Antwoord op vragen en opmerkingen van David Simpson op het stuk
Gebruik van formules voor semi-spanningswater voor het berekenen van de invloed van onttrekkingen in een freatisch pakket

T.N.Olsthoorn

25-01-2026

TO (Theo Olsthoorn):

De drainageweerstand is niet wat we nodig hebben voor de berekening van de verlaging en de vervanging van de slootweerstand door die van een equivalente vlakdekkende weerstandslaag. De drainageweerstand maakt het echter wel mogelijk om de slootweerstand te bepalen.

DS (David Simpson):

Dit snap ik niet goed. Mijn redenering is als volgt: stel je hebt een vlakdekkende onttrekking, dus niet in een put maar in een groot vlak. Dan heb je het spiegelbeeld van de grondwatervoeding door neerslag. Als de gemiddelde of maximale opbolling door grondwatervoeding tussen watervoerende sloten gegeven wordt door de drainageweerstand (horizontale + radiale + slootbodem), dan zou dit toch gelijkaardig moeten zijn voor een vlakdekkende onttrekking, niet? Aangezien de lekweerstand plaatsonafhankelijk is, zou dit voor een puntonttrekking even goed moeten gelden? Of sla ik de bal hier volledig mis?

TO:

Ik zat ook met die vraag en dacht tot het moment dat ik het wilde opschrijven net zo. Maar misschien moet ik een ander perspectief kiezen, dan valt alles op zijn plaats. Drainageweerstand is gebiedsgemiddelde grondwaterstand gedeeld door het neerslagoverschot. Zonder slootweerstand (volkomen sloten zonder slootbodemweerstand) is dit

$$\overline{\phi} - \phi_s = \frac{NL^2}{12kD} = Nc$$

Met c een de equivalente weerstand van een vervangende semi-permeabele laag, de weerstand dus die bij $\overline{\phi} - \phi_s$ stijghoogteverval precies het neerslagoverschot doorlaat. Met slootweerstand (radiale weerstand plus eventueel slootbodemweerstand) komt die erbij en wordt de drainageweerstand gelijk aan

$$\overline{\phi} - \phi_s = Nc_{dr} = NLw + Nc = N\left(Lw + c\right)$$

Dus

$$c_{dr} = Lw + c$$

We hiermee hebben de opbolling volledig geëlimineerd, eenvoudig door de drainageweerstand te definiëren op basis van de gemiddelde grondwaterstand. Dit is ook precies wat je in een regionaal model moet doen wanneer je de stijghoogte in de toplaag niet apart wilt meenemen en toch de uitwisseling tussen sloten en toplaag goed wilt hebben zonder de stroming in de toplaag, voor zover veroorzaakt door het neerslagoverschot) apart te berekenen. In je regionale model vervang je de weerstand van de afzonderlijke sloten èn die door de horizontale stroming in de toplaag naar de sloten door een vlakdekkende semi-permanente laag op de toplaag, en geeft je deze semi-permeabele laag weerstand $Lw + c$. De stijghoogte in de oplaag in het model door het neerslagoverschot, ten opzichte van het slootpeil, is dan exact gelijk aan

$$\overline{\phi} - \phi_s = Nc_{dr} = N\left(Lw + c\right)$$

Hiermee heb je de sloten uit de toplaag geëlimineerd, maar de gemiddelde stijghoogte in de toplaag (bij uitsluitend neerslagoverschot) behouden. Je kan verder van alles in de toplaag doen, zoals onttrekken of infiltreren. De stijghoogte in de toplaag wordt dan goed berekend ten opzichte van de gemiddelde grondwaterstand door alleen neerslagoverschot. Dus nee, de drainageweerstand $c_{dr} = Lw + c$ is niet hetzelfde als de weerstand van de vervangende equivalente semi-permeabele laag met weerstand $c = L^2/(12kD)$.

DS:

$$\Delta\phi = \frac{Q}{\pi k}\ln\left(\frac{D}{\pi r}\right) = \frac{Q}{\pi k} = \ln\left(\frac{D}{\Omega}\right)$$

Is dit de maximum extra verlaging ter hoogte van circa 1,5x de aquiferdikte? Bestaat er een analytische vergelijking om het verloop van de watertafel in functie van x te bepalen?

TO:

Deze vergelijking geeft de radiale weerstand w [d/m]:

$$w = \frac{\Delta\phi}{Q} = \frac{1}{\pi k}\ln\left(\frac{D}{\Omega}\right)$$

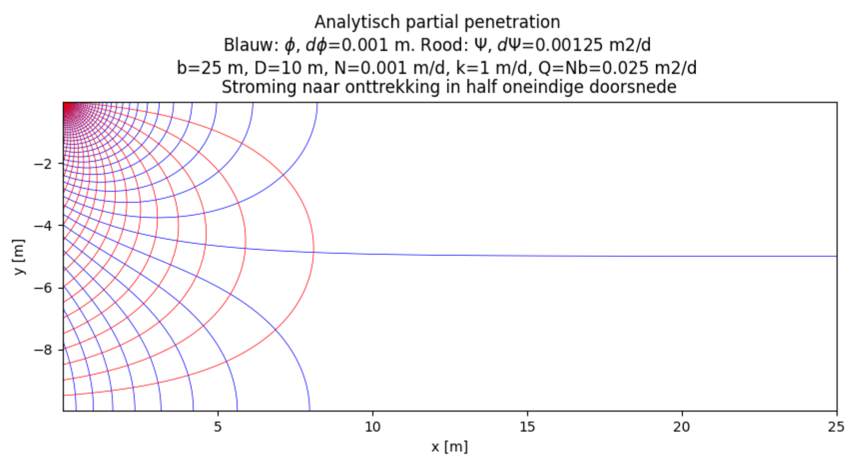
$\Delta\phi$ is het stijghoogteverschil tussen sloot en grondwater direct onder de sloot. Zonder slootweerstand, dus in een volkomen sloot en zonder „slootbodemweerstand", is $\Delta\phi$ gelijk aan nul evenals w

$\Delta\phi$ is dus exact het verschil tussen slootpeil en de stijghoogte direct onder de sloot. Bij infiltratie is dit de verhoging van het slootpeil nodig om de gewenste infiltratie flux te infiltreren nog zonder horizontale stroming in de aquifer. Gaat het alleen om het neerslagoverschot dan geldt $Q = NL$.

De radiale weerstand heeft een invloed op de stijghoogte tot op ca. $1.5D$ vanaf de sloot. Daar hebben we een analytische oplossing voor die in het andere stuk wordt gegeven

$$\Omega(z) = \frac{2Q}{\pi}\ln\left(\sin\left(\frac{i\pi}{2D}z\right)\right) - \frac{Q}{D}z + \frac{2Q}{\pi}\ln 2; \qquad x \geq 0,\ 0 > y > -D$$

Deze functie is in fig.1 weergegeven middels de stijghoogte- en de stroomlijnen.



Figuur 1: Analytische oplossing van de stroming opgewekt door alleen de contractie van stroomlijnen

Voor $z \to 0$, dus richting het hart van de sloot:

$$\Omega(z) = \frac{2Q}{\pi}\ln\left(\frac{i\pi z}{2D}\right) + \frac{2Q}{\pi}\ln 2$$

$$\Omega(z) = \frac{2Q}{\pi} \ln\left(i\frac{\pi}{2D} re^{i\theta}\right) + \frac{2Q}{\pi}\ln 2$$

$$\Omega(z) = \frac{2Q}{\pi} \ln\left(i\frac{\pi}{D} re^{i\theta}\right)$$

$$\Omega\left(z\right) = \frac{2Q}{\pi}\left(\ln\frac{\pi r}{D} + \ln i + i\theta\right)$$

$$\Omega\left(z\right) = \frac{2Q}{\pi}\left(\ln\frac{\pi r}{D} + \ln\left(1e^{i\pi/2}\right) + i\theta\right)$$

$$\Omega\left(z\right) = \frac{2Q}{\pi}\left(\ln\frac{\pi r}{D} + i\frac{\pi}{2} + i\theta\right)$$

$$\Omega\left(z\right) = \frac{2Q}{\pi}\left(\ln\frac{\pi r}{D} + i\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right)$$

Dus voor de potentiaal Φ en de stijghoogte ϕ geldt (exact de formule van Huisman voor half-cirkelvormige slootdoorsnede

$$\Phi = k\phi = \frac{2Q}{\pi}\ln\frac{\pi r}{D} \approx \frac{2Q}{\pi}\ln\frac{\Omega}{D}$$

(het teken hangt af van Q. Wil je postitieve Φ bij positieve Q dan gebruik je $\ln\frac{D}{\Omega}$in plaats van $\ln\frac{\Omega}{D}$.
en voor de stroomfunctie Ψ

$$\Psi = \frac{2Q}{\pi}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \text{ met } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$$

De hoek van de stroomlijnen varieert van omlaag ($\theta = -\frac{\pi}{2}$) en van rechts ($\theta = 0$)
Nu de stroming door de contractie van de stroomlijnen langs de top van het pakket, $z = x$, $0 < x < \infty$

$$\Omega(z) = \frac{2Q}{\pi}\ln\left(\sin\left(\frac{i\pi}{2D}z\right)\right) - \frac{Q}{D}z + \frac{2Q}{\pi}\ln 2; \qquad x \geq 0,\ 0 > y > -D$$

Voor grote z:

$$\Omega\left(x\right) = \frac{2Q}{\pi}\ln\left(i\sinh\frac{\pi x}{2D}\right) - \frac{Q}{D}x + \frac{2Q}{\pi}\ln 2$$

$$\sinh w \to \frac{1}{2}e^{w}$$

$$\Omega\left(x\right) = \frac{2Q}{\pi}\left(\ln\left(\frac{i}{2}\exp\left(\frac{\pi x}{2D}\right)\right)\right) - \frac{Q}{D}x + \frac{2Q}{\pi}\ln 2$$

$$\Omega\left(x\right) = \frac{2Q}{\pi}\left(\ln i - \ln 2 + \frac{\pi x}{2D}\right) - \frac{Q}{D}x + \frac{2Q}{\pi}\ln 2$$

$$\Omega\left(x\right) = \frac{2Q}{\pi}\ln i - \frac{2Q}{\pi}\ln 2 + \frac{2Q}{\pi}\frac{\pi x}{2D} - \frac{Q}{D}x + \frac{2Q}{\pi}\ln 2$$

$$\begin{aligned}\Omega\left(x\right) &= \frac{2Q}{\pi}\ln 1e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &= iQ\end{aligned}$$

Dus we hebben hiermee de invloed van de contractie van de stroomlijnen overal. In de buurt van de sloot ($z \to 0$) krijgen we de limiet van Huisman (Ernst) terug. Voor zeer grote z wordt $\Phi = 0$ en $0 \leq \Psi \leq Q$, of voor $z = x$ langs de bovenzijde van het watervoerend pakket $\Psi = iQ$ overal.

Wil je de stijghoogte door de contractie van stroomlijnen langs het bovenvlak gebruik

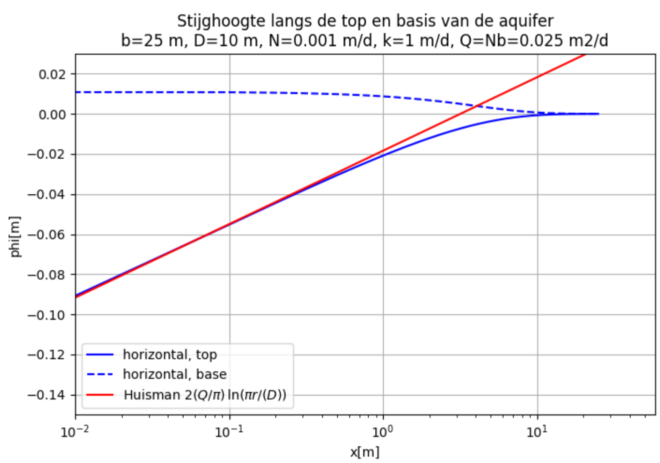
$$\Omega(z) = \frac{2Q}{\pi} \ln\left(\sin\left(\frac{i\pi}{2D}z\right)\right) - \frac{Q}{D}z \; + \frac{2Q}{\pi}\ln 2; \qquad x \geq 0,\; 0 > y > -D$$

en vul in $z = x$. Langs het ondervlak, vul in $y = -iD$ en voor de verticaal op de lijn $x = 0$ vul in $x = 0$ of langs de lijn $z = x - ix$ (diagonaal omlaag) vul dat in enzovoort voor willekeurige lijnen in het z-vlak, d.w.z. door verticale doorsnede.

Fig. 2 geeft de stijghoogte door uitsluitend de contractie van de stroomlijnen langs de top en de basis van het watervoerende pakket zoals hierboven afgeleid, samen met de benadering van Huisman (1972). De stijghoogte langs top en basis van de doorsnede gaan naar nul voor $x \approx 10 = D$. We zeggen normaliter voor x>1.5D. De formule van Huisman heeft een geldigheidsbereik tot ca $x = 1$m, dus hier $x/D < 0.1$ wat toch vrij beperkt lijkt. Als we echter een fout tot 20% accepteren dan kan je zeggen dat de log hieronder in absolute waarde hoogsten 1 mag zijn:

$$\Delta\phi = \frac{2Q}{\pi k}\ln\left(\frac{\pi r}{D}\right)$$

Dus $r < D/\pi \approx 0.3D$. Dat is waar de rode lijn in fig.2 de nul-lijn snijdt. De extra verlaging door contractie is dan altijd positief en benadert de werkelijkheid beter naarmate de radius van de sloot kleiner is. De benadering is heel precies voor $x/D \leq$0.1



Figuur 2: Stijghoogte langs de top de basis van het watervoerende pakket samen met de formule van Huisman (1972)

Vraag naar anisotropie

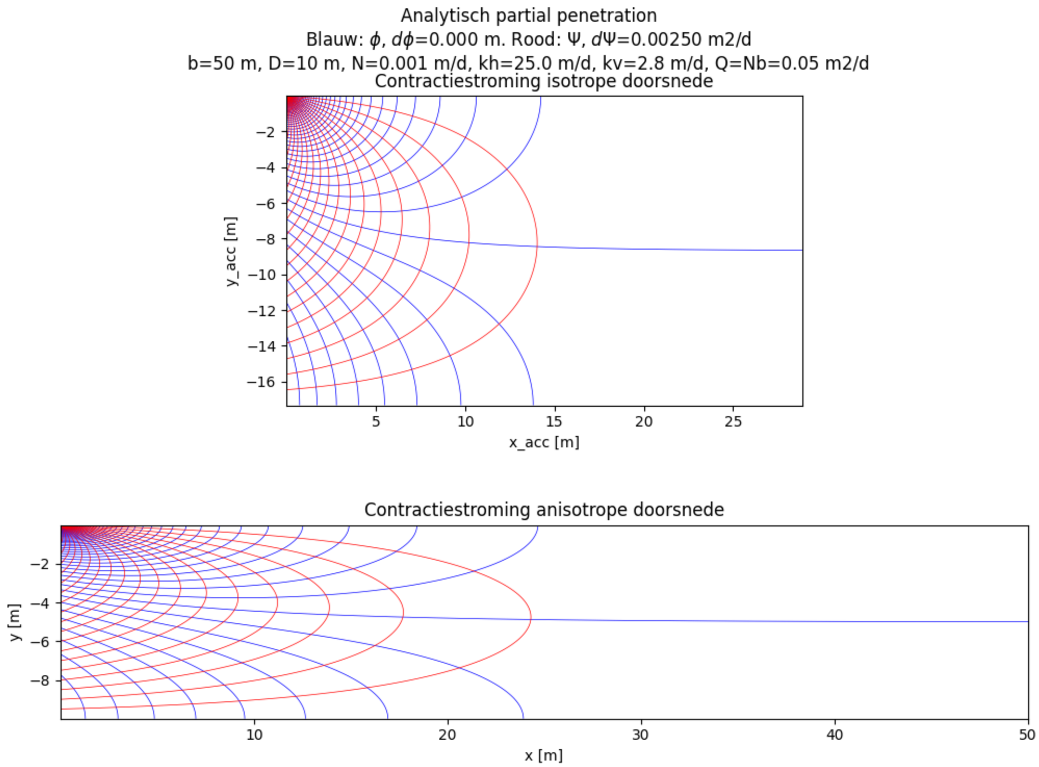
Wanneer de doorsnede verticaal anisotroop is moet de werkelijke doorsnede eerst worden getransformeerd naar een isotrope. Dit gaat met

$$x_{iso} = x\sqrt{k/k_h}$$
$$z_{iso} = z\sqrt{k/k_v}$$

$$k = \sqrt{k_h k_v}$$

In de zo verkregen isotrope doorsnede kunnen alle berekening op de gebruikelijke manier worden uitgevoerd waarna de coördinaten van de doorsnede worden terug getransformeerd. Nemen we bijvoorbeeld een doorsnede waarin $k_v = k_h/9$ dan moet de verticale as met een factor 3 worden opgerekt en de horizontale met een factor drie worden samengedrukt en de berekening worden uitgevoerd met isotrope doorlatendheid $k = \sqrt{k_h k_v} = \sqrt{k_h k_h / 9} = k_h/3$. Verder $x_{iso} = x\sqrt{k/k_h} = x\sqrt{1/3} = 0.577x$ en $z_{iso} = z\sqrt{k/k_z} = z\sqrt{3k_z/k_z} = z\sqrt{3} = 1.73z$.

Fig.3 geeft hert resultaat van de exercitie. De oorspronkelijke anisotrope doorsnede (onderste figuur) is eerst verschaald tot een isotrope doorsnede zoals weergegeven in de bovenste figuur. Daarin zijn de contourlijnen berekend en getekend. Vervolgens zijn dezelfde lijnen getekend met de overeenkomstige coördinaten van de anisotrope doorsnede, de werkelijke doorsnede dus. De doorsnede in fig.3 is tweemaal zo breed gemaakt als in fig.1 om de reikwijdte van de anisotropie goed in beeld te brengen.



Figuur 3: Verwerking van anisotropie voor de contractie van stroomlijnen

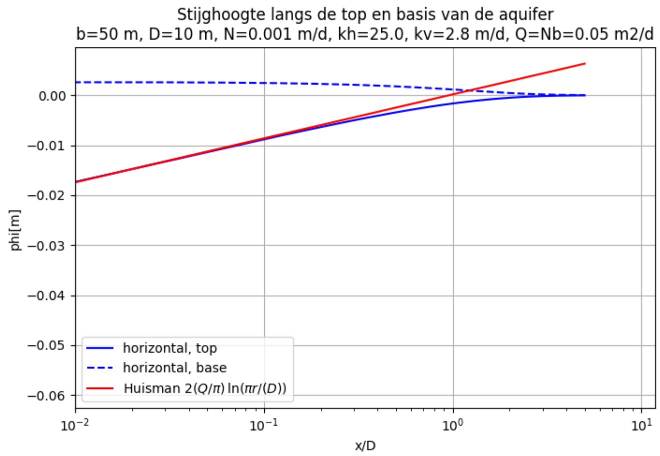
Fig.4 geeft het verloop van de stijghoogte langs de op en de basis van de doorsnede in fig.3/2. In plaats van x is nu x/D gebruikt op de horizontale as. De formule voor Huisman is nu

$$\Delta\phi = \frac{Q}{\pi k} \ln\left(\frac{\pi r_{iso}}{D_{iso}}\right) = \frac{Q}{\pi\sqrt{k_h h_v}} \ln\left(\frac{\pi x\sqrt{\frac{k}{k_x}}}{D\sqrt{\frac{k}{k_z}}}\right) = \frac{Q}{\pi\sqrt{k_h h_v}} \ln\left(\frac{\pi r}{D}\sqrt{\frac{k_z}{k_x}}\right)$$

Dit is de rode lijn in fig. 4. Daar in het voorbeeld $k_h = 9k_v$ volgt dat de reikwijdte in deze anisotrope situatie van fig.3 driemaal zo groot is als in de isotrope situatie van fig.1. Dit is goed te zien aan de grootste x-waarde van de buitenste rode lijn in fig.1, ca. 8 m, te vergelijken met die in fig.3/2, ca. 24 m.

DS:

Lw niet in functie van x? Dichtbij de sloot neemt de radiale opbolling toch ook af binnen een afstand van circa $1.5D$, de aquiferdikte?



Figuur 4: Verloop van de stijghoogte aan de top en basis van de doorsnede en toepassing van de benaderende formule van Huisman (1972) in de anisotrope situatie met $k_h = 25$ m/d en $k_v = 25/9$ m/d. De reikwijdte wordt nu niet $1.5D$ maar $1.5D\sqrt{k_h/k_v} = 4.5D$, driemaal zo groot als in de de isotrope situatie.

TO:

Nee, Lw is de weerstand die bij de opbolling komt. Je rekent het effect op het watervoerende pakket uit met slootweerstand nul en dan tel je ter plekke van de sloot de slootweerstand Lw daarbij op, als of het alleen daar plaats vindt. Wil je ook het verloop naast de sloot en verderop laten zien dan moet je de hele analytische oplossing van hierboven gebruiken. Die geeft alle informatie over alleen de contractie van stroomlijnen. Ernst (1962) heeft het over lijnendiagram in figuur 6. Bij elke sloot een verticaal lijntje omhoog (slootweerstand maal flux naar de sloot) en daartussen lijntjes die alleen Dupuit weergeven zonder piek bij de sloot (dus met volkomen sloten).

DS:

Waarom is: De weerstand c [d] van de vlakdekkende laag ter vervanging van de weerstand w [d/m] van de sloten is niet gelijk aan de drainageweerstand?

TO:

Dat is hiervoor uitgelegd.

DS:

Moet $\Delta\phi = N/c$ niet $\Delta\phi = Nc$ en $\Delta\phi = NL/w$ niet $\Delta\phi = NLw$ zijn?

TO:

Ja natuurlijk. Ik heb het veranderd. Gelukkig werkt het niet door, $c = Lw$ blijft.

DS:

Kan je hiermee wel de kromming van de stroomlijnen, en dus de radiale weerstand voldoende meerekenen? Moet je niet meer lagen invoeren?

TO:

Nee dat hoeft niet, want ik heb de de totale radiale weerstand zodanig over de k_z van de twee lagen verdeeld dat de totale radiale weerstand exact gelijk is aan de totale analytische radiale weerstand. Maar je kan natuurlijk ook een flink aantal dunne lagen toepassen, dan zorgt het model er zelf voor dat de radiale weerstand overeen komt met de analytische formules. Maar met twee lagen kan het ook als je er maar voor zorgt dat de weerstanden exact kloppen. Met een tweelagenmodel kan je natuurlijk geen mooi lijnenspel laten zien als hiervoor met de analytische formule en in het andere rapport met een fijn numeriek model. In de formule en in het fijn numerieke model werden cellen toegepast van 10x10 cm. Dus vandaar dat dat zo'n fraai lijnenpatroon oplevert en vandaar ook dat het numerieke model zo goed overeenkomt met de analytische formule.

DS:

Zou je ook niet kunnen werken met een GHB-voorwaarde in één laag, waarbij de conductantie $C = Lcel * Bcel/weerstand$? Dan vermijd je de lastige omzetting van de Kv denk ik.

TO:

Ja dat kan even goed. Heb ik eerder wel gedaan om te vergelijken met een weerstandbiedende laag. De uitkomst is exact hetzelfde. Je hebt dan maar een modellaag nodig de stroming vanaf de buitenwereld naar de modelknoop loopt dan via de GHB link en de weerstand van de sloot wordt

$$C = 1/w$$

Met C dimensie [m/d]=[d/m]. Vermenigvuldig C met $\Delta\phi$ en je krijgt de instroom in [m2/d] in de doorsnede. Voor een 2D model moet je w feitelijk vermenigvuldigen met de lengte van de waterloop binnen de cel. In de doorsnede wordt nu aangenomen dat die lengte 1 is (1 m loodrecht op de doorsnede).

DS:

We zouden misschien voor $L < \lambda$ een minimum weerstand kunnen opleggen, de vraag is dan welke de beste benadering is.

TO:

Je bedoelt $\lambda < L$. Eens, je zou $\lambda = L$ wellicht kunnen nemen. Dus $c = Lw \rightarrow \lambda = \sqrt{kDLw} \geq L$ leidt tot

$$\begin{aligned} kDLw &\geq L^2 \\ w &\geq \frac{L}{kD} \end{aligned}$$

Einde

-0-0-0-