Matrikelnummer: ________________________ Prüfungsnummer: __________________

Name: _________________________ Vorname: _________________________

Institut für Operations Research und mathematische Methoden
der Wirtschaftswissenschaften der Universität Zürich

PRÜFUNG IN MATHEMATIK II (BACHELORSTUDIUM)

17. Juni 2010

Zulässige Hilfsmittel: Schreibzeug (keine Taschenrechner)

Prüfungsdauer: 90 Minuten

Es können maximal 80 Punkte erzielt werden, und zwar 20 Punkte pro Aufgabe.

In Aufgabe 4 wird nur nach der Lösung gefragt. Dort wird der Lösungsweg nicht angeschaut, es zählen nur die in die Kästchen eingetragenen Lösungen!

Bei den Aufgaben 1, 2 und 3 müssen die angewandte Lösungsmethode bzw. die Begründungen und Argumente deutlich erkennbar sein, die Lösungen sind unmittelbar unter "Platz für Lösung" einzutragen. Die Aufgabenstellung ist genau zu beachten.

Falls der Platz nicht ausreicht, kann die Bearbeitung der Aufgaben auf Zusatzblättern fortgesetzt werden. Ungültige Lösungsversuche sind in jedem Fall durchzustreichen!

(leer lassen)

Aufgabe	1	2	3	4	Summe
Punkte					

AUFGABE 1 (20 Punkte)

Aufgabe 1.1 (6 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int f'(x)\,(1+4f(x))\,dx\,.$$

Aufgabe 1.2 (7 Punkte) Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\int_0^1 \int_0^1 x\,y\,e^{1-y^2}\,dx\,dy\,.$$

Aufgabe 1.3 (7 Punkte) Zeigen Sie, dass gilt

$$1.4 \;\leq\; \int_0^1 e^{(x^2)}\,dx \leq \int_0^1 e^x\,dx \;\leq\; 1.8\,.$$

Hinweise: Nach dem Satz von Taylor gilt für alle x

$$e^{(x^2)} \geq 1 + x^2 + \frac{x^4}{2}\,.$$

Ausserdem ist $2.71 < e < 2.72$.

AUFGABE 2 (20 Punkte)

Aufgabe 2.1 (12 Punkte) Gegeben ist das inhomogene lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & & & - & 2x_3 & + & x_4 = & 1 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 = & 0 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & ux_3 & + & 6x_4 = & v \end{array}$$

wobei u und v reelle Parameter sind. Bestimmen Sie alle Parameterpaare (u, v), für die dieses LGS

(i) unlösbar ist,
(ii) genau eine Lösung besitzt,
(iii) eine Lösungsmenge der Dimension 1 hat,
(iv) eine Lösungsmenge der Dimension 2 hat.

Aufgabe 2.2 (8 Punkte) Gegeben ist das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & - & 4x_2 & & & + & x_4 = & 0 \\ & & 3x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 = & 0 \end{array}$$

(i) Bestimmen Sie die Lösungsmenge L dieses Gleichungssystems.
(ii) Bestimmen Sie eine Basis des Vektorraums L.

(iii) Untersuchen Sie, ob das Vektorsystem

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ein Erzeugendensystem von L ist (Begründung!). Ist X auch eine Basis von L? Begründung!

AUFGABE 3 (20 Punkte)

Aufgabe 3.1 (6 Punkte) Berechnen Sie die Determinante

$$\begin{vmatrix} 19 & 38 & -19 & 57 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 3.2 (8 Punkte) Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 3 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

bezeichnen ihre Spaltenvektoren mit $\underline{a}^1, \underline{a}^2, \underline{a}^3, \underline{a}^4$ und schreiben A kurz als

$$A = \begin{pmatrix} \underline{a}^1 & \underline{a}^2 & \underline{a}^3 & \underline{a}^4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Determinanten, die Begründung muss erkennbar sein:

(i) $\det A$,

(ii) $\det (\underline{a}^3 \;\; \underline{a}^2 \;\; \underline{a}^4 \;\; \underline{a}^1)$,

(iii) $\det ((\underline{a}^1 - 2\underline{a}^2) \;\; \underline{a}^2 \;\; \underline{a}^3 \;\; \underline{a}^4)$,

(iv) $\det (\underline{a}^1 \;\; \underline{a}^2 \;\; \underline{a}^3 \;\; \underline{a}^4) + \det (-\underline{a}^1 \;\; -\underline{a}^2 \;\; -\underline{a}^3 \;\; -\underline{a}^4)$.

Aufgabe 3.3 (6 Punkte) Überprüfen Sie mit der Lagrangemethode, ob der Vektor

$$\underline{x}^* = (1, 1, 1, 1)^{\mathsf{T}}$$

ein stationärer Punkt der folgenden Optimierungsaufgabe ist:

$$\begin{aligned} &\min \; x_1^2 + \tfrac{1}{2}x_2^2 + \tfrac{1}{2}x_3^2 + x_4^2 \\ &\text{bezüglich } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{aligned}$$

AUFGABE 4 (20 Punkte)

Nur die in die Kästchen eingetragenen Ergebnisse zählen! Der Lösungsweg wird nicht angeschaut. Nebenrechnungen bitte auf Extrablättern durchführen.

Aufgabe 4.1 (6 Punkte) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = A + B\,.$$

(i) Geben Sie an, welche der Matrizen A, B, C invertierbar ist/sind:

(3 Punkte)

(ii) Berechnen Sie das Produkt

(3 Punkte) $AB =$

Aufgabe 4.2 (4 Punkte, pro Matrizenprodukt 1 Punkt) Gegeben sind die Matrizen

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Ordnung $m \times n$ (d.h. Anzahl der Zeilen $\times$ Anzahl der Spalten) für folgende Matrizen bzw. schreiben Sie "nicht", wenn die Matrix nicht definiert ist:

Matrix	PQ	QP	$P^\mathsf{T} Q^\mathsf{T} Q$	$\left(QQ^\mathsf{T}\right)^{-1}$
$m \times n$				

Aufgabe 4.3 (3 Punkte) Für einen gegebenen Winkel α betrachte man die Matrix

$$M = 7 \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Inverse

$M^{-1} =$

Aufgabe 4.4 (4 Punkte) Gegeben sind

eine Matrix A mit 4 Zeilen und 6 Spalten sowie ein Vektor $\underline{b} \in \mathbb{R}^4$.

Wir betrachten das daraus gebildete lineare Gleichungssystem

$$A\underline{x} = \underline{b} \tag{1}$$

mit dem variablen Vektor $\underline{x}$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie die richtige Antwort an:

	wahr	falsch
(1) ist ein lineares Gleichungssystem mit 4 Gleichungen in 6 Unbekannten.		
Falls $\underline{b}$ der Nullvektor ist, so ist die Lösungsmenge von (1) ein Vektorraum mit der Dimension $d \geq 2$.		
Die Spalten von A sind stets linear abhängig.		
Sind die Zeilenvektoren von A linear unabhängig, so ist (1) lösbar, unabhängig davon, wie $\underline{b}$ aussieht.		
Falls (1) unlösbar ist, so ist der Vektor $\underline{b}$ eine Linearkombination der Spalten von A.		
Falls (1) lösbar ist, so gibt es stets unendlich viele Lösungen.		

Hinweis: 6 richtige Antworten ergeben 4 Punkte, 5 richtige Antworten 2 Punkte, 4 richtige Antworten 1 Punkt.

Aufgabe 4.5 (3 Punkte) Bestimmen Sie t derart, dass das Rechteck

$$M(t) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1\,,\ 0 \leq y \leq t\}$$

den Flächeninhalt

$$F = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx$$

hat.

(1 Punkt) $F =$ ☐

(2 Punkte) $t =$ ☐