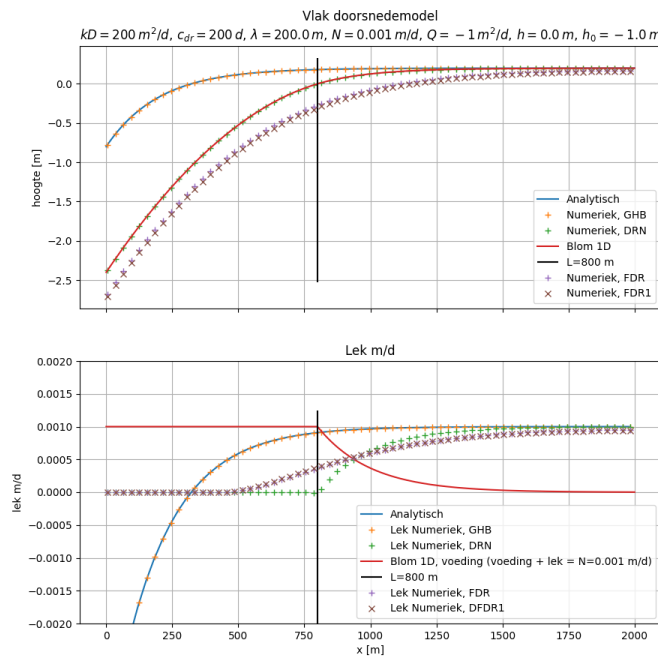


Verlaging in een gebied met vrije afwatering

T.N.Olsthoorn

08-04-2025



Inhoudsopgave

1	Samenvatting en conclusies	4
I	Context en historie	6
2	Intro	6
3	Aanpak van Blom / Ernst	6
4	Modflow	7
II	Afleiding van de vrije drainage	9
5	Intro	9
6	De lek vanuit het grondwater naar de sloten	9
7	Relatie tussen slootpeil en afvoer	9
8	De drainageweerstand opgelegd als wiskundige functie	11
8.1	Eliminatie van het variabele slootpeil h	11
8.2	Voorkom dat $\phi - h_0$ negatief wordt, daarmee dat q negatief kan worden	12
9	Fysieke drainageweerstand op basis van veldgegevens	13
10	De radiale weerstand door contractie van stroomlijnen	13
10.1	Natte slootonttrek Ω bij parabolisch slootprofiel	14
10.2	Elimineren van de slootwaterstand h uit de vergelijking van de lek	15
10.3	Voorkom dat Ω nul wordt wanneer $y < 0$.	16
III	Implementatie in Fdm3	18
11	Intro	18
12	Stabiliteit van het rekenproces	18
13	Andere niet-lineaire randvoorwaarden	19
14	Verkrijgen van de parameters nodig voor de simulatie van vrije drainage	19
15	Implementatie van vrije afwatering in Modflow	21
IV	Testen van het model	25
16	Vergelijking van modellen met verschillende randvoorwaarden	25
17	Vlakke en axiaal symmetrische doorsnede modellen met verschillende randvoorwaarden	25
18	Vergelijking tussen GHB- en DRN-randvoorwaarden	26
18.1	De vlakke (1D) doorsnede	26
18.2	De axiaal-symmetrische doorsnede	27

19 Simulatie met vrije afwatering of vrije drainage	29
19.1 De vlakke 1D doorsnede	29
19.2 De axiaal-symmetrische doorsnede	32
20 Inclusief de Modflow manier met meerdere drainniveau's binnen een rekencel	37
Referenties	38

1 Samenvatting en conclusies

Er zijn veel gebieden met vrije drainage, meestal lagere waarin het oppervlaktewater grondwater afvoert afkomstig van aangrenzende hoger gelegen gebieden met diepere grondwaterstanden waarin geen oppervlaktewater aanwezig is. beekdalen zijn hiervan een voorbeeld, maar ook oorspronkelijke moerassen, waar het neerslagwater niet diep kan infiltreren maar min of meer direct via het oppervlaktewaterstelsel wordt afgevoerd. Waar geen water extern kan worden aangevoerd, is de afvoer van het oppervlaktewater volledig afhankelijk van de aanvoer van grondwater. Deze afvoer ademt mee met fluctuerende grondwaterstanden die kenmerkend zijn voor de verschillende seizoenen en is bovendien gevoelig voor verlaging van diezelfde grondwaterstanden door onttrekkingen voor uiteenlopende doelen als drinkwatervoorziening, bemaling of irrigatie. Zulke gebieden met vrije drainage zijn kwetsbaar voor menselijk ingrijpen en dat geldt uiteraard ook voor de daarin aanwezige natuur.

Het berekenen of modelleren van de verlaging van de grondwaterstanden en de afvoer in zulke gebieden is minder recht-toe-recht-aan omdat met de daling van de grondwaterstand niet alleen de afvoer zelf afneemt, maar ook het waterpeil in de open waterlopen. Het slootpeil stijgt en daalt daar met de grondwaterstand en daarmee met de lek naar de sloten, terwijl infiltratie vanuit de sloten in vrij afwaterende gebieden niet mogelijk is. De gebruikelijke modellering gaat uit van een vaste drainagebasis. Omdat de drainagebasis, dat wil zeggen het slootpeil, in vrij afwaterende gebieden meezakt met de verlaging van de grondwaterstand is de verlaging van de grondwaterstand zelf ook groter dan bij vaste drainagebasis het geval zou zijn. Het zal dus voor een adequate modellering van belang zijn hier rekening mee te houden. Hoewel voor situaties met vaste drainagebasis analytische oplossingen (berekeningen) mogelijk zijn, is dat voor situaties met variabele drainagebasis niet het geval. We kunnen deze alleen modelleren met een grondwatermodel waarin het gedrag van het slootpeil is verdisconteerd.

Meenemen van het gedrag van het oppervlaktewater is slechts beperkt mogelijk zonder het grondwatermodel te koppelen aan een oppervlaktewatermodel dat behalve met de lokale afvoer naar de sloten ook rekening houdt met wat bovenstrooms gebeurt, zodat water dat bovenstrooms naar het oppervlaktewater lekt eventueel benedenstrooms kan infiltreren. Een dergelijke aanpak gaat hier veel te ver. Daarom wordt in dit document het slootpeil afhankelijk gemaakt van de lek ter plekke zonder te kijken naar het gehele bovenstroomse gebied. Dit is een benadering die in de praktijk veelal voldoende zal zijn.

Drainage leidt tot een grondwaterstand-afvoerrelatie. Bij een vast drainpeil en vaste drainageweerstand is dat een verticale lijn zolang het grondwater zich beneden het drainagepeil bevindt (dat wil zeggen geen afvoer) en een rechte schuine lijn wanneer de grondwaterstand zich ter plaatse boven het drainagepeil bevindt (dat wil zeggen vaste drainageweerstand). In de praktijk kan de drainageweerstand afnemen met toenemende grondwaterstand, waar door de grondwaterstand-afvoerrelatie een kromme lijn wordt. Dit is ook het geval bij vrije drainage. De afvoer neemt dan lineair toe met de grondwaterstand, zodra de grondwaterstand zich boven de slootbodem bevindt. Het slootpeil speelt dan geen rol meer in de modellering, die is als het ware uit de vergelijking geëlimineerd. Vrije drainage kan zodoende met een standaard model zoals Modflow worden gesimuleerd door de drainageweerstand te laten afnemen met de grondwaterstand, via een op deze wijzen vastgelegde grondwaterstand-afvoerrelatie ([Langevin et al. (2017)]).

Dit document leidt de vrije drainage uit vanaf de basis, wat leidt tot modelrandvoorwaarden voor de vrije drainage die direct in een model kunnen worden geïmplementeerd en arbitraire keuzen voor de grondwaterstandafvoerrelatie zoveel mogelijk elimineren. Bovendien wordt uitgegaan van gegevens die gemakkelijk in het veld kunnen worden vastgesteld. Deze gegevens zijn grondwaterstand, slootpeil, slootdiepte, en neerslagoverschot in de referentiesituatie, dus meestal de gemiddelde situatie en wanneer de drainageweerstand wordt berekend uit slootprofiel en slootbreedte ook de slootbreedte en de gemiddelde slootafstand. Dit impliceert dat de afgeleide en geïmplementeerde vrije drainage in twee variëteit komt: A) waar de drainageweerstand wiskundig is opgelegd en B) waar deze wordt berekend uit slootprofiel en slootdiepte. Uiteindelijk zal het verschil tussen beide varianten niet groot blijken te zijn, maar het verschil met de situatie met vaste drainagebasis is dat wel.

De vrije drainage is geïmplementeerd in een eindig differentie model, als een type randvoorwaarde met de naam FDR (free drainage) naast de bekende typen GHB (general head boundaries), DRN (drain boundaries) en RIV (river boundaries). Hiermee zijn de resultaten met verschillende randvoorwaarden gemakkelijk onderling te vergelijken in de voorbeelden in dit document. De afgeleide en geïmplementeerde randvoorwaarde voor vrije drainage kunnen direct in Modflow worden geïmplementeerd als een afzonderlijk package.

De relatie tussen grondwaterstand en afvoer die de vrije drainage kenmerkt kan in Modflow ook worden opgelegd door deze op te leggen als een gebroken lijn in de DRN module van Modflow zelf. De afleiding in dit document helpt dan bij de keuze van deze lijn.

In het algemeen is het belangrijk om vrije drainage mee te nemen in de modellering van gebieden met oppervlaktewater dat meeademt met de grondwaterstand, waarin grondwater alleen kan worden afgevoerd maar niet aangevoerd. Dit kan alleen goed worden gemodelleerd met een grondwatermodel aangezien er geen analytische oplossingen bestaan die vrije drainage meenemen. Het grondwatermodel moet dit dan wel kunnen. De in dit document uitwerkte aanpak doet dit transparant op natuurlijke wijze en blijft zoveel weg van arbitraire keuzen. Door bij de afleiding uit te gaan van gemakkelijk uit het veld verkrijgbare gegevens, is implementatie in de praktijk transparant en eenvoudig. Het is ten alle tijde mogelijk om de resultaten te vergelijken met die van vaste drainage of de analytische oplossingen die daar wel voor beschikbaar zijn.

Deel I

Context en historie

2 Intro

In een gebied met vrije afwatering, dus zonder de mogelijkheid van kunstmatige toevoer van extern water of van peilbeheer, hangt het slootpeil van de afvoer af, dat wil zeggen van de lek van het grondwater naar de sloten. Zonder afvoer zijn de sloten droog en bij gemiddelde afvoer is er een gemiddeld slootpeil. Hiervan kan een drainageweerstand worden afgeleid, zijnde de gemiddelde stijghoogte van het grondwater boven het gemiddelde slootpeil gedeeld door de gemiddelde afvoer; deze is in de regel gelijk aan het neerslagoverschot, en waar van toepassing vermeerderd met de kwel.

Bij verlaging van de grondwaterstand, of dit nu komt door natuurlijke processen of door grondwateronttrekking of peilwijziging, daalt de afvoer en dus ook het slootpeil. Om het grondwater in een gebied met vrije afwatering adequaat te kunnen modelleren zou een grondwatermodel moeten worden gekoppeld aan een oppervlaktewatermodel. Een stap minder complex is om het verband tussen afvoer en slootpeil als een vaste relatie op te nemen in het grondwatermodel. Dat is wat in dit document wordt uitgewerkt.

Bij afnemende afvoer daalt het slootpeil om uiteindelijk, bij afvoer nul de slootbodem te bereiken. Hoe dat verband er precies uit ziet is niet bij voorbaat helemaal duidelijk, maar een verband zoals getekend in figuur 1 lijkt voor de hand te liggen. De daling verloopt steeds sneller naarmate de slootdiepte verder afneemt.

De drainageweerstand is de ruimtelijk gemiddelde grondwaterstand minus slootpeil (= de drainagebasis) gedeeld door de gebiedsafvoer, zoals het neerslagoverschot. Ook de drainageweerstand verandert met het slootpeil en dus met de afvoer. De drainageweerstand definiëren we voor het in de tijd gemiddelde neerslagoverschot, N , eventueel plus kwel. Hij wordt oneindig groot wanneer het stijghoogte en daarmee ook het slootpeil zijn gedaald tot op de slootbodem, en blijft dat zolang de grondwaterstand daaronder zit.

Men kan deze variabele drainageweerstand als een vaste relatie opleggen, zoals in het onderste plaatje van figuur 1 is weergegeven. Men kan de drainageweerstand echter ook berekenen op basis van het slootprofiel en de actuele slootdiepte. Deze fysische drainageweerstand bestaat uit een aantal bijdragen waarvan de radiale weerstand, die ontstaat door contractie van stroomlijnen in de richting van de sloot, mede wordt bepaald door de grootte van het natte contactvlak tussen sloot en watervoerend pakket. Bij daling van de grondwaterstand wordt dit contactvlak uiteindelijk nul, en de weerstand dus oneindig groot. Zoals uit de uitgewerkte voorbeelden zal blijken zit er niet heel veel licht tussen de uitkomsten berekend met een weerstand die als vaste wiskundige relatie wordt opgelegd en een weerstand die wordt berekend op basis van de grootte van genoemd contactvlak, dat afhangt van de waterstand in de sloot.

3 Aanpak van Blom / Ernst

[Blom (1973)] and Ernst ([Louwyck et al. (2022)]) behandelde vrije afwatering in eerste instantie als een gebied met een bepaalde vaste drainageweerstand, waarin hij de werking van het drainerende oppervlaktewater samenvatte. Bij een onttrekking ontstaat een binnengebied waarbinnen de grondwaterstand daalt tot beneden het niveau waarop de afwatering nul wordt, en een buitengebied waar het ontwateringsstelsel nog wel een deel van het neerslagoverschot afvoert. In het binnengebied voedt al het niet meer afgevoerde neerslagoverschot het grondwater, en in het buitengebied is dit een deel van het neerslagoverschot, dat bij een constante drainageweerstand evenredig is aan de verlaging. De grens tussen beide gebieden ligt waar de verlaging gelijk is aan Nc , het product van neerslagoverschot N en drainageweerstand c . De analytische formule die geldt voor de stroming in het binnengebied is dan die van Verruijt, dat wil zeggen Dupuit plus neerslagoverschot, en in het buitengebied die voor onttrekking aan semi-ge-spannen grondwater volgens [De Glee (1930)].

De hierboven beschreven benadering kan geheel analytisch worden opgelost, maar impliceert een lineair verband tussen verlaging en voeding en een vast peil van het oppervlaktewater, het drainagepeil of de drainagebasis, en een constante drainageweerstand zolang de grondwaterstand zich boven het drainagepeil bevindt. In een vrij afwaterend gebied zijn beide factoren echter niet constant. In de eerste plaats neemt de

drainagebasis, het slootpeil, toe met de afvoer. In de tweede plaats verandert het slootprofiel met het slootpeil en is derhalve ook de uittreeweerstand, en daarmee de drainageweerstand niet constant. In het laatste deel van zijn rapport gaat [Blom (1973)] daarom uit van een parabolisch verloop van de drainageweerstand en de drainagebasis met de afvoer. Hij ijkt deze aan het grondwaterstandsafvoerterloop voor enkele vrij afwaterende gebieden in de provincie Drenthe en toetst dit aan een model waar deze parabolische, dus niet lineaire, benadering was ingebouwd. Voor deze niet-lineaire relaties waren en zijn geen analytische oplossingen bekend, waardoor op een numeriek model moest worden teruggevallen.

4 Modflow

In de afgelopen 50 jaar later hebben we veel ervaring opgedaan met numerieke modellen van verschillende snit. Het meest gebruikte model, dat ook veel opties heeft voor randvoorwaarden is Modflow. De nieuwste versie, Modflow6, heeft intern een aanpak die het convergentiegedrag sterk verbetert ten opzichte van voorgaande versies, waarin met name het droogvallen en/of nat worden van oorspronkelijk droge rekencellen frequent leidde tot het niet convergeren van de numerieke oplossing. Dat is nu verleden tijd. Maar al vanaf de eerste versie van Modflow, uit 1988, had het programma opties voor drains die alleen afvoeren wanneer de grondwaterstand hoger is dan het niveau van de drains, en voor rivieren waarin, zodra de stijghoogte daalt tot beneden de rivierbodem, de infiltratie een maximum bereikt dat verder constant blijft. Beide stijghoogterandvoorwaarden zijn niet-lineair omdat bij infiltratie de voeding wordt beperkt of gelijk aan nul wordt. Tegenwoordig kan de infiltratieweerstand bij drains in Modflow afhankelijk worden gemaakt van de waterstand boven de drains. Daarmee kan een niet-lineaire grondwaterstandafvoerrelatie worden gesimuleerd, die overeen komt met een afvoerstelsel bestaande uit sloten uit verschillende categorieën, dus met verschillende breedtes en dieptes.

Met al deze opties is het wel mogelijk om de drainage- of lekweerstand te afhankelijk te maken van de stijghoogte, maar nog steeds is het drainageniveau daarbij constant, terwijl dat in de praktijk zeker niet zo is. Hierna zal met name dit aspect van vrij afwaterende gebieden worden meegenomen in de analyse.

Wanneer we de eerste aanpak van Blom vergelijken met wat we in Modflow met de optie van drains kunnen doen, zal duidelijk worden dat beide identiek zijn. In een vlak Modflowmodel dat is belegd met drains met een weerstand die overeenkomt met de drainageweerstand en wordt belast met een constant neerslagoverschot, voert elke draincel exact dit neerslagoverschot af en wordt de stijghoogte uniform gelijk aan $\phi = h_{\text{drain}} + Nc$. Voegen we een onttrekking toe, dan daalt de afvoer in evenredigheid met de verlaging en de drainageweerstand, behalve voor rekencellen waarin de verlaging groter is dan Nc . Daar valt de afvoer nu geheel weg en is de netto voeding aan het pakket gelijk aan N geworden. Dit is exact de werking volgens het schema van [Blom (1973)] en is derhalve al vanaf de eerste versie van Modflow in het programma aanwezig.

Het gebruik van de optie DRN in Modflow, is dus geschikt voor het implementeren van afvoer van sloten zodra de grondwaterstand boven het drainniveau uitkomt. Voor het regelen van de infiltratie van sloten werkt dit niet. In de praktijk is de uittreeweerstand van sloten een stuk kleiner dan de intreeweerstand. In Modflow kunnen we met de „general head boundary” optie (GHB) een uitwisseling tussen het model en een slootpeil simuleren die evenredig is met het stijghoogteverschil gedeeld door de weerstand. Bij de GHB optie wordt geen onderscheid gemaakt tussen infiltratie vanuit en exfiltratie naar sloten. Door de GHB optie te combineren met de DRN optie kan in Modflow uitwisseling met sloten worden gesimuleerd, waarbij de uittreeweerstand lager is dan de intreeweerstand. Dit wordt in de modelleringspraktijk vaak toegepast. Voor vrij afwaterende gebieden waarin geen aanvoer van buiten mogelijk is, en geen peil in de sloten kan worden gefixeerd, is dit niet aan de orde. De RIV optie in Modflow werkt als de GHB optie zolang de grondwaterstand hoger is dan de rivierbodem. Bij stijghoogten beneden de rivierbodem blijft de infiltratie gelijk aan die bij het bereiken van de rivierbodem. Dit weerspiegelt een onverzadigde zone die daarbij onder de rivierbodem ontstaat. Zet men in de RIV optie de waterstand in de rivier gelijk aan de hoogte van de rivierbodem, dan werkt deze identiek aan de DRN optie. Door beide te combineren kan men de drainageweerstand op een gewenst niveau laten verspringen. Volledige vrijheid ontstaat wanneer men meer DRN opties binnen een enkele cel mag toepassen. Hetzelfde wordt bereikt door in Modflow gebruik te maken van de optie om de relatie tussen afvoer en stijghoogte als een gebroken lijn op te leggen. Deze veralgemeniseerde DRN-optie is minder kunstmatig en geeft meer flexibiliteit. Maar geen van deze opties biedt de mogelijkheid

om ook het drainageniveau zelf te laten oplopen met de afvoer/kwel.

Deel II

Afleiding van de vrije drainage

5 Intro

We zullen hierna op een natuurlijke wijze de relatie tussen stijghoogte, slootpeil en afvoer afleiden en implementeren. We gaan hierbij uit van gegevens die direct vanuit de veldsituatie op een gemakkelijke manier kunnen worden verkregen. Dit betreft de stijghoogte, het slootpeil, en het neerslagoverschot in de gemiddelde, zeg referentie-situatie, en voorts de hoogte van de slootbodem. In de variant waarin we de drainageweerstand berekenen op basis van het slootprofiel komen daar de slootbreedte en de gemiddelde slootafstand nog bij. Dit zijn allemaal gegevens die direct in het veld kunnen worden vastgesteld. Dit leidt tot een nieuwe optie, FDR gedoopt, wat staat voor Free Drainage, die aan Modflow kan worden toegevoegd, maar voorlopig nog alleen aanwezig is in een eigen implementatie (Github).

6 De lek vanuit het grondwater naar de sloten

Kern van de vrije drainage is de lek of uittrede van het grondwater naar de sloten in een gebied. Deze kan per eenheid van gebiedsoppervlak worden beschreven met

$$q = \frac{\phi - h}{c}$$

Hierin is q de afvoer per oppervlakteëenheid, ϕ de grondwaterstijghoogte, h het slootpeil (= de drainagebasis) en c de uittree-, drainage- of lekweerstand, die hier als identiek worden beschouwd. Het slootpeil en de lekweerstand hangen in vrij afwaterende gebieden van de afvoer q [m/d] naar de sloten af, zodat

$$q = \frac{\phi - h(q)}{c(q)}$$

Door de relaties $h(q)$ en $c(q)$ in een grondwatermodel te gebruiken, kan het grondwatermodel rekening houden met natuurlijke afwatering. Voorwaarde is wel dat het grondwatermodel met deze niet-lineaire relaties convergeert.

We zullen verderop zien dat het variabele slootpeil h kan worden geëlimineerd ten gunste van het vaste niveau van de slootbodem h_0 .

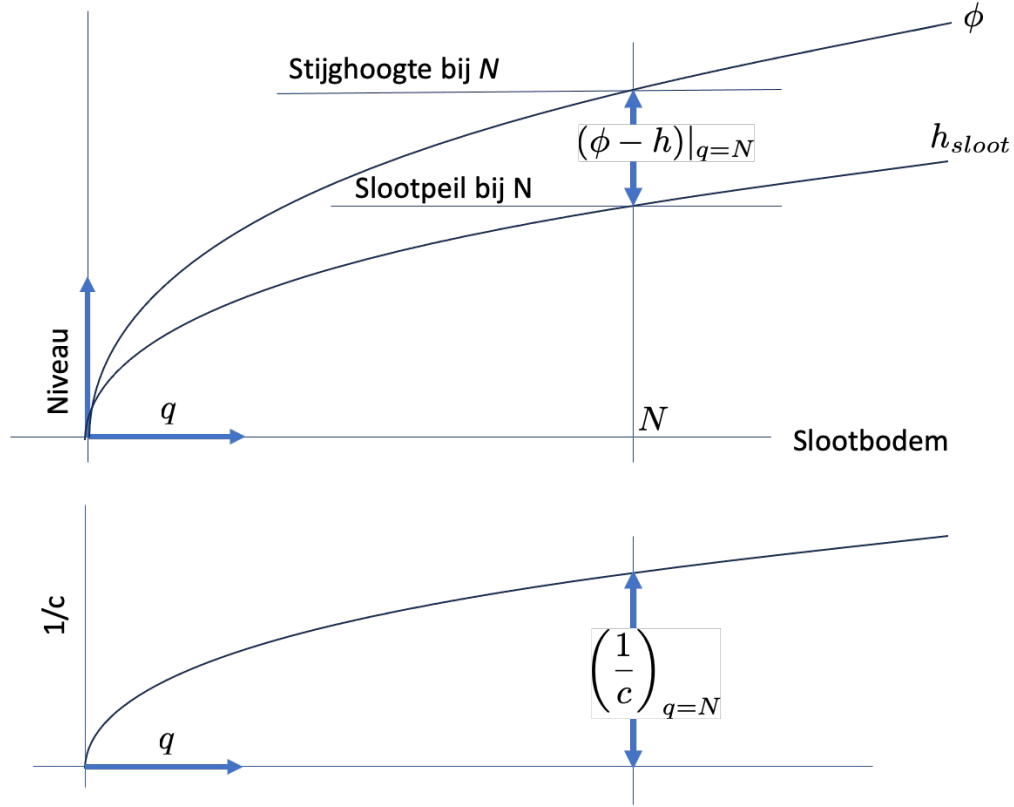
Figuur 1 geeft in het bovenste plaatje de situatie weer. Bij toenemende stijghoogte nemen het slootpeil en de afvoer volgens een bepaald verband toe. We kiezen de gemiddelde afvoer $q = N$ als referentie omdat we deze situatie direct in het veld kunnen waarnemen.

7 Relatie tussen slootpeil en afvoer

De vraag is hoe de relatie tussen slootpeil en afvoer eruit zou moeten zien. Met afvoer zou taalkundig de afvoer in de langsrichting van de sloot kunnen worden bedoeld, die uiteraard sterk afhankelijk is van de afvoer uit bovenstrooms gebied. Daar kan echter alleen rekening mee worden gehouden door het grondwatermodel direct te koppelen aan een model voor het oppervlaktewater. Dat voert hier veel te ver.

In dit document wordt met afvoer de kwel of lek of drainage bedoeld vanuit het watervoerend pakket naar het oppervlaktewater, die in een vrij afwaterend gebied optreedt zodra de grondwaterstand boven de slootbodem uitstijgt. We zullen de afvoer vlakdekkend interpreteren, zodat we geen individuele sloten hoeven mee te nemen in de analyse. Zo'n beperking is voor het eindige differentie model niet van toepassing.

We mogen ervan uitgaan dat het gemiddelde slootpeil van een te modelleren gebied bekend is. Het slootpeil mag ook zonder bezwaar ruimtelijk variëren. We gaan er voorts van uit dat we dit slootpeil kunnen relateren aan de gemiddelde afvoer, en dat die gemiddelde afvoer gelijk is aan het neerslagoverschot N [L/T], eventueel vermeerderd met kwel K [L/T]. De drainageweerstand c [T] bij deze afvoer is eveneens bekend



Figuur 1: Relatie stijghoogte, slootpeil, drainageweerstand en afvoer.

want die is gelijk aan $(\phi_N - h_N)/(N + K)$, met ϕ_N de grondwaterstijghoogte in de referentiesituatie en h_N het daarbij horende slootpeil. We laten verder de kwel buiten beschouwing omdat we die later altijd bij het neerslagoverschot kunnen optellen in situaties waar kwel een wezenlijke rol speelt. Het tweede punt van het gezochte verband tussen slootpeil en afvoer, is het punt waar slootpeil en slootbodem samenvallen, het punt dus waar de sloot droog valt. Het ligt voor de hand dat het verband tussen afvoer en slootpeil vlakbij de slootbodem $h \downarrow h_0$ zeer steil zal verlopen. Het meest eenvoudige wiskundig verband dat aan de gegeven criteria voldoet is de wortel-functie

$$h = h_0 + \eta\sqrt{q}$$

Met $y = h - h_0$, de slootdiepte, geldt dan

$$y = \eta\sqrt{q}$$

Deze relatie is niet direct fysiek; het is een wiskundige benadering. Immers een fysiek verband tussen afvoer en slootdiepte kan niet worden vastgesteld zonder daarvoor ook het stroomopwaartse deel van het oppervlaktewaterstelsel te modelleren, inclusief de relatie met het grondwater dat dit oppervlaktewater over zijn totale lengte voedt. Dit is in de praktijk niet mogelijk en al helemaal niet zonder daarvoor een uitgebreid oppervlaktewatermodel op te zetten, dit te koppelen met grondwater en te ijken. Zoiets valt volledig buiten de context van deze analyse en van de meeste andere projecten met interactie tussen grond- en oppervlaktewater. Dus het geschetste en plausibel gemaakte wiskundig verband tussen slootdiepte en afvoer is uitgangspunt van deze analyse, het veronderstelt dat de relatie tussen slootwaterstand en afvoer tevredenstellend kan worden benaderd met uitsluitend het gegeven verband tussen slootdiepte en lek van het grondwater naar het oppervlaktewater.

Dit gezegd hebbende, kan de coëfficiënt η berekend worden uit de bekende lek in de gemiddelde situatie, de referentiesituatie, waarbij een eveneens bekende slootdiepte y_N hoort.

Wanneer gemiddeld $q = N$ geldt, hebben we het bijbehorende slootpeil $h = h_N$, waaruit coëfficiënt η volgt

$$y_N = \eta\sqrt{N} \rightarrow \eta = \frac{y_N}{\sqrt{N}}$$

Wanneer de referentiesituatie hoort bij een andere afvoer, zoals in een kwelgebied, dan moet die afvoer voor N worden ingevuld, waarvan wordt aangenomen dat die bekend is uit andere gebiedsgegevens. Beschouw eenvoudig overal waar N wordt gebruikt de gebezigde formules als behorend tot de referentiesituatie, die zonodig over een gebied varieert.

8 De drainageweerstand opgelegd als wiskundige functie

Voor de reciproke drainageweerstand $\frac{1}{c}$ kan eenzelfde redenering worden losgelaten als hiervoor voor het waterpeil in de sloot in gedaan. Deze drainageweerstand $c_N = Nc$ is bekend voor $q = N$, terwijl deze reciproke weerstand $\frac{1}{c}$ naar nul gaat voor afnemende slootdiepte $y \downarrow 0$. We krijgen hiermee eenzelfde eenvoudig wiskundig verband tussen de reciproke drainageweerstand en afvoer als we hiervoor kregen tussen slootpeil en afvoer

$$\frac{1}{c} = \frac{\sqrt{q}}{\gamma}$$

Met bekende waarden $c = c_N$ voor $q = N$ volgt de coëfficiënt γ uit

$$\frac{1}{c_N} = \frac{\sqrt{N}}{\gamma} \rightarrow c_N = \frac{\gamma}{\sqrt{N}} \rightarrow \gamma = c_N\sqrt{N}$$

Wanneer we de waarde van de drainageweerstand bij gemiddelde afvoer in het veld kunnen vaststellen, hebben we dus ook de waarde van de gezochte coëfficiënt γ .

Dit verband is in het onderste plaatje van figuur 1 weergegeven.

De drainageweerstand kan in het veld worden vastgesteld in de gemiddelde situatie op basis van de gebiedsgemiddelde grondwaterstand, het slootpeil (de drainagebasis) en de eveneens gemiddelde afvoer N

$$c_N = \frac{\phi_N - h_N}{N}$$

Met deze twee wiskundige relaties, en de op basis van gemakkelijk verkrijgbare veldwaarnemingen vastgestelde waarden voor de coëfficiënten η en γ , is het grondwatermodel voor de vrije afwatering volledig bepaald. Verderop zullen we ook de situatie analyseren waarin het verband tussen afvoer en drainageweerstand op basis van het fysieke slootprofiel wordt bepaald en dit niet direct mathematisch wordt opgelegd.

8.1 Eliminatie van het variabele slootpeil h

De afvoer q [m/d] is gelijk aan grondwaterstand ϕ [m] minus slootpeil h [m] gedeeld door de drainageweerstand c [d]. De laatste varieert met de grondwaterstand. We kunnen het variabele slootpeil echter uit de vergelijkingen elimineren, waarna de afvoer kan worden berekend op basis van de grondwaterstand minus de constante slootbodenhoopte h_0 . Dit vereenvoudigt de implementatie in hoge mate.

We kunnen de slootdiepte $y = h - h_0$ invullen in de formule die de lek naar het oppervlaktewater beschrijft

$$q = \frac{\phi - h}{c} = \frac{\sqrt{q}}{\gamma} (\phi - h_0 - (h - h_0)) = \frac{\sqrt{q}}{\gamma} (\phi - h_0 - y)$$

Dus geldt

$$q = \frac{\sqrt{q}}{\gamma} (\phi - h_0) - \frac{\sqrt{q}}{\gamma} y$$

Met $y = \eta\sqrt{q}$ volgt

$$q = \frac{\sqrt{q}}{\gamma} (\phi - h_0) - \frac{\eta}{\gamma} q$$

ofwel

$$q = \frac{\sqrt{q}}{\gamma + \eta} (\phi - h_0)$$

Zodat de afvoer q nu een functie is van $\phi - h_0$ en niet meer van $\phi - h$ en waarin de drainageweerstand is vervangen door

$$c = \frac{\gamma + \eta}{\sqrt{q}}$$

We kunnen een stap verder gaan en \sqrt{q} elimineren uit de vergelijking van de afvoer door \sqrt{q} naar links te brengen

$$\sqrt{q} = \frac{1}{\gamma + \eta} (\phi - h_0)$$

en beide zijden te kwadrateren, zodat

$$q = \frac{(\phi - h_0)}{(\gamma + \eta)^2} (\phi - h_0)$$

Waarin de coëfficiënt voor de factor $\phi - h_0$ de rol speelt van reciproke weerstand

$$\frac{1}{c} = \frac{\phi - h_0}{(\gamma + \eta)^2} = \frac{\sqrt{q}}{\gamma + \eta}$$

Beide rechter uitdrukkingen zijn equivalent en hangen af van de actuele grondwaterstand ϕ , of van de lek q . Deze weerstand is duidelijk niet constant. De uitdrukkingen geven aan dat deze reciproke weerstand negatief zou worden wanneer de stijghoogte tot onder de slootbodem zakt terwijl \sqrt{q} dan onbepaald is. Het is duidelijk dat de reciproke weerstand en de afvoer in dat geval gewoon nul moeten blijven. Bij de implementatie zullen we ervoor zorgen dat reciproke weerstand niet negatief kan worden. We doen dit door deze snel en asymptotisch naar nul te laten gaan beneden een stijghoogte die slechts een fractie (bijv. 1 cm) boven de slootbodem is.

8.2 Voorkom dat $\phi - h_0$ negatief wordt , daarmee dat q negatief kan worden

In het model kan de stijghoogte lager worden dan de slootbodem. In dat geval wordt hierboven een negatieve waarde van de drainageweerstand worden berekend, wat fysisch niet mogelijk is en bovendien botst met de berekening van \sqrt{q} . We hebben hier dus een functie $u = v$ waarbij $u = \phi - h_0$ die niet negatief mag worden voor $u < \hat{u}$ met \hat{u} een kleine positieve waarde . Dit kunnen we bereiken door de functie $u = v$ voor $u < \hat{u}$ continu over te laten gaan in een positieve functie die asymptotisch naar nul gaat. Zo'n functie is $u = \delta e^{\frac{v}{\lambda}}$. We hebben zo

$$\begin{aligned} u &= v, \text{ voor } u > \hat{u} \\ u &= \delta e^{\frac{v}{\lambda}} \text{ voor } u \leq \hat{u} \end{aligned}$$

Waarbij δ de waarde van u is voor $v = 0$. δ volgt uit de keuze van \hat{u} . Voor de vereiste continuïteit moeten op het punt \hat{v} zowel beide functies als hun afgeleide aan elkaar gelijk zijn. Aldus geldt op dat punt

$$\begin{aligned} \delta e^{\frac{\hat{v}}{\lambda}} &= \hat{v} \\ \frac{\delta}{\lambda} e^{\frac{\hat{v}}{\lambda}} &= 1 \end{aligned}$$

Delen van deze vergelijkingen op elkaar geeft

$$\lambda = \hat{v}$$

\hat{v} ingevuld in de eerste vergelijking levert δ

$$\lambda = e\delta$$

Waarin δ een gekozen klein getal is, met de dimensie [L]. Kiezen we δ , de waarde van de nu continue functie bij $v = 0$, en ligt λ vast en ook het overgangspunt $\hat{u} = \hat{v}$.

9 Fysieke drainageweerstand op basis van veldgegevens

In het voorgaande hoofdstuk was de drainageweerstand opgelegd als wiskundige functie die weliswaar plausibel is gemaakt maar niettemin geen fysiek verband had met de werkelijke stroming in de ondergrond. In dit hoofdstuk wordt de drainageweerstand gedefinieerd op basis van de grondwaterstroming in de ondergrond en het slootprofiel. Dit is de fysieke benadering van de drainageweerstand.

De fysieke drainageweerstand bestaat verschillende onderdelen, namelijk de weerstand door horizontale stroming, die door verticale stroming en die door de contractie van de stroomlijnen in de richting van de sloot, de radiale weerstand. De weerstand door slib op de slootbodem speelt bij uittredend grondwater geen rol.

Opgesplitst naar deze drie termen wordt de drainageweerstand als volgt

$$c = \frac{L^2}{12k_x D} + \frac{D}{2k_z} + \frac{L}{\pi k} \ln \left(\frac{D}{\Omega} \right)$$

We bekijken hierna eerst de radiale weerstand en passen die vervolgens in de totale drainageweerstand, die we weer baseren op gemakkelijk verkrijgbare veldgegevens.

10 De radiale weerstand door contractie van stroomlijnen

De radiale weerstand met $c_{r,\Omega}$ is gelijk aan ([Huisman (1972)])

$$c_{r,\Omega} = \frac{L}{\pi k} \ln \left(\frac{D}{\Omega_{\beta,y}} \right)$$

Hierin is L de gemiddelde slootafstand, k de doorlatendheid, D de pakketdikte en Ω de lengte in dwarsdoorsnede van het natte contactvlak tussen sloot en watervoerend pakket. Ω hangt zelf af van de slootdiepte y en het slootprofiel, dat wordt vastgelegd door β . De formule voor de grootte van de natte omtrek Ω wordt verderop afgeleid voor een paraboolvormig slootprofiel.

Voor de gemiddelde omstandigheden hebben we $y = y_N$ en de bijbehorende Ω_{β,y_N} geldt dan

$$c_{r,y_0} = \frac{1}{\pi k} \ln \left(\frac{D}{\Omega_{y_N}} \right)$$

De verandering van de radiale weerstand door verandering van de slootdiepte volgt direct uit het voorgaande

$$\begin{aligned} c_{r,y} - c_{r,y_N} &= \frac{L}{\pi k} \left(\ln \left(\frac{D}{\Omega_y} \right) - \ln \left(\frac{D}{\Omega_{y_N}} \right) \right) \\ &= \frac{L}{\pi k} \ln \left(\frac{\Omega_{y_N}}{\Omega_y} \right) \end{aligned}$$

Dit betekent dat we hiermee de radiale weerstand bij elke slootdiepte, y , kunnen berekenen uit de radiale weerstand bij de referentie slootdiepte y_N , waarvan we ook de drainageweerstand c_N kennen uit de gemiddelde hoogte van de grondwaterstand ϕ_N boven het gemiddelde slootpeil h_N . De totale drainageweerstand wordt hiermee

$$c_{dr} = c_h + c_v + c_{r,y_0} + \frac{L}{\pi k} \ln \left(\frac{\Omega_{y_0}}{\Omega_y} \right)$$

De eerste drie termen aan de rechterkant van het isgelijktteken vormen de drainageweerstand bij gemiddeld neerslagoverschot, die gelijk is aan $c_N = \frac{\phi_N - h_N}{N}$ en is dus bekend. We krijgen dus nu een uiterst eenvoudige uitdrukking die de drainageweerstand voor willekeurige slootdiepte, y , beschrijft. Ook Ω is een bekende functie van de slootdiepte.

$$c_{dr} = \frac{\phi_N - h_N}{N} + \frac{L}{\pi \sqrt{k_x k_z}} \ln \left(\frac{\Omega_{y_0}}{\Omega_y} \right)$$

We hebben in deze formule k in de radiale weerstand vervangen door $\sqrt{k_x k_z}$ om zo de verticale anisotropie binnen het watervoerende pakket in rekening te brengen. De gemiddelde slootafstand, L , hebben we daarin niet verschaald, want als we dat zouden doen, dan moeten we ook het neerslagoverschot dat op het horizontale vlak valt verschalen en vallen beide verschalings tegen elkaar weg. De Ω 's hoeven niet te worden verschaald wegens anisotropie omdat het een ratio betreft.

De enige variabele in deze uitdrukking voor de drainageweerstand is de grootte van het contactvlak tussen sloot en watervoerend pakket Ω_y , dat afhangt van de mate waarin de sloot is gevuld. Dit is het onderwerp van de volgende hoofdstuk.

Het is van belang om te merken dat de term met de logaritme de drainageweerstand nooit tot extreme hoogte kan opstuwen als gevolg van de numerieke nauwkeurigheid van de computer. Bij de implementatie wordt ervoor gezorgd dat de slootdiepte y nooit kleiner dan nul wordt. Dit geldt dan automatisch ook voor de Ω , die immers pas nul wordt bij $y = 0$. Hoe klein Ω ook is, zolang $\Omega > 0$ is de logaritme van Ω begrensd. Het kleinste getal waar de computer mee kan werken is ca 10^{-308} waarvan de natuurlijke logaritme ca. -710 is. Wanneer we Ω in het model beperken tot praktische waarden van bijv. 10^{-20} dan is de natuurlijke log daarvan ca. -46. Dit betekent dat wanneer voor een droge sloot Ω_{y_0}/Ω_y zeg 10^{20} hanteren en de factor $L/(\pi k)$ in de orde is van 1, de radiale weerstand de drainageweerstand nooit verder kan vergroten dan met ca. 46 d. Omdat in het programma echter werken met de weerstand die hoort bij $\phi - h_0$ in plaats van $\phi - h$ hebben we hier in het model geen last van aangezien de daarin gebruikte weerstand gelijk aan $c = c_{dr} + \frac{\eta}{\sqrt{q}}$ in plaats van c_{dr} , terwijl de term $\frac{\eta}{\sqrt{q}}$ daarin onbegrensd groot kan worden.

10.1 Natte slootomtrek Ω bij parabolisch slootprofiel

De grootte van het contactvlak tussen sloot en het watervoerende pakket hangt af van de mate waarin de sloot is gevuld. De vorm van het contactvlak hangt af van het slootprofiel. In de context van deze analyse wordt het slootprofiel benaderd door een parabool met armen naar boven en basis op de slootbodem. Maar men kan natuurlijk ook geheel andere slootprofielen kiezen, bijvoorbeeld een die de profielen van verschillende categorieën sloten combineert. Elk profiel vergt zijn eigen uitwerking. Hier beperken we ons tot het parabolische slootprofiel, waarvan de wiskundige uitdrukking als volgt is

$$y = \left(\frac{x}{\beta} \right)^2 \longleftrightarrow x = \beta \sqrt{y}$$

Hierin is y de slootdiepte $y = h - h_0$ met h_0 het niveau van de slootbodem en x de halve slootbreedte bij slootdiepte y . De coëfficiënt β is dan gelijk aan de halve slootbreedte bij diepte $y = 1$. We kunnen β ook bij willekeurige slootdiepte zoals y_N bepalen, waarbij een halve slootbreedte x_N hoort

$$y_N = \left(\frac{x_N}{\beta} \right)^2 \longleftrightarrow \beta = \frac{x_N}{\sqrt{y_N}}$$

Om de natte omtrek Ω te krijgen, moeten we de lengte van de parabool berekenen voor elke hoogte y . Differentiëren van de relatie levert

$$x = \beta \sqrt{y} \longleftrightarrow dx = \frac{\beta}{2\sqrt{y}} dy$$

Het stukje dL langs de slootomtrek wordt dan

$$dL^2 = dx^2 + dy^2$$

$$dL = \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{4y}} dy$$

Integratie van $y = 0$ tot $y = y$ levert de helft van de gezochte natte omtrek Ω_y op

$$\frac{\Omega}{2} = \int_0^{y=h-h_0} \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{4y}} dy$$

Na integratie volgt

$$\frac{\Omega}{2} = \sqrt{y \left(\frac{\beta^2}{4} + y \right)} + \frac{\beta^2}{4} \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{y}{\frac{\beta^2}{4} + y}} \right)$$

De integratieconstante is weggelaten omdat deze 0 is aangezien $\Omega = 0$ voor $y = 0$.

Voor $y \downarrow 0$ wordt het parabolische slootprofiel evenwijdig aan de x -as. Dit volgt direct uit de vorm van het slootprofiel, maar is ook formeel aan te tonen door de limiet van $\frac{\Omega}{2}(y, \beta)$ te nemen voor $y \downarrow 0$. Met $\tanh^{-1}(\zeta) \approx \zeta$ voor $\zeta \rightarrow 0$ volgt dan

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{2}(y \downarrow 0) &= \frac{\beta}{2} \sqrt{y} + \frac{\beta^2}{4} \left(\frac{2}{\beta} \sqrt{y} \right) \\ &= \beta \sqrt{y} = x \end{aligned}$$

We kunnen nu enkele tests doen. Voor y zeer klein loopt de slootbodem praktisch evenwijdig aan de x -as zodat daarvoor $\frac{\Omega}{2} \approx x$. Voor grote y is de toename van $\frac{\Delta\Omega}{2} \approx \Delta y$. Deze relaties zijn goed te zien in figuur 2 waarin verticaal de slootdiepte is uitgezet en horizontaal zowel de halve slootbreedte x als $\frac{\Omega}{2}$. Voor zeer kleine y valt x samen met $\frac{\Omega}{2}$ en voor grote y is $\frac{1}{2} d\Omega/dy \approx 1$.

10.2 Elimineren van de slootwaterstand h uit de vergelijking van de lek

Op dezelfde wijze als hiervoor is gedaan bij de wiskundig opgelegde drainageweerstand, kan bij de fysieke weerstand het variabele slootpeil uit het model worden geëlimineerd. Merk daarbij op dat het wiskundige verband tussen slootdiepte en afvoer $y = \eta\sqrt{q}$ ongewijzigd blijft

$$q = \frac{\phi - h}{c_{dr}} = \frac{1}{c_{dr}} (\phi - h_0 - y) = \frac{1}{c_{dr}} (\phi - h_0 - \eta\sqrt{q})$$

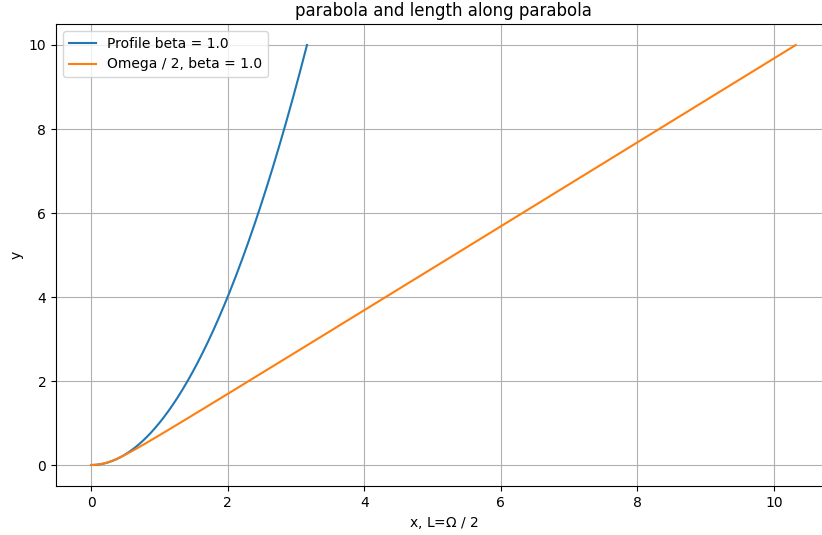
zodat

$$q = \frac{1}{c} (\phi - h_0 - \eta\sqrt{q})$$

$$q = \frac{\phi - h_0}{c_{dr} + \frac{\eta}{\sqrt{q}}}$$

Waarin de oorspronkelijke drainageweerstand c_{dr} is uitgebreid met de term $\frac{\eta}{\sqrt{q}}$.

Uiteraard is de weerstand $c_{dr} + \frac{\eta}{\sqrt{q}}$ nu een functie van de slootdiepte. Echter in een externe rekencyclus wordt de lek q in elke cyclus herberekend, waardoor uiteindelijk de juiste oplossing wordt verkregen. Het is



Figuur 2: Paraboolvormig slootprofiel met halve omtrek $\Omega/2$. De have omtrek moet een rechte line worden evenwijdig aan $x = y$ en voor zeer kleine y samenvallen met $x = y$.

essentieel dat tenminste de q in de noemer ≥ 0 blijft, ook al wordt $\phi < h_0$, net zoals dat bij vrije drainage ook in werkelijkheid het geval is. Voor de drainageweerstand geldt, eveneens om fysische redenen, dat zijn reciproke waarde ≥ 0 moet blijven. De wijze waarop q positief gehouden wordt is hiervoor beschreven; de wijze waarop c_{dr} positief wordt gehouden voor $\phi \leq h_0$ (dit is $y < 0$) wordt hierna beschreven.

Hiermee zijn alle gegevens nodig voor een model met vrije afwatering bekend.

10.3 Voorkom dat Ω nul wordt wanneer $y < 0$.

Omwille van de convergentie van de oplossing van het op te stellen stelsel vergelijkingen, is het essentieel dat dat c en q over het hele spectrum van ϕ continu en positief zijn, aangezien zowel $\frac{1}{c}$ als q beide verticaal zijn wanneer slootdiepte $y \downarrow 0$. Hoe te voorkomen dat de lek q negatief kan worden is hiervoor al beschreven. Ook de reciproke drainageweerstand moet positief blijven, maar wel praktisch nul voor $\phi < h_0$. Ω bestaat niet voor $\phi < h_0$ (negatieve slootdieptes) en is dus niet continu bij $y \downarrow 0$. We kunnen dit verhelpen door Ω bij zeer kleine en negatieve y over te laten gaan in een functie die steeds net positief blijft.

Zoals hiervoor reeds afgeleid geldt dat voor $y \downarrow 0$ de functie $L(y, \beta) = \frac{\Omega(y, \beta)}{2}$ voor elke β wordt benaderd door

$$y \downarrow 0 \rightarrow L(y) \approx x$$

Met x de halve slootbreedte en y de slootdiepte en een parabolisch slootprofiel volgens

$$x = \beta\sqrt{y}$$

We willen de functie $L(y) \approx x = \beta\sqrt{y}$ voor $y < \hat{y}$, met \hat{y} een kleine positieve waarde, continu laten overlopen in een functie die met afnemende y snel verwaarloosbaar klein wordt maar wel positief blijft. Een geschikte functie hiervoor is

$$x = \delta e^{+\frac{y}{\lambda}}$$

Deze functie zegt dat $x = \delta$ voor $y = 0$ en exponentieel kleiner wordt naarmate y verder negatief wordt. De noemer λ bepaalt hoe snel dit gaat. In de praktijk kan voor δ een waarde van bijvoorbeeld $\delta = 0.01$ m of

kleiner worden gekozen. De waarde van λ volgt uit die van δ vanuit de eis dat de functie Ω en zijn afgeleide continu zijn op het punt \hat{y} , waarna we Ω over het hele spectrum van y kunnen berekenen, negatief of niet.

Continuïteit voor het slootprofiel en de functie voor $y < \hat{y}$ vereist op het punt $y = \hat{y}$ dat zowel de functies als hun afgeleiden aan elkaar gelijk zijn. Dus geldt

$$\begin{aligned}\beta\sqrt{\hat{y}} &= \delta e^{\frac{\hat{y}}{\lambda}} \\ \frac{\beta}{2\sqrt{\hat{y}}} &= \frac{\delta}{\lambda} e^{\frac{\hat{y}}{\lambda}}\end{aligned}$$

Beide vergelijkingen op elkaar delen elimineert δ en geeft het transitiepunt \hat{y} als een functie van λ

$$\hat{y} = \frac{\lambda}{2} \quad \longleftrightarrow \quad \lambda = 2\hat{y}$$

Vul in $\hat{y} = \frac{\lambda}{2}$ om δ te berekenen

$$\beta\sqrt{\frac{\lambda}{2}} = \delta e^{\frac{1}{2}} \quad \longleftrightarrow \quad \delta = \frac{\beta}{e^{0.5}} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \approx 0.61 \times \beta \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$$

We hebben nu, na keuze van \hat{y}

$$\begin{aligned}\lambda &= 2\hat{y} \\ \delta &= 0.61 \times \beta \sqrt{\hat{y}}\end{aligned}$$

Kiezen we δ , de „halve slootbreedte” voor $y = 0$ dan volgt

$$\hat{y} = e \times \left(\frac{\delta}{\beta}\right)^2 \approx 2.72 \times \left(\frac{\delta}{\beta}\right)^2$$

Bijvoorbeeld $\hat{y} = 0.01 \text{ m}$, waar dan uit volgt dat $\lambda = 2\hat{y} = 0.02 \text{ m}$ en met bijvoorbeeld $\beta = 1$ volgt dan $\delta = 0.6\sqrt{0.01} = 0.06 \text{ m}$. Merk op dat δ nu de „halve slootbreedte” is en dus ook de halve slootomtrek voor $y = 0$. Dit lijkt een prima grootte voor in het grondwatermodel. Eventueel kiezen we $\hat{y} = 0.001$ of $\hat{y} = 0.0001$. Een waarde van $\lambda = 0.02 \text{ m}$ impliceert dat x voor $y = -5\lambda = -0.1 \text{ m}$ nog slechts $e^{-5}\delta \approx 0.006\delta \approx 4 \times 10^4 \text{ m}$ is, en dus volstrekt verwaarloosbaar. Merk op dat voor $y < \hat{y}$ geldt dat $L(y) \approx x = \delta e^{\frac{y}{\lambda}}$ en dat $\Omega = 2L(y)$.

Deel III

Implementatie in Fdm3

11 Intro

Fdm3 is een stationair (intern tijdsafankelijk) eindig differentie model, „Fdm3”, waarmee vlakke en axiaal-symmetrische doorsneden, evenals volledig 3D eindige differentiemodellen kunnen worden opgezet. Een eindig differentie model als Modflow of in dit geval Fdm3, berekent de volumestroom Q_{cel} [m³/d] als volgt

$$Q_{lek,cel} = C(h - \phi) = A \frac{h - \phi}{c}$$

Hierin is C [L²/T] de zogenoemde conductance (in Modflow jargon) verder conductantie genoemd, h de gefixeerde stijghoogte buiten het model (slootpeil bijv.), dit is het zogenaamde drainagepeil, en ϕ de berekende stijghoogte in het model. A het oppervlak van de rekencel en c [T] de vlakdekkende weerstand van deze rekencel tegen verticale grondwaterstroming. We zien dus dat Q in het model positief is bij infiltratie en negatief bij lek.

De conductantie C [m²/d] die in het model wordt gebruikt is dus

$$C = \frac{A}{c}$$

In de situatie met vrije afwatering is de drainagebasis h afhankelijk van de lek zelf. Omdat bij lek $Q < 0$ is, geldt qua teken

$$h = h_0 + \eta\sqrt{q}, \quad q = \frac{-Q}{A} \geq 0$$

De drainagebasis h is onbepaald (niet bestaand) voor $q < 0$., dus bij infiltratie. Inderdaad is h dan volkomen onbepaald, aangezien bij vrije drainage infiltratie fysisch niet kan optreden; de sloten dan dan immers droog. De weerstand c is hiervoor al uitgebreid behandeld en kan dus direct worden gebruikt in het eindige differentie model in de uitdrukking $C = A/c$.

De berekening van de stijghoogten moet iteratief gebeuren omdat de weerstand afhangt van de te berekenen stijghoogte zelf. Deze iteratieve berekening vindt plaats een zogenaamde rekenlus „outer loop” waarin steeds opnieuw de stijghoogten worden herberekend en waarna telkens de weerstanden worden aangepast totdat de weerstanden en stijghoogten niet meer veranderen.

12 Stabiliteit van het rekenproces

Door de niet-lineariteit van de (drainage)weerstanden moet het stelsel vergelijkingen binnen het eindige differentie model iteratief worden opgelost in een zogenaamde rekenlus „outer loop” waarbinnen telkens de stijghoogten worden berekend, waarna de (drainage)weerstanden steeds opnieuw worden aangepast, totdat convergentie is verkregen. Het op deze manier bereiken van convergentie is echter hoogst onzeker. Dit is in het algemeen zo bij niet-lineaire systemen, maar hier in het bijzonder omdat een stationaire oplossing alleen mogelijk is wanneer de stijghoogte in minstens een van de rekencellen direct of indirect wordt vastgehouden. Hieraan wordt niet voldaan bij drainage wanneer alle stijghoogten lager zijn dan het drainageniveau. Bovendien kunnen de conductanties van de draincellen tussen opeenvolgende rekenlussen op een neer blijven springen, waardoor er ook om deze reden in een aantal situaties nooit convergentie optreedt. Dit op een neer springen van de drainageweerstand tussen opeenvolgende rekenlussen is op te lossen door de overgang tussen wel drainage en geen drainage geleidelijk te laten verlopen. Dit kan door de conductanties te vermenvuldigen met een sigmoïde functie die snel naar 1 gaat voor $\phi > h$ en snel naar nul gaat voor $\phi < h$. Zo'n functie is

$$y = \frac{1}{1 + \exp(-y/\lambda)}$$

Met λ een klein getal, dat kan worden opgevat als de breedte van de overgangszone. In het model wordt $\lambda = 0.05$ m aangehouden. Dit is geschikt vanuit praktijkoogmerk en blijkt in het model heel goed te werken.

Het fundamentele probleem met de convergentie, namelijk ontbreken van vaste randen bij het berekenen van een stationaire oplossing, moeten we echter anders oplossen. Vanuit het besef dat er altijd een niet-stationaire oplossing bestaat, kunnen we het model ook niet-stationair doorrekenen. Bij een niet-stationaire berekening is er altijd een beginvoorwaarde, oftewel een stijghoogteveld van waaraf wordt gestart. Doordat er bij niet-stationaire oplossingen altijd berging is, blijft de oplossing na een kleine tijdstap stabiel en nog dicht in de buurt van de beginvoorwaarde. Door de tijdstap in elke volgende loop-cyclus met een gegeven factor te vergroten, wandelt het model met steeds grotere stappen door de tijd heen en bereikt zo altijd een stabiele, stationaire eindwaarde. Deze eindwaarde is stabiel (stationair) mits er uiteindelijk in het model cellen aanwezig zijn die de stijghoogte direct of indirect via drains of vrije drainage vasthouden. Dat is bij vrije drainage altijd het geval, omdat een model met vrije drainage kan alleen zinvol kan zijn bij neerslag of permanente aanvoer, waardoor initieel te lage grondwaterstanden gedurende de iteratiestappen stijgen totdat de drainage aanslaat en stijghoogten in een deel van het model alsnog worden gefixeerd. Hiermee is het convergentieprobleem fundamenteel opgelost. We rekenen dus feitelijk niet-stationair ons stationair-bedoelde model door, met niet-lineaire randvoorwaarden die over een korte hoogte soepel overgaan naar nul, zonder die nul ooit te bereiken. De keuze van de begintijdstap en de vermenigvuldigingsfactor is aan de gebruiker. De keuze van de hoogte waarover de randvoorwaarden overgaan naar praktisch nul, is nu vastgezet op 0.05 m, maar kan gemakkelijk worden aangepast.

Het is duidelijk dat dit model zeer gemakkelijk niet-stationair te maken is, immers alle daartoe benodigde infrastructuur is er reeds in geïmplementeerd en wordt bij de berekening van de stationaire eindsituatie ook steeds gebruikt.

13 Andere niet-lineaire randvoorwaarden

In het eindige differentie model zijn naast de besproken vrije drainage (FDR) ook andere randvoorwaarden geïmplementeerd, die overeenkomen met die in Modflow. Dit zijn: GHB (general head boundaries), DRN (drains) en RIV (rivers).

In geval van GHB-cellen zijn de conductanties constant zodat het model net zo makkelijk kan infiltreren als kan lekken. GHB-randvoorwaarden vergen geen rekenlus.

DRN-cellen kunnen lekken maar niet infiltreren. Deze randvoorwaarde is niet-lineair en vergt wel een rekenlus waarin het stelsel van vergelijkingen herhaald moet worden opgelost na bijstellen van parameters. Bovendien wordt ervoor gezorgd dat de overgang tussen „aan” ($\phi > h$) en „uit” ($\phi < h$) geleidelijk verloopt over een hoogte van ca 10 cm ($\lambda = 0.05$ m).

RIV-cellen kunnen lekken en infiltreren zolang de stijghoogte zich boven de bodem van de river (r_{bot}) bevindt. Daaronder blijft de infiltratie constant en gelijk aan de conductantie maal de rivierdiepte. Door de rivierstand even hoog in te stellen als de hoogte van de rivierbodem, $h = r_{bot}$, werken RIV-cellen exact hetzelfde als DRN-cellen. Bij RIV-cellen wordt de overgang $\phi > r_{bot}$ en $\phi < r_{bot}$ geleidelijk gemaakt over een hoogte van ca 10 cm.

Met dit model is het derhalve gemakkelijk om de werking van verschillende soorten randvoorwaarden te laten zien.

14 Verkrijgen van de parameters nodig voor de simulatie van vrije drainage

De vraag is nu hoe de parameters zijn te verkrijgen die nodig zijn voor de simulatie van een gebied met vrije drainage. De meest praktische aanpak is om uit te gaan van bekende gegevens in gemiddelde omstandigheden, die als referentie geldt. Dat wil zeggen de grondwaterstijghoogte ϕ_N , de slootwaterstand (het drainageniveau) h_N en de slootbodemoogte h_0 en dit samen met de gemiddelde gebiedsafvoer, die meestal gelijk zal zijn aan het neerslagoverschot N . Bij gebruik van de fysische drainageformule, hebben we nog de slootbreedte w nodig voor de gemiddelde omstandigheden, en, tenslotte, de gemiddelde slootafstand L . Ook hebben we de daarvoor de horizontale en verticale doorlatendheid van het watervoerend pakket nodig. Deze zijn echter

in de invoer van het grondwatermodel aanwezig. Hiermee liggen alle voor de simulatie van vrije drainage benodigde gegevens vast, en kunnen de parameters worden bepaald die nodig zijn om de drainageweerstand en het slootpeil te berekenen als functie van de afvoer. Deze parameters zijn γ en η .

Samenvattend: wat hebben we nodig om deze vorm van vrije afwatering in het model te kunnen handelen?

1. ϕ_N de stijghoogte voorafgaand aan de ingreep behorend bij gemiddelde neerslagoverschot N rond dit modelknooppunt.
2. h_N de slootwaterstand (drainagebasis) bij de slootafvoer behorend bij het gemiddelde neerslagoverschot N in het modelknooppunt.
3. h_0 de bodemhoogte van de sloten behorend tot het model knooppunt.
4. N het gemiddelde neerslagoverschot (eventueel plus kwel) dat de sloten uiteindelijk in de referentiesituatie afvoeren, dat wil zeggen dat zijn afvoeren voorafgaand aan de te modelleren ingreep.
5. w_N de gemiddelde slootbreedte behorend bij slootwaterstand h_N
6. L de gemiddelde slootafstand.
7. k_x, k_z , direct afkomstig uit de invoer van het model.

Items 5 t/m 7 zijn alleen nodig indien we de drainageweerstand fysisch willen berekenen op basis van het slootprofiel in niet via de direct opgegeven wiskundige relatie. Items 5 en 7 zijn dan ook optioneel. Bevat de invoer de gegevens w en L dan rekent het model met de fysische drainageweerstand op basis van een parabolisch slootprofiel. Bij afwezigheid, rekent het model met de wiskundig opgelegde relatie tussen afvoer en drainageweerstand.

Met deze gegevens kunnen we de verschillende coëfficiënten als volgt berekenen.

De drainageweerstand in de referentiesituatie:

$$c_N = \frac{\phi_N - h_N}{N}$$

De coëfficiënt γ waar we vervolgens de drainageweerstand wiskundig kunnen uitrekenen als functie van de actuele afvoer:

$$\gamma = c_N \sqrt{N}$$

De coëfficiënt η waarmee de slootdiepte kan worden berekend als functie van de actuele afvoer:

$$\eta = \frac{h_N - h_0}{\sqrt{N}}$$

Wanneer we c_N fysisch willen berekenen met natte omtrek Ω gebruiken we een parabolisch slootprofiel met x de halve slootbreedte en y de slootdiepte volgens

$$x = \beta \sqrt{y}$$

Met gegeven halve breedte b_N of hele slootbreedte $w_N = 2b_N$ bij slootpeil h_N volgt hiermee de relatie

$$b_N = \beta \sqrt{h_N - h_0}$$

waaruit de coëfficiënt β kan worden berekend

$$\beta = \frac{b_N}{\sqrt{h_N - h_0}}$$

15 Implementatie van vrije afwatering in Modflow

Hiervoor is afgeleid dat voor het verband tussen slootdiepte en afvoer volgens

$$y = \eta\sqrt{q}$$

en voor het verband tussen weerstand en afvoer

$$\frac{1}{c_{dr}} = \frac{\sqrt{q}}{\gamma}$$

de volgende afvoer relatie ontstaat, waaruit de slootdiepte h is geëlimineerd ten gunste van de bodemhoogte van de sloten h_0 . De afvoer is dan gegeven door

$$q = \frac{\phi - h_0}{(\gamma + \eta)^2} (\phi - h_0)$$

Wat impliceert dat de coëfficiënt voor de factor $\phi - h_0$ de rol speelt van reciproke weerstand, of Modflow-termen als specifieke conductantie C_s , die alleen nog met het celoppervlak moet worden vermenigvuldigd om de typische Modflow conductantie te krijgen

$$C_s = \frac{1}{c} = \frac{\phi - h_0}{(\gamma + \eta)^2}$$

Deze uitdrukking geeft weer dat bij de getroffen aannamen over de slootdiepte en weerstand als functie van de afvoer, de specifieke conductantie evenredig is met de stijghoogte boven de slootbodem. Aangezien we de weerstand in de referentiesituatie kennen, namelijk die waarbij de afvoer gelijk is aan het neerslagoverschot $q = N$, met bijbehorende stijghoogte ϕ_N evenals de hoogte van de slootbodem h_0 kan nu de specifieke conductantie direct worden gegeven als lineaire functie van de grondwaterstand boven het slootpeil. We hebben daarvoor de γ en de η helemaal niet nodig. Wat we nodig hebben is de specifieke conductantie in de referentiesituatie

$$C_{s_N} (\phi_N - h_0) = \frac{\phi_N - h_0}{(\gamma + \eta)^2} (\phi_N - h_0) = N$$

Waarbij de middelste uitdrukking overbodig is, zodat

$$C_{s_N} = \frac{N}{\phi_N - h_0}$$

Verder geldt dat $C_s = 0$ voor $\phi_n \leq h_0$ en verloopt C_s linear tussen $\phi = h_0$ en $\phi = \phi_N$.

In een model als Modflow kunnen we lek boven een gegeven niveau berekenen met de optie DRN. Cellen met de DRN optie krijgen een drainniveau h_0 mee waarboven lek mogelijk is. En hierbij hoort een vaste conductantie. We kunnen echter in elke cel van Modflow een willekeurig aantal DRNs tegelijk opleggen, elk met een eigen drainniveau en een eigen conductantie. Op deze wijze kunnen we de conductanties in een rekencel stapelen met als resultaat een cel waarvan de netto of per saldo DRN-conductantie verloopt met de grondwaterstand. Op deze wijzen kan elk gewenst verband tussen de per saldo conductantie en de grondwaterstand worden gerealiseerd. Wanneer we dicht bij de afleiding willen blijven zullen we de conductantie lineair met de grondwaterstand willen laten toenemen. Maar dat hoeft duidelijk niet.

De grootte van de gestapelde specifieke conductantie als functie van de grondwaterstand ϕ is zo

$$C_\phi = \sum_i C_{i,\phi > h_i}$$

Waar C_i de specifieke conductantie die geldt bij $\phi > h_i$, het drainniveau van specifieke conductantie i . Het verband tussen grondwaterstand en afvoer wordt

$$q_\phi = \sum_i \{C_i (\phi - h_i), \phi > h_i\}$$

Dit is dus een niet-lineaire grondwaterstandafvoerrelatie. Terwijl de standaard DRN optie, met een DRN per cel een lineaire grondwaterstandafvoerrelatie vertegenwoordigt

$$q_\phi = C_{s,dr} (\phi - h) = \frac{1}{c_{dr}} (\phi - h)$$

Waarbij normaliter het slootpeil h of de drainagebasis wordt gebruikt met vast peil h , maar in geval van vrije afwatering

$$q_\phi = C_s (\phi - h_0)$$

waarbij $C_s < C_{s,dr}$ omdat $\phi - h < \phi - h_0$.

We kunnen nu de (specifieke) conductantie in n stapjes laten toenemen boven de slootbodemoogte h_0 . De eis daarbij is dat de afvoer $q = N$, het neerslagoverschot in de referentiesituatie, dus bij $\phi = \phi_N$

$$q = N = \sum_i^n C_i (\phi_N - h_i) = C (\phi_N - h_0)$$

Wanneer de stapjes C_i alle gelijk zijn dan krijgen we

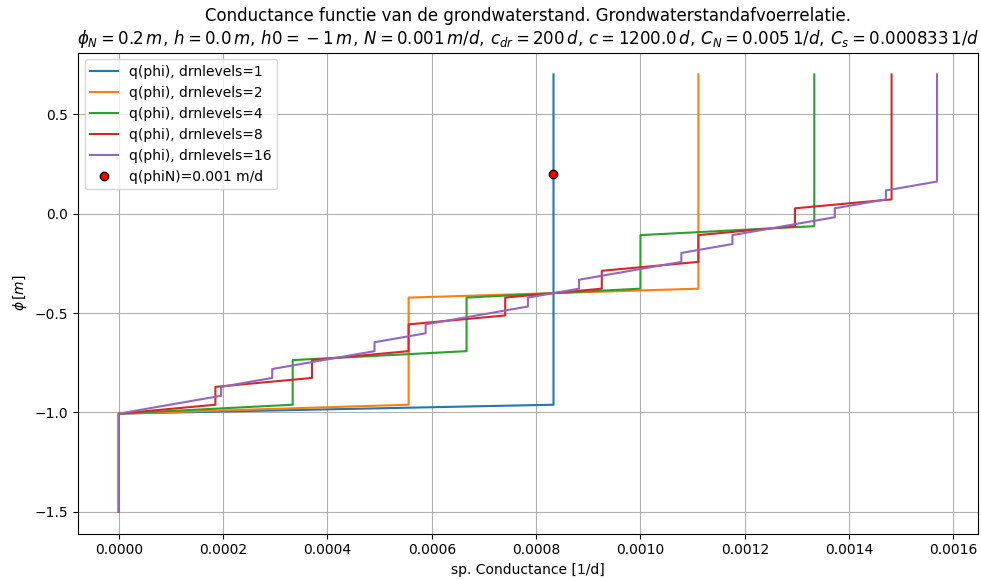
$$C_i \left(n\phi_N - \sum_i^n h_i \right) = C (\phi_N - h_0)$$

zodat

$$C_i = \frac{C}{n} \times \frac{\phi_N - h_0}{\phi_N - \bar{h}_i}$$

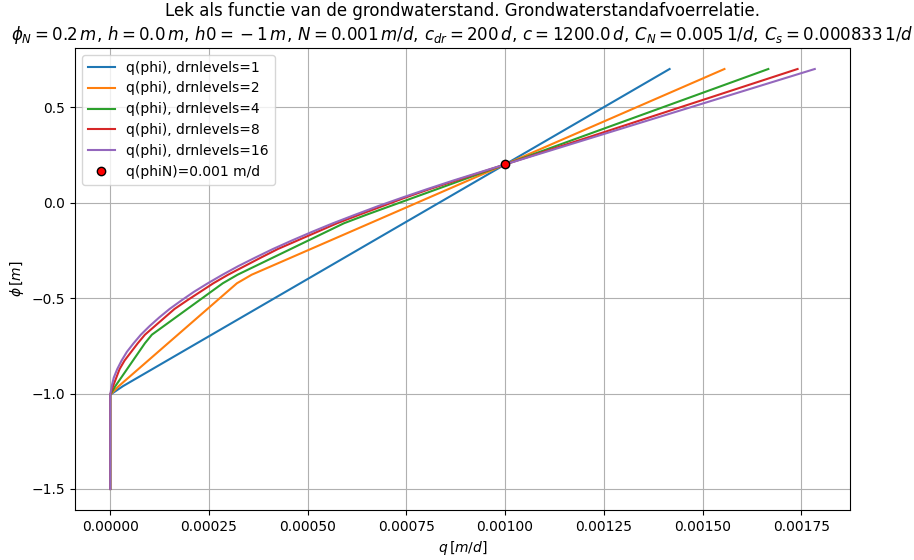
met \bar{h}_i het gemiddelde van de staphoogtes van de drainstapjes. De laatste factor brengt dus in rekening dat de verschillende drains een verschillend drainniveau hebben waarboven zij pas gaan afvoeren.

Figuur 3 laat voor verschillend aantal drainniveau's de cumulatieve conductantie zien, waarvan de stapjes voldoen aan bovenstaande vergelijking. De rode punt geeft de situatie met slechts één stap en de referentie-stijghoogte ϕ_N die ook in de volgende figuur staat.



Figuur 3: Conductantie als functie van de grondwaterstand bij verschillend aantal drainageniveau's

Figuur 4 toont de lek (afvoer) als functie van de grondwaterstand bij een verschillend aantal drainage-niveau's. De conductantie van de drainagestappen is berekend met bovenstaande formule zodanig dat de afvoer bij de referentiegrondwaterstand ϕ_N gelijk is aan het neerslagoverschot N . Dit punt is aangegeven met de rode stip waar alle lijnen inderdaad doorheen gaan.



Figuur 4: Afvoer als functie van de grondwaterstand bij een verschillend aantal drainageniveau's.

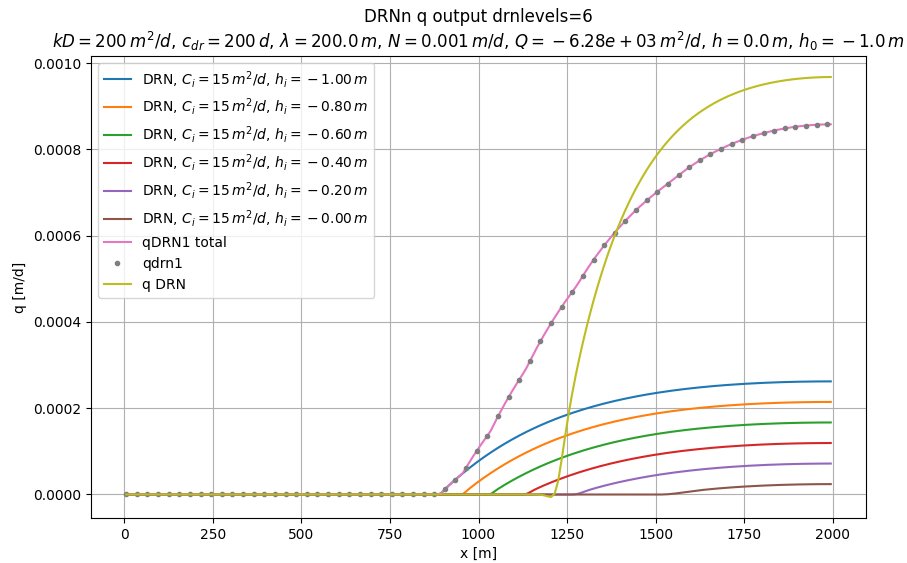
Figuur 4 geeft dus in feite de grondwaterstandafvoerrelatie voor verschillend aantal drainageniveau's. Bij een enkel niveau is dit verband lineair. Maar met toenemend aantal komt de relatie steeds beter overeen met de oorspronkelijk aangenomen vorm van de weerstand, $q = \left(\frac{\phi - h_0}{\gamma + \eta}\right)^2$ of $\phi - h = (\gamma + \eta) \sqrt{q}$ met $\gamma + \eta$ een constante die in de afleiding hiervoor niet meer nodig is omdat de conductantiestappen zijn afgeleid van de weerstand in de referentiesituatie. Voor grotere waarden van q bevindt is het verband tussen ϕ en q lineair omdat daar geen verdere drainageniveau's meer zijn gedefinieerd. Maar dat zou natuurlijk wel kunnen.

We kunnen natuurlijk hele discussies gaan voeren over de vraag of het verband tussen de conductantie en \sqrt{q} danwel het verband tussen het (geëlimineerde) slootpeil en \sqrt{q} adequaat zijn, maar dat levert uiteindelijk weinig verschil op in de uitkomst. Het hier verkregen resultaat is zeer praktisch: de conductantie neemt lineair toe met de grondwaterstand boven het basis slootniveau. Dit is gemakkelijk in Modflow toe te passen. Maar natuurlijk staat het de gebruiker toe om elk ander verband middels meervoudige drainages in rekencellen te verwezenlijken, bijvoorbeeld op basis van verschillende typen sloten die in een gebied voorkomen. Ik verwacht echter weinig wezenlijk verschil omdat bij vrije drainage voor elk type sloot een lineair verband moet worden verwacht tussen conductantie en grondwaterstand, zodat dat ook mag worden verwacht bij representatie van het voorkomen van sloten van verschillende categoriën, wanneer die alle voldoen aan vrije afwatering. Tenslotte, het staat ieder vrij om in dergelijke situaties de drainniveau's voor het representeren van vrije drainage te mengen met standaard Modflow drains die sloten modelleren met een vast peil in hetzelfde gebied. Het zijn tenslotte alle standaard drain-opties die worden toegepast, hoeveel dat er per rekencel zijn is om het even.

Hieraan mag worden toegevoegd dat wat hier geldt voor drains op vergelijkbare wijze van toepassing is op de RIV (rivier) optie. Ook daarvan kan men vele aan een enkele cel opgeven om een groot aantal waterlopen tegelijk te simuleren. En natuurlijk geldt hetzelfde voor de algemene GHB (general head) optie, de enige lineaire optie die geen buiteniteraties nodig heeft.

Figuur 5 geeft de berekende lek langs de lengte van het model. De groene lijn „q DRN” is berekend met de standaard DRN optie waarbij de drainage wegvalt zodat de grondwaterstand zakt beneden het oorspronkelijke slootniveau h , geheel onafhankelijk van de slootdiepte. De paarse lijn met de puntjes is

de lek wanneer de conductantie vanaf de slootbodern in 6 stapjes toeneemt tot $h_i = 1.0$ m, net onder de grondwaterstand in de referentiesituatie $\phi = 0.2$ m. De totale lek, dus het oppervlak onder beide grafieken is dezelfde (het totale neerslagoverschot op het model minus de onttrekking die een kwart daarvan is). Elk van de gekleurde lijnen onder in de grafiek geeft de lek van een afzonderlijk drainniveau. De grootste lek komt van het laagste drainniveau en de kleinste lek van het hoogste drainniveau. Opgeteld geven deze lijnen de paarse lijn met de puntjes.



Figuur 5: De lek met de standaard DRN optie en met 6 verschillende drainageniveau's

Deel IV

Testen van het model

16 Vergelijking van modellen met verschillende randvoorwaarden

Met een en hetzelfde grondwatermodel hier Fdm3, kunnen verschillende modellen worden opgezet die over en weer kunnen geverifieerd en ook kunnen worden vergeleken met analytische oplossingen, althans voor zover deze analytische oplossingen bestaan. Voor niet-lineaire grondwaterproblemen bestaan die vaak niet. Met het oorspronkelijk in Matlab en de laatste jaren in Python doorontwikkelde eindige differentie model kunnen stationaire en tijdsafhankelijke modellen worden opgezet met een model netwerk bestaande uit rechthoekige cellen en lagen waarvan de laagdikte variabel is per cel. Dit is dezelfde opzet als bij oudere Modflow modellen. Zo'n netwerk is relatief eenvoudig maar maakt het Python programma van hoogstens een paar honderd regels code uiterst transparant. Fdm3 is verder uitermate geschikt voor het maken van doorsnedemodellen, zowel vlakke als axiaal-symmetrische.

Voor het oplossen van het stelsel vergelijkingen wordt gebruik gemaakt van de solvers uit de Scipy library, de beste ter wereld, waardoor oplossing van het grondwatermodel geen probleem is, zolang het model lineair is. Net als Modflow heeft het Python model, Fdm3, ook niet-lineaire randvoorwaarden, namelijk DRN (drains), RIV (river) en FDR (vrije drainage). De DRN cellen laten alleen water het model uit wanneer de stijghoogte in de betreffende cel hoger is dan het opgegeven niveau van de drain(s). Nooit kan er water via de DRN het model instromen. De RIV-cellen laten water in- en uitstromen zolang de stijghoogte van de RIV-cellen in het grondwatermodel is hoger dan het opgegeven niveau van de rivierbodem. Zakt de stijghoogte tot onder de rivierbodem dan raakt de infiltratie via de rivierbodem los van de stijghoogte het grondwater; zij wordt dan constant en gelijk aan de diepte van de rivier gedeeld door de opgegeven weerstand van de rivierbodem. Zowel DRN als RIV randvoorwaarden zijn niet-lineair en maken het grondwatermodel dus ook niet-lineair. Fdm3 heeft nog een derde niet-lineaire randvoorwaarde, namelijk die voor vrije ontwatering, FDR, waarin de drainageweerstand afhankelijk is van de slootdiepte, dus van de waterstand in de sloot minus de hoogte van de slootbodem. Bij vrije afwatering is geen infiltratie mogelijk, net zoals bij de DRN-cellen; alleen is bij DRN-cellen de uittreeweerstand constant terwijl die bij vrije ontwatering, FDR, een functie is van de actuele slootdiepte. Daarnaast is ook de slootdiepte zelf een functie is van de afvoer vanuit het model via de cellen met vrije afwatering. De laatste vorm van afwatering sluit beter aan bij de situatie in hogere of overgangsgebieden met een vrije afvoer, waar geen extern water naartoe geleid of gepompt kan worden.

De afleiding voor de randvoorwaarden met vrije drainage is hiervoor al gegeven. FDR komt in twee varianten

1. De drainageweerstand is een opgelegde wiskundige functie van de afvoer.
2. De drainageweerstand wordt berekend op basis van de actuele slootdiepte en het slootprofiel, waarbij de slootdiepte afhankelijk is van de afvoer.

In dit hoofdstuk staat de verificatie van het model Fdm3 centraal onder verschillende randvoorwaarden.

17 Vlakke en axiaal symmetrische doorsnede modellen met verschillende randvoorwaarden

Het gemakkelijkst is de werking van de verschillende randvoorwaarden te demonstreren aan de hand van vlakke of axiaal-symmetrische doorsnedemodellen. De essentie hierbij is het zoveel mogelijk kunnen toetsen aan analytische oplossingen en de modellen met verschillende randvoorwaarden onderling te kunnen vergelijken en toetsen.

We beginnen met vlakke eendimensionale modellen. Deze bestaan gemakshalve steeds uit slechts een modellaag. We kunnen zo'n model bestaande uit slechts een laag semi-ge-spannen maken door gebruik van de verschillende randvoorwaarden GHB, DRN, RIV en of FDR. Zo kunnen we alle cellen GHB cellen maken (general head boundaries). Door de zogenoemde conductantie van de GHB-cellen equivalent te maken aan de weerstand van een scheidende laag wordt de laag in feite semi-ge-spannen en wordt hetzelfde als met een

analytische oplossing voor een semi-gespannen grondwater. Om de drainage te simuleren kiezen we een semi-gespannen laag waar we direct het neerslagoverschot in injecteren. Hierdoor lekt water via de scheidingslaag opwaarts. Verder leggen we een onttrekking q_0 [m²/d] op bij $x = 0$. Hier door gaat water op korte afstand van de onttrekking van de weerstandslaag infiltreren.

18 Vergelijking tussen GHB- en DRN-randvoorwaarden

Bij GHB randvoorwaarden kan water zowel infiltreren als exfiltreren; bij DRN randvoorwaarden is alleen exfiltratie mogelijk. Het eenlaagsmodel met GHB randvoorwaarden is gelijk aan een tweelaagsmodel met een vast peil in de bovenste laag en tussen de twee lagen een weerstand biedende laag. We laten hierna de resultaten zien van de simulatie in een vlak 1D doorsnedemodel en in een axiaal-symmetrisch doorsnede model. Deze resultaten worden vergeleken met die van de analytische oplossing voor hetzelfde probleem.

18.1 De vlakke (1D) doorsnede

De analytische oplossing voor deze situatie is die van Mazure plus Nc

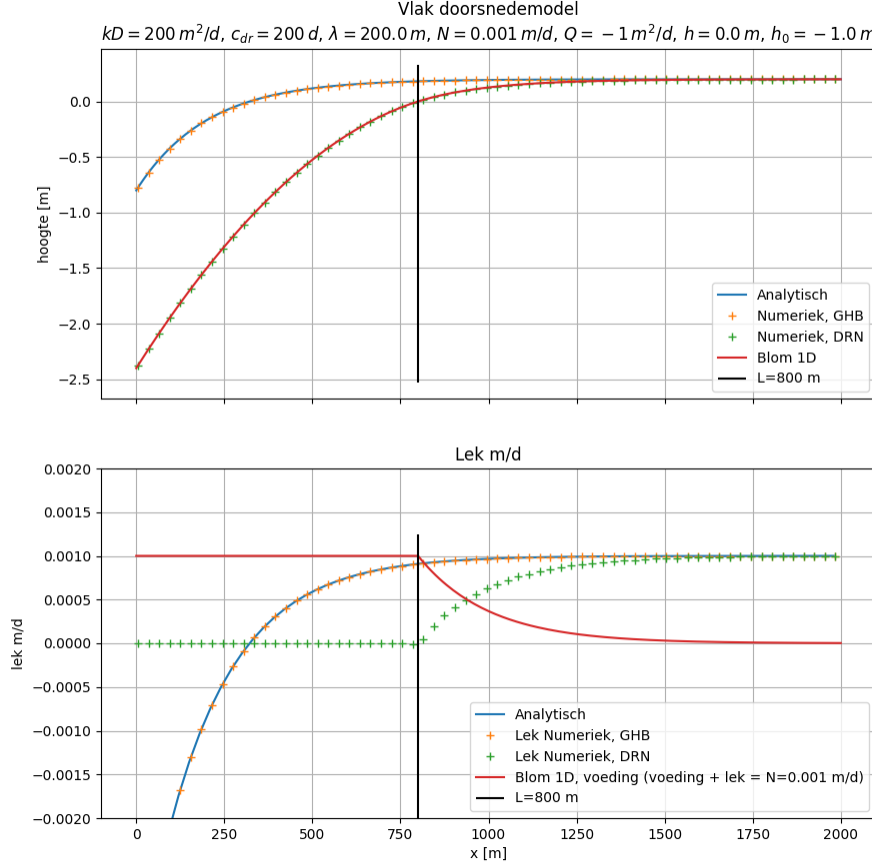
$$\phi - h = q_0 \frac{\lambda}{kD} e^{-\frac{x}{\lambda}} + Nc$$

Met $q_0 = \frac{kD}{\lambda} (\phi_0 - h)$ en $N = 0$ krijgen we de bekende formule van Mazure, namelijk $\phi - h = (\phi_0 - h) e^{-\frac{x}{\lambda}}$. Met $q_0 = 0$ is de stijghoogte $\phi - h = Nc$ en uniform, dit is de stijghoogte die nodig is om het neerslagoverschot N via de weerstand naar de omgeving te laten lekken. De weerstand c moet hier worden opgevat als drainageweerstand, dus de weerstand die het aanwezige oppervlaktesysteem biedt tegen lek van grondwater. De stijghoogte zal door het neerslagoverschot in een groot deel van het model boven de drainagebasis h liggen. In de buurt van de onttrekking zakt de stijghoogte tot onder de drainagebasis. In de formule voor semi-gespannen water en bij gebruik van GHB-cellen, treedt daar dan infiltratie op. Bij gebruik van DRN-cellen wordt deze infiltratie afgekapt. Hierdoor is de verlaging nabij de onttrekking bij gebruik van DRN cellen groter dan bij GHB cellen als randvoorwaarde.

Figuur 6 geeft het resultaat van zowel de analytische oplossingen en de simulatie met het Fdm3 model voor de vlakke (1D) doorsnede. De analytische oplossing voor de situatie met semi-spanningswater over de gehele x -as valt samen met die van de Fdm3-simulatie waarbij GHB-randvoorwaarden zijn gebruikt, waardoor zowel lek als infiltratie kan optreden. Dit is identiek aan een grondwaterpakket dat is afgedekt door een slecht-doorlatende laag met daarboven een vast peil h en waarin het neerslagoverschot direct wordt geïnjecteerd. De analytische en de numerieke oplossing vallen over elkaar heen, zowel wat betreft de stijghoogte als de lek.

Figuur 6 geeft hiernaast de analytische oplossing volgens Blom samen met de numerieke waarbij voor de bovenrandvoorwaarde in plaats van GHB-cellen DRN-cellen zijn toegepast. DRN-cellen laten geen infiltratie toe. Bij Blom treedt lek op zolang de grondwaterstand boven het slootpeil (de drainagebasis) blijft. De lek is daar een deel van het neerslagoverschot de voeding is daar gelijk aan het neerslagoverschot minus de lek. Binnen het gebied waar de de grondwaterstand onder de drainagebasis zakt treedt geen lek meer op. De voeding is daar gelijk aan het gehele neerslagoverschot. De afstand waarop de grondwater is verlaagd tot de drainagebasis (verlaging is Nc_{dr}) is met een zwarte verticale lijn aangeven. De analytische oplossing volgens Blom is identiek aan de numerieke simulatie met DRN-cellen als bovenrandvoorwaarde en het neerslagoverschot direct geïnjecteerd in de watervoerende laag.

De figuur met de lek en de voeding laat zien dat de lek voor $x < L$ nul is en daarbuiten evenredig met de verlaging. Voor de analytische oplossing van Blom is de voeding weergegeven. Deze is voor $x < L$ gelijk aan het neerslagoverschot en neemt daarbuiten af tot nul voor grote x . De som van de analytische voeding en de numeriek berekende lek is gelijk aan het neerslagoverschot. De bovenste figuur laat ook zien dat de verticale lijn het punt snijdt waar de grondwaterstand is gezakt tot de drainagebasis $h = 0$ vanaf de grondwaterstand zonder onttrekking $\phi = h + Nc$.



Figuur 6: Analytische oplossingen en Fdm3-simulatie van vlakke doorsnede. Het Fdm3-model bestaat uit een enkele modellaag. Voor de gebruikte gegevens zie de kop van de bovenste figuur. Vergelijking tussen de situaties met GHB- en met DRN-cellen. Boven de stijghoogten en onder de lek respectievelijk de voeding van het pakket.

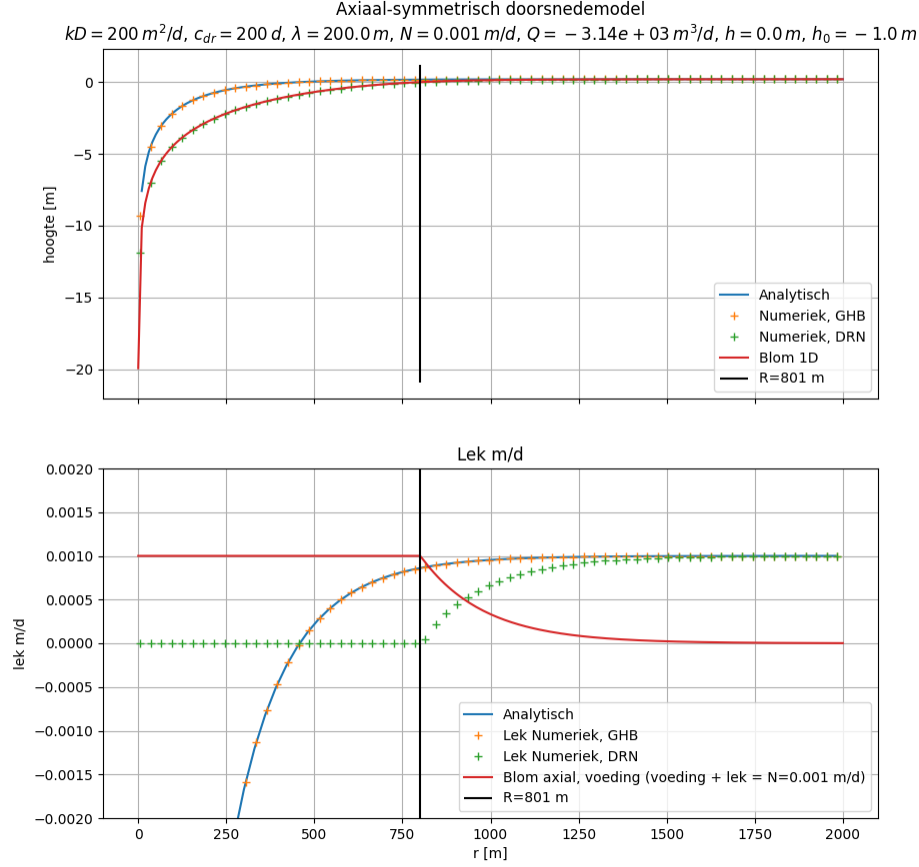
18.2 De axiaal-symmetrische doorsnede

Figuur 7 geeft de resultaten berekende analytische oplossing en de numerieke simulatie voor een axiaal-symmetrische doorsnede met exact dezelfde gegevens als hiervoor gebruikt zijn bij de vlakke doorsnede. Alleen de onttrekking heeft nu dimensie m^3/d in plaats van m^2/d , maar is net als bij de vlakke doorsnede gelijk gesteld aan de helft van het totale neerslagoverschot dat op het model valt.

De analytische oplossing voor de situatie met een onttrekking Q_0 [m^3/d] en met rechtstreeks injecteren van het neerslagoverschot N in het watervoerende pakket is dan

$$\phi - h = \frac{Q_0}{2\pi kD} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) + Nc$$

$K_0(\dots)$ is uiteraard de bekende gemodificeerde Besselfunctie en λ als hiervoor. Zonder de injectie, dus met $N = 0$ hebben we de formule van De Glee en met $Q = 0$ krijgen we net als hiervoor een uniforme stijghoogte $\phi = h + Nc$, die nodig is om het geïnjecteerde neerslagoverschot naar het oppervlaktewater te laten lekken via de drainageweerstand c_{dr} . Ook deze formule berekent infiltratie nabij de put, waar de stijghoogte tot onder het drainageniveau h wordt getrokken. Hetzelfde krijgen we als we in het model GHB-



Figuur 7: Analytische oplossingen en Fdm3-simulatie van axiaal-symmetrische verticale doorsnede. Het Fdm3-model bestaat uit een enkele modellaag. Voor de gebruikte gegevens zie de kop van bovenste figuur. Vergelijking situatie met GHB- en DRN-cellen. Boven de stijghoogten en onder de lek, respectievelijk de voeding van het pakket.

randvoorwaarden gebruiken. De analytische en de numeriek oplossingen blijken geheel in overeenstemming, evenals de berekende lek/voeding die in de onderste figuur is weergegeven. De voeding n_r is natuurlijk $n_r = \frac{\phi_r - h}{c}$.

Bij gebruik van DRN-randvoorwaarden wordt deze infiltratie volledig afgekap. De verlaging is hierdoor groter bij gebruik van DRN-randvoorwaarden dan bij GHB-randvoorwaarden. De analytische oplossing die volgens [Blom (1973)] die geldt voor het gebied $r > R$ is de formule die [De Glee (1930)] voor semi-spanningswater afleidde. Die voor het gebied met $r < R$ is de zogenaamde formule van Verruijt (dit is de formule van Dupuit plus neerslagoverschot). De figuur laat zien dat de analytische oplossing volgens Blom geheel overeenkomt met de numeriek oplossing met DRN-cellen als bovenrandvoorwaarde. De grens tussen beide gebieden is aangegeven met de verticale zwarte lijn. Dit is de straal waar de stijghoogte is gedaald tot de drainagebasis h . De onderste figuur met de lek/voeding laat zien dat de lek voor $r < R$ gelijk aan nul is, maar de voeding gelijk aan het gehele neerslagoverschot. Op deze grens is de verlaging gelijk aan Nc_{dr} en is de voeding gelijk aan N en de lek gelijk aan nul.

Voor de verhouding tussen van voeding n_r op afstand r ten opzichte van de voeding $n_R = N$ die op afstand R geldt

$$n_r = N \frac{K_0 \left(\frac{r}{\lambda} \right)}{K_0 \left(\frac{R}{\lambda} \right)}$$

19 Simulatie met vrije afwatering of vrije drainage

Hiervoor zagen we dat de analytische situatie volgens Blom identiek is aan de numerieke simulatie met DRN-cellen als bovenrandvoorwaarde en directe injectie in het watervoerende pakket. De situatie met vrije afwatering lijkt hierop, maar verschilt in het feit dat daarbij de drainagebasis (het slootpeil) lager wordt naarmate de lek afneemt en het feit dat de drainageweerstand toeneemt met de afnemende slootdiepte. Er kan alleen lek zijn zolang de grondwaterstand hoger is dan de slootbodem. Zodra de grondwaterstand daaronder zakt is de lek nul en de drainageweerstand dus oneindig groot. In een vrij afwaterend gebied is geen aanvoer van water en geen infiltratie mogelijk. Dit is in de werkelijkheid niet overal helemaal waar, omdat er natuurlijk water van bovenstrooms naar de sloten kan lekken, dat vervolgens benedenstrooms weer infiltreert. Zulke omstandigheden vallen buiten bestek van dit document en kunnen alleen met een combinatie van een grond- en een oppervlaktewatermodel enigszins zinvol worden gemodelleerd.

De drainageweerstand wordt gedefinieerd als

$$c_{dr} = \frac{\phi - h}{N}$$

Dat wil zeggen het verschil tussen de gemiddelde grondwaterstand met het drainageniveau (het slootpeil) gedeeld door de gemiddelde drainage (zonder kwel is dat gelijk aan het neerslagoverschot). In deze formule zit ook het drainageniveau, dat echter bij vrije afwatering zelf afhangt van de lek. En daarmee is de drainageweerstand ook afhankelijk van de actuele lek. In de theoretische afleidingen hebben we echter gezien dat we ook de weerstand als volgt kunnen definiëren,

$$c = \frac{\phi - h_0}{N}$$

waarbij in plaats van de actuele maar variabele drainagebasis h nu de vaste bodemhoogte van de sloten h_0 staat. De weerstand c is dan dus niet meer de drainageweerstand maar een andere, grotere.

$$q = \frac{\phi - h_0}{c_{dr} + \frac{\eta}{\sqrt{q}}} \rightarrow c = c_{dr} + \frac{\eta}{\sqrt{q}}$$

Hierin is de slootdiepte $y = h - h_0$ verwerkt waarvoor is gesteld dat die via een eenvoudige functie van de lek q afhangt

$$y = \eta \sqrt{q}$$

waarin de coëfficiënt η volgt uit de slootdiepte in de referentiesituatie wanneer $q = N$. De weerstand c hangt nu zelf van de lek q af. Wanneer $q \downarrow 0$ gaat $c \uparrow \infty$ en stopt de lek.

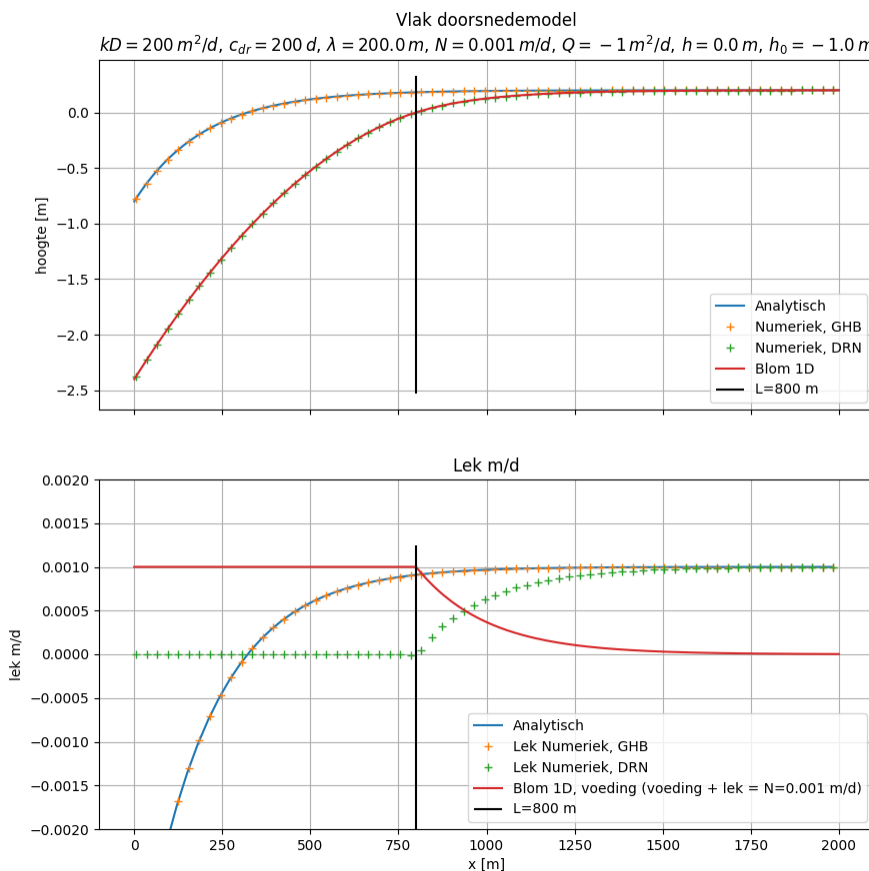
19.1 De vlakke 1D doorsnede

Figuur 6 geeft het resultaat voor de simulatie van de vlakke doorsnede met GHB randvoorwaarde en de bijbehorende analytische oplossing

$$\phi = h + Nc - \frac{\lambda}{kD} Q e^{-\frac{x}{\lambda}}, \quad \lambda = \sqrt{kDc_{dr}}$$

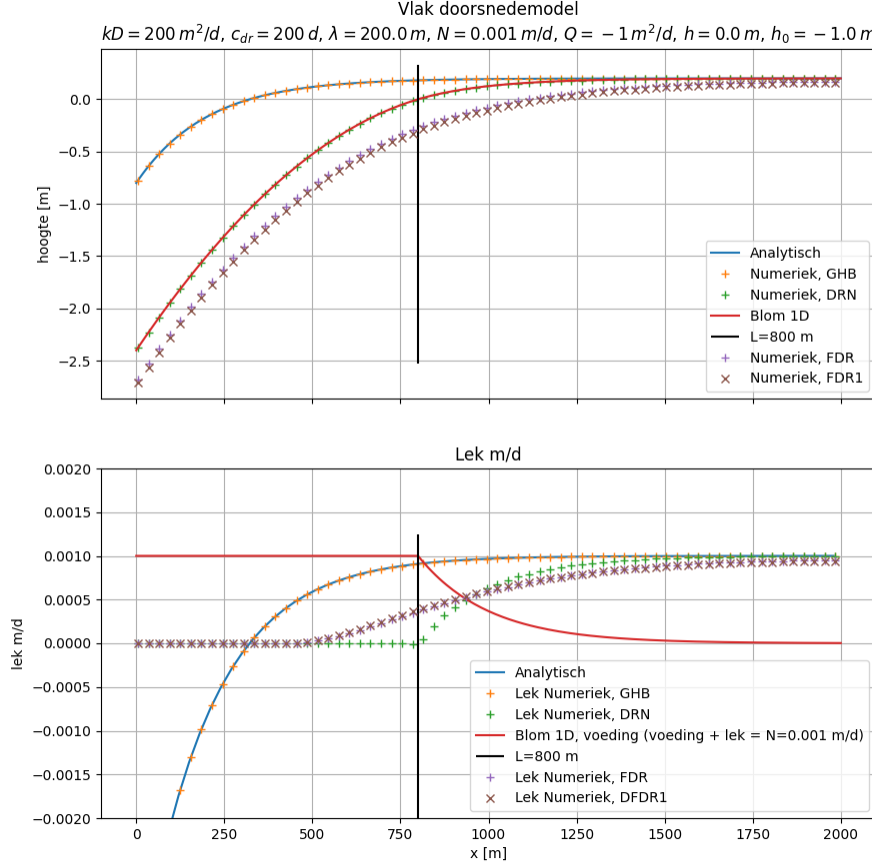
samen met het resultaat met DRN randvoorwaarden en de daarbij behorende analytische oplossing van Blom. Het resultaat met de GHB-randvoorwaarden valt samen met de analytische oplossing en dat met de DRN-randvoorwaarde valt samen met de analytische oplossing volgens Blom. De onderste figuur geeft de bijbehorende lek. Die voor het model met de GHB-randvoorwaarde slaat om in infiltratie zodra de grondwaterstand onder het (vaste) slootpeil zakt, dat wil zeggen, zodra de verlaging groter is dan Nc_{dr} . Die voor het model met de DRN-randvoorwaarde wordt nul zodra dit het geval is. De grens waarbinnen

de drains droogvallen is aangegeven met de verticale lijn. De onderste figuur geeft ook de voeding van het grondwater volgens Blom. Deze is nul waar de sloten het volledige neerslagoverschot drains/sloten het volledige neerslagoverschot afvoeren en is gelijk aan het neerslagoverschot waar de drains niets afvoeren. De voeding plus lek is gelijk aan het neerslagoverschot.



Figuur 8: Analytische oplossingen en Fdm3-simulatie voor GHB randvoorwaarden en voor DRN randvoorwaarden. De drains vallen droog zodra de grondwaterstand onder het drainniveau daalt, dat hier gelijk is aan het slootpeil. De verlaging is dan Nc . Boven de stijghoogten en onder de lek en de voeding volgens Blom die overeenkomt met de numerieke situatie met DRN randvoorwaarden. Voeding volgens Blom plus lek met DRN randvoorwaarden is gelijk aan het neerslagoverschot.

Figuur 9 is gelijk aan figuur 6 maar geeft nu ook de numeriek berekende stijghoogte en lek voor de situaties met vrije drainage. Bij de variant „FDR” is de drainageweerstand wiskundig opgelegd als $c_{dr} = \frac{\gamma}{\sqrt{q}}$ terwijl in de variant „FDR1” de drainageweerstand is berekend op basis van het slootprofiel en de grootte van het contactvlak tussen sloot en watervoerend pakket, dat weer van de slootdiepte afhangt. Het blijkt dat de uitkomsten van deze twee varianten heel weinig van elkaar verschillen. Wel zien we dat de grondwaterstand bij vrije drainage meer wordt verlaagd dan in de situatie met een vast drainagepeil. Verder blijkt dat de lek pas geheel wegvalt wanneer de grondwaterstand onder de slootbodem h_0 zakt, die hier op -1 m ligt. De grondwaterstand wordt of blijft gelijk aan $h + Nc$ zonder lek. Dit gebeurt aan de rechterzijde van het model. De einduitkomst laat zien dat de verlaging bij vrije drainage behoorlijk groter is dan in de situatie

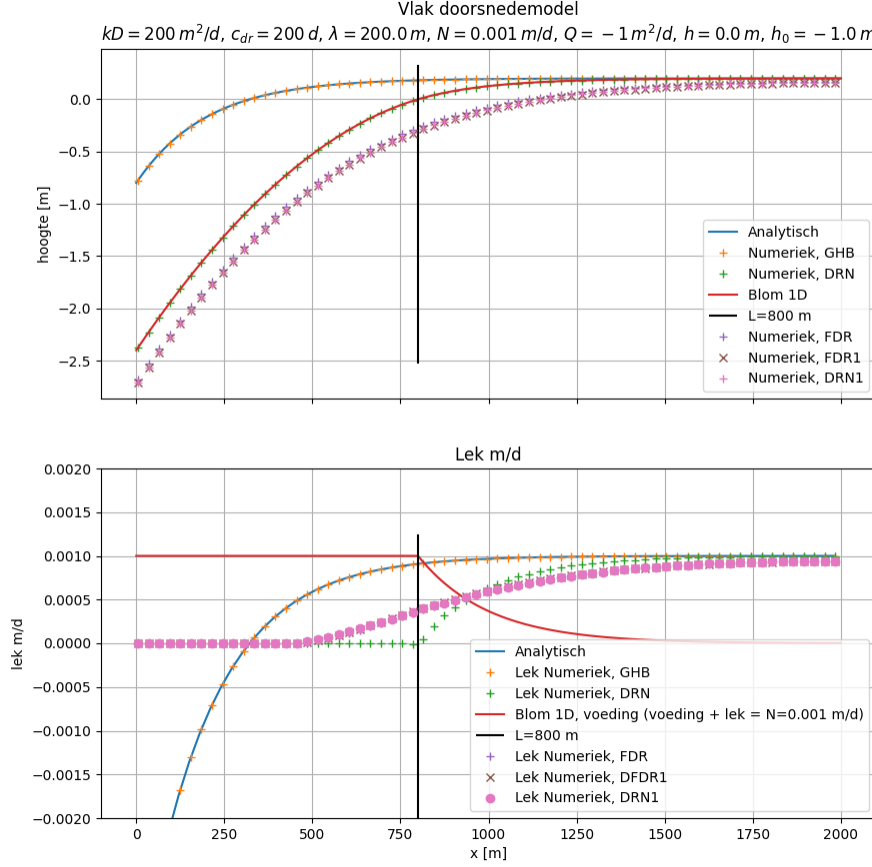


Figuur 9: Analytische oplossingen en Fdm3-simulatie van vlakke doorsnede. Het Fdm3-model is als hiervoor in figuur 6. Hieraan is het resultaat van de vrije afwatering toegevoegd, zowel die met wiskundig opgelegde drainageweerstand (variant FDR) als die met fysisch berekende drainageweerstand (variant FDR1). Boven de stijghoogten en onder de lek, respectievelijk de voeding van het pakket.

met reguliere drainage.

Figuur 10 is hetzelfde als figuur 9 met daaraan toegevoegd het resultaat van de berekening met vrije drainage middels een zestal drainniveau's, met alle dezelfde conductantie, zodanig dat de lek bij een grondwaterstand gelijk aan de referentiewaarde gelijk is aan het neerslagoverschot, net zoals dat bij alle varianten het geval is. Dit is de wijze waarop vrije afwatering in Modflow kan worden gemodelleerd. We zien dat het resultaat niet of nauwelijks afwijkt van dat van de andere twee varianten met vrije afwatering die hierboven zijn genoemd.

Figuur 11 geeft de berekende lek in de situatie met een DRN per rekencel en die met verschillende drainniveau's per rekencel (zie legenda). De groene lijn is het resultaat met een DRN die droogvalt zodra de grondwaterstand zakt tot onder het slootpeil h (de verlaging is dan Nc). De paarse lijn met stippen is het resultaat voor de situatie met de verschillende drainniveau's. De totale lek is in beide situaties hetzelfde namelijk gelijk aan het totale neerslagoverschot op het model minus de onttrekking. De gekleurde lijnen geven de lek die afkomstig is van de verschillende drainniveau's. De bruine lijn is voor het hoogste drainniveau, dat het snelst droogvalt namelijk al op ca. 1200 m vanaf de onttrekking. De blauwe lijn is voor het laagste drainniveau, dat het laatst droogvalt namelijk hier op ca. 450 m vanaf de onttrekking. De som van de lek



Figuur 10: Analytische oplossingen en Fdm3-simulatie van vlakke doorsnede. Het Fdm3-model is als hiervoor in figuur 6. Hieraan is het resultaat van de vrije afwatering toegevoegd zoals die met meerdere (in dit geval 6) drainniveau's per rekensel is uitgevoerd op de wijze waarop men dat in Modflow zou modelleren. Boven de stijghoogten en onder de lek respectievelijk de voeding van het pakket.

volgens de verschillende drainniveau's is gelijk aan de totale lek.

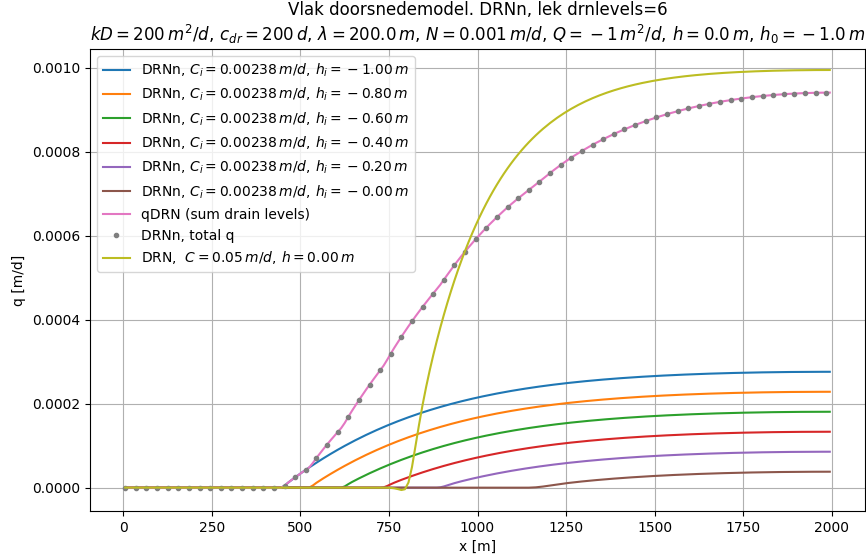
Het is duidelijk dat de lek bij vrije drainage veel verder doorgaat dan bij drains met vast drainniveau op de hoogte van het slootpeil. Dit is een veel reëlere schematisatie omdat bij vrije afwatering het slootpeil meezakt met de verlaging en de lek pas stopt als de verlaging (en het slootpeil) onder de slootbodem zakken.

19.2 De axiaal-symmetrische doorsnede

De axiaal-symmetrische doorsnede werkt qua invoer hetzelfde als de vlakke doorsnede, met uitzondering van de analytische oplossing die voor de situatie met GHB overeenkomt met de Glee plus Nc

$$\phi = h + Nc - \frac{Q}{2\pi kD} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right), \quad \lambda = \sqrt{kDc_{dr}}$$

Figuur 7 geeft het resultaat. De analytische oplossing valt samen met de numeriek met GHB randvoorwaarden en de analytische oplossing volgens Blom valt samen met de numerieke met DRN randvoorwaarden. De straal waarbinnen de grondwaterstand onder de drains is getrokken is aangegeven met de verticale lijn.

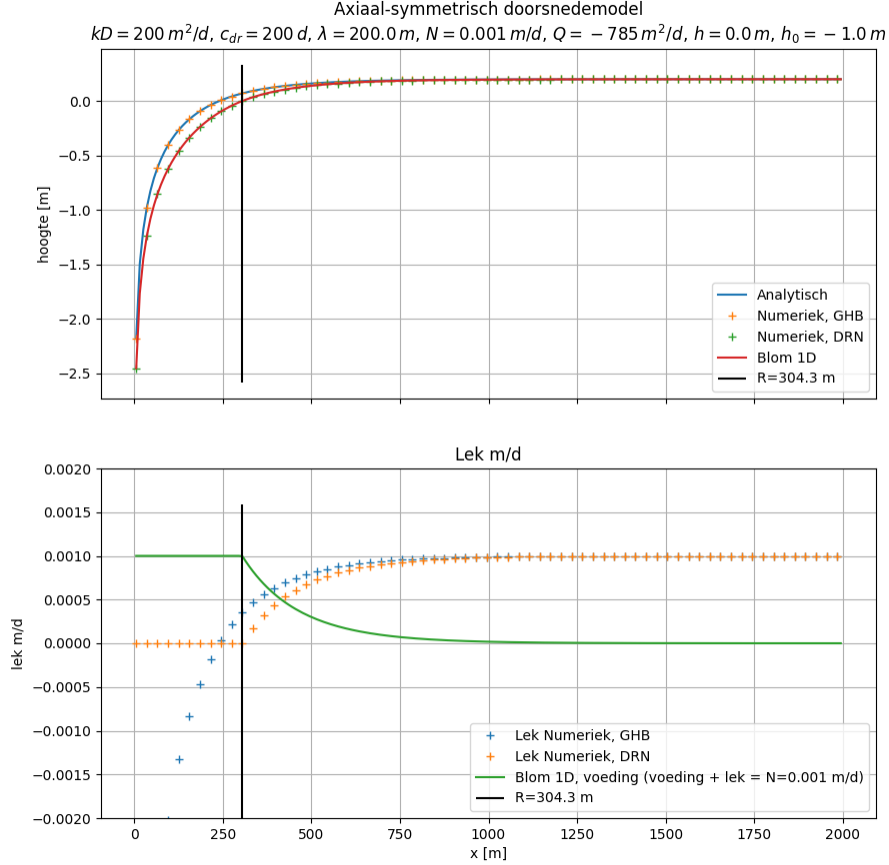


Figuur 11: Lek in het vlakke doorsnede model voor de situatie met een drainniveau (groene lijn) en met 6 drainniveau's (paarse lijn met stippen). De gekleurde lijnen geven de lek afkomstig van de drains met verschillende drainniveau's. De drains op de verschillende drainniveau's hebben dezelfde conductantie, zodanig dat de lek bij de referentiegrondwaterstand ($\phi_N = h + Nc = 0.2$ m) in beide modellen gelijk is.

Dit punt komt overeen met een verlaging gelijk aan Nc . De onderste figuur geeft de lek. Voor het model met de DRN randvoorwaarde is de lek gelijk nu binnen de zojuist genoemde radius. Voor het model met de GHB randvoorwaarde is wel infiltratie mogelijk waar de grondwaterstand zakt onder het slootpeil. Voor de analytische oplossing volgens Blom is de voeding van de watervoerende laag weergegeven. Deze is nul waar de sloten het volledige neerslagoverschot afvoeren en is gelijk aan het neerslagoverschot waar de sloten niets afvoeren. De som van voeding en lek is voor Blom/DRN gelijk aan het neerslagoverschot.

Figuur 12 geeft dezelfde resultaten weer als figuur 7 maar nu met die van vrije drainage eraan toegevoegd, opnieuw voor de twee varianten. Bij variant „FDR” is de drainageweerstand als wiskundige functie opgelegd: $c_{dr} = \frac{\gamma}{\sqrt{q}}$ en bij variant „FDR1” is de drainageweerstand berekend op basis van het slootprofiel en de actuele slootdiepte. De verlaging bij vrije drainage lijkt hier nauwelijks groter dan bij reguliere drainage, maar dat komt door de veel kleinere verticale schaal van de grafiek ten opzichte van die bij figuur 8 voor de vlakke 1D doorsnede. Deze schaalverschillen zijn het gevolg van de veel grotere afmaling in het axiaal symmetrische model ten opzichte van die van het vlakke model. Ook hier zien we dat de lek aan de rechter zijde gelijk wordt aan het neerslagoverschot.

Figuur 8 is hetzelfde als figuur 7 maar met de resultaten van beide varianten van de vrije afwatering er aan toegevoegd. FDR de variant met wiskundig opgelegde drainageweerstand ($c_{dr} = \frac{\gamma}{\sqrt{q}}$) en FDR1 die waarbij de drainageweerstand is berekend op basis van het fysieke slootprofiel. Het verschil tussen beide blijkt heel gering. De grafiek laat zien dat de verlaging bij vrije drainage, dus wanneer het slootpeil meezakt met de grondwaterstand of met afnemende lek, is groter dan bij vast slootpeil. De reikwijdte blijkt belangrijk groter dan bij vast slootpeil. De onderste figuur laat zien de lek doorgaat tot de verlaging onder de hoogte van de slootbodem zakt. Het is net of de sloten veel langer nat blijven dan bij de DRN randvoorwaarde. Maar dat is maar schijn. Het model met de DRN randvoorwaarde is eenvoudig een slechte representatie voor vrije afwatering, en datzelfde geldt voor het schema van Blom, eenvoudig omdat in deze twee benaderingen het slootpeil niet meedaalt met de grondwaterverlaging en omdat de lek in werkelijkheid niet zomaar stopt wanneer de grondwaterstand zakt onder het slootpeil in de referentiesituatie. Kortom modellering van vrije afwatering of lek met de standaard DRN optie met vast slootpeil of het schema volgens Blom zijn niet geschikt voor modellering van grondwater dat vrij lekt naar sloten zonder externe aanvoer, die meedemen

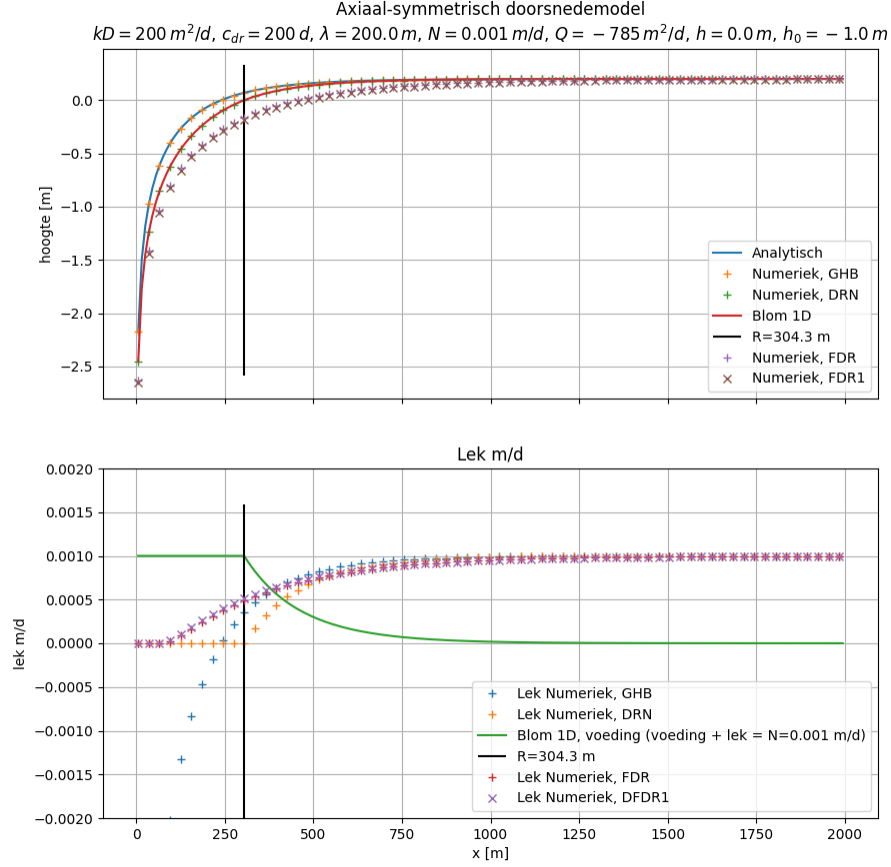


Figuur 12: Analytische oplossingen en Fdm3-simulatie van axiaal-symmetrische verticale doorsnede. Het Fdm3-model bestaat uit een enkele modellaag. Voor de gebruikte gegevens zie de kop van bovenste figuur. Vergelijking situatie met GHB- en DRN-cellen. Boven de stijghoogten en onder de lek, respectievelijk de voeding.

met de grondwaterstand en in droge tijden of bij onttrekking eenvoudig geheel droog vallen.

Tenslotte bekijken we de gemodelleerde vrije afwatering werkt out wanneer we deze simuleren met een aantal (in dit geval 6) drainniveau's binnen en enkele rekencel, zodanig dat de conductantie (reciproke weerstand) toeneemt met de grondwaterstand boven de slootbodem. Het resultaat is te zien in figuur 14. Het berekeningsresultaat van de „Modflow-methode”, met meer drainniveau's per rekencel blijkt min of meer perfect overeen te komen met de andere twee varianten voor het modelleren van vrije afwatering. Dit impliceert dat de methode gewoon werkt in Modflow.

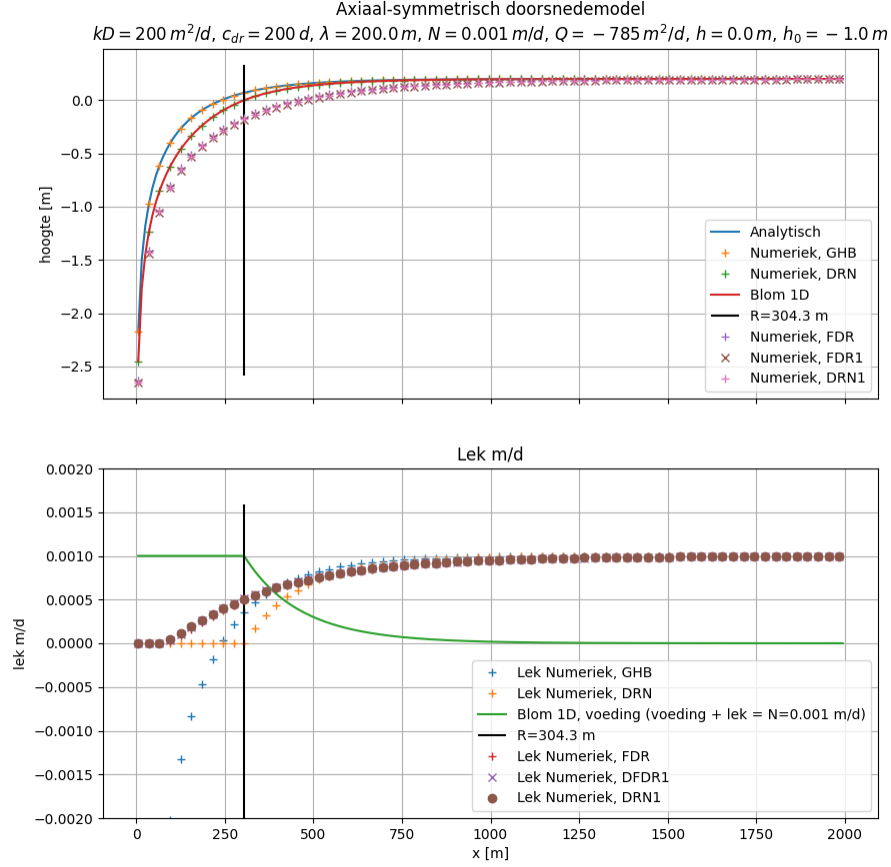
Figuur 15 geeft de voeding van het watervoerende pakket voor het model met alle toegepaste randvoorwaarden. Het is een resultaat van dezelfde simulaties als in de voorgaande figuur. De blauwe lijn geeft aan dat bij GHB-randvoorwaarden de voeding evenredig is met de verlaging en dus hoog kan oplopen. Daarom is de voeding verder van de put, bij grotere r bij vrije drainage minder dan bij de andere randvoorwaarden. Waar de grondwaterstand bij de DRN randvoorwaarde onder het niveau van de drains valt ($\phi < h = 0$) is de voeding gelijk aan het neerslagoverschot $N = 0.001 \text{ m/d}$. Buiten deze zone, dus met een verlaging minder dan Nc neemt de voeding af tot 0 op voldoende grote afstand van de put. De voeding voor vrije drainage



Figuur 13: Resultaten axiaal-symmetrische doorsneden als in figuur 7 maar met daaraan toegevoegd de resultaten van de twee varianten met vrije drainage. FDR is de variant met wiskundig opgelegde drainage-weerstand, FDR1 die met de drainageweerstand berekend op basis van het slootprofiel.

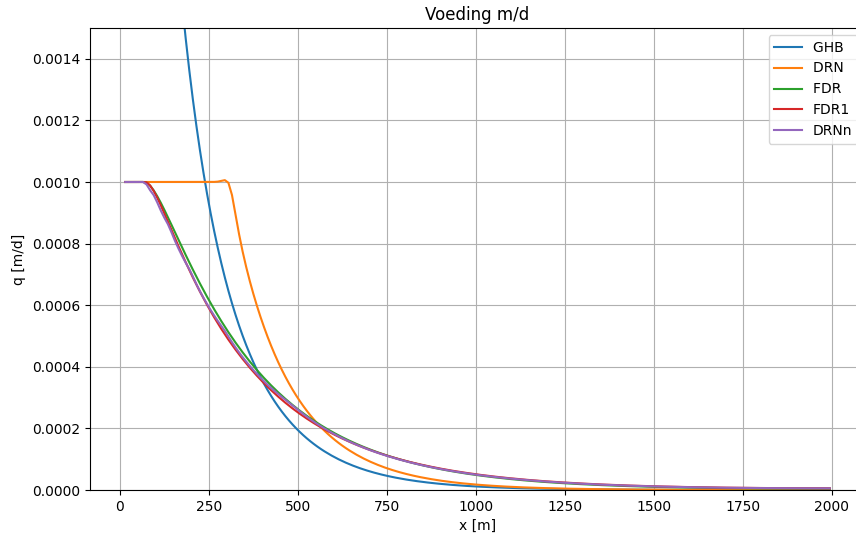
neemt eerder af dan die voor vaste drainage, namelijk vanaf de afstand waarop grondwaterstand boven de bodemhoogte $h_0 = 0$ van de sloten uitkomt. Het verschil tussen de twee varianten met vrije drainage en de variant waarbij de conductantie toeneemt met de grondwaterstand door middel van een aantal drainiveau's per rekencel is bijzonder gering. De drie varianten voor de simulatie van de vrije drainage zijn in de praktijk equivalent. Vrije drainage kan gemakkelijk met Modflow worden gesimuleerd door gebruik te maken van meerdere drainageniveau's per rekencel, dus door meer DRN randvoorwaarden aan dezelfde rekencel toe te kennen. Als laatste conclusie: het verschil tussen vaste en vrije drainage is echter aanzienlijk, en dat is het gevolg van het meedalen van het slootpeil met de grondwaterstand en de daarbij horende afname van de conductantie, respectievelijk de toename van de intreeweerstand tussen watervoerend pakket en de sloten.

Figuur 16 geeft de lek voor de situatie met een enkele DRN per rekencel en met 6 drainniveau per rekencel zodanig dat de lek bij de referentiestijghoogte ϕ_N gelijk is aan het neerslagoverschot. De groene lijn is die voor de berekening met een enkel drainniveau en de paarse lijn met puntjes die voor de situatie met 6 drainniveau's. De totale lek is in beide gevallen gelijk aan het totale neerslagoverschot op het model minus de onttrekking. Dit is hier niet direct te zien omdat voor een gemakkelijker inzicht de lek steeds is gedeeld door $2\pi r$ zodat het antwoord in m/d wordt verkregen. De gekleurde lijnen geven de lek voor elk van de 6 drainniveau's (zie legenda). De som van de gekleurde grafieken is gelijk aan de paarse met de balletjes. De

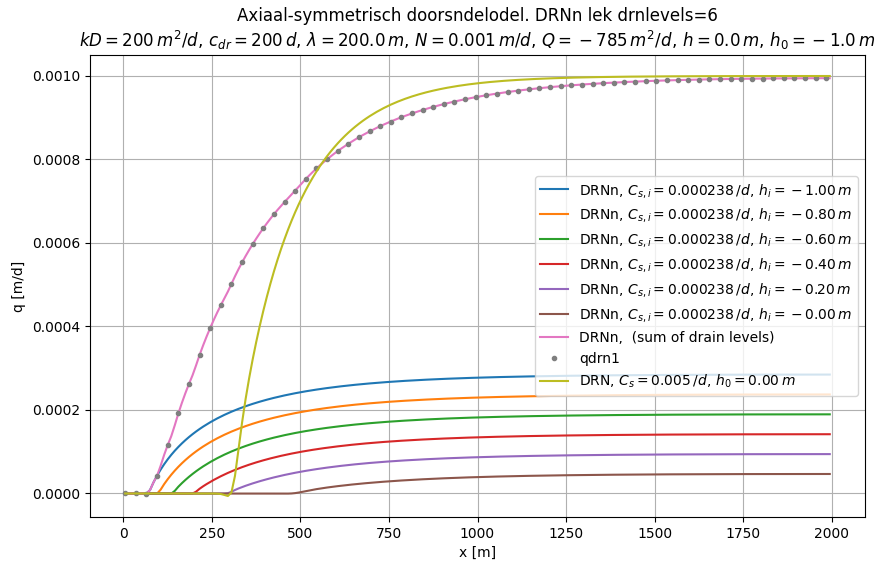


Figuur 14: Grondwaterstand en lek in de axiaal-symmetrische doorsnede berekend met dezelfde randvoorwaarden als figuur 8 maar met daaraan toegevoegd de berekening met vrije afwatering overeenkomstig Modflow, waarbij de conductantie in 6 stapjes vanaf de slootbodem toeneemt met de grondwaterstand zodanig dat de afvoer bij de referentiestijghoogte gelijk is aan het neerslagoverschot, evenals dat voor de andere berekeningsvarianten het geval is.

bruine lijn is het hoogste drainniveau. Het is duidelijk dat dit het eerste droogvalt, voor $r < 500 \text{ m}$. De blauwe lijn is de lek via de drains met het laagste drainniveau. Deze lekken het meest omdat het verschil tussen de grondwaterstand en dit laagste drainniveau het grootst is, terwijl alle drains dezelfde conductantie hebben (zie legend). Het drainniveau van de blauwe lijn ($h_i = -1 \text{ m}$) valt pas droog voor ca. $r < 60 \text{ m}$.



Figuur 15: Axiaal-symmetrische doorsnede, voeding van de aquifer voor alle varianten

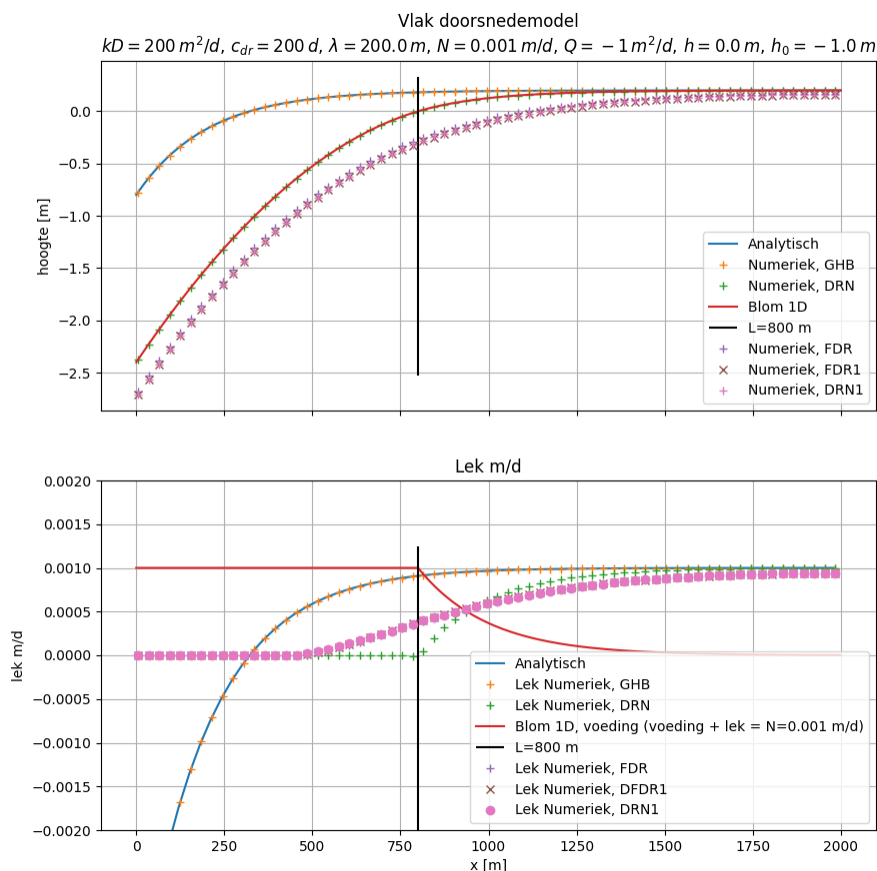


Figuur 16: In detail de voeding (aanvulling) van het watervoerende pakket in de axiaal-symmetrische situatie voor de verschillende typen randvoorwaarden.

20 Inclusief de Modflow manier met meerdere drainniveau's binnen een rekencel

Figuur 17 is dezelfde als figuur 8, maar met daaraan toegevoegd het „Modflow resultaat” (lijn Numeriek DRN1), waarin de vrije afwatering is gesimuleerd met 6 drainniveau's binnen elke cel zoals weergegeven in figuur 17 en figuur 4. Het blijkt dat noch de verlaging noch de lek met verschillende drainniveau's met de juiste conductantie zoals hierboven berekend, nauwelijks afwijkt van de twee andere varianten met vrije

ontwatering. Dit betekent dat de methode om vrije afwatering in Modflow te simuleren door middel van meerdere drainniveau's binnen rekencellen volledig werkt.



Figuur 17: Grondwaterstand (boven) en afvoer (onder) in een vlakke 1D doorsnede. De lijn „Lek Numeriek DRN1” is berekend met 6 drainniveau's. De resultaten voor deze „Modflow variant” wijken nauwelijks af van de twee eerder ontwikkelde varianten voor de simulatie van vrije afwatering. De lek valt geheel weg bij een grondwaterstand $\phi = h_0 = -1$ m en is gelijk aan het neerslagoverschot bij een grondwaterstand $\phi_N = h + Nc_{dr} = 0.2$ m

Referenties

- [Blom (1973)] Blom, J. (1973). Verlagenen van het freatisch vlak bij grondwateronttrekking in een gebied met vrije afwatering. RID mededeling 74-7. Rijkswaterstaat Instituut Drinkwatervoorziening, Den Haag.
- [De Glee (1930)] De Glee, C. (1930). De invloed van grondwateronttrekkingen op de grondwaterstand. Proefschrift, Universiteit van Amsterdam.
- [Huisman (1972)] Huisman L. (1972) Groundwater Recovery. MacMillan. New York etc., 336p. SBN 333-098870-6.

- [Louwyck et al. (2022)] Louwyck A, Vandenbohede A, Libbrecht D, Van Camp M, Walraevens, K. (2022) The radius of Influence Myth. *Water* (2022), 14, 149, <http://doi.org/10.3390/w14020149>. <https://www.mdpi.com/journal/water>. 27p.
- [Langevin et al. (2017)] Langevin et al. (2017) Documentation for the Modflow 6 Groundwater Flow Model. Chapter 55 of Section A, Groundwater, Book 6, Modeling Techniques. Techniques and methods 6-A55. U.S. Geological Survey. Reston, Virginia, 2017.