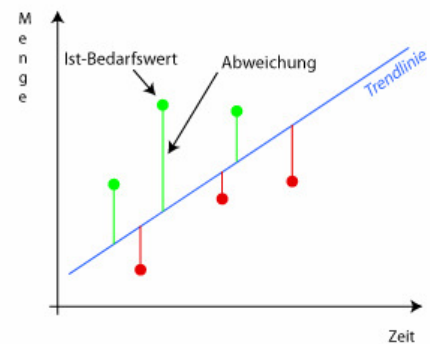
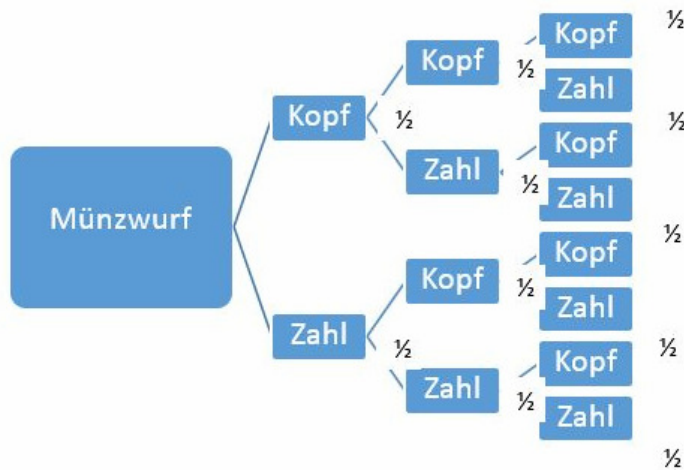
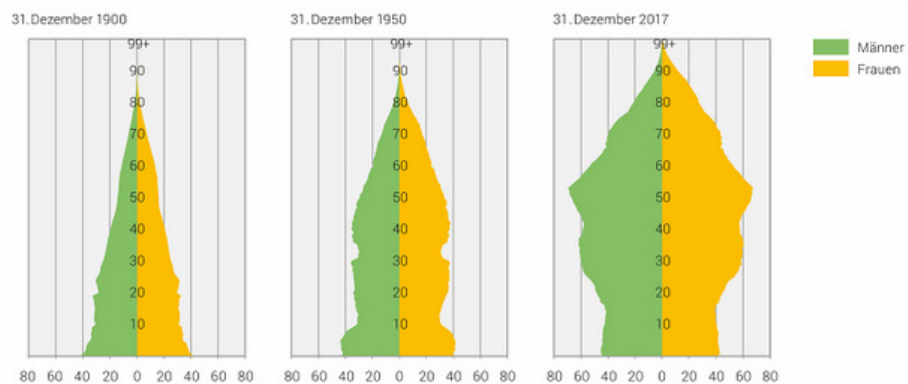


# Stochastik

## Altersaufbau der Bevölkerung

Anzahl Personen in 1 000



# Statistik & Wahrscheinlichkeitsrechnung

## Definitionen

**Stochastik** kommt vom griechischen Wort  $\sigma\tau\omega\chi\omega\varsigma$  (stochos) und bedeutet «klug vermuten, die Kunst des Vermutens». Damit werden Vorgänge untersucht, deren Ausgang nicht zum Vornherein bestimmt ist. Sie besteht aus

- **Statistik:**  
Der Begriff kommt vom lateinischen Wort status (Zustand). Die Anfänge der **Statistik** gehen auf die Volkszählungen vor unserer Zeitrechnung zurück.  
Erst im 18. Jahrhundert wurde sie zur selbständigen Wissenschaft, und ist eigentlich Teilgebiet der Mathematik; und
- **Wahrscheinlichkeitstheorie:**  
Sie untersucht Gesetzmässigkeiten zufälliger Ereignisse.  
Damit sollen auch Voraussagen für noch nicht aufgetretene Ereignisse getroffen werden können.

## Zweck und Inhalt des Kapitels

- Grundbegriffe der Statistik kennen und anwenden
- Erhebung von ausgewählten Daten
- Aufbereitung
- Rückschlüsse auf die Gesamtheit ziehen und entsprechend handeln
- Daten ordnen, also zu betrachten, wo sie in der bestimmenden Umgebung angesammelt sind, wie sie sich dabei verteilen und was daraus an sinnvoller Information herausgelesen werden kann.
- Grundformel der Wahrscheinlichkeitsrechnung
- einfache Wahrscheinlichkeiten und deren Verknüpfungen betrachten.
- Berechnungsmöglichkeiten mit Werkzeugen wie dem Baumdiagramm oder mathematischen Formeln wie der Binomialverteilung und den Bernoulli - Experimente.

Auch für dieses Kapitel ist die Beherrschung der Bedienung Ihres Taschenrechners ein Muss.

Suchen Sie ein Manual und machen Sie sich ein Bild, ob der Rechner eingebaute Statistikfunktionen hat.

## Beispiel 1 für Statistik: Datenerhebung von Körpergrössen

- Annahme: die Regierung hat beschlossen, für Lernende der GIBB Schul-Uniformen einzuführen.
- Sie haben den Auftrag, innert kurzer Zeit eine Abschätzung der Körpergrössen der Lernenden zu erstellen.

### Statistische Begriffe:

Die etwa **7000 Berufsschüler** bilden die **Grundgesamtheit** oder **Population** Ihrer Umfrage.

Da Sie nicht alle befragen können, treffen Sie eine Auswahl. Sie beschränken sich aus Zeitgründen auf 2 Informatikerklassen pro Lehrjahr, das sind etwa 140 Lernende. In der Statistik nennt man **die Informatikern Lernenden** die **Stichprobe** und die Zahl **140** ist den **Umfang der Stichprobe**.

**Die Grösse** (nicht etwa das Geschlecht oder die Korpulenz) stellt das interessierte **Merkmal** dar, und die **Ausprägung des Merkmals** ist die **Zahl in cm**. Das Ganze notieren Sie auf einem **Erhebungsformular**, die sogenannte **Urliste**.

### **Übung 1**

Stellen Sie die obigen Begriffe in der Tabelle zusammen!

Wer oder was	Statistischer Begriff
Erhebungsformular, Fragebogen	
Alle Berufsschüler	oder
Die ausgewählte Klasse(n) Informatiker	
140 (Anzahl befragte Lernende)	
Körpergrösse	
z.B. 175 cm	

Vor jeder Datenerhebung muss klar sein, was damit bezweckt wird! Eine zweckmässige Struktur der **Urliste** kann viel nachträgliche Arbeit ersparen. Die Urliste kann die Form einer Strichliste haben. Sinnvoll ist es heute bestimmt, grössere Datenbestände elektronisch zu erfassen, ev. direkt in eine Datenbank aufzunehmen. Die Daten können einfacher verarbeitet werden, z.B. ordnen oder sortieren. In einer Umfrage können **mehrere** Merkmale vorkommen.

Sorgfältig muss ebenfalls die **Stichprobe** ausgewählt werden. Sie soll **repräsentativ** (stellvertretend ähnlich) für die Grundgesamtheit sein. Eine umfassende Stichprobe erfasst **zwischen 600 und 1200 Werte** (deshalb wird in öffentlichen Umfragen meist gesagt, dass z.B. 1150 Leute befragt wurden). Damit ist die Aussage in der Regel präzise genug, um ein Bild der Grundgesamtheit zu erhalten. Je weniger Werte erfasst werden, umso grösser ist die Gefahr, daneben zu liegen, also eine ganze Gruppe nicht berücksichtigt zu haben.

Aus Effizienz- und Kostengründen wird die **Grundgesamtheit** selten erfasst. Nur etwa bei Volkszählungen, die aber nicht jedes Jahr neu durchgeführt werden.

**Sorgfältig ausgewählte** und **gut vorbereitete Stichproben** sind besonders wichtig und sparen Aufwand, Kosten und Ressourcen.

Es ist einleuchtend, dass z.B. eine Autofirma nicht mit allen Neuwagen Crashtests durchführt...

Nach der Erfassung der Daten ordnet man sie meistens, falls möglich oder sinnvoll. Einfach zu ordnen sind zum Beispiel Zahlen, Datum, Ranglisten, Preise usw. Schwieriger wird hingegen die Bestimmung einer Ordnung bei Lieblingsfarben, Essensgewohnheiten, Reisezielen usw. Doch auch bei diesen Themen kann man bestimmte Reihenfolgen erstellen, je nachdem, was damit bezweckt wird.

Nehmen wir bei unserer Umfrage nach den Schuluniformen folgende Daten für **eine** Klasse an. Sie haben zusätzlich zur Körpergrösse noch das Merkmal Geschlecht (**m/w**) erfasst. 22 Personen:

178m   164w   176w   188m   173m   160w   176m   181m   177m   158w   169m  
 173m   178w   180m   173m   173w   179m   183m   168m   171w   173w   176m

### Absolute und relative Häufigkeit

**Die absolute Häufigkeit** ist die Anzahl der Ereignisse, sog. Elementarereignisse.

Sie gibt an, wie viele Elemente mit jeweils dem **gleichen** Merkmal gezählt worden sind.

In unserem Beispiel der Schuluniformen kommt das Elementarereignis «Körpergrösse 158 cm» nur 1x vor. Die **absolute** Häufigkeit für dieses Ereignis ist also 1.

Die **absolute Häufigkeit** wird mit dem **Formelzeichen**  $H_n$  angegeben. Beispiel:

$H_n(A) = 1$  bedeutet: Die absolute Häufigkeit des Ereignisses A (Körpergrösse 158 cm) ist 1 (1x).

**Die relative Häufigkeit** ist der **Anteil** des Ereignisses A an der **Grundgesamtheit** oder an der Stichprobe. Die relative Häufigkeit wird mit dem **Formelzeichen**  $h_n$  angegeben.

$$h_n(A) = \frac{H_n(A)}{n} \quad n = \text{Gesamtzahl aller Elemente in der Menge.}$$

Bei unserem Beispiel ist die relative Häufigkeit des Ereignisses A (Körpergrösse 158 cm) folgende:

$$h_n(A) = \frac{H_n(A)}{n} = \frac{1}{22} = 0,04545 \text{ oder } 4,545 \%$$

### Übung 2

Ordnen Sie die Daten nach Grösse und Geschlecht.

Erstellen Sie eine Strichliste (**linke** Hälfte der Tabelle auf nächster Seite).

Lassen Sie die rechte Tabelle noch leer.

### Übung 3

Füllen Sie jetzt die **rechte** Tabelle der Übung 2 aus. Nehmen Sie die Geschlechter m und w nicht mehr auseinander. Die Häufigkeiten sollen sich nur auf die Körpergrösse beziehen.





## Beschreibende oder deskriptive Statistik

Daten übersichtlich darzustellen und Sachverhalte zu **beschreiben**, ist das Ziel der deskriptiven (beschreibenden) Statistik. Dazu dienen Tabellen, Kennzahlen und Grafiken.

Hier benötigen wir meist sog. **Lagewerte** und **Streuwerte**:

- **Lagewerte** geben an, **um welchen Wert** unsere Daten angesiedelt sind. Es sind oft **Mittelwerte**.
- **Streuwerte** geben an, wie die Daten um den Lagewert **verteilt** sind.

## Lagewerte

Der wohl bekannteste und auch am meisten benutzte Lagewert ist der

## Mittelwert, Durchschnitt, das arithmetische Mittel

Definition:  $\mu \text{ oder } \bar{x}_A = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$

## Übung 6

Berechnen Sie die den Mittelwert der Körpergrößen aller 22 erfassten Lernenden der Übung 2

$$\bar{x}_A = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{22}}{22} =$$

Ihr Taschenrechner kann Ihnen ev. die Berechnung erleichtern: **Statistikfunktionen!**

Suchen Sie, ob und wie Sie auf Ihrem Taschenrechner Daten eingeben, speichern, auswerten können.

### Tipps:

- |                |   |   |
|----------------|---|---|
| TI-30 eco      | → | Wert eingeben, dann Taste <b><math>\Sigma+</math></b> tippen, nächsten Wert eingeben, $\Sigma+$ , usw.<br>Nach Eingabe des letzten Werts zeigt das Display $n = 22$ .<br>Nach Eintippen von <b>2nd und <math>\bar{x}_A</math></b> lesen Sie den Wert. |
| TI-30B/II usw. | → | Schalten Sie in den Stat-Modus und geben die Daten über DATA ein.   |
| TI-30X Pro     | → | data tippen, dann die Daten als L1(1) bis L1(22) eingeben.<br>2nd stat-reg/distr, dann auf 2:1-Var Stats, dann 4x ENTER   |
| TI-Inspire     | → | Über das Menu eine Liste erstellen, dann zur Wahrscheinlichkeitsrechnung  |

Auch für dieses Kapitel ist die Beherrschung der Bedienung Ihres Taschenrechners zwingend.

Suchen Sie ein Manual und machen Sie sich ein Bild, ob es eingebaute Statistikfunktionen gibt.

## Übung 7

178	164	176	188	173	160	176	181	177	158	169
173	178	180	173	173	179	183	168	171	173	176

Tippen Sie die 22 Werte in Ihrem Rechner ein. Welchen Wert erhalten Sie für  $\bar{x}_A$  ? . . . . .

Was gibt die Berechnung von  $\Sigma_x$  an ? . . . . .

## Übung 8

Der «Zufallsgenerator für Würfel» eines Computers hat bei 400 Versuchen 71-mal die Sechs, 58-mal die Fünf, 84-mal die Vier, 70-mal die Drei, 65-mal die Zwei und 52-mal die Eins gewürfelt. Wie gross ist das arithmetische Mittel all dieser Würfe?

Hier kommt jeder Wert vielfach vor. Natürlich tippt man nicht alle 400 Werte einzeln ein, sondern multipliziert:

$$\bar{x}_A = \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + \dots + n_n \cdot x_n}{n_1 + n_2 + \dots + n_n} =$$

Diese Art der Berechnung nennt man Ermittlung des «**gewichteten** arithmetischen Mittels».

Es wird berücksichtigt, **wie oft** (FRQ = Frequenz) dieselbe Grösse vorkommt.

Tipp: Falls vorhanden (z.B. TI-30), benützen Sie zur Eingabe die Hilfsfunktion **(2nd) FRQ** (Frequenz).

6	2nd	FRQ	7	1	$\Sigma+$	5	2nd	FRQ	5	8	$\Sigma+$	...
1	2nd	FRQ	5	2	$\Sigma+$		2nd	$\bar{x}$	Anzeige	-> Resultat		

Ihr Taschenrechner nimmt Ihnen die Berechnungen ab, Sie konzentrieren sich einzig aufs Eintippen!

## Übung 9

Berechnen Sie das arithmetische Mittel aller möglichen Augensummen aus der Übung 5, sowie die gefragten Werte, die Sie auf Funktionstasten des Rechners finden:

$$\mu = \overline{x_A} =$$

$$\Sigma_X =$$

$$\Sigma x^2 =$$



## Der Median $z$ (oder Zentralwert)

Neben dem arithmetischen Mittel ist der Median der häufigste gebrauchte „Mittelwert“.

In einer **geordneten Reihe** von Stichproben (Elemente der Urliste) oder der Grundgesamtheit ist der Median der in der Mitte stehende Wert; links und rechts vom Median hat es gleich viele Elemente.



Ermittlung: Links und rechts werden immer gleichviele Puppen entfernt, bis nur noch eine Puppe (falls Anzahl ungerade) oder zwei Puppen (bei gerader Anzahl Puppen) verbleiben.

$$z = \frac{n+1}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{Bei 7 Werte: } z = \frac{7+1}{2} = 4 \quad \text{Der Median ist der 4. Wert.}$$

Bleiben bei einer **geraden** Anzahl Daten zwei Werte in der Mitte, so kann der Median bestimmt werden als

$$z = \frac{n+1}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{Bei 12 Werten: } z = \frac{12+1}{2} = 6,5$$

- ✚ Einer der zwei Werte, das heisst der 6. oder der 7. Wert, oder
- ✚ Beide Werte, das heisst der 6. und der 7. Wert (zwei Mediane), oder
- ✚ Der arithmetische Mittelwert beider Mediane, falls dies sinnvoll ist.

Der Median besitzt gegenüber dem arithmetischen Mittelwert einige vorteilhafte Eigenschaften.

- ✚ Er kann auch dort eingesetzt werden, wo der arithmetische Mittelwert keinen Sinn ergibt, zum Beispiel, wenn man den Zahlenbereich verlässt und trotzdem eine Ordnung der Daten angeben kann.
- ✚ Er ist stabil gegen Ausreissern, das heisst gegen Daten, die sehr weit «daneben» sind.



Wir haben somit einige Lagewerte betrachtet. Lagewerte geben an, um welchen Wert herum unsere Daten angeordnet sind.

### Repetitionsfrage / Übung

**A)** Sie werfen einen «normalen» Würfel 12-mal und erhalten folgende Augenzahlen:

2 5 4 5 3 6 3 1 5 4 6 1

Füllen Sie nachstehende Tabelle aus!

Geordnete Liste											
Augenzahlen			$H_n$	$h_n$							
1											
2											
3											
4											
5											
6											
Total											
Andere Werte			$n$	$\mu = \bar{x}_A$	$z$	Modus	$\Sigma x$	$\Sigma x^2$			

**B)** In diesem Semester hat ein Lernender folgende Noten erhalten: 5,1 4,6 4,3  
Eine vierte Probe ist noch ausstehend. Die Noten der Proben werden auf 1/10 genau erstellt, die Zeugnisnote auf  $\frac{1}{2}$  Note gerundet. 0,25 und 0,75 wird aufgerundet.

- Welche Zeugnisnote kann er noch bestenfalls erreichen?
- Welche Note muss der Lernende mindestens erreichen, wenn er eine Zeugnis-Note 5 erhalten will?
- Welche schlechteste Probe-Note darf er sich erlauben, wenn er seine bisherige Zeugnis-Note erhalten will?

### C) Übung 12

Welcher Wert ist der **Median z** aus unserer Stichprobe? Umrahmen

158 160 164 168 169 171 173 173 173 173 173 175 176 176 176 177 178 178 179 180 181 183 185 188 191

## Streuwerte

**Streuwerte** oder Streuungswerte geben an, wie die Daten um einen **Lagewert** herum (meist um den Mittelwert) **verteilt** oder gestreut sind.

Nehmen wir noch einmal die verschiedenen Werte der Stichprobe der Lernenden aus der Übung 2. Die Werte sind jetzt aufsteigend geordnet und um 3 Werte ergänzt.

158 160 164 168 169 171 173 173 173 173 173 175 176 176 176 177 178 178 179 180 181 183 185 188 191

Den ersten Streuungswert, den wir sofort erkennen können, ist die

## Die Spannweite r

(r aus dem englischen range = Bereich).

Die Spannweite r gibt den **gesamten Bereich** an, innerhalb welchem die Daten angeordnet sind.

**158** 160 164 168 169 171 173 173 173 173 173 175 176 176 176 177 178 178 179 180 181 183 185 188 **191**

$r = x_{\max} - x_{\min}$  in unserem Beispiel:  $r = 191 - 158 = \underline{\underline{33}}$

Unser Beispiel ergibt eine sinnvolle Spannweite. Wir können uns sogar einfach vorstellen, wie alle Lernenden dieser Klasse im Grössenvergleich stehen würden und auch den Grössenunterschied von 33 cm zwischen dem Grössten und dem Kleinsten.

Doch manchmal ergibt die Spannweite nicht die gewünschte Übersicht. Denken Sie nur an die Löhne der Angestellten einer Grossbank aus Übung 8. Was sollen wir mit der Spannweite von  $r = 39'000 - 48 = 38'052$  kFr anfangen?

Wo liegt das Problem? Es liegt beim weit abgelegenen Lohn (=Ausreisser) des Herrn CEO. Auch die nur 48'000 Fr Lohn (eventueller Lohn des Reinigungspersonals, das nicht direkt von der Bank angestellt ist), dürften die Aussage über Banklöhne stark beeinflussen.

Wie bei der Übung 8 schon festgestellt, ist der **Median** stabil gegenüber Ausreissern. Der Median ist auch jener Lagewert, der mit dem Streuungswert „Spannweite“ am meisten zu tun hat. Wir behalten also den stabilen Median und verknüpfen ihn so mit unseren Werten der Stichprobe, dass die Streuung sinnvoll wird.

## Das Quartil (die Quartile)

Quartile sind weitere Kennwerte einer Stichprobe. Man teilt die Reihe der **geordneten** Werte in 4 Quartile ein.

Wichtig sind dabei das untere Quartil  $Q_{0,25}$  und das obere Quartil  $Q_{0,75}$ .

In der Mitte liegt der **Median z**, manchmal auch als  **$Q_{0,5}$**  bezeichnet.

Unterhalb des  $Q_{0,25}$  liegen damit 25 % der Werte und

oberhalb des  $Q_{0,75}$  ebenfalls 25 % der Werte der Stichprobe.

Somit sind 50 % der Werte im Bereich  $Q_{0,25}$  bis  $Q_{0,75}$  vorhanden.

Dieser Bereich heisst Quartilabstand QA oder IQR = interquartile range.

Hat man genügend Werte bei einer Stichprobe erfasst, so kann man die Spannweite auf den Quartilabstand reduzieren und ist damit sicher, dass die **Ausreisser wegfallen**.

Die Quartile werden folgendermassen bestimmt:

Zuerst wird die Position des Quartils in der geordneten Reihe mit n Werten bestimmt.

$$Q_{0,25} = \frac{n}{4} \qquad Q_{0,75} = \frac{n}{4} \cdot 3 \qquad \text{Jeweils auf die nächsthöhere Zahl aufrunden.}$$

Dann werden die **Werte** (nicht die Position) eingesetzt.

### Beispiel

Die Lohnstichprobe der Übung 8 hatte folgende 10 Stichprobenwerte angegeben:

48	114	153	87	68	145	129	39'000	117	98	Liste ordnen! geordnet
48	68	<b>87</b>	98	114	117	129	<b>145</b>	153	39'000	

$$Q_{0,25} = \frac{n}{4} = \frac{10}{4} = 2,5 \quad \text{gerundet} \Rightarrow 3. \text{ Position} \qquad Q_{0,25} = 87$$

$$Q_{0,75} = \frac{n}{4} \cdot 3 = 7,5 \quad \text{gerundet} \Rightarrow 8. \text{ Position} \qquad Q_{0,75} = 145$$

$$\text{Quartilabstand QA} = Q_{0,75} - Q_{0,25} = 145 - 87 = 58$$

### Beispiel aus der Verkehrsplanung: Die Geschwindigkeit $v_{85}$

V steht für Geschwindigkeit. Wenn z.B. die Wirkung einer Tempo-30-Zone überprüft werden soll, so ist der sogenannte  $v_{85}$ -Wert wichtig als Überprüfungswert. Also nicht die Durchschnittsgeschwindigkeit, weil diese von einem einzelnen Raser verfälscht werden könnte.

Das heisst:  $v_{85}$  ist jene Geschwindigkeit, die von **85%** der Fahrzeuge **eingehalten** wird (während 15% sie überschreiten).

### Übung 13 (müssen Sie nicht machen, ist zuwenig wichtig)

Bestimmen Sie die Quartile  $Q_{0,25}$ ,  $Q_{0,75}$  und den Quartilabstand der geordneten Reihe mit 25 Werten.

158 160 164 168 169 171 173 173 173 173 173 175 176 176 176 177 178 178 179 180 181 183 185 188 191

## Wichtigster Streuwert: die Standardabweichung $S_{\bar{x}_A}$ oder $\sigma_x$

Wie aus dem Symbol ersichtlich, bezieht sich der Streuwert **Standardabweichung** auf den Lagewert des **Arithmetischen Mittels**. Definition:

Die Standardabweichung ist die Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung der Daten von ihrem arithmetischen Mittel. Als Formel geschrieben heisst das:

$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$	$\sum_{i=1}^n$	Bedeutet Summe, die sich auf jeden Wert (Index i von 1 bis n) bezieht.
	$(x_i - \bar{x})^2$	Quadrierte Differenz zwischen Wert $x_i$ und arithmetisches Mittelwert $\bar{x}_A$
	n-1	Anzahl der Stichprobenwerte – 1
Ausgeschrieben:	mit 3 bis n Werten:	$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}}$

Oft wird auch nur durch n statt durch n-1 geteilt. Der Unterschied ist meist minimal, Details:

Summe der Werte	$\Sigma_x$
Anzahl Werte	n
Arithmetisches Mittel	$\bar{x}$ oder $\mu$
Standardabweichung <b>der Stichprobe</b>	$S_{\bar{x}_{n-1}}$ oder $\sigma_{x_{n-1}}$
Standardabweichung der <b>Grundgesamtheit</b>	$S_{\bar{x}_n}$ oder $\sigma_{x_n}$

### Übung 16

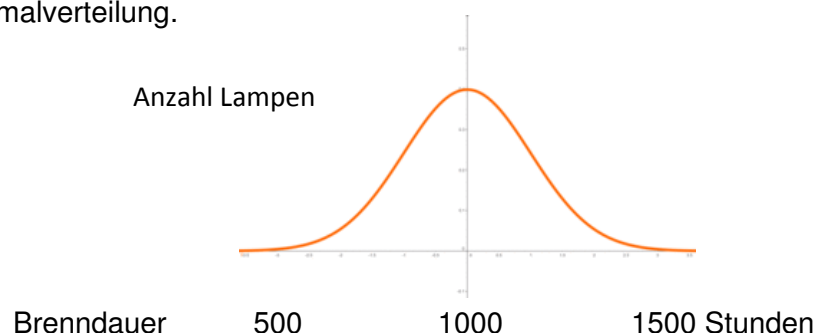
Berechnen Sie Mittelwert und Standardabweichung aus den 4 Noten **2, 6, 5, 3**.

Vergleichen Sie wenn möglich die Funktionen des Taschenrechners mit einer Berechnung von Hand gemäss der Definitionsformel. Nötige Funktionen: Taste  $\Sigma+$  für jeden Wert, dann Taste  $\sigma_{x_{n-1}}$

## Die Normalverteilung

Die Lebensdauer in Stunden einer Stichprobe von Glühlampen wird erfasst.

Sobald genügend Werte einer Stichprobe vorhanden sind, bemerkt man eine bestimmte Häufigkeits-Verteilung der Werte um das arithmetische Mittel herum, nach links und rechts abnehmend. Die Form der Verteilfunktion ist eine Kurve, die in der Mathematik als «**Gauss'sche Glockenkurve**» bekannt ist. Dies nennt man „Normalverteilung“.



Eigenschaften dieser glockenförmigen Verteilung:

- ✚ Die Verteilung ist spiegelsymmetrisch um den Mittelwert  $\mu$
- ✚ Das Maximum der Verteilung liegt an der Stelle  $x = \mu$  Mittelwert
- ✚ Die „Breite“ der Glocke wird durch die Standardabweichung  $\sigma$  bestimmt.

## Die Standard-Normalverteilung

Sie ist das wichtigste Verteilmodell in der Statistik.

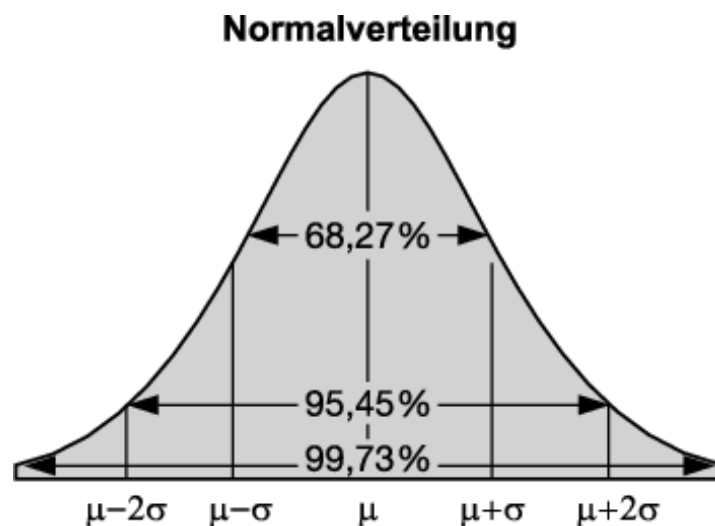
Obige Glockenkurve stimmt für die Brenndauer von Glühlampen. Würden wir die Körpergrösse unserer Lernenden darstellen, so erhielten wir ebenfalls eine glockenförmige Kurve, aber das arithmetische Mittel wäre natürlich nicht 1000 Stunden, sondern vielleicht 176 cm und die Standardabweichung z.B. 7 cm. Genauso wären die Werte für Batteriespannungen oder Toleranzen in der Uhrmacherkunst ganz andere, obschon die Kurvenform die gleiche bleiben würde. Eben die Normalverteilung.

Die **Standard**-Normalverteilung belässt die Glockenform und normiert die Achsen (macht sie unabhängig von den Einheiten).

Mit der Standardnormalverteilung lassen sich eine Vielzahl natur-, wirtschafts- und ingenieurwissenschaftlicher Zusammenhänge, wie beispielsweise die Zufallsvariablen Körpergrösse, Gewicht, Messfehler, Zeiten bis hin zur Grösse von Sternen entweder exakt oder zumindest in guter Näherung beschreiben.

Nach der Normierung ist

- ✚ auf der x-Achse (Abszisse) die Anzahl der Standardabweichungen  $\sigma$ , die vom arithmetischen Mittelwert  $\mu$  abweichen.
- ✚ Der Scheitelpunkt in der Mitte mit  $\mu = 0$  (Scheitelpunkt der Kurve)



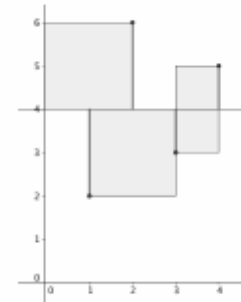
Da die Gauss'sche Glockenkurve symmetrisch ist, liegen 50 % der Werte links vom arithmetischen Mittelwert  $\mu$  und 50 % sind rechts davon.

Bei einer guten Normalverteilung liegen 68 % der Werte innerhalb der einfachen Standardabweichung  $\sigma$  oder  $S_{\bar{x}_A}$ . Man spricht von der  $2/3$  – Regel oder  $1\sigma$  – Regel.



## Aus einem andern Statistik-Kurs (M. Kriener Statistik):

Bei einer Liste von Zahlen  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{2, 6, 3, 5\}$  (das könnten zum Beispiel Ihre letzten Mathematiknoten sein) sind wir nicht nur am Mittelwert interessiert (der ist hier  $\mu = 4$ ), sondern auch an der Streuung der Daten - hier hat man den Eindruck, dass die Noten ziemlich hin- und herspringen. Bei einem anderen Schüler sind die Noten  $\{4.5, 3.5, 4, 4\}$ . Der gleiche Mittelwert, aber viel weniger Streuung. Wie können wir das Ausmass der Streuung mit einer Zahl erfassen? Einfach den Durchschnitt der **Abweichungen**  $x_k - \mu$  berechnen funktioniert nicht, denn  $\sum (x_k - \mu) = 0$  (das ist die Robin-Hood-Gleichung). Wir möchten ausserdem, dass grosse Abweichungen stärker "zählen" sollen als kleine.



Wir haben gesehen, dass der Mittelwert  $\mu$  die Summe der quadratischen Abweichungen  $\sum (x_k - \mu)^2$  minimiert. Wir nennen den Mittelwert dieser Summe die **Varianz** und die Wurzel der Varianz die **Standardabweichung** einer Liste von Daten:

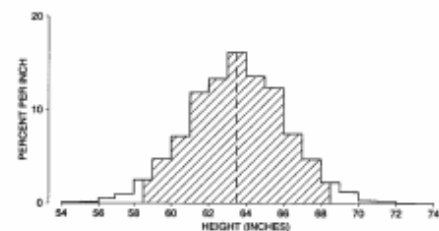
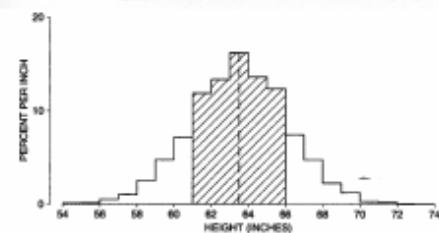
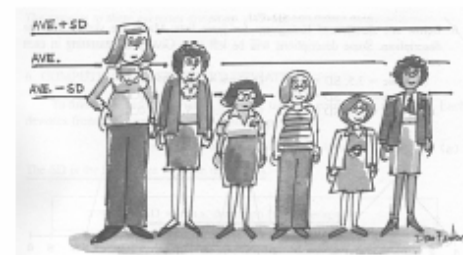
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \mu)^2} \quad (3)$$

**Beispiel:** Für die Liste  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 6, 3, 5)$  von oben (Noten mit dem Mittelwert  $\mu = 4$ ) ist die Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\frac{2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2}{4}} = \sqrt{2.5} \approx 1.58$$

Was bedeutet diese Zahl? Ganz grob kann man sagen, dass die Standardabweichung "Normalität" misst - alles innerhalb einer Standardabweichung  $\sigma$  entfernt vom Durchschnitt ist noch "normal".

**Beispiel:** Die beiden Histogramme rechts zeigen zweimal die Grössenverteilung amerikanischer Frauen. Die gestrichelte Linie ist der Mittelwert, und der schattierte Bereich im oberen Histogramm ist der Bereich, der maximal eine Standardabweichung  $\sigma$  von  $\mu$  entfernt ist - das sind etwa zwei Drittel aller Frauen. Der schattierte Bereich im unteren Histogramm ist der Bereich, der maximal zwei Standardabweichungen  $2\sigma$  von  $\mu$  entfernt ist - das sind schon 95% der Frauen.



Es gibt eine Daumenregel, die bei sehr vielen Daten gut funktioniert, nämlich bei **normalverteilten** Daten. Eigenschaften sind dann normalverteilt, wenn sie das Resultat von vielen voneinander unabhängigen Einflüssen sind. Körpergrösse und Intelligenz sind zum Beispiel normalverteilt. Die Daumenregel geht so:

- etwa 68% der Daten liegen innerhalb einer Standardabweichung vom Mittelwert - d.h. im Intervall  $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$  liegen etwa 68% der gesamten Daten. Das entspricht der schattierten Fläche im oberen Histogramm.
- etwa 95% liegen innerhalb von zwei Standardabweichungen vom Mittelwert - d.h. im Intervall  $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$  liegen etwa 95% der gesamten Daten. Das entspricht der schattierten Fläche im unteren Histogramm.
- etwa 99.7% einer Population liegen innerhalb von drei Standardabweichungen vom Mittelwert. Hier müsste man praktisch die gesamte Fläche schattieren.

**Übung 1.10.** Berechnen sie die Standardabweichung der folgenden Listen:

a)  $\{4, 5, 4.2, 4.8\}$

b)  $\{10, 8, 13, 11, 12, 9, 7\}$



## Teil 2: Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlichkeitsrechnung soll reale Erwartungswerte möglichst genau voraussagen können. Dazu gehören zum Beispiel das Werfen einer Münze, Würfeln, Lose ziehen, das Roulette-Spiel, Lotto spielen. Auch praktische Voraussagen zu Alltagsfragen gehören dazu.

Verschiedene „Werkzeuge“ und exakte mathematische Modelle liefern gute Resultate, während wir «dem Gefühl nach» sicher falsch liegen würden. Ein berühmtes Beispiel hierfür ist das „Geburtstagsproblem“ oder Geburtstagsparadoxon:

**Schätzen** Sie die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Fest mit 10, 20, 30 Personen **zwei am gleichen** Tag (nur Datum, z.B. 17. Juni, nicht Jahr) Geburtstag haben! Zuerst schätzen! Dann erst googeln...

Überfliegen Sie mal den Artikel dazu: <https://de.wikipedia.org/wiki/Geburtstagsparadoxon>

Dann sehen Sie, wie vielfältig die Betrachtungsmethoden sind, und dass es auch auf die genaue Fragestellung ankommt.

### Grundformel der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Diese klassische Definition ist von Pierre-Simon Laplace formuliert worden. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnet sich einfach als Quotient von **günstigen** zu **möglichen** Fällen:

$P(E) = \frac{n_G}{n_M}$	<p>P(E) = Wahrscheinlichkeit (probability) dass ein Ereignis E eintritt oder eine Eigenschaft E zutrifft.</p> <p><math>n_G</math> = Anzahl n der sogenannt <b>günstigen</b> Fälle (die man als günstig, also zutreffend bezeichnet)</p> <p><math>n_M</math> = Anzahl n der <b>möglichen</b> Fälle (die überhaupt theoretisch vorkommen können)</p>
--------------------------	--

Um günstige und mögliche Fälle zu finden, benötigt man oft auch Wissen aus der Teilwissenschaft der **Kombinatorik**. Da geht es um Begriffe wie Kombinationen, Permutationen, oder Variationen. Beispiel: Wieviele Zahlen kann ich mit den einer **vier**-stelligen Dezimalzahl mit den **zehn** Elementen 0 bis 9 darstellen?)

Beispiel: Normaler sechsseitiger Würfel. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, eine 4 zu werfen?

Anzahl günstige Fälle: **einer** (die 4)

Anzahl mögliche Fälle: **sechs** (sie 6 Seiten des Würfels). Also:

$$P(E) = \frac{n_G}{n_M} = \frac{1}{6} = 16,7\% \quad \text{denn die 4 ist der einzige für die Frage günstige Fall von 6 möglichen.}$$

### **Übung 30**

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem normalen Würfel eine gerade Zahl zu werfen?

### **Übung 31**

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine ungerade Zahl grösser 2 zu werfen?

## Das „Gesetz“ der grossen Zahlen

Dieses Gesetz ist eine Erfahrung, die zeigt, dass die relative Häufigkeit eines Ereignisses und seine **theoretische** Wahrscheinlichkeit sich annähern, wenn die Zahl der Ereignisse gross ist.

Versuchen wir das mit dem Beispiel des Münzwürfens zu erklären.

Werfen wir eine Münze 5x und erhalten dabei 4x Kopf und 1x Zahl, so liegt die relative Häufigkeit  $h_n$  des «Kopfs» bei 80 %. Dies widerspricht der Erwartung (50%). Werfen wir nun die Münze 200-mal und erhalten 104x Kopf und 96x Zahl, so erhalten wir  $h_n = 0,52$ . Das wird schon wesentlich näher an der theoretischen Wahrscheinlichkeit von 0,500 sein.

Es gibt aber auch „Täuschungen“. Annahme: Ein Würfel hat 3-mal nacheinander eine 6 geworfen.

**a)** Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, beim 4. Wurf wieder eine 6 zu werfen? → Sie hat nicht abgenommen und auch **genau gleich** wie für jede andere Zahl, nämlich **1/6**. Viele nehmen **irrtümlicherweise** an, dass die 6 jetzt seltener zutreffen müsste, aber **einzelnen** betrachtet ist das falsch.

**b)** Dies war eine andere Fragestellung als wenn man fragt: „Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, **viermal nacheinander** eine 6 zu würfeln?“

## Einfache Wahrscheinlichkeiten

Als häufiges Übungsbeispiel wird ein Satz Jasskarten genommen:

36 Karten, 4 Farben (deutsches oder französisches Kartenspiel).

Natürlich immer gut gemischt, so dass keine äusseren Einflüsse möglich sind.

Genau wie beim Würfel, der ideal sein muss, nicht gezinkt sein darf, also jede Seite gleich wahrscheinlich erscheinen lässt.

Trotz der „Einfachheit“ ist es sehr wichtig, die Aufgabe- oder Fragestellung sehr genau zu verstehen (was wird gemacht, was wird gefragt?).

### Deutsche Farben:



### Französische Farben:



### Deutsches Blatt:



### Französisches Blatt:



Die Summenregel: Sind in einer Entscheidung die Bedingungen mit **ODER** verknüpft, so müssen die Wahrscheinlichkeiten **addiert** werden. Dabei können sich Wahrscheinlichkeiten vergrössern.

## Übung 32

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit  $P$ , aus einem gut gemischten Kartenspiel mit 36 Karten 1 Ass **oder** 1 König (einer beliebigen Farbe) zu ziehen? (Einmal ziehen)

$$P = P(As) + P(König) =$$

Die Produktregel: Sind in einer Entscheidung die Bedingungen mit **UND** verknüpft, so müssen die Wahrscheinlichkeiten **multipliziert** werden. Dabei können sich die Wahrscheinlichkeiten verkleinern.

## Übung 33

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit  $P$ , aus einem gut gemischten Kartenspiel mit 36 Karten **zuerst** 1 Ass **und dann** 1 König zu ziehen? (Zweimal ziehen **ohne** Zurücklegen!)

Vorsicht: Nach 1x ziehen gibt es also nicht mehr 36 mögliche Fälle...

$$P = P(As) \cdot P(König) =$$

### Weitere Übungsbeispiele:

Lesen Sie die Aufgabenstellungen jeweils sehr genau und interpretieren Sie wenn nötig.

Auch hier besteht das Kartenspiel immer aus 36 Karten und 4 „Farben“ (z.B. Schaufel, Kreuz, Ecke, Herz) zu je neun Karten. Gezogene Karten werden innerhalb der Übung **nicht zurückgelegt!**

Nochmals: Nach jedem Ziehen ändert auch die Anzahl der möglichen Fälle...!

## Übung 34

Wie gross ist P, dass 2 beliebig gezogene Karten 1 Ass und 1 König sind? (2x ziehen, Reihenfolge egal; sollte 2,54% geben, falls nicht, lesen Sie nochmals oben)

## Übung 35

Wie gross ist P, 3 Karten der gleichen Farbe zu ziehen? (3x ziehen, sollte 4,7% geben)

## Übung 36

Wie gross ist P, 3 Karten mit **unterschiedlicher** Farbe zu ziehen? (3x ziehen, sollte 40,84% geben)

## Übung 37

Wie gross ist P, 3 Damen zu ziehen? (3x ziehen, sollte 0,056% geben)

## Übung 38

Wie gross ist P, 3 nachfolgende, aufsteigende Karten **beliebiger** Farbe zu ziehen?

(Gesamthaft 3-mal ziehen, zum Beispiel Kreuz 8 – Herz 9 – Kreuz 10, sollte 1,046% geben)