Détection et correction d'erreurs: Hamming et Reed Solomon

Padovan Dorian 28434 MPI

Thème TIPE:Transition, transformation, conversion

Enjeux des codes correcteurs d'erreurs

->Canaux bruités

->Perte d'une partie du message

->Contenu du message peut être altéré

->Entrelacement

Plan

I- Vérifier la cohérence du message reçu

II- Description des codes de Hamming et Reed-Solomon

III- Implémentation et tests de performances

I-A) modèle d'un code et matrice génératrice

·Code linéaire $C(n,k)$: $\phi : (\mathbb{F})^k \longrightarrow (\mathbb{F})^n$

·Matrice génératrice $G \in M_{k,n}(\mathbb{F})$

·$A \in Gl_n(\mathbb{F})$: $G' = AG$ génère $C(n,k)$

·Si G est de la forme : $\begin{bmatrix} L & R \end{bmatrix}$

·Matrice normalisée : $G' = \begin{bmatrix} I_k & T \end{bmatrix}$ avec $T = L^{-1}R$

I-A) Exemple matrice génératrice

code de parité $C(5,4)$: $\phi(1000) = 10001$

$$x^T = [x_0, x_1, x_2, x_3]$$

$$\phi(x)^T = [x_0, x_1, x_2, x_3, x_0 + x_1 + x_2 + x_3 mod 2]$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

I-B) Matrice de contrôle

Soit $G' = \begin{bmatrix} I_k & T \end{bmatrix}$, la matrice génératrice normalisé de $C(n,k)$

Proposition 1

Soit H la matrice de contrôle (r,n) $H = \begin{bmatrix} T^T & -I_r \end{bmatrix}$. Alors $x^T = [x_1, ..., x_n] \in C(n,k)$ si et seulement si $Hx = 0$

Par exemple pour le code de parité C(5,4) : $H = [1,1,1,1]$

II-A)Code de Hamming C(2^n-1, 2^n-n-1)

-idée clé : utiliser des bits de parité sur une partie du message

-Naïvement: 1000 -> 10001

-Hamming C(7,4): 1000 -> 1110000

Codage d'un message avec le code de Hamming

message = 10001111010 -> 101000011111010

X 0000	1 0001	0 0010	1 0011
0 0100	0 0101	0 0110	0 0111
1 1000	1 1001	1 1010	1 1011
1 1100	0 1101	1 1110	0 1111

Codage de Hamming: 1-correcteur

message = 10001111010 -> 10101**1**0011111010

X 0000	1 0001	0 0010	1 0011
0 0100	1 0101	0 0110	0 0111
1 1000	1 1001	1 1010	1 1011
1 1100	0 1101	1 1110	0 1111

Trouver la position facilement de l'erreur avec l'addition bit à bit

+0001 +0011 +0101 +1000 +1001 +1010 +1011 +1100 +1110 = 0101	X 0000	1 0001	0 0010	1 0011
	0 0100	1 0101	0 0110	0 0111
	1 1000	1 1001	1 1010	1 1011
	1 1100	0 1101	1 1110	0 1111

```
270     t=[ i for i,bit in enumerate(message) if bit=='1']
271     pos = 0
272     for elt in t :
273         pos =pos ^ elt
274     return pos
```

Codage de Hamming: 2 erreurs

message = 10001111010 -> 10101001111**1**0**1**0

test renvoie 9=1001

X 0000	1 0001	0 0010	1 0011
0 0100	1 0101	0 0110	0 0111
1 1000	1 1001	1 1010	1 1011
0 1100	0 1101	1 1110	0 1111

Codage de Hamming étendu : détecter 2 erreurs

message = 10001111010 -> 0101011001111 0 0 1 0

bits de parité sur l'ensemble du message

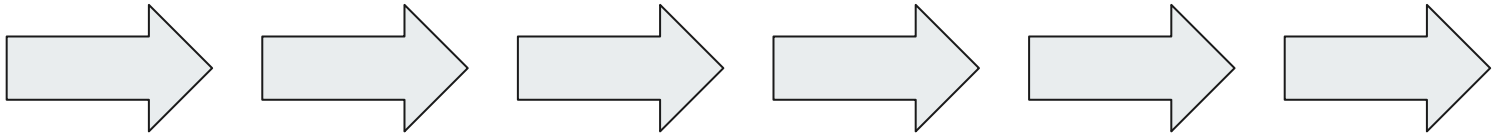
0 0000	1 0001	0 0010	1 0011
0 0100	1 0101	0 0110	0 0111
1 1000	1 1001	1 1010	1 1011
0 1100	0 1101	1 1110	0 1111

II-B)Entrelacement du message et Hamming

message découpé ->’aaaa’ , ‘bbbb’ , ‘cccc’ , ‘dddd’

message envoyé -> ‘abcd’ , ‘abcd’ , ‘abcd’ , ‘abcd’

message reçu -> ‘abcd’ , ‘abcd’ , ‘’ , ‘abcd’



Message encodé avec Hamming

entrelacement

Potentielle perte d’un paquet

Remplace les paquets perdu par ‘aaaa’

entrelacement

message décodé

```
686    assert message == hamming_decoding(entrelacement(perte_random(entrelacement(hamming_encoding(message,4)))))
```

II-C) Reed Solomon pour des pertes de données

idée clé : Unicité des polynômes d'interpolation de Lagrange

1) Construction du polynôme : soient n couples de réels : $(1, y_1), (2, y_2), ...(n, y_n)$ on pose :

$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x-j}{i-j}$ on a alors : $P(x_i) = y_i$

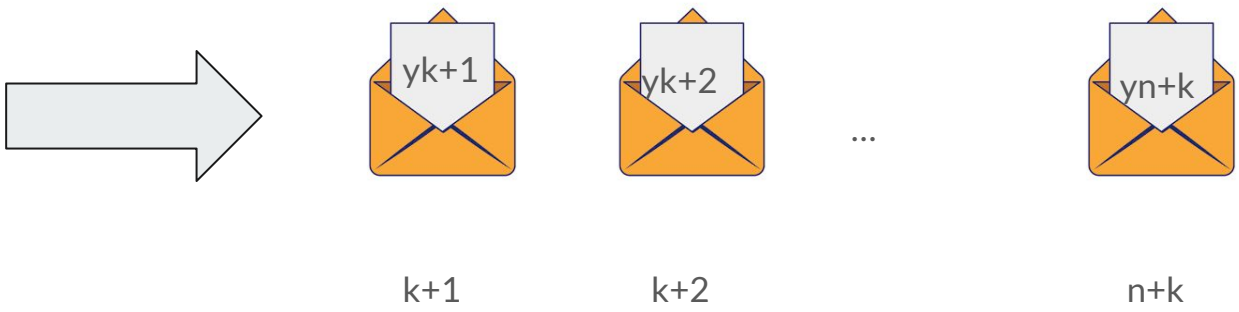
2)Valeurs de redondance : évalutation de P en les valeurs :$(n+1, ..., n+k)$

3)Envoi de $n+k$ paquets numerotés :

II-C) Reed Solomon pour des pertes de données

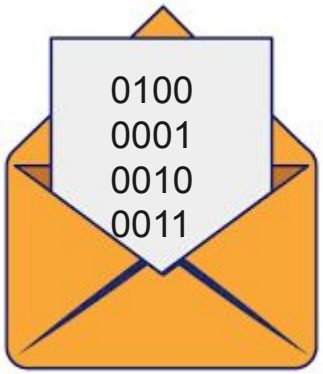
Canal bruité

Réception du message



- Reconstruit l'unique polynôme de Lagrange avec les n valeurs que l'on possède
- On l'évalue en 1,2,...,k pour retrouver le message

Encodage Reed-Solomon : perte de donnée



0100 0001 0010 0011 0000

x=	0	1	2	3	4
P(x)=	4	1	2	3	0

(x1,x2,x3,x4)=(0,1,2,3) (y1,y2,y3,y4)=(4,1,2,3)

-> Polynôme d'interpolation de lagrange: $P(X)= -2/3\ X^3 + 4X^2 -19/18X + 4$

->P(4) = 0

III-A) Performance des codes de Hamming pour différentes valeurs de n

-> message = 'Hello! This is a simple ASCII text with numbers 1234567890 and symbols: @#$%^&*()-_=+[]{};:,.<>?'

-> taille 672 bits en codage ASCII

-> Rajout de 0 à la fin du message

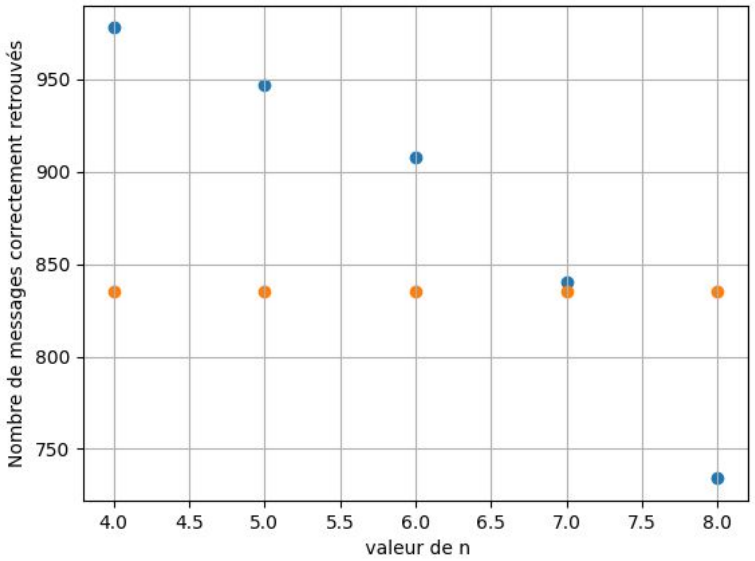
n=	3	4	5	6	7	8
taille	1352	992	832	768	768	768

III-A) Performance des codes de Hamming pour différentes valeurs de n

->Pour la suite n = 4

->probabilité de 1/500 qu'un bit soit altéré

```
908     m='Hello! This is a simple ASCII text with numbers'
909     m=m+'1234567890 and symbols: @#$%^&*()-_=+[]{};:,.<>?'
910     mp = test_sans_cor(m,1000,500)
911     yy_values=[mp for i in range(len(x_values))]
912     for i in range(len(x_values)):
913         y_values.append(test_hamming(m,1000,x_values[i],500,0))
914         print(i)
915     plt.scatter(x_values,y_values) # points bleu
916     plt.xlabel(" valeur de n")
917     plt.scatter(x_values,yy_values) #points orange
918     plt.ylabel("Nombre de messages correctement retrouvés")
919     plt.grid()
920     plt.show()
```



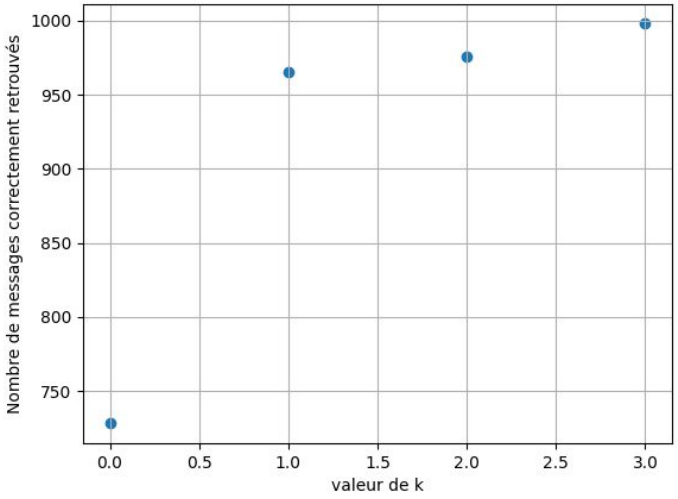
|||-B) Performance Reed-Solomon pour différentes valeurs de k avec des pertes de paquets

-> Probabilité qu'un paquet soit perdu = 1/50

-> Paquet de 64 bits (Norme IEEE 754)

->Par la suite k = 4

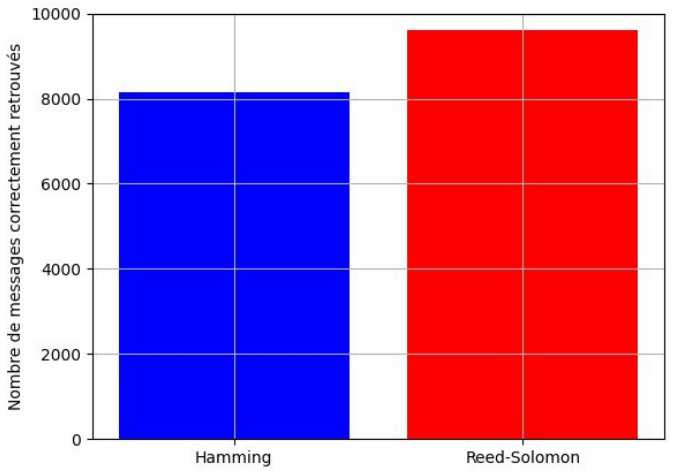
```
969     x_values=[]
970     y_values=[]
971     nb=1000
972     m='This is a simple ASCII text '
973     for i in range(0,4):
974         print(i)
975         x_values.append(i)
976         y_values.append(test_RS(message,nb,50,i))
977     print(sum(y_values)/len(y_values))
978     plt.scatter(x_values,y_values)
979     plt.xlabel("valeur de k")
980     plt.ylabel("Nombre de messages correctement retrouvés")
981     plt.grid()
982     plt.show()
```



III-C) Hamming VS Reed-Solomon pour des pertes de paquets

->message : This is a simple ASCII text
-> n = 6 , k = 4
->probabilité de 1/20 qu'un paquet soit perdu
->Hamming: 8152 , Reed-Solomon: 9598

```
998
999     nh=test_hamming_entrelace(message_h,nb,taille_hamming,20)
1000    nrs=test_RS(message_RS,nb,20,redondance_RS)
1001    categories = ['Hamming' , 'Reed-Solomon']
1002    values= [nh,nrs]
1003    colors=['blue','red']
1004    print(values)
1005    plt.bar(categories,values,color=colors)
1006    plt.ylim(0,nb)
1007    plt.xlabel("")
1008    plt.ylabel("Nombre de messages correctement retrouvés")
1009    plt.grid()
1010    plt.show()
```



Conclusion

Comparaison :

- Efficacité, complexité

Limites :

-Représentation binaire des nombres

-Amélioration possible

Merci de votre attention

Annexe 1 - Preuve matrice normalisé

Soit $G = A \cdot G'$, avec $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ une matrice inversible et G' une matrice génératrice de C.

Alors :

$$\mathrm{Im}(G') = \{xG' \mid x \in \mathbb{F}^k\} = C,$$

et donc :

$$\mathrm{Im}(G) = \{xG \mid x \in \mathbb{F}^k\} = \{xAG' \mid x \in \mathbb{F}^k\} = \{yG' \mid y = xA \in \mathbb{F}^k\} = \mathrm{Im}(G').$$

Ainsi :

$$\mathrm{Im}(G) = C.$$

Annexe 1 - Démonstration proposition 1

Preuve. Soit $x \in \mathbb{F}^n$, existe $z \in \mathbb{F}^k$ tel que $x = zG$ la matrice normalisé.
D'où :

$$xH^T = z[I_k \mid T] \begin{bmatrix} T^T \\ -I_k \end{bmatrix}$$

Par conséquent,

$$xH^T = z(T^T - T^T) = 0.$$

Réciproquement, si $xH^T = 0$ alors :

$$[x_1, x_2, ..., x_n]H^T = 0,$$

Cela induit que pour $j = 1, ..., r$ que :

$$[x_1, x_2, ..., x_n][T_{1,j}, ..T_{k,j}]^T = 0,$$

Cela donne :

$$[x_{k+1}, ...x_{k+r}] = [x_1, ...x_k]T$$

Finalement, on a :

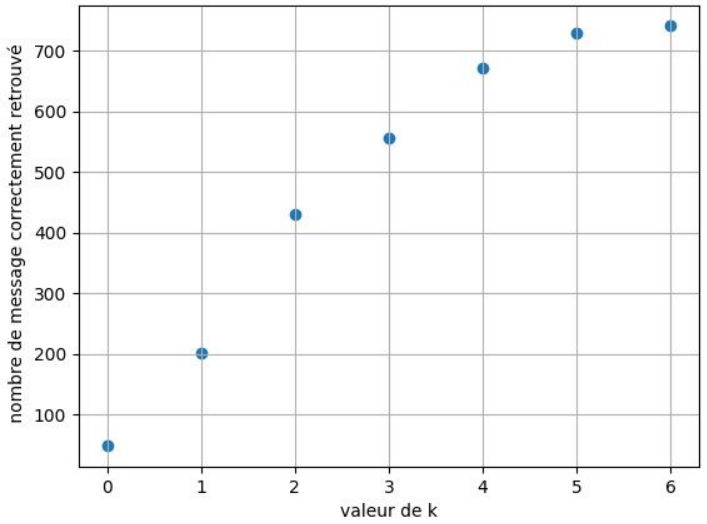
$$[x_1, ..., x_n] = [x_1, ..., x_k][Ik|T] = xG$$

ce qui montre que $x \in C$.

Annexe 2 - Performance Reed-Solomon corps fini avec différentes valeurs pour k

32 paquets de 7 bits

probabilité de 1/10 que le message soit perdu



Annexe 2 - Performance Reed-Solomon corps fini

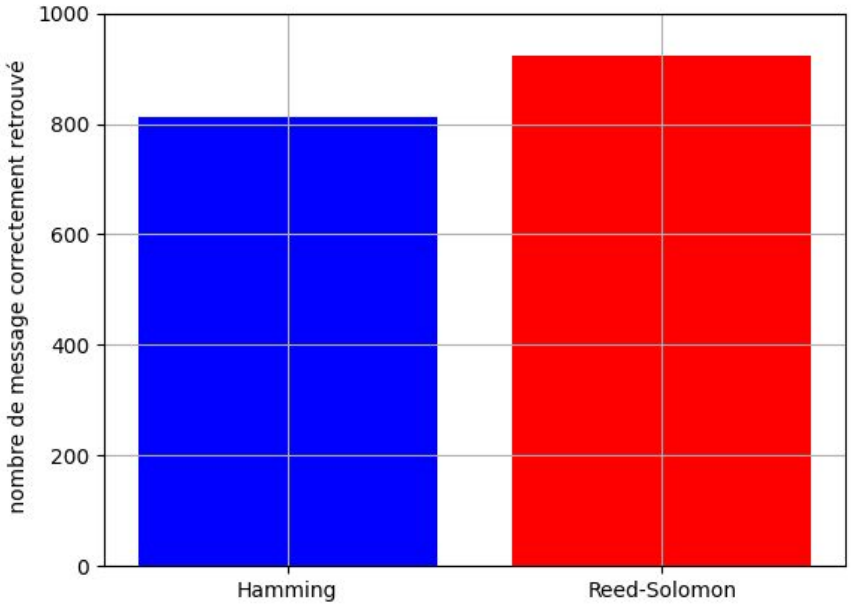
Message: This is a simple ASCII text

Probabilité de 1/20 qu'un paquet soit perdu

Paquets de 8 bits

Hamming(7,3): 813

Reed Solomon avec 5 caractères de redondance: 924



Annexe 3 code

```python
from random import randint,random
from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.interpolate import lagrange
import struct


def modifie_i_eme(message:str,i:int,new:str):
    """prend une chaine de caractère et renvoie la même chaine avec son ieme caractère changé en new

    Args:
        message (str): chaine
        i (int): indice
        new (str): nouveau caractère

    Returns:
        str: voir description
    """
    if i < 0 or i >= len(message):  # Vérifie que l'indice est valide
        return message
    return message[:i] + new + message[i+1:]

def repr_bin_str(c:str):
    """Convertit une chaîne en une représentation binaire


    Args:
        c (str): un str de taille 1

    Returns:
        str: représentation binaire de c
    """
    return format((ord(c)),'07b')

def codage_binaire(chaine:str):
    """converti une chaine en une représentation bianire

    Args:
        chaine (str):

    Returns:
        str: concaténation de la représentation binaire de chacun des caractère de la chaine en entrée
    """
    c=''
    for elt in chaine:
        c=c + repr_bin_str(elt)
```

Annexe 3 code

```
36  def codage_binaire(chaine:str):
48      return c
49
50  def uniforme(bit:str,proba:int):
51      """procéde à l'opération binaire not sur le message avec une probabilité 1/p
52
53      Args:
54          bit (str): taille = 1
55          proba (int): proba>0
56
57      Returns:
58          str: renvoie l'opposé du bits
59      """
60      p = randint(1, proba)
61      if p ==1 :
62          return str(1-int(bit))
63      return bit
64
65  def random_change(message:str,loi:str,proba:int,period:int=0,taille_burst:int=0):
66      """modélise un canal bruité
67
68      Args:
69          message (str): message initial
70          loi (str): type d'erreurs expected: 'uniforme','periodique','burst_uni'
71          proba (int): probabilité qu'un bit ou qu'un ensemble de bits soit altéré
72          period (int, optional): si les erreurs arrivent de manière périodique. Defaults to 0.
73          taille_burst (int, optional): taille d'un bloc. Defaults to 0.
74
75      Returns:
76          str: le message avec probablement des erreurs
77      """
78      l=['uniforme','periodique','burst_uni']
79      #offset_period=randint(0,period-1)
80      assert loi in l
81      assert proba>1
82      n = len(message)
83      i=0
84      while i < n :
85          if loi == 'uniforme' :
86              message = modifie_i_eme(message,i,uniforme(message[i],proba))
87          elif loi == 'periodique':
88              assert period>0
89              if i%period == 0:
90                  message = modifie_i_eme(message,i,uniforme(message[i],1))
91          elif loi == 'burst_uni' :
92              assert taille_burst>0
93              if 1== randint(1, proba) :
```

Annexe 3 code

```
65  def random_change(message:str,loi:str,proba:int,period:int=0,taille_burst:int=0):
93              if 1== randint(1, proba) :
94                  j = 0
95                  while (i+j)<n and j<taille_burst :
96                      message = modifie_i_eme(message,i,uniforme(message[i],1))
97                      j = j +1
98                  i=i+64
99          i=i+1
100     return message
101
102 def est_puissance_de_2(n:int):
103     """vérifie si n est une puissance de 2
104
105     Args:
106         n (int): un entier lambda
107
108     Returns:
109         bool: true ssi n est une puissance de 2
110     """
111     return n > 0 and (n & (n - 1)) == 0 # & et bit a bit
112
113 def decoupage_puissance_2(chaine:str,m:int):
114     """découpe un str en bloc de taille 2^m et rajoute des bits de parité pour correspondre au codage de hamming
115
116     Args:
117         chaine (str): str
118         m (int): >=4
119
120     Returns:
121         list: liste de str de taille 2^m
122     """
123     assert m>=3
124     n = len(chaine)
125     j = 0
126     p = 2 **m
127     c = ''.join([' ' for i in range(p)])
128     longueur=n//(p - m -1)
129     if longueur*11<n :
130         longueur= longueur +1
131     t=[c for i in range(longueur)]
132     h = 0
133     while j<n :
134         c = 'p'
135         if j + p -1-m< n :
136             for i in range(1,p):
137                 if est puissance de 2(i): # rajoute bits de redondance
```

Annexe 3 code

```
113  def decoupage_puissance_2(chaine:str,m:int):
138                      c=c+ 'r'
139                  else:
140                      c =c+ chaine[j]
141                      j = j +1
142              t[h]=c
143              h=h+1
144          else:
145              i = 1
146              while j <n:
147                  if est_puissance_de_2(i):
148                      c= c + 'r'
149                  else:
150                      c = c + chaine[j]
151                      j = j +1
152                  i = i +1
153              for l in range(i,p): # on rajoute des 0 à la fin pour avoir un message de taille une puissance de 2
154                  if est_puissance_de_2(l):
155                      c= c + 'r'
156                  else:
157                      c = c + '0'
158                      j = j +1
159              if h<len(t) and len(t[h])<2**m :
160                  t[h]=c+'0'
161              else:
162                  t[h]=c
163              h=h+1
164      return t
165
166
167  def calculate_parity_positions(r:int):
168      """renvoie les positions des bits de parité dans un code de hamming
169
170      Args:
171          r (int): entier
172
173      Returns:
174          list: liste contenant les positions
175      """
176      # les positions de la case de redondance i sont ceux telles que le i eme bits de la case représenté est un 1
177      n = 2**r - 1
178      parity_positions = {i: [] for i in range(1, r+1)}
179      for i in range(1, n + 1):
180          for p in range(1, r + 1):
181              if (i & (2**(p - 1))):
182                  parity_positions[p].append(i)
```

Annexe 3 code

```
167 def calculate_parity_positions(r:int):
183     return parity_positions
184
185 def xor_bit(c1:str,c2:str):
186     """xor
187
188     Args:
189         c1 (str): '0' ou '1'
190         c2 (str): '0' ou '1'
191
192     Returns:
193         str: '0' ou '1'
194     """
195     if c1=='1':
196         if c2=='1':
197             return '0'
198         else:
199             return '1'
200     else:
201         if c2=='1':
202             return '1'
203         else:
204             return '0'
205
206 def parity_pos(pos:list,message:str):
207     """renvoie la somme (xor) des positions des bits '1' dans le message cela permet de trouver la valeur du bits de pari
208
209     Args:
210         pos (list): liste de position
211         message (str): chaine de '0' ou '1'
212
213     Returns:
214         str: '0' ou '1'
215     """
216     c = '0'
217     for elt in pos:
218         c = xor_bit(c,message[elt])
219     return c
220
221 def redondance(message:str,m:int):
222     """donne une valeurs aux bits de redondance
223
224     Args:
225         message (str): chaine de taille m
226         m (int): entier
227     """
```

Annexe 3 code

```
221  def redondance(message:str,m:int):
228      d = calculate_parity_positions(m)
229      for key in d:
230          indice = 2**(key-1 )
231          message=modifie_i_eme(message,indice,parity_pos(d[key],message))
232      return message
233
234  def detecteur_1(message:str,m:int):
235      """Bit de détection d'erreur Hamming (bit 2)
236
237      Args:
238          message (str): str
239          m (int): pour faire une puissance de 2
240
241      Returns:
242          str: le message avec son premier caractère modifier pour hamming
243      """
244      n = 2**m
245      compte=0
246      for i in range(1,n):
247          if message[i]==1:
248              compte+=1
249      if compte%2==0:
250          return '0'+message[1:]
251      else:
252          return '1'+message[1:]
253
254  def position_erreur(message:str):
255      """
256      trouve la position de l'erreur s'il n'y en a qu'une
257      sinon renvoie 0
258      Args:
259          message (str): str
260      Returns:
261          int: indice de l'erreur
262      """
263      t=[ i for i,bit in enumerate(message) if bit=='1']
264      pos = 0
265      for elt in t :
266          pos =pos ^ elt
267      return pos
268
269  def correction_erreur(message:str):
270      """corrige une erreur
271
272      Args:
```

Annexe 3 code

```
269 def correction_erreur(message:str):
273     message (str): str
274
275     Returns:
276         str: message initial
277     """
278     i = position_erreur(message)
279     if i == 0 or i>=len(message):
280         return message
281     return modifie_i_eme(message,i,uniforme(message[i],1))
282
283 def hamming_encoding(message:str,m:int):
284     """codage de hamming du message avec des decoupages de taille 2^m
285
286     Args:
287         message (str): message initial
288         m (int): >=4
289
290     Returns:
291         list: liste de str de taille exactement 2^m représentant le message initial envoyé avec la redondance
292     """
293     c= codage_binaire(message) # transforme en binaire
294     #c='10001111010'
295     l = decoupage_puissance_2(c,m) # on découpe en plus petit message de taille 2**m
296     n = len(l)
297     for i in range(n):
298         l[i] = redondance(l[i],m) # calcul des bits de redondance
299         l[i] = detecteur_1(l[i],m) # calcul du bit de dectection
300     return l
301
302 def position_not_p2(m:int):
303     """pour un entier m donné renvoie un tableau contenant tous les entiers de 1 à m qui ne sont pas des puissances de 2
304
305     Args:
306         m (int): >=1
307
308     Returns:
309         list: voir description
310     """
311     pos=[]
312     for i in range(1,m):
313         if not est_puissance_de_2(i):
314             pos.append(i)
315     return pos
316
317 def hamming_decoding(l:list):
```

Annexe 3 code

```python
def hamming_decoding(l:list):
    """decode un message qui a subit une transformation de hamming

    Args:
        l (list): list de str de même taille contenant uniquement des 0 ou 1

    Returns:
        str: message decoder qui sera le message initial si il n'y a qu'une erreur
    """
    message=''
    n= len(l)
    m=len(l[0])
    pos=position_not_p2(m)
    for i in range(n):
        l[i]=correction_erreur(l[i]) # corrige erreur de chaque morceau du message
        for indice in pos:
            message=message + l[i][indice] # on recupère le message sans les bits de redondance/parité
    p = len(message)
    h=p//7
    m=''
    for i in range(h): # on reconstruit le message ASCII
        c=''
        for j in range(7):
            if message[7*i+j]!=' ': # ?
                c=c+message[7*i+j]
            else:
                c=c+'0'
        if len(c)==7:
            asci_i = int(c,2)
            if asci_i!=0:
                m=m+ chr(asci_i)
    return m

#Reed-Solomon

def float64_to_bin(value:float):
    """Convertit un float64 en binaire IEEE 754 (64 bits)."""
    packed = struct.pack('!d', value)  # '!d' = Big-endian double (64 bits)
    return ''.join(f'{byte:08b}' for byte in packed)

def bin64_to_float(binary:str):
    """Convertit une chaîne binaire IEEE 754 (64 bits) en float64."""
    assert len(binary) == 64, "La chaîne doit contenir exactement 64 bits"

    # Extraction des parties
    signe = int(binary[0], 2)
```

Annexe 3 code

```
357 def bin64_to_float(binary:str):
362     signe = int(binary[0], 2)
363     exposant = int(binary[1:12], 2)
364     mantisse = int(binary[12:], 2)
365 
366     # Calcul du float64
367     if exposant == 0:
368         # Nombre subnormal (exposant = 0 → exposant réel = -1022)
369         valeur = (mantisse / (2**52)) * 2**-1022
370     elif exposant == 2047:
371         # Cas spéciaux : Infini ou NaN
372         if mantisse == 0:
373             valeur = float('inf')
374         else:
375             valeur = float('nan')
376     else:
377         # Nombre normalisé
378         valeur = (1 + mantisse / (2**52)) * 2**(exposant - 1023)
379 
380     # Appliquer le signe
381     return -valeur if signe else valeur
382 
383 def valeur_str(chaine:str):
384     """
385     renvoie  pour chaine = m1m2m3m4 ...
386     Somme des mi*2**i
387 
388     Args:
389         chaine (str): chaine de 0 et 1
390 
391     Returns:
392         int:
393     """
394     v= 0
395     p = 1
396     for elt in chaine:
397         if elt=='1':
398             v = v + p
399         p=2*p
400     return v
401 
402 def inverse_valeur_str(v: int,p:int):
403     """inverse de la fonction précédente
404 
405     Args:
406         v (int): la valeur renvoyer par la dernière fonction
```

Annexe 3 code

```
402  def inverse_valeur_str(v: int,p:int):
406          v (int): la valeur renvoyer par la dernière fonction
407          p (int): définir la taille de la chaine renvoyer (rajoute des 0 non significatif)
408
409      Returns:
410          str:
411      """
412      if v == 0:
413          return "0".ljust(p, "0")  # Retourne une chaîne de 14 zéros si v == 0
414
415      chaine = ""
416      while v > 0:
417          chaine += "1" if v % 2 == 1 else "0"
418          v //= 2
419
420      return chaine.ljust(p, "0")  # Complète avec des zéros à droite jusqu'à 14 caractères
421
422  def decoupage_taille_p(message:str,p:int):
423      """découpe un str en bloc de taille p
424
425      Args:
426          message (str): str
427          p (int): >0 ici p = 64
428
429      Returns:
430          list: liste de str de taille p
431      """
432      n = len(message)
433      q= n//p
434      r = n%p
435      l = ['' for i in range(p+1)]
436      for i in range(p+1):
437          c=''
438          for j in range(q):
439              if i*q + j < n :
440                  c=c+ message[i*q + j]
441          l[i]=c
442      if r != 0 :
443          l.append(message[(p)*q+q:])
444      return l
445
446  def encodage_reed_solomon(message:str,redondance:int,p:int):
447      """
448      Code de Reed-Solomon avec des paquets.
449
450      Args:
```

Annexe 3 code

```python
def encodage_reed_solomon(message:str,redondance:int,p:int):
    Args:
        message (str): message quelconque.
        redondance (int): nombre de caractères de redondance.
        p (int): taille des paquets.

    Returns:
        list: liste des paquets.
    """
    message=codage_binaire(message) # codage binaire
    l = decoupage_taille_p(message,p) # découpage pour valeurs des polynomes
    n = len(l)
    m=n//2
    x_points=np.array([i for i in range(n)])
    for i in range(m,n):
        x_points[i]+=redondance # ajouts de la redondance
    y_points=np.array([np.float64(0) for i in range(n)])
    for i in range(n):
        y_points[i]=np.float64(valeur_str(l[i]))
        l[i]=y_points[i]
    P=lagrange(x_points,y_points) # construction du polynome
    for r in range(redondance): # rajoute les valeurs de redondance
        l.append(P(m+r))#float64_to_bin(P(m+r)))
    return l

def correction_perte(l,k):
    """retrouve le message originale avec Polynome d'interpolation

    Args:
        l (list): de float64
        k (int): nombre de caractères de redondance

    Returns:
        list: messsage
    """
    n = len(l)
    m=(n-k)//2
    x_points=np.array([i for i in range(n-k)])
    for i in range(m,n-k):
        x_points[i]+=k
    y_values=['False' for i in range(n)]
    c=0
    for i in range(n):# on retrouve les valuers non perdues
        if l[i]!='':
            y_values[i]=(l[i])
        else:
            c=c+1
```

Annexe 3 code

```
477  def correction_perte(l,k):
498              c=c+1
499      if c>k:
500          return []
501      else:
502          x=[]
503          y=[]
504          dec=0
505          compteur=0
506          while compteur<n-k: # construction des tableaux x et y pour retrouver le polynome
507              if y_values[compteur]!='False':
508                  x.append(x_points[compteur])
509                  y.append(y_values[compteur])
510              else:
511                  x.append(m+dec)#x_points[compteur]+m-compteur+dec
512                  y.append(y_values[n-k+dec])
513                  dec+=1
514              compteur+=1
515          if 'False' in y:
516              return []
517          P=lagrange(x,y)
518          l_message=['' for i in range(n-k)]###on retrouve le message originale
519          m=(n-k)//2
520          i=0
521          j=0
522          while i<n:
523              l_message[j]=(np.rint((P(x_points[j]))))
524              if i+1 ==m:
525                  i=i+k+1
526              else:
527                  i=i+1
528              j=j+1
529          return l_message
530
531  def retrouvemessageascii(l,p):
532      """reconstruction du message original
533
534      Args:
535          l (lst str): message bianire
536          p (int): taille des blocs
537
538      Returns:
539          str: message
540      """
541      nn=len(l)
542      n = p*nn
543      m=n//7
```

Annexe 3 code

```
528  def retrouvemessageascii(l,p):
540      m=n//7
541      message_bin=''
542      message=''
543      ll=l.copy()
544      for i in range(nn):
545          ll[i]=inverse_valeur_str((ll[i]),p)
546          message_bin+=ll[i]
547      for i in range(m):
548          mm=''
549          if 7*i + 6 <n :
550              for j in range(7):
551                  mm+=message_bin[7*i+j]
552          message+=chr(int(mm,2))
553      mm=''.join([elt for elt in message if elt!='\x00' and elt!='\n' and elt!='\x0c' and elt!='\x05' and elt!='\x0b'])
554      return mm
555
556  def random_disapear(l,proba:int):
557      """probabilité de perdre le contenu d'un elt de la liste
558
559      Args:
560          l (lst str): liste
561          proba (int): plus grand que 1
562
563      Returns:
564          lst str: potentiellement des messages devenues vide
565      """
566      n = len(l)
567      for i in range(n) :
568          if random() < 1/proba :
569              l[i]=''
570      return l
571
572  def test_RS(m:str,int:int,proba:int,redondance:int):
573      """
574
575      Args:
576          m (str): message
577          int (int): nombre de fois que l'on test le procedé
578          taille (int): sur combien de bits utilisé hamming
579          proba (int): 1/proba = probabilité qu'un bits soit alteré (voir dans la fonction si uniforme ou pas)
580          redondance(int): nombre de redondance pour le polynome
581
582      Returns:
583          int: nombre de transmission correcte
584      """
```

Annexe 3 code

```
572  def test_RS(m:str,int:int,proba:int,redondance:int):
584      """
585      c=0
586      for i in range(int):
587          n=len(codage_binaire(m))//15 + 1
588          l=encodage_reed_solomon(m,redondance,n)
589          ll=random_disapear(l,proba) #probabilité d'enlever un bloc de 64 bits
590          l2= correction_perte(ll,redondance)
591          mm=retrouvemessageascii(l2,n)
592          if mm==m:
593              c=c+1
594          if i%(int/10)==0 and False:
595              print(i)
596      return c
597
598  def test_sans_cor(m:str,int:int,proba:int):
599      """
600
601      Args:
602          m (str): message
603          int (int): nombre de fois que l'on test le procedé
604          taille (int): sur combien de bits utilisé hamming
605          proba (int): 1/proba = probabilité qu'un bits soit alteré (voir dans la fonction si uniforme ou pas)
606
607      Returns:
608          int: nombre de transmission correcte
609      """
610      c=0
611      for i in range(int+1):
612          mm= random_change(m,'uniforme',proba)
613          if mm==m:
614              c=c+1
615      return c
616
617  def test_hamming(m:str,int:int,taille:int,proba:int,perte:int):
618      """Fonction de test du codage de Hamming dans un canal bruité.
619      On teste `int` fois la transmission et on compte le nombre de fois où le message est correctement retranscrit.
620
621
622      Args:
623          m (str): message
624          int (int): nombre de fois que l'on test le procedé
625          taille (int): sur combien de bits utilisé hamming
626          proba (int): 1/proba = probabilité qu'un bits soit alteré (voir dans la fonction si uniforme ou pas)
627          perte(int): = 0 corruption de donnée = 1 perte de donnée
628
```

Annexe 3 code

```
617  def test_hamming(m:str,int:int,taille:int,proba:int,perte:int):
630          int: nombre de transmission correcte
631      """
632      c=0
633      corrompu= ''.join(['0' for i in range(2**taille)])
634      for i in range(int):
635          l=hamming_encoding(m,taille)
636          n=len(l)
637          for i in range(n):
638              if perte == 1 and random()<1/proba: # dans le cas d'une perte de donné
639                  l[i]= corrompu
640              elif perte==0:
641                  l[i]= random_change(l[i],'uniforme',proba)
642          mm=hamming_decoding(l)
643          if mm==m:
644              c=c+1
645      return c
646
647  def entrelacement(l: list, p: int = 16):
648      """
649      Entrelace les bits de la liste `l` par blocs de `p` bits.
650      Chaque bloc est vu comme une ligne, et l'entrelacement se fait colonne par colonne.
651      """
652      n = len(l)
653      m = n // p  # nombre de blocs
654      # Construire la matrice m x p (m lignes de p bits)
655      # Entrelacement : lire colonne par colonne
656      new_l = []
657      for k in range(m):
658          for i in range(p): # pour chaque colonne
659              mess=''
660              for j in range(p):  # pour chaque ligne
661                  mess=mess+l[p*k+j][i]
662              new_l.append(mess)
663
664      for i in range(p*m,p*m+n%p):
665          new_l.append(l[i])
666      return new_l
667
668  message='This is a simple ASCII text '
669  n=len(codage_binaire(message))//15 + 1
670  #print(len(hamming_encoding(message,6))* len(hamming_encoding(message,6)[0]))
671  #print(len(encodage_reed_solomon(message,4,n))* 64)
672  l1=[''.join([chr(j) for i in range(16)]) for j in range(97,97+16)]
673  l2=[''.join(format(j,'016b') ) for j in range(16)]
674  l1= l1 + l1
```

Annexe 3 code

```
676 def perte_random(l):
677     """
678     change un elt de la liste en 16 '0'
679     Args:
680         l (list): str
681 
682     Returns:
683         list: str
684     """
685     n = len(l)
686     j=randint(1,n-1)
687     l[j]=''.join(['0' for i in range(len(l[j]))])
688     return l
689 
690 m='This is a simple ASCII text This is a simple ASCII text This is a simple ASCII text This is a simple ASCII text This is a simple ASC
691 
692 assert entrelacement(entrelacement(l1))==l1
693 assert m == hamming_decoding(entrelacement(entrelacement(hamming_encoding(m,4))))
694 assert m == hamming_decoding(entrelacement(perte_random(entrelacement(hamming_encoding(m,4))))) # si 16 | len(hamming_encoding(m,4))
695 
696 
697 def poly_add(p1:list, p2:list, modulo:int):
698     """ addition de 2 polynomes modulo"""
699     length = max(len(p1), len(p2))
700     result = [0] * length
701     for i in range(length):
702         if i < len(p1):
703             a=p1[i]
704         else :
705             a=0
706         if i < len(p2):
707             b=p2[i]
708         else :
709             b=0
710         result[i] = (a + b) % modulo
711     return result
712 
713 def poly_mul(p1:list, p2:list, modulo:int):
714     # multiplication de deux polynomes
715     result = [0] * (len(p1) + len(p2) - 1)
716     for i in range(len(p1)):
717         for j in range(len(p2)):
718             result[i + j] = (result[i + j] + p1[i] * p2[j]) % modulo
719     return result
720 
721 def lagrange_poly(x:list, y:list, modulo=131):
```

Annexe 3 code

```
720
721 def lagrange_poly(x:list, y:list, modulo=131):
722     # renvoie sous forme d'une liste de coeffs le polynome d'interpolation de lagrange modulo modulo
723     n = len(x)
724     final_poly = [0]
725
726     for i in range(n):
727         # Construct L_i(x)
728         li_poly = [1]
729         denom = 1
730         for j in range(n):
731             if i != j:
732                 # Multiply by (x - xj)
733                 li_poly = poly_mul(li_poly, [-x[j] % modulo, 1], modulo)
734                 # Multiply denominator (xi - xj)
735                 denom = (denom * (x[i] - x[j])) % modulo
736
737         denom_inv = pow(denom, -1, modulo)
738         # Multiply L_i(x) by yi * denom_inv
739         li_scaled = [(coef * y[i] * denom_inv) % modulo for coef in li_poly]
740
741         # Add to the final polynomial
742         final_poly = poly_add(final_poly, li_scaled, modulo)
743
744     return final_poly
745
746
747 def format_polynomial(coeffs:list,modulo:int):
748     #pour afficher le polynôme
749     terms = []
750     for i, coeff in enumerate(coeffs):
751         coeff = coeff % modulo
752         if coeff == 0:
753             continue
754         if i == 0:
755             term = f"{coeff}"
756         elif i == 1:
757             term = f"{coeff}x" if coeff != 1 else "x"
758         else:
759             term = f"{coeff}x^{i}" if coeff != 1 else f"x^{i}"
760         terms.append(term)
761
762     if not terms:
763         return "0"
764     return " + ".join(terms[::-1]) + f"  (mod {modulo})"
765
```

Annexe 3 code

```
766
767 def eval_poly(coeffs:list, x:int, modulo:int):
768     # renvoie P(x) où P est décrit par sa liste de ses coeeficients
769     result = 0
770     for coef in reversed(coeffs):
771         result = (result * x + coef) % modulo
772     return result
773
774
775
776 def encodage_reed_solomon_fini(message:str,redondance:int,modulo=131):
777     """
778     Code de Reed-Solomon avec des paquets avec corps fini
779
780     Args:
781         message (str): message quelconque.
782         redondance (int): nombre de caractères de redondance.
783         modulo (int): modulo
784
785     Returns:
786         list: liste des paquets.
787     """
788     n = len(message)
789     l = decoupage_taille_p(message,n)
790     ll=[ 0 for i in range(n+redondance)]
791     x_points=[i for i in range(n)] # i+1 pour le test de la source
792     y_points=[ord(message[i]) for i in range(n)]
793     for i in range(n):
794         ll [i]=y_points[i]
795
796     P=lagrange_poly(x_points,y_points,modulo)
797     for r in range(redondance):
798         ll[n+r]=eval_poly(P,n+r,modulo)
799     return ll
800
801
802
803 def correction_perte_fini(l,k,modulo=131):
804     """retrouve le message originale avec Polynome d'interpolation modulo modulo
805
806     Args:
807         l (list): message potentiellement corrompu
808         k (int): nombre de caractères de redondance
809
810     Returns:
811         list: messsage
```

Annexe 3 code

```
803 def correction_perte_fini(l,k,modulo=131):
811         list: messsage
812     """
813     n = len(l)
814     x_points=([i for i in range(n)])
815     y_values=['False' for i in range(n)]
816     c=0
817     for i in range(n):# on retrouve les valuers non perdues
818         if l[i]!='':
819             y_values[i]=(l[i])
820         else:
821             c=c+1
822     if c>k:
823         return [] # pas possible
824     else:
825         x=[]
826         y=[]
827         dec=0
828         compteur=0
829         while compteur<n-k:
830             if y_values[compteur]!='False':
831                 x.append(x_points[compteur])
832                 y.append(y_values[compteur])
833             else:
834                 x.append(x_points[n-k+dec])
835                 y.append(y_values[n-k+dec])
836                 dec+=1
837             compteur+=1
838         if 'False' in y:
839             return [] # pas possible
840         P=lagrange_poly(x,y,modulo)
841         l_message=['' for i in range(n-k)]
842         j=0
843         while j<n-k:
844             l_message[j]=eval_poly(P,x_points[j],modulo)
845             j=j+1
846         return l_message
847
848 def decodage_ascii_fini(l):
849     #renvoie le codage ASCII d'une liste d'entiers
850     return ''.join([chr(elt) for elt in l])
851
852
853 def test_RS_fini(m:str,int:int,proba:int,redondance:int):
854     """
855     Args:
```

Annexe 3 code

```
853  def test_RS_fini(m:str,int:int,proba:int,redondance:int):
855      Args:
856          m (str): message
857          int (int): nombre de fois que l'on test le procedé
858          taille (int): sur combien de bits utilisé hamming
859          proba (int): 1/proba = probabilité qu'un bits soit alteré (voir dans la fonction si uniforme ou pas)
860          redondance(int): nombre de redondance pour le polynome
861
862      Returns:
863          int: nombre de transmission correcte
864      """
865      c=0
866      for i in range(int):
867          l=encodage_reed_solomon_fini(m,redondance)
868          ll=random_disapear(l,proba) #probabilité d'enlever un bloc
869          l2= correction_perte_fini(ll,redondance)
870          mm=decodage_ascii_fini(l2)
871          if mm==m:
872              c=c+1
873          if i%(int/10)==0 and False:
874              print(i)
875      return c
876
877  def Reed_Solomon_fini_different_k():
878      message='This is a simple ASCII text '
879      ll=encodage_reed_solomon_fini(message,3)
880      print(len(ll))
881      print('test')
882      x_values=[]
883      y_values=[]
884      nb=1000
885      for i in range(0,7):
886          print(i)
887          x_values.append(i)
888          y_values.append(test_RS_fini(message,nb,10,i))
889      plt.scatter(x_values,y_values)
890      plt.xlabel("valeur de k")
891      plt.ylabel("Nombre de messages correctement retrouvés")
892      plt.grid()
893      plt.show()
894
895
896
897  # test 2**m avec m qui change pour hamming
898  def hamming_pour_different_n():
899      m='Hello! This is a simple ASCII text with numbers 1234567890 and symbols: @#$%^&*()-_=+[]{};:,.<>?'
```

Annexe 3 code

```
898  def hamming_pour_different_n():
899      m='Hello! This is a simple ASCII text with numbers 1234567890 and symbols: @#$%^&*()-_=+[]{};:,.<>?'
900      print(len(codage_binaire(m)))
901      l=hamming_encoding(m,3)
902      print(len((l)))
903      x_values=[3,4,5,6,7,8]
904      y_values=[]
905      m='Hello! This is a simple ASCII text with numbers'
906      m=m+'1234567890 and symbols: @#$%^&*()-_=+[]{};:,.<>?'
907      mp = test_sans_cor(m,1000,500)
908      yy_values=[mp for i in range(len(x_values))]
909      for i in range(len(x_values)):
910          y_values.append(test_hamming(m,1000,x_values[i],500,0))
911          print(i)
912      plt.scatter(x_values,y_values) # points bleu
913      plt.xlabel(" valeur de n")
914      plt.scatter(x_values,yy_values) #points orange
915      plt.ylabel("Nombre de messages correctement retrouvés")
916      plt.grid()
917      plt.show()
918
919  #hamming_pour_different_n()
920
921  #  test niveau taille avec n=4
922
923  # test entrelacement Hamming vs RS
924
925  def test_hamming_entrelace(m:str,int:int,taille:int,proba:int):
926      """fonction de test du codage de hamming dans un canal bruité
927      on test int fois la fonction et on compte le nombre de fois où le message est correctement retranscrit
928
929      Args:
930          m (str): message
931          int (int): nombre de fois que l'on test le procedé
932          taille (int): sur combien de bits utilisé hamming
933          proba (int): 1/proba = probabilité qu'un bits soit alteré (voir dans la fonction si uniforme ou pas)
934          perte(int): = 0 corruption de donnée = 1 perte de donnée
935
936      Returns:
937          int: nombre de transmission correcte
938      """
939      c=0
940      corrompu= ''.join(['0' for i in range(2**taille)]) # si il y avait un 0 pas d'erreur et sinon il la dectetera
941      for i in range(int):
942          l=hamming_encoding(m,taille)
943          n=len(l)
```

Annexe 3 code

```
928  def test_hamming_entrelace(m:str,int:int,taille:int,proba:int):
946          n=len(l)
947          l = entrelacement(l,2**taille)
948          for i in range(n):
949              if random()<1/proba: # dans le cas d'une perte de donné
950                  l[i]= corrompu
951          l = entrelacement(l,2**taille)
952          mm=hamming_decoding(l)
953          if mm==m:
954              c=c+1
955      return c
956
957
958  #Hamming_vs_Reed_Solomon()
959  # test valeur de RS
960
961
962  def Reed_Solomon_different_k():
963      message='This is a simple ASCII text '
964      m='This is a simple ASCII text '
965      n=len(codage_binaire(m))//15 + 1
966      ll=encodage_reed_solomon(message,3,n)
967      print(len(ll))
968      print('test')
969      x_values=[]
970      y_values=[]
971      nb=1000
972      m='This is a simple ASCII text '
973      for i in range(0,4):
974          print(i)
975          x_values.append(i)
976          y_values.append(test_RS(message,nb,50,i))
977      print(sum(y_values)/len(y_values))
978      plt.scatter(x_values,y_values)
979      plt.xlabel("valeur de k")
980      plt.ylabel("Nombre de messages correctement retrouvés")
981      plt.grid()
982      plt.show()
983
984  #Reed_Solomon_different_k()
985
986
987  def Hamming_vs_Reed_Solomon():
988      message_h='This is a simple ASCII text '
989      message_RS='This is a simple ASCII text '
990      n=len(codage_binaire(message_RS))//15 + 1
991      l=hamming_encoding(message_h,6)
```

Annexe 3 code

```
987  def Hamming_vs_Reed_Solomon():
991      l=hamming_encoding(message_h,6)
992      ll=encodage_reed_solomon(message_RS,3,n)
993      print(len(l))
994      print(len(ll))
995      nb=10000
996      redondance_RS=6
997      taille_hamming=6
998
999      nh=test_hamming_entrelace(message_h,nb,taille_hamming,20)
1000     nrs=test_RS(message_RS,nb,20,redondance_RS)
1001     categories = ['Hamming' , 'Reed-Solomon']
1002     values= [nh,nrs]
1003     colors=['blue','red']
1004     print(values)
1005     plt.bar(categories,values,color=colors)
1006     plt.ylim(0,nb)
1007     plt.xlabel("")
1008     plt.ylabel("Nombre de messages correctement retrouvés")
1009     plt.grid()
1010     plt.show()
1011
1012
1013 Hamming_vs_Reed_Solomon()
1014
1015 def Hamming_vs_Reed_Solomon_fini():
1016     message_h='This is a simple ASCII text '
1017     message_RS='This is a simple ASCII text '
1018     l=hamming_encoding(message_h,3)
1019     ll=encodage_reed_solomon_fini(message_RS,4)
1020     print(l)
1021     print(len(l))
1022     print(ll)
1023     print(len(ll))
1024     nb=1000
1025     redondance_RS=5
1026     taille_hamming=3
1027
1028     nh=test_hamming_entrelace(message_h,nb,taille_hamming,35.555)
1029     nrs=test_RS_fini(message_RS,nb,35.555,redondance_RS)
1030     categories = ['Hamming' , 'Reed-Solomon']
1031     values= [nh,nrs]
1032     colors=['blue','red']
1033     print(values)
1034     plt.bar(categories,values,color=colors)
1035     plt.ylim(0,nb)
1036     plt.xlabel("")
```

```
1032     colors=['blue','red']
1033     print(values)
1034     plt.bar(categories,values,color=colors)
1035     plt.ylim(0,nb)
1036     plt.xlabel("")
1037     plt.ylabel("Nombre de messages correctement retrouvés")
1038     plt.grid()
1039     plt.show()
1040
1041 #Hamming_vs_Reed_Solomon_fini()
```