8. Lineare Abbildungen

Betrachtet man für eine gegebene $m \times n$-Matrix A die Gleichung $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ bzw. $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ als eine Abbildungsvorschrift, die jedem $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ein Element $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ zuordnet, erhält man eine Funktion, vgl. Kapitel 3. In diesem Kapitel diskutieren wir derartige Funktionen, welche auch als lineare Abbildungen bezeichnet werden.

8.1 Definition und Eigenschaften linearer Abbildungen

Wir beginnen mit einer formalen Definition einer linearen Abbildung, Verknüpfungen linearer Abbildungen und einer Charakterisierung des Wertebereichs einer linearen Abbildung, welchen man auch als Bild der linearen Abbildung bezeichnet.

8.1.1 Definition der linearen Abbildung

Ziele dieses Unterkapitels

- Was versteht man unter einer linearen Abbildung?
- Was für eine Funktion wird durch eine lineare Abbildung mit der Einheitsmatrix beschrieben?

Definition 8.1.1 — Die lineare Abbildung.
Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, die jedem Urbild $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ein Bild $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ zuordnet, heisst lineare Abbildung, wenn eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existiert mit $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ bzw.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ enthält hierbei alle wichtigen Informationen über diese Abbildung.

Ihr Typ bestimmt den natürlichen Definitionsbereich sowie die Zielmenge. Die Anzahl der Spalten n entspricht der Dimension des natürlichen Definitionsbereichs $\mathbb{R}^n$, die Anzahl der Zeilen m der Dimension der Zielmenge $\mathbb{R}^m$. Die Einträge a_{ij} bestimmen die Abbildungsvorschrift. Spricht man also von einer linearen Abbildung mit Abbildungsmatrix A, sind alle wichtigen Informationen über die Funktion durch A gegeben.

■ Beispiel 8.1.1 — Beispiele linearer Abbildungen.
Die Funktion

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$$

ist eine lineare Abbildung, siehe Abbildung 8.1. Es gilt z.B.

$$\begin{aligned} f_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2\cdot 0 \\ 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ f_1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 \\ 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ f_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2\cdot 2 \\ 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die lineare Abbildung f_1 verdoppelt und vertauscht die Komponenten eines Vektors aus $\mathbb{R}^2$. Die Funktion

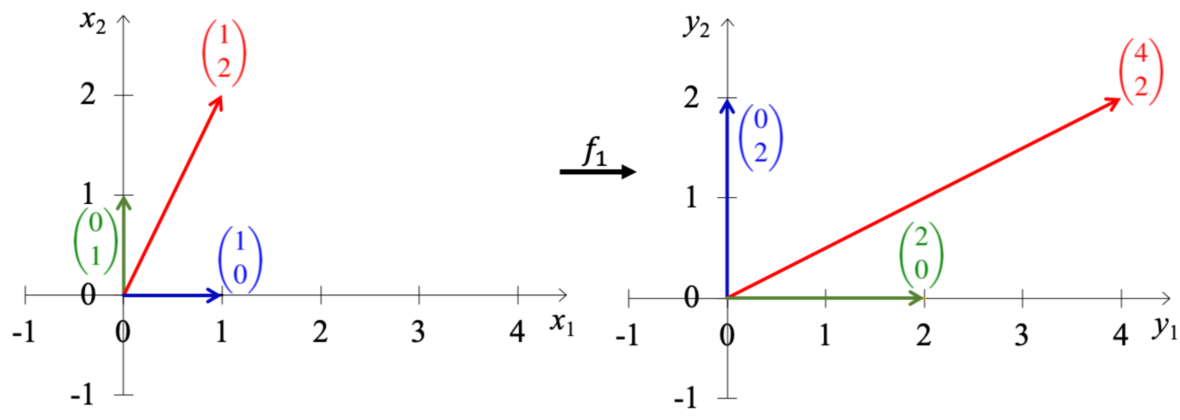

Abbildung 8.1: Darstellung der linearen Abbildung f_1.

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

ist eine lineare Abbildung, siehe Abbildung 8.2. Es gilt z.B.

$$
\begin{aligned}
f_2\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix}1\cdot 0\\2\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\\
f_2\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix}1\cdot 1\\2\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\\
f_2\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix}1\cdot 2\\2\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Die lineare Abbildung f_2 bildet einen Vektor $(x_1, x_2)^T$ auf das x_2-fache des Vektors $(1,2)^T$ ab.

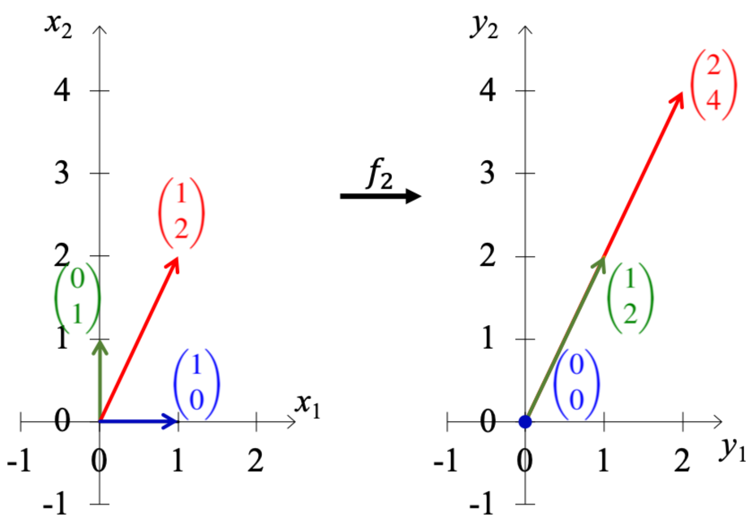

Abbildung 8.2: Darstellung der linearen Abbildung f_2.

Die Funktion

$$
f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f_3(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}7 & 9 & 8\end{pmatrix} \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = 7x_1 + 9x_2 + 8x_3
$$

ist eine lineare Abbildung, siehe Abbildung 8.3. Es gilt z.B.

$$
\begin{aligned}
f_3\left(\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}\right) &= 7\cdot 2 + 9\cdot 4 + 8\cdot 4 = 82,\\
f_3\left(\begin{pmatrix}6\\5\\3\end{pmatrix}\right) &= 7\cdot 6 + 9\cdot 5 + 8\cdot 3 = 111.
\end{aligned}
$$

Die lineare Abbildung f_3 bildet jeden Vektor aus dem $\mathbb{R}^3$ auf sein Skalarprodukt mit dem Vektor $(7,9,8)^T$ ab.

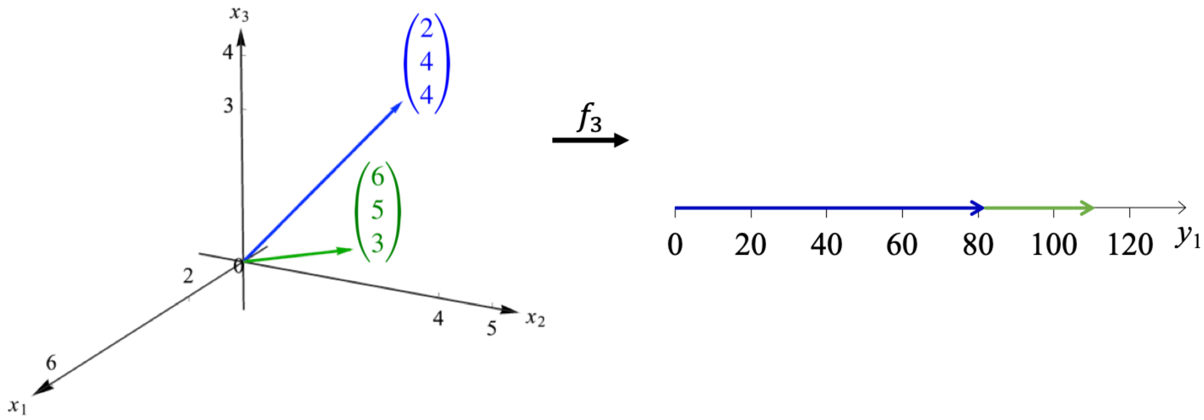

Abbildung 8.3: Darstellung der linearen Abbildung f_3.

Die Funktion

$$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f_4(\mathbf{x}) = f_4(x_1) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(x_1) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}x_1 = \begin{pmatrix}x_1\\2x_1\\3x_1\end{pmatrix}$$

ist eine lineare Abbildung, siehe Abbildung 8.4. Es gilt z.B.

$$f_4(1) = \begin{pmatrix}1\cdot 1\\2\cdot 1\\3\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},$$

$$f_4(5) = \begin{pmatrix}1\cdot 5\\2\cdot 5\\3\cdot 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\10\\15\end{pmatrix}.$$

Die lineare Abbildung f_4 bildet jeden Vektor aus $\mathbb{R}$, also jede reelle Zahl, auf das entsprechende Vielfache von $(1,2,3)^T$ ab.

■

In obigem Beispiel ergaben sich beim Einsetzen eines konkreten Vektors $\mathbf{x}$ in die Abbildungsvorschrift $f(\mathbf{x})$ oft doppelte Klammern. Häufig wird stattdessen nur ein Klammernpaar geschrieben. Man schreibt also beispielsweise

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \text{ statt } f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right).$$

■ **Beispiel 8.1.2 — Beispiele linearer Abbildungen in der Produktion.**
Betrachten wir erneut die Matrizen Z und R aus den Beispielen 6.5.1, 6.5.10 und 6.5.11. Die lineare Abbildung

$$f_Z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f_Z(\mathbf{x}) = Z\mathbf{x}$$

bildet einen Vektor $\mathbf{x}$, der Mengen verschiedener Pralinensorten (P_1, P_2 und P_3) angibt, auf die dafür benötigten Mengen an Schokolade (S_1, S_2 und S_3) ab. Beispielsweise ergibt sich

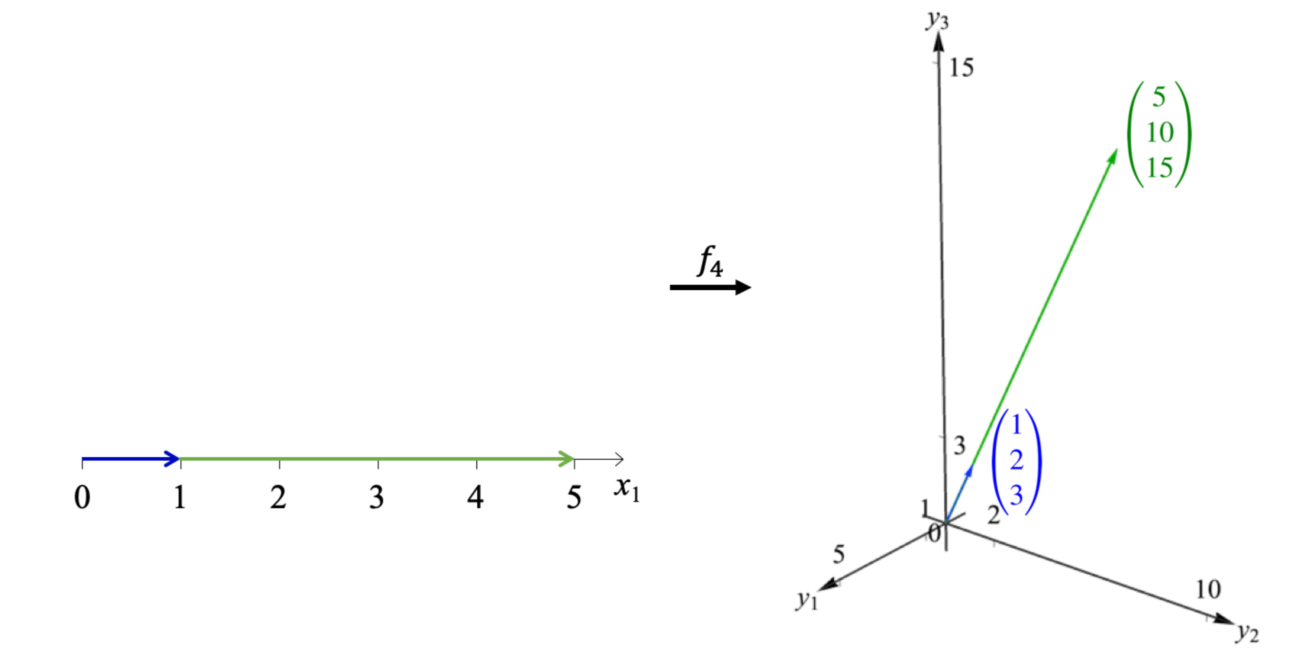

Abbildung 8.4: Darstellung der linearen Abbildung f_4.

mit $\mathbf{x} = (2,3,5)^T$ ein Funktionswert von $f_Z(\mathbf{x}) = (50,110,40)^T$, vgl. Beispiel 6.5.10. Zur Herstellung der Mengen $\mathbf{x} = (2,3,5)^T$ an Pralinen werden also die Schokoladenmengen $f_Z(\mathbf{x}) = (50,110,40)^T$ benötigt.

Die lineare Abbildung

$$f_R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f_R(\mathbf{x}) = R\mathbf{x}$$

bildet einen Vektor $\mathbf{x}$ auf $\mathbf{y} = R\mathbf{x}$ ab. Entspricht der Vektor $\mathbf{x}$ Mengen an Schokolade (S_1, S_2 und S_3), so ist die erste Komponente von $\mathbf{y}$ jene Menge an Rohstoff K_1, die zur Herstellung dieser Mengen $\mathbf{x}$ benötigt wird. Die zweite Komponente von $\mathbf{y}$ entspricht der benötigten Menge an Rohstoff K_2. Beispielsweise ergibt sich mit $\mathbf{x} = (0,5,15)^T$ ein Funktionswert von $f_R(\mathbf{x}) = (5.1,0.6)^T$, vgl. Beispiel 6.5.11. Zur Herstellung der Mengen $\mathbf{x} = (0,5,15)^T$ an Schokolade werden die Mengen $f_R(\mathbf{x}) = (5.1,0.6)^T$ an K_1 und K_2 benötigt. ■

■ Beispiel 8.1.3 — Eine lineare Abbildung in Beispiel 6.5.19 .
Betrachten wir erneut die Matrix M aus Beispiel 6.5.19. Die lineare Abbildung

$$f_M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f_M(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}$$

bildet einen Vektor $\mathbf{x}$ an Konsumenten der verschiedenen Produkte zur Zeit 1 auf die (erwartete) Anzahl an Konsumenten zur Zeit 2 ab. Es gilt u.a.

$$f_M\left(\begin{pmatrix}100\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0.5&0.3\\0.5&0.85\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50\\50\end{pmatrix},$$
$$f_M\left(\begin{pmatrix}200\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0.5&0.3\\0.5&0.85\end{pmatrix}\begin{pmatrix}200\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100\\100\end{pmatrix},$$
$$f_M\left(\begin{pmatrix}0\\100\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0.5&0.3\\0.5&0.85\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\100\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30\\85\end{pmatrix},$$
$$f_M\left(\begin{pmatrix}200\\100\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0.5&0.3\\0.5&0.85\end{pmatrix}\begin{pmatrix}200\\100\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}130\\185\end{pmatrix}.$$

■

Eine lineare Abbildung bildet also einen Vektor $\mathbf{x}$ auf das Ergebnis der Multiplikation $A\mathbf{x}$ ab. Ein Vektor $\mathbf{x}$ wird somit auf eine Linearkombination der Spaltenvektoren von A mit Gewichten $\mathbf{x}$ abgebildet. Verdoppelt man alle Gewichte, verdoppelt sich auch das Ergebnis. Verdreifacht man die Gewichte, verdreifacht sich auch das Ergebnis. Allgemein ergibt sich aus der Definition der Matrix-Vektor-Multiplikation 6.5.8 und Satz 6.5.2, dass

$$f(\alpha_1\mathbf{x}^1+\alpha_2\mathbf{x}^2)=A(\alpha_1\mathbf{x}^1+\alpha_2\mathbf{x}^2)=\alpha_1A\mathbf{x}^1+\alpha_2A\mathbf{x}^2=\alpha_1f(\mathbf{x}^1)+\alpha_2f(\mathbf{x}^2).$$

Umgekehrt kann man auch zeigen, dass jede Funktion mit der Eigenschaft

$$f(\alpha_1\mathbf{x}^1+\alpha_2\mathbf{x}^2)=\alpha_1f(\mathbf{x}^1)+\alpha_2f(\mathbf{x}^2)$$

eine lineare Abbildung ist. Man nennt diese Eigenschaft auch ”Linearität”.

Satz 8.1.1 — Charakterisierung linearer Abbildungen.
Eine Funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ ist genau dann eine lineare Abbildung, wenn für alle Urbilder $\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^2\in\mathbb{R}^n$ und $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ gilt:

$$f(\alpha_1\mathbf{x}^1+\alpha_2\mathbf{x}^2)=\alpha_1f(\mathbf{x}^1)+\alpha_2f(\mathbf{x}^2).$$

Beweis. Einen Beweis für die Implikation findet man in Kall (1984, Satz 2.13) und für die Umkehrung in Kall (1984, Seiten 79-80). ■

Die Identität, also eine Funktion, die $\mathbf{x}$ wieder auf $\mathbf{x}$ abbildet, ist eine lineare Abbildung mit $A=I$, vgl. Satz 6.5.2.

Satz 8.1.2 — Die Identität.
Ist I die Einheitsmatrix der Ordnung n, dann ist die lineare Abbildung $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ mit $f(\mathbf{x})=I\mathbf{x}=\mathbf{x}$ die Identität.

Beweis. Die Identität ist gemäss Definition 8.1.1 eine lineare Abbildung. Die Gleichung $I\mathbf{x}=\mathbf{x}$ folgt aus Satz 6.5.2. ■

Z

Ist $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, so ist eine lineare Abbildung eine Funktion, welche einem Element $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ das Element $\mathbf{y}=A\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m$ zuordnet. Eine Funktion f ist genau dann eine lineare Abbildung, wenn für alle $\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^2\in\mathbb{R}^n$ und $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ gilt: $f(\alpha_1\mathbf{x}^1+\alpha_2\mathbf{x}^2)=\alpha_1f(\mathbf{x}^1)+\alpha_2f(\mathbf{x}^2)$ (Linearitätseigenschaft).

Ist die Abbildungsmatrix die Einheitsmatrix, definiert eine lineare Abbildung die Identität $\mathbf{y}=I\mathbf{x}=\mathbf{x}$.

8.1.2 Verknüpfungen linearer Abbildungen

Ziele dieses Unterkapitels

- Wie berechnet man die Summe, Differenz und Verkettung zweier linearer Abbildungen?
- Welche Rechenregeln gelten für die Addition von Matrizen?

Die Summe zweier linearer Abbildungen $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ und $g(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ kann genau dann gebildet werden, wenn die Matrizen vom gleichen Typ sind, da dann jeweils die Definitionsmenge $\mathbb{R}^n$ und die Zielmenge $\mathbb{R}^m$ identisch sind. Um zwei lineare Abbildungen $g(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ und $h(\mathbf{x}) = C\mathbf{x}$ in der Form $h \circ g$ zusammenzusetzen, muss das Bild des $\mathbb{R}^n$ unter g, die Menge aller $B\mathbf{x}$, eine Teilmenge der Definitionsmenge von h sein. Die Zielmenge von g muss also der Definitionsmenge von h entsprechen.

Satz 8.1.3 — Verknüpfungen linearer Abbildungen.
Gegeben sind die linearen Abbildungen

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $(m \times n)$-Matrix A und $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$,
- $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $(m \times n)$-Matrix B und $g(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$,
- $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$ mit $(q \times m)$-Matrix C und $h(\mathbf{x}) = C\mathbf{x}$,

dann gilt

- $f = g \Leftrightarrow A = B$,
- $f + g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist eine lineare Abbildung mit $(f+g)(\mathbf{x}) = (A+B)\mathbf{x}$,
- $f - g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist eine lineare Abbildung mit $(f-g)(\mathbf{x}) = (A-B)\mathbf{x}$, und
- $h \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ ist eine lineare Abbildung mit $(h \circ g)(\mathbf{x}) = h(B\mathbf{x}) = CB\mathbf{x}$,

wobei wir die Summe und Differenz zweier Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ komponentenweise definieren, also $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ und $A - B = (a_{ij} - b_{ij})$.

Beweis. Einen Beweis dieser Aussagen findet man in Kall (1984, Seiten 79-80), Kall (1984, Satz 2.11) und Kall (1984, Satz 2.12). ∎

■ Beispiel 8.1.4 — Fortsetzung von Beispiel 8.1.1.
Betrachten wir erneut die Funktionen f_1 und f_2 aus Beispiel 8.1.1. Berechnet man die Summe von $f_1(\mathbf{x})$ und $f_2(\mathbf{x})$ z.B. mit $\mathbf{x} = (2,5)^T$, erhält man

$$
\begin{aligned}
f_1\left(\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix},\\
f_2\left(\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix},\\
(f_1+f_2)\left(\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right) &= f_1\left(\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right) + f_2\left(\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}15\\14\end{pmatrix},\\
(f_1-f_2)\left(\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right) &= f_1\left(\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right) - f_2\left(\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

siehe Abbildungen 8.5 und 8.6 sowie für beliebige $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$

$$
(f_1+f_2)(\mathbf{x}) = \left(\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}\right)\mathbf{x} = \begin{pmatrix}0&3\\2&2\end{pmatrix}\mathbf{x},
$$

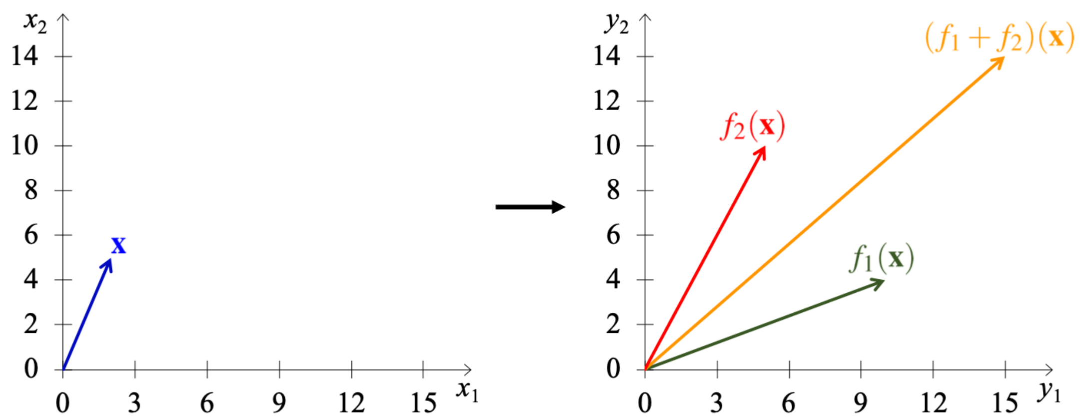

Abbildung 8.5: Darstellung der linearen Abbildung $f_1 + f_2$.

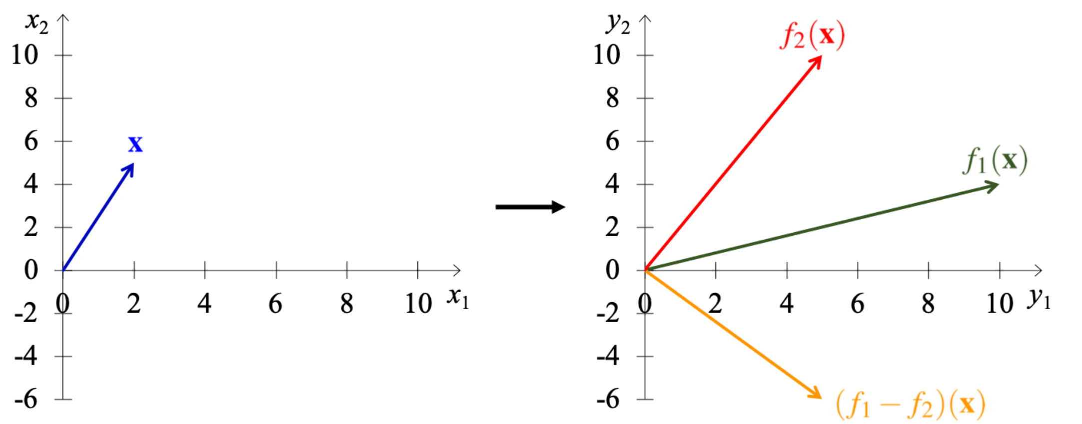

Abbildung 8.6: Darstellung der linearen Abbildung $f_1 - f_2$.

$$(f_1 - f_2)(\mathbf{x}) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Die Verkettung $f_2 \circ f_1$ entspricht der linearen Abbildung

$$f_2 \circ f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f_2(f_1(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x},$$

siehe Abbildung 8.7. Die Verkettung führt erst f_1 aus, d.h. die beiden Komponenten werden vertauscht und verdoppelt. Dann wird f_2 ausgeführt, d.h. die zweite Komponente wird mit dem Vektor $(1,2)^T$ multipliziert und das Ergebnis ausgegeben. Man erhält so laut obiger Matrizenmultiplikation das gleiche Ergebnis, wie wenn man die erste Komponente des Vektors $\mathbf{x}$ mit dem Doppelten des Vektors $(1,2)^T$, also $(2,4)^T$, multipliziert. ■

Eine Verkettung linearer Abbildungen entspricht also einer Matrizenmultiplikation und umgekehrt. Wir veranschaulichen diese Idee an einem weiteren Beispiel.

■ Beispiel 8.1.5 — Fortsetzung von Beispiel 8.1.2.
Verketten wir die Funktionen f_R und f_Z zu $f_R \circ f_Z$, entspricht dies einer linearen Abbildung

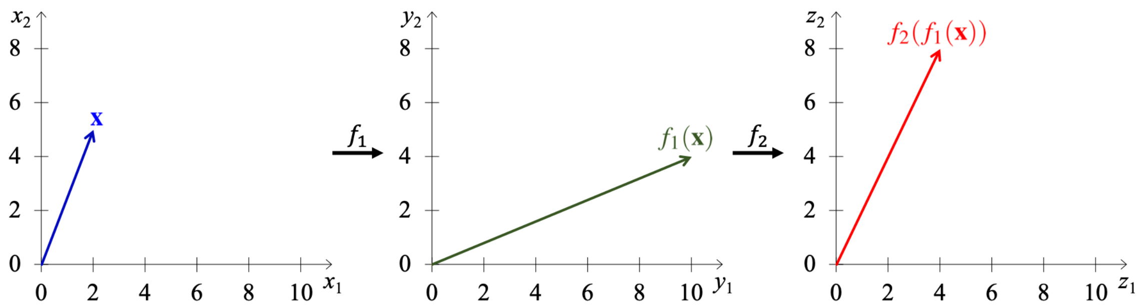

Abbildung 8.7: Darstellung der linearen Abbildung $f_2 \circ f_1$.

von

$$f_R \circ f_Z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f_R(f_Z(\mathbf{x})) = R \cdot Z \cdot \mathbf{x}.$$

Ein Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ an Pralinenmengen wird durch f_Z abgebildet auf einen Vektor $Z \cdot \mathbf{x}$ an benötigten Schokoladenmengen, der dann durch f_R auf die benötigten Rohstoffmengen $R \cdot (Z \cdot \mathbf{x})$ abgebildet wird. Die Matrizenmultiplikation $R \cdot Z$ kombiniert eine Matrix, die aus Schokoladenmengen Rohstoffmengen berechnet, und eine Matrix, die aus Pralinenmengen Schokoladenmengen berechnet, zu einer Matrix, die aus Pralinenmengen direkt die Rohstoffmengen berechnet. ■

Da die Addition zweier Matrizen komponentenweise erfolgt, ist sie sowohl kommutativ als auch assoziativ. Es gelten also unter anderen folgende Rechenregeln:

Satz 8.1.4 — Rechenregeln der Matrizenaddition.
Seien A, B und C $m \times n$-Matrizen, D eine $n \times p$-Matrix und E eine $p \times m$-Matrix. Dann gilt:

- $A + B = B + A$;
- $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- $(A + B) \cdot D = (A \cdot D) + (B \cdot D)$;
- $E \cdot (B + C) = (E \cdot B) + (E \cdot C)$.

Beweis. Einen Beweis findet man in Kall (1984, Satz 2.13). ■

Z Die Summe zweier linearer Abbildungen mit Abbildungsmatrizen $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ entspricht der linearen Abbildung $\mathbf{y} = (A + B)\mathbf{x}$. Die Differenz zweier linearer Abbildungen mit Abbildungsmatrizen $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ entspricht der linearen Abbildung $\mathbf{y} = (A - B)\mathbf{x}$. Die Verkettung $f_C \circ f_B$ zweier linearer Abbildungen f_C und f_B mit Abbildungsmatrizen $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $C \in \mathbb{R}^{q \times m}$ entspricht der linearen Abbildung $\mathbf{y} = (C \cdot B)\mathbf{x}$. Die Addition zweier Matrizen ist kommutativ, assoziativ und (zusammen mit der Multiplikation) distributiv.

8.1.3 Das Bild einer linearen Abbildung

Ziele dieses Unterkapitels

- Wie ergibt sich der Wertebereich bzw. das Bild einer linearen Abbildung und dessen Dimension aus der Abbildungsmatrix?
- Wie kann man anhand des Rangs der Abbildungsmatrix entscheiden, ob eine lineare Abbildung surjektiv, injektiv oder bijektiv ist?

In Kapitel 3 hatten wir das Bild einer Funktion definiert. Wir wiederholen diese Definition für den Spezialfall einer linearen Abbildung:

Definition 8.1.2 — Das Bild einer linearen Abbildung.
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung und $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Menge

$$f(M) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \text{es existiert ein } \mathbf{x} \in M \text{ mit } f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}$$

heisst Bild von M unter f. Man nennt $f(\mathbb{R}^n)$ auch Bild oder Wertebereich von f.

■ **Beispiel 8.1.6 — Das Bild von f_1.**
Betrachten wir erneut die lineare Abbildung

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix},$$

dann ist das Bild von f_1 die Menge

$$\begin{aligned} f_1(\mathbb{R}^2) &= \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \text{es existiert ein } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } f_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = \mathbf{y} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Das Bild entspricht also der linearen Hülle der Vektoren $(0,2)^T$ und $(2,0)^T$. Diese zwei Vektoren sind linear unabhängig. Da zwei linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^2$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ darstellen, ist das Bild also der ganze $\mathbb{R}^2$.

Interessieren wir uns nur für das Bild einer Teilmenge des Definitionsbereichs, z.B.

$$M = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1 \right\},$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} f_1(M) &= \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \text{es existiert ein } \mathbf{x} \in M \text{ mit } f_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = \mathbf{y} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1 \right\} \\ &= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le y_1 \le 2,\ 0 \le y_2 \le 2 \right\}, \end{aligned}$$

vgl. auch Abbildung 8.8. ■

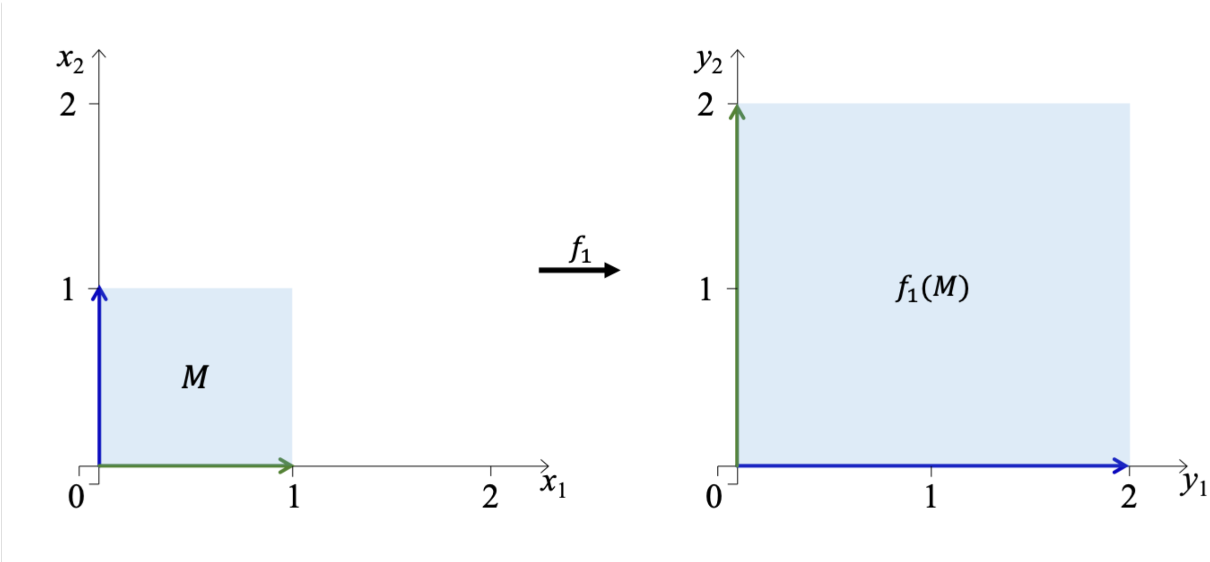

Abbildung 8.8: Das Bild von M unter f_1.

■ **Beispiel 8.1.7 — Das Bild von f_2.**
Betrachten wir erneut die lineare Abbildung

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix},$$

dann ist das Bild von f_2 die Menge

$$\begin{aligned} f_2(\mathbb{R}^2) &= \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \text{es existiert ein } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } f_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{y} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Das Bild entspricht also der linearen Hülle des Vektors $(1,2)^T$. Das Bild ist ein linearer Raum der Dimension 1, also eine Gerade, im $\mathbb{R}^2$. Interessieren wir uns nur für das Bild von

$$M = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1 \right\},$$

ergibt sich hier

$$\begin{aligned} f_2(M) &= \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \text{ es existiert ein } \mathbf{x} \in M \text{ mit } f_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{y} \right\} \\ &= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le x_2 \le 1 \right\}. \end{aligned}$$

■

Da eine lineare Abbildung mit $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ einen Vektor $\mathbf{x}$ auf eine Linearkombination der Spaltenvektoren von A mit Gewichten $\mathbf{x}$ abbildet, entspricht das Bild von f der linearen Hülle der Spaltenvektoren von A. Demzufolge gilt:

Satz 8.1.5 — Charakterisierung des Bildes.
Sei A eine $m \times n$-Matrix mit Spaltenvektoren $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n \in \mathbb{R}^m$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ eine lineare Abbildung. Es gilt:

- $f(\mathbb{R}^n) = \operatorname{lin}\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n\}$;
- Die Dimension von $f(\mathbb{R}^n)$ ist $\operatorname{rang}(A)$.

Beweis $(*)$*:* Jedes Element $\mathbf{y} \in f(\mathbb{R}^n)$ kann per Definition als $\mathbf{y} = A\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}^j \in \operatorname{lin}\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n\}$ geschrieben werden. Also gilt $f(\mathbb{R}^n) \subseteq \operatorname{lin}\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n\}$. Umgekehrt ist jedes Element $\mathbf{y} \in \operatorname{lin}\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n\}$ eine Linearkombination $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{a}^j = A \cdot (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T$ und damit das Resultat einer Matrix-Vektor-Multiplikation $A \cdot \mathbf{x}$ mit $\mathbf{x} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T$, also ist $\mathbf{y}$ ein Element von $f(\mathbb{R}^n)$. Damit gilt $\operatorname{lin}\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n\} \subseteq f(\mathbb{R}^n)$. Zusammenfassend gilt somit $f(\mathbb{R}^n) = \operatorname{lin}\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n\}$.

Da $f(\mathbb{R}^n) = \operatorname{lin}\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n\}$ gilt, ist $\dim(f(\mathbb{R}^n)) = \dim(\operatorname{lin}\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n\})$. Da die maximale Anzahl unabhängiger Spaltenvektoren aus der Menge $\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n\}$ gleich dem Rang von A ist, folgt zudem $\dim(f(\mathbb{R}^n)) = \operatorname{rang}(A)$. ■

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kann laut Satz 6.4.8 höchstens n linear unabhängige Spaltenvektoren, bzw. m linear unabhängige Zeilenvektoren haben. Hat die Matrix A also $m \le n$ linear unabhängige Spaltenvektoren, d.h. ist $\operatorname{rang}(A) = m$, so erzeugen diese Spaltenvektoren den gesamten $\mathbb{R}^m$. Jeder Punkt im $\mathbb{R}^m$ kann somit erreicht werden. Diese Eigenschaft bezeichnet man als Surjektivität, vgl. Kapitel 3. Umgekehrt kann man auch zeigen, dass es zu jedem Vektor $\mathbf{y} \in f(\mathbb{R}^n)$ genau einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ gibt, wenn $\operatorname{rang}(A) = n \le m$ gilt. Dies folgt daraus, dass die Spaltenvektoren von A in diesem Fall eine Basis von $f(\mathbb{R}^n)$ bilden. Wir nennen eine Funktion dann injektiv. Wir fassen dies in folgendem Satz zusammen:

Satz 8.1.6 — Eigenschaften linearer Abbildungen.
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ eine lineare Abbildung. Die lineare Abbildung f ist

- surjektiv genau dann, wenn $\operatorname{rang}(A) = m$;

- injektiv genau dann, wenn $\operatorname{rang}(A) = n$;
- bijektiv genau dann, wenn $\operatorname{rang}(A) = m = n$. Die Umkehrabbildung von f ist in diesem Fall eine lineare Abbildung.

Beweis (∗): Die Aussagen über die Surjektivität, Injektivität und Bijektivität folgen direkt aus den Ausführungen oben. Die Bijektivität garantiert die Existenz einer Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Es bleibt zu begründen, warum diese Umkehrfunktion f^{-1} eine lineare Abbildung ist. Gemäss Satz 8.1.1 genügt es, die Eigenschaft $f^{-1}(\alpha_1\mathbf{y}^1 + \alpha_2\mathbf{y}^2) = \alpha_1 f^{-1}(\mathbf{y}^1) + \alpha_2 f^{-1}(\mathbf{y}^2)$ für alle $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2 \in \mathbb{R}^m$ zu überprüfen. Es seien $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}^n$ so dass $f(\mathbf{x}^1) = \mathbf{y}^1$ und $f(\mathbf{x}^2) = \mathbf{y}^2$. Da f bijektiv mit Umkehrfunktion f^{-1} ist, gilt somit $\mathbf{x}^1 = f^{-1}(\mathbf{y}^1)$ und $\mathbf{x}^2 = f^{-1}(\mathbf{y}^2)$.

Aus der Linearität von f folgt $f(\alpha_1\mathbf{x}^1 + \alpha_2\mathbf{x}^2) = \alpha_1 f(\mathbf{x}^1) + \alpha_2 f(\mathbf{x}^2) = \alpha_1\mathbf{y}^1 + \alpha_2\mathbf{y}^2$. Wendet man die Umkehrfunktion auf beiden Seiten dieser Gleichung an und setzt $\mathbf{x}^1 = f^{-1}(\mathbf{y}^1)$ und $\mathbf{x}^2 = f^{-1}(\mathbf{y}^2)$ ein, ergibt sich $f^{-1}(\alpha_1\mathbf{y}^1 + \alpha_2\mathbf{y}^2) = \alpha_1\mathbf{x}^1 + \alpha_2\mathbf{x}^2 = \alpha_1 f^{-1}(\mathbf{y}^1) + \alpha_2 f^{-1}(\mathbf{y}^2)$. Also ist f^{-1} linear.

■

▪ Beispiel 8.1.8 — Eigenschaften der Abbildungen aus Beispiel 8.1.1.

Die Funktion

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$$

mit $m = n = 2$ hat eine Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

mit zwei linear unabhängigen Spaltenvektoren, also mit Rang 2. Diese lineare Abbildung ist damit bijektiv.

Die Funktion

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

mit $m = n = 2$ hat eine Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mit Rang 1. Da $1 < m = 2$ ist diese lineare Abbildung nicht surjektiv, d.h. nicht alle Punkte der Zielmenge $\mathbb{R}^2$ können erreicht werden. Beispielsweise gibt es kein $\mathbf{x}$, so dass $f_2(\mathbf{x}) = (1,1)^T$. Da $1 < n = 2$ ist diese lineare Abbildung nicht injektiv, d.h. es gibt Punkte im Bild von f_2, die das Bild von mehr als einem $\mathbf{x}$ sind. Beispielsweise gilt

$$f_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Funktion

$$f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f_3(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 7x_1 + 9x_2 + 8x_3$$

ist eine lineare Abbildung mit $m = 1$ und $n = 3$. Sie hat die Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

mit Rang 1. Da $1 = m$ ist diese lineare Abbildung surjektiv, d.h. alle Punkte der Zielmenge $\mathbb{R}$ können erreicht werden. Da $1 < n = 3$ ist diese lineare Abbildung nicht injektiv, d.h. es gibt Punkte im Bild von f_3, die das Bild von mehr als einem $\mathbf{x}$ sind. Beispielsweise gilt

$$f_3\left(\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f_3\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 56 \end{pmatrix} = 56.$$

Die Funktion

$$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f_4(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 3x_1 \end{pmatrix}$$

ist eine lineare Abbildung mit $m = 3$ und $n = 1$. Sie hat die Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

mit Rang 1. Da $1 < 3 = m$ ist diese lineare Abbildung nicht surjektiv, d.h. nicht alle Punkte der Zielmenge $\mathbb{R}^3$, u.a. $\mathbf{e}^1$, können erreicht werden. Da $1 = n$ ist diese lineare Abbildung aber injektiv, d.h. es gibt zu jedem Punkt $\mathbf{y} \in f_4(\mathbb{R})$ genau ein $\mathbf{x} = x_1 \in \mathbb{R}$ mit $f_4(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. ■

Z Das Bild $f(\mathbb{R}^n)$ einer linearen Abbildung mit Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die lineare Hülle der Spaltenvektoren von A. Es gilt $\dim(f(\mathbb{R}^n)) = \operatorname{rang}(A)$. Die lineare Abbildung ist surjektiv, wenn $\operatorname{rang}(A) = m$, injektiv, wenn $\operatorname{rang}(A) = n$, und bijektiv, wenn $\operatorname{rang}(A) = m = n$ gilt.

8.2 Die Umkehrabbildung und die Inverse einer Matrix

In diesem Kapitel diskutieren wir ausführlich die Umkehrabbildung einer linearen Abbildung und deren Zusammenhang zur Inversen einer Matrix.

8.2.1 Definition und Berechnung der Inversen einer Matrix

Ziele dieses Unterkapitels

- Was ist eine reguläre Matrix?
- Was ist die Inverse einer Matrix?
- Wie kann man die Inverse einer Matrix berechnen?
- Wie ergibt sich aus der Inversen von A die Umkehrabbildung der linearen Abbildung mit Abbildungsmatrix A?

Es folgt direkt aus Satz 8.1.6, dass eine lineare Abbildung nur dann eine Umkehrabbildung haben kann, wenn $m = n$ ist, also wenn sie quadratisch ist. Diese Eigenschaft alleine reicht jedoch nicht aus. Sie muss zudem den maximalen, also vollen, Rang haben. Matrizen mit dieser Eigenschaft nennt man regulär.

Definition 8.2.1 — Reguläre Matrizen.
Eine quadratische Matrix A der Ordnung n heisst regulär, wenn $\text{rang}(A) = n$, andernfalls heisst A singulär.

Satz 8.1.6 besagt also, dass eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ genau dann eine (lineare) Umkehrabbildung bzw. Umkehrfunktion hat, wenn A regulär ist. Wir nennen die $n \times n$-Matrix dieser Umkehrabbildung f^{-1} die Inverse von A, symbolisch A^{-1}. Da für die Umkehrabbildung

$$f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad f^{-1}(\mathbf{y}) = A^{-1}\mathbf{y}$$

gelten muss, dass

$$(f \circ f^{-1})(\mathbf{y}) = \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot A^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot A^{-1}\mathbf{y} = id(\mathbf{y}) = I\mathbf{y}$$

für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, muss für die Inverse also $A \cdot A^{-1} = I$ gelten.

Definition 8.2.2 — Die Inverse einer Matrix.
Sei A eine quadratische Matrix und I die Einheitsmatrix der Ordnung n. Falls eine quadratische Matrix A^{-1} der Ordnung n existiert, so dass

$$A \cdot A^{-1} = I$$

gilt, dann heisst A^{-1} Inverse von A. Die Matrix A heisst in diesem Fall invertierbar.

Multipliziert man $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit der Inversen A^{-1}, ergibt sich die Einheitsmatrix $I = [\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n]$. Bezeichnen wir die j-te Spalte von A^{-1} als $\bar{\mathbf{a}}^j$, gilt also für alle $j = 1, \ldots, n$, dass

$$A \cdot \bar{\mathbf{a}}^j = \mathbf{e}^j.$$

Jede Spalte j der Inversen kann also durch Lösen eines LGS mit rechter Seite $\mathbf{b} = \mathbf{e}^j$ berechnet werden. Die gesamte Inverse kann durch simultanes Lösen des LGS für rechte Seiten $\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n$ berechnet werden. Wir demonstrieren die Berechnung an einem Beispiel.

■ **Beispiel 8.2.1 — Berechnung der Inversen durch simultanes Lösen.**
Sei $B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 0 \\ -6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. B ist eine quadratische Matrix der Ordnung 3. Die Inverse B^{-1} kann durch simultanes Lösen des LGS $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \mathbf{e}^j$, $j = 1, 2, 3$ gefunden werden.

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{e}^1$	$\mathbf{e}^2$	$\mathbf{e}^3$	
①	8	0	6	1	0	0	
②	0	10	0	0	1	0	
③	-6	0	8	0	0	1	
④	1	0	$\frac{6}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}\cdot$①
⑤	0	10	0	0	1	0	②
⑥	0	0	$\frac{100}{8}$	$\frac{6}{8}$	0	1	③ + $\frac{6}{8}\cdot$①
⑦	1	0	$\frac{6}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	④
⑧	0	1	0	0	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}\cdot$ ⑤
⑨	0	0	$\frac{100}{8}$	$\frac{6}{8}$	0	1	⑥
⑩	1	0	0	$\frac{8}{100}$	0	-$\frac{6}{100}$	⑦ - $\frac{6}{100}\cdot$⑨
⑪	0	1	0	0	$\frac{1}{10}$	0	⑧
⑫	0	0	1	$\frac{6}{100}$	0	$\frac{8}{100}$	$\frac{8}{100}\cdot$⑨

Es gilt also

$$B\begin{pmatrix}\frac{8}{100}\\0\\\frac{6}{100}\end{pmatrix}=\mathbf{e}^1,\quad B\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{10}\\0\end{pmatrix}=\mathbf{e}^2\quad\text{und}\quad B\begin{pmatrix}-\frac{6}{100}\\0\\\frac{8}{100}\end{pmatrix}=\mathbf{e}^3.$$

Die Inverse lautet somit

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{8}{100}&0&-\frac{6}{100}\\0&\frac{1}{10}&0\\\frac{6}{100}&0&\frac{8}{100}\end{pmatrix}.$$

Man kann die Inverse also einfach auf der rechten Seite der Gleichungen ⑩–⑫ ablesen. ■

Ebenso kann man die Inverse auch durch eine parametrische Lösung des LGS und Einsetzen der Einheitsvektoren erhalten. Wir demonstrieren dies am gleichen Beispiel.

■ **Beispiel 8.2.2 — Berechnung der Inversen durch parametrische Lösung.**
Sei $B=\begin{pmatrix}8&0&6\\0&10&0\\-6&0&8\end{pmatrix}$. B ist eine quadratische Matrix der Ordnung 3. Die Inverse B^{-1} kann auch durch die parametrische Lösung des LGS $B\mathbf{x}=\mathbf{b}$ gefunden werden.

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}$	
①	8	0	6	b_1	
②	0	10	0	b_2	
③	-6	0	8	b_3	
④	1	0	$\frac{6}{8}$	$\frac{1}{8}b_1$	$\frac{1}{8}\cdot$①
⑤	0	10	0	b_2	②
⑥	0	0	$\frac{100}{8}$	$\frac{6}{8}b_1 + b_3$	③ + $\frac{6}{8}\cdot$ ①
⑦	1	0	$\frac{6}{8}$	$\frac{1}{8}b_1$	④
⑧	0	1	0	$\frac{1}{10}b_2$	$\frac{1}{10}\cdot$⑤
⑨	0	0	$\frac{100}{8}$	$\frac{6}{8}b_1 + b_3$	⑥
⑩	1	0	0	$\frac{8}{100}b_1$ - $\frac{6}{100}b_3$	⑦ - $\frac{6}{100}\cdot$⑨
⑪	0	1	0	$\frac{1}{10}b_2$	⑧
⑫	0	0	1	$\frac{6}{100}b_1 + \frac{8}{100}b_3$	$\frac{8}{100}\cdot$⑨

Für allgemeines $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ ergibt sich also die Lösung

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{8}{100}b_1 - \frac{6}{100}b_3 \\ \frac{1}{10}b_2 \\ \frac{6}{100}b_1 + \frac{8}{100}b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{100} \\ 0 \\ \frac{6}{100} \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \\ 0 \end{pmatrix} b_2 + \begin{pmatrix} -\frac{6}{100} \\ 0 \\ \frac{8}{100} \end{pmatrix} b_3 = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{8}{100} & 0 & -\frac{6}{100} \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{6}{100} & 0 & \frac{8}{100} \end{pmatrix}}_{=B^{-1}} \mathbf{b}.$$

Die Spalten der Matrix B^{-1} hätte man ebenso auch durch Einsetzen der Einheitsvektoren für $\mathbf{b}$ erhalten können, vgl. Beispiel 8.2.1. Daher erhält man auch durch dieses Vorgehen die Inverse von B. ▪

Erhält man bei obigem Vorgehen auf der linken Seite eine Nullzeile und eine parametrische rechte Seite, so hat das LGS nur für manche, aber nicht alle Werte von $\mathbf{b}$ eine Lösung. In diesem Fall ist die Matrix also nicht invertierbar.

Satz 8.2.1 — Berechnung der Inversen durch ein parametrisches LGS.
Eine quadratische Matrix A der Ordnung n ist genau dann invertierbar, wenn das parametrische LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für beliebiges $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar ist.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass für gegebene, invertierbare Matrix A das lineare Gleichungssystem eine Lösungsmenge mit nur einem Element hat und damit eindeutig lösbar ist: Ist A invertierbar, d.h. existiert eine Matrix A^{-1} mit $A \cdot A^{-1} = I$, dann ist für jedes $\mathbf{b}$ eine Lösung des LGS gleich $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Denn es gilt:

$$A\mathbf{x} = A \cdot A^{-1}\mathbf{b} = I\mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

Gemäss folgendem Satz 8.2.2 gilt $\text{rang}(A) = n$. Aus Satz 7.4.5 folgt, dass die Lösungsmenge die Dimension $n - n = 0$ hat. Also ist die Lösungsmenge ein Punkt, d.h. sie hat nur ein Element.

Wir zeigen nun die Umkehrung: Wenn das parametrische LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für beliebige $\mathbf{b}$ eindeutig lösbar ist, die Lösungsmenge also für jedes $\mathbf{b}$ die Dimension 0 hat, dann muss gemäss Satz 7.4.5 die Matrix vollen Rang haben, $\text{rang}(A) = n$. Mt folgendem Satz 8.2.2 folgt die Invertierbarkeit von A. ■

In der Regel ist es jedoch einfacher, die Invertierbarkeit einer Matrix mit Hilfe des Rangs zu überprüfen, denn eine Inverse existiert genau dann, wenn die lineare Abbildung $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ bijektiv ist. Es gilt folgender Satz:

Satz 8.2.2 — Die Inverse und die Umkehrabbildung.
Sei A eine quadratische Matrix der Ordnung n. Die Inverse A^{-1} existiert genau dann, wenn $\operatorname{rang}(A) = n$, bzw. wenn A regulär ist. In diesem Fall ist die Umkehrabbildung f^{-1} der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ gegeben als

$$f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad f^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}.$$

Beweis. Einen Beweis findet man in Kall (1984, Satz 2.18) und Kall (1984, Lemma 2.17). ∎

■ **Beispiel 8.2.3 — Die Umkehrabbildung von f_1.**
Wir betrachten erneut die lineare Abbildung

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix},$$

welche die Komponenten x_1 und x_2 verdoppelt und vertauscht. Es gilt

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Die Matrix ist also regulär. Demnach hat f_1 eine Umkehrabbildung.

Die Umkehrabbildung sollte die Komponenten erneut vertauschen und die Einträge halbieren. Man vermutet also, dass die Umkehrabbildung eine lineare Abbildung ist mit Matrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir überprüfen diese Vermutung, indem wir die Bedingung $A \cdot A^{-1} = I$ überprüfen. Und in der Tat ergibt sich

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Also ist die Umkehrabbildung $f_1^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f_1^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}$ und

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

■

■ **Beispiel 8.2.4 — Die Umkehrabbildung von f_2.**
Wir betrachten erneut die lineare Abbildung

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix},$$

welche den Vektor $\mathbf{x}$ auf das x_2-fache des Vektors $(1,2)^T$ abbildet. Es gilt

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 < n = 2.$$

Die Matrix ist also singulär. Demnach hat f_2 keine Umkehrabbildung.

Wir überprüfen dieses Ergebnis anschaulich: Da bei dieser Abbildung die Komponente x_1 gar keine Rolle spielt, werden u.a. die Vektoren $(0,1)^T$ und $(2,1)^T$ in der Definitionsmenge beide auf den gleichen Vektor der Zielmenge, nämlich $(1,2)^T$, abgebildet. Die Umkehrrelation bildet also $(1,2)^T$ sowohl auf $(0,1)^T$ als auch auf $(2,1)^T$ ab. Damit ist die Umkehrrelation keine Funktion. ■

Z Eine reguläre Matrix ist eine $n \times n$-Matrix A mit vollem Rang, also $\operatorname{rang}(A) = n$. A^{-1} ist die Inverse von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wenn $AA^{-1} = I$. Man kann sie durch simultanes Lösen von $A\mathbf{x} = \mathbf{e}^k, k = 1,\ldots,n$ oder über eine parametrische Lösung des Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit allgemeiner rechter Seite bestimmen.

Ist A^{-1} die Inverse von A, dann ist $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$ die Umkehrabbildung der linearen Abbildung $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$.

8.2.2 Orthogonale Matrizen

Ziele dieses Unterkapitels

- Was ist eine orthogonale Matrix?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Inversen und der Transponierten einer orthogonalen Matrix? Ist die Transponierte ebenfalls orthogonal?
- Welche Aussagen lassen sich über Zeilen- und Spaltenvektoren orthogonaler Matrizen treffen?

Im Allgemeinen ist es aufwändig, die Inverse einer Matrix A zu bestimmen, also die Matrix A^{-1} zu finden, für die $AA^{-1} = I$ gilt. Eine Ausnahme bilden sogenannte orthogonale Matrizen:

Definition 8.2.3 — Orthogonale Matrix.
Eine quadratische Matrix A der Ordnung n heisst orthogonal, wenn $AA^T = I$.

Multipliziert man eine orthogonale Matrix A mit ihrer Transponierten A^T, so ergibt sich also definitionsgemäss die Einheitsmatrix I. Für eine orthogonale Matrix entspricht die Transponierte also der Inversen. Es gilt $A^{-1} = A^T$.

■ **Beispiel 8.2.5 — Orthogonale Matrizen.**
Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$$

hat die Transponierte

$$A^T = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Zudem gilt

$$\begin{aligned}AA^T &= \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.6 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.8 & 0.6 \cdot (-0.8) + 0.8 \cdot 0.6 \\ (-0.8) \cdot 0.6 + 0.6 \cdot 0.8 & (-0.8) \cdot (-0.8) + 0.6 \cdot 0.6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.\end{aligned}$$

Die Matrix A ist also orthogonal und somit ist $A^{-1} = A^T$.

Die Transponierte der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$$

ist

$$B^T = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$BB^T = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 6 + 8 \cdot 8 & 6 \cdot (-8) + 8 \cdot 6 \\ (-8) \cdot 6 + 6 \cdot 8 & (-8) \cdot (-8) + 6 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \neq I.$$

Die Matrix B ist also nicht orthogonal.

Die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

entspricht ihrer Transponierten

$$C^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = C.$$

Zudem gilt

$$CC^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Die Matrix C ist also orthogonal und somit ist $C^{-1} = C^T = C$. Abbildung 8.9 visualisiert die Spaltenvektoren der Matrizen A, B und C.

■

Ihren Namen verdankt die orthogonale Matrix den Eigenschaften ihrer Spalten- und Zeilenvektoren. Ergibt das Produkt der Matrix A mit ihrer Transponierten A^T die Einheitsmatrix, dann muss das Produkt von A mit der j-ten Spalte von A^T den j-ten Einheitsvektor ergeben.

Da die j-te Spalte von A^T dem transponierten j-ten Zeilenvektor von A, also $(\mathbf{a}_j)^T$, entspricht, vgl. Abbildung 8.10, ergibt sich

$$A(\mathbf{a}_j)^T = \mathbf{e}^j$$

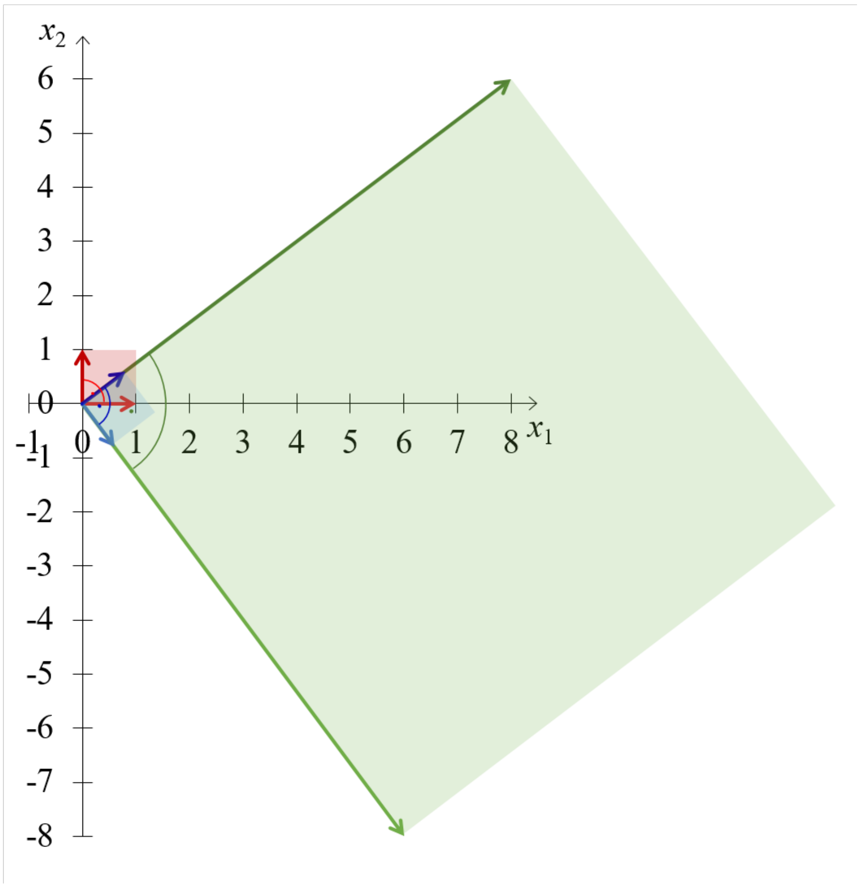

Abbildung 8.9: Spaltenvektoren der Matrizen A (blau), B (grün) und C (rot).

bzw. zeilenweise gelesen

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{a}_j)^T = \langle \mathbf{a}_i^T, \mathbf{a}_j^T \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } i \neq j \\ 1 & \text{wenn } i = j. \end{cases}$$

Das Skalarprodukt aus dem (transponierten) i-ten Zeilenvektor von A mit dem j-ten Spaltenvektor von A^T ist also 0, wenn $i \neq j$. Je zwei verschiedene Zeilenvektoren $\mathbf{a}_i$ und $\mathbf{a}_j$ sind somit orthogonal. Dass die Zeilenvektoren paarweise orthogonal sind, reicht jedoch nicht aus, damit eine Matrix orthogonal ist, auch wenn die Bezeichnung "orthogonale Matrix" so verstanden werden könnte. Das Skalarprodukt des i-ten (transponierten) Zeilenvektors mit sich selbst muss 1 sein. Die Norm jedes Zeilenvektors ist somit 1. Alle Zeilenvektoren müssen demnach zusätzlich normiert sein, also die Länge 1 aufweisen.[1] Folgender Satz fasst obige Ergebnisse zusammen und ergänzt, dass bei einer orthogonalen Matrix nicht nur alle Zeilen- sondern auch alle Spaltenvektoren paarweise orthogonal sind und Norm 1 haben:

Satz 8.2.3 — Eigenschaften orthogonaler Matrizen.
A ist orthogonal.
$\Leftrightarrow$ Die Inverse von A existiert und $A^{-1} = A^T$.

[1] Einige Autoren bezeichnen orthogonale Matrizen daher auch als orthonormal.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}a_{1k} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}a_{1k} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}a_{1k} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{1k}a_{2k} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}a_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{1k}a_{nk} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}a_{nk} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}a_{nk} \end{pmatrix}$$

Abbildung 8.10: Darstellung des Matrixprodukts AA^T.

$\Leftrightarrow$ Alle Zeilenvektoren von A sind paarweise orthogonal und haben Norm 1.
$\Leftrightarrow$ A^T ist orthogonal, also $A^TA = I = AA^T$.
$\Leftrightarrow$ Alle Spaltenvektoren von A sind paarweise orthogonal und haben Norm 1.

Beweis. Die erste Äquivalenz folgt direkt aus Definition 8.2.3 einer orthogonalen Matrix. Die zweite Äquivalenz wurde im Text gezeigt. Die dritte Äquivalenz ergibt sich aus Satz 8.2.5. Aus ihm folgt $AA^{-1} = A^{-1}A$. Mit der ersten Äquivalenz $A^T = A^{-1}$ entspricht dies $AA^T = A^TA$. Mit A ist also auch A^T orthogonal und umgekehrt. Die vierte Äquivalenz ergibt sich aus der zweiten und der dritten Äquivalenz und der Tatsache, dass die Spaltenvektoren von A genau die Zeilenvektoren von A^T sind. ■

■ Beispiel 8.2.6 — Eine orthogonale 3×3-Matrix.
Die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.6 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

ist eine orthogonale Matrix, vgl. Abbildung 8.11. Es gilt

$$DD^T = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.6 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & -0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ausserdem gilt

$$D^TD = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & -0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.6 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bildet man das Skalarprodukt der ersten und zweiten Zeile, ergibt sich

$$\mathbf{d}_1(\mathbf{d}_2)^T = 0.8 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0.6 \cdot 0 = 0.$$

Das Skalarprodukt der zweiten und dritten Zeile ist

$$\mathbf{d}_2(\mathbf{d}_3)^T = 0 \cdot (-0.6) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0.8 = 0.$$

Das Skalarprodukt der ersten und dritten Zeile ist

$$\mathbf{d}_1(\mathbf{d}_3)^T = 0.8 \cdot (-0.6) + 0 \cdot 0 + 0.6 \cdot 0.8 = 0.$$

Ebenso ergeben alle Skalarprodukte verschiedener Spalten 0. Die Norm des ersten Spaltenvektors ist

$$\|\mathbf{d}^1\| = \sqrt{0.8^2 + (-0.6)^2} = 1.$$

Ebenso gilt $\|\mathbf{d}^2\| = \|\mathbf{d}^3\| = 1$. Auch jeder Zeilenvektor hat eine Norm von 1.

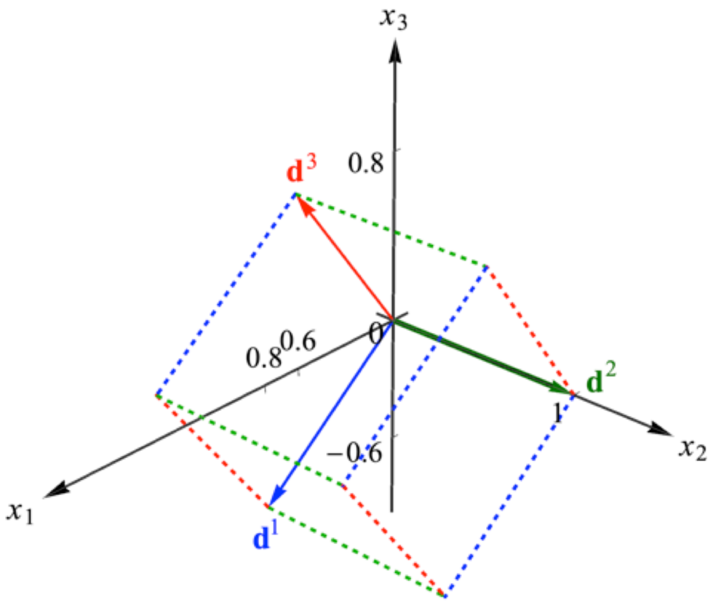

Abbildung 8.11: Spalten von D.

■

Z $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heisst orthogonal, wenn $AA^T = I$.

Ist A orthogonal, so gilt $A^{-1} = A^T$. Zudem ist $A^{-1} = A^T$ ebenfalls orthogonal.

Alle Zeilen- und Spaltenvektoren einer orthogonalen Matrix haben die Länge 1. Je zwei verschiedene Zeilenvektoren einer orthogonalen Matrix sind orthogonal. Je zwei verschiedene Spaltenvektoren einer orthogonalen Matrix sind orthogonal.

8.2.3 Die Inverse zur Lösung von Gleichungssystemen

Ziele dieses Unterkapitels

- Wie kann man mit Hilfe von A^{-1} eine Lösung des linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ bestimmen?

In den Beispielen 8.2.1 und 8.2.2 zeigten wir, wie man mit Hilfe des Eliminationsverfahrens die Inverse einer Matrix bestimmen kann. Ist die Inverse einer Matrix bekannt, kann diese auch umgekehrt genutzt werden, um ein entsprechendes Gleichungssystem mit beliebiger rechter Seite zu lösen, denn

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

ist eine Lösung des LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$A\mathbf{x} = AA^{-1}\mathbf{b} = I\mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

Satz 8.2.4 — Lösung eines LGS mithilfe der Inversen.
Sei A eine invertierbare quadratische Matrix der Ordnung n und $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Dann gilt

$$A^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{x}.$$

Beweis. Der Beweis folgt direkt aus den Überlegungen oben und Satz 8.2.1. ■

■ Beispiel 8.2.7 — Die Lösung eines LGS mit Hilfe der Inversen.
In Beispiel 8.2.5 zeigten wir, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$$

orthogonal ist und die einfach zu berechnende Inverse

$$A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$$

hat. Das LGS

$$\begin{aligned} 0.6x_1 + 0.8x_2 &= 10 \\ -0.8x_1 + 0.6x_2 &= 20 \end{aligned}$$

mit Koeffizientenmatrix A und rechter Seite $\mathbf{b} = (10, 20)^T$ lässt sich also einfach lösen, indem man

$$A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \cdot (0.6) + 20 \cdot (-0.8) \\ 10 \cdot (0.8) + 20 \cdot (0.6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

berechnet. Somit ist $(x_1, x_2)^T = (-10, 20)^T$ und $\mathbb{L} = \{(-10, 20)^T\}$. ■

Zu beachten ist, dass A aber nur invertierbar ist, wenn A eine reguläre Matrix, also eine quadratische Matrix mit vollem Rang ist, und somit das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat. Nur in diesem Fall kann diese eindeutige Lösung durch die Multiplikation der Inversen mit der rechten Seite bestimmt werden.

Z Existiert die Inverse A^{-1} der Koeffizientenmatrix A, so hat das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ die eindeutige Lösung $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

8.2.4 Rechenregeln für invertierbare Matrizen

Ziele dieses Unterkapitels

- Welche Rechenregeln gelten für invertierbare Matrizen?

Da die Berechnung der Inversen im Allgemeinen aufwändig ist, sind Rechenregeln, aus denen man eine Inverse bestimmen kann, besonders wertvoll. Folgender Satz fasst einige Rechenregeln für reguläre, also invertierbare, Matrizen zusammen.[2]

[2] Man führt Matrixoperationen, die sich auf eine Matrix beziehen (z.B. Invertieren und Transponieren), immer vor Operationen aus, die sich auf zwei Matrizen beziehen (z.B. Multiplikation und Addition). Beispielsweise ist im Allgemeinen $AA^{-1} \neq (AA)^{-1}$.

Satz 8.2.5 — Rechenregeln invertierbarer Matrizen.
Seien A und B reguläre Matrizen der Ordnung n. Dann gilt:

i. $A^{-1}A = AA^{-1} = I$;
ii. $(A^{-1})^{-1} = A$;
iii. A^T ist ebenfalls regulär mit $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;
iv. $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$, falls $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
v. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Beweis. Punkt i. folgt direkt aus $f(f^{-1}(\mathbf{x})) = f^{-1}(f(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$, vgl. Satz 3.2.2. Punkt ii. ergibt sich aus der Definition der Inversen von A^{-1}, also $(A^{-1})^{-1}$, und den Rechenregeln der Multiplikation von Matrizen, Satz 6.5.2:

$$\begin{aligned}
A^{-1}(A^{-1})^{-1} &= I \\
AA^{-1}(A^{-1})^{-1} &= A\,I \\
\underbrace{(AA^{-1})}_{I}(A^{-1})^{-1} &= A \\
(A^{-1})^{-1} &= A.
\end{aligned}$$

Punkt iii. ergibt sich ebenfalls aus den Rechenregeln der Multiplikation von Matrizen, Satz 6.5.2, und der Definition der Inversen von A^T. Multipliziert man A^T mit $(A^{-1})^T$, ergibt sich unter Anwendung von Satz 6.5.2.

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I.$$

Damit muss laut Definition $(A^{-1})^T$ die Inverse von A^T sein, also

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Punkt iv. zeigt man ebenso mithilfe der Rechenregeln der Multiplikation:

$$(\alpha A)(\tfrac{1}{\alpha}A^{-1}) = \alpha\tfrac{1}{\alpha}AA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Also ist laut Definition $\frac{1}{\alpha}A^{-1}$ die Inverse von αA.
Punkt v. kann man ebenfalls mithilfe der Rechenregeln zeigen. Es gilt

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Damit ist $B^{-1}A^{-1}$ die Inverse von AB, also

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

■

■ Beispiel 8.2.8 — Fortsetzung von Beispielen 8.2.5 und 8.1.6.
Wir betrachten erneut die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

aus Beispiel 8.2.5. Wir wissen, dass die Matrizen A und C orthogonal sind und damit ihre Inverse ihrer Transponierten entspricht.

Betrachten wir die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung f_1 aus Beispiel 8.1.6, so ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2C.$$

Damit ist die Abbildungsmatrix der Umkehrabbildung von f_1

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = (2C)^{-1} = \frac{1}{2}C^{-1} = \frac{1}{2}C^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich gilt auch $B = 10A$. Damit ist die Inverse von B gleich

$$B^{-1} = (10A)^{-1} = \frac{1}{10}A^{-1} = \frac{1}{10}A^T = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.06 & -0.08 \\ 0.08 & 0.06 \end{pmatrix}.$$

Multiplizieren wir A und die Abbildungsmatrix von f_1, erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6 & 1.2 \\ 1.2 & -1.6 \end{pmatrix}.$$

Suchen wir die Inverse obiger Matrix, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1.6 & 1.2 \\ 1.2 & -1.6 \end{pmatrix}^{-1} &= \left(\begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & -0.4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

In der Tat gilt

$$\begin{pmatrix} 1.6 & 1.2 \\ 1.2 & -1.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & -0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

■

■ **Beispiel 8.2.9 — Fortsetzung von Beispielen 8.2.1 und 8.2.6.**
Wir betrachten erneut die Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 0 \\ -6 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.6 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

aus Beispielen 8.2.1 und 8.2.6. Offensichtlich gilt: $B = 10D$. Aus Beispiel 8.2.6 wissen wir zudem, dass D orthogonal ist, also dass $D^{-1} = D^T$. Anwendung obiger Rechenregeln ergibt:

$$\begin{aligned}
B^{-1} &= (10D)^{-1} = \frac{1}{10}D^{-1} = \frac{1}{10}D^T \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0.8 & 0 & -0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.08 & 0 & -0.06 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0.06 & 0 & 0.08 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

In Beispiel 8.2.1 wurde diese Inverse deutlich aufwändiger mithilfe des simultanen Lösens der linearen Gleichungssysteme $B\mathbf{x} = \mathbf{e}^1$, $B\mathbf{x} = \mathbf{e}^2$ und $B\mathbf{x} = \mathbf{e}^3$ durch das Eliminationsverfahrens gelöst. Natürlich ergab sich das gleiche Ergebnis für B^{-1}.

Wir können auch direkt aus diesem Ergebnis schliessen, dass die Inverse von B^{-1} wieder B ist, also

$$\begin{pmatrix} 0.08 & 0 & -0.06 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0.06 & 0 & 0.08 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 0 \\ -6 & 0 & 8 \end{pmatrix} = B$$

gelten muss. ∎

Abbildung 8.12 veranschaulicht den Zusammenhang zwischen einer Matrix A und ihrer Inversen. Aus der Symmetrie der Abbildung 8.12 ergibt sich, dass die Inverse der Inversen wieder die Matrix selbst ist.

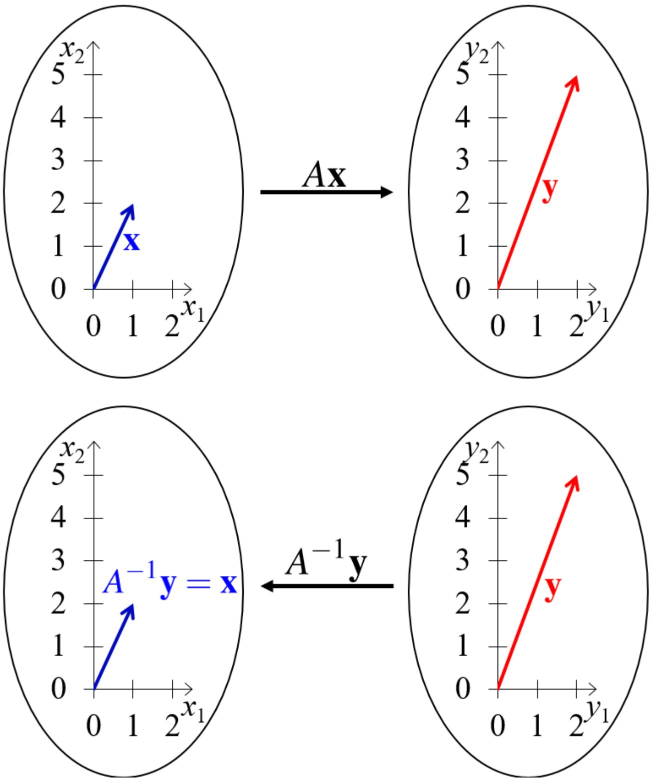

Abbildung 8.12: Allgemeine Darstellung inverser Matrizen.

Will man nun einen komplizierten Ausdruck, welcher Matrizen beinhaltet, berechnen, ist es oft einfacher, den Ausdruck mithilfe der Rechenregeln vor dem Einsetzen der bekannten Werte zu vereinfachen. Wir demonstrieren dies in folgendem Beispiel:

■ Beispiel 8.2.10 — Rechnen mit Matrizen.
Von den regulären 3×3 Matrizen X, Y und B sei bekannt, dass

$$\begin{aligned} BX &= 2I \\ YB &= X. \end{aligned}$$

Zudem sei wieder

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 0 \\ -6 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Wollen wir einen Ausdruck wie

$$B5X + 2X^{-1}B^{-1} + 2B^{-1}X + 2IX^{-1}B^{-1} + B^{-1}Y^{-1}4X + X^{-1}Y2B$$

berechnen, könnte man zunächst die erste Gleichung nutzen, um X zu bestimmen, dann das Ergebnis in der zweiten Gleichung einsetzen, um Y zu bestimmen, die jeweiligen Inversen bilden und alles einsetzen. Kürzer und damit weniger fehleranfällig ist es, in einem ersten Schritt folgende Vereinfachung vorzunehmen:

$$\begin{aligned}
&B5X + 2X^{-1}B^{-1} + 2B^{-1}X + 2IX^{-1}B^{-1} + B^{-1}Y^{-1}4X + X^{-1}Y2B \\
=&5BX + 2(BX)^{-1} + 2B^{-1}X + 2I(BX)^{-1} + 4(YB)^{-1}X + 2X^{-1}YB \\
\overset{BX=2I}{=}&5(2I) + 2(2I)^{-1} + 2B^{-1}(B^{-1}2I) + 2I(2I)^{-1} + 4(YB)^{-1}X + 2X^{-1}YB \\
=&10I + 2(\tfrac{1}{2}I) + 4B^{-1}B^{-1} + I + 4(YB)^{-1}X + 2X^{-1}YB \\
=&10I + I + 4(B^{-1})^2 + I + 4(YB)^{-1}X + 2X^{-1}YB \\
\overset{YB=X}{=}&10I + I + 4(B^{-1})^2 + I + 4X^{-1}X + 2X^{-1}X \\
=&10I + I + 4(B^{-1})^2 + I + 4I + 2I \\
=&18I + 4(B^{-1})^2.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der ersten Umformung alle reellen Zahlen als ersten Faktor in den Produkten geschrieben und die Rechenregel $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ genutzt. Im nächsten Schritt haben wir

$$BX = 2I \Leftrightarrow X = B^{-1}2I$$

genutzt. In folgendem Schritt haben wir genutzt, dass das Produkt der Matrix B^{-1} mit der Einheitsmatrix I wieder der Matrix B^{-1} entspricht. Zudem ergibt das Produkt einer Matrix mit ihrer Inversen die Einheitsmatrix und es gilt

$$(2I)^{-1} = \frac{1}{2}I^{-1} = \frac{1}{2}I.$$

Nach weiteren Vereinfachungen ersetzten wir

$$YB = X,$$

um auf das Ergebnis zu kommen. Mit

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.08 & 0 & -0.06 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0.06 & 0 & 0.08 \end{pmatrix}$$

aus dem vorherigen Beispiel ergibt sich dann

$$(B^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 0.0028 & 0 & -0.0096 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0.0096 & 0 & 0.0028 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} &B5X + 2X^{-1}B^{-1} + 2B^{-1}X + 2IX^{-1}B^{-1} + B^{-1}Y^{-1}4X + X^{-1}Y2B \\ =&18I + 4(B^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 18.0112 & 0 & -0.0384 \\ 0 & 18.04 & 0 \\ 0.0384 & 0 & 18.0112 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

Z Multipliziert man eine Matrix A mit ihrer Inversen ergibt sich die Einheitsmatrix: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Die Inverse der Inversen ist wieder A: $(A^{-1})^{-1} = A$; Die Inverse der Transponierten entspricht der Transponierten der Inversen: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$; Die Inverse des α-fachen von A entspricht der Inversen von A geteilt durch α: $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$, falls $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; Die Inverse eines Produkts entspricht dem Produkt der Inversen in umgekehrter Reihenfolge: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

8.3 Determinanten

Neben dem Rang ist die Determinante eine weitere wichtige Kennzahl einer Matrix. Wir werden sie in folgenden Kapiteln zur Bestimmung von sogenannten Eigenwerten und zur Diskussion von Funktionen in mehreren Variablen benötigen.

8.3.1 Die Determinante einer 2×2-Matrix

Ziele dieses Unterkapitels

- Wie berechnet man die Determinante einer 2×2-Matrix allgemein?
- Wie kann man den Betrag der Determinante einer 2×2-Matrix geometrisch interpretieren?
- Wie verändert sich der Wert der Determinante einer 2×2-Matrix, wenn man
  - die zwei Spalten der Matrix vertauscht?
  - eine Spalte der Matrix mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$ multipliziert?
  - die ganze Matrix, also alle Spalten, mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$ multipliziert?
- Welchen Wert hat die Determinante einer singulären 2×2-Matrix?
- Welchen Wert hat die Determinante einer orthogonalen 2×2-Matrix?
- Wie kann man die Determinante einer 2×2-Matrix einfach berechnen, wenn alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen gleich 0 sind?

Per se entspricht die Determinante einer 2×2-Matrix A betragsmässig der Fläche des Parallelogramms

$$P = \left\{ \mathbf{x} \;\middle|\; \mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{a}^1 + \alpha_2 \mathbf{a}^2,\ 0 \le \alpha_i \le 1,\ i = 1,2 \right\},$$

das durch die Spaltenvektoren $\mathbf{a}^1$, $\mathbf{a}^2$ bestimmt ist, vgl. Abbildung 8.13. Kommt man wie in Abbildung 8.13 durch eine Drehung des ersten Spaltenvektors um weniger als 180°

gegen den Uhrzeigersinn zum zweiten Spaltenvektor, ergibt sich die Fläche als

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{(a_{11}+a_{12})(a_{22}+a_{21})}_{\substack{\text{Fläche des}\\ \text{grossen Rechtecks}}} - \underbrace{2(a_{12}a_{21})}_{\substack{\text{2 Flächen der}\\ \text{roten Rechtecke}}} - \underbrace{2\frac{1}{2}(a_{22}a_{12})}_{\substack{\text{2 Flächen der}\\ \text{grünen Dreiecke}}} - \underbrace{2\frac{1}{2}(a_{11}a_{21})}_{\substack{\text{2 Flächen der}\\ \text{gelben Dreiecke}}}\\
=&a_{11}a_{22}+a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{12}a_{21}-2a_{12}a_{21}-a_{22}a_{12}-a_{11}a_{21}\\
=&a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.
\end{aligned}
$$

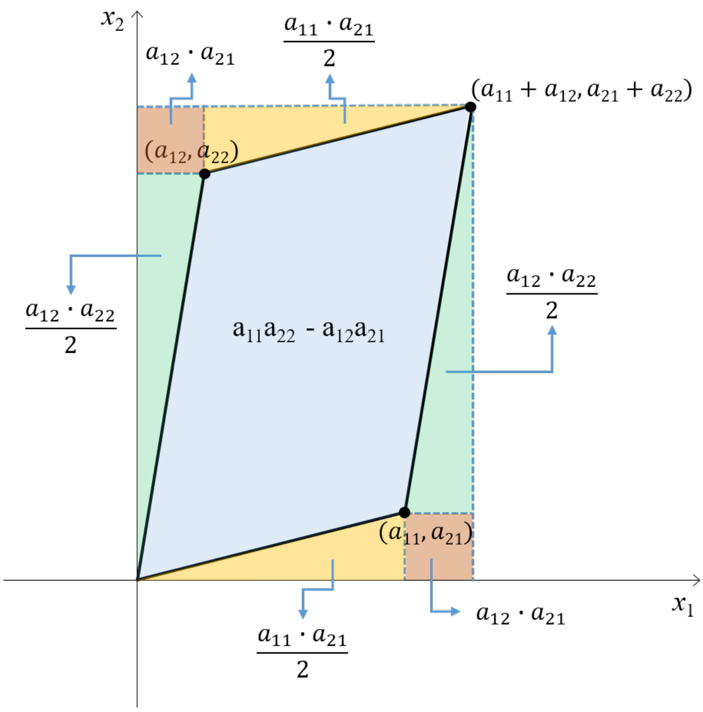

Abbildung 8.13: Berechnung der Fläche eines Parallelogramms.

Definition 8.3.1 — Die Determinante einer 2×2-Matrix.
Die Determinante einer 2×2-Matrix A ist

$$\det\, A = \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Die Notation $|A|$ ist eine alternative Schreibweise für $\det\, A$ (und ist nicht zu verwechseln mit dem Betrag einer reellen Zahl).

■ **Beispiel 8.3.1 — Berechnung einer Determinante.**
Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

hat Determinante

$$\det \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = 14 \cdot 8 - 4 \cdot 3 = 100.$$

Das in Abbildung 8.14 dargestellte Parallelogramm hat einen Flächeninhalt von 100. ■

■ **Beispiel 8.3.2 — Determinanten orthogonaler Matrizen.**
Die Einheitsmatrix ist eine orthogonale Matrix. Ihre Spaltenvektoren spannen ein Quadrat mit Seitenlängen von 1 auf. Die Determinante der Einheitsmatrix ist daher 1, vgl. Abbildung 8.15:

$$\det(I) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$$

Geometrisch ist es also nicht überraschend, dass jede orthogonale Matrix eine Determinante mit einem Betrag von 1 hat. So gilt z.B. auch für die orthogonale Matrix A aus Beispiel 8.2.5

$$\det\begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix} = 0.6 \cdot 0.6 - (0.8)(-0.8) = 1.$$

■

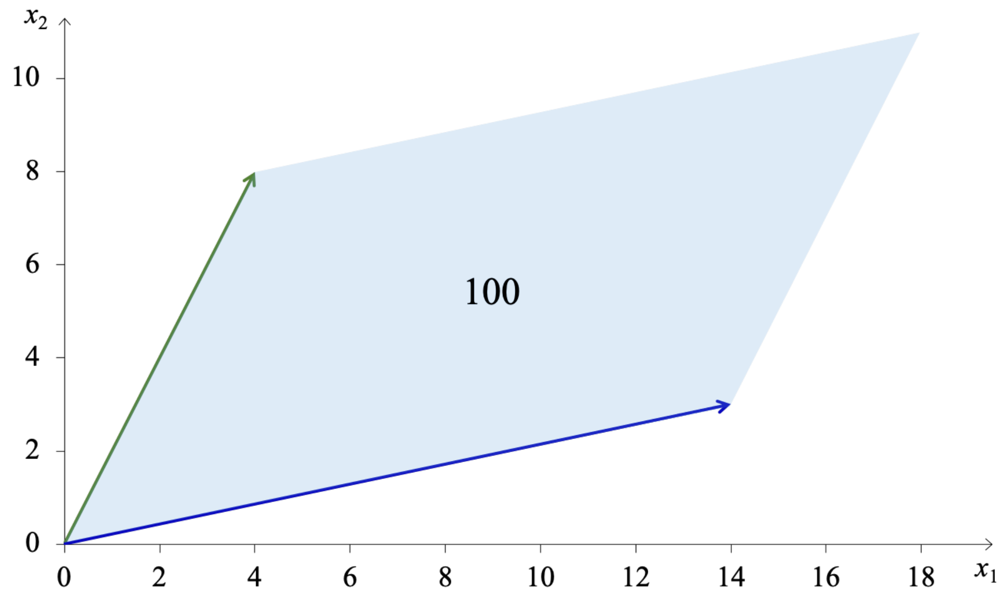

Abbildung 8.14: Ein Parallelogramm mit Flächeninhalt 100.

Die Determinante einer 2×2-Matrix hat einige interessante Eigenschaften, die im folgenden Satz zusammengefasst werden:

Satz 8.3.1 — Eigenschaften der Determinante einer 2×2-Matrix.
Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ eine Matrix mit Spalten $\mathbf{a}^1$, $\mathbf{a}^2$ und Zeilen $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. Dann gilt:

i. Vertauscht man zwei Spalten, so ändert die Determinante das Vorzeichen, bleibt aber betragsmässig gleich, d.h. $\det([\mathbf{a}^2, \mathbf{a}^1]) = -\det([\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2]) = -\det(A)$.
ii. Multipliziert man eine Spalte von A mit $\alpha \in \mathbb{R}$, so hat die sich so ergebende Matrix eine Determinante von $\alpha \det(A)$, d.h. $\det([\alpha\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2]) = \det([\mathbf{a}^1, \alpha\mathbf{a}^2]) = \alpha \det(A)$.
iii. Sind alle Elemente unter der Hauptdiagonalen von A gleich 0, also $a_{21} = 0$, so gilt $\det(A) = a_{11}a_{22}$.
iv. $\det(A) = 0$ genau dann, wenn $\operatorname{rang}(A) < 2$.
v. Ist A orthogonal, dann ist $|\det(A)| = 1$, also $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = -1$.

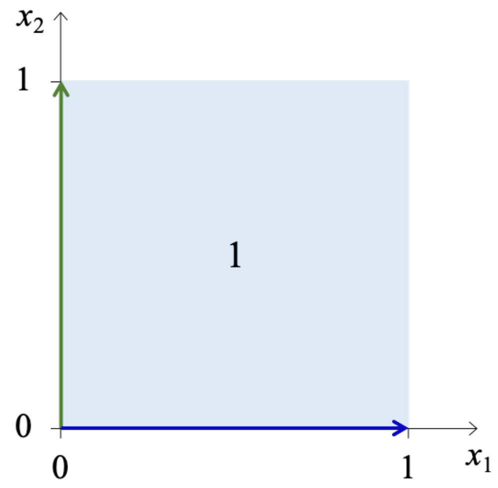

Abbildung 8.15: Ein Quadrat mit Seitenlänge 1.

Alle Teile des Satzes werden durch Nachrechnen in folgendem Beweis gezeigt. Wir veranschaulichen geometrische Zusammenhänge in einem darauffolgenden Beispiel.

Beweis.
Teil i:

$$\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -\det(A).$$

Teil ii: Es gilt

$$\det\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \alpha a_{11}a_{22} - \alpha a_{12}a_{21} = \alpha\det(A)$$

und

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix} = \alpha a_{11}a_{22} - \alpha a_{12}a_{21} = \alpha\det(A).$$

Teil iii. ergibt sich direkt aus

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = a_{22}a_{11} - a_{12}\cdot 0 = a_{22}a_{11}.$$

Teil iv: Der Rang von A ist kleiner als 2, wenn es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\mathbf{a}^2 = \alpha\mathbf{a}^1$ oder $\mathbf{a}^1 = \mathbf{0}$. Im ersten Fall ergibt sich

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha a_{11} \\ a_{21} & \alpha a_{21} \end{pmatrix} = a_{11}\alpha a_{21} - \alpha a_{11}a_{21} = 0.$$

Im zweiten Fall ergibt sich

$$\det\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = 0\cdot a_{22} - a_{12}\cdot 0 = 0.$$

Ist umgekehrt die Determinante gleich 0, so muss $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$ gelten. Falls eine dieser vier Werte gleich 0 ist, muss auf der anderen Seite der Gleichung auch mindestens ein Wert gleich 0 sein. In diesem Fall hat die Matrix dann eine Nullzeile oder Nullspalte. Sind alle vier Zahlen ungleich 0, kann die Gleichung zu $\frac{a_{22}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$ umgeformt werden. In diesem Fall ist $\mathbf{a}^2$ also ein Vielfaches von $\mathbf{a}^1$. Teil v. zeigt man wie folgt: Ist A orthogonal, so haben die Spaltenvektoren von A die Länge 1 und sind paarweise orthogonal. Aus der Orthogonalität der Spaltenvektoren folgt $(\mathbf{a}^1)^T\mathbf{a}^2 = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$ und damit

$$(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})^2 = a_{11}^2a_{12}^2 + a_{21}^2a_{22}^2 + 2a_{11}a_{12}a_{21}a_{22} = 0$$

bzw.

$$a_{11}^2a_{12}^2 + a_{21}^2a_{22}^2 = -2a_{11}a_{12}a_{21}a_{22}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\det(A)^2 &= (a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12})^2 \\
&= a_{22}^2a_{11}^2 + a_{21}^2a_{12}^2 - 2a_{22}a_{11}a_{21}a_{12} \\
&= a_{22}^2a_{11}^2 + a_{21}^2a_{12}^2 + a_{11}^2a_{12}^2 + a_{21}^2a_{22}^2 \\
&= (a_{11}^2 + a_{21}^2) \cdot (a_{12}^2 + a_{22}^2) = ||\mathbf{a}^1||^2 \cdot ||\mathbf{a}^2||^2.
\end{aligned}$$

Ist A orthogonal, so gilt zudem $||\mathbf{a}^1||^2 = ||\mathbf{a}^2||^2 = 1$. Somit ist die quadrierte Determinante und damit auch der Betrag der Determinante in diesem Fall gleich 1. ■

Wir formulieren kurz die Eigenschaften aus Satz 8.3.1: Sei A eine 2×2-Matrix. Dann gilt:

i. Vertauscht man die Spalten von A, verändert sich das Vorzeichen der Determinante von A, betragsmässig bleibt sie gleich.
ii. Multipliziert man eine Spalte von A mit α, so ver-α-facht sich die Determinante von A.
iii. Sind alle Elemente unter der Hauptdiagonalen von A gleich 0, so entspricht die Determinante dem Produkt der Elemente auf der Hauptdiagonalen.
iv. Sind die beiden Spalten oder Zeilen von A linear abhängig, dann ist die Determinante von A gleich 0.
v. Ist A orthogonal, so ist der Betrag der Determinante von A gleich 1.

Wir demonstrieren diese Eigenschaften an einem Beispiel.

■ Beispiel 8.3.3 — Eigenschaften der Determinante.
Wir betrachten erneut die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

mit

$$\det\begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = 14 \cdot 8 - 4 \cdot 3 = 100.$$

Vertauscht man die beiden Spalten von A ergibt sich die Determinante

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot 3 - 14 \cdot 8 = -100 = -\det(A),$$

wie in Satz 8.3.1 i. gezeigt. Verdoppelt man dagegen die erste Spalte von A, verdoppelt sich laut Satz 8.3.1 ii. die Determinante,

$$\det\begin{pmatrix} 28 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = 28 \cdot 8 - 4 \cdot 6 = 200.$$

Auch geometrisch kann man leicht sehen, dass die Verdopplung der ersten Spalte die Länge einer Seite des Parallelogramms und damit dessen Inhalt verdoppelt. Damit verdoppelt sich auch die Determinante, vgl. Abbildung 8.16.

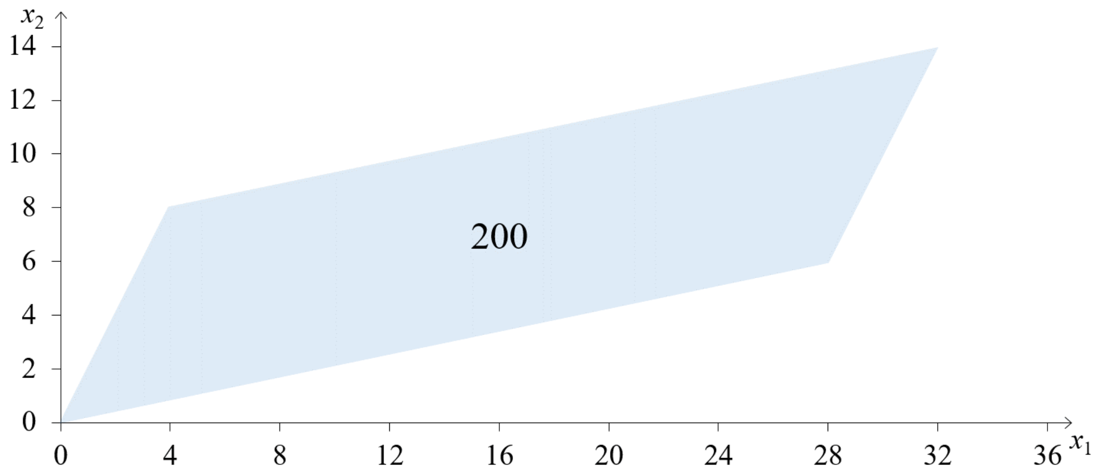

Abbildung 8.16: Ein Parallelogramm mit Flächeninhalt 200.

Da die Determinante einer Matrix mit zwei linear abhängigen Spaltenvektoren immer 0 ist, gilt

$$\det \begin{pmatrix} 14 & 28 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 14 \cdot 6 - 28 \cdot 3 = 0,$$

vgl. auch Satz 8.3.1 iv. Zwei linear abhängige Spaltenvektoren spannen kein Parallelogramm auf. Die Fläche ist 0, vgl. Abbildung 8.17.

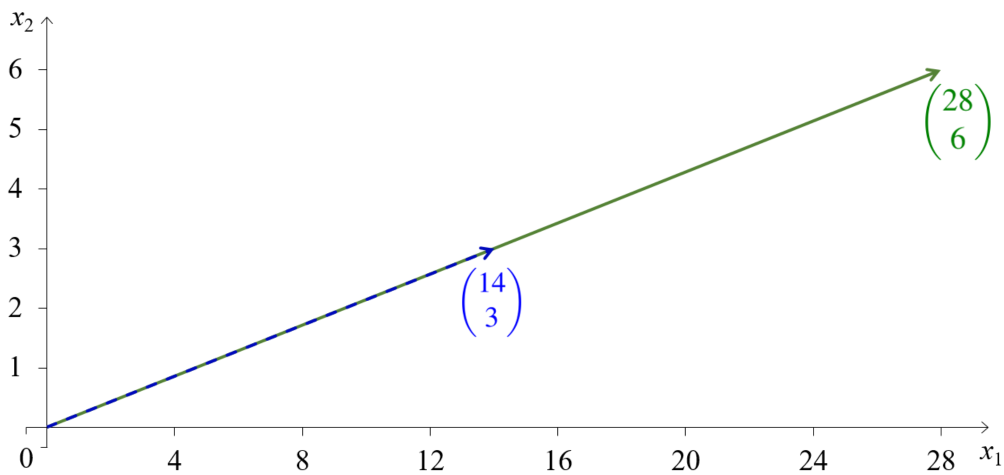

Abbildung 8.17: Zwei linear abhängige Vektoren spannen keine Fläche auf.

Die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

ist $14 \cdot 8 = 112$. Geometrisch erkennt man, dass es sich um ein Parallelogramm mit Grundseite 14 und Höhe 8 handelt, vgl. Abbildung 8.18 und Satz 8.3.1 iii.

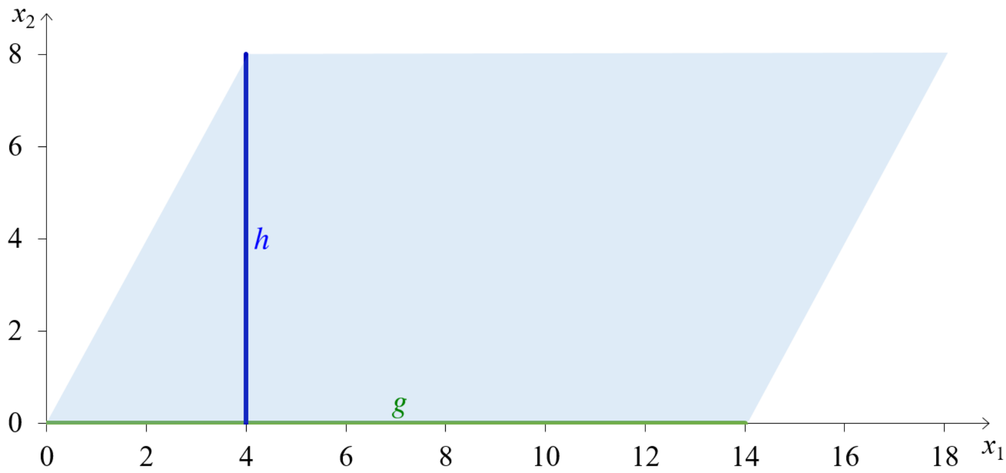

Abbildung 8.18: Ein Parallelogramm mit Grundseite g und Höhe h.

■

Z Ist $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, dann gilt $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Der Betrag der Determinante entspricht dem Flächeninhalt eines Parallelograms, welches durch die Spaltenvektoren von A aufgespannt wird. Tauscht man die Spalten von A, bleibt der Betrag der Determinante gleich, aber das Vorzeichen verändert sich. Multipliziert man eine Spalte von A mit α, ver-α-facht sich die Determinante. Folglich gilt für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Gleichung $\det(\alpha A) = \alpha^2 \det(A)$.
A ist genau dann singulär, wenn $\det(A) = 0$ gilt.
Eine orthogonale 2×2-Matrix hat eine Determinante von 1 oder -1.
Ist $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $a_{21} = 0$, dann gilt $\det(A) = a_{11}a_{22}$.

8.3.2 Die Determinante einer 3×3-Matrix

Ziele dieses Unterkapitels

- Wie kann man die Determinante einer 3×3-Matrix einfach berechnen?
- Wie kann man die Determinante einer 3×3-Matrix geometrisch interpretieren?

Allgemein kann man Determinanten für jede quadratische Matrix der Ordnung n berechnen. Hierbei wird eine grosse Matrix stets auf eine bzw. mehrere 2×2-Matrizen zurückgeführt. Bei einer 3×3-Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

legen wir zunächst eine Art Schachbrettmuster, bestehend aus Plus und Minus, über die 3×3-Matrix, vgl. Abbildung 8.19. In einem weiteren Schritt streicht man die erste Spalte. Danach streicht man zuerst die erste Zeile. Jene Elemente der Matrix, die nicht gestrichen

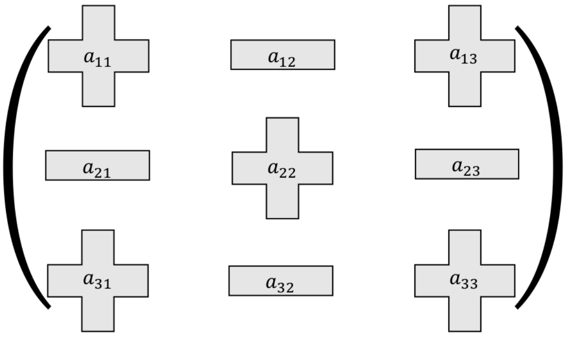

Abbildung 8.19: Schachbrettmuster im 3×3-Fall.

wurden, sammeln wir in einer 2×2-Matrix. Die 2×2-Matrix, die durch Streichen der ersten Zeile und ersten Spalte entsteht, bezeichnen wir als A_{11}. Statt der ersten Zeile streichen wir als nächstes die zweite Zeile und sammeln wieder die Elemente, die nicht gestrichen wurden, in der 2×2-Matrix A_{21}. Statt der zweiten Zeile streichen wir dann die dritte Zeile. Die Elemente, die nicht gestrichen wurden, bilden die 2×2-Matrix A_{31}, vgl. Abbildung 8.20.

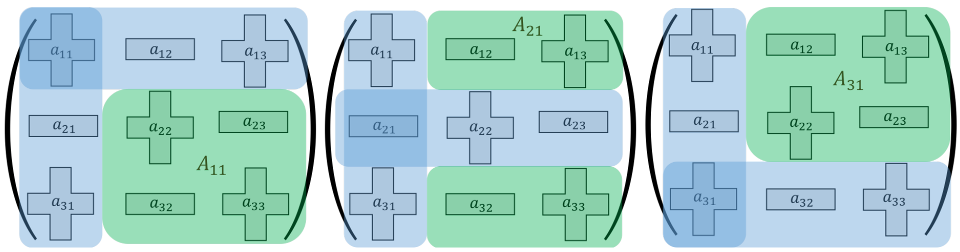

Abbildung 8.20: Bestimmung von A_{11}, A_{21} und A_{31}.

Zusammenfassend sind folgende Matrizen A_{i1} durch Streichen der jeweils i-ten Zeile und ersten Spalte entstanden:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_{31} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Nun berechnet man die Determinante der 3×3-Matrix A als Summe der gewichteten Determinanten dieser 2×2-Matrizen wie folgt:

$$\det(A) = a_{11} \det(A_{11}) - a_{21} \det(A_{21}) + a_{31} \det(A_{31}),$$

wobei die Gewichte a_{11}, a_{21} und a_{31} und deren Vorzeichen sich in Abbildung 8.20 in den Schnittpunkten der ersten Spalte und jeweils gestrichenen Zeile ablesen lassen. Dieses Vorgehen wird auch als Entwicklung nach der ersten Spalte bezeichnet. Die so entstandene Formel

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11} \det(A_{11}) - a_{21} \det(A_{21}) + a_{31} \det(A_{31}) \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

kann man auch visuell darstellen, vgl. Abbildung 8.21. Die Formel

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

nennt man auch die Regel von Sarrus. Der Betrag der Determinante entspricht der Volumenberechnung eines dreidimensionalen Parallelotops.[3]

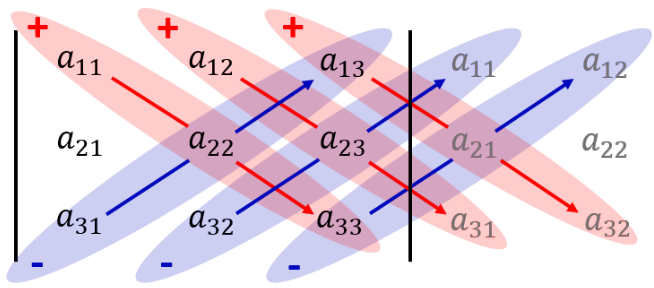

Abbildung 8.21: Regel von Sarrus.

■ **Beispiel 8.3.4 — Determinante der 3×3-Matrix.**
Die Determinante der Matrix

$$D = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.6 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

lässt sich als

$$\det \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.6 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} = 0.8 \cdot 1 \cdot 0.8 + 0 + 0 - (-0.6) \cdot 1 \cdot 0.6 - 0 - 0 = 1$$

berechnen. Durch Berechnung von $DD^T = I$ erkennt man leicht, dass die Matrix orthogonal ist. Die Spaltenvektoren sind also paarweise orthogonal zueinander und haben jeweils die Länge 1. Sie spannen einen Würfel mit Volumen 1 auf. Die Determinante von D ist 1, vgl. Abbildung 8.22.

Vertauscht man die erste und die zweite Spalte der Matrix, ergibt sich

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & 0.8 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0.6 \cdot 1 \cdot (-0.6) - 0 - 0 - 0.8 \cdot 1 \cdot 0.8 = -1.$$

Auch diese Matrix ist orthogonal. Die Spaltenvektoren spannen noch immer den gleichen Würfel mit Volumen 1 auf. Der Betrag der Determinante ist wieder 1.

Sind die Spaltenvektoren linear abhängig, wie z.B. bei

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

[3] Ein Parallelotop kann man sich als eine mehrdimensionale Erweiterung eines Parallelogramms vorstellen.

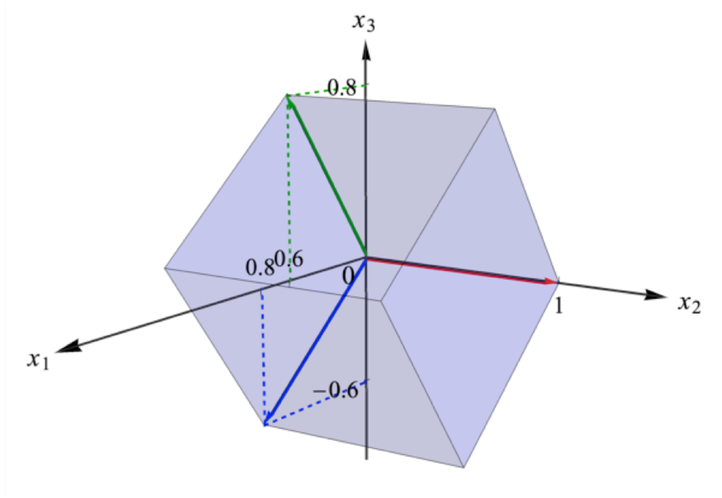

Abbildung 8.22: Ein Würfel mit Seitenlänge 1 im $\mathbb{R}^3$.

so spannen die Spaltenvektoren kein Volumen auf, vgl. Abbildung 8.23. Die Determinante ist

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Wir vermuten also, dass sich Satz 8.3.1 auch auf 3×3-Matrizen bzw. allgemein auf $n \times n$-Matrizen übertragen lässt.

■

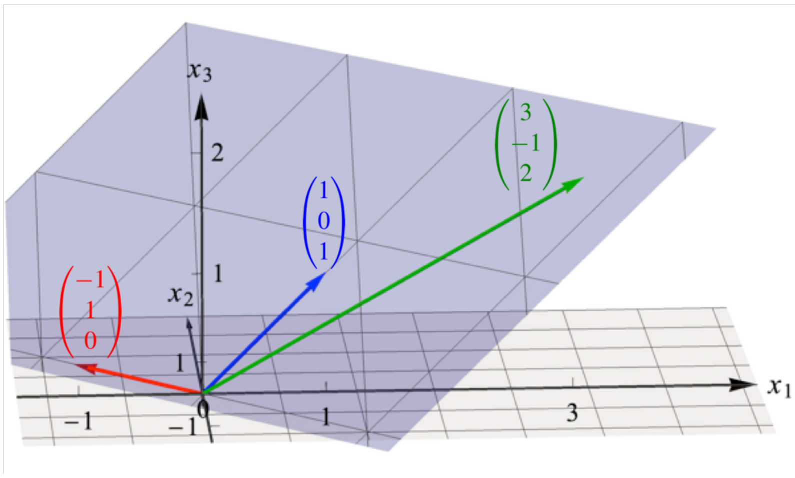

Abbildung 8.23: Drei linear abhängige Vektoren spannen kein Volumen auf.

Z Ist $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so gilt

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Man nennt dies auch die Regel von Sarrus, vgl. Abbildung 8.21.

Betragsmässig entspricht die Determinante einer 3×3-Matrix A dem Volumen eines durch die Spaltenvektoren von A aufgespannten Parallelotops.

8.3.3 Die Determinante einer $n \times n$-Matrix

Ziele dieses Unterkapitels

- Wie kann man die Determinante einer $n \times n$-Matrix allgemein berechnen?
- Wie verändert sich der Wert der Determinante, wenn man
  - zwei Spalten der Matrix vertauscht?
  - eine Spalte der Matrix mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$ multipliziert?
- Welchen Wert hat die Determinante einer singulären Matrix?
- Welchen Wert hat die Determinante einer orthogonalen Matrix?
- Wie kann man die Determinante einfach berechnen, wenn alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen gleich 0 sind?

Für eine allgemeine $n \times n$-Matrix existiert keine so einfache Berechnungsvorschrift für die Determinante wie im Fall $n = 2$ oder $n = 3$. Hat man $n > 3$ Zeilen und Spalten, so kann man mit dem gleichen Schema wie im 3×3-Fall die Determinante nach der ersten Spalte entwickeln. Die Berechnung der Determinante wird dabei zuerst auf n Determinanten von Matrizen der Ordnung $n-1$ zurückgeführt, die dann jeweils mithilfe von $n-1$ Determinanten von Matrizen der Ordnung $n-2$ berechnet werden u.s.w. Folgende Definition fasst das Vorgehen zusammen, das für Determinanten allgemein funktioniert:[4]

Definition 8.3.2 — Die Determinante einer $n \times n$-Matrix.
Die Determinante einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij})$ der Ordnung n, $\det A$, $\det(A)$, $|A|$, oder $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ ist induktiv wie folgt definiert:

- Für $n = 1$ gilt $\det(a_{11}) = a_{11}$.
- Für $n = 2$ gilt $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
- Für $n > 2$: Sei A_{i1} die quadratische Matrix der Ordnung $n-1$, die durch Streichen der i-ten Zeile und ersten Spalte von A entsteht. Dann gilt

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}(-1)^{i+1} \det(A_{i1}).$$

Die in der Definition erklärte Berechnung nennt man Entwicklung der Determinante nach der ersten Spalte.[5] Wir demonstrieren an Beispielen, wie man Determinanten nach der ersten Spalte entwickelt.

■ Beispiel 8.3.5 — Berechnung der Determinante mit Hilfe der Definition.
Entwickelt man die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 36 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

[4] Hierbei könnte man den Fall $n = 2$ auch wie im Fall $n > 2$ berechnen. Wir erwähnen ihn aber separat, da man die Determinante von 2×2-Matrizen in der Regel direkt über die gegebene Formel berechnet und nicht entwickelt.

[5] Man bezeichnet $a^*_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ auch als Kofaktor von a_{ij}. Dabei ist A_{ij} die Matrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A entsteht.

nach der ersten Spalte, ergibt sich

$$\det\begin{pmatrix} 6 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 36 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = a_{11}\det(A_{11}) - a_{21}\det(A_{21}) + a_{31}\det(A_{31}) - a_{41}\det(A_{41})$$

$$= 6\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 0\cdot\det\begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 36\cdot\det\begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 0\cdot\det\begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 6\left(0\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 0\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$+36\left(-5\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 0\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 0\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= 6(-2)(1\cdot 1 - 2\cdot 1) + 36(-5)(1\cdot 1 - 2\cdot 1) = 12 + 180 = 192.$$

■

In den bisherigen Beispielen haben wir die Determinante stets nach der ersten Spalte entwickelt. Allgemein kann man eine Determinante nach einer beliebigen Spalte oder Zeile entwickeln, wobei man dann aber auf die Vorzeichen der Summanden achten muss. Die Vorzeichen ergeben sich dabei mithilfe des Faktors $(-1)^{i+j}$, welcher in Abbildung 8.19 im 3×3-Fall visualisiert ist.

Satz 8.3.2 — Entwicklungssatz von Laplace.
Die Determinante kann nach einer beliebigen Spalte j oder nach einer beliebigen Zeile i entwickelt werden. Es gilt also

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}), \qquad j = 1,\dots,n$$

bzw.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}), \qquad i = 1,\dots,n.$$

Beweis. Einen Beweis findet man in Kall (1984, Satz 3.16). ■

■ Beispiel 8.3.6 — Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile.
Die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

kann man also auch berechnen, indem man sie nach der ersten Zeile entwickelt. Dann ergibt sich die einfachere Berechnung

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + a_{13}\det(A_{13})$$
$$= 0 - 1\cdot\det\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + 0$$
$$= -((-3)\cdot 4 - 3\cdot 2) = -(-12-6) = 18.$$

■

■ **Beispiel 8.3.7 — Entwicklung der Determinante nach der zweiten Spalte.**
Die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 9 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

kann man nach der zweiten Spalte entwickeln. Es ergibt sich mit $j = 2$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 9 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = 1(-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \\ 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Entwickelt man diese Determinante nun nach der zweiten Zeile, $i = 2$, kann man dies vereinfachen zu

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 9 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \\ 9 & 5 & 3 \end{pmatrix} = -(-1)^{2+3}\cdot 8\cdot\det\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= 8(6\cdot 5 - 9\cdot 3) = 24.$$

■

Entwickelt man eine Determinante stets nach der ersten Spalte, erhält man immer das richtige Ergebnis. Oft bietet es sich jedoch an, nach anderen Spalten oder Zeilen zu entwickeln, da die Determinanten von A_{ij} nicht berechnet werden müssen, wenn $a_{ij} = 0$ gilt. Die Berechnung über die erste Spalte kann im Vergleich zu einer geschickten Wahl der Spalte oder Zeile, nach welcher man entwickelt, daher deutlich aufwändiger sein.

Auch in höheren Dimensionen kann die Determinante als ein verallgemeinerter Volumenbegriff angesehen werden. Daher gelten alle Eigenschaften, die im Fall einer 2×2-Matrix in Satz 8.3.1 erläutert wurden, auch allgemein. Wir fassen diese in folgendem Satz zusammen:

Satz 8.3.3 — Eigenschaften der Determinante .
Sei A eine quadratische Matrix der Ordnung n. Dann gilt:

i. Vertauscht man zwei Spalten, so ändert die Determinante das Vorzeichen, bleibt aber betragsmässig gleich.
ii. Multipliziert man eine Spalte von A mit $\alpha \in \mathbb{R}$, so ver-α-facht sich die Determi-

nante.

iii. Sind alle Elemente unter der Hauptdiagonalen von A gleich 0, also $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$, so gilt $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

iv. $\det(A) \neq 0$ gilt genau dann, wenn $\operatorname{rang}(A) = n$, also wenn A regulär ist.

v. Ist A orthogonal, dann ist $|\det(A)| = 1$, also $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = -1$.

Beweis. Einen Beweis findet man in Kall (1984, Satz 3.14, Satz 3.15). ■

■ Beispiel 8.3.8 — Fortsetzung von Beispiel 8.3.7.
Interessiert man sich für die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

kann man diese wie schon in Beispiel 8.3.7 nach der zweiten Spalte entwickeln. Weiss man jedoch schon, dass

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 9 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = 24$$

gilt, kann man direkt schliessen, dass

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} = -24$$

gelten muss, da sich die beiden Matrizen nur dadurch unterscheiden, dass Spalten 3 und 4 vertauscht wurden. Analog kann man direkt schliessen, dass

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 24$$

gilt, da hier im Vergleich zur ursprünglichen Matrix zweimal Spalten vertauscht wurden und somit das Vorzeichen der Determinante zweimal wechselt.

Wie im Fall der 2×2-Matrix verdoppelt sich die Determinante, wenn eine Spalte verdoppelt wird. Es gilt also beispielsweise

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 9 & 0 & 10 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2\cdot 3 & 4 \\ 6 & 0 & 2\cdot 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2\cdot 0 & 8 \\ 9 & 0 & 2\cdot 5 & 3 \end{pmatrix} = 2\cdot\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 9 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = 2\cdot 24 = 48.$$

■

■ Beispiel 8.3.9 — Die Determinante einer singulären Matrix.
Will man die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 6 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

bestimmen, kann man auch diese Determinante nach der zweiten Spalte entwickeln. Erkennt man, dass die vierte Spalte ein Vielfaches der dritten Spalte ist, kann man direkt schliessen, dass

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 6 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 5 & 10 \end{pmatrix} = 0$$

gilt. ■

Die Determinante einer Matrix, welche unterhalb der Hauptdiagonalen ausschliesslich Elemente von 0 hat, kann man ebenfalls einfach berechnen.

■ Beispiel 8.3.10 — Die Determinante einer Dreiecksmatrix.
Die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

könnte man nach der ersten Spalte entwickeln und die entstehenden Determinanten $\det(A_{ij})$ wiederum nach der ersten Spalte. Da aber alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen 0 sind, ergibt sich die Determinante als Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 10 = 600.$$

■

Ist die Matrix A einer linearen Abbildung orthogonal, so werden die Einheitsvektoren auf normierte Vektoren abgebildet[6], welche paarweise orthogonal sind. Der Flächeninhalt bzw. das Volumen ist also durch die Abbildung unverändert. Nur die Orientierung des aufgespannten Würfels ändert sich gegebenenfalls. Der Betrag der Determinante von orthogonalen Matrizen ist demnach 1. Umgekehrt folgt aus einer Determinante mit einem Betrag von 1 jedoch nicht, dass die Matrix orthogonal ist.

■ Beispiel 8.3.11 — Die Determinante einer orthogonalen Matrix.

[6] Denn das Bild des j-ten Einheitsvektor ist die j-te Spalte von A, d.h. $A\mathbf{e}^j = \mathbf{a}^j$.

Die orthogonale Matrix D aus Beispiel 8.2.6 hat eine Determinante von

$$\det\begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.6 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$
$$= 0.8\cdot 1\cdot 0.8 + 0 + 0 - (-0.6)\cdot 1\cdot 0.6 - 0 - 0 = 1.$$

Es gilt aber auch

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1 = 1.$$

Diese Matrix ist jedoch nicht orthogonal. Unter anderem ist die Länge des ersten Zeilenvektors gleich $\sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14} \neq 1$. ■

Aus Satz 8.3.3, Teil ii. folgt zudem direkt:

Satz 8.3.4 — Folgerung aus Satz 8.3.3.
Für jede quadratische Matrix A der Ordnung n und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

Beweis. Der Beweis folgt sofort aus Satz 8.3.3, Teil ii, in dem man α aus jeder Spalte ausklammert. ■

■ Beispiel 8.3.12 — Die Determinante der Matrix $2A$.
Aus Beispiel 8.3.7 wissen wir, dass

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 9 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = 24.$$

Die Determinante der 4×4-Matrix $2A$ ist

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 \\ 12 & 0 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \\ 18 & 0 & 10 & 6 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \\ 2\cdot 6 & 2\cdot 0 & 2\cdot 3 & 2\cdot 7 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 0 & 2\cdot 0 & 2\cdot 8 \\ 2\cdot 9 & 2\cdot 0 & 2\cdot 5 & 2\cdot 3 \end{pmatrix} = 2^4\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 9 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = 2^4\cdot 24 = 384,$$

wie man auch beispielsweise über eine Entwicklung nach der zweiten Spalte einfach überprüfen kann. ■

Z

Ist $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dann kann man die Determinante nach einer beliebigen Zeile i oder Spalte j entwickeln. Es gilt für alle $i, j = 1, \ldots, n$:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}).$$

Tauscht man zwei Spalten von A bleibt der Betrag der Determinante gleich, aber das Vorzeichen verändert sich. Multipliziert man eine Spalte von A mit α, ver-α-facht sich die Determinante. Zudem gilt $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

A ist genau dann singulär, wenn $\det(A) = 0$ gilt. Eine orthogonale Matrix hat eine Determinante von 1 oder -1.

Sind alle Elemente unter der Hauptdiagonalen gleich 0, ergibt sich die Determinante als Produkt der Elemente auf der Hauptdiagonalen.

8.3.4 Die Determinante zur Bestimmung der Lösbarkeit eines LGS

Ziele dieses Unterkapitels

- Wie kann man bei einer quadratischen Koeffizientenmatrix A mit Hilfe der Determinante $\det(A)$ bestimmen, ob das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genau eine Lösung hat oder nicht?

Satz 8.3.3 besagt, dass eine quadratische Matrix A der Ordnung n genau dann regulär ist, wenn $\det(A) \neq 0$. Sie ist also genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$.

■ Beispiel 8.3.13 — Der Zusammenhang zwischen Determinante und Rang.
Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -4x_2 - x_3 &= b_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= b_2 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

hat eine Koeffizientenmatrix mit

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 4 - 5 + 1 + 4 = 4 \neq 0,$$

also mit Rang 3. Hätte die Koeffizientenmatrix nicht den vollen Rang, wäre die Determinante gleich 0. Da die erweiterte Koeffizientenmatrix nur drei Zeilen hat, kann auch diese maximal den Rang von 3 haben. Das lineare Gleichungssystem ist somit lösbar, der Lösungsraum hat die Dimension $n - \operatorname{rang}(A) = 3 - 3 = 0$. Der Lösungsraum besteht somit für jede rechte Seite $\mathbf{b}$ aus genau einem Vektor. Somit ist das lineare Gleichungssystem für jede rechte Seite eindeutig lösbar. ■

Ist die Determinante ungleich 0, hat eine quadratische Matrix stets den vollen Rang. Es gilt somit:

Satz 8.3.5 — Die Determinante zur Bestimmung der Lösbarkeit eines LGS.
Ist A eine quadratische Matrix der Ordnung n und $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, dann ist das LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det(A) \neq 0$.

Beweis. Die Kombination von Sätzen 8.2.1, 8.2.2 und 8.3.3 iv. ergibt folgende Äquivalenzen: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist für alle $\mathbf{b}$ eindeutig lösbar
$\Leftrightarrow A$ ist invertierbar $\Leftrightarrow A$ ist regulär, also $\operatorname{rang}(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. ■

■ Beispiel 8.3.14 — Lösbarkeit eines LGS.
In Beispiel 7.2.14 hatten wir gesehen, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -4x_2 - x_3 &= b_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= b_2 \\ x_1 + 5x_2 &= b_3 \end{aligned}$$

nur dann eine Lösung hat, wenn $0 = b_3 - b_2 + b_1$. Die Determinante der Koeffizientenmatrix ist hier

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 5 + 1 = 0,$$

vgl. Regel von Sarrus. ■

Ein lineares Gleichungssystem mit einer quadratischen Koeffizientenmatrix, welche eine Determinante von 0 hat, kann keine oder unendlich viele Lösungen besitzen. Ist die Determinante der quadratischen Koeffizientenmatrix von 0 verschieden, hat das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung.

Z Ist A quadratisch, so hat das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eine eindeutige Lösung, nämlich $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, genau dann wenn $\det(A) \neq 0$ gilt.

8.3.5 Die Determinante als Flächenveränderung bei linearen Abbildungen

Ziele dieses Unterkapitels

- Wie gross ist der Flächeninhalt einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ bzw. das Volumen einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ im Vergleich zum Flächeninhalt bzw. zum Volumen der Menge $f(M)$, wenn f eine lineare Abbildung mit Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n = 2$ oder $n = 3$, ist?
- Wie kann man für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ aus bekannten Werten $\det(A)$, $\det(B)$ die Werte $\det(A \cdot B)$ und $\det(A^{-1})$ bestimmen?

Eine lineare Abbildung mit quadratischer Abbildungsmatrix A der Ordnung n bildet die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$ auf die Spaltenvektoren von A ab. Das durch die Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^2$ aufgespannte Quadrat hat einen Flächeninhalt von 1 und wird im Fall $n = 2$ auf ein Parallelogramm mit einem Flächeninhalt von $|\det(A)|$ abgebildet. Der durch die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$ aufgespannte Würfel hat ein Volumen von 1. Er wird im Fall $n = 3$ auf ein Parallelotop mit Volumen von $|\det(A)|$ abgebildet.[7] Es gilt:

Satz 8.3.6 — Die Determinante als Flächen- bzw. Volumenveränderung. Sei $n = 2$ oder $n = 3$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, A eine $n \times n$-Matrix, und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Flächeninhalt bzw. Volumen $\mathrm{Vol}(M)$. Dann gilt

$$\mathrm{Vol}(f(M)) = |\det(A)| \cdot \mathrm{Vol}(M).$$

Beweis. Einen Beweis findet man in Forster (1984, Satz 4, Kapitel 4). ■

Bildet eine Abbildung mit $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ die Einheitsvektoren auf die Spaltenvektoren von A ab und ist f bijektiv, also A invertierbar, so werden durch $f^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}$ die Spaltenvektoren von A wieder auf die Einheitsvektoren abgebildet. Wurde das Volumen von M durch f um $|\det(A)|$ gestreckt, wird es durch f^{-1} um $\frac{1}{|\det(A)|}$ gestaucht, vgl. Abbildung 8.24.

[7] Im Allgemeinen kann es schwer sein, den Flächeninhalt einer Punktmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ oder das Volumen von $M \subseteq \mathbb{R}^3$ zu bestimmen. In dieser Vorlesung setzen wir lediglich voraus, dass die Flächenberechnung von Parallelogrammen, Rechtecken (jeweils als Grundseite mal Höhe) und Dreiecken (als $\frac{1}{2}$ mal Grundseite mal Höhe) bzw. die Volumenberechnung von Quadern (als Grundfläche mal Höhe) bekannt ist.

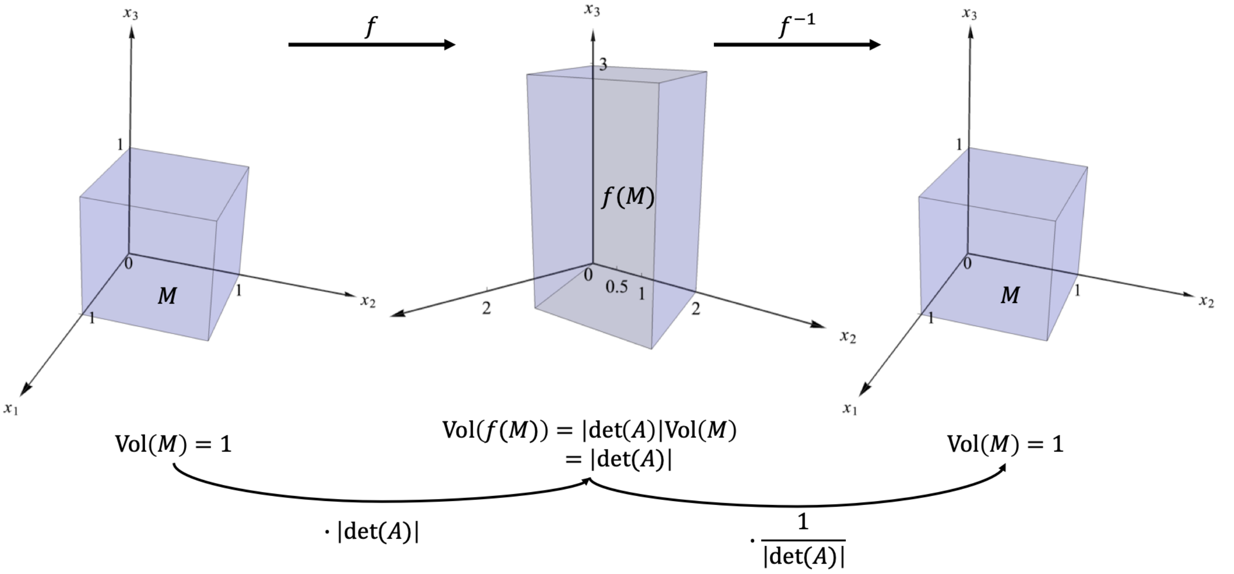

Abbildung 8.24: Volumenveränderung.

Verkettet man zwei Abbildungen mit Abbildungsmatrizen A und B, wobei die erste Abbildung das Volumen um den Faktor $|\det(A)|$ und die zweite um den Faktor $|\det(B)|$ streckt, so hat diese Verkettung die Abbildungsmatrix $B \cdot A$ und streckt das Volumen um den Faktor $|\det(BA)| = |\det(A)| \cdot |\det(B)|$. Folgender Satz fasst diese Eigenschaften von Determinanten zusammen:

Satz 8.3.7 — Weitere Eigenschaften von Determinanten.
Seien A und B quadratische Matrizen der Ordnung n. Dann gilt:
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Ist $\det(A) \neq 0$, dann ist A invertierbar und es gilt $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Beweis. Einen Beweis findet man in Kall (1984, Satz 3.15). ■

Wie demonstrieren diese Eigenschaften in einem Beispiel:

■ Beispiel 8.3.15 — Fortsetzung von Beispiel 8.1.1.
Wir betrachten erneut die lineare Abbildung f_1 aus Beispiel 8.1.1 mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 0 - 4 = -4.$$

Diese lineare Abbildung bildet das Quadrat

$$M = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1,\, 0 \leq x_2 \leq 1 \right\}$$

mit Flächeninhalt 1 auf das Quadrat

$$f_1(M) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 2,\, 0 \leq x_2 \leq 2 \right\}$$

mit Flächeninhalt $|\det(A)| = 4$ ab. Die zu f_1 gehörige Umkehrabbildung mit Matrix A^{-1} muss also eine Determinante haben, die einen Betrag von $1/4$ hat. Laut obigem Satz ist die Determinante von A^{-1} gleich $1/\det(A) = -1/4$. Man überprüft dies leicht mit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(A^{-1}) = 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

Führt man Abbildung f_1 zwei Mal hintereinander aus, berechnet man also z.B. $f_1(f_1(M))$, so bildet die erste Abbildung das Quadrat mit Flächeninhalt 1 auf ein Quadrat mit Flächeninhalt 4 ab. Die zweite Abbildung vervierfacht dann den Flächeninhalt des entstandenen Quadrats. Das Ergebnis ist ein Quadrat mit Flächeninhalt 16. In der Tat gilt

$$f_1(f_1(\mathbf{x})) = A^2\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \det(A^2) = 16 - 0 = 16 = \det(A)\det(A).$$

Die lineare Abbildung f_2 mit Abbildungsmatrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \det(B) = 0$$

bildet die Menge M auf die Strecke zwischen $(0,0)^T$ und $(1,2)^T$ ab, vgl. Abbildung 8.25.

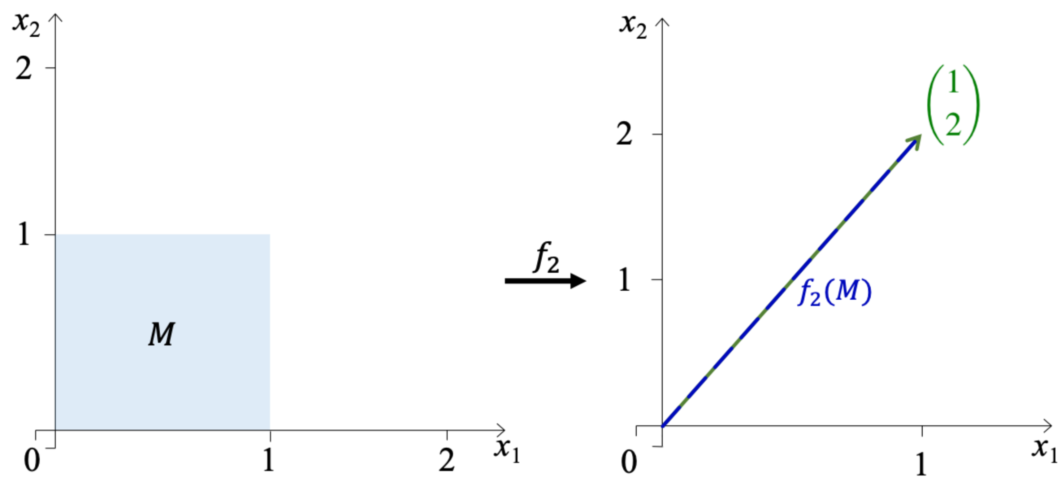

Abbildung 8.25: Das Bild von M unter f_2.

Diese Strecke spannt keine Fläche auf. Der Flächeninhalt ist somit 0. Verkettet man die beiden linearen Abbildungen und berechnet $f_2(f_1(M))$, wird das Quadrat mit Flächeninhalt 1 erst auf ein Quadrat mit Flächeninhalt 4 abgebildet, das dann auf eine Strecke abgebildet wird. Der resultierende Flächeninhalt von $f_2(f_1(M))$ ist also 0. Es gilt

$$\det(B \cdot A) = \det(A)\det(B) = -4 \cdot 0 = 0.$$

■

Addiert man die beiden Matrizen, d.h. berechnet man die Summe der beiden linearen Abbildungen, so addieren sich die Determinanten jedoch nicht.

■ Beispiel 8.3.16 — Weitere Fortsetzung von Beispiel 8.1.1.
Für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \det(A) = 0 - 4 = -4$$

und

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \det(B) = 0$$

gilt

$$\det(A+B) = \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -6 \neq \det(A) + \det(B) = -4 + 0 = -4.$$

■

Z Für $M \subseteq \mathbb{R}^2$ oder $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ist der Flächeninhalt bzw. das Volumen des Bildes $f(M)$ einer linearen Abbildung mit Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ das $|\det(A)|$-fache des Flächeninhalts bzw. des Volumens von M.

Für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ und im Fall $\det(A) \neq 0$ zudem $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

8.3.6 Berechnung von Determinanten mit Hilfe von Zeilenumformungen (#)

Ziele dieses Unterkapitels

- Wie verändert sich der Wert der Determinante, wenn man
  - die Matrix transponiert?
  - zwei Zeilen der Matrix vertauscht?
  - zu einem Zeilenvektor der Matrix
    - einen beliebigen Zeilenvektor
    - einen anderen Zeilenvektor der Matrix

    addiert?
  - zu einem Spaltenvektor der Matrix
    - einen beliebigen Spaltenvektor
    - einen anderen Spaltenvektor der Matrix

    addiert?
- Wie kann man mittels des Eliminationsverfahrens die Determinante berechnen?

Bisher haben wir die Determinante als (auf n Dimensionen) verallgemeinerten Flächeninhalt oder verallgemeinerten Inhalt des durch die Spaltenvektoren aufgespannten Parallelotops betrachtet und durch Entwicklung nach Spalten oder Zeilen berechnet. In diesem Abschnitt werden wir weitere Eigenschaften von Determinanten diskutieren, welche uns erlauben werden, Determinanten in einer Art Eliminationsverfahren gegebenenfalls effizienter zu berechnen.[8]

Satz 8.3.8 — Weitere Eigenschaften der Determinante .
Sei A eine quadratische Matrix der Ordnung n, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

i. $\det(A^T) = \det(A)$.

[8] Da Sie in fortgeschrittenen Kursen die Determinante meist mithilfe von Software berechnen werden, genügt uns im Allgemeinen die Entwicklung über Spalten oder Zeilen bzw. die bereits besprochenen Vereinfachungen.

ii. Vertauscht man zwei Zeilen, so ändert die Determinante das Vorzeichen, bleibt aber betragsmässig gleich.

iii. Die Determinante ist linear bezüglich jeder Zeile, d.h. es gilt für alle $i = 1, \dots, n$:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 a_{i1} + \alpha_2 b_1 & \dots & \alpha_1 a_{in} + \alpha_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \alpha_1 \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \alpha_2 \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & \dots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

iv. Für $\alpha \in \mathbb{R}$, $i_2 \in \{1, \dots, n\}, i_2 \neq i$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + \alpha a_{i_2 1} & \dots & a_{in} + \alpha a_{i_2 n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

v. Die Determinante ist linear bezüglich jeder Spalte, d.h. es gilt für alle $j = 1, \dots, n$:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \alpha_1 a_{nj} + \alpha_2 b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \alpha_1 \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \alpha_2 \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

vi. Für $\alpha \in \mathbb{R}$, $j_2 \in \{1, \dots, n\}, j_2 \neq j$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} + \alpha a_{1 j_2} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} + \alpha a_{n j_2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Beweis. Einen Beweis findet man in Kall (1984, Satz 3.14, Satz 3.15). ■

Wir formulieren kurz die zusätzlichen Eigenschaften aus Satz 8.3.8: Für eine quadratische Matrix A gilt:

i. Die Determinante der Transponierten A^T entspricht der Determinante von A.
ii. Vertauscht man zwei Zeilen von A, verändert sich das Vorzeichen der Determinante von A, betragsmässig bleibt sie aber gleich.

iii. Multipliziert man eine Zeile mit einem Skalar α_1, so wird die Determinante mit α_1 multipliziert. Addiert man einen Zeilenvektor $\mathbf{b}^T$ zu einer Zeile, so entspricht die Determinante der neuen Matrix der Summe der Determinanten von A und der Determinante einer Matrix, bei der diese Zeile durch $\mathbf{b}^T$ ersetzt wurde.
iv. Addiert man zu einer Zeile i von A ein Vielfaches einer anderen Zeile, so bleibt die Determinante gleich.
v. Multipliziert man eine Spalte mit einem Skalar α_1, so wird die Determinante mit α_1 multipliziert. Addiert man einen Vektor $\mathbf{b}$ zu einer Spalte, so entspricht die Determinante der neuen Matrix der Summe der Determinanten von A und der Determinante einer Matrix, bei der diese Spalte durch $\mathbf{b}$ ersetzt wurde.
vi. Addiert man zu einer Spalte j von A ein Vielfaches einer anderen Spalte, so bleibt die Determinante gleich.

Wir demonstrieren diese Eigenschaften an einem Beispiel.

■ Beispiel 8.3.17 — Eigenschaften der Determinante.
Wir betrachten erneut die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

mit

$$\det \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = 14 \cdot 8 - 4 \cdot 3 = 100.$$

Die Determinante der Transponierten

$$A^T = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

berechnet sich als

$$\det(A^T) = \det \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = 14 \cdot 8 - 3 \cdot 4 = 100 = \det(A).$$

Es gilt somit $\det(A^T) = \det(A)$, vgl. Satz 8.3.8 i. Vertauscht man die beiden Zeilen von A^T ergibt sich die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 14 & 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot 3 - 8 \cdot 14 = -100 = -\det(A^T) = -\det(A),$$

vgl. Satz 8.3.8 ii.

Addiert man einen Zeilenvektor $\mathbf{b}^T$ zu einer Zeile, so entspricht die Determinante der neuen Matrix laut Satz 8.3.8 iii. der Summe der Determinanten von A und der Determinante einer Matrix, bei der diese Zeile durch $\mathbf{b}^T$ ersetzt wurde. Mit $\mathbf{b} = (6, 11)^T$ gilt beispielsweise:

$$\det \begin{pmatrix} 14+6 & 4+11 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = 115 = \det \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 6 & 11 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Addiert man jedoch beispielsweise die zweite Spalte zur ersten, verändert sich die Determinante nicht:

$$\det \begin{pmatrix} 14+4 & 4 \\ 3+8 & 8 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} = 100.$$

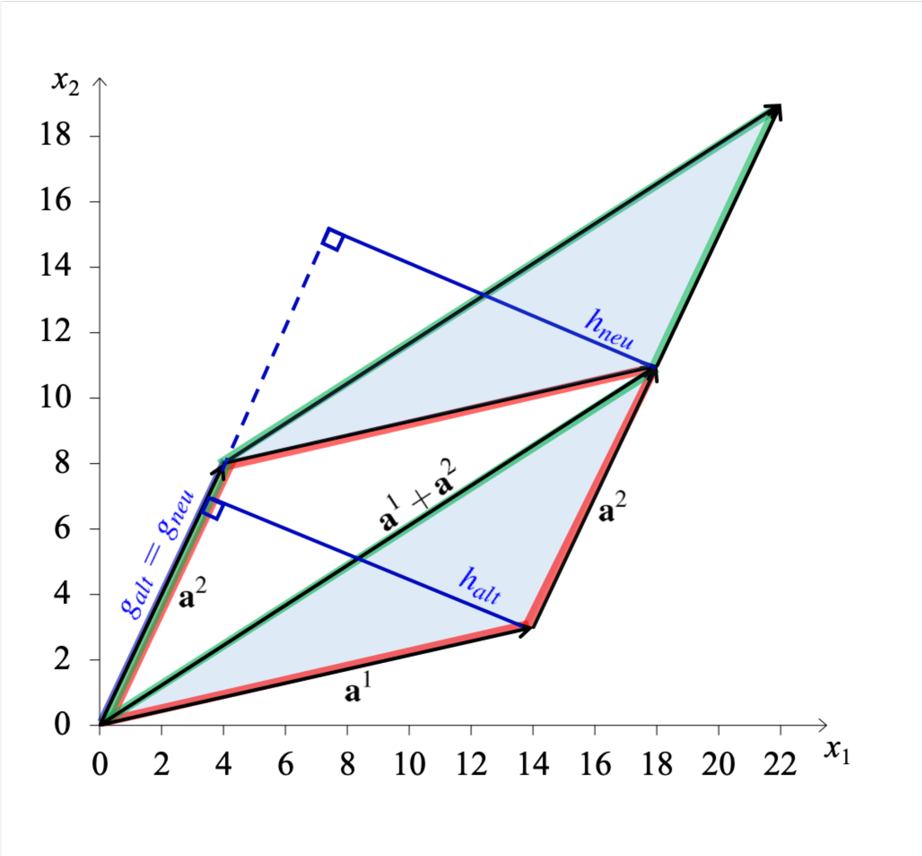

Abbildung 8.26: Zwei Parallelogramme mit gleichem Flächeninhalt.

Durch diese Addition verändert sich weder die Grundseite noch die Höhe des Parallelogramms. Die Flächeninhalt bleibt daher gleich, vgl. Abbildung 8.26. In Abbildung 8.26 wird das rote Parallelogramm durch $\mathbf{a}^1$ und $\mathbf{a}^2$ aufgespannt. Sein Flächeninhalt ist bestimmt durch eine Grundseite $g_{alt} = \|\mathbf{a}^2\|$ und die dazugehörige Höhe h_{alt}, welche den Abstand der Grundseite zu ihrer Parallelen beschreibt. Ersetzt man die eine Seite, $\mathbf{a}^1$, mit der Linearkombination $\mathbf{a}^1 + \mathbf{a}^2$, erhält man ein neues Parallelogramm, welches in grün dargestellt ist. Die beiden Parallelogramme teilen sich dieselbe Grundseite, $g_{neu} = g_{alt}$. Man sieht, dass sich auch die Höhe hierdurch nicht verändert, $h_{neu} = h_{alt}$. Somit verändert sich der Flächeninhalt nicht. ■

Die Addition des Vielfachen einer anderen Zeile verändert die Determinante nicht, vgl. Satz 8.3.8. Ein Zeilentausch verändert das Vorzeichen, vgl. Satz 8.3.8. Diese beiden Eigenschaften können verwendet werden, um Determinanten geschickter zu berechnen: Wir nutzen die Idee des Eliminationsverfahrens, um die Matrix in eine Zeilenstufenform zu überführen. Das heisst, anstatt die Matrix in eine explizite Form umzuformen, deren führende Elemente alle gleich 1 sind und alle Einträg oberhalb führender Elemente 0 sind, eliminieren wir jeweils nur die Einträge unterhalb führender Elemente und normieren diese nicht auf 1.

Ergibt sich bei diesem Vorgehen eine Nullzeile, so hat die Matrix nicht den vollen Rang. Also ist die Determinante 0, vgl. Satz 8.3.3. Auch wenn sich keine Nullzeile ergibt, ist die resultierende Matrix A in Zeilenstufenform. In diesem Fall gilt stets $a_{ij} = 0$ für alle

$i > j$ und damit $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$, vgl. Satz 8.3.3. Erreicht man eine Form mit $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$ noch bevor das Eliminationsverfahren terminiert, kann man auch vorzeitig abbrechen. Wir demonstrieren das Vorgehen an Beispielen:

■ Beispiel 8.3.18 — Zeilenumformungen zur Berechnung von Determinanten.
Nutzt man Zeilenumformungen zur Berechnung von Determinanten, bietet sich die Schreibweise $|A|$ statt $\det(A)$ an, um an die Tableauform des Eliminationsverfahrens zu erinnern. Analog zu dieser Schreibweise, referenzieren wir in folgenden Beispielen jeweils die i-te Zeile der Matrix als ⓘ statt $\mathbf{a}_i$:

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 6 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 36 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} 6 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 36 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{③-6\cdot①}{=} \begin{vmatrix} 6 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 32 & -18 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{②\leftrightarrow③}{=} -\begin{vmatrix} 6 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 32 & -18 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{④-2\cdot③}{=} -\begin{vmatrix} 6 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 32 & -18 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -(6\cdot 32\cdot 1\cdot(-1)) = 192.
\end{aligned}$$

In obigem Beispiel haben wir in einem ersten Schritt von Zeile 3 das Sechsfache der ersten Zeile subtrahiert. Dieser Schritt wurde verkürzt als ③ $-\,6\cdot$ ① über dem Gleichheitszeichen festgehalten. Die Addition von Vielfachen einer Zeile zu einer anderen verändert die Determinante nicht. In einem zweiten Schritt werden Zeilen 2 und 3 vertauscht, ② $\leftrightarrow$ ③. Diese Vertauschung verändert zwar nicht den Betrag aber das Vorzeichen der Determinante. In einem dritten Schritt wird das Doppelte von Zeile 3 von Zeile 4 abgezogen. Dieser Schritt verändert die Determinante nicht. Es ergibt sich eine Matrix mit Werten von 0 unterhalb der Hauptdiagonalen. Die Determinante dieser Matrix entspricht dem Produkt der Elemente auf der Hauptdiagonalen. Natürlich entspricht dieser Wert genau dem Wert, welchen wir schon mithilfe einer Entwicklung bestimmt hatten. ■

■ Beispiel 8.3.19 — Weitere Zeilenumformungen zur Berechnung der Determinante.

Mithilfe von Zeilenumformungen lassen sich natürlich auch Determinanten von 3×3-

Matrizen berechnen:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{①\leftrightarrow②}{=} -\begin{vmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{③+\frac{2}{3}\cdot①}{=} -\begin{vmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$
$$\overset{③-5\cdot②}{=} -\begin{vmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -(-3)\cdot 1\cdot 6 = 18.$$

Auch hier hatten wir natürlich den gleichen Wert schon mithilfe der Regel von Sarrus erhalten. ■

Wir betrachten ein weiteres Beispiel:

■ **Beispiel 8.3.20 — Zeilenumformungen im Fall einer singulären Matrix.**

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{③-②}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Hier könnte man in einem weiteren Schritt eine Nullzeile in Zeile 3 oder 4 generieren, um zu zeigen, dass die Matrix keinen vollen Rang und damit eine Determinante von 0 hat. Da aber schon in obiger Form alle Elemente unter der Hauptdiagonalen gleich 0 sind, kann man darauf verzichten und die Determinante als Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen berechnen. ■

Z

Es gilt $\det(A^T) = \det(A)$.

Vertauscht man zwei Zeilen einer Matrix, bleibt die Determinante betragsmässig gleich, verändert aber das Vorzeichen.

Addiert man zu einem Zeilenvektor $\mathbf{a}_i$ der Matrix A einen Zeilenvektor $\mathbf{b}^T$, so entspricht die Determinante der neuen Matrix der Summe der Determinante von A und der Determinante einer Matrix, welche statt $\mathbf{a}_i$ den Zeilenvektor $\mathbf{b}^T$ in Zeile i hat. Ist $\mathbf{b}^T$ ein Vielfaches einer anderen Zeile von A, ist die Determinante der neuen Matrix gleich $\det(A)$.

Addiert man zu einem Spaltenvektor $\mathbf{a}^j$ der Matrix A einen Spaltenvektor $\mathbf{b}$, so entspricht die Determinante der neuen Matrix der Summe der Determinante von A und der Determinante einer Matrix, welche statt $\mathbf{a}^j$ den Spaltenvektor $\mathbf{b}$ in Spalte j hat. Ist $\mathbf{b}$ ein Vielfaches einer anderen Spalte von A, ist die Determinante der neuen Matrix gleich $\det(A)$.

Führt man Eliminationsschritte durch ohne das führende Element a_{ij} auf 1 zu normieren, d.h. ohne im Fall $a_{ij} \neq 0$ Zeile i durch a_{ij} zu teilen, verändert dies die Determinante nicht. Tauscht man in einem Erweiterungsschritt zwei Zeilen, bleibt die Determinante betragsmässig gleich und verändert ihr Vorzeichen. Ergibt sich eine Nullzeile, ist die Determinante 0. Führt man so eine Matrix auf eine Zeilenstufenform zurück, kann man eine Determinante (oft) einfach berechnen.

8.4 Eigenwerte und Eigenvektoren

In der Regel zeigen ein Vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ und dessen Bild $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ unter einer linearen Abbildung mit Abbildungsmatrix A in verschiedene Richtungen. So liegt $f(\mathbf{x})$ meist nicht auf der durch die Vielfachen von $\mathbf{x}$ aufgespannten Gerade $\mathrm{lin}\{\mathbf{x}\}$. Wir verdeutlichen dies an Beispielen:

■ **Beispiel 8.4.1 — Fortsetzung von Beispiel 8.1.6.**
In Beispiel 8.1.6 betrachteten wir die lineare Abbildung

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt u.a.

$$\begin{aligned}
f_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \\
f_1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
f_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \\
f_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Der erste Einheitsvektor wird durch die lineare Abbildung also um 90 Grad gegen den Uhrzeigersinn gedreht. Zudem wird seine Länge verdoppelt. Ebenso wird die Länge des zweiten Einheitsvektor verdoppelt. Er wird um 90 Grad im Uhrzeigersinn gedreht. Auch der Vektor $(1,2)^T$ verändert durch die lineare Abbildung seine Richtung und verdoppelt seine Länge. Der Vektor $\mathbf{v} = (1,1)^T$ hingegen verändert seine Richtung nicht, vgl. Abbildung 8.27. Sein Bild liegt innerhalb seiner linearen Hülle. Es gilt $f_1(\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}$.

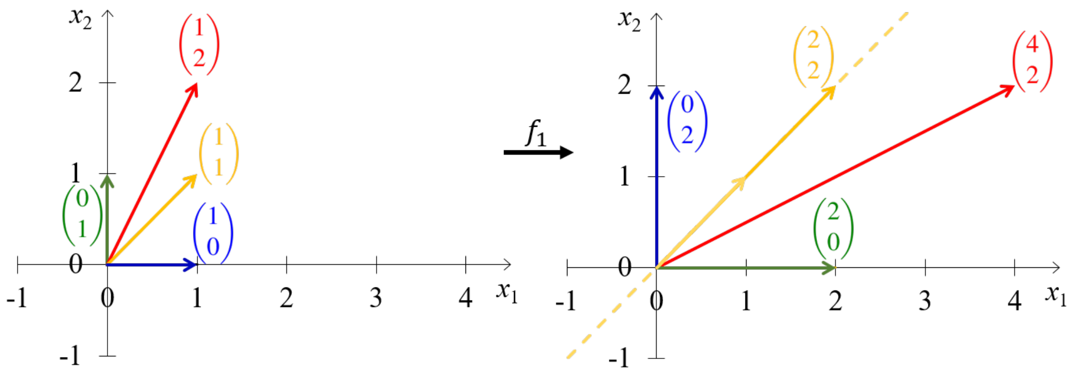

Abbildung 8.27: Das Bild von verschiedenen Vektoren unter f_1.

■

■ **Beispiel 8.4.2 — Fortsetzung von Beispiel 8.1.3.**
Die Matrix M aus Beispiel 8.1.3 bildet als Funktion

$$f_M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f_M(\mathbf{x}) = M\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0.85 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

einen Vektor $\mathbf{x}$ an Konsumenten der verschiedenen Produkte zur Zeit 1 auf die (erwartete) Anzahl an Konsumenten zur Zeit 2 ab, wobei z.B.

$$f_M\left(\begin{pmatrix}100\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0.5&0.3\\0.5&0.85\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50\\50\end{pmatrix},$$
$$f_M\left(\begin{pmatrix}200\\100\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0.5&0.3\\0.5&0.85\end{pmatrix}\begin{pmatrix}200\\100\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}130\\185\end{pmatrix},$$
$$f_M\left(\begin{pmatrix}100\\200\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0.5&0.3\\0.5&0.85\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\200\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}110\\220\end{pmatrix}.$$

Der Vektor $(100,0)^T$ wird durch diese lineare Abbildung also um 45 Grad gedreht und gestaucht, der Vektor $(200,100)^T$ verändert ebenfalls seine Richtung. Der Vektor $\mathbf{v}=(100,200)^T$ hingegen verändert seine Richtung nicht, wird aber etwas länger. Sein Bild liegt in seiner linearen Hülle. Es gilt $f_M(\mathbf{v})=1.1\mathbf{v}$. ■

8.4.1 Definition von Eigenwerten und Eigenvektoren

Ziele dieses Unterkapitels
- Was ist ein Eigenvektor?
- Was ist ein Eigenwert?
- Ist ein Eigenvektor zu einem gegebenen Eigenwert eindeutig bestimmt?

Vektoren, deren Bild in die gleiche oder in die genau entgegengesetzte Richtung zeigt, nennt man Eigenvektoren der Abbildungsmatrix. Ihr Bild liegt in ihrer linearen Hülle. Der Faktor, mit dem der Vektor multipliziert werden muss, um das Bild zu erhalten, heisst Eigenwert.

Definition 8.4.1 — Eigenwerte und Eigenvektoren. Sei A eine $n\times n$-Matrix. Gibt es für eine Zahl $\lambda\in\mathbb{R}$ einen Vektor $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$, $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$, sodass

$$A\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v},$$

so heisst λ (reeller) Eigenwert und $\mathbf{v}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ der Matrix A.

■ **Beispiel 8.4.3 — Fortsetzung von Beispiel 8.1.6.**
Durch Ausprobieren haben wir bereits einen Eigenvektor und einen Eigenwert von $f_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ mit $f_1(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_2\\2x_1\end{pmatrix}$ gefunden. Mit $\mathbf{v}=(1,1)^T$ gilt $f_1(\mathbf{v})=2\mathbf{v}$. Also ist $\mathbf{v}=(1,1)^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 dieser Matrix. ■

■ **Beispiel 8.4.4 — Eine ökonomische Interpretation.**
Die Abbildung f_M aus Beispiel 8.1.3 verändert die Richtung des Vektors $\mathbf{v}=(100,200)^T$ nicht. Der Vektor wird aber etwas länger. Es gilt $f_M(\mathbf{v})=1.1\mathbf{v}$. Der Vektor $\mathbf{v}=(100,200)^T$ ist also ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.1 dieser Abbildungsmatrix . In anderen Worten: Kaufen in einer Zeiteinheit 100 Kunden Produkt 1 und 200 Kunden Produkt 2, dann werden in der folgenden Zeiteinheit $1.1(100)=110$ Kunden Produkt 1 und $1.1(200)=220$ Kunden Produkt 2 kaufen. Der Marktanteil von Produkt 1 bleibt bei $1/3$, der von Produkt 2 bei $2/3$. Startet dieser Prozess mit Kunden $\mathbf{v}$, so bleibt das Verhältnis über die Zeit konstant. Der Eigenwert ist 1.1. Wir können daraus ablesen, dass der Markt pro Zeiteinheit um 10% wächst.

Bleiben die Marktanteile nur konstant, wenn die Kundenaufteilung $\mathbf{v} = (100,200)^T$ entspricht oder gibt es noch andere Kundenvektoren, die diese Eigenschaft haben? Ist $\mathbf{v} = (100,200)^T$ der einzige Eigenvektor?

Überlegt man sich, was passieren würde, wenn der Markt doppelt so gross wäre, ist es klar, dass dann auch doppelt so viele Kunden in der Folgeperiode vorhanden wären. Der Vektor $2\mathbf{v}$ wird auf $f_M(2\mathbf{v}) = 2f_M(\mathbf{v})$ abgebildet (dies folgt aus der Linearität der Abbildung). Mit $f_M(\mathbf{v}) = 1.1\mathbf{v}$ gilt $f_M(2\mathbf{v}) = 2 \cdot 1.1 \cdot \mathbf{v}$. Auch Nachrechnen ergibt

$$f_M\left(\begin{pmatrix}200\\400\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}220\\440\end{pmatrix} = 1.1\begin{pmatrix}200\\400\end{pmatrix}.$$

Der Vektor $2\mathbf{v}$ ist also ebenfalls ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.1 dieser Abbildungsmatrix. ■

Wie wir schon aus dem vorherigen Beispiel erahnen, gilt folgender Satz:

Satz 8.4.1 — Eigenschaften von Eigenvektoren.
Sei A eine quadratische Matrix der Ordnung n. Für jeden Eigenvektor $\mathbf{v}$ zum Eigenwert λ von A ist auch $\alpha\mathbf{v}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von A.

Beweis. Ist $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, gilt definitionsgemäss $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Nach Satz 6.5.2 gilt $A(\alpha\mathbf{v}) = \alpha A\mathbf{v}$ und damit $A(\alpha\mathbf{v}) = \alpha\lambda\mathbf{v} = \lambda\alpha\mathbf{v}$. Somit ist $\alpha\mathbf{v}$ ebenfalls Eigenvektor zum Eigenwert λ. ■

Z $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ist ein Eigenvektor der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wenn $A\mathbf{v}$ ein Vielfaches von $\mathbf{v}$ ist, also wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Den Wert λ nennt man auch einen Eigenwert von A und $\mathbf{v}$ einen Eigenvektor zu diesem Eigenwert λ.

Ist $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zum Eigenwert λ und $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, dann ist auch $\alpha\mathbf{v}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ . Eigenvektoren zu einem Eigenwert λ sind also nicht eindeutig bestimmt.

8.4.2 Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

Ziele dieses Unterkapitels
- Wie kann man Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix bestimmen?
- Was versteht man unter dem charkteristischen Polynom?
- Wie viele reelle, linear unabhängige Eigenvektoren hat eine symmetrische $n \times n$-Matrix?
- Was versteht man unter einem mehrfachen Eigenwert?

In obigen Beispielen sind wir zufällig auf Eigenvektoren der Matrizen gestossen. Wie kann man aber Eigenwerte und Eigenvektoren systematisch bestimmen? Wir demonstrieren das Vorgehen zunächst an einem Beispiel:

■ **Beispiel 8.4.5 — Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren.**
Wollen wir die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix}0 & 2\\2 & 0\end{pmatrix}$$

bestimmen, fragen wir uns also, für welche Werte von λ und welche Vektoren $\mathbf{v}$

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

gilt.

Anders formuliert suchen wir λ und $\mathbf{v}$, so dass

$$\begin{aligned} 2v_2 &= \lambda v_1 \\ 2v_1 &= \lambda v_2, \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} -\lambda v_1 + 2v_2 &= 0 \\ 2v_1 - \lambda v_2 &= 0, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Diese Fragestellung können wir nicht einfach durch Anwendung des Eliminationsverfahrens lösen, da hier neben $\mathbf{v}$ auch λ unbekannt ist.

Der Wert $\lambda = 1$ ist beispielsweise kein Eigenwert, da das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

nur die Lösung $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ hat und der Nullvektor definitionsgemäss kein Eigenvektor ist.

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

hat genau dann weitere Lösungen (neben $\mathbf{v} = \mathbf{0}$), wenn die Koeffizientenmatrix singulär ist, also wenn sie eine Determinante von 0 hat. Um die Werte von λ zu bestimmen, für die es Eigenvektoren gibt, lösen wir also

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0$$

und erhalten $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2$. Beide Werte sind Eigenwerte von A. Die zugehörigen Eigenvektoren erhalten wir, indem wir das LGS

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

für $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2$ lösen.

Für $\lambda = 2$ erhält man

$$\begin{aligned} -2v_1 + 2v_2 &= 0 \\ 2v_1 - 2v_2 &= 0, \end{aligned}$$

bzw.

$$v_1 = v_2 \quad \text{mit} \quad \mathbb{L} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Jedes $\mathbf{v} \in \mathbb{L} \setminus \{\mathbf{0}\}$, wie z.B. $\mathbf{v} = (1,1)^T$, ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 2.

Für $\lambda = -2$ erhält man

$$\begin{aligned} 2v_1 + 2v_2 &= 0 \\ 2v_1 + 2v_2 &= 0, \end{aligned}$$

bzw.

$$v_1 = -v_2 \qquad \text{mit } \mathbb{L} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Jedes $\mathbf{v} \in \mathbb{L} \setminus \{\mathbf{0}\}$, wie z.B. $\mathbf{v} = (1,-1)^T$, ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert -2. ▪

Für gegebenen Eigenwert λ der Matrix A lassen sich Eigenvektoren als Lösungen des homogenen LGS

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

bestimmen. Dieses homogene LGS hat stets mindestens eine Lösung $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Dies ist genau dann die einzige Lösung, wenn $(A - \lambda I)$ regulär ist, d.h. wenn $\det(A - \lambda I) \neq 0$.

Satz 8.4.2 — Bestimmung von Eigenwerten.
Sei A eine quadratische Matrix der Ordnung n. Der Wert $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein (reeller) Eigenwert von A, wenn $\det(A - \lambda I) = 0$.

Beweis. Laut Definition 8.4.1 ist $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, wenn

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}.$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung wird eine Matrix mit einem Vektor multipliziert, auf der rechten Seite wird der Vektor $\mathbf{v}$ um den Faktor λ gestreckt bzw. gestaucht, also eine skalare Multiplikation ausgeführt. Es folgt

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} = \lambda I \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad A\mathbf{v} - \lambda I \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Ist die Matrix $(A - \lambda I)$ regulär, so hat dieses homogene LGS mit Variablen $\mathbf{v}$ genau eine Lösung, nämlich $\mathbf{0}$. Diese Lösung stellt jedoch definitionsgemäss keinen Eigenvektor dar. Das homogene LGS hat genau dann von $\mathbf{0}$ verschiedene Lösungen, wenn die Matrix $(A - \lambda I)$ singulär ist, also wenn $\det(A - \lambda I) = 0$, vgl. Satz 8.3.5. Für festes λ hat das homogene LGS $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ also genau dann eine Lösung $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, wenn $\det(A - \lambda I) = 0$. $\lambda \in \mathbb{R}$ ist also genau dann ein (reeller) Eigenwert von A, wenn $\det(A - \lambda I) = 0$. ■

Es ergibt sich folgende Vorgehensweise zur Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix A der Ordnung n:

1. Berechne die Determinante $\det(A - \lambda I)$ als Polynom n-ten Grades mit Variable λ.
2. Bestimme alle Nullstellen des Polynoms, also alle Lösungen von $\det(A - \lambda I) = 0$. Die Nullstellen entsprechen den Eigenwerten.

3. Bestimme zu jedem Eigenwert λ die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ von $(A-\lambda I)\mathbf{v}=\mathbf{0}$. Jeder Vektor $\mathbf{v}\in\mathbb{L}\setminus\{\mathbf{0}\}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Da die Gleichung $\det(A-\lambda I)=0$ in dieser Berechnung zentral ist, nennt man sie auch die charakteristische Gleichung von A. Die linke Seite dieser Gleichung nennt man das charakteristische Polynom von A.

Definition 8.4.2 — Charakteristisches Polynom.
Sei A eine quadratische Matrix. Die Gleichung $\det(A-\lambda I)=0$ mit der Variablen λ heisst charakteristische Gleichung von A. Die linke Seite der Gleichung nennt man charakteristisches Polynom von A.

Wir demonstrieren das Vorgehen an zwei weiteren Beispielen:

Beispiel 8.4.6 — Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren.
Wir bestimmen die Eigenwerte und Eigenvektoren der Abbildungsmatrix M von

$$f_M:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{y}=f_M(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}0.50 & 0.30\\ 0.50 & 0.85\end{pmatrix}\mathbf{x}$$

mithilfe obiger Schritte.

Schritt 1: Berechne die Determinante $\det(M-\lambda I)$

$$\det\begin{pmatrix}0.50-\lambda & 0.30\\ 0.50 & 0.85-\lambda\end{pmatrix}=(0.50-\lambda)(0.85-\lambda)-0.15=\lambda^2-1.35\,\lambda+0.275$$

Schritt 2: Bestimme alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^2-1.35\,\lambda+0.275=0$$

Lösungen dieser quadratischen Gleichung ergeben sich mithilfe der Mitternachtsformel als

$$\lambda_{1,2}=\frac{1.35\pm\sqrt{1.35^2-4\cdot(0.275)}}{2}=\frac{1.35\pm 0.85}{2}.$$

Also gilt $\lambda_1=0.25$ oder $\lambda_2=1.1$.

Schritt 3: Bestimmung der Eigenvektoren als Lösung von $(M-\lambda I)\mathbf{v}=\mathbf{0},\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$

- Für $\lambda_1=0.25$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix}0.25 & 0.30\\ 0.50 & 0.60\end{pmatrix}\mathbf{v}^1=\mathbf{0}$$

  mit $\mathbb{L}=\left\{t\begin{pmatrix}6\\-5\end{pmatrix}\,\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\}$. Also ist z.B. für $t=20$ der Vektor $\begin{pmatrix}120\\-100\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1=0.25$ von M.
- Für $\lambda_2=1.1$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix}-0.60 & 0.30\\ 0.50 & -0.25\end{pmatrix}\mathbf{v}^2=\mathbf{0}$$

  mit $\mathbb{L}=\left\{t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\,\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\}$. Also ist z.B. für $t=100$ der Vektor $\begin{pmatrix}100\\200\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2=1.1$ von M, was wir auch zuvor schon durch Ausprobieren gefunden hatten.

■

■ **Beispiel 8.4.7 — Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren.**
Wir suchen die Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Schritt 1: Berechne die Determinante $\det(B - \lambda I)$

$$\det \begin{pmatrix} 6-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (6-\lambda)(4-\lambda)(3-\lambda)$$

Schritt 2: Bestimme alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms
Obiges Polynom $(6-\lambda)(4-\lambda)(3-\lambda)$ hat drei Nullstellen: $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 4$ und $\lambda_3 = 3$.

Schritt 3: Bestimmung der Eigenvektoren als Lösung von $(B - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$
Wir betrachten das LGS

$$\begin{pmatrix} 6-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

- Für $\lambda_1 = 6$ ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Also ist z.B. $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 6 der Matrix B.
- Für $\lambda_2 = 4$ ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Also ist z.B. $\mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 4 der Matrix B.
- Für $\lambda_3 = 3$ ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$. Also ist z.B. $\mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 3 der Matrix B.

■

Das charakteristische Polynom einer $n \times n$-Matrix A hat bei dieser Bestimmung als $\det(A - \lambda I)$ höchstens die Ordnung n. Die Matrix hat damit maximal n verschiedene Eigenwerte und n linear unabhängige Eigenvektoren. In dieser Vorlesung beschränken wir uns auf reelle Eigenwerte, also $\lambda \in \mathbb{R}$. Allgemein kann eine Matrix jedoch auch nicht-reelle Eigenwerte haben.

■ **Beispiel 8.4.8 — Eine Matrix ohne reelle Eigenwerte.**
Suchen wir die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, so erhalten wir in Schritt 1

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda & -2\\ 1 & -1-\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2+1.$$

Dieses Polynom hat keine reellen Nullstellen.[9] Damit existieren keine reellen Eigenwerte und keine zugehörigen Eigenvektoren der Matrix C. ■

Beschränkt man sich auf die Betrachtung symmetrischer Matrizen, so sind alle Eigenwerte reell. Zudem existieren bei einer symmetrischen Matrix der Ordnung n stets n linear unabhängige Eigenvektoren.

Satz 8.4.3 — Existenz reeller Eigenwerte.
Eine (reelle) symmetrische $n \times n$-Matrix A hat n reelle, linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^n$ zu Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Beweis. Einen Beweis findet man in Kall (1984, Satz 3.24). ■

Die in obigem Satz genannten Eigenwerte sind nicht notwendigerweise verschieden. Einen Eigenwert, zu dem zwei oder mehr linear unabhängige Eigenvektoren bestimmt werden können, nennen wir einen zweifachen oder mehrfachen Eigenwert.[10]

Definition 8.4.3 — Mehrfacher Eigenwert.
Sei A eine quadratische Matrix der Ordnung n mit n linear unabhängigen Eigenvektoren. Einen Eigenwert λ von A, zu dem es $\ell \leq n$ linear unabhängige Eigenvektoren gibt, nennt man ℓ-fachen Eigenwert von A. Im Fall $\ell \geq 2$ spricht man auch von mehrfachen Eigenwerten von A.

Wir demonstrieren dies in einem Beispiel:

■ **Beispiel 8.4.9 — Mehrfache Eigenwerte.**
Wir suchen die Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$D = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Die 3×3-Matrix D ist symmetrisch. Daher wissen wir noch vor der Berechnung, dass diese Matrix drei linear unabhängige Eigenvektoren hat.

Schritt 1: Berechne die Determinante $\det(D - \lambda I)$

$$\det\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda-2)(\lambda+1)^2$$

[9] Es hat aber komplexe Nullstellen, $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$, wobei i^2 als -1 definiert ist. Komplexe Zahlen und komplexe Nullstellen werden in dieser Vorlesung jedoch nicht behandelt.

[10] Man unterscheidet genau genommen zwischen einer sogenannten geometrischen und einer algebraischen Vielfachheit. Da wir uns in dieser Vorlesung auf Matrizen mit n linear unabhängigen Eigenvektoren beschränken, für die beide Werte stets gleich sind, machen wir diese Unterscheidung hier nicht.

Hierbei haben wir das Polynom bereits faktorisiert, um im folgenden Schritt die Nullstellen einfacher bestimmen zu können.[11]

Schritt 2: Bestimme alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms
Obiges Polynom $-(\lambda-2)(\lambda+1)^2$ hat zwei Nullstellen: $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$.

Schritt 3: Bestimmung der Eigenvektoren als Lösung von $(D-\lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$
Wir betrachten das LGS

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0.$$

- Für $\lambda_1 = 2$ ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$. Also ist z.B. $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 der Matrix D.
- Für $\lambda_2 = -1$ ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$. Man sagt auch, -1 ist zweifacher Eigenwert der Matrix D mit linear unabhängigen Eigenvektoren $\mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.[12]

Die Matrix D hat also drei linear unabhängige Eigenvektoren: den Eigenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$, den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$ und den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda_3 = -1$. ■

Z Zur Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren einer Matrix A geht man in drei Schritten vor:

1. Bestimmung der Determinante $\det(A-\lambda I)$. Diesen Ausdruck nennt man auch charakteristisches Polynom.

[11] Eine solche Faktorisierung ist bei Polynomen vom Grad $n > 2$ nicht immer einfach und manchmal unmöglich, wenn man sich nur auf reelle Eigenwerte beschränkt. Man kann hierfür beispielsweise eine Nullstelle λ_0 durch Zeichnen des Graphen oder Ausprobieren finden und dann entsprechend den Faktor $(\lambda-\lambda_0)$ ausklammern.

[12] Da $\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ sind nicht nur $\mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren zu diesem Eigenwert, sondern auch z.B. $\mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\tilde{\mathbf{v}}^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Auflösung der Gleichung $\det(A - \lambda I) = 0$ nach λ. Die (reellen) Lösungen entsprechen den (reellen) Eigenwerten der Matrix A.
3. Zu jedem Eigenwert λ können dann Eigenvektoren $\mathbf{v}$ als Lösung von $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ mit $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ bestimmt werden.

Eine symmetrische $n \times n$-Matrix hat n reelle, linear unabhängige Eigenvektoren. Mehrere linear unabhängige Eigenvektoren können den gleichen Eigenwert haben. In diesem Fall spricht man von einem mehrfachen Eigenwert.

8.4.3 Potenzbildung von Matrizen (#)

Ziele dieses Unterkapitels

- Sei A eine Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Wie lauten die Eigenwerte von A^k?
- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit n linear unabhängigen Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^n$ und zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
  - Wie kann man A mithilfe dieser Eigenvektoren und Eigenwerte bestimmen?
  - Wie kann man A^k mithilfe dieser Eigenvektoren und Eigenwerte bestimmen?

In Beispiel 6.5.19 hatten wir Potenzen von Matrizen über die Dynamik in Beispiel 1.0.4 motiviert. Verkettet man eine lineare Abbildung $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ mit sich selbst, entspricht diese Verkettung der Abbildungsvorschrift $f(f(\mathbf{x})) = A^2\mathbf{x}$. Ist $\mathbf{x} = \mathbf{v}$ ein Eigenvektor von A, dann gibt es also ein λ mit $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Aus Satz 8.4.1 folgt, dass $\lambda\mathbf{v}$ auch ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von A ist. Damit gilt also

$$A^2\mathbf{v} = A(A\mathbf{v}) = A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v}.$$

Ist $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so ist er auch ein Eigenvektor von A^2 zum Eigenwert λ^2. Allgemein gilt:

Satz 8.4.4 — Potenzen einer Matrix. Hat $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ einen Eigenvektor $\mathbf{v}$ und zugehörigen Eigenwert λ, dann hat die Matrix A^k mit $k \in \mathbb{N}$ ebenfalls den Eigenvektor $\mathbf{v}$ zum Eigenwert λ^k.

Beweis. Die Behauptung folgt direkt, indem man A k-mal auf den Eigenvektor $\mathbf{v}$ anwendet,

$$A^k\mathbf{v} = A^{k-1}(A\mathbf{v}) = A^{k-1}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda A^{k-1}\mathbf{v} = \ldots = \lambda^k\mathbf{v}.$$

■

▪ Beispiel 8.4.10 — Fortsetzung von Beispiel 8.1.3.
Die Matrix M aus Beispiel 8.1.3 verändert die Richtung des Vektors $\mathbf{v} = (100, 200)^T$ nicht, da er ein Eigenvektor mit positivem Eigenwert ist. Der Vektor wird aber etwas länger, da er durch die Abbildung mit dem Eigenwert 1.1 multipliziert wird. Es gilt $M\mathbf{v} = 1.1\mathbf{v}$.

Kauften also zur Zeit 1 $v_1 = 100$ Kunden Produkt 1 und $v_2 = 200$ Kunden Produkt 2, dann kaufen zur Zeit 2 eine Anzahl von 110 Kunden Produkt 1 und 220 Kunden Produkt 2. Aus $\mathbf{v}$ wird $M\mathbf{v} = 1.1\mathbf{v}$. Zur Zeit 3 kaufen dann $M(1.1\mathbf{v}) = 1.1(M\mathbf{v}) = 1.1(1.1\mathbf{v}) = 1.1^2\mathbf{v}$ Kunden Produkte 1 und 2. Aus dem Vektor $\mathbf{v}$ wird über zwei Zeiteinheiten

$$M^2\mathbf{v} = 1.1^2\mathbf{v}.$$

Der Vektor $\mathbf{v}$ ist also Eigenvektor der Matrix M^2 zum Eigenwert 1.1^2.

Auch Nachrechnen ergibt

$$f_M\left(f_M\begin{pmatrix}100\\200\end{pmatrix}\right) = f_M\left(\begin{pmatrix}110\\220\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}121\\242\end{pmatrix} = 1.1\begin{pmatrix}110\\220\end{pmatrix} = 1.1^2\begin{pmatrix}100\\200\end{pmatrix}.$$

Wir können daraus ablesen, dass der Markt nach zwei Zeiteinheiten $1.1^2 = 1.21$-mal so gross ist wie zuvor, also um 21% gewachsen ist. ▪

Interessiert man sich in obigem Beispiel dafür, wie viele Kunden nach 10 Zeiteinheiten Produkt 1 und wie viele Produkt 2 kaufen, also für das Ergebnis von $M^{10}\mathbf{x}$, so ist der direkte Ansatz, die Matrix M wiederholt mit sich selbst zu multiplizieren und danach das Ergebnis mit $\mathbf{x}$ zu multiplizieren. Dies scheint mühsam. Wir überlegen uns daher einen anderen Weg zur Potenzbildung einer Matrix A:

Für eine Matrix A mit n linear unabhängigen Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^n$ und zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ gilt für alle $j = 1, \dots, n$

$$A\mathbf{v}^j = \lambda_j \mathbf{v}^j$$

und damit

$$A\underbrace{[\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n]}_{=V} = [\lambda_1\mathbf{v}^1, \dots, \lambda_n\mathbf{v}^n] = \underbrace{[\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n]}_{=V}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}}_{=L}.$$

Zusammenfassend gilt

$$AV = VL.$$

Daraus ergibt sich mithilfe der Rechenregeln für die Inverse, Satz 8.2.5, folgender Satz:

Satz 8.4.5 — Darstellung von A mithilfe von Eigenwerten und Eigenvektoren. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit n linear unabhängigen Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^n$ und zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Bezeichnet man die Matrix der Eigenvektoren als $V = [\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n]$ und die Diagonalmatrix der Eigenwerte als

$$L = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n\end{pmatrix},$$

dann gilt

$$A = VLV^{-1}.$$

Beweis. Da die Eigenvektoren unabhängig sind, hat V vollen Rang und ist damit invertierbar. Obige Überlegungen beweisen die Gleichung $AV = VL$. Multipliziert man diese Gleichung von rechts mit V^{-1}, folgt $A = VLV^{-1}$. ■

■ Beispiel 8.4.11 — Fortsetzung von Beispiel 8.4.5.
In Beispiel 8.4.5 bestimmten wir die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

als $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ und $\mathbf{v}^1 = (1,1)^T$ und $\mathbf{v}^2 = (1,-1)^T$. Mit

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

und

$$V = [\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt $AV = VL$. Berechnet man V^{-1} z.B. durch Anwendung des simultanen Eliminationsverfahrens als

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

kann man

$$A = VLV^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

leicht durch Nachrechnen überprüfen. ■

■ Beispiel 8.4.12 — Fortsetzung von Beispiel 8.4.6.
In Beispiel 8.4.6 bestimmten wir die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0.85 \end{pmatrix}$$

als $\lambda_1 = 0.25$, $\lambda_2 = 1.1$ und $\mathbf{v}^1 = (120,-100)^T$ und $\mathbf{v}^2 = (100,200)^T$. Mit

$$L = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{pmatrix}$$

und

$$V = [\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2] = \begin{pmatrix} 120 & 100 \\ -100 & 200 \end{pmatrix}$$

gilt $MV = VL$. Berechnet man V^{-1} z.B. durch Anwendung des simultanen Eliminationsverfahrens als

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{20}{3400} & -\frac{10}{3400} \\ \frac{10}{3400} & \frac{12}{3400} \end{pmatrix}$$

kann man $M = VLV^{-1}$ leicht durch Nachrechnen überprüfen. ■

Der Nutzen des obigen Resultats steckt in der Berechnung von A^k. Kennt man Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^n$ von A, dann kennt man mit Satz 8.4.4 Eigenwerte und Eigenvektoren für die k-te Potenz von A. Es gilt:

Satz 8.4.6 — Berechnung von Potenzen.
Hat $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau n linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^n$ mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, dann gilt mit $V = [\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n]$ für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$A^k = V \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \lambda_n^k \end{pmatrix} V^{-1}.$$

Beweis. Mit $A = VLV^{-1}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} A^k &= \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{k \text{ mal}} \\ &= VL\underbrace{V^{-1} \cdot V}_{=I}L\underbrace{V^{-1} \cdot V}_{=I}LV^{-1} \cdot \cdots \cdot VLV^{-1} \\ &= VL \cdot L \cdot L \cdots \cdot LV^{-1} = VL^kV^{-1}. \end{aligned}$$

Da L nur Elemente auf der Hauptdiagonalen hat, ergibt L^k eine Matrix, die ebenfalls nur Elemente auf der Hauptdiagonalen hat. Durch Nachrechnen kann man zeigen, dass das i-te Element der Hauptdiagonalen von L^k dem Wert λ_i^k entspricht. ∎

Diese Berechnung kann für grosse k effizienter sein als die mehrfache Matrizenmultiplikation. Wir demonstrieren dies am Beispiel.

▪ Beispiel 8.4.13 — Nachfrage in 10 Zeiteinheiten.
In Beispiel 8.4.12 zeigten wir, dass

$$M = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0.85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 & 100 \\ -100 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{20}{3400} & -\frac{10}{3400} \\ \frac{10}{3400} & \frac{12}{3400} \end{pmatrix}.$$

Wir nutzen dies nun zur Berechnung von

$$M^k = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0.85 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 120 & 100 \\ -100 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.25^k & 0 \\ 0 & 1.1^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{20}{3400} & -\frac{10}{3400} \\ \frac{10}{3400} & \frac{12}{3400} \end{pmatrix}.$$

Unabhängig von k erhält man hier das Ergebnis nach nur zwei Matrizenmultiplikationen. Für $k = 10$ ergibt sich z.B.

$$M^{10} \approx \begin{pmatrix} 0.763 & 0.915 \\ 1.526 & 1.831 \end{pmatrix}.$$

Kaufen also auf dem Markt zur Zeit 1 1000 Kunden Produkt 1 und 1000 Kunden Produkt 2, kann man die Anzahl an Kunden, welche die Produkte 10 Zeiteinheiten später kaufen, wie folgt berechnen:

$$M^{10} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1000 \cdot 0.763 + 1000 \cdot 0.915 \\ 1000 \cdot 1.526 + 1000 \cdot 1.831 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1678 \\ 3357 \end{pmatrix}.$$

Nach 10 Zeiteinheiten kaufen also 1678 Kunden Produkt 1 und 3357 Kunden Produkt 2. ▪

Z Ist A eine Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, dann sind $\lambda_1^k,\ldots,\lambda_n^k$ Eigenwerte von A^k.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit n linear unabhängigen Eigenvektoren $\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^n$ und zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, $V=[\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^n]$ die Matrix der Eigenvektoren, L die Diagonalmatrix mit Eigenwert λ_i in Spalte i von Zeile i und L^k die Diagonalmatrix mit λ_i^k in Spalte i von Zeile i. Dann gilt: $A = VLV^{-1}$ und $A^k = VL^kV^{-1}$.

8.4.4 Besonderheiten symmetrischer Matrizen (#)

Ziele dieses Unterkapitels

- Kann die Matrix der Eigenvektoren V stets so gewählt werden, dass V eine orthogonale Matrix ist?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Determinante und den Eigenwerten einer symmetrischen Matrix?

Symmetrische Matrizen der Ordnung n haben laut Satz 8.4.3 stets n linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^n$ zu Eigenwerten $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$. Zudem haben sie eine besondere, leider jedoch wenig intuitive Eigenschaft: Eigenvektoren symmetrischer Matrizen können stets so gewählt werden, dass sie paarweise orthogonal sind. Normiert man diese Eigenvektoren, so ist $V=[\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2,\ldots,\mathbf{v}^n]$ orthogonal.

Satz 8.4.7 — Existenz orthogonaler Eigenvektoren. Die n Eigenvektoren $\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^n$ einer (reellen) symmetrischen $n\times n$-Matrix A können so gewählt werden, dass die $n\times n$-Matrix V, die durch die Spaltenvektoren $\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^n$ gebildet wird, eine orthogonale Matrix ist.

Beweis. Einen Beweis findet man in Kall (1984, Korollar 3.25). ■

■ Beispiel 8.4.14 — Orthogonalität von Eigenvektoren. Die Eigenvektoren der symmetrischen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{v}^1 = (1,1)^T$ und $\mathbf{v}^2 = (1,-1)^T$, sind orthogonal. Die Matrix

$$[\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ist jedoch nicht orthogonal, da die Länge der Eigenvektoren nicht 1 ist. Da mit $\mathbf{v}^1=(1,1)^T$ jedoch auch $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}^1$ und mit $\mathbf{v}^2=(1,-1)^T$ auch $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}^2$ Eigenvektoren sind, kann man V als

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

wählen und es gilt $AV = VL$. Da laut Satz 8.2.3 für die orthogonale Matrix V gilt, dass $V^{-1} = V^T$, ergibt sich

$$A = VLV^{-1} = VLV^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

■

Auch im Falle der symmetrischen 3×3-Matrix D aus Beispiel 8.4.9 kann man V entsprechend wählen.

■ Beispiel 8.4.15 — Eigenvektoren aus Beispiel 8.4.9.
Für die symmetrische Matrix D aus Beispiel 8.4.9 hatte man mit dem Eigenwert 2 die Menge $\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\} \setminus \{\mathbf{0}\}$ an Eigenvektoren erhalten. Ein Eigenvektor der Länge 1 ist somit $\mathbf{v}^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Zum Eigenwert -1 hatten wir die Menge $\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\} \setminus \{\mathbf{0}\}$ an Eigenvektoren erhalten. Da

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,$$

sind die Vektoren $\mathbf{v}^1$ und $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ orthogonal. Normieren wir den zweiten Vektor auf die Länge 1, ergibt sich ein Eigenvektor $\mathbf{v}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ zum Eigenwert -1. Der Vektor $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ ist zwar orthogonal zu $\mathbf{v}^1$, aber nicht zu $\mathbf{v}^2$.

Laut Satz 8.4.7 muss jedoch ein Vektor $\mathbf{v}^3 \in \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\} \setminus \{\mathbf{0}\}$, also eine Linearkombination

$$\mathbf{v}^3 = \alpha_1 \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

existieren, so dass $(\mathbf{v}^3)^T\mathbf{v}^1 = (\mathbf{v}^3)^T\mathbf{v}^2 = 0$ und $\|\mathbf{v}^3\| = 1$. In der Tat ergibt sich mit $\alpha_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ und $\alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{6}}$ ein solcher Eigenvektor $\mathbf{v}^3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ zum Eigenwert -1.

Mit

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt wieder $D = VLV^{-1} = VLV^T$, da V orthogonal ist. ■

Verdeutlicht man sich die geometrische Interpretation dieser Aussage, gibt es also bei einer symmetrischen Matrix stets n Eigenvektoren zu Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, die senkrecht zueinander stehen und die Länge 1 haben. Im Fall $n = 2$ spannen die Spaltenvektoren von V ein Quadrat mit Flächeninhalt 1 auf, im Fall $n = 3$ einen Würfel mit Volumen 1. Die orthogonale Matrix V hat stets eine Determinante von 1 oder -1. Da das Bild von Eigenvektoren stets in ihrer eigenen linearen Hülle liegt, sind die Bilder orthogonaler Eigenvektoren ebenfalls wieder orthogonal. Im Fall $n = 2$ wird ein Quadrat also auf ein Rechteck abgebildet, vgl. Abbildung 8.28, im Fall $n = 3$ ein Würfel auf einen Quader, u.s.w. Der Inhalt bzw. das Volumen von 1 wird zu einem Volumen von $|\lambda_1\lambda_2|$ bzw. $|\lambda_1\lambda_2\lambda_3|$.

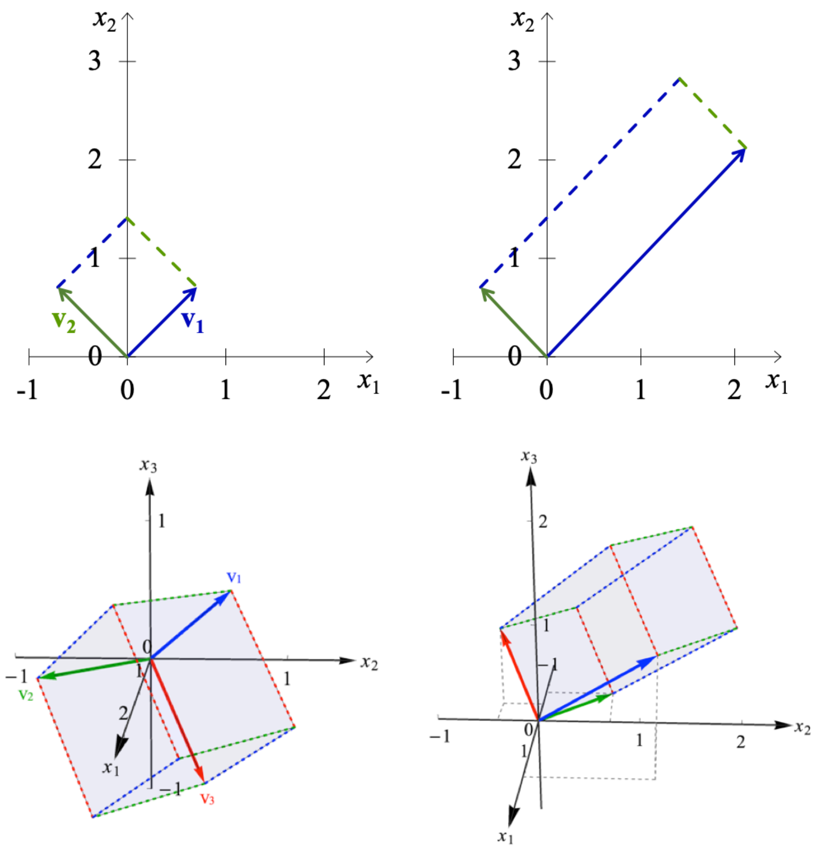

Abbildung 8.28: Orthogonale Eigenvektoren von symmetrischen Matrizen und deren Bilder.

Satz 8.4.8 — Zusammenhang zwischen Determinante und Eigenwerten. Sei A eine symmetrische $n \times n$-Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Beweis. Ein Beweis folgt aus Kall (1984, Korollar 3.25) und den Rechenregeln für Determinanten in Kall (1984, Satz 3.15). ∎

Beispielsweise ist die Determinante der Matrix A mit Eigenwerten 2 und -2 gleich

$\det(A) = 2 \cdot (-2) = -4$. Die Determinante der Matrix D mit Eigenwerten 2, -1 und -1 ist $\det(D) = 2 \cdot (-1) \cdot (-1) = 2$. Nicht-symmetrische Matrizen haben in der Regel keine orthogonalen Eigenvektoren.

■ **Beispiel 8.4.16 — Orthogonalität von Eigenvektoren.**
Die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

hat Eigenwerte 6, 4 und 3 und laut Satz 8.3.3 als Matrix in Zeilenstufenform eine Determinante von $\det(B) = 6 \cdot 4 \cdot 3 = 72$. Die Determinante entspricht hier also dem Produkt der Eigenwerte, obwohl die Matrix nicht symmetrisch ist.[13] Die Eigenvektoren der nicht-symmetrischen Matrix B können jedoch nicht so gewählt werden, dass sie orthogonal sind:

Alle Eigenvektoren zum Eigenwert 6 haben die Form $\mathbf{v}^1 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 \neq 0$,

alle Eigenvektoren zum Eigenwert 4 haben die Form $\mathbf{v}^2 = \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 \neq 0$.

Das Skalarprodukt ist also stets

$$\left(\mathbf{v}^1\right)^T \mathbf{v}^2 = \alpha_1 \alpha_2 \neq 0.$$

■

Z Ist A eine symmetrische $n \times n$-Matrix mit Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$ und zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, dann

- kann die Matrix der Eigenvektoren V von A stets so gewählt werden, dass V eine orthogonale Matrix ist.
- gilt $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

Nicht-symmetrische Matrizen haben in der Regel keine orthogonalen Eigenvektoren.

[13] In der Tat gilt Satz 8.4.8 ganz allgemein für alle $n \times n$-Matrizen mit n unabhängigen Eigenvektoren.

Literaturverzeichnis

Dietz, H. M., *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, Springer Berlin Heidelberg, 5. Auflage, 2012

Ellenberg, J., *How not to be wrong - The power of mathematical thinking*, Penguin Books New York, 1. Auflage, 2014

Forster, O., *Lineare Algebra*, Friedrich Vieweg Sohn, Braunschweig, 10. Auflage, 1995

Forster, O., *Analysis 2, Differentialrechnung im* $\mathbb{R}^n$*, Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Friedrich Vieweg Sohn, Braunschweig, 5. Auflage, 1984

Forster, O., *Analysis 3, Integralrechnung im* $\mathbb{R}^n$ *mit Anwendungen*, Friedrich Vieweg Sohn, Braunschweig, 3. Auflage, 1984

Goll, C., Bentz, T., Röhrl, N., Akkar, Z., App, A., Beer, J., Dege, C., Deissler, J., Dirmeier, A., Feiler, S., Gulino, H, Haase, D., Hägele, C., Hankele, V., Hardy, E., Häussling, R., Heidbüchel, J., Helfrich-Schkarbanenko, A., Herlold, H., Hoffmann, H., Karl, I., Kempf, S., Kleb, J., Koss, R., Liedtke, J., Lilli, M., Merkt, D., Nese, C., Pintschovius, U., Pohl, T., Rapedius, K., Rutka, V., Schulz, M., Schüpp-Niewa, B., Sternal, O., Stroh, T., Vettin, L., Walliser, N., Weyreter, G., Ziebarth, E., *Onlinebrückenkurs Mathematik*, `https://www.math4refugees.tu-berlin.de/mfr/html/de/sectionx3.1.0.html`, zuletzt aufgerufen am 16.5.2018.

Heuser, H., *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*, Teubner, Stuttgart, 13. Auflage, 2000

Kall, P., *Analysis für Ökonomen*, Teubner Studienbücher Mathematik, Stuttgart, 1. Auflage, 1982

Kall, P., *Lineare Algebra für Ökonomen*, Teubner Studienbücher Mathematik, Stuttgart, 1. Auflage, 1984

Geiger, C., Kanzow, C., *Numerische Verfahren zur Lösung unrestringierter Optimierungsaufgaben*, Springer, 1. Auflage, 1999

Merz, M. und Wüthrich, M.V., *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Die Einführung mit vielen ökonomischen Beispielen*, Vahlen, 1. Auflage, 2013

Opitz, O., Etschberger, S., Burkart, W., und Klein, R., *Mathematik - Lehrbuch: für das Studium der Wirtschaftswissenschaften*, De Gruyter Studium, 12. Auflage, 2017

Pampel, T., *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, Springer, 1. Auflage, 2010

Rommelfanger, H., *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I*, Springer Berlin Heidelberg, 5. Auflage, 2008

Rommelfanger, H., *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler II*, Springer Berlin Heidelberg, 5. Auflage, 2009

Sanderson, G., *Youtube Channel 3blue1brown*, `https://www.youtube.com/channel/UCYO_jab_esuFRV4b17AJtAw`, 2017

Strang, G., *Lineare Algebra*, Springer Berlin Heidelberg, 1. Auflage, 2003

Legrand, M., *The Legrand Orange Book*, `http://www.LaTeXTemplates.com`, 2017