

TD réseau de neurones

Gaston LENCZNER, Javiera CASTILLO NAVARRO,
Guillaume VAUDAUX RUTH, Adrien CHAN-HON-TONG

Notations et rappels :

- on note T la transposition matricielle
- $\text{relu}(x) = \max(x, 0) = [x]_+$ (par composante pour les vecteurs)
- les vecteurs colonnes dans \mathbb{R}^J sont considérés comme des matrices $J \times 1$, et, $\forall (A, B) \in \mathbb{R}^{I \times J} \times \mathbb{R}^{J \times K}$ 2 matrices, AB est leur produit dans $\mathbb{R}^{I \times K}$
- un multi layer perceptron de profondeur P est une fonction qui peut s'écrire $W_P \text{relu}(W_{P-1} \text{relu}(\dots (W_2 \text{relu}(W_1 x + b_1) + b_2) \dots) + b_{P-1}) + b_P$ avec W_p des matrices et b_p des vecteurs

Partie 1 réseau préappris

Q1

On considère la fonction $f(x) = f((x_1 \ x_2)^T) = x_2 - \text{relu}(x_1 - x_2)$

Q1.1 : déterminez les zones où f est positive vs négative.

Q1.2 : écrivez cette fonction comme un réseau de neurones.

aide : $x = \text{relu}(x) - \text{relu}(-x)$ et si $x = (x_1 \ x_2)^T$ alors $x_1 = (1 \ 0)x$

Q2 même questions avec $g((x_1 \ x_2)^T) = x_2 + \text{relu}(x_1 - x_2)$ et $h((x_1 \ x_2)^T) = x_1 + \text{relu}(x_2 - x_1)$, que remarquez vous ?

Partie 2 réseau à déterminer (chercher des poids triviaux)

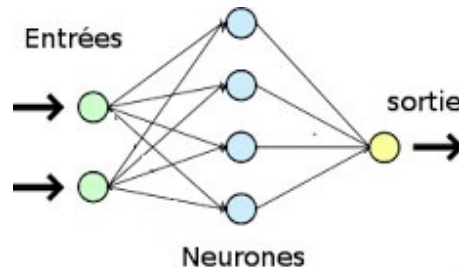
1 neurone

Q3.1 : Montrez qu'il est possible d'apprendre par coeur la base de données $((1 \ 1)^T, 1)$, $((-1 \ -1)^T, -1)$ avec 1 neurones sans biais (et sans activation puisque les activations concernent les couches cachées).

Q3.2 : Est-il possible d'apprendre par coeur la base de données $((0 \ 1)^T, 1)$, $((0 \ -1)^T, 1)$, $((1 \ 0)^T, -1)$, $((-1 \ 0)^T, -1)$ avec 1 neurones sans biais ?

2 couches de neurones

Q4.1 : Montrez qu'il possible d'apprendre par coeur la base de données $((0 \ 1)^T, 1)$, $((0 \ -1)^T, 1)$, $((1 \ 0)^T, -1)$, $((-1 \ 0)^T, -1)$ avec le réseau ci dessous (sans biais et avec activation relu).



Q4.2 : estimez les zones $f(x) > 0$ et $f(x) < 0$.

Q4.3 : Est-il possible d'apprendre avec le même réseau (mais d'autres poids) la base $((0 \ 2)^T, 1), ((0 \ -2)^T, 1), ((2 \ 0)^T, 1), ((-2 \ 0)^T, 1), ((0 \ 0)^T, -1)$?

2 couches de neurones avec biais

Q5 : Considérons encore même la base de données $((0 \ 2)^T, 1), ((0 \ -2)^T, 1), ((2 \ 0)^T, 1), ((-2 \ 0)^T, 1), ((0 \ 0)^T, -1)$, ainsi que les 2 réseaux

— $\psi(x) = [(0 \ 1)x]_+ + [(0 \ -1)x]_+ + [(1 \ 0)x]_+ + [(-1 \ 0)x]_+ - 1$

— $\phi(x) = 2\text{relu}((-1 \ 1)x - 1) + 2\text{relu}((1 \ -1)x - 1) - 1$

Q5.1 : Montrez qu'ils apprennent la base par coeur.

Q5.2 : Donnez la structure de chaque réseau.

Q5.3 : Dessinez les zones positives et négatives.

Pour votre culture : cette base est intéressante car il est possible de l'apprendre asymétriquement avec un réseau de 3 neurones. Mais pour obtenir une solution symétrique et bornée, il faut 5 neurones. Ainsi, dans cet exemple précis, plus de paramètres permet d'obtenir une solution plus élégante. Attention c'est plutôt faux en général !