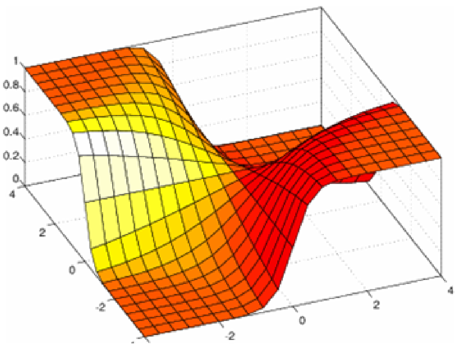
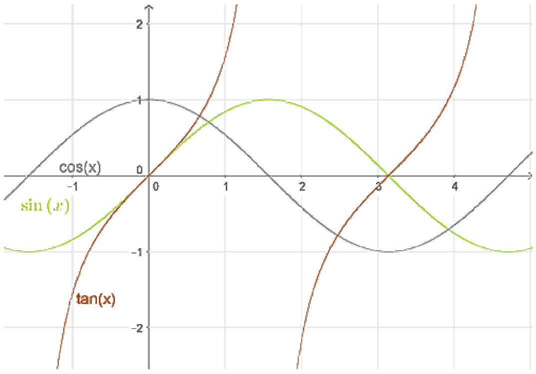
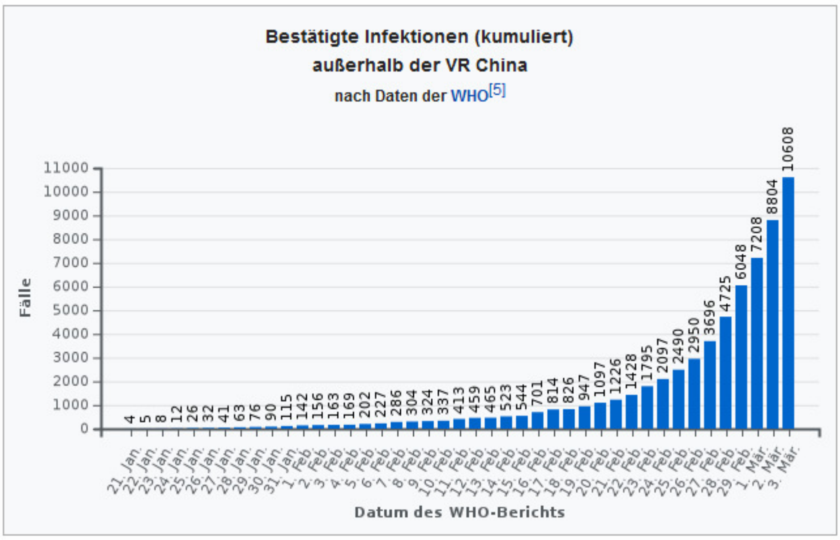
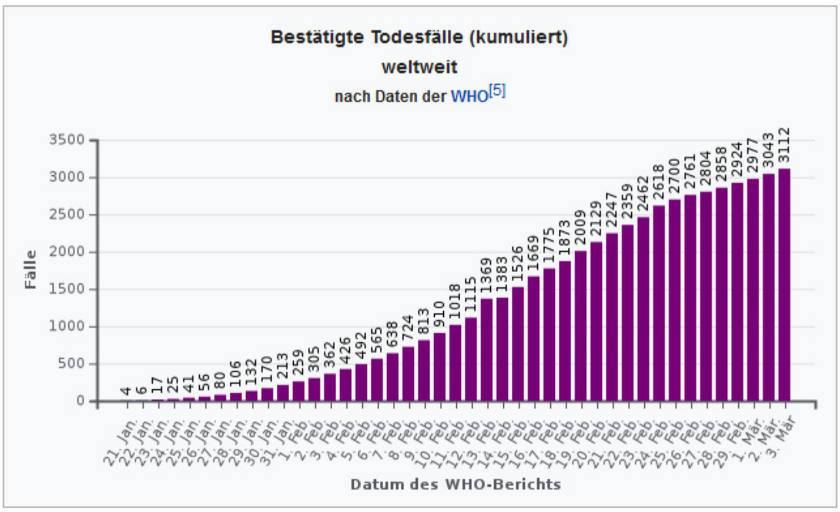
Modul 926 GIBB

Funktionen









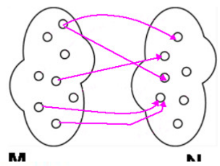
Allgemeines zu Funktionen

Vielleicht kennen Sie Funktionen auch aus der Programmierung:
Man übergibt einen Wert an eine Funktion, und diese macht daraus einen andern Wert.

Funktionen sind vereinfacht gesagt **Zuordnungen**. Zuordnungen zwischen zwei Grössen oder zwei Mengen. Beispiele:

- Zuordnung einer Menge von Artikeln zu deren Kosten;
- Zuordnung von Personen zu ihren Kleidern.

Funktionen können als Mengen mit Verbindungen dargestellt werden.

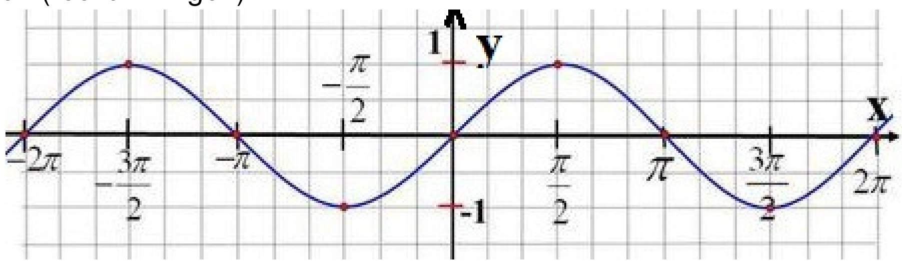


Bei Zahlen macht man oft eine **Wertetabelle**:

Wertetabelle

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	0	1,5	6	13,5	24	37,5	54

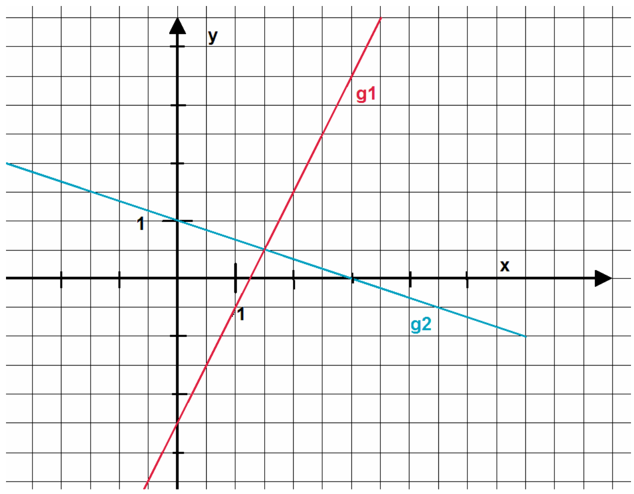
Aus einer Wertetabelle kann man dann eine Grafik machen:
Jedem x-Wert wird genau ein y-Wert zugeordnet; die beiden Werte sind **die Koordinaten** des Punktes in der Grafik. (Meist im kartesischen (rechtwinkligen) Koordinatensystem



Beispiel: Sinusfunktion.
Zuordnung $\mathbf{y = sin\ (x)}$:

- Zu jedem x-Wert gibt es **genau einen** y-Wert, aber
- Zu einem y-Wert kann es **mehrere** x-Werte geben.

Wünschbar wäre für solche Zuordnungen eine **Formel**, die für jedes Wertepaar gleich ist.
Die Formel sollte **allgemein gültig** sein, also für **jeden beliebigen** Wert von x einen Wert für y liefern -> also wiederum ein Wertepaar.



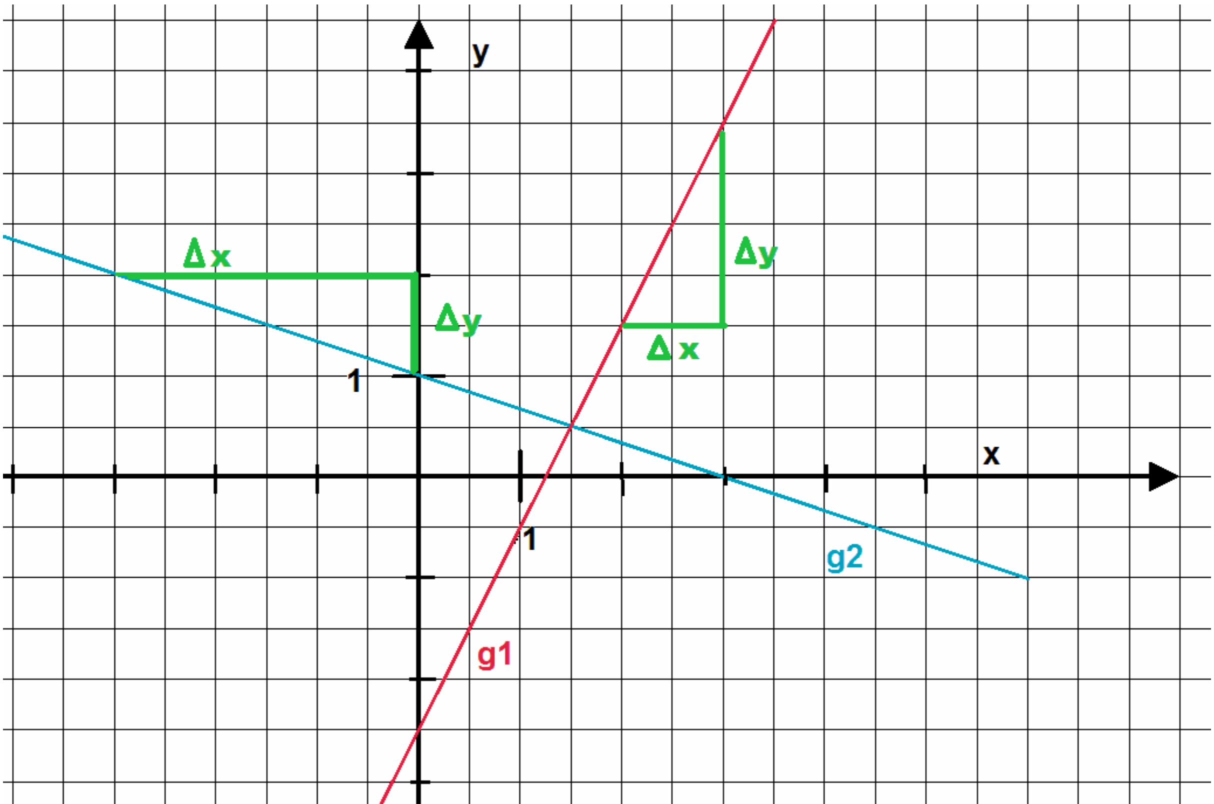
x und **y** werden nur in der allgemeinen oder abstrakten mathematischen Betrachtung gewählt.

In der Realität stehen bei den Funktionen statt x und y normale Grössen wie Kilogramm oder Franken oder Meter oder Sekunden usw.

<u>Lineare Funktionen: Geradengleichung: y = mx + b</u>

- Steigung ist wie schon bei der Gelände-Steigung definiert als
  senkrechte Änderung (△ Höhe)
  geteilt durch die
  waagrechte Änderung (△ Länge):
  m = △y / △x
- „Änderung“ ist allgemein **neuer Wert (2) minus alter Wert (1)** m = (y2 - y1) / (x2 – x1)
  Dazu nimmt man zwei **beliebige** Punkte auf der Geraden, liest x und y ab.
  Die Reihenfolge der Punkte ist egal! Nur die richtigen Wertepaare zusammennehmen!
- Den Achsenabschnitt b liest man entweder aus der Grafik ab, oder man kann ihn aus der vorherigen Berechnung von m mit jedem beliebigen x,y-Wertepaar ausrechnen:
  b = y – mx

  <u>Ziel:</u> Die **<u>Funktion</u>** finden: Die **<u>allgemeine Formel</u>**, um aus jedem X-Wert den Y-Wert zu berechnen → Geradengleichungen der Geraden G1 und g2!



	g1	g2
m geschätzt oder abgelesen		
b abgelesen		
m = (y2 - y1) / (x2 – x1)		
b gerechnet		
Geradengleichung		

Allgemeine Zusammenhänge herstellen heisst: die Funktion finden

X und y werden nur in der abstrakten mathematischen Betrachtung gewählt.

In der Realität stehen bei den Funktionen statt x und y normale Grössen wie Kilogramm oder Franken oder Meter oder Sekunden usw.

Aus bestimmten Beobachtungen oder Messungen oder Erfahrung versucht man, etwas Allgemeingültiges abzulesen, mit dem man dann z.B. etwas Vergangenes analysieren kann oder Voraussagen treffen kann.

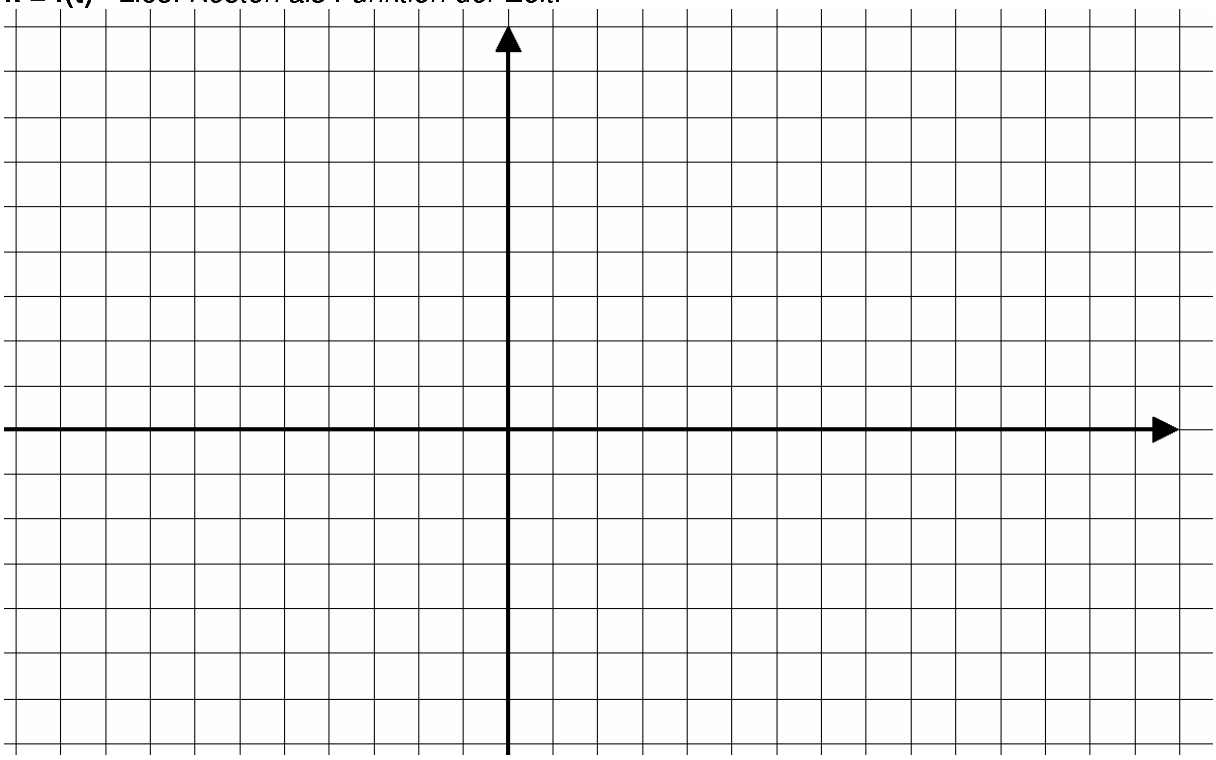
Praxis-Beispiel:

Telefonrechnung für das Festnetz. Dies setzt sich bei einigen Anbietern aus einer Grundgebühr und einer Gesprächsgebühr zusammen.
Hier nehmen wir eine lineare Funktion an, die grafische Darstellung ergibt also eine Gerade.

Jemand analysiert die Beträge seiner Telefonrechnungen und möchte daraus Grundgebühr und Minutenpreis herausfinden.

Monat	Januar	Februar	März	April
x = Zeit (t) in Minuten telefoniert **(t)**	70	150	115	75
y = Monatskosten **(k)**	27.60	34.-	31.20	28.-

a) Trage diese Punkte ungefähr grafisch auf.
b) Versuche, den Minutenpreis und die Grundgebühr aus der Grafik abzulesen, abzuschätzen.
c) Berechne den Minutenpreis
d) Berechne die Grundgebühr (wo findet man die Grundgebühr grafisch?)
e) Wieviele Monatsrechnungen muss man berücksichtigen, um all das herauszufinden?
f) Finde die allgemeingülitge Funktion, welche aus der
Telefonzeit **t** pro Monat die Monatkosten **k** berechnet**:**
k = f(t) Lies: *Kosten als Funktion der Zeit*.



Uebung

Ordne die Funktionen den Graphen zu.

(Der Graph = die grafische Darstellung einer Funktion). Bedeutungen:

- · = mal
- / = Bruchstrich

Als Variablen sind wahlweise die folgenden zu nehmen:

- die abstrakten x und y (**ohne** Einheiten)
- ein Zeit-Ort-Diagramm mit t (Zeit in Sek. s) und s (Ort in Metern m).
  Hier sind **Einheiten** angegeben!
  -> die Steigung ist eine Geschwindigkeit (in **m**/**s**)
  -> der Achsenabschnitt ist ein Ort / eine Strecke (in **m**)

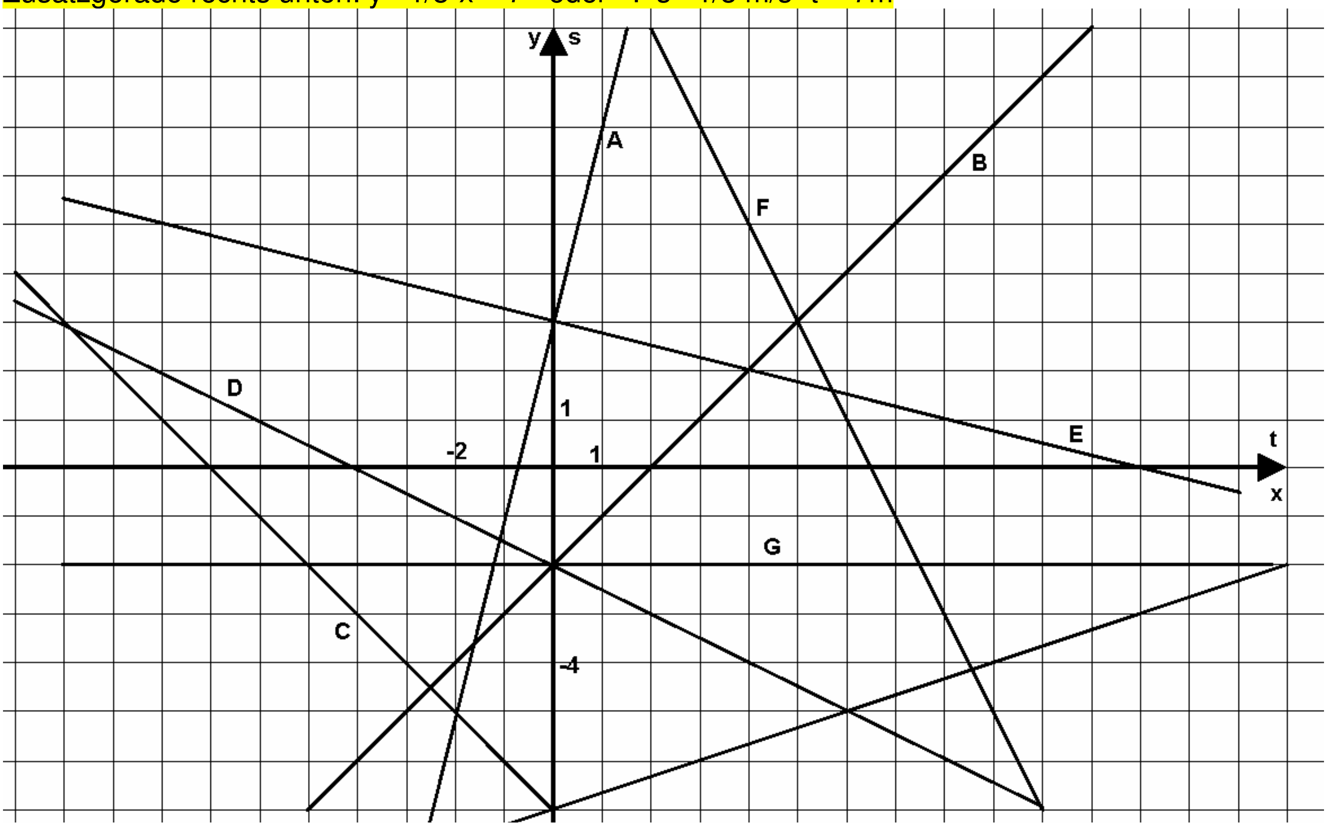
Achtung:

- es hat **eine** Funktion, die zu **keinem** Graphen passt,
- es hat einen Graphen, zu dem die Funktion **gefunden** werden muss

Lösungen

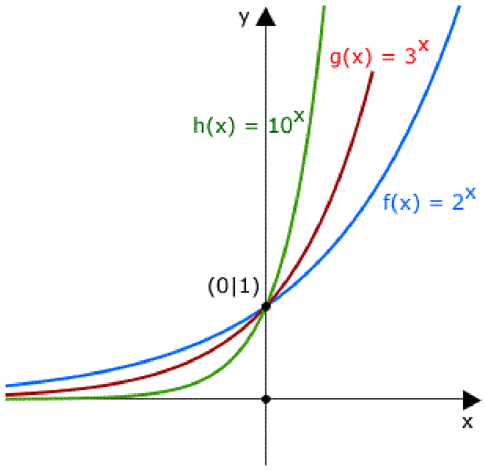
Buchstabe?	Graph
B	**1** s = 1m/s · t – 2m
E	**2** y = -(1/4) x + 3
D	**3** s = -0.5m/s · t – 2m
G	**4** y = -2
= x Achse!	**5** y = 0
A	**6** s = 4m/s · t + 3m
C	**7** s = -1m/s · t - 7m
F	**8** s = -2m/s · t + 13m

Zusatzgerade rechts unten: y= 1/3·x - 7 oder : s= 1/3 m/s· t - 7m



Die Exponentialfunktion

- Beispiel Kettenbrief: Jemand sendet eine Nachricht an 5 Freunde. Jeder soll sie innert einer Stunde wieder an 5 **neue** Freunde (die sie noch nicht haben) weiterschicken. Wie lange dauert es theoretisch, bis die ganze Menschheit (8 Milliarden Leute) die Nachricht hat?
- Beispiel Corona-Virus: Annahme: jeder angesteckte Mensch steckt innert 3 Tagen im Schnitt 2,5 weitere Menschen an. Wie lange dauert es theoretisch, bis die ganze Menschheit angesteckt wäre? (Geht nur, wenn keine Gegenmassnahmen wirken und wenn jeder Angesteckt nur Gesunde ansteckt.
-



Eine Exponentialfunktion ist auch eine Potenzfunktion wie x^2 oder x^5, aber hier steht die Variable x im **Exponenten**:

$$\boxed{f(x) = a^x}$$

Das ist die einfache Form.

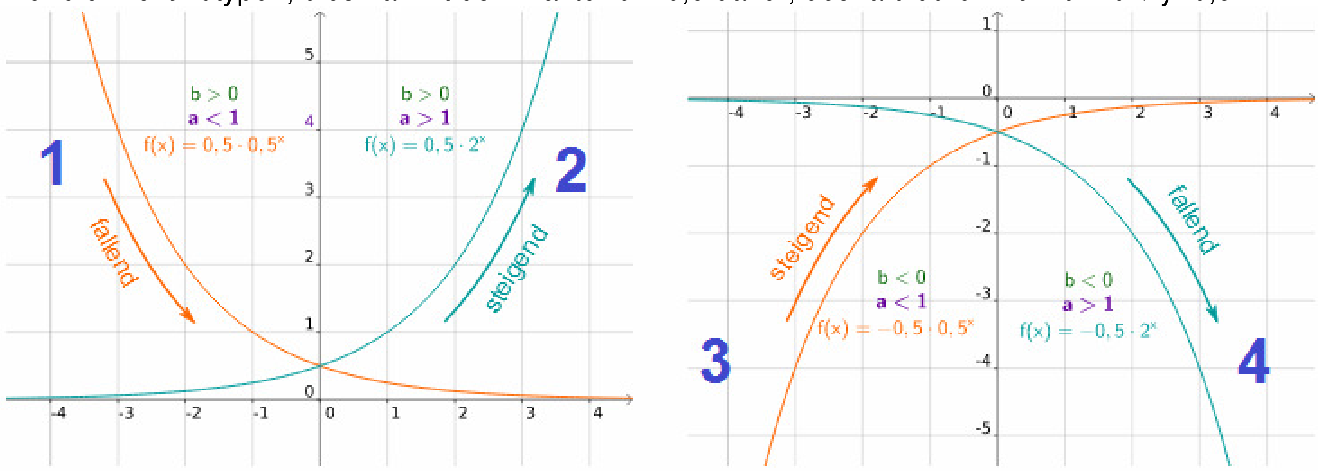
Statt f(x) steht häufig auch y.

Ohne Faktor davor geht jede Grafik einer solchen Funktion bei x=0 durch den Punkt y=**1**, denn „etwas hoch 0" gibt immer 1.
Die x-Achse ist eine sogannte Asymptote: Die Kurve kommt beliebig nahe daran heran, erreicht sie aber theoretisch nie.
Exponentialfunktionen steigen höher als **jede** Potenzfunktion (die Potenzfunktion hat x nur als Basis). Z.B. überholt 2^x irgendwann sogar eine Potenzfunktion wie x^2 ,x^{20} oder auch x^{2000} .

Etwas allgemeinere Form der Exponentialfunktion (mit Faktoren b und k):

$y = b \cdot a^{(k \cdot x)}$ In der Praxis kann irgendeiner dieser Parameter gesucht sein, dazu muss man die Gleichung umformen.	y ist das „Ergebnis", der Funktionswert x ist die Variable, häufig die eine **Anzahl** Zeit-Einheiten. (x muss einheitenlos sein) a ist ein Parameter, hier die Basis b ist ein Parameter, hier ein Faktor, der die Kurve vertikal staucht oder dehnt k ist ein Parameter, der die „Schnelligkeit" der Zu- (oder Ab-)nahme bestimmt

Hier die 4 Grundtypen, diesmal mit dem Faktor b = 0,5 davor, deshalb durch Punkt x=0 / y=0,5:

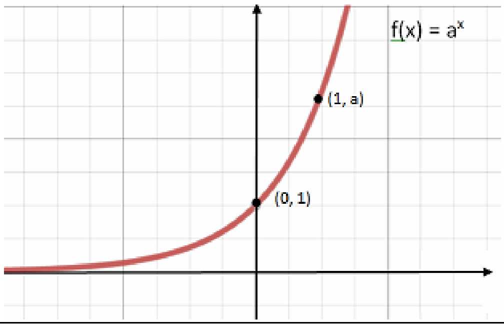


Vorkommen/Beispiele:
1 = Zerfallsprozesse, Schrumpfungsprozesse, Abkühlung, wertmässige Abschreibungen
2 = Exponentielles Wachstum (Anfang einer Epidemie,
Kapital mit Zinseszins, letzteres ist aber **kein natürliches** Wachstum!)
3 = Aufheizkurve (Wohnung, Pfanne); Endphase aller natürlichen Wachstumsvorgänge
4 = kaum praktische Bedeutung. Nur Wachstum eines „negativen Guthabens" (Schulden)

„Übersetzung“ von $y = b \cdot a^{(k \cdot x)}$ in die beiden häufigen Typen 1 und 2:

Typ 1:
Exponentielle Wachstumskurve,
(Dies kommt in der Natur nur am **Anfang** von Prozessen vor), z.B.:
Wachstum von Populationen.
Wirtschaft: Kapital mit Zinseszins.

Hier seien b=1 und k=1.
Die Basis a ist hier **e** (Eulersche Zahl)

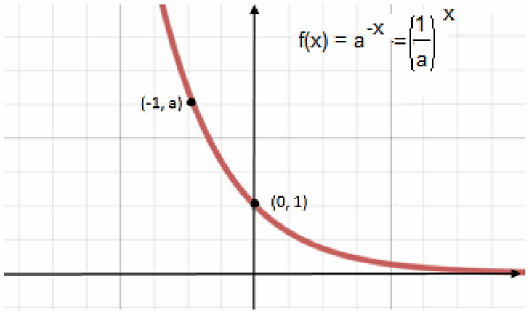


$$Aktueller\_Wert = Startwert \cdot Wachstumsfaktor^{Anzahl\_Zeitabschnitte}$$

Typ 2:
Schrumpfungs- oder Abnahmeprozesse.
(sehr häufig in der Natur)

Mathematisch ist dann

- entweder **k negativ**, so dass der Exponent mit zunehmendem x negativer wird.
- oder die **Basis a** ist ein **Bruch**, der kleiner als 1 ist



$$\mathrm{Re}\,stmenge = Startmenge \cdot Schrumpfungsfaktor^{Anzahl\_Zeitabschnitte}$$

Ermittlung von Wachstums- und Schrumpfungsfaktoren:

Diese Faktoren beziehen sich immer auf einen bekannten, bestimmten Zeitabschnitt!
Sekunden, Tage, Jahre.
Oft werden Wachstums- oder Schrumpfungzahlen als **%-Wert** angegeben: Beispiel Zins:
„Soviel %“ des Anfangswerts kommen **pro** betrachtetem Zeitabschnitt hinzu oder gehen weg.
Zum Rechnen mit dieser Funktion muss man aber immer den Faktor heranziehen und deshalb nötigenfalls % in den entsprechenden **Faktor** umrechnen:

Umrechnung	**Formel**	**Beispiel**
% → Wachstumsfaktor	Faktor = 1 + (% / 100)	8% Zunahme = Faktor 1.08
% → Schrumpfungsfaktor	Faktor = 1 – (% / 100)	15% Abnahme = Faktor 0.85
Umgekehrt:		
Wachstumsfaktor → %	% = (Faktor – 1) ● 100	Faktor 1.25 = 25%
Schrumpfungsfaktor → %	% = (1 – Faktor) ● 100	Faktor 0.93 = 7%

Weitere Eigenschaften der Exponentialfunktion:

- Man findet **gleiche** Abstände von x, wo sich der y-Wert **verdoppelt** oder **halbiert**!
  Beispiel: Halbwertszeit beim radioaktiven Zerfall.

- Exponentialfunktionen mit jeder beliebigen (positiven) Basis lassen sich als eine **e**-Funktion darstellen.

  $y = e^x$ Also auf die Basis **e** zurückführen.
  Dabei steht **e** für die Euler’sche Zahl 2,71828...
  Diese Form **y = e^x** trifft man auch am häufigsten in Naturwissenschaft und Technik an.

Lösungs“rezept“ für Aufgaben mit Exponentialfunktion

Weil es 4 Variablen hat, sind auch 4 Fragestellungen und damit vier Aufgabentypen möglich, Lösungsprinzip pro Typ ist dann immer gleich.
Dieses Blatt darf als Formelsammlung im Test verwendet werden.

Als Lösungsansatz dient die allgemeine Form der Exponentialfunktion.

$$y = b \cdot a^{(x)}$$

-> umgesetzt auf Typ 1 und 2, die häufigsten Anwendungen:

$$Neuer\_Wert = Start\_Wert \cdot Schrumpf\_Wachs\_Faktor^{Anzahl\_Zeitabschnitte}$$

Oder verkürzt:

- $$Neu = Start \cdot Faktor^{Zeit}$$
  = **Typ 1** von 4 möglichen Aufgabentypen.
  Weil die Formel vier Variablen gibt, gibt es auch vier Aufgabentypen.
  Typ 1: aktueller Wert gesucht (Formel ist oben

- **Typ 2:** Startwert ist gesucht, Auflösung der Formel nach Start:
  $$Start = \frac{Neu}{Faktor^{Zeit}}$$

- **Typ 3:** Faktor gesucht, Auflösen nach Faktor:
  $$Faktor^{Zeit} = \frac{Neu}{Start}$$
  Die erste Umkehrfunktion des Potenzierens ist das Wurzelziehen
  $$Faktor = \sqrt[Zeit]{\frac{Neu}{Start}}$$
  „zeit-te“ Wurzel aus. Das ist =
  $$Faktor = \left(\frac{Neu}{Start}\right)^{1/Zeit}$$

- **Typ 4:** Zeit gesucht, Auflösen nach Zeit:
  $$Faktor^{Zeit} = \frac{Neu}{Start}$$
  Die andere Umkehrfunktion des Potenzierens ist das Logarithmieren (Tasten LOG oder LN auf dem Taschenrechner). → beide Seiten logarithmieren:
  $$\ln(Faktor^{Zeit}) = \ln\left(\frac{Neu}{Start}\right)$$
  → Logarithmenregel anwenden:
  $$Zeit \cdot \ln(Faktor) = \ln\left(\frac{Neu}{Start}\right)$$
  $$Zeit = \frac{\ln\left(\frac{Neu}{Start}\right)}{\ln(Faktor)}$$

Allgemeines Vorgehen bei solchen Aufgaben:

1. Sätzchenaufgabe verstehen
2. Herausfinden, was gesucht ist → welcher Aufgabentyp es ist!
3. Festlegen, ob es ein Wachstums- oder ein Schrumpfungsprozess ist. **Skizze** machen!
4. Eventuell den %-Satz in den **Faktor** umrechnen!
5. Grundformel nach der richtigen Variablen umformen (bzw. in Formelsammlung suchen)
6. Werte einsetzen, ausrechnen
7. Ev. Faktor in %-Satz umrechnen

Aufgaben:

Die Lösungen sind mit **Typ** und **Zahlenresultat** vorhanden.

1. Ein Konto weist zu Beginn einen Stand von 1200 Franken auf. Es wird zu 3 Prozent verzinst (Jahreszins). Der Zins wird zum Kapital hinzugerechnet.
Gesucht ist der Kontostand nach x Jahren.

a) Kontostand nach 1 Jahr?
b) Kontostand nach 10 Jahren?
c) Kontostand nach 20 Jahren?
d) Stelle diesen Zusammenhang als allgemeingültige Funktion dar (y=Fr.; x=Jahre).

Lösung: Aufgabe **Typ 1, a) 1236 Fr. b) 1612.70 Fr. c) 2167.33 Fr.**

2. Eine Algenart breitet sich auf der Fläche eines Teiches aus.
Bei der ersten Beobachtung sind 7 Quadratmeter des 1200 Quadratmeter grossen Teichs bedeckt. Die Alge verdoppelt ihre Bedeckungsfläche in jeder Woche.
- Wie gross ist der Wachstumsfaktor?
- Stelle den Zusammenhang als allgemeingültige Funktion dar.
- Nach welcher Zeit ist die gesamte Seefläche mit Algen bedeckt?

Lösung: **Typ 4: Zeiteinheit = Wochen! Resultat=7,42 Wochen**

3. In einem See nimmt die Helligkeit pro Meter Wassertiefe um 20 % ab. An der Oberfläche beträgt die Helligkeit 100 Einheiten. Wie viele Einheiten sind es in 7m Wassertiefe?

Lösung: **Typ 1. Statt Zeit ist es hier eine Distanz! → 20,97 Einheiten**

Bei O °C Aussentemperatur nimmt die Temperatur des Tees in einer Thermoskanne stündlich um 12 % ab. Nach 5 Stunden werden in der Kanne 42°C gemessen. Wie heiss war der Tee beim Einfüllen?

Lösung: **Typ 2: 79,6°C**

4. Der Bestand an Kaninchen in einem Park wuchs in 15 Jahren exponentiell von 30 auf 110 Kaninchen.
Um wieviel % wuchs der Bestand pro Jahr?

Lösung: **Typ 3. Faktor = 1.0904 = 9,04%**

Zusatzaufgaben (schon behandelte Aufgabentypen)

5. Im April 1986 wurde bei der Kernreaktorkatastrophe von Tschernobyl unter anderem der radioaktive Stoff *Strontium-90* mit 28,8 Jahren Halbwertszeit freigesetzt.
(Die Zahl 90 ist nur die sog. Massenzahl des radioaktiven Strontium-Isotops)

a) Bestimme den **jährlichen** Zerfalls**faktor**.
b) Welcher Bruchteil **(Anteil)** der Anfangsmenge war 1996 noch vorhanden?

Zu a: (welcher Augabentyp ist es?)
Lösungstipp: Wenn der absolute Start- oder Neuwert fehlen, darf man Annahmen treffen.
Und in der Formel kommt dann auch „nur" das Verhältnis von Start zu neu vor.
Start = 100%, Halbwert=neu = 50% → Faktor = 0.9762 = 2,38%

Zu b: Typ1: auch hier kann man von z.B. 100% am Anfang ausgehen. → 73,13%

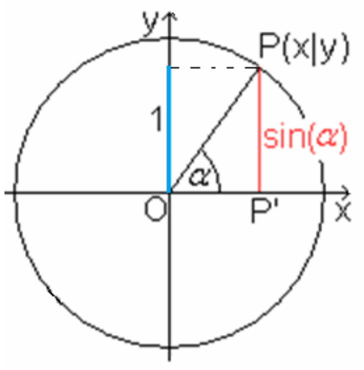
6. Ein bestimmter radioaktiver Stoff zerfällt so, dass seine Menge stündlich um 8,3 % abnimmt. Nach wie vielen ganzen Stunden ist erstmals weniger als 1 Zehntel der Anfangsmenge vorhanden?

Lösungstipp:
Auch hier ist nur das Verhältnis bekannt, aber so kommt es ja in der Formel vor!
Neu:Start = 1/10 =10/100. Faktor 0,917 → 26,57 Stunden

7. Im Jahre 1995 lebten ca. 5,7 Mrd. Menschen auf der Erde bei einer jährlichen Zunahme um ca. 1,5 % . In welchem Jahr würde die Menschheit bei konstantem Wachstum die 12-Mrd.-Grenze überschreiten?

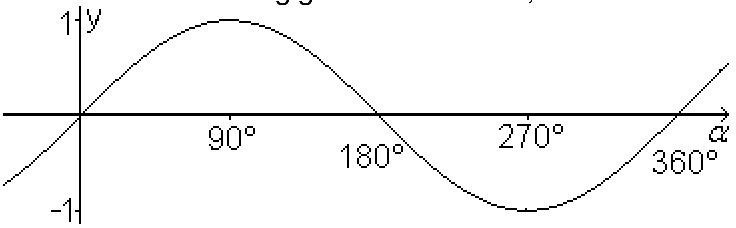
Lösung: 50,0 Jahre später, also 2045

Die Sinusfunktion $y = \sin(x)$

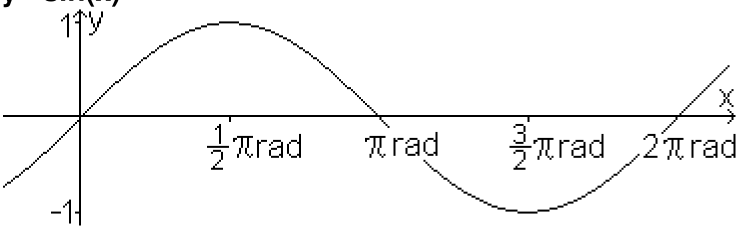


Bekanntlich ist der Sinus eines Winkels definiert als **Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse** beim rechtwinkligen Dreieck.
Wenn die Hypotenuse immer **=1** ist (Radius im Kreis), dann ist der Sinus eben die Länge der Gegenkathete (rot) oder „der vertikale Schatten“ (blau) dieses Radius auf die y-Achse.

Wenn man dieses Verhältnis (oder die Länge bezogen auf 1) aufzeichnet in Abhängigkeit des Winkels, bekommt man die Sinuskurve.



Der Winkel wird meist im **Bogenmass** (Radiant, rad auf dem Rechner) genommen. Denn die Winkeleinteilung in 360° ist ein willkürliche Festlegung durch den Menschen und nichts mathematisches. Deshalb sieht es dann in der Technik meist so aus:
y= sin(x)



Mathematisch kann man den Sinus nur von einer **Zahl ohne Einheit** nehmen.
Es gibt also keinen Sinus von 3 Metern oder einen Sinus von 7 Sekunden.
Nur von Winkeln, da dieser (im Bogenmass) eben ein Verhältnis ohne Einheit ist. Nämlich das Verhältnis von der Bogenlänge eines Kreises geteilt durch den Radius.
Deshalb ist ja eine ganze Drehung von 360° = **2π** (Meter) bei **1m** Radius.

Die Sinusfunktion (oder auch die Cosinusfunktion) beschreibt in der Physik und Natur fast alle **Schwingungsvorgänge und alle Wellenausbreitungen**. Es besteht auch ein enger Zusammenhang zur Drehbewegung. Also lassen sich diese Bewegungen **zeitlich** beschreiben.
Y steht dann für den Ort des schwingenden Systems (z.B. Pendel), **t** für die **Zeit**:
“ **y = sin (t)** „ → Der Schwingungsort ist sinusförmig abhängig von der Zeit.

Da man eben **nicht den Sinus der Zeit nehmen** kann, muss man das „**x**“ oder t des Sinus' einheitenlos machen. Deshalb teilt man ihn wieder durch eine Zeit, z.B. durch die **Periodendauer T** der Schwingung. Oder man multipliziert ihn mit einer **Frequenz f**, was aufs Gleiche herauskommt, weil die Frequenz ja Kehrwert der Periodendauer ist und als Einheit 1/s hat. Und damit das Ganze ins Bogenmass passt, multipliziert man es noch mit **2π**.

Damit ist naheliegend, dass man die sog. **Kreisfrequenz ω** nehmen kann, die wir von der Drehbewegung kennen. Denn $\omega = 2\pi \cdot f$ (bei der Drehbewegung wars $\omega = 2\pi \cdot n$)
Damit wird die Sinusfunktion einer Schwingung so:

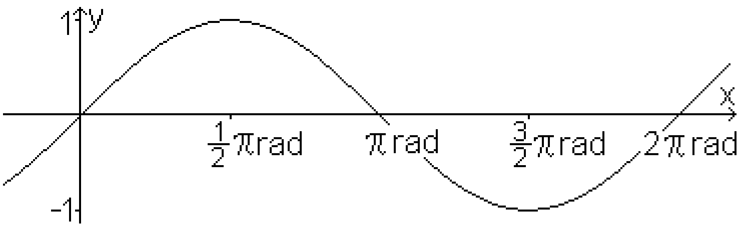
$y = \sin(\omega \cdot t)$ oder $y = \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$ oder $y = \sin(2\pi \cdot t/T)$

Nun muss noch den **Max**imalwert der Schwingung definieren. Z.B wie stark lenke ich ein Pendel aus, bevor ich es loslasse.
Das ist die Auslenkung am Anfang, also **y0**. Man sagt dem meist **Amplitude**.

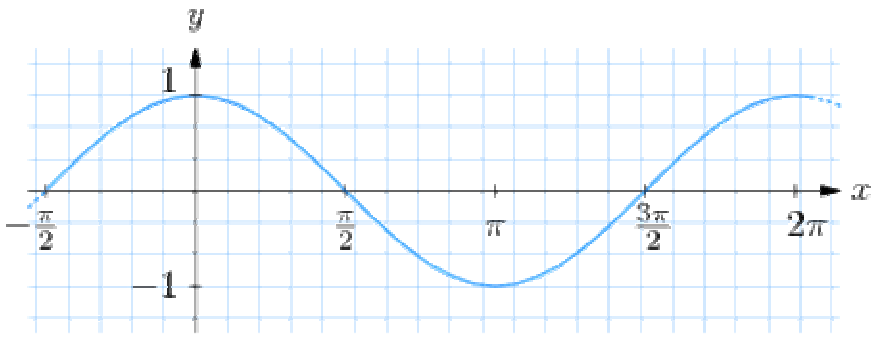
$\mathbf{y = y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)}$ oder $\mathbf{y = y_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)}$ oder $\mathbf{y = y_0 \cdot \sin(2\pi \cdot t/T)}$

y	Momentaner Ort des swingenden Systems (z.B. Gewichtssteim eines Pendels), genannt Auslenkung. Momentane, zeitabhängige Auslenkung
$\mathbf{y_0}$	Anfangsort oder maximaler Ort der Auslenkung
f	Frequenz der Schwinungen (wie oft pro Sekunde) in Hz (Hertz) oder 1/s
n	Drehzahl (Umdrehungen pro Sekunde) in Hz (Hertz) oder 1/s
T	Periodendauer der Schwingungen in Sekunden s, (Zeit, bis wieder in der Ursprungsposition)
2π	Mit dem Kreisfaktor ist auch sichergestellt, dass sich der Schwinungsvorgang und damit der Sinuswert wiederholt
t	t ist die Variable (unser „x“) in diesem System

Der Sinus bietet sich dann an, wenn man den Vorgang von der **Ruhelage** aus betrachtet.



Aber wenn man von der **maximalen Auslenkung** her ausgeht, nimmt man besser den **Cosinus,** da er bei 0 maximal ist:



$\mathbf{y = y_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)}$ oder $\mathbf{y = y_0 \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot t)}$ oder $\mathbf{y = y_0 \cdot \cos(2\pi \cdot t/T)}$

<u>Beispiel</u>

Ein Pendel wird maximal ausgelenkt auf **+20cm** weg von der Ruhelage.
Es wird zur Zeit **t=0** losgelassen und schwingt mit einer Periodendauer von T=4 Sekunden.
An welchem Auslenk-Ort ist das Pendel nach 11 Sekunden?

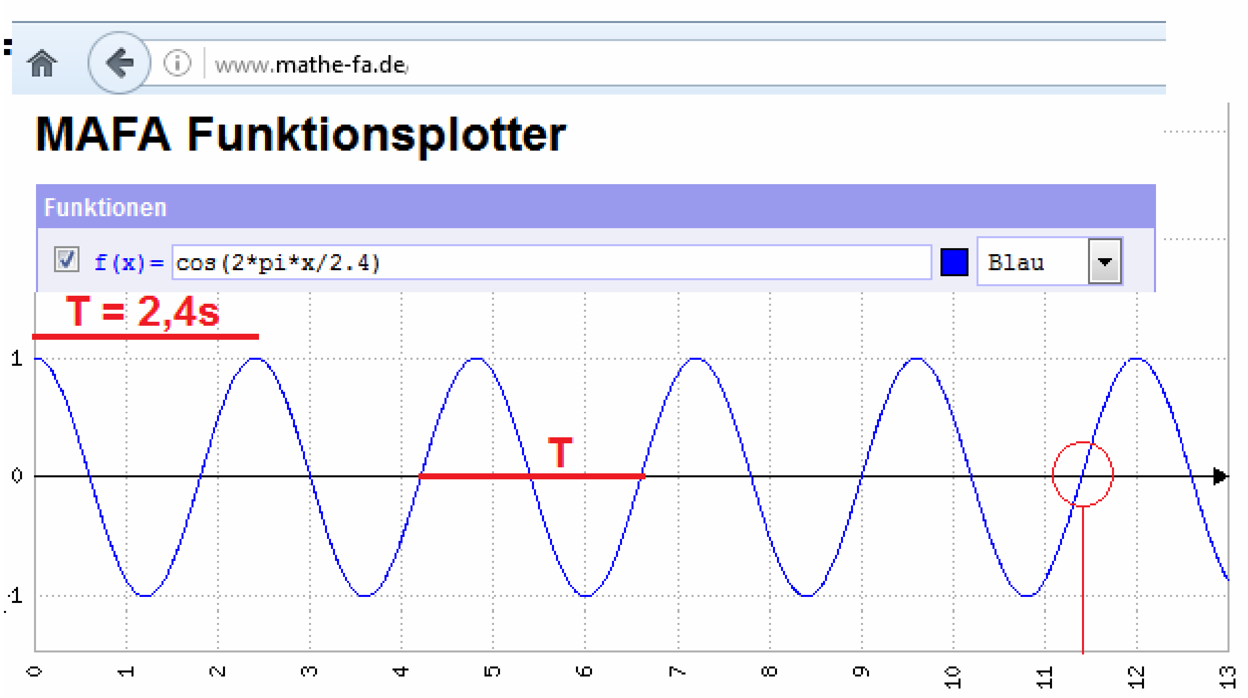
Lösung:
Beste Formel, weil max. Auslenkung und Periodendauer gegeben: $y = y_0 \cdot \cos(2\pi \cdot t/T)$
Rechner auf Radiant (rad) einstellen!

Einsetzen der Werte: $y = 20 * \cos(2\pi * 11 / 4)$ **(Rechner auf RAD einstellen!)**
y= 0cm (0,00081) → Das Pendel ist im tiefsten Punkt auf dem Rückweg zum Ausgangspunkt.

Uebung 1

Ein Pendel wird zur Zeit t=0 maximal ausgelenkt aus der Ruhelage und losgelassen.
Nach *1,2 Sekunden* ist es auf der andern Seite im sog. Totpunkt (wo es stillsteht) und wendet.
Wieviele Sekunden nach dem Start ist es zum **zehnten Mal** in der tiefsten Lage unten (das wäre die Ruhelage nach dem Ausschwingen nach unendlich viel Zeit).
Zeichnen! (Aufbau und zeitliche Grafik)

Diese Aufgabe kann man auch **ohne** die sin- oder cos-Formel lösen! Überlegen und zeichnen!



Zu Sinus und Schwingungen siehe auch Infos und Übungsaufgaben:

https://www.leifiphysik.de/mechanik/mechanische-schwingungen
Theorie, Grafiken und Spielereien:
http://www.mathematische-basteleien.de/sinus.htm

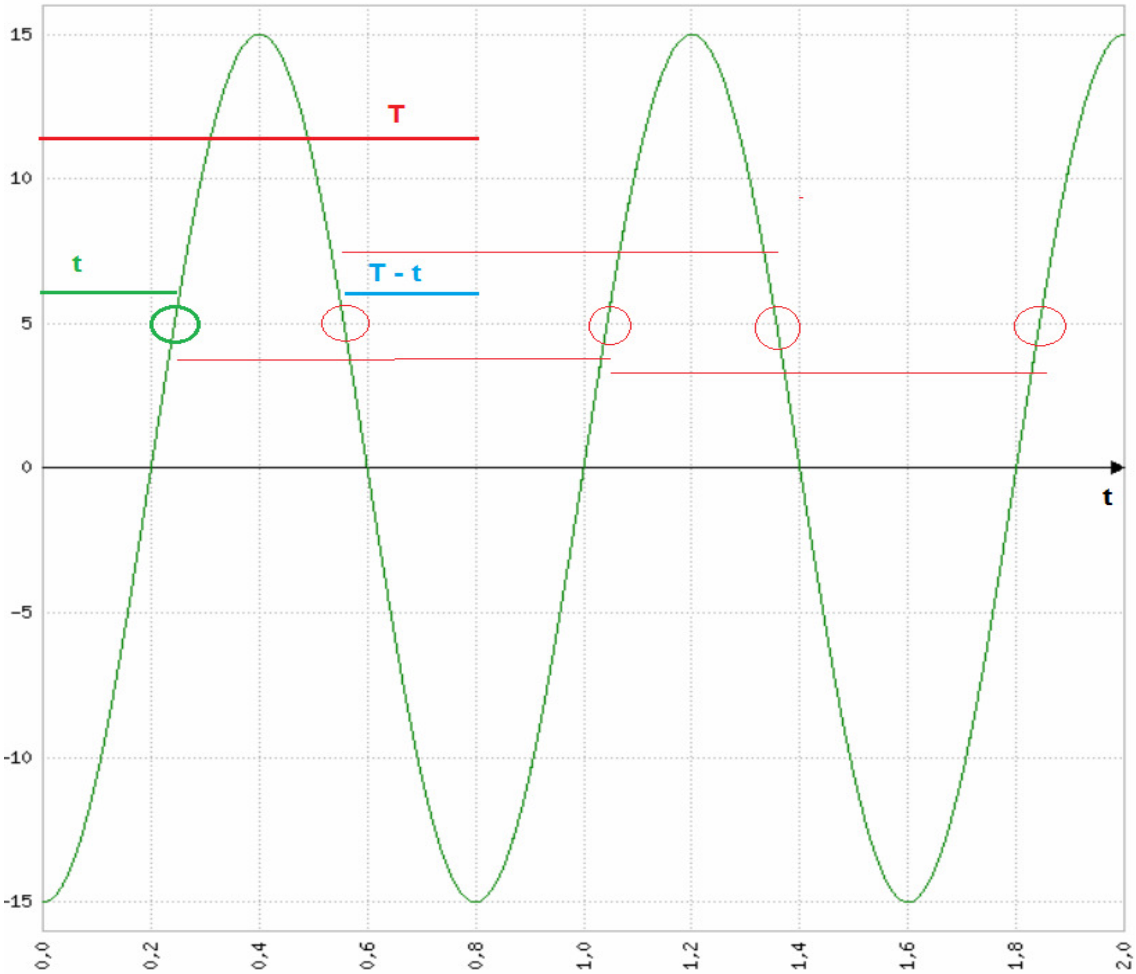
Uebung 2

Ein senkrechtes **Feder**pendel wird zur Zeit t=0 um 15cm **nach unten** ausgelenkt aus der Ruhelage und losgelassen. Die Schwingung wird als nicht gedämpft angenommen (also ewig). Nach 0,8 Sekunden ist es wieder zurück auf dieser Startposition.
Zu welcher Zeit ist 5cm **oberhalb** seiner Ruheposition? Zeichnen!

Lösung: Ruheposition ist in der **Mitte!**

Deshalb die Grundformel mit **Cosinus** nehmen! $y = y_0 \cdot * \cos(2\pi \cdot \mathbf{t}/T)$

Mathematisch liefert die Rechnung nur den **ersten** dieser Zeitwerte.



Die weiteren Lösungen sind

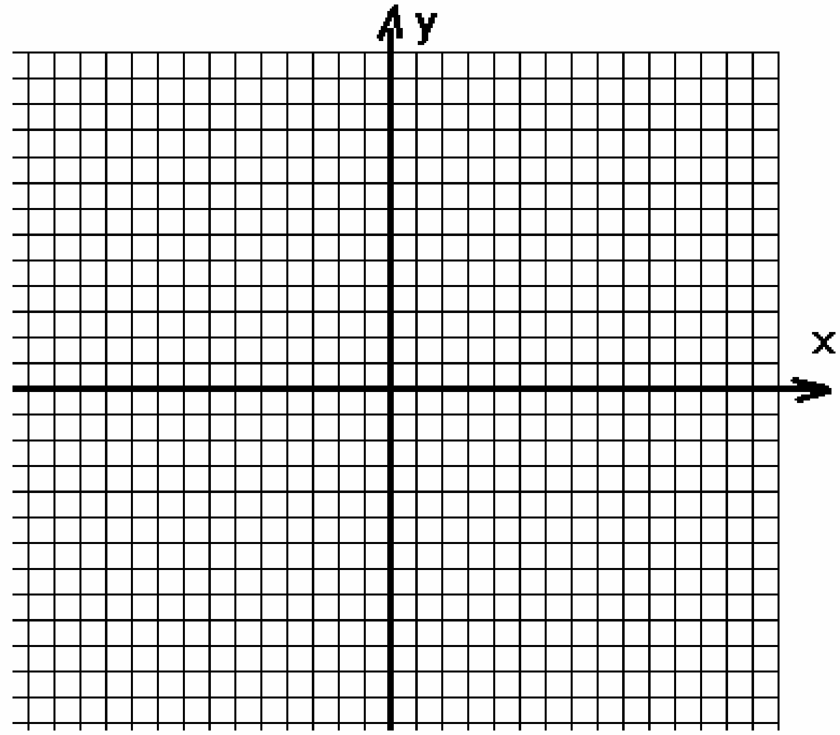
- jeweils eine Periodendauer später (Länge des roten Strichs)
- und bei T-t, also symmetrisch zur Periodengrenze, und dann ebenfalls wieder nach einer Periodendauer

Weitere spezielle Funktionen:

Rechne verschiedenste Wertepaare und zeichne die Grafik folgender Funktionen auf:
1 Häuschen pro Einheit, auch negative X-Werte rechnen!
Löse die Funktionen zuerst nach y auf!

A)

Grundform	Nach y aufgelöst	**Diese Kurvenform heisst:**
$x \cdot y = 12$		



B)

Grundform	Nach y aufgelöst	**Kurvenform**
$x^2 + y^2 = 25$	$y = \pm$