

## Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler - FS 2017



Universität  
Zürich<sup>UZH</sup>

Liebe Prüflinge,

in dieser Prüfung können maximal **60 Punkte** erzielt werden.

Bei Fragen **ohne vorgegebene Antwortmöglichkeiten muss der Lösungsweg angegeben werden**. Bei Fragen **mit vorgegebenen Antwortmöglichkeiten muss kein Lösungsweg angegeben werden**. Bei letzteren müssen Sie die korrekten Antwortmöglichkeiten durch Ankreuzen auswählen. Markieren Sie bitte Ihre Auswahl in der folgenden Weise:  $\odot \otimes \odot$ .

Wenn Sie eine Auswahl korrigieren möchten, füllen Sie bitte die fälschlich markierte Antwortmöglichkeit **vollständig** aus, ungefähr so:  $\odot \bullet \otimes$ . Falls Sie Ihre Auswahl **nochmals korrigieren** möchten, dann **füllen Sie alle markierten Antwortmöglichkeiten der Frage vollständig aus und kennzeichnen Ihre neue Auswahl durch Pfeile auf die jeweiligen Kreise/Quadrate**.

Bei Aufgaben, die aus Fragen des Typs **'Richtig oder Falsch'** bestehen, gibt es bei jeder Frage nur 2 Antwortoptionen ('richtig' und 'falsch'). Die Antwortmöglichkeiten sind mit Kreisen versehen. In jeder Frage ist genau eine Antwortmöglichkeit korrekt. Sie erhalten **1 Punkt bei korrekter Auswahl, -1 Punkt bei inkorrektter Auswahl** und **0 Punkte bei keiner Auswahl**. Die **Gesamtpunktzahl in einer solchen Aufgabe** ergibt sich als **Summe der Punkte der einzelnen Fragen** und ist **nie negativ**.

Bei anderen Aufgaben gibt es drei Fragetypen, die auftreten können; Freitextfragen, Einfachauswahl und/oder Mehrfachauswahl.

- **'Freitextfragen'** erkennen Sie daran, dass keine Antwortmöglichkeiten zur Verfügung stehen. Bei diesen Fragen sollen Sie Ihre Lösung und Ihren **Lösungsweg in den Kasten direkt unter der Frage eintragen**, da auch der Lösungsweg bewertet wird. Die Fünfecke unter den Freitextfragen werden nur von der Korrektorin bzw. dem Korrektor ausgefüllt; **wenn Sie ein Fünfeck selbst markieren, erhalten Sie für die betreffende Frage 0 Punkte**.
- Bei Fragen des Typs **'Einfachauswahl'** ist **genau eine Antwort korrekt**. Sie erkennen diese Fragen daran, dass die Antwortmöglichkeiten mit Kreisen versehen sind. Sie erhalten **volle Punktzahl bei korrekter Auswahl** und **0 Punkte bei inkorrektter Auswahl** oder keiner Auswahl.
- Bei Fragen des Typs **'Mehrfachauswahl'** ist eine beliebige, Ihnen unbekannte Anzahl  $d \geq 1$  der Antwortmöglichkeiten korrekt. Sie erkennen diese Fragen daran, dass die Antwortmöglichkeiten mit Quadraten versehen sind. Sind bei einer solchen Frage  $k$  Punkte zu erreichen, so erhalten Sie für **jedes korrekte Kreuz  $k/d$  Punkte** und für **jedes inkorrekte Kreuz -1 Punkt**. Die **erreichte Punktzahl** bei einer solchen Frage ist dabei **nie negativ**.

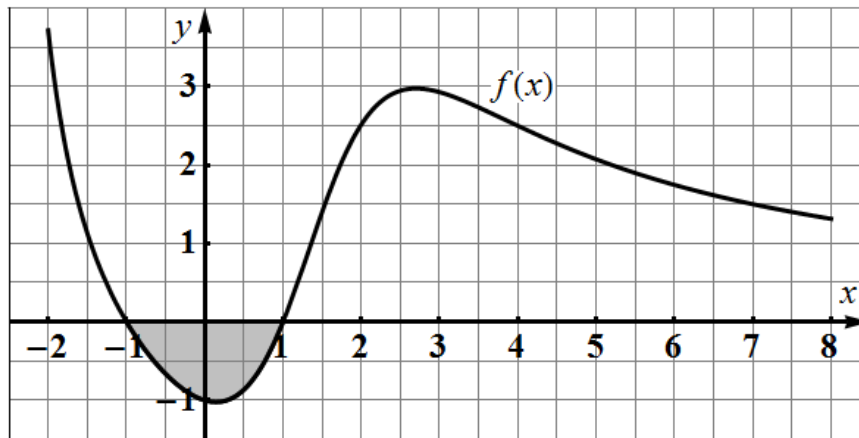
**Platz für Nebenrechnungen** gibt es am **Ende jeder Seite**, auf der **Rückseite dieses Deckblatts** und auf **den letzten zwei Seiten** der Klausur. Antworten in diesem Bereich werden **nicht bewertet**. Die Antworten der Freitextfragen sind in die dafür vorgesehenen Kästen einzutragen.



**Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler - FS 2017**  
**Platz für Nebenrechnungen**

## Aufgabe 1.1 - Mehrfachauswahl (8 Punkte)

Gegeben sei die Funktion  $f: [-2, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ . Ihr Graph ist durch folgende Abbildung gegeben.



a) Betrachten Sie den Flächeninhalt  $a$  der in obiger Abbildung grau schattierten Fläche, die durch die  $x$ -Achse und den Graphen von  $f$  zwischen  $-1$  und  $+1$  eingegrenzt wird. Welche der folgenden Aussagen treffen für  $a$  zu?

- |   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> $a \leq 0$ .   | <input type="checkbox"/> $a > 0$ .                                  |
| <input type="checkbox"/> $a \leq \int_{-1}^1 f(x) dx$ .                       | <input type="checkbox"/> $a \geq \int_{-1}^1  f(x)  dx$ .           |
| <input type="checkbox"/> $a \geq 2.5$ .                                       | <input type="checkbox"/> $a \geq 0.5$ .                             |
| <input type="checkbox"/> Es gibt ein $\xi \in [-1, +1]$ mit $2 f(\xi)  = a$ . | <input type="checkbox"/> $a = \left  \int_{-1}^1 f(x) dx \right $ . |

b) Sei  $F: [-2, 8] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F(x) = \int_2^x f(t) dt$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- |  |  |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> $F(2) \geq 2$ .                                       | <input type="checkbox"/> $F(2) < 2$ .                                |
| <input type="checkbox"/> $F$ ist auf $[1, 7]$ eine monoton steigende Funktion. | <input type="checkbox"/> $F$ ist auf $[1, 7]$ eine konvexe Funktion. |
| <input type="checkbox"/> $F(4) > 5$ .  | <input type="checkbox"/> $F(4) = F(2)$ .                             |
| <input type="checkbox"/> $F(1) < 0$ .  | <input type="checkbox"/> $F(2.5) < 1.5$ .                            |

Platz für Nebenrechnungen

**Aufgabe 1.2 - Freitext (3 Punkte)**

Sei  $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \frac{6x^2-2}{x^3-x+6}$ .

Bestimmen Sie  $\int f(x) dx$ .

Erreichte Punktzahl:

☐ 0   ☐ 1   ☐ 2   ☐ 3

**Platz für Nebenrechnungen**

## Aufgabe 1.3 - Einfachauswahl (8 Punkte)

<p>a) Die Funktion <math>H(x) = 2\sqrt{x-2}</math> ist eine Stammfunktion von <math>h(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}</math>.</p> <p>Was ist der Wert des Integrals <math>\int_3^6 h(x) dx</math>?</p>	<div> <input type="radio"/> <math>-\frac{1}{2}</math> <input type="radio"/> 0 <input type="radio"/> <math>\frac{7}{16}</math> <input type="radio"/> <math>\frac{1}{2}</math> </div> <div> <input type="radio"/> 2 <input type="radio"/> 6 <input type="radio"/> <math>\frac{28}{3}</math> <input type="radio"/> Keiner davon. </div>
<p>b) Gegeben sei die Funktion <math>f(x) = e^{3x}</math>. Welche der folgenden Funktionen ist eine Stammfunktion von <math>f</math>?</p>	<div> <input type="radio"/> <math>\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x}</math> <input type="radio"/> <math>e^{\frac{1}{3}x}</math> <input type="radio"/> <math>e^x</math> <input type="radio"/> <math>3e^x</math> </div> <div> <input type="radio"/> <math>\frac{1}{3}e^{3x}</math> <input type="radio"/> <math>e^{3x}</math> <input type="radio"/> <math>3e^{3x}</math> <input type="radio"/> Keine davon. </div>
<p>c) Was ist der Wert des Integrals <math>\int_0^4  x-2  dx</math>?</p>	<div> <input type="radio"/> -8 <input type="radio"/> -4 <input type="radio"/> -2 <input type="radio"/> 0 </div> <div> <input type="radio"/> 2 <input type="radio"/> 4 <input type="radio"/> 8 <input type="radio"/> Keiner davon. </div>
<p>d) Sei <math>f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}</math> eine beliebige, stetig differenzierbare Funktion und <math>g(x) = (2x+1)f(x) + (x^2+x)f'(x)</math>. Welche der folgenden Funktionen ist eine Stammfunktion von <math>g</math>?</p>	<div> <input type="radio"/> <math>(x^2+x)f(x) + (2x+1)f'(x)</math> <input type="radio"/> <math>(x^2+x)f(x) + f(2x+1)</math> </div> <div> <input type="radio"/> <math>(x^2+x)f(x) + f(1)</math> <input type="radio"/> <math>(2x+1)f'(x) + f(1)</math> </div> <div> <input type="radio"/> <math>(x^2+x)f'(x) + f(2x+1)</math> <input type="radio"/> <math>(2x+1)f(x) + f(x^2+x)</math> </div> <div> <input type="radio"/> <math>(2x+1)f'(x) + f(x^2+x)</math> <input type="radio"/> Keine davon. </div>

Platz für Nebenrechnungen



## Aufgabe 2.1 - Einfachauswahl (2 Punkte)

Gegeben seien die quadratische Matrix  $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  der Ordnung 3 und

die  $(3 \times 4)$ -Matrix  $B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ .

Sei  $A \cdot B = C$  mit  $C = (c_{ij})$ .

Was ist der Wert des Elements  $c_{23}$  der Matrix  $C$ ?

☐ -5

☐ 1

☐ 15

☐ 21

☐ 43

☐ 63

☐ 87

☐ Keiner davon.

Platz für Nebenrechnungen

## Aufgabe 2.2 - Freitext (2 Punkte)

Weiterhin gegeben seien die quadratische Matrix  $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  der Ordnung 3 und

ausserdem eine quadratische Matrix  $D$  der Ordnung 3 mit  $A \cdot D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie die Inverse  $D^{-1}$  der Matrix  $D$ .

Erreichte Punktzahl:

☐ 0    ☐ 1    ☐ 2

Platz für Nebenrechnungen

## Aufgabe 3 - Richtig oder Falsch? (5 Punkte)

Gegeben seien die quadratische Matrix  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  der Ordnung 2 und die linearen Unterräume des  $\mathbb{R}^3$

$$U_1 = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } U_2 = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

a) Die Spaltenvektoren der Matrix  $B$  bilden eine Basis des  $\mathbb{R}^2$ .

☐ richtig

☐ falsch

b) Die Zeilenvektoren der Matrix  $B$  bilden eine Basis des  $\mathbb{R}^2$ .

☐ richtig

☐ falsch

c) Die Vektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  bilden eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ .

☐ richtig

☐ falsch

d)  $\dim(U_2) = 3$ .

☐ richtig

☐ falsch

e)  $U_1 = U_2$ .

☐ richtig

☐ falsch

Platz für Nebenrechnungen



## Aufgabe 4.1 - Einfachauswahl (8 Punkte)

Gegeben sei nun die quadratische Matrix  $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} b & c & d \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  der Ordnung 3.

a) Sei $b \neq 0$ . Was ist der Wert von $\text{rang}(A)$ ?	<input type="radio"/> -1 <input type="radio"/> 0 <input type="radio"/> 1 <input type="radio"/> 2 <input type="radio"/> 3 <input type="radio"/> 4 <input type="radio"/> 9 <input type="radio"/> Keiner davon.
b) Sei $b \neq 0$ . Der erste Einheitsvektor $\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^3$ ist ein Eigenvektor von $A$ . Was ist der zugehörige Eigenwert?	<input type="radio"/> $-6b$ <input type="radio"/> $\frac{b}{6}$ <input type="radio"/> $-12bcd$ <input type="radio"/> 0 <input type="radio"/> 1 <input type="radio"/> $b$ <input type="radio"/> $8b$ <input type="radio"/> Keiner davon.
c) Für welche der folgenden Werte von $(b, c, d)$ gilt $\det(A) = 0$ ?	<input type="radio"/> $(-6, 0, -6)$ <input type="radio"/> $(-1, 0, 0)$ <input type="radio"/> $(0, 1, 1)$ <input type="radio"/> $(1, 0, 1)$ <input type="radio"/> $(1, 1, 0)$ <input type="radio"/> $(1, 1, 1)$ <input type="radio"/> $(6, 0, 6)$ <input type="radio"/> Für keine davon.
d) Für welche der folgenden Werte von $(c, d)$ sind die beiden Spaltenvektoren $(a_{12}, a_{22}, a_{32})^T$ und $(a_{13}, a_{23}, a_{33})^T$ orthogonal zueinander?	<input type="radio"/> $(0, 0)$ <input type="radio"/> $(0, 1)$ <input type="radio"/> $(0, 2)$ <input type="radio"/> $(1, 0)$ <input type="radio"/> $(1, 1)$ <input type="radio"/> $(2, 0)$ <input type="radio"/> $(2, 2)$ <input type="radio"/> Für keine davon.

Platz für Nebenrechnungen

## Aufgabe 4.2 - Richtig oder Falsch? (5 Punkte)

Weiterhin gegeben sei die quadratische Matrix  $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} b & c & d \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  der Ordnung 3.

Seien  $b, c, d \in \mathbb{R}$  nun so gewählt, dass  $\det(A) = 2$ .

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

a) Die Inverse $A^{-1}$ existiert.	<input type="radio"/> richtig	<input type="radio"/> falsch
b) Die Matrix $A$ ist positiv semidefinit.	<input type="radio"/> richtig	<input type="radio"/> falsch
c) Das durch die Spaltenvektoren aufgespannte Parallelotop hat ein Volumen von 2.	<input type="radio"/> richtig	<input type="radio"/> falsch
d) $\det(5A) = 10$	<input type="radio"/> richtig	<input type="radio"/> falsch
e) Das LGS $A \cdot \mathbf{x} = (4, 37, 52)^T$ hat genau eine Lösung.	<input type="radio"/> richtig	<input type="radio"/> falsch

Platz für Nebenrechnungen

## Aufgabe 5 - Mehrfachauswahl (4 Punkte)

Gegeben seien die quadratische Matrix  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  der Ordnung 3 und

die  $(2 \times 3)$ -Matrix  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Sei  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $f(\mathbf{x}) = B \cdot A \cdot \mathbf{x}$  und  $K = \{ \mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) = 0 \}$  der Kern der Abbildung  $f$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐  $f$  ist eine lineare Abbildung.
- ☐  $f$  ist keine lineare Abbildung.
- ☐  $f$  ist eine bijektive Abbildung.
- ☐  $K$  ist die leere Menge,  $K = \{ \}$ .
- ☐  $\dim(K) = 2$ .
- ☐  $K$  ist ein linearer Unterraum des  $\mathbb{R}^3$ .
- ☐  $K$  ist eine Hyperebene.
- ☐  $\text{rang}(B \cdot A) = 3$ .

Platz für Nebenrechnungen

## Aufgabe 6.1 - Einfachauswahl (2 Punkte)

Gegeben ist nun die  $(3 \times 4)$  - Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & d+s \\ 4 & 3 & 3 & 3s \\ 5 & 4 & 6 & d+4s \end{pmatrix}$ ,  $d, s \in \mathbb{R}$ .

Das Ergebnis der Multiplikation  $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot A$  mit  $x, y, z \in \mathbb{R}$  ist...

- ☐ ein Element aus  $\mathbb{R}$ .
- ☐ von der Form  $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$  mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .
- ☐ von der Form  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .
- ☐ eine quadratische Matrix der Ordnung 3.
- ☐ eine quadratische Matrix der Ordnung 4.
- ☐ eine  $(3 \times 4)$ -Matrix.
- ☐ eine  $(4 \times 3)$ -Matrix.
- ☐ keine dieser Optionen.

Platz für Nebenrechnungen

## Aufgabe 6.2 - Freitext (2 Punkte)

Weiterhin gegeben ist die  $(3 \times 4)$  - Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & d+s \\ 4 & 3 & 3 & 3s \\ 5 & 4 & 6 & d+4s \end{pmatrix}$ ,  $d, s \in \mathbb{R}$ .

Berechnen Sie das Ergebnis der Multiplikation  $A \cdot \mathbf{x}$  mit  $\mathbf{x} = (1, 2, -1, 0)^T$ .

Erreichte Punktzahl:

☐ 0   ☐ 1   ☐ 2

Platz für Nebenrechnungen



## Aufgabe 6.3 - Einachsf Auswahl (3 Punkte)

Weiterhin gegeben ist die  $(3 \times 4)$  - Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & d+s \\ 4 & 3 & 3 & 3s \\ 5 & 4 & 6 & d+4s \end{pmatrix}$ ,  $d, s \in \mathbb{R}$

und ausserdem  $\mathbf{b} = (2, 7, 9)^T$ .

Gegeben sind die ersten Tableaus des Gauss-Algorithmus um das LGS  $A \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}$  zu lösen:

$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$\mathbf{b}$	
1	1	2	$d+s$	2	1. Tableau
4	3	3	$3s$	7	
5	4	6	$d+4s$	9	
1	1	$\tilde{a}_{13}$	$\tilde{a}_{14}$	$\tilde{b}_1$	2. Tableau
0	-1	$\tilde{a}_{23}$	$\tilde{a}_{24}$	$\tilde{b}_2$	
0	-1	-4	$-4d-s$	-1	
...					

a) Welchen Wert hat $\tilde{b}_1$ ?	<input type="radio"/> -15	<input type="radio"/> -2	<input type="radio"/> -1	<input type="radio"/> 0
	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 15	<input type="radio"/> Keinen davon.
a) Welchen Wert hat $\tilde{a}_{24}$ ?	<input type="radio"/> $d+s$	<input type="radio"/> $3s$	<input type="radio"/> $2s-d$	<input type="radio"/> $4d+s$
	<input type="radio"/> $-4d-s$	<input type="radio"/> $11s-d$	<input type="radio"/> $d-11s$	<input type="radio"/> Keinen davon.

Platz für Nebenrechnungen

## Aufgabe 7.1 - Freitext (3 Punkte)

Beim Lösen eines LGS  $B \cdot \mathbf{y} = \mathbf{d}$  mit Hilfe des Gauss-Algorithmus wurde folgendes Tableau ermittelt:

$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$\mathbf{d}$
1	0	0	-3	1
0	1	0	7	1
0	0	1	0	0

Bestimmen Sie die Lösungsmenge  $\mathbb{L}_{\mathbf{d}}$  dieses LGS.

Erreichte Punktzahl:

☐ 0  
 ☐ 1  
 ☐ 2  
 ☐ 3

Platz für Nebenrechnungen



**Aufgabe 7.2 - Richtig oder Falsch? (5 Punkte)**

Beim Lösen eines LGS  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  mit Hilfe des Gauss-Algorithmus trat folgendes Tableau auf. Dieses Tableau repräsentiert ein äquivalentes LGS  $\tilde{A} \cdot \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$  mit Lösungsmenge  $\mathbb{L}_{\tilde{\mathbf{b}}}$ .

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\mathbf{b}$
1	0	1	2
0	1	3	1
0	0	$c^2 - 1$	$c - 1$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

a) Für $c = -3$ hat das LGS genau eine Lösung.	<input type="radio"/> richtig	<input type="radio"/> falsch
b) Das LGS ist für $c = 2$ lösbar.	<input type="radio"/> richtig	<input type="radio"/> falsch
c) Für $c = 1$ bildet die Lösungsmenge $\mathbb{L}_{\tilde{\mathbf{b}}}$ einen affinen Unterraum des $\mathbb{R}^3$ .	<input type="radio"/> richtig	<input type="radio"/> falsch
d) Für $c = -1$ bildet die Lösungsmenge $\mathbb{L}_{\tilde{\mathbf{b}}}$ einen linearen Unterraum des $\mathbb{R}^3$ .	<input type="radio"/> richtig	<input type="radio"/> falsch
e) Für $c = -2$ gilt $\det(\tilde{A}) = 3$ .	<input type="radio"/> richtig	<input type="radio"/> falsch

**Platz für Nebenrechnungen**



**Platz für Nebenrechnungen**

**Platz für Nebenrechnungen**