Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros.

$$\sum_{i=1}^{i \leq n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n + 1) = \frac{(n+1)n}{2}$$

Resolva os somatórios abaixo:

1) $\sum_{n=1}^{4} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$

2) $\sum_{n=1}^{4} 3i = 3 \sum_{n=1}^{4} i = 3 \times (1 + 2 + 3 + 4) = 30$

3) $\sum_{i=1}^{4} (3 - 2i) = (3 - 2) + (3 - 4) + (3 - 6) + (3 - 8) = -8$

4) $\sum_{i=1}^{3} (2i + x) = (2 + x) + (4 + x) + (6 + x) = 12 + 3x$

5) $\sum_{i=0}^{5} i \times (i - 1)(5 - 1) = 30$

$$= 0(0 - 1)(5 - 1) + 1(1 - 1)(5 - 1) + 2(2 - 1)(5 - 1) + 3(3 - 1)(5 - 1) + 4(4 - 1)(5 - 1) + 5(5 - 1)(5 - 1) = 30$$

6) $\sum_{i=1}^{4} (8k + 6i) = 32k - 60$

$$= (8k - 6) + (8k - 12) + (8k - 18) + (8k + 24) = 32k - 60$$

Podemos afirmar que $\sum_{0}^{5} i(i - 1)(5 - i) = \sum_{2}^{4} i(i - 1)(5 - i)$? Justifique.

Sim, pois os termos a0, a1 e a5 são iguais a 0, tornando o primeiro somatório igual ao segundo, uma vez que apenas os termos a2, a3, a4 serão relevantes para o cálculo.

Aplique associatividade para unificar os dois somatórios abaixo:

$$\sum_{3}^{n} a_i + \sum_{3}^{n} b_i = \sum_{3}^{n}(a_i + b_i)$$

Mostre (e justifique) se cada expressão abaixo é verdadeira ou falsa:

$a)$ ( ) $\displaystyle\sum_{k=0}^{200} k^3 = \sum_{k=1}^{200} k^3;$

$b)$ ( ) $\displaystyle\sum_{p=0}^{1000} (3+p) = 3 + \sum_{p=0}^{1000} p;$

$c)$ ( ) $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} (3\ell) = 3\sum_{\ell=1}^{n} \ell;$

$d)$ ( ) $\displaystyle\sum_{k=0}^{12} k^p = \left(\sum_{k=0}^{12} k\right)^p;$

$e)$ ( ) $\displaystyle\sum_{t=8}^{32} (3+t) = 75 + \sum_{t=8}^{32} t.$

a) Verdadeiro

$$\sum_{k=0}^{200} k^3 = 0^3 + \sum_{k=1}^{200} k^2 = \sum_{k=1}^{200} k^2$$

b) Falso

$$\sum_{p=0}^{200} (3 + p) = (3 + 0) + (3 + 1) +...+ (3 + 200) = \sum_{p=0}^{200} 3 + \sum_{p=0}^{200} p$$

c) Verdadeiro

$$\sum_{l=1}^{n} (3l) = (3 \times l) +...+ (3 \times n) = 3(1 + 2 +...+ n) = 3\sum_{l=1}^{n} l$$

d) Falso

$$\sum_{k=0}^{12} k^p = 0^p + 1^p +...$$

enquanto

$$\left(\sum_{k=0}^{12} k\right)^p = (0 \ + \ 1 + 2 + \ldots)^p$$

e) Verdadeiro

$$\sum_{t=8}^{32} (3 + t) \ = \ 3((32 + 1) - 8) \sum_{t=8}^{32} t \ = \ 75 \sum_{t=8}^{32} t$$

Prove que os somatórios abaixo são iguais. Em sua resposta use a propriedade comutativa.

$$\sum_{0}^{4}(3 + 2i) \ = \ \sum_{0}^{4}(3 + 2(4 - i))$$

$$\sum_{0}^{4}(3 + 2i) \ = (3 + 2.0) + (3 + 2.1) + (3 + 2.2) + (3 + 2.3) + (3 + 2.4)$$

$$\sum_{0}^{4}(3 + 2(4 - i)) \ = (3 \ + \ 2.[4 - 0]) \ + \ (3 \ + \ 2.[4 - 1])$$
$$+ \ (3 \ + \ 2.[4 - 2]) \ + \ (3 \ + \ 2.[4 - 3]) \ + \ (3 \ + \ 2.[4 - 4])$$

Foi alterada apenas a ordem de operação.

Uma PA é uma sequência cuja diferença (razão) entre dois termos consecutivos é constante. O termo inicial, é o *a* e a razão é b . i onde b uma constante e i a ordem do termo. Por exemplo, na sequência 5, 7, 9, 11, 13, …, os valores a e b são 5 e 2, respectivamente. Logo, temos: (5 + 2.0), (5 + 2.1), (5 + 2.2), (5 + 2.3), (5 + 2.4), ...

Mostre os valores de a e b na sequência 1, 4, 7, 10, 13, …

Na sequência acima os valores de a e b são respectivamente 1 e 3.

Logo:

$$(1 \ + \ 3i)$$

Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma Sn dos elementos de uma PA

$$Sn = \sum_{0}^{n} (a + bi) = \sum_{0}^{n}[a + b(n - i)] = \sum_{0}^{n}[a + bn - bi]$$

$$2Sn = \sum_{0}^{n}(a + bi) + \sum_{0}^{n}[a + bn - bi]$$

$$2Sn = \sum_{0}^{n}[2a + bi + bn - bi] = \sum_{0}^{n}[2a + bn]$$

$$2Sn = \sum_{0}^{n}[2a + bn] \times 1$$

$$2Sn = [2a + bn] \times \sum_{0}^{n} 1$$

$$2Sn = [2a + bn] \times (n + 1)$$

$$Sn = \left(\frac{(2a + bn) \times (n+1)}{2}\right) = \left(\frac{n \times (n+1)}{2}\right)$$

Sabendo a fórmula da soma de uma progressão aritmética qualquer, mostre a fórmula para o somatório de 0 + 1 + 2 + 3 + … + n = $\sum_{0}^{n} i$

$$Sn = \left(\frac{(2 \times 0 + 1 \times n) \times (n+1)}{2}\right) = \left(\frac{n \times (n+1)}{2}\right)$$

Dada a fórmula fechada do somatório dos *n* primeiros números inteiros, mostre um algoritmo mais eficiente que o apresentado abaixo:

```
soma = 0;

for (int i = 0; i <= n; i++){

        soma += i;

}

return soma;
```

R: return (n*(n+1)/2)

Faça um método *int somatorioPA(double a, double b, int n)* que retorna o somatório dos n primeiros termos de uma PA com termo inicial *a* e razão *b*.

R:

```
int somatorioPA(double a, doble b, int n){
        return (n*(2*a + b*n)/2);
}
```

O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{i}^{(n-2)}$ (n - i - 1) comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório.

$$\sum_{i=0}^{(n-2)} (n - i - 1)$$

=

$$\sum_{i=0}^{(n-2)} n - \sum_{i=0}^{(n-2)} i - \sum_{i=0}^{(n-2)} 1$$

=

$$n(n-1) - \sum_{i=0}^{(n-2)} i - (1 \times n - 1)$$

=

$$n(n-1) - \left(\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right) - (1 \times n - 1)$$

=

$$n^2 - n - \left(\frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2} + 1\right) - n + 1$$

=

$$\left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right)$$

Justifique a igualdade: $\sum_{i=0}^{n} i \ = \ \sum_{i=1}^{n} i$

$$\sum_{i=0}^{n} i \ = \ 0 \ + \ 1 \ + \ ...$$

$$\sum_{i=1}^{n} i \ = \ 1 \ + \ 2 \ + \ ...$$

$$\sum_{i=0}^{n} i \ = \ 0 \ + \ \sum_{i=1}^{n} i \ = \ \sum_{i=1}^{n} i$$

Justifique a diferença: $\sum_{i=0}^{n} a_i \ = \ \sum_{i=1}^{n} a_i$

Não temos como garantir que o valor de a0 seja correspondente a 0, o que ocasionaria uma soma diferente do segundo somatório em relação ao primeiro.

Justifique a igualdade: $\sum_{i=0}^{n} a_{i+1} \ = \ \sum_{i=1}^{n} a_i$

Repare que o índice do valor ‘a’ no primeiro somatório realiza o incremento de 1 a para cada i, portanto seu valor inicial será a1, o que equivale ao início do segundo somatório.

Por que a primeira fórmula é mais adequada? (Dica: mostre os termos quando i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, … , n-1 e n)

$$\sum_{i=2}^{(n-1)} [i\,(i \ - \ 1)(n \ - \ i)] \ = \sum_{i=0}^{n} [i\,(i \ - \ 1)(n \ - \ i)]$$

A primeira fórmula é adequada pois ela ignora termos nulos, enquanto na segundo os contabiliza (mesmo não apresentando alterações na soma), esses ocorrem nos valores de i = 0, 1 e n;