y_x < W$. Autrement dit, il s'agit de la probabilité d'un décès de cause naturelle dans les 50 prochaines années.

(c) Avec les résultats en (a), calculer une approximation de φ_1.

i. Indiquer l'expression de l'approximation $\widetilde{\varphi}_1$ de φ_1.
ii. Indiquer la valeur de l'approximation $\widetilde{\varphi}_1$ de φ_1.

(d) Avec les résultats en (a), calculer une approximation de φ_2.
i. Indiquer l'expression de l'approximation $\widetilde{\varphi}_2$ de φ_2.
ii. Indiquer la valeur de l'approximation $\widetilde{\varphi}_2$ de φ_2.

(e) Avec les résultats en (a), calculer une approximation de φ_3.
i. Indiquer l'expression de l'approximation $\widetilde{\varphi}_3$ de φ_3.
ii. Indiquer la valeur de l'approximation $\widetilde{\varphi}_3$ de φ_3.

(f) Soit un groupe de $m = 1000$ individus d'âge x dont les durées de vie $T_{x,i}$ sont i.i.d. avec $T_{x,i} \sim T_x$, $i = 1, ..., 1000$. Calculer une approximation du nombre espéré φ_4 de survivants à l'âge $x + n$ parmi les m individus, du nombre espéré φ_5 de décès de cause "biologique" au cours des n prochaines années et du nombre espéré φ_6 de décès de cause "accidentelle" au cours des n prochaines années .

(g) **Approche #2** :
i. Développer l'expression exacte de φ_1. Comparer avec $\widetilde{\varphi}_1$ avec la valeur exacte de φ_1.
ii. Développer l'expression de φ_2 sous la forme d'une intégrale finie (en fonction de la f_W et $\overline{F}_{Y_x}$) et évaluer l'intégrale numériquement. Comparer ce dernier résultat avec $\widetilde{\varphi}_2$.
iii. Développer l'expression de φ_3 sous la forme d'une intégrale finie (en fonction de la f_{Y_x} et $\overline{F}_W$) et évaluer l'intégrale numériquement. Comparer ce dernier résultat avec $\widetilde{\varphi}_3$.

(h) Solution de l'**approche #2** :
i. Développer l'expression exacte de φ_1. Comparer avec $\widetilde{\varphi}_1$ avec la valeur exacte de φ_1.
Expression : $\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_3$.
$\varphi_1 = \int_0^{50} f_{T_x}(t)\mathrm{d}x = F_{T_x}(50) = {}_{50}q_x$
$\varphi_1 = 0.6722299$
ii. Développer l'expression de φ_2 sous la forme d'une intégrale finie (en fonction de la f_W et $\overline{F}_{Y_x}$) et évaluer l'intégrale numériquement. Comparer ce dernier résultat avec $\widetilde{\varphi}_2$.
$\varphi_2 = \int_0^{50} f_W(t) \times \bar{F}_{Y_x}(t)\,\mathrm{d}x = \ldots$
$\varphi_2 = 0.04072415$
iii. Développer l'expression de φ_3 sous la forme d'une intégrale finie (en fonction de la f_{Y_x} et $\overline{F}_W$) et évaluer l'intégrale numériquement. Comparer ce dernier résultat avec $\widetilde{\varphi}_3$.
$\varphi_2 = \int_0^{50} f_{Y_x}(t) \times \bar{F}_W(t)\,\mathrm{d}x = \ldots$
$\varphi_2 = 0.6315057$