3.1.15

Olivier Turcotte

15. Soit la v.a.

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} c1_{\{B_k > b\}}, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

avec

$$M \sim Pois(\lambda = 3)$$

$$\begin{aligned} B_k &\sim Pareto(\alpha = 1.5, \lambda = 1500),\ k = 1, 2, ... \\ c &= 600 \\ b &= 10000. \end{aligned}$$

Question: Calculer $E[X]$, $Var(X)$, $\Pr(X \leq 1000)$, $VaR_{0.995}(X)$.

Figure 1:

$E[X]$:

Calculons la probabilité que $B_k > b$:

$$P(B_k > b) = 1 - F_{B_k}(b) = 0.047107$$

Je définis une nouvelle v.a $I \sim Bern(q = P(B_K > b))$. Ainsi, si $M > 0$, X devient une somme de bernouilli, donc une binomiale. Je définis donc une nouvelle v.a $W = \sum_{i=1}^{M} I \rightarrow W \sim Binom(n = M, q)$. Le calcul de l'espérance peut être effectué de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E[X] &= E[E[X|M]] \\ &= E[E[c * W]] \\ &= E[c * M * q] \\ &= c * q * \lambda \\ &= 84,79 \end{aligned}$$

$Var(X)$:

On reprend les même v.a définies plus haut :

$$\begin{aligned} Var(X) &= Var(E[X|M]) + E[Var(X|M)] \\ &= Var(c * q * M) + E[c^2 * q * (1 - q) * M] \\ &= (c * q)^2 * \lambda + c^2 * q * (1 - q) * \lambda \\ &= 50876,108 \end{aligned}$$

$P(X \leq 1000)$:

```r
q <- 0.047107
lambda <- 3
c <- 600
Fx <- function(x) {
    dpois(0, lambda) + sum(sapply(seq(1000), function(i) dpois(i, lambda) *
        pbinom(x/c, i, q)))
}
```

La réponse est donc 0.990907

$VaR_{0.995}(X)$:

```r
uniroot(function(x) Fx(x)-0.995,c(0,10000))$root
```

```
## [1] 1200
```