

# Verticale en radiale weerstand bij Ernst (1962)

T.N.Olsthoorn

14 januari 2026

## 1 Radiale weerstand volgens Ernst

Ernst wijdt een flink deel van zijn beroemde en gedetailleerd proefschrift uit 1962 aan de analyse van de radiale weerstand. Zijn doel is de grondwaterstroming naar „leidingen” (sloten, kanalen, greppels, drains) in detail wiskundig te beschrijven, en vooral goed berekenbaar te maken. Dit was in zijn tijd met name van belang voor de landbouw, omdat in de landbouw het gedetailleerde verloop naar en van zulke „leidingen” relevant is, terwijl de tot dan toe grove, veelal meer regionale analytische benadering van het verloop van de grondwaterstanden tekort schoot.

De radiale weerstand leek moeilijk grijpbaar, deze bleek het gevolg van de contractie van stroomlijnen in de buurt van de leiding, en verwaarloosbaar op afstanden groter dan ca. de pakketdikte  $D$  daarvan. Tegenwoordig houden we aan ca. 1.5 maal de pakketdikte (na verschaling van de verticale anisotropie).

De stroming naar leidingen blijkt in detail tamelijk complex, omdat tegelijk rekening moet worden gehouden met de stroming als gevolg van neerslagoverschot en de detailstroming nabij de leiding. Omdat er geen analytische oplossing bestaat die deze stroming in een keer berekent, beroept Ernst zich op superpositie. Mits de randvoorwaarden op elkaar passen kan elke samengestelde stroming exact worden berekend door deze op te breken in afzonderlijke stromingen waarvan de oplossing wel analytisch bekend is, waarna zij bij elkaar worden opgeteld.

Ernst beschouwt de stroming in een verticale doorsnede. In zijn beroemde figuur 7 (p17) toont hij hoe hij de stroming in de doorsnede opdeelt in 3 deelstromen. Fig. 7a is de uitgangssituatie met rechts de symmetrieas als dichte rand, met links, midden onder de leiding eveneens een dichte rand en een dichte onderrand. De bovenrand wordt gevormd door het freatisch vlak dat gevoed wordt met uniform neerslagoverschot  $N$ .

Hij splitst het systeem in drie deelstromen: 7b) een verticale stroming vanaf het freatisch vlak waar het neerslagoverschot binnentreedt en al dalend afneemt tot nul aan de basis, 7c) een horizontale stroming die via de rechter rand vanaf nul toeneemt tot aan de linker rand en daar uittreedt. En 7d) de stroming door de contractie van stroomlijnen die langs onder, rechter en bovenrand nul is en op de linkerrand gelijk maar tegengesteld aan die van figuur 7c) en een vaste potentiaal heeft langs de slootomtrek.

De stroming in fig. 7b is niet divergentievrij, hij is alleen mogelijk met uniforme onttrekking aan de doorsnede met een sterkte van  $N/D$ . Deze onttrekking weergegeven in de doorsnede loodrecht op het profiel. De verticale lijnen in fig. 7b zijn dan misschien wel stroombanen, maar geen stroomlijnen in de zin dat tussen elk van de lijnen overal evenveel water stroomt. De stroomdichtheid is immers gelijk aan  $N$  aan de top en nul aan de basis. In fig. 7c beschouwt Ernst alleen horizontale stroming. Deze is gelijk aan nul aan de gesloten rechterzijde en neemt toe tot  $Q_x = Nb$  tegen de linkerrand. De stroomdichtheid tussen de horizontale lijnen is dus ook in fig. 7c niet constant; hij varieert van 0 aan de rechter rand tot  $q_x = Nb/D$  aan de linker rand. De stroming in fig. 7c vergt dus een uniforme voeding gelijk aan  $N/D$ , die is getekend in de doorsnede aan de onderzijde van fig. 7c. De onttrekking voor het in stand houden van de verticale stroming in fig. 7d en de voeding voor het in stand houden van de horizontale stroming in fig. 7c zijn exact even groot, namelijk  $N/D$  en vallen tegen elkaar weg.

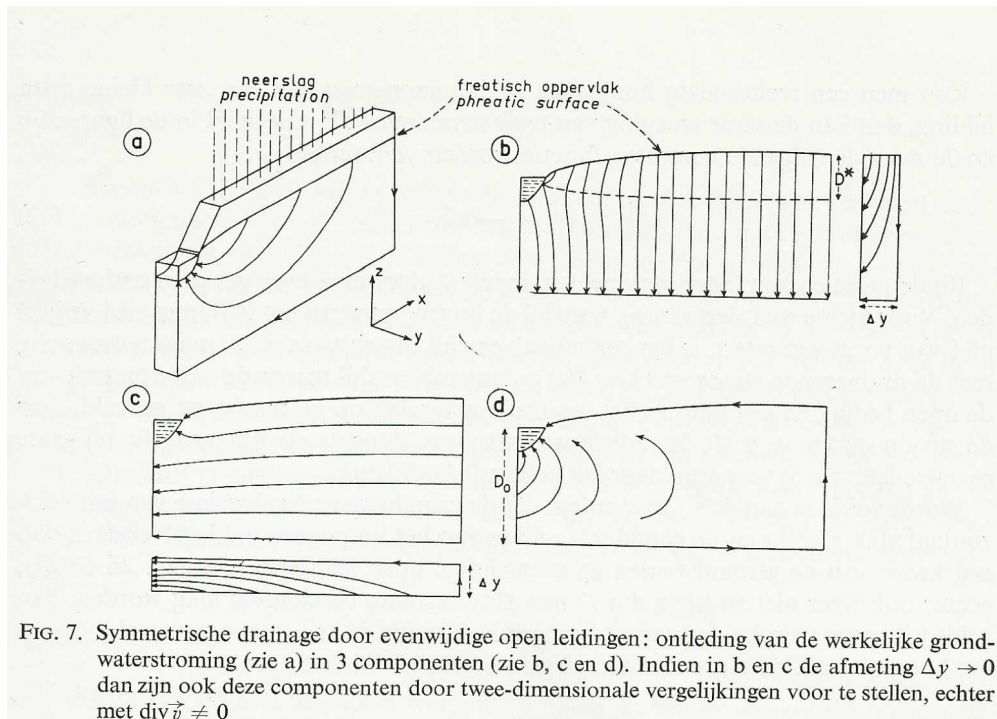
Fig. 7d, tenslotte pakt het water dat aan de linker rand arriveert op een transporteert dat naar de leiding. Dit is de zuivere stroming veroorzaakt door de contractie van stroomlijnen. De totale stroom in fig. 7D is gelijk aan  $Q = Nb$ .

Voor het beter waarden van de figuren 7b en 7c zou men de sloot moeten terug brengen tot een enkel punt met een gegeven peil. De stroming in de twee doorsneden 7b en 7c doorsneden worden dan geheel

door stromingsrandvoorwaarden bepaald, onafhankelijk van enige stijghoogte. In figuur 7b en 7c is er slechts één punt met gegeven stijghoogte, de tot punt gereduceerde leiding in de linkerbovenhoek. Onder deze omstandigheden, met de uniforme onttrekking gelijk aan  $N/D$  over het oppervlak van de doorsnede van fig. 7b krijgen we zuiver verticale stroming waarvan het bijbehorende freatisch vlak een rechte lijn is met stijghoogte gelijk aan het slootpeil in de linkerbovenhoek.

Er is slechts een punt in zo'n situatie is de stijghoogte volledig vrij. In dit geval met een punt met stijghoogte

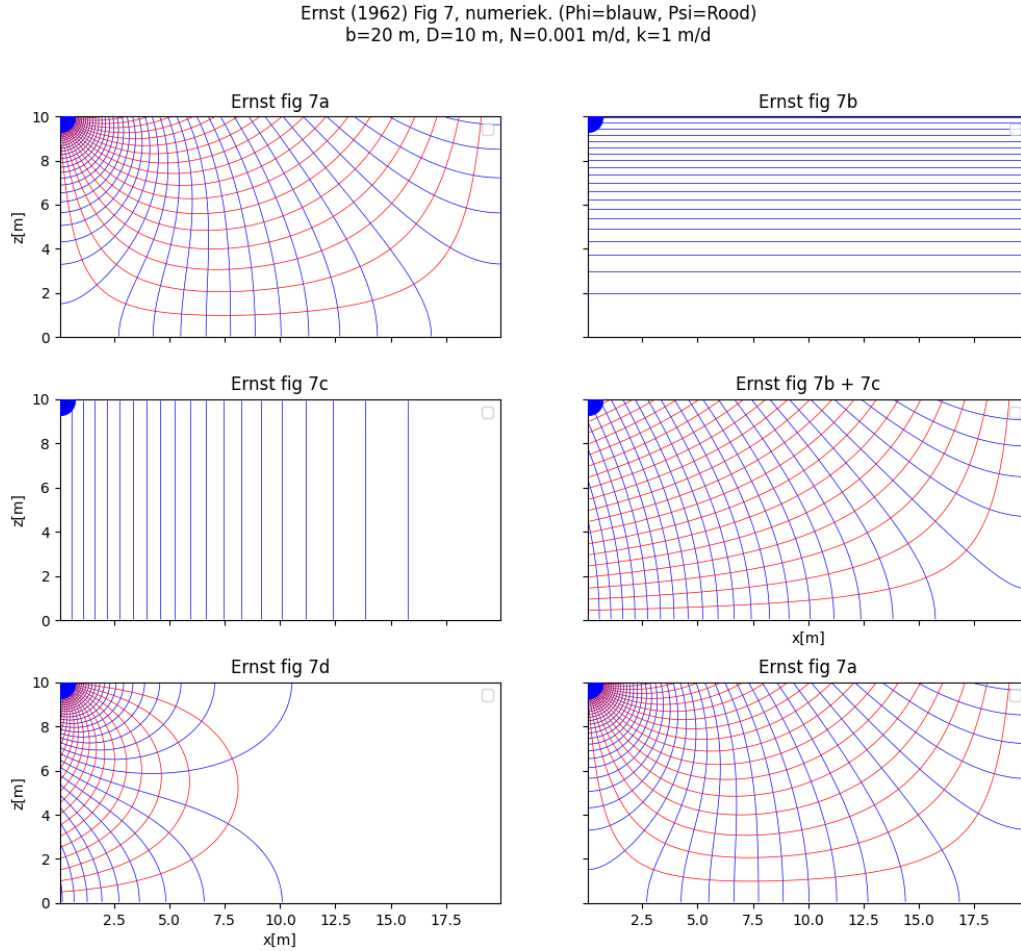
Het zal direct duidelijk zijn geen van de deelstromen op zichzelf compatibel is met de positie van het freatisch vlak; dat vlak klopt alleen voor de gezamenlijke stroming. De linker rand is in de uitgangspositie gesloten, maar bij de deelstromen van figuren 7c en 7d duidelijk niet. De bijna uniforme naar links gerichte flux in figuur 7c moet in fig. 7d exact worden gecompenseerd met een tegengestelde flux door de stroming die het gevolg is van de contractie van stroomlijnen in fig. 7d.



Figuur 1: Fig. 7 uit Ernst (1962)

We kunnen de figuur ook numeriek narekenen, waarbij gemakshalve het freatisch vlak (maar niet de stijghoogte) gelijk wordt genomen aan het slootpeil en de sloot tot een puntonttrekking wordt geschematiseerd. Fig. 2 geeft het resultaat. De eerste figuur geeft de samengestelde stroming. De tweede figuur rekt fig. 7b van Ernst na. Deze figuur laat alleen horizontale stijghoogtelijnen zien omdat de stroomfunctie daar niet is gedefinieerd door de divergentie die ontstaat door de uniforme onttrekking  $N/D$  over de gehele doorsnede. De verticale stroming (loodrecht op de stijghoogtelijnen) ontstaat door infiltratie met een sterkte  $N$  [m/d] aan de bovenrand en uniforme onttrekking met sterkte  $N/D$  [1/D] over de gehele doorsnede. Figuur 3 rekt fig. 7c van Ernst na. Alleen de verticale stijghoogtelijnen zijn daarin getekend omdat door de divergentie de stroomfunctie niet is gedefinieerd. De horizontale stroming loodrecht op de stijghoogtelijnen ontstaat door de uniforme voeding gelijk aan  $N/D$  [1/D] over de gehele doorsnede en de lijnonttrekking met sterkte  $Nb/D$  [m/d] op de linkerrand. De vierde figuur is de som van de tweede en de derde figuur. De uniforme onttrekking over de doorsnede in de tweede figuur en de uniforme infiltratie over de doorsnede in de derde figuur zijn opgeteld (en verdwijnt daardoor), terwijl het model aan de bovenzijde wordt gevoed met neerslagoverschot  $N$  [m/d] en er aan de linkerrand wordt onttrokken met sterkte  $Nb/D$  [m/d]. De 5e figuur rekt figuur 7c van Ernst na. Deze ontstaat door infiltratie langs de linker modelrand met sterkte  $Nb/D$  en

een onttrekking gelijk aan  $Q = Nb$  aan de cel in de linker bovenhoek van het model. Dit is de stroming door de contractie van stroomlijnen. De laatste figuur, tenslotte is gelijk aan de eerste en is de som de stroming in figuren 2, 3 en 5 of, wat hetzelfde is, van de stroming in figuren 4 en 5. Deze 6e figuur is gelijk aan de eerste figuur.



Figuur 2: Figuur 7 uit Ernst numeriek nagerekend.

De sloot wordt in dit model vertegenwoordigd door een cel ( $0.1 \times 0.1$  m) in de linker bovenhoek. Deze cel heeft een vaste stijghoogte. In de figuren 2, 3 en 4 is er geen infiltratie of onttrekking in deze cel omdat het totale debiet dat het model in en uitstroomt gelijk aan nul is. Wel zorgt de cel ervoor dat de stijghoogte is bepaald. Immers in een model waar nergens de stijghoogte wordt gefixeerd is de stijghoogte onbepaald, maar de stroming, resp. de stroomdichtheid op elke plek in het model niet, die liggen wel vast. De cel met vaste stijghoogte in de linker bovenhoek doet dus helemaal niets in de figuren 1, 3 en 4. Dat wordt natuurlijk ander in figuur 5, waar de uitstroom over linkerrand wordt opgevangen en via de sloot (de cel met vaste stijghoogte) afgevoerd. Hetzelfde geldt in de 1e en laatste figuur 1 met de samengestelde stroming. Daarin wordt het neerslagoverschot dat infiltreert via de bovenrand afgevoerd via de rekencel die de sloot in de linker bovenhoek vertegenwoordigt.

Omdat de sloot niets doet in de tweede figuur (Ernst fig. 7b), is de stijghoogte langs de hele bovenrand exact gelijk aan het slootpeil, dus nul. De stippellijn in fig. 7b van Ernst valt exact samen met de horizontale bovenrand van het model, maar het freatisch vlak ligt (uiteraard hoger). De stippellijn van Ernst valt exact

samen met de stijghoogte bovenin de tweede figuur, maar niet met die bovenin figuur 1 (6) of 4. De stijghoogte bovenin figuur 1 (6) komt overeen met het freatisch vlak. Dat geldt ook voor de stijghoogte bovenin figuur 4. Die stijghoogte bovenin figuur 1 (6) is echter hoger dan die bovenin figuur 4, omdat het water in figuur 1 (6) de extra weerstand door de contractie van de stroomlijnen moet overwinnen, die in figuur 5 is weergegeven.

## 2 De hoogte $D^*$ , wat is dat precies?

Nu de vraag over  $D^*$ , die direct samenhangt met de betekenis van de stippellijn in Fig. 7.b. Ernst zegt dat zijn stippellijn ongeveer horizontaal loopt ongeveer gelijk met de hoogte van de onderzijde van de „leiding” en tekent hem ook zo. Die stippellijn  $D^*$  heeft niets te maken met de pakketdikte. Zoals hierboven aangetoond valt hij samen met het slootpeil. De afwijking daarvan is het uitsluitende gevolg van het niet tot een ideaal onttrekkingspunt terugbrengen van de sloot. Want alleen als punt verliest de sloot in figuur 7b zijn invloed en is de stroming zuiver verticaal. Ook alleen als punt verliest de sloot in figuur 7c zijn invloed en wordt de stroming zuiver horizontaal.

Ernst houdt in zijn ontrafeling in deelstromen het stromingsdomein (freatisch vlak) in alle figuren hetzelfde. Dat is juist maar valt de stijghoogte ter hoogte van het freatisch vlak in figuur 7b en 7c niet meer samen met het freatisch vlak. De stijghoogte ligt er dan onder en is horizontaal gelijk aan het slootpeil. De stijghoogte boven de sloot is zelfs negatief. De afstand  $D^*$  in fig. 7b is dus de afstand van het freatisch vlak boven het slootpeil. Dit is een stijghoogteverlies vanaf het freatisch vlak tot aan de sloot. Het is dus de som van het stijghoogteverlies door horizontale stroming en het stijghoogteverlies door verticale stroming. Het is zeker niet het stijghoogteverlies door verticale stroming. We kunnen het stijghoogteverlies door verticale stroming, dat wal Ernst bedoelt met  $D^*/k$  echter wel gewoon uitrekenen.

### 2.1 Het stijghoogteverlies of weerstand door horizontale en verticale stroming in de doorsnede

Beschouw de doorsnede met waterscheiding op  $x = 0$  halverwege twee parallelle leidingen op onderlinge afstand. We beschouwen dus alleen  $0 \leq x \leq b$ . Deze doorsnede heeft neerslagoverschot  $N$  aan bovenzijde en de dikte van het watervoerend pakket, wordt gemakshalve constant verondersteld, gelijk aan  $D$ . We  $x$  is nul op de waterscheiding en de verticale coördinaat  $y$  loopt van 0 aan de basis tot  $D$  aan de top van het watervoerend pakket. (we reserveren  $z$  voor complexe coördinaten  $z = x + iy$ ).

Voor de verticale stroming  $q_y$  geldt dan overal in de doorsnede (waarvan  $y = 0$  de basis is):

$$q_y = -N \frac{y}{D} \quad (1)$$

Met totale breedte  $b$  tussen waterscheiding en de voorlopig volkomen veronderstelde sloot, geldt voor de horizontale stroming vanaf  $x = 0$

$$Q_x = Nx$$

en voor de horizontale flux

$$q_x = N \frac{x}{D} \quad (2)$$

We hebben hiermee overal in de doorsnede de horizontale en verticale flux te pakken. We kunnen de breedte (lengte) van de doorsnede  $b$  vrij kiezen. De uitstroming op  $x = b$  is hiermee ook gegeven en vindt gelijkmatig over de hoogt plaats. Het stroombeeld en dus ook de stroomlijnen liggen hiermee volledig vast, onafhankelijk van de uniform veronderstelde doorlatendheid of de stijghoogte. De stijghoogte doet er voor de stroming in deze doorsnede niet toe. Die komt straks wel aan de orde voor het bepalen van de weerstand. Dit is ook de situatie die Ernst voor ogen moet hebben gehad. De radiale weerstand staat hier geheel buiten.

Terzijde: direct is aan te tonen dat deze twee componenten de stroomfunctie  $\Psi$  bepalen, waarvoor geldt:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial \Psi}{\partial y} &= q_x = +\frac{N}{D}x \\ +\frac{\partial \Psi}{\partial x} &= q_y = -\frac{N}{D}y\end{aligned}$$

$$\Psi = -\frac{N}{D}xy + C$$

Met  $\Psi = 0$  langs de onderrand en de verticale lijn  $x = 0$  geldt  $C = 0$ . Deze stroomfunctie voldoet zoals vereist aan de Laplace-vergelijking.

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$$

Bepaling van de stroomlijnen kan op twee manieren. Een manier is de stroomfunctie te contouren. Maar bepaling van de stroomlijnen gaat ook onafhankelijk van de stroomfunctie, alhoewel dit wiskundig op hetzelfde neerkomt. De afstand vanaf een bepaald startpunt,  $x_0$ , afgelegd in  $x$ -richting kan direct worden bepaald aan de hand van de nu bekende flux  $q_x = \epsilon v_x = \epsilon (dx/dt)$ . Aldus uitgewerkt:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{x} &= \epsilon \frac{N}{D} dt \\ \ln x &= \epsilon \frac{N}{D} (t - t_0) + C \rightarrow C = \ln x_0 \\ \ln \frac{x}{x_0} &= \epsilon \frac{N}{D} (t - t_0)\end{aligned}$$

In  $y$ -richting krijgen we bijna hetzelfde

$$\begin{aligned}\frac{dy}{y} &= -\epsilon \frac{N}{D} dt \\ \ln \frac{y}{y_0} &= -\epsilon \frac{N}{D} (t - t_0)\end{aligned}$$

De factor met de tijd kan uit beide vergelijkingen worden geëlimineerd. Dit levert de volgende vergelijking voor de stroomlijnen op

$$\boxed{xy = x_0 y_0} \tag{3}$$

Hier zien we dus de stroomfunctie terug komen. De formule geeft aan dat alle stroomlijnen hyperbolen zijn.  $x_0 y_0$  is het startpunt van de stroomlijn.

Fig. 3 geeft de stroomlijnen berekend met vergelijking 3.

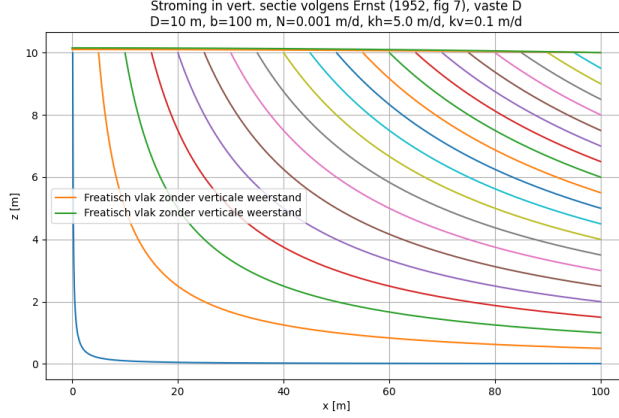
Wanneer we nu een willekeurig punt op het freatisch vlak kiezen, met  $y_0 \approx D$  krijgen we de volgende stroomlijnvergelijking

$$xy = x_0 D$$

Deze stroomlijn verlaat de doorsnede op  $x = b$  op de volgende hoogte

$$\begin{aligned}by_b &= x_0 D \\ \frac{y_b}{D} &= \frac{x_0}{b}\end{aligned}$$

Dus de totale verticale weg, die het monotoon vanaf het freatische vlak dalende deeltje aflegt, is gelijk aan



Figuur 3: Stroomlijnen in de gestileerde doorsnede  $xy = x_0y_0$  met  $y_0 = D$  en  $x_0$  verschillende startpunten op regelmatige afstanden.

$$D - y_b = D - D \frac{x_0}{b}$$

$$D - y_b = D \left(1 - \frac{x_0}{b}\right)$$

Dit is alles dat we nodig hebben om de  $D^*$  van Ernst te bepalen.

**Om de weerstand te bepalen beschouwen we nu de stijghoogte** De horizontale stroming langs de basis van het pakket heeft geen verticaal stijghoogteverlies. De stijghoogte vanaf  $x = 0$  tot aan  $x = b$  is daarom direct te bepalen

$$-kD \frac{d\phi}{dx} = Nx$$

$$\phi - \phi_b = \phi_b + \frac{N}{2kD} (b^2 - x^2) \quad (4)$$

Het maximale en gemiddelde stijghoogteverlies is:

$$\phi_0 - \phi_b = \frac{Nb^2}{2k_h D} = \frac{NL^2}{8k_h D} \text{ en } \bar{\phi} - \phi_b = \frac{Nb^2}{3k_h D} = \frac{NL^2}{12k_h D} \quad (5)$$

Hierin is  $\phi_0$  de maximale stijghoogte in de doorsnede, die op  $x = 0$ , en is  $\bar{\phi}$  de gemiddelde stijghoogte in de doorsnede. De minimale stijghoogte  $\phi_b$  is dat bij de uitstroom op  $x = b$ . Zo men wil kan men vergelijkbare vergelijkingen afleiden voor een freatisch pakket waarin  $D$  afhangt van de waterstand  $h$ . Dit levert voor de maximum waterdiepte  $h_0 = \phi - y_0$  de volgende relatie:

$$h_0^2 - h_b^2 = \frac{Nb^2}{k_h} = \frac{NL^2}{4k_h}$$

En voor de gemiddelde grondwaterstand deze:

$$\overline{h^2} - h_b^2 = \frac{2}{3} \frac{Nb^2}{k_h} = \frac{1}{6} \frac{Nb^2}{k_h}$$

We laten deze vergelijkingen verder buiten beschouwing omdat het verschil met die voor de stijghoogte in de praktijk nagenoeg altijd verwaarloosbaar is.

Zonder verticale weerstand, dus met oneindig grote verticale doorlatendheid is de verkregen relatie exact niet alleen voor de basis van het pakket exact, maar ook voor elke hoogte in de doorsnede. Maar met eindige doorlatendheid ondervindt de stroming ook potentiaalverlies door de verticale stroming. Hierdoor is de stijghoogte op  $x = 0$  aan de basis een stuk lager dan het freatisch vlak. Het verschil is exact te berekenen, want het deeltje dat op de waterscheiding het freatisch vlak passeert volgt een perfect verticale baan tot aan de basis van het pakket. Dit stijghoogteverlies volgt uit toepassing van Darcy:

$$\begin{aligned} -k_v \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -\frac{N}{D} y \\ \partial \phi &= \frac{N}{k_v D} y \partial y \end{aligned}$$

Dus de stijghoogte op hoogte  $y$  ten opzichte van die aan de basis van het pakket is (overal) gelijk aan

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{N}{2k_v D} y^2 + C \rightarrow C = 0 \\ \phi - \phi_{z=0} &= \frac{N}{2k_v D} y^2 \end{aligned}$$

En aan de top, waar  $y = D$  geldt

$$\boxed{\Delta \phi = \frac{ND}{2k}} \quad (6)$$

Dit is op de waterscheiding exact het stijghoogteverschil tussen het freatisch vlak in de situatie dat we rekening houden met verticale weerstand, en het freatisch vlak in de situatie waarin we geen rekening houden met verticale weerstand. **Dit zou dus exact  $D^*$  moeten zijn in fig. 7b van Ernst.**

Voor andere punten van het freatisch vlak moet rekening worden gehouden met de verticale afstand die de deeltjes vanaf die startpunten afleggen binnen de doorsnede, want die is overal kleiner dan  $D$ ; bij  $x = b$  is deze verticale afstand zelfs nul.

Wat we nu gaan doen is het freatisch vlak berekenen met en zonder dat we de verticale weerstand. De verticale weerstand is in elk geval nul voor het deeltje dat op  $x = b$  infiltreert, want dat treedt onmiddellijk weer uit, zonder dat het enige diepte heeft bereikt. We hebben hiermee de twee extremen van het freatisch vlak te pakken.

Hiervoor hebben we berekend welke verticale weg elk deeltje aflegt afhankelijk van het punt waar dat het freatisch vlak passeert. De hoogte waarop het deeltje dat op  $x_0$  infiltreert de doorsnede op  $x = b$  verlaat is

$$y_b = \frac{x_0}{b} D$$

Het stijghoogteverval dat dit deeltje ondervindt door alleen verticale stroming is dan

$$\Delta \phi_{x_0} = \frac{N}{2k_v D} \left( D^2 - \left( \frac{x_0}{b} D \right)^2 \right)$$

$$\boxed{\Delta \phi_{x_0} = \frac{ND}{2k_v} \left( 1 - \left( \frac{x_0}{b} \right)^2 \right)} \quad (7)$$

We kunnen nu direct beide freatische vlakken tekenen.

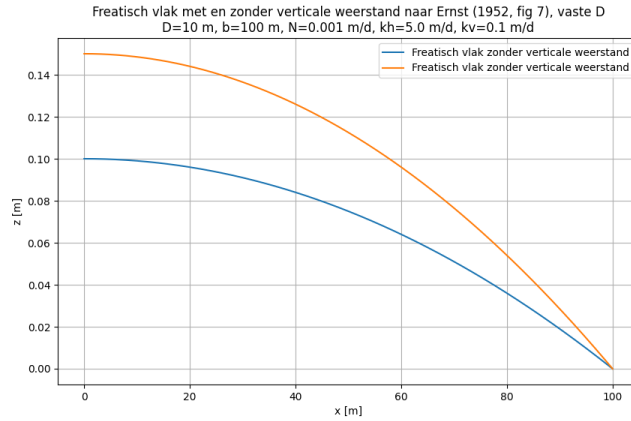
Zonder verticale weerstand is dit

$$\boxed{\phi = \phi_0 + \frac{N}{2k_h D} (b^2 - x^2)} \quad (8)$$

En met verticale weerstand is dit, voor elk startpunt  $x_0 = x$

$$\phi = \phi_0 + \frac{N}{2k_h D} (b^2 - x^2) + \frac{ND}{2k_v} \left( 1 - \left( \frac{x}{b} \right)^2 \right) \quad (9)$$

Fig. 4 geeft het verloop van het freatisch vlak zonder verticale weerstand en van het freatisch vlak met verticale weerstand. De verticale weerstand is maximaal voor de lijn die start op  $x_0 = 0$  en bedraagt dan  $\Delta\phi = ND/2k_v$ . In de figuur is de verticale doorlatendheid 10x zo klein gekozen als de horizontale om het verschil te accentueren. Deze factor 10 is overigens gebruikelijk voor verticale anisotropie in holocene deklagen.



Figuur 4: Freatisch vlak met en zonder verticale weerstand.

We kunnen ook de potentiaal afleiden, onder voorwaarde dat  $k_h = k_v = k$ , dus zonder verticale anisotropie. In het geval dat  $k_h \neq k_v$  zullen we in de praktijk eerst de coördinaten verscalen om de doorsnede symmetrisch te maken.

De potentiaal  $\Phi = k\phi$  dus

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{N}{2D} (b^2 - x^2) + \frac{N}{2D} y^2$$

end dit uitdrukken in complexe getallen. Veel zin heeft dat niet omdat het resultaat geen analytische functie is en daarom niet geschikt is voor conforme transformaties. Het is wel mogelijk om een complexe potentiaal af te leiden voor een dergelijke doorsnede, maar daarin is het bovenvlak een potentiaalvlak een geen vlak met voorgeschreven infiltratie en beide zijn niet compatibel. Dus dit werkt niet:

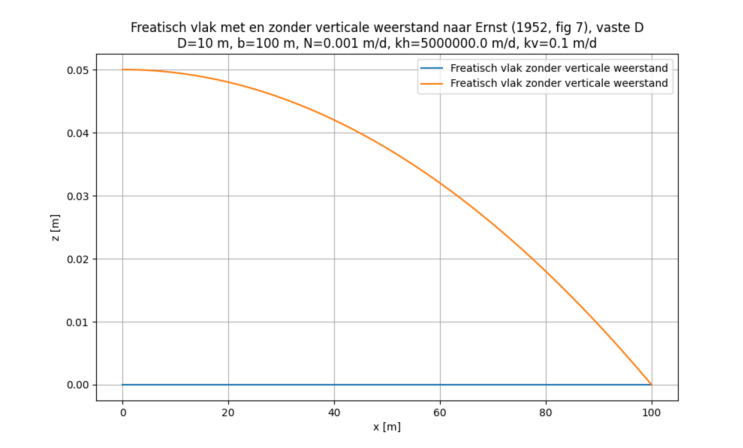
$$\Omega = N \sin \left( \frac{\pi}{2} \left( \frac{z}{D} - i \right) \right)$$

### 3 Op welke hoogte is de stijghoogte gelijk aan nul, dus gelijk aan $\phi_b$ ?

Ernst tekent in zijn doorsnede met een streepjeslijn de hoogte waarop in het plaatje met de verticale stroming de stijghoogte gelijk is aan die in de sloot. In de doorsnede die hier is uitgewerkt is stijghoogte ook zonder horizontale stroming altijd hoger dan het peil van de sloot. Fig. 5 laat dit zien (door voor  $k_v$  een hele hoge waarde in te vullen.).

Ernst zegt op p17, regel 9 van onderen: „Op de stippellijn in deze figuur is de potentiaal gelijk aan het peil van het open water. Deze aequipotentiaallijn ligt grotendeels horizontaal met een hoogte ongeveer overeen





Figuur 5: Freatisch vlak bij alleen verticale weerstand (hier is voor  $k_v$  een hele hoge waarde ingevuld).

komend met de onderkant van de natte omtrek van de open leiding.” We hebben gezien dat de stippellijn exact horizontaal is en de hoogte heeft van het peil in de leiding wanneer de doorsnede van de sloot tot een punt is teruggebracht. Ervan uitgaande dat het freatisch vlak als bovengrens van het stroomdomein in alle deelfiguren in fig. 7 van Ernst hetzelfde is, volgt dat  $D^*$  dus het totale stijghoogteverlies voorstelt vanaf het freatisch vlak op de waterscheiding tot aan de sloot, en niet de verticale weerstand. De verticale weerstand is kleiner, zoals hiervoor is afgeleid:

$$\frac{D^*}{k} = \frac{D}{2k}$$

## 4 Conclusies

Ernst (1962) formuleerde een (drainage)weerstand  $\Delta h/N$  tussen de hoogste grondwaterstand in het midden tussen parallelle open leidingen en het slootpeil als volgt:

$$\frac{\Delta h}{N} = \frac{D^*}{k_v} + \frac{L^2}{8k_h D} + Lw$$

Hierin is de weerstand door verticale stroming  $D^*/k_v$ . Deze term is in de regel te verwaarlozen zolang  $D^*/k \ll L^2/(8kD)$ . Voor de weerstand door alleen de verticale stroming hebben we formule 7 afgeleid

$$\left(\frac{D^*}{k}\right)_{Ernst} = \frac{\Delta\phi_{x_0}}{N} = \frac{D}{2k} \left(1 - \left(\frac{x_0}{b}\right)^2\right)$$

En hangt dus af van de plek in de doorsnede. De maximale waarde waarde is gelijk aan

$$\frac{D^*}{k_v} = \left(\frac{\Delta\phi_{x_0}}{N}\right)_{Max} = \frac{D}{2k_v}$$

Waarin  $D$  de dikte van de watervoerende laag.

## 5 Exacte analytische doorrekening Ernst (1962, fig. 7)

Het is interessant om een poging te ondernemen om de doorsnede in fig. 7 in Ernst (1962) ook analytisch exact door te rekenen. Daarvoor nemen we eerst fig.7b en fig.7c samen. De potentiaal  $\Phi = k\phi$  ten opzichte van punt  $x = b, y = 0$  hebben we boven reeds afgeleid

$$\Phi = \frac{N}{2D} (b^2 - x^2) + \frac{N}{2D} y^2$$

met complexe coördinaat wordt dit

$$\Phi = \frac{N}{2D} [b^2 - \Re(Z^2) + \Im(Z^2)]$$

De stroomfunctie is :

$$\Psi = \frac{N}{D} xy$$

immers

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= -qy = \frac{N}{D} y \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= +qx = \frac{N}{D} x \end{aligned}$$

Dus de complexe potentiaal van de stroming in de doorsnede is

$$\begin{aligned} \Omega &= \Phi + i\Psi \\ &= \frac{N}{2D} [b^2 - \Re(Z^2) + \Im(Z^2)] + i \frac{N}{D} \Re(Z) \Im(Z) \end{aligned}$$

Dit is geen mooie analytische functie, maar de stroming voldoet hieraan.

De stroming door contractie van stroomlijnen kan worden afgeleid van die waarbij een onttrekking ter grootte  $Q = Nb$  plaats vindt in  $x = b$ ,  $y = D$  in een half-oneindige doorsnede met  $x < b$ . Dit leidt op grote afstand tot een stroomdichtheid  $q_{b-x} = Q/D$  en een flux gelijk aan nul op de verticale stroomlijn onder de onttrekking. Wij willen dat de de stroming door de contractie van stromingen niet nul is maar juist precies die van de voorgaande oplossing (fig. 7b + 7c) neutraliseert en op grotere afstand gelijk aan nul wordt. Dit kunnen we doen door een negatieve uniforme stroming met stroomdichtheid  $q_x = -\frac{Q}{D} = -\frac{Nb}{D}$  te superponeren. De stroming door de genoemde onttrekking voldoet aan

$$\Omega_1 = -\frac{Q}{2\pi} \ln \left( \sin \left( i \frac{\pi}{2} \left( \frac{b-z}{D} - i \right) \right) \right)$$

De af te trekken uniforme stroming voldoet aan

$$\Omega_2 = Q \left( \frac{b-Z}{D} - i \right)$$

Fig. 6 geeft het resultaat van de doorrekening weer. De bovenste figuur is de weerslag van de contouren van  $\Phi$  en  $\Psi$  van  $\Omega_1$ . De flux door het bovenvlak  $q_z = -N$  en uniform, zodat de stroomlijnen alle het freatisch vlak op dezelfde onderlinge afstand snijden. Omdat langs het freatisch vlak de horizontale stroomdichtheid toeneemt van rechts naar links wordt de hoek die de stroomlijnen met het freatisch vlak maken steeds kleiner naarmate men verder naar rechts gaat. Op  $x = 0$  snijdt de stroomlijn het freatisch vlak loodrecht. De horizontale component van de stroming over de rechter rand bij  $x = b$  is over de hoogte constant en gelijk aan  $Nb/D$  de totale afvoer is  $Q = Nb$ . De afstand tussen de elk paar stroomlijnen op  $x = b$  is dus even groot. Aangezien de verticale stroomdichtheid op  $x = b$  niet nul is maken de stroomlijnen daar een hoek met de verticaal. Het is dus kraakhelder dat noch het bovenvlak noch het rechtervlak een potentiaallijn is. Bij standaard conforme afbeeldingen is dat meestal wel zo, maar deze complex potentiaal is niet analytisch in de zin van wiskunde van de complexe getallen maar hij bestaat wel.

De tweede figuur geeft de stroming door de onttrekking in  $x = b$ ,  $y = D$ , dat is  $\Omega_2$ , maar met daarop gesuperponeerd de uniforme tegenstroom  $\Omega_2$ . De stroom door de onttrekking  $Q = Nb$  in  $x = b$ ,  $y = D$  trekt water van links aan met stroomdichtheid  $q_x = Nb/D$  terwijl de horizontale stroming door deze onttrekking

op  $x = b$  gelijk aan nul is. De superpositie van de uniforme tegenstroom zorgt ervoor dat de stroming door de contractie van stroomlijnen op grote afstand van  $x = b$  nul wordt en maakt de horizontale stroomdichtheid op  $x = b$  exact gelijk aan de uitstromende flux in bovenste figuur. Het resultaat is in de tweede figuur weergegeven. De afstanden tussen de stroomlijnen zijn daarin exact gelijk aan die tussen de uitgaande stroomlijnen in de bovenste figuur.

Door de stroming (complex potentiaal) in figuur 1 en figuur 2 bij elkaar te tellen ontstaat het stroombeeld in de onderste figuur waarin alle stroming die via het neerslagoverschot over het freatisch vlak binnentreedt door de onttrekking in de rechter bovenhoek (de leiding) weer uitstroomt. Het beeld is hetzelfde als in fig. 2 dat is berekend met een eindig differentieelmodel.

De weerstand door contractie van stroomlijnen volgt dus geheel uit de tweede figuur in fig.6.

$$\Omega_1 = -\frac{Q}{2\pi} \ln \left( \sin \left( i \frac{\pi}{2} \left( \frac{b-z}{D} - i \right) \right) \right) + Q \left( \frac{b-Z}{D} - i \right)$$

$$\Omega_r = -\frac{Q}{2\pi} \ln \left( \sin \left( i \frac{\pi}{2} \left( -\frac{r}{D} e^{iQ/\pi} \right) \right) \right) + Q \frac{r}{D} e^{i\frac{Q}{\pi}}$$

De limiet voor  $\Omega_r$  vlakbij  $z = b + iD$  en opzichte van het punt  $z = b + 0i$  blijkt

$$\boxed{\Omega_{r \rightarrow 0} = -\frac{Q}{2\pi} \left[ \ln \frac{r}{D} + i\theta \right], \text{ voor } z \rightarrow b + iD} \quad (10)$$

## Referenties

[Ernst (1962)] Ernst, L.F. (1962) Grondwaterstromingen in de verzadigde zone en hun berekening bij de aanwezigheid van horizontale evenwijdige leidingen. Verslagen van de landbouwkundige onderzoeken. Pudoc Nr. 67.15, Wageningen. 189p.

## 6 Afleiding van de limiet

De limiet in vergelijking 10 kan als volgt worden afgeleid:

$$\Omega_1 = -\frac{Q}{2\pi} \ln \left( \sin \left( i \frac{\pi}{2} \left( \frac{b-z}{D} - i \right) \right) \right) + Q \left( \frac{b-z}{D} - i \right)$$

Met  $z = b$  gaat het argument van de sinus over in

$$\frac{b-z}{D} - i = -i$$

$$i \frac{\pi}{2} (-i) = \frac{\pi}{2}$$

Dus

$$\sin \left( \frac{\pi}{2} \right) = 1$$

Hiermee valt de logaritme weg

$$\ln(1) = 0$$

De lineaire term

$$Q \left( \frac{b-b}{D} - i \right) = -Qi$$

Aldus wordt de referentie waarde

$$\boxed{\Omega_1(b) = -Qi}$$

Definieer de referentiepotentiaal

$$\tilde{\Omega}_1(z) = \Omega_1(z) - \Omega_1(b)$$

Hierdoor valt de arbitraire constante weg waarna slechts fysisch betekenisvolle termen over blijven  
Vul de lokale expansie nabij  $z = b + iD$  in.

$$z = b + iD + \rho, \quad \rho = re^{i\theta},$$

we hadden:

$$\Omega_1 = -\frac{Q}{2\pi} \left[ \ln \rho + \ln \left( \frac{\pi}{2D} \right) + i \frac{\pi}{2} \right] - 2Qi + o(1)$$

Aftrekken van  $-Qi$  geeft:

$$\tilde{\Omega}_1 = -\frac{Q}{2\pi} \ln \rho - \frac{Q}{2\pi} \ln \left( \frac{\pi}{2D} \right) - i \frac{Q}{2\pi} \theta - i \frac{Q}{4} - Qi - o(1)$$

Alle imaginaire constanten zijn irrelevant voor de stijghoogte, alleen de reële waarden doen er toe.  
Neem het reële deel en vul in  $\rho = re^{i\theta}$ :

$$\Re(\tilde{\Omega}_1) = -\frac{Q}{2\pi} \left[ \ln r - \ln D + \ln \left( \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

Ordenen:

$$\boxed{\Phi = -\frac{Q}{2\pi} \ln \left( \frac{r}{D} \right) + \text{constante}}$$

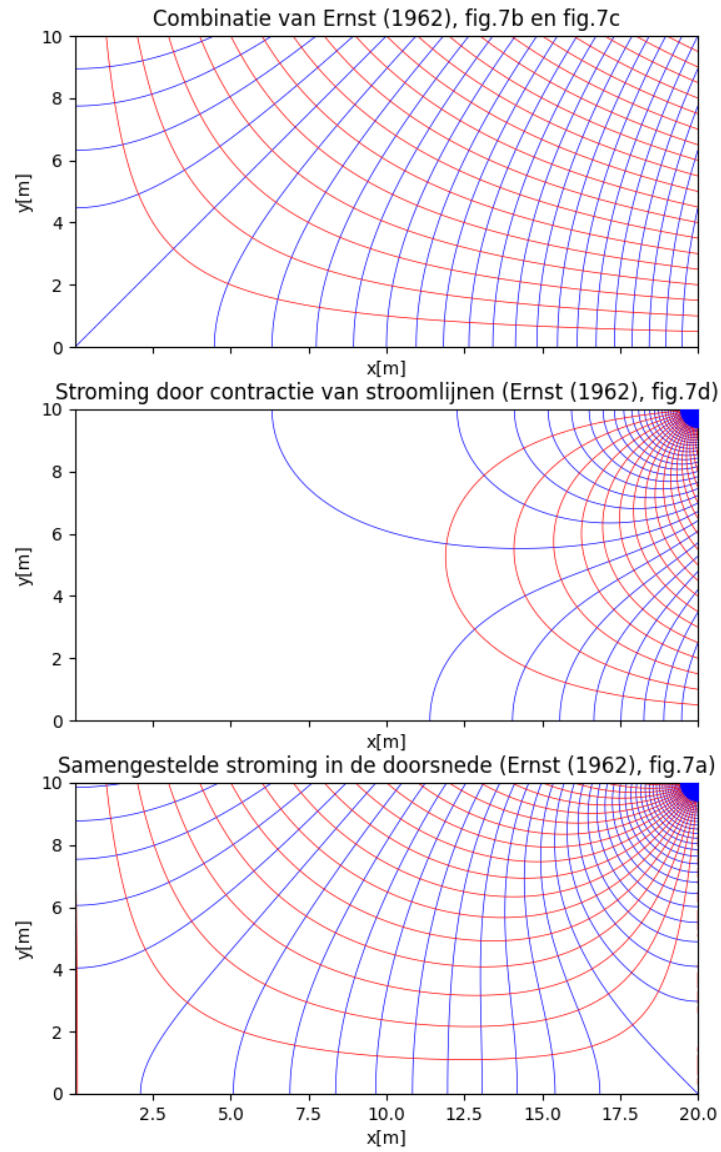
Zoals verwacht: De schaal van de singulariteit is  $r$ , de natuurlijke referentie is  $D$  en alle van de geometrie afhankelijke constanten vallen samen in een additieve constante.

De uiteindelijke vorm na weglaten van irrelevante constanten geeft

$$\boxed{\tilde{\Omega}_1 \sim -\frac{Q}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{r}{D} \right) + i\theta \right], \quad z \rightarrow b + iD}$$

Dit de de logaritmische singulariteit uit het leerboek.

Exacte anal. doorrek. vd samengestelde stroming volgens Ernst (1962, fig.7)  
 $b=20$  m,  $D=10$  m,  $N=0.001$  m/d,  $k=1$  m/d,  $Q=Nb=0.02$  m<sup>2</sup>/d



Figuur 6: Ernst fig. 7 analytisch doorgerekend.