

Verticale en radiale weerstand bij Ernst (1962)

T.N.Olsthoorn

18 januari 2026

Samenvatting

Grondwatersystemen kunnen in veel situaties worden geschematiseerd tot een stroomgebied gevoed door neerslag dat ondergronds afstroomt naar flankerend open water. Dit is evident wanneer het gaat om landbouwpercelen met omringende sloten, maar geldt ook voor grotere stroomgebieden tussen beken, kanalen of rivieren. In grote lijnen kunnen zulke stroomsystemen tot hun essentie worden teruggebracht tot een doorsnede tussen open leidingen. Deze stroming is desondanks complex door verticale en horizontale stromingscomponenten en door de contractie van de stroomlijnen naar de waterlopen waarin het grondwater uitmondt. Gezien het belang van een goede mathematische beschrijving van deze systemen voor de landbouwafwatering besteedde [Ernst (1962)] o.a. hier zijn proefschrift aan. Ondanks de ouderdom werpt dit proefschrift nog altijd vragen op, met name over de opdeling van de samengestelde stroming in verschillende componenten die elk voor zich eenvoudiger zijn te analyseren en berekenen om vervolgens via superpositie bij elkaar te kunnen worden opgeteld, wat eenvoudige formules mogelijk maakt om zulke systemen mee door te rekenen.

De basissituatie toont [Ernst (1962)] in zijn fig.7 (fig.1). Hij laat daarin zien hoe hij de stroming in een halve (want symmetrische) doorsnede ontrafelt in de verticale, de horizontale en de radiale component. Deze opdeling verre van triviaal, en daar gaat dit artikel over. We analyseren eerst de geïdealiseerde doorsnede, een rechthoek waarin de sloot tot een punt is teruggebracht. Dit doen we zowel numeriek als analytisch. Daarna rekenen we de doorsnede door zoals Ernst die heeft getekend in zijn fig.7, dat wil zeggen met een sterk opbollend freatisch vlak en echte afmetingen van de de sloot. We gaan in op de verschillen. We werken aan het eind de radiale weerstand analytisch uit, met als uitkomst de door [Huisman (1972)] ontwikkelde formule voor de extra verlaging door radiale stroming (partial penetration) van de sloot. Terloops zal blijken dat de term D^*/k die [Ernst (1962)] opnam in zijn formule voor de totale stromingsweerstand, zijn formule 33, niet thuis hoort.

Wij beperken ons voor deze analyse, net als [Ernst (1962)] in zijn fig.7 tot één enkel freatisch watervoerend pakket met uniforme k , eventueel verticaal anisotroop, met vlakke bodem zonder onderliggende weerstandslagen.

Inhoudsopgave

1 Radiale weerstand volgens Ernst	2
2 De hoogte D^* in fig.7b van Ernst (1962), wat is dat precies?	5
2.1 Het stijghoogteverlies of weerstand door horizontale en verticale stroming in de doorsnede	5
3 Exacte analytische doorrekening Ernst (1962, fig. 7)	9
4 Verloop van de stijghoogte langs de onder- en de bovenrand van het model	10
5 De echte doorsnede van Ernst	11
6 Verlaging door de contractie van de stroomlijnen analytisch	14

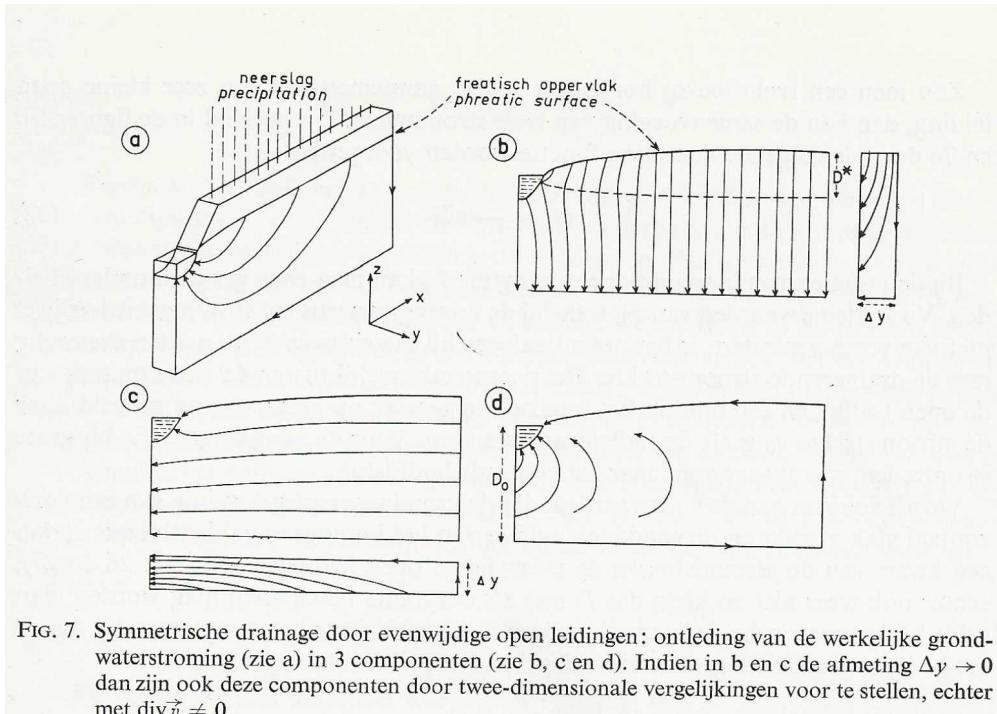


FIG. 7. Symmetrische drainage door evenwijdige open leidingen: ontleding van de werkelijke grondwaterstroming (zie a) in 3 componenten (zie b, c en d). Indien in b en c de afmeting $\Delta y \rightarrow 0$ dan zijn ook deze componenten door twee-dimensionale vergelijkingen voor te stellen, echter met $\operatorname{div} \vec{v} \neq 0$

Figuur 1: Fig. 7 uit Ernst (1962)

1 Radiale weerstand volgens Ernst

[Ernst (1962)] wijdt een flink deel van zijn beroemde gedetailleerde proefschrift uit 1962 aan de analyse van de radiale weerstand. Zijn doel is de grondwaterstroming naar „leidingen” (sloten, kanalen, greppels, drains) in detail wiskundig te beschrijven, en vooral goed berekenbaar te maken. Dit was in zijn tijd met name van belang voor de landbouw, omdat in de landbouw het gedetailleerde verloop naar en van zulke „leidingen” relevant is, terwijl de tot dan toe grove, veelal meer regionale analytische benadering van het verloop van de grondwaterstanden tekort schoot.

De radiale weerstand leek moeilijk grijpbaar, deze bleek het gevolg van de contractie van stroomlijnen in de buurt van de leiding, en verwaarloosbaar op afstanden groter dan ca. de pakketdikte D daarvan. Tegenwoordig houden we aan ca. 1.5 maal de pakketdikte (na verschaling van de verticale anisotropie).

De stroming naar leidingen blijkt in detail tamelijk complex, omdat tegelijk rekening moet worden gehouden met de stroming als gevolg van neerslagoverschot en de detailstroming nabij de leiding. Omdat er geen analytische oplossing bestaat die deze stroming in een keer berekent, beroeft Ernst zich op superpositie. Mits de randvoorwaarden op elkaar passen kan elke samengestelde stroming exact worden berekend door deze op te breken in afzonderlijke stromingen waarvan de oplossing wel analytisch bekend is, waarna zij bij elkaar worden opgeteld.

Ernst beschouwt de stroming in een verticale doorsnede. In zijn beroemde figuur 7 (p17) toont hij hoe hij de stroming in de doorsnede opdeelt in 3 deelstromen. Fig. 7a is de uitgangssituatie met rechts de symmetrieas als dichte rand, met links, midden onder de leiding eveneens een dichte rand en een dichte onderrand. De bovenrand wordt gevormd door het freatisch vlak dat gevoed wordt met uniform neerslagoverschot N .

Hij splitst het systeem in drie deelstromen: 7b) een verticale stroming vanaf het freatisch vlak, waar het neerslagoverschot binnentreedt en al dalend afneemt tot nul aan de basis, 7c) een horizontale stroming die via de rechter rand vanaf nul toeneemt tot aan de linker rand en daar uittreedt. En 7d) de stroming door de contractie van stroomlijnen die langs onder, rechter en bovenrand nul is en op de linkerrand gelijk maar tegengesteld aan die van figuur 7c) en een vaste potentiaal heeft langs de slootomtrek.

De stroming in fig. 7b is niet divergentievrij, hij is alleen mogelijk met uniforme onttrekking aan de doorsnede met een sterkte van N/D . Deze onttrekking weergegeven in de doorsnede loodrecht op het profiel.

De verticale lijnen in fig. 7b zijn dan misschien wel stroombanen, maar geen stroomlijnen in de zin dat tussen elk van de lijnen overal evenveel water stroomt. De stroomdichtheid is immers gelijk aan N aan de top en nul aan de basis. In fig. 7c beschouwt Ernst alleen horizontale stroming. Deze is gelijk aan nul aan de gesloten rechterzijde en neemt toe tot $Q_x = Nb$ tegen de linkerrand waarin b de lengte van de doorsnede. De stroomdichtheid tussen de horizontale lijnen is dus ook in fig. 7c niet constant; hij varieert van 0 aan de rechter rand tot $q_x = Nb/D$ aan de linker rand. De stroming in fig. 7c vergt dus een uniforme voeding gelijk aan N/D , die is getekend in de doorsnede aan de onderzijde van fig. 7c. De onttrekking voor het in stand houden van de verticale stroming in fig. 7d en de voeding voor het in stand houden van de horizontale stroming in fig. 7c zijn exact even groot, namelijk N/D en vallen tegen elkaar weg.

Fig. 7d, tenslotte, pakt het water dat aan de linker rand arriveert op een transporteert dat naar de leiding. Dit is de zuivere stroming veroorzaakt door de contractie van stroomlijnen. De totale stroom in fig. 7D is gelijk aan $Q = Nb$.

Voor het beter waarderen van de figuren 7b en 7c zou men de sloot moeten terug brengen tot een enkel punt met een gegeven peil. De stroming in de twee doorsneden 7b en 7c worden dan geheel door stromingsrandvoorwaarden bepaald, onafhankelijk van enige stijghoogte. In figuur 7b en 7c is er slechts één punt met gegeven stijghoogte, de tot punt gereduceerde leiding in de linkerbovenhoek. Onder deze omstandigheden, met de uniforme onttrekking gelijk aan N/D over het oppervlak van de doorsnede van fig. 7b krijgen we zuiver verticale stroming waarvan het bijbehorende freatisch vlak een rechte lijn is met stijghoogte gelijk aan het slootpeil in de linkerbovenhoek.

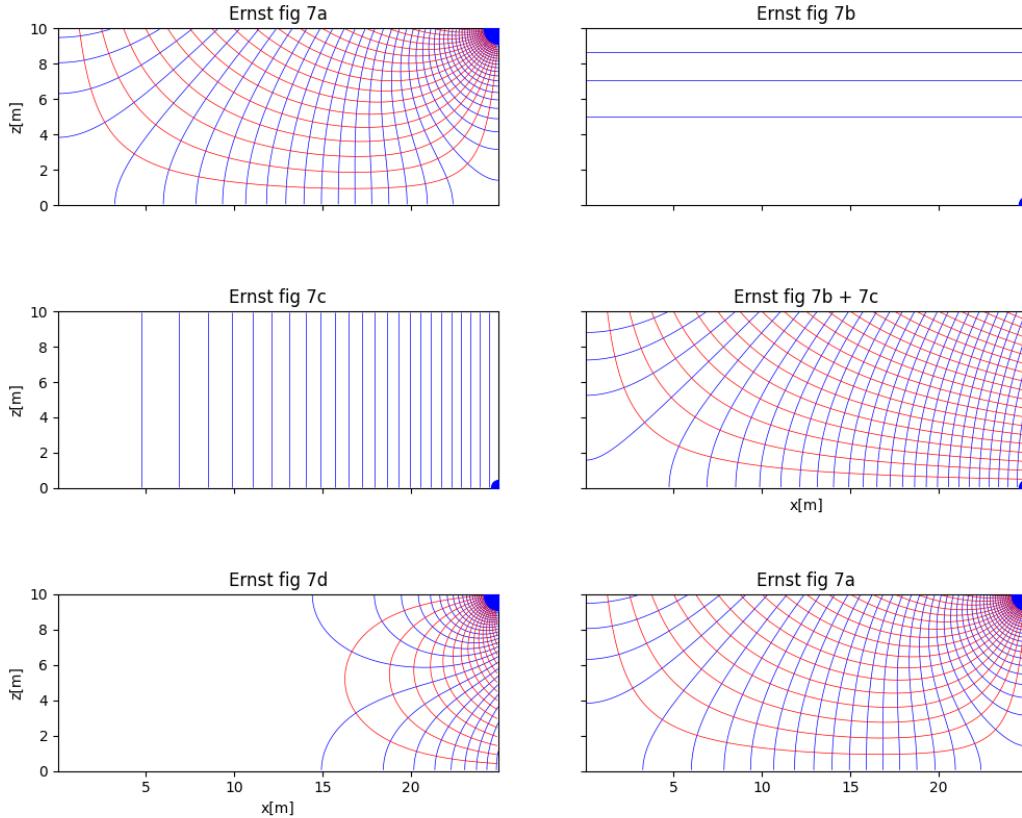
Er is slechts één punt in zo'n situatie is de stijghoogte volledig vrij. In dit geval met een punt met stijghoogte nul.

Het zal direct duidelijk zijn van de deelstromen op zichzelf compatibel is met de positie van het freatisch vlak; dat vlak klopt alleen voor de gezamenlijke stroming. De linker rand is in de uitgangspositie gesloten, maar bij de deelstromen van figuren 7c en 7d duidelijk niet. De bijna uniforme naar links gerichte flux in figuur 7c moet in fig. 7d exact worden gecompenseerd met een tegengestelde flux door de stroming die het gevolg is van de contractie van stroomlijnen in fig. 7d.

We kunnen de figuur ook numeriek narekenen, waarbij gemakshalve het freatisch vlak (maar niet de stijghoogte) gelijk wordt genomen aan het slootpeil en de sloot tot een puntonttrekking wordt geschematiseerd. Fig. 2 geeft het resultaat. Fig. 2/1 geeft de samengestelde stroming. Fig. 2/2 rekent fig. 7b van Ernst na. Deze figuur laat alleen horizontale stijghoogtelijnen zien omdat de stroomfunctie daar niet is gedefinieerd door de divergentie die ontstaat door de uniforme onttrekking N/D [1/T] over de gehele doorsnede. De verticale stroming (loodrecht op de stijghoogtelijnen) ontstaat door infiltratie met een sterkte N [L/T] aan de bovenrand en uniforme onttrekking met sterkte N/D [1/T] over de gehele doorsnede. Fig. 2/3 rekent fig. 7c van Ernst na. Alleen de verticale stijghoogtelijnen zijn daarin getekend omdat door de divergentie de stroomfunctie niet is gedefinieerd. De horizontale stroming loodrecht op de stijghoogtelijnen ontstaat door de uniforme voeding gelijk aan N/D [1/T] over de gehele doorsnede en de lijnonntrekking met sterkte Nb/D [L/T] op de linkermodelrand. Aan de afstand tussen de stijghoogtelijnen is te zien dat de stroming in Fig. 2/2 naar beneden toe afneemt en in Fig. 2/3 naar links toe toeneemt. Fig. 2/4 is de som van de tweede en de derde figuur. De uniforme onttrekking over de doorsnede in Fig. 2/2 en Fig. 2/3 zijn opgeteld (en vallen daardoor tegen elkaar weg), terwijl het model aan de bovenzijde wordt gevoed met neerslagoverschot N [L/T] en er aan de linkerrand wordt onttrokken met sterkte Nb/D [L/T]. Fig. 2/5 rekent figuur 7c van Ernst na. Deze ontstaat door infiltratie langs de linker modelrand met sterkte Nb/D en een onttrekking gelijk aan $Q = Nb$ aan de cel in de linker bovenhoek van het model. Dit is de stroming door de contractie van de stroomlijnen. Fig. 2/6, tenslotte, is gelijk aan de eerste en is de som de stroming in deelfiguren 2, 3 en 5 of, wat hetzelfde is, van de stroming in de deelfiguren 4 en 5. Deze fig. 2/6 is gelijk aan de eerste fig. 2/1.

De sloot wordt in de doorsneden met onttrekking (figuren 2/1, /5 en /6) vertegenwoordigd door een cel met grootte $0.1 \times 0.1\text{m}$ in de linker bovenhoek. Deze cel heeft een vaste stijghoogte. In de figuren 2/2, 2/3 en 2/4 is er feitelijk geen sloot met infiltratie of onttrekking omdat het totale debiet dat het model in- en uitstroomt gelijk aan nul is. De stijghoogte is onbepaald en zweeft, tenzij we tenminste in een (willekeurig) punt een stijghoogte opleggen. We zouden dan in de rechter onderhoek kunnen doen. Maar de keuze van de cel is willekeurig. We houden het gemakshalve bij de rechter bovenhoek, maar het maakt niets uit. In feite hebben is er in deze doorsneden helemaal geen sloot, want via het punt met de opgegeven stijghoogte stroomt

Ernst (1962) Fig 7, numeriek. (Φ =blauw, Ψ =Rood, $d\Phi=0.050$ m, $d\Psi=0.00125$ m²/d)
 $b=25$ m, $D=10$ m, $N=0.001$ m/d, $k=0.025$ m/d, $ND/(2k)=0.200$ m, $D/(2k)=200.0$ [d]



Figuur 2: Figuur 7 uit Ernst numeriek nagerekend.

geen water het model in of uit. Dat wordt natuurlijk anders in fig. 2/5, waar de uitstroom over linkerrand wordt opgevangen en vervolgens via de sloot (de cel met vaste stijghoogte) wordt afgevoerd. Hetzelfde geldt voor fig. 2/1 en de identieke fig. 2/6 met de samengestelde stroming. Daarin wordt het neerslagoverschot dat infiltrert via de bovenrand geheel afgevoerd via de rekencel die in dit model de sloot in de linker bovenhoek vertegenwoordigt.

Omdat de sloot niets doet in de tweede figuur (Ernst fig. 7b), is de stijghoogte langs de hele bovenrand hetzelfde en dus exact gelijk aan het in de knoop opgelegde stijghoogte. De stippellijn in fig. 7b van Ernst valt hier exact samen met de horizontale bovenrand van het model, maar het freatisch vlak ligt (uiteindelijk hoger). Dit is hier immers de stijghoogte langs de bovenrand van het model. De stippellijn van Ernst valt exact samen met de stijghoogte bovenin fig. 2/2, maar niet met die bovenin fig. 2/1 (/6) of fig. 2/4. De stijghoogte bovenin fig. 2/1 (/6) komt overeen met het freatisch vlak. Dat geldt ook voor de stijghoogte bovenin fig. 2/4. Die stijghoogte bovenin fig. 2/1 (/6) is echter hoger dan die bovenin fig. 2/4, omdat het water in fig. 2/1 (/6) de extra weerstand door de contractie van de stroomlijnen moet overwinnen, die in fig. 2/5 is weergegeven.

2 De hoogte D^* in fig.7b van Ernst (1962), wat is dat precies?

Nu de vraag over D^* , die direct samenhangt met de betekenis van de stippellijn in fig.7b van Ernst. Ernst zegt dat zijn stippellijn ongeveer horizontaal loopt ongeveer gelijk met de hoogte van de onderzijde van de „leiding” en tekent hem ook zo. Die stippellijn D^* heeft niets te maken met de pakkedikte. Zoals hierboven aangetoond valt hij samen met het slootpeil. De afwijking daarvan is het uitsluitende gevolg van het niet tot een ideaal omtrekspunt terugbrengen van de sloot. Want alleen als punt verliest de sloot in figuur 7b zijn invloed en is de stroming zuiver verticaal. Ook alleen als punt verliest de sloot in figuur 7c zijn invloed en wordt de stroming zuiver horizontaal.

Ernst houdt in zijn ontrafelings in deelstromen het stromingsdomein (freatisch vlak) in alle figuren hetzelfde. Dat is juist maar daardoor valt de stijghoogte ter hoogte van het freatisch vlak in figuur 7b en 7c van Ernst niet meer samen met het freatisch vlak. De stijghoogte ligt er dan onder en is horizontaal gelijk aan het slootpeil. De stijghoogte boven de sloot is zelfs negatief. De afstand D^* in fig. 7b is dus de afstand van het freatisch vlak boven het slootpeil. Dit is een stijghoogteverlies vanaf het freatisch vlak tot aan de sloot. Het is dus de som van het stijghoogteverlies door horizontale stroming en het stijghoogteverlies door verticale stroming. Het is zeker niet het stijghoogteverlies door verticale stroming. We kunnen het stijghoogteverlies door verticale stroming, dat wat Ernst bedoelt met D^*/k echter wel gewoon uitrekenen.

2.1 Het stijghoogteverlies of weerstand door horizontale en verticale stroming in de doorsnede

Beschouw de doorsnede met waterscheiding op $x = 0$ halverwege twee parallelle open leidingen (zoals sloten) op onderlinge afstand $2b$. We beschouwen dus alleen $0 \leq x \leq b$. Deze doorsnede heeft een neerslagoverschot N aan bovenzijde en de dikte van het watervoerend pakket, wordt nu gemakshalve constant verondersteld, gelijk aan D . We kiezen x is nul op de waterscheiding en de verticale coördinaat y loopt van 0 aan de basis tot D aan de top van het watervoerend pakket. (we reserveren z voor complexe coördinaten $z = x + iy$).

Voor de verticale stroming, q_y , geldt dan overal in de doorsnede (waarvan $y = 0$ de basis is):

$$q_y = -N \frac{y}{D} \quad (1)$$

Met totale breedte b tussen waterscheiding en de voorlopig volkomen veronderstelde sloot, geldt voor de horizontale stroming vanaf $x = 0$

$$Q_x = Nx$$

en voor de horizontale flux

$$q_x = N \frac{x}{D} \quad (2)$$

We hebben hiermee overal in de doorsnede de horizontale en verticale flux te pakken. We kunnen de lengte b van de doorsnede vrij kiezen. De uitstroming op $x = b$ is hiermee ook gegeven en vindt gelijkmatig over de hoogte plaats. Het stroombeeld en dus ook de stroomlijnen liggen hiermee volledig vast, onafhankelijk van de uniform veronderstelde doorlatendheid of de stijghoogte. De stijghoogte doet er voor de stroming in deze doorsnede niet toe. Die komt straks wel aan de orde voor het bepalen van de weerstand. Dit is ook de situatie die Ernst voor ogen moet hebben gehad bij de constructie van zijn fig.7 (fig.1). De radiale weerstand staat hier geheel buiten.

Bepaling van de stroomlijnen kan op twee manieren. Een manier is de stroomfunctie te contouren. Maar bepaling van de stroomlijnen gaat ook onafhankelijk van de stroomfunctie, alhoewel dit wiskundig op hetzelfde neerkomt. De afstand vanaf een bepaald startpunt, x_0 , afgelegd in x -richting kan direct worden bepaald aan de hand van de nu bekende flux $q_x = \epsilon v_x = \epsilon (dx/dt)$. Aldus uitgewerkt:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \epsilon \frac{N}{D} x \\
\frac{dx}{x} &= \epsilon \frac{N}{D} dt \\
\ln x &= \epsilon \frac{N}{D} (t - t_0) + C \rightarrow C = \ln x_0 \\
\ln \frac{x}{x_0} &= \epsilon \frac{N}{D} (t - t_0)
\end{aligned}$$

In y -richting krijgen we bijna hetzelfde

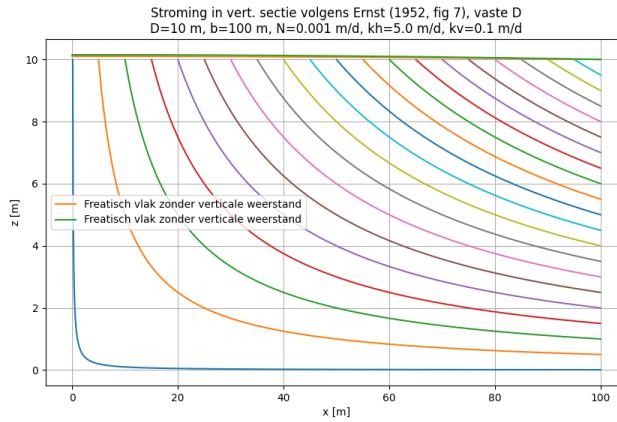
$$\begin{aligned}
\frac{dy}{y} &= -\epsilon \frac{N}{D} dt \\
\ln \frac{y}{y_0} &= -\epsilon \frac{N}{D} (t - t_0)
\end{aligned}$$

De factor met de tijd kan uit beide vergelijkingen worden geëlimineerd. Dit levert de volgende vergelijking voor de stroomlijnen op

$$xy = x_0 y_0 \quad (3)$$

Hier zien we dus de stroomfunctie terug komen. De formule geeft aan dat alle stroomlijnen hyperboolen zijn. $x_0 y_0$ is het startpunt van de stroomlijn.

Fig. 3 geeft de stroomlijnen berekend met vergelijking 3.



Figuur 3: Stroomlijnen in de gestileerde doorsnede $xy = x_0 y_0$ met $y_0 = D$ en x_0 verschillende startpunten op regelmatige afstanden.

Wanneer we nu een willekeurig punt op het freatisch vlak kiezen, met $y_0 \approx D$ krijgen we de volgende stroomlijnvergelijking

$$xy = x_0 D$$

Deze stroomlijn verlaat de doorsnede via de verticaal $x = b$ op de volgende hoogte

$$\begin{aligned}
by_b &= x_0 D \\
\frac{y_b}{D} &= \frac{x_0}{b}
\end{aligned}$$

Dus de totale verticale weg, die het monotoon vanaf het freatische vlak dalende deeltje aflegt, is gelijk aan

$$D - y_b = D - D \frac{x_0}{b}$$

$$D - y_b = D \left(1 - \frac{x_0}{b}\right)$$

Om de weerstand te bepalen beschouwen we nu de stijghoogte De horizontale stroming langs de basis van het pakket heeft geen verticaal stijghoogteverlies. De stijghoogte vanaf $x = 0$ tot aan $x = b$ is daarom direct te bepalen

$$-kD \frac{d\phi}{dx} = Nx$$

$$\boxed{\phi - \phi_b = \phi_b + \frac{N}{2kD} (b^2 - x^2)} \quad (4)$$

Deze standaard oplossing verwijst naar Dupuit.

Het maximale en gemiddelde stijghoogteverlies is door horizontale stroming in de doorsnede is dus:

$$\boxed{\phi_0 - \phi_b = \frac{Nb^2}{2k_h D} = \frac{NL^2}{8k_h D} \text{ en } \bar{\phi} - \phi_b = \frac{Nb^2}{3k_h D} = \frac{NL^2}{12k_h D}} \quad (5)$$

Hierin is ϕ_0 de maximale stijghoogte in de doorsnede, die op $x = 0$, en is $\bar{\phi}$ de gemiddelde stijghoogte in de doorsnede. De minimale stijghoogte ϕ_b is dat bij de uitstroom op $x = b$. Zo men wil kan men vergelijkbare vergelijkingen afleiden voor een freatisch pakket waarin D afhangt van de waterstand h . Dit levert voor de maximum waterdiepte $h_0 = \phi - y_0$ de volgende relatie:

$$h_0^2 - h_b^2 = \frac{Nb^2}{k_h} = \frac{NL^2}{4k_h}$$

En voor de gemiddelde grondwaterstand deze:

$$\overline{h^2 - h_b^2} = \frac{2}{3} \frac{Nb^2}{k_h} = \frac{1}{6} \frac{Nb^2}{k_h}$$

We laten deze vergelijkingen verder buiten beschouwing omdat het verschil met die voor de stijghoogte in de praktijk nagenoeg altijd verwaarloosbaar is.

Zonder verticale weerstand, dus met oneindig grote verticale doorlatendheid, is de verkregen relatie exact, niet alleen voor de basis van het pakket exact, maar ook voor elke hoogte in de doorsnede. Maar met eindige doorlatendheid ondervindt de stroming ook potentiaalverlies door de verticale stroming. Hierdoor is de stijghoogte op $x = 0$ aan de basis een stuk lager dan het freatisch vlak. Het verschil is exact te berekenen, want het de verticale flux q_z is overal in de doorsnede hetzelfde op dezelfde hoogte (dus onafhankelijk van x). Het stijghoogteverlies van de top tot aan de basis van het pakket op dezelfde x volgt uit toepassing van Darcy:

$$-k_v \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{N}{D} y$$

$$\partial \phi = \frac{N}{k_v D} y \partial y$$

Dus

$$\begin{aligned}\phi_{x,y} - \phi_{x,0} &= \frac{N}{2k_v D} y^2 + C \rightarrow C = 0 \\ &= \frac{N}{2k_v D} y^2\end{aligned}$$

En aan de top, waar $y = D$ geldt

$$\boxed{\Delta\phi = \frac{ND}{2k}} \quad (6)$$

Dit is overal de stijghoogte aan de top ten opzichte van die aan de basis, behalve daar waar de verticale stroming wordt verstoord door die als gevolg van de contractie van stromingen.

Ernst geeft in zijn fig.7b met een stippellijn aan op welke hoogte in deze figuur de stijghoogte gelijk aan het slootpeil is. Dit is dus eigenlijk het freatisch vlak bij alleen de verticale stroming in fig.7b. Het echte freatisch vlak, dat hoort bij de samengestelde stroming in fig.7a is ook in fig.7b aangegeven in is daar slechts de bovengrens van het oorspronkelijke stromingsdomein dat tussen de figuren is vastgehouden om superpositie eenduidig mogelijk te maken. Het freatisch vlak is het gevolg van verticale, horizontale en radiale stroming dus het verschil tussen het freatisch vlak en de stippellijn is het gevolg van alleen horizontale en radiale stroming. Ernst zegt dat „wijkt de grondwaterspiegel weinig af van een horizontaal vlak, en is $D < 0.5b$, maar ook niet zo klein dat D niet als constante beschouwd mag worden, dan geldt bij symmetrische drainage de volgende formule voor het hoogteverschil tussen het hoogste punt van de grondwaterspiegel en het peil van het open water:

$$\frac{\Delta h}{N} = \frac{D^*}{k} + \frac{b^2}{2kD} + bw \quad (7)$$

Vrijwel altijd geldt, schrijft Ernst verder, dat $D^*/k \ll b^2/(2kD)$ en dan mag bij een homogeen doorlatende watervoerende laag de eerste term rechts van het gelijkteken worden verwaarloosd. Wij denken dat dit niet juist en dat de hele term D^*/k niet in de formule thuishaart. Uitsluitend de weerstand door horizontale stroming $b^2/(2kD)$ en die door contractie van stroomlijnen Lw horen daarin thuis ,eventueel aangevuld met slootbodemweerstand cb/Ω horen daarin thuis:

$$\Delta h = \frac{Nb^2}{2kD} + Nbw + Nb \frac{c}{\Omega}$$

Het stijghoogteverlies door de verticale stromingscomponent deeltjes stromend tussen het freatisch vlak en hun uitmondingspunt op de verticaal $x = b$ hangt af van hoogte waarop zijn uittreden. Het punt dat start op de waterscheiding op $x = 0$ stroomt eerst helemaal naar de basis alvorens zijn weg horizontaal voort te zetten naar zijn uittreepunt. Punten die starten op andere locaties van het freatisch vlak komen minder diep. De hoogte waarop het deeltje dat op x_0 infiltrert via de verticaal op $x = b$ uittreedt is

$$y_b = \frac{x_0}{b} D$$

Het stijghoogteverval dat dit deeltje ondervindt door alleen verticale stroming is dan

$$\Delta\phi_{x_0} = \frac{N}{2k_v D} \left(D^2 - \left(\frac{x_0}{b} D \right)^2 \right)$$

$$\boxed{\Delta\phi_{x_0} = \frac{ND}{2k_v} \left(1 - \left(\frac{x_0}{b} \right)^2 \right)} \quad (8)$$

maar de stijghoogte ϕ_{b,y_b} op het uitreepunt y_b is hoger dan aan de basis van het pakket $\phi_{b,0}$

$$\phi_{b,y_b} - \phi_{b,0} = \frac{N}{2k_v D} y_b^2$$

Het stijghoogteverschil tussen hoogte y_b en e basis van het watervoerende pakket is (zonder contractie van stroomlijnen) overal hetzelfde namelijk $Ny^2/(k_v D)$.

We kunnen voor deze doorsnede ook de potentiaal $\Phi = k\phi$ afleiden, onder voorwaarde dat $k_h = k_v = k$, dus zonder verticale anisotropie. In het geval dat $k_h \neq k_v$ zullen we in de praktijk eerst de coördinaten verschalen om de doorsnede symmetrisch te maken.

De potentiaal, $\Phi = k\phi$ ten opzichte van punt $(x = b, y = 0)$ als referentie Φ_0 is gelijk aan

$$\boxed{\Phi = \Phi_0 + \frac{N}{2D} (b^2 - x^2) + \frac{N}{2D} y^2}$$

3 Exacte analytische doorrekening Ernst (1962, fig. 7)

Het is interessant om de doorsnede in fig.7 in Ernst (1962) ook analytisch exact door te rekenen. Daarvoor nemen we eerst fig.7b en fig.7c samen. De potentiaal $\Phi = k\phi$ ten opzichte van punt $x = b, y = 0$ hebben we boven reeds afgeleid. Met coördinaten uitgedrukt in complexe getallen, dus $z = x + iy$ wordt dit

$$\Phi = \frac{N}{2D} [b^2 - \Re(Z^2) + \Im(Z^2)]$$

Voor met de stromingscomponenten $q_x = N/Dx A$ en $q_y = N/Dy$ hebben we ook de afgeleiden van de stroomfunctie Ψ , waarvoor geldt:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Psi}{\partial y} &= q_x = +\frac{N}{D} x \\ +\frac{\partial \Psi}{\partial x} &= q_y = -\frac{N}{D} y \end{aligned}$$

Integratie levert

$$\Psi = -\frac{N}{D} xy + C$$

Met $\Psi = 0$ langs de onderrand en op de verticale lijn $x = 0$ geldt $C = 0$. Deze stroomfunctie, dus $\Psi = (N/D)xy$ voldoet zoals vereist aan de Laplace-vergelijking

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$$

Dus de complexe potentiaal Ω van de stroming in de doorsnede is

$$\begin{aligned} \Omega &= \Phi + i\Psi \\ &= \frac{N}{2D} [b^2 - \Re(Z^2) + \Im(Z^2)] + i\frac{N}{D} \Re(Z) \Im(Z) \end{aligned}$$

Dit is geen mooie analytische functie, maar hij voldoet aan de juist Φ en Ψ .

De stroming door contractie van stroomlijnen kan worden afgeleid van die waarbij een onttrekking ter grootte $Q = Nb$ plaats vindt in $x = b, y = D$ in een half-oneindige doorsnede met $-\infty < x < b$. Dit leidt op grote afstand tot een stroomdichtheid $q_{b-x} = Q/D$ en een flux gelijk aan nul op de verticale stroomlijn $x = b$ onder de onttrekking. Wij eisen nu dat de stroming door de contractie van stromingen op $x = b$ niet nul is maar precies die van de voorgaande oplossing (fig.7b+7c) neutraliseert, dus $Q_{x=b} = -Nb$ en op grotere afstand gelijk aan nul wordt. Dit kunnen we doen door een negatieve uniforme stroming met

stroomdichtheid $q_x = -\frac{Nb}{D}$ te superponeren. De stroming door de wondt verkregen door een complexe transformatie; hij voldoet aan:

$$\Omega_1 = -\frac{Q}{2\pi} \ln \left(\sin \left(i \frac{\pi}{2} \left(\frac{b-z}{D} - i \right) \right) \right)$$

De op te trekken uniforme tegenstroming voldoet aan

$$\Omega_2 = Q \left(\frac{b-Z}{D} - i \right)$$

Fig. 4 geeft het resultaat van de doorrekening weer. De bovenste figuur is de weerslag van de contouren van Φ en Ψ van Ω_1 . De flux door het bovenvlak $q_{z=iD} = -N$ en uniform, zodat de stroomlijnen alle het freatisch vlak op dezelfde onderlinge afstand snijden. Omdat langs het freatisch vlak de horizontale stroomdichtheid toeneemt van rechts naar links, wordt de hoek die de stroomlijnen met het freatisch vlak maken steeds kleiner naarmate men verder naar rechts gaat. Op $x = 0$ snijdt de stroomlijn het freatisch vlak loodrecht. De horizontale component van de stroming over de rechter rand bij $x = b$ is over de hoogte constant en gelijk aan Nb/D de totale afvoer is $Q = Nb$. De afstand tussen de elk paar stroomlijnen op de verticaal $x = b$ is dus even groot. Aangezien de verticale stroomdichtheid op $x = b$ niet nul is maken de stroomlijnen daar een hoek met de verticaal. Het is dus kraakhelder dat noch het bovenvlak noch het rechter vlak een potentiaallijn is. Bij standaard conforme afbeeldingen ([Verruijt (1970)]) is dat meestal wel zo, maar deze complexe potentiaal is niet analytisch in de zin van de wiskunde van de complexe getallen, maar hij bestaat wel.

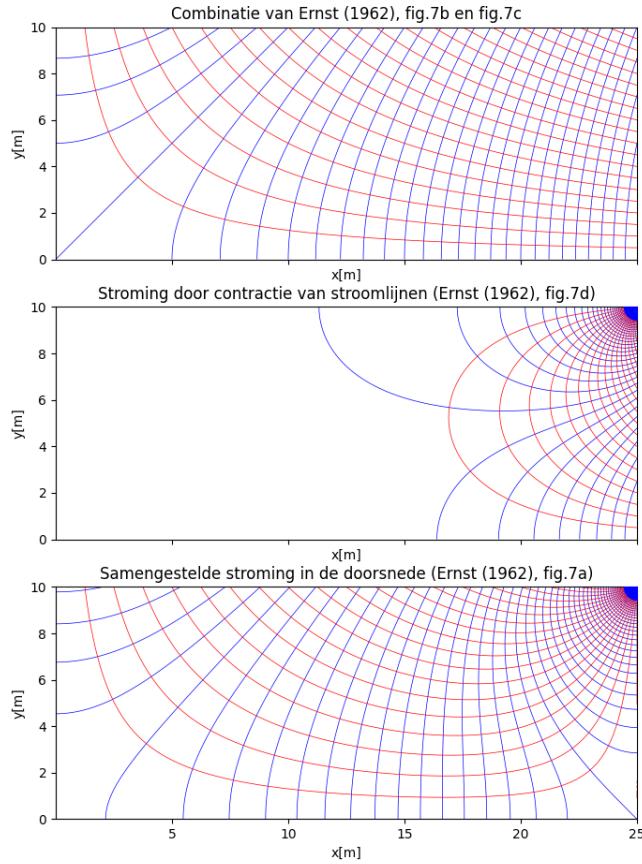
De tweede figuur geeft de stroming door de ontrekking in $x = b, y = D$, dat is Ω_1 , maar met daarop gesuperponeerd de uniforme tegenstroom Ω_2 . De stroom door de ontrekking $Q = Nb$ in $x = b, y = D$ trekt water van links aan met stroomdichtheid $q_x = Nb/D$ terwijl de horizontale stroming door deze ontrekking op $x = b$ gelijk aan nul is. De superpositie van de uniforme tegenstroom zorgt ervoor dat de stroming door de contractie van de stroomlijnen op afstanden $> 1.5D$ van $x = b$ praktisch nul is. Deze superpositie maakt de horizontale stroomdichtheid op $x = b$ in fig.4/2 exact gelijk aan de uitstromende flux in bovenste fig.4/1. Het resultaat is in fig.4/2 weergegeven. De afstanden tussen de stroomlijnen zijn daarin exact gelijk aan die tussen de uitgaande stroomlijnen in fig.4/1.

Door de stroming (complex potentiaal) in fig.4/1 en fig.4/2 bij elkaar te tellen ontstaat het stroombeeld in fig.4/3, waarin alle stroming die via het neerslagoverschot over het freatisch vlak binnentreedt door de sloot in de rechter bovenhoek weer uitstroomt. Dit analytisch berekende stromingsbeeld is hetzelfde als dat fig.2, dat is berekend met een eindig differentiemodel.

4 Verloop van de stijghoogte langs de onder- en de bovenrand van het model

Fig.5 geeft het verloop van de stijghoogte langs de onder- en bovenzijde van de doorsneden in fig.2/4, fig.2/5 en fig.2/6. De blauwe lijnen zijn voor de fig.2/4 met horizontale en verticale stroming maar zonder het effect van de contractie van de stroomlijnen. De stijghoogte aan de basis valt samen met die van de doorsnede met alleen horizontale stroming. Die aan de top is $ND/(2k_v)$ hoger door de neerwaartse verticale stroming. Het verschil is overal in de doorsnede even groot. De rode lijnen geven de stijghoogtes boven- en onderaan weer voor de situatie met alleen het effect van de contractie van de stroomlijnen. Op afstanden groter dan ca. $1.5D$ van de sloot vallen beide lijnen op elkaar. Dat is waar er praktisch geen stroming meer is en dus ook geen verlies in verticale zin optreedt. De hoogte van de rode lijnen op afstanden $> 1.5D$ van de sloot is het zuivere effect van de contractie van de stroomlijnen. Deze blijkt in dit voorbeeld de grootste bijdrage aan de totale weerstand te hebben. Het verschil tussen de rode lijnen is maximaal op $x = b$, onder de sloot. Daar is ook de verticale stroming door de contractie van stroomlijnen maximaal. Het verschil daar is het stijghoogteverval dat nodig is om de druppel van $x = b, z = 0$ naar de sloot de stuwen. De groene lijnen, tenslotte, geven het verloop van de stijghoogte aan de boven- en onderzijde van de watervoerende laag in de situatie van de samengestelde stroming, de uitgangssituatie in fig.2/1 of /6. Gaan we verder naar links, dan is het verschil tussen beide stijghoogtes weer overal gelijk aan $ND/(2k_v)$. De hoogte de blauwe

Analytische doorrekening, doorsnede Ernst (1962, fig.7)
 Blauw: ϕ , $d\phi=0.050$ m. Rood: Ψ , $d\Psi=0.00125$ m²/d
 $b=25$ m, $D=10$ m, $N=0.001$ m/d, $k=0.025$ m/d, $Q=Nb=0.025$ m²/d



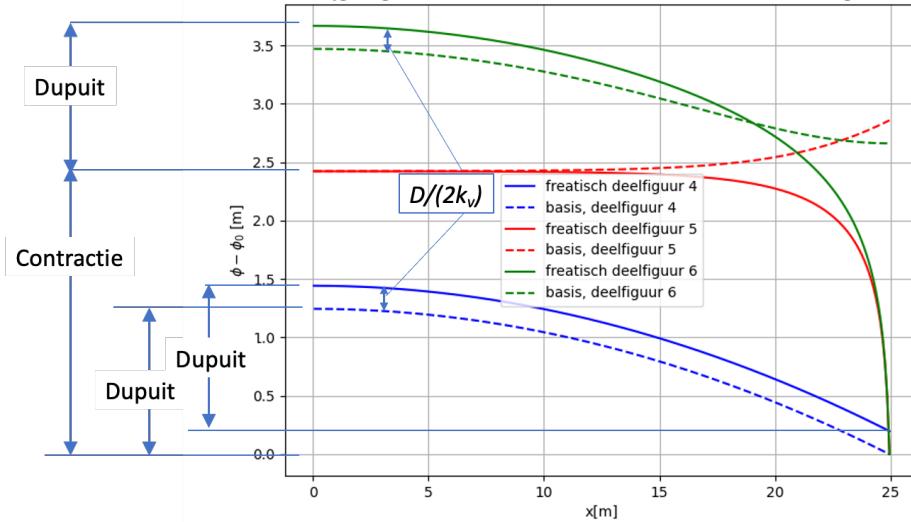
Figuur 4: Ernst fig. 7 analytisch doorgerekend.

lijnen bij $x = 0$ en opzichte van hun hoogte bij $x = b$ is gelijk aan $Nb^2/(2kD)$, zoals Dupuit voorspelt. Dit is ook de hoogte van de getrokken groene lijn boven de rode lijn. **Dit laatste is bijzonder omdat dit impliceert dat de contractie van stroomlijnen de verticale weerstand binnen de doorsnede volledig meeneemt.** Met andere woorden: De stijghoogte bovenin het pakket is **slootpeil + effect contractie van stroomlijnen + effect van uitsluitend horizontale stroming**. De weerstand door de verticale stroming als gevolg van het neerslagoverschot $ND/(2k_v)$ dient hier **niet** bij opgeteld te worden. Deze kan wel gebruikt worden om de berekenen hoeveel de stijghoogte aan de basis van het pakket lager is dan aan de top, dat wil zeggen mits de afstand tot de sloot groter is dan $1.5D$ maar hij hoort nooit in de weerstandsformule.

5 De echte doorsnede van Ernst

De hiervoor numeriek en analytisch doorgerekende profiel was een gestileerde versie van de doorsnede die Ernst (1962) in zijn figuur 7 weergaf (fig. 1). De gestileerde versie met constante pakketdikte en tot punt teruggebrachte sloot maakt het makkelijk om de verschillende deelstromen te toetsen aan de theorie. We zagen ook dat de numeriek berekende doorsnedes in fig.2 heel nauwkeurig overeenkomen met de analytisch berekende in fig. 4. De echte doorsnede van Ernst laat een freatisch vlak zien dat duidelijk de dikte van het

Narekenen Ernst (1962, fig 7)
 $b=25 \text{ m}$, $D=10 \text{ m}$, $k=0.025 \text{ m/d}$, $N=0.001 \text{ m/d}$, $ND/(2k)=0.200 \text{ m}$, $D/(2k)=200.00000 \text{ [d]}$
 Stijghoogte aan freatisch vlak in de verschillende deelstroomfiguren



Figuur 5: Verloop van de stijghoogte aan de onderzijde (stippellijnen) en aan de bovenzijde (getrokken lijnen) van de doorsnede.

watervoerend pakket verandert en heeft een sloot van niet verwaarloosbare afmetingen. We zullen hierna de doorsneden van Ernst numeriek doorrekenen maar dan met deze van de ideale situatie afwijkende afmetingen. We houden een doorsnede aan met $b = 25 \text{ m}$ en een dikte van 10 m bij de sloot. De sloot bij Ernst is dan bovenin ca. 2 m breed (halve breedte) en onderin ca. 0.6 m . Hij is ook 2 m diep. De doorlatendheid is zo klein gekozen om ervoor te zorgen dat het freatisch vlak op de waterscheiding ca. 1.6 m boven het slootpeil uitkomt bij een neerslagoverschot $N = 0.001 \text{ m/d}$. Omwille van de consistentie met de overige doorgerekende doorsneden is ook daar deze kleine doorlatendheid aangehouden. Voor de analyse is de numerieke grootte van de doorlatendheid zonder betekenis.

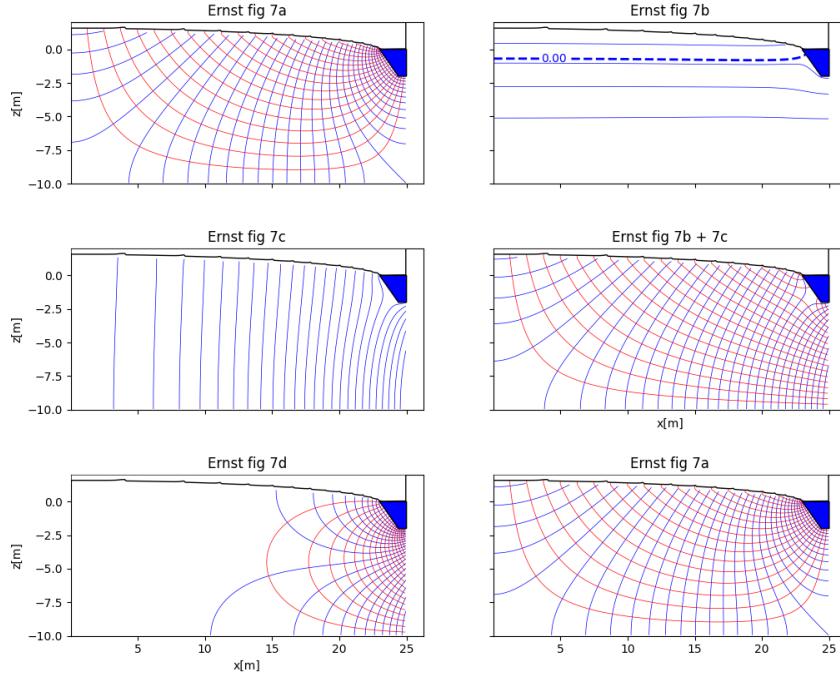
Wanneer we de meer op een werkelijke situatie lijkende doorsnede simuleren verwachten we dat met name de sloot door zijn afmetingen kleine afwijkingen in het lijnenpatroon gaan opleveren ten opzichte van die in de gestileerde doorsnede. In de gestileerde doorsnede van 2/2 met alleen verticale stroming zijn de isohypsen perfect horizontale lijnen, in de meer reële doorsnede zal dat met name in de buurt van de sloot niet meer helemaal het geval zijn. Iets dergelijks verwachten we ook in de doorsnede met de horizontale stroming waarin de isohypsen in de ideale doorsnede zuiver verticale lijnen vormen.

In de nieuwe doorsnede loopt het freatisch vlak van de sloot naar de waterscheiding aanmerkelijk op. Hierdoor is de uniforme onttrekking in fig.2/2 en de uniforme infiltratie in fig.2/3 niet meer zuiver uniform. In plaats van N/D gebruiken we nu de D die hoort bij de plek in de doorsnede met de hoogte van het freatisch vlak boven de basis van het watervoerende pakket. De infiltratie N over het freatisch vlak werkt niet ter plekke van de sloot, met zijn vaste stijghoogte. De afstroming $Q = Nb$ over de rechter rand in fig.2/3 wordt nu verdeeld over de hoogte van de rand onder de sloot. Dat geldt ook voor de instroom in fig.2/4. Het resultaat van de berekeningen is in fig.6. De figuren komen overeen met die van gestileerde doorsnede in fig.2.

Fig.7 geeft het verloop van de stijghoogte in 6/4, /5 en /1 (/6). Deze is direct te vergelijken met fig.5 voor de gestileerde doorsnede in fig.2 of fig.4.

De doorsnede heeft een rechthoekig raster met cellen van $0.1 \times 0.1 \text{ m}$. Eerst is de ligging van het freatisch vlak bepaald door enkele simulaties waarin steeds de cellen die hoger liggen dan hun stijghoogte inactief te maken en de doorlatendheid aan te passen aan de vullingsgraad. Dit freatisch vlak is verder aangehouden voor de berekeningen in de andere doorsneden. Fig.6/2 is het resultaat voor de situatie met alleen verticale

Ernst (1962) Fig 7, numeriek. (Φ =blauw, Ψ =Rood, $d\phi=0.050$ m, $d\Psi=0.00125$ m²/d)
 $b=25$ m, $D=10$ m, $N=0.001$ m/d, $k=0.025$ m/d, $ND/(2k)=0.200$ m, $D/(2k)=200.0$ [d]



Figuur 6: Numerieke doorrekening van de doorsnede van Ernst (1962, fig.7)

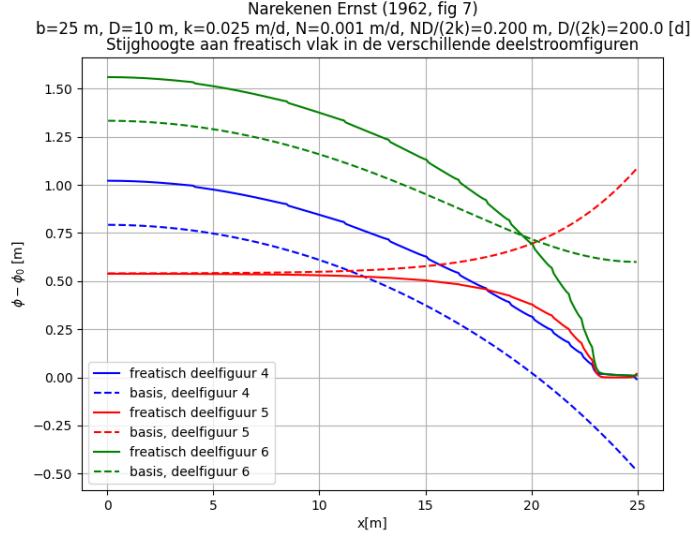
stroming die wordt verkregen door infiltratie N in de bovenste actieve cellen en een bijna uniforme onttrekking aan de gehele doorsnede ter grootte N/D_x . We zien hier dus inderdaad kleine afwijkingen van de horizontale isohypsen nabij de sloot. In fig.6/2 is ook de stippellijn getekend die Ernst in zijn fig.7b toont. Deze stippellijn is de contour van stijghoogte 0 (het slootpeil). Het is opvallend hoe mooi deze lijn lijkt op die van Ernst. De afstand tussen het freatisch vlak en de stippellijn, D^* bij Ernst is het stijghoogteverlies door horizontale stroming en radiale stroming, niet door verticale stroming. Dat door verticale stroming is $ND/(2k_v)$ maar die zit al in het stijghoogteverlies door radiale stroming. De bijdrage D^*/k_v hoort dus niet in vergelijking 7 (Ernst (1962), vgl. 33).

Fig.6/3 geeft de situatie met alleen verticale stroming. Deze wordt verkregen door een ruimtelijke infiltratie over de gehele doorsnede gelijk aan N/D_x , dus gelijk maar tegengesteld aan de onttrekking voor 6/3, en een uniforme onttrekking $Nb/D_{x=b}$ aan de verticaal $x = b$ onder de sloot. De aanwezigheid van de sloot geeft nu een behoorlijke verstoring van het ideale beeld. Bij Ernst valt dat wat minder op, want hij heeft minder detail. Het duidelijk, eigenlijk is de sloot niet helemaal compatibel te maken met zuiver horizontale en verticale stroming, tenzij deze wordt teruggebracht tot een punt die verder niets doet.

Fig.6/4 is de superpositie van fig.6/2 en fig.6/3. Het lijnenpatroon laat duidelijk zien dat de sloot een verstorende factor is, want een behoorlijke stroom wordt kortgesloten door de sloot. Het oorspronkelijke idee van een stroombeeld dat de som is van zuiver horizontale en zuiver verticale stroming is onmogelijk met sloot; de sloot hoort gewoon helemaal niet in deze figuur. Echter de valide superpositie vereist dat hij erin blijft.

Fig.6/5 ontstaat door de uniforme onttrekking aan de lijn $x = b$ onder te sloot nu te infiltreren. Dit geïnfiltreerde water wordt dan automatisch afgevoerd via de sloot zoals goed te zien is aan het plaatje. Afwijkingen door de hier ruimtelijk aanwezige sloot zijn er ook wel, maar zijn aan dit plaatje op het oog niet te zien. Het is gewoon een mooi plaatje precies zoals je het zou verwachten.

Door de stromingsituaties van fig.6/2, 6/3 en 6/5 bij elkaar op te tellen ontstaat de samengestelde



Figuur 7: Stijghoogte aan de top en basis van het watervoerende pakket van fig.6 voor stroming met en zonder contractie van de stroomlijnen en de stroming door de contractie zelf.

stroombeeld van 6/6 (het oorspronkelijke plaatje) dat geheel consistent is met de stromingsrandvoorwaarden en de sloot als leiding met gegeven stijghoogte. De waterscheiding, basis en de centrale verticaal onder de sloot vormen een stroomlijn. De flux over het freatisch vlak binnenkomt is gelijk aan N en de stroomlijnen verdwijnen loodrecht op de slootwand in de sloot.

6 Verlaging door de contractie van de stroomlijnen analytisch

We hebben gezien dat de stroming door contractie van de stroomlijnen analytisch is beschrijven door de onttrekking $Q = Nb$ in de bovenhoek plus een tegenstroom die de horizontale flux in fig 3 exact compenseert. Leggen we voor de eenvoud de onttrekking op $Z = 0$ zodat de stroming Q van rechts bij verticaal $x = 0$ aankomt, dan is de stroming door de contractie van de stroomlijnen exact wiskundig te beschrijven als de volgende complexe functie.

$$\Omega(z) = \frac{2Q}{\pi} \ln \left(\sin \left(\frac{i\pi}{2D} z \right) \right) - \frac{Q}{D} z; \quad x \geq 0, 0 > y > -D \quad (9)$$

Dit is weer zo'n situatie die geheel door stroomlijnen is bepaald waardoor de stijghoogte in feite zweeft; men kan altijd een constante bij de stijghoogte optellen zonder dat het stroombeeld verandert. Fig.8 geeft het patroon van potentiaal- en stroomlijnen volgens vgl.9.

Wat is de potentiaal op $z = -iD$, het stagnatiepunt aan de basis van het watervoerend pakket onder de sloot? Vul voor z in vergelijking 9 $-iD$ in:

$$\begin{aligned} \Omega(-iD) &= \frac{2Q}{\pi} \ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) - iQ \\ &= -iQ \end{aligned}$$

Met andere woorden de potentiaal in deze functie is daar nul. Let wel, dat wil niet zeggen dat de werkelijke potentiaal daar nul is, immers er kan een willekeurige waarde bij worden opgeteld. Daar komen we verderop op terug.

Wat is de potentiaal vlak in de buurt van de onttrekking? Dus $z \rightarrow 0$? De rechter term in vergl.9 valt direct weg. Verder hebben we $\sin(iw) = i \sinh(w)$. Met $z = re^{i\theta}$ en $\sinh(\delta) \approx \delta$ voor kleine δ volgt

$$\begin{aligned}\Omega(z \rightarrow 0) &= \frac{2Q}{\pi} \ln \left(i \sinh \left(\frac{\pi r}{2D} e^{i\theta} \right) \right) \\ \Omega(z \rightarrow 0) &= \frac{2Q}{\pi} \left(\ln i + \ln \left(\frac{\pi r}{2D} \right) + i\theta \right) \\ \Omega(z \rightarrow 0) &= \frac{2Q}{\pi} \ln i + \frac{2Q}{\pi} \ln \left(\frac{\pi r}{2D} \right) + iQ \left(\frac{\theta}{\pi/2} \right)\end{aligned}$$

Met $\ln i = i2/\pi$

$$\begin{aligned}\Omega(z \rightarrow 0) &= iQ + \frac{2Q}{\pi} \ln \left(\frac{\pi r}{2D} \right) + iQ \frac{2\theta}{\pi} \\ \Omega(z \rightarrow 0) &= \frac{2Q}{\pi} \ln \left(\frac{\pi r}{2D} \right) + iQ \left(1 + \frac{2\theta}{\pi} \right), \text{ met } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0\end{aligned}$$

Dus de stijghoogte door de contractie van de stroomlijnen ten opzichte van die in het punt $z = -iD$ wordt dan

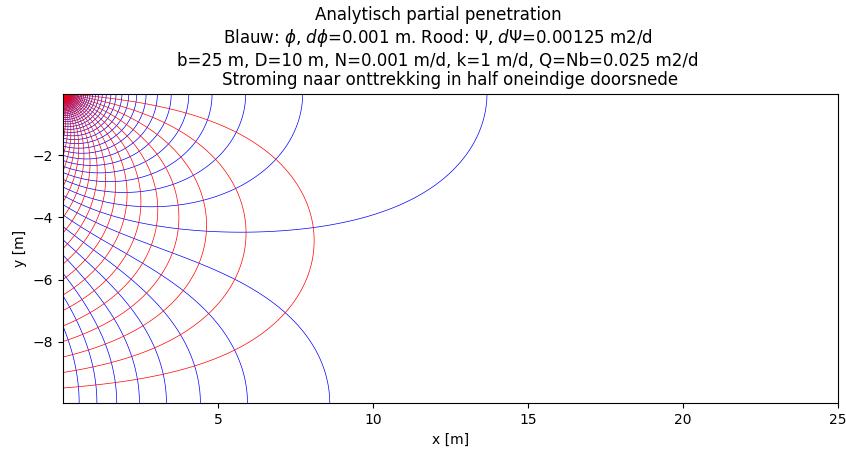
$$\phi(r \rightarrow 0) = \frac{2Q}{\pi k} \ln \left(\frac{\pi r}{2D} \right) \quad (10)$$

De k komt erin doordat de potentiaal $\Phi = k\phi$.

Merk op dat dit voor een cirkelvormige slootdoorsnede met radius r de natte omtrek in deze kwart sector gelijk is aan $\pi r/4$. In onze standaard formules voor onttrekking aan een punt of put zijn we gewend aan de factor $Q^*/(4\pi k)$. Omdat de onttrekking nu in een kwart cirkel plaats vindt is $Q^* = 4Q$ dus $2Q/(\pi k) = (4Q)/(2\pi k)$. De extra verlaging door onvolkommenheid van een sloot met natte omtrek ω wordt door [Huisman (1972)] voor tweezijdige toestroming gegeven door

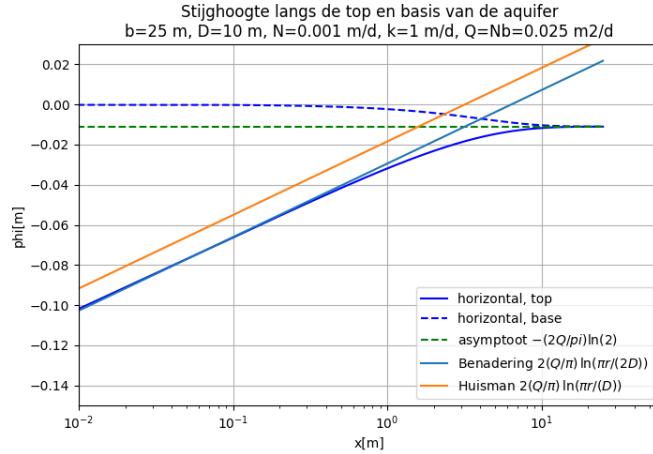
$$\Delta\phi = \frac{\hat{Q}}{\pi k} \ln \frac{D}{\omega}$$

waarbij in ons geval $\hat{Q} = 2Q$ zoals in vergelijking 10 is opgenomen.



Figuur 8: Stroming door contractie van stroomlijnen analytisch vgl.9

Fig.9 geeft het verloop van de stijghoogte aan de top en de basis van het pakket in fig.8. De stippe lijn voor de pakketbasis toont dat de stijghoogte aan de basis op $x = 0$ de referentie is. Tegelijkertijd laat het



Figuur 9: Stijghoogte contractie van stroomlijnen (fig.8) langs top en basis van het watervoerende pakket (op logaritmische schaal), de asymptoot voor grote x en de analytische benadering volgens vgl.10. Benadering volgens [Huisman (1972)] (p57) corrigeert voor de asymptoot.

verloop of afstanden $x > 1.5D$ zien dat daar de stijghoogte niet nul is terwijl daar geen stroming aanwezig is. Dit komt omdat we niet de stijghoogte op grote afstand als referentie hebben genomen, wat voor een juist superpositie wel moet.

Wat is de potentiaal op grote afstand van de onttrekking (asymptoot)?

$$\Omega(z \rightarrow \infty) = \frac{2Q}{\pi} \ln \left(i \sinh \left(\frac{\pi z}{2D} \right) \right) - \frac{Q}{D} z$$

dus, als boven met $\ln i = i\pi/2$ en $\sinh w \approx \frac{1}{2}e^w$ voor grote e

$$\begin{aligned} \Omega(z \rightarrow \infty) &= iQ + \frac{2Q}{\pi} \ln \left(\frac{1}{2} \exp \left(\frac{\pi z}{2D} \right) \right) - \frac{Q}{D} z \\ &\approx \frac{2Q}{\pi} \frac{\pi z}{2D} - \frac{2Q}{\pi} \ln 2 - \frac{Q}{D} z \\ &= -\frac{2Q}{\pi} \ln 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\phi(z \rightarrow \infty) = -\frac{2Q}{\pi k} \ln 2} \quad (11)$$

Fig.9 toont behalve de stijghoogten aan de top en de basis van de doorsnede in fig. 8 ook de asymptoot volgens vgl.11 en de benadering volgens vgl.10. De figuur laat zien dat deze benadering maar beperkt werkt, tot een slootradius van ongeveer 10% van de pakketdikte.

Voor een juiste superpositie van de stijghoogte aanpassing door contractie van de stroomlijnen moeten we de constante van vgl. 11 optellen bij vgl.9, we krijgen dus in plaats van vergelijking 9 deze vgl.12:

$$\boxed{\Omega(z) = \frac{2Q}{\pi} \ln \left(\sin \left(\frac{i\pi}{2D} z \right) \right) - \frac{Q}{D} z + \frac{2Q}{\pi} \ln 2; \quad x \geq 0, 0 > y > -D} \quad (12)$$

En voor de benadering

$$\begin{aligned}
\phi(r \rightarrow 0) &= \frac{2Q}{\pi k} \ln \left(\frac{\pi r}{2D} \right) + \frac{2Q}{\pi k} \ln 2 \\
&= \frac{2Q}{\pi k} \ln \left(\frac{\pi r}{D} \right) \\
&= \frac{2Q}{\pi k} \ln \left(\frac{\Omega}{D} \right)
\end{aligned}$$

Dit is exact de formule van [Huisman (1972)] (p57) voor een radiale slootdoorsnede waarvan de natte omtrek $\Omega = \pi r$. Deze formule werkt volgens fig.9 goed zolang $r < 0.1D$. Als we $\Delta\phi$ opvatten als de extra verlaging door de onvolkomenheid van de sloot, zodat $\Delta\phi > 0$ dan wordt deze formule als volgt:

$$\boxed{\Delta\phi = \frac{2Q}{\pi k} \ln \left(\frac{D}{\Omega} \right)} \quad (13)$$

De benadering volgens [Huisman (1972)] corrigeert voor de asymptoot en is eveneens weergegeven in fig.9.

Referenties

- [Ernst (1962)] Ernst, L.F. (1962) Grondwaterstromingen in de verzadigde zone en hun berekening bij de aanwezigheid van horizontale evenwijdige leidingen. Verslagen van de landbouwkundige onderzoeken. Pudoc Nr. 67.15, Wageningen. 189p.
- [Huisman (1972)] Huisman, L (1972) Groundwater Recovery. MacMillan, SBN 333 09870 6, Pitman Press, Bath. 336.
- [Verrijt (1970)] Verrijt, A. (1970) Theory of Groundwater Flow. MacMillan, Pitman Press Bath, 190p.