Name	Vorname	Matrikelnummer

Beispielprüfungsaufgaben Grundlagen der Informatik I

1 Wahr oder Falsch?

Kreuzen Sie für alle der folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind.

Jede richtige Antwort gibt einen halben Punkt. Jede falsche Antwort gibt einen halben Punkt Abzug. Jede nicht angekreuzte Antwort wird für die Punktezählung nicht beachtet. Insgesamt gibt diese Aufgabe mindestens 0 Punkte.

Widerspruchsbeweise basieren auf der Tatsache, dass die Logik binär ist, d.h. eine Aussage ist entweder wahr oder falsch, aber nicht beides zusammen.	☐ wahr	☐ falsch
Im Gegensatz zur vollständigen Induktion, kann man mit starker vollständiger Induktion auch Universalaussagen beweisen.	☐ wahr	☐ falsch
$-7 \mod 3 = 2$.	☐ wahr	☐ falsch
0 ist keine Primzahl.	☐ wahr	☐ falsch
De Morgan's Gesetz gilt in jeder Boolschen Algebra.	☐ wahr	☐ falsch
Wenn eine Funktion surjektiv (onto) ist, ist sie auch injektiv (one-to-one).	☐ wahr	☐ falsch
Jede Funktion ist eine Relation.	☐ wahr	☐ falsch
$\binom{n}{k}$ ist definiert als die Anzahl möglicher k-Permutationen, die man aus n verschiedenen Elementen bilden kann.	☐ wahr	☐ falsch
Wenn man in dieser Aufgabe bei jeder Aussage mit 50% Wahrscheinlichkeit *wahr* und mit 50% Wahrscheinlichkeit *falsch* ankreuzt, ist die Punktezahl im Erwartungswert 0.	☐ wahr	☐ falsch
In einem Baum $T = (V, E)$ gilt immer $\|V\| = \|E\| + 1$.	☐ wahr	☐ falsch
In einem Binärbaum hat jeder Knoten zwei Kinder.	☐ wahr	☐ falsch
Wenn die Diagonale der Adjazenzmatrix eines Graphen G überall Null ist, ist G ungerichtet.	☐ wahr	☐ falsch
Wenn es in einem Graphen G von jedem Knoten zu jedem anderen einen Pfad gibt, ist G zusammenhängend.	☐ wahr	☐ falsch

2 Zahlentheorie

Beweisen Sie die folgendende Aussagen.

a) (3) $\forall n \in \mathbb{Z}$, wenn n durch 3 teilbar ist, ist $\frac{2}{3}n$ gerade.

b) (6) $9^n - 1$ ist durch 8 teilbar für alle $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

c) (6) $n^3 - n$ ist durch 3 teilbar für alle $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

d) (6) $\log_2 3$ ist eine irrationale Zahl.

3 Würfelaugen Zählen

a) (6) Gegeben seien ein fairer 6-er Würfel und ein fairer 4-er Würfel.

i. Was ist die Wahrscheinlichkeit, insgesamt 5 Augen zu zählen, wenn man mit beiden Würfeln würfelt?

ii. Was ist der Erwartungswert der Anzahl Augen, wenn man mit beiden Würfeln würfelt?

b) (6) Gegeben seien n Würfel $W_1, W_2, \ldots, W_n$, wobei W_i ein fairer i-Würfel ist, d.h. alle Zahlen von 1 bis i werden mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewürfelt. Sei K_n die erwartete Augensumme, wenn mit allen Würfeln $W_1, W_2, \ldots, W_n$ gleichzeitig gewürfelt wird.

Geben Sie eine geschlossene Formel an für K_n.

Hinweis: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

4 Mengen, Relationen und Funktionen

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(3) Für beliebige Mengen A, B und C gilt $(A - B) \cap C = (C - B) \cap A$. *Hinweis: Verwenden Sie das set difference law:* $A - B = A \cap B^c$.

(3) Wenn $A \subseteq B$ und $C \subseteq D$, dann gilt $A \times C \subseteq B \times D$.

(3) Für jede Relation R, die symmetrisch[1] aber nicht transitiv ist, gilt, dass die transitive Hülle R^t von R ebenfalls symmetrisch ist.

(3) Sei $B = \{1, 2, 3, \ldots, 6\}$ und R' eine Relation definiert als

$$R' = \{(x, y) \mid x = 5^i \mod 7,\ y = 2^i \mod 7,\ i \in B\}.$$

Dann gilt, R ist eine Funktion von B nach B.

[1] Eine Relation R ist *symmetrisch*, wenn $a\,R\,b$ impliziert, dass $b\,R\,a$.

5 Logische Aussagen und Schaltkreise

a) (5) Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit folgender Argumentformel.

$$\begin{aligned} &(p \vee q) \wedge r \rightarrow s \wedge \sim p \\ &s \vee \sim p \rightarrow q \wedge \sim r \\ &(p \vee r \vee s) \wedge \sim(p \wedge q) \\ \therefore\ &p \vee (q \wedge \sim r \wedge s) \end{aligned}$$

Hinweise für folgende Teilaufgaben b–d):
Der Peirce Operator (NOR Operator) ist definiert als $A \downarrow B := \sim(A \vee B)$.
Der Sheffer Operator (NAND Operator) ist definiert als $A \,|\, B := \sim(A \wedge B)$.

b) (2) Drücken Sie die Negation, $\sim A$, aus, indem Sie nur NOR Operatoren verwenden.

c) (3) Drücken Sie die NAND Operation, $A \,|\, B$, aus, indem Sie nur NOR Operatoren verwenden.

d) (4) Wie kann ein ODER Schaltkreis mit vier Eingaben (d.h., die Eingaben sind A, B, C und D und die Ausgabe ist $A \vee B \vee C \vee D$) gebaut werden mit binären NOR Gattern (d.h., für Eingaben A und B ist die Ausgabe $\sim(A \vee B)$)?

6 Folgen und Reihen

a) (6) Gegeben sei folgende Rekursionsgleichung

$$a_k = 2(3a_{k-1} - 4a_{k-2})$$

und zusätzlich sind die folgenden Werte bekannt:

$$a_2 = 5 \text{ und } a_4 = 20.$$

Was sind die Initialwerte, d.h., a_0 und a_1? Leiten Sie eine geschlossene Formel her für a_k und berechnen Sie a_0 und a_1.

b) (6) Gegeben sei die Rekursionsgleichung

$$c_k = c_{k-1} + 2c_{k-2} + 1$$

und die Initialwerte

$$c_0 = 1 \text{ und } c_1 = 1.$$

Beweisen Sie, dass $c_k = 2^k$ wenn k gerade und $c_k = 2^k - 1$ wenn k ungerade ist für alle $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Hinweis: Beweisen Sie die Aussage mittels vollständiger Induktion. Berücksichtigen Sie dabei beide Fälle (k gerade und k ungerade) in der Induktionsannahme und im Induktionsschritt.