**Aufgabe 1** (Zeilenstufenform, explizite Form)

(a) Beurteilen Sie jeweils die Aussage: „Die folgende Matrix liegt in Zeilenstufenform vor.“

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ☐ wahr ☐ falsch

(b) Geben Sie die führenden Elemente der Matrizen aus Aufgabe (a) an.

(c) Beurteilen Sie jeweils die Aussage: „Die folgende Matrix liegt in expliziter Form vor.“

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ☐ wahr ☐ falsch

(d) Sind die Vektoren $(1,0,0)^T$, $(0,9,0)^T$ und $(3,8,1)^T$ linear unabhängig?

(e) Sind die Vektoren $(1,2,0)$ und $(0,0,1)$ linear unabhängig?

**Lösung:**

(a) Es gilt:

> **Definition 6.5.12 - Matrix in Zeilenstufenform**
> Sei $A$ eine $m \times n$-Matrix. Das erste von Null verschiedene Element einer Zeile $i$, die keine Nullzeile ist, also das Element $a_{ik}$ mit $a_{ik} \neq 0$ und $a_{ij} = 0$ für alle $j < k$, nennt man führendes Element der Zeile $i$.
> Die Matrix $A$ liegt in Zeilenstufenform vor, wenn
> - Nullzeilen von $A$ unterhalb aller Zeilen stehen, die keine Nullzeilen sind und
> - in jedem Paar von zwei Zeilen mit jeweils einem führenden Element das führende Element der oberen Zeile links von dem führenden Element der unteren Zeile steht.

- Zu (1): Die Matrix aus Aufgabe (1) hat keine Nullzeilen, daher ist der erste Punkt erfüllt. Zusätzlich sind die führenden Elemente stufenförmig angeordnet. Der zweite Punkt ist somit ebenfalls erfüllt. Die Aussage (1) ist wahr.
- Zu (2): Die Matrix aus Aufgabe (2) hat keine Nullzeilen, daher ist der erste Punkt erfüllt. Zudem sind die führenden Elemente stufenförmig angeordnet. Der zweite Punkt ist somit auch erfüllt. Die Aussage (2) ist wahr.
- Zu (3): Die Matrix aus Aufgabe (3) besitzt eine Nullzeile. Da diese über einer Zeile, nämlich Zeile 3, steht, die keine Nullzeile ist, ist der erste Punkt nicht erfüllt. Diese Matrix liegt also nicht in Zeilenstufenform vor. Die Aussage (3) ist falsch.
- Zu (4): Die Matrix aus Aufgabe (4) hat keine Nullzeilen, daher ist der erste Punkt erfüllt. Zusätzlich sind die führenden Elemente stufenförmig angeordnet. Der zweite Punkt ist somit ebenfalls erfüllt. Die Aussage (4) ist wahr.

(b) In Teilaufgabe (a) haben wir die Definition eines führenden Elements einer Zeile wiederholt. Wir nennen also das erste von Null verschiedene Element einer Zeile $i$, die keine Nullzeile ist, führendes Element der Zeile $i$. Es gilt:
Die führenden Elemente der Matrix in (1) sind 1 und 1.
Die führenden Elemente der Matrix in (2) sind 1 und 1.
Die führenden Elemente der Matrix in (3) sind 1 und 9.
Die führenden Elemente der Matrix in (4) sind 1,9 und 1.

(c) Es gilt:

> **Definition 7.1.6 - Eine Matrix in expliziter Form**
> Eine $m \times n$-Matrix $A$ liegt in expliziter Form vor, wenn
> - sie in Zeilenstufenform vorliegt;
> - jedes führende Element eine 1 ist;
> - jede Spalte von $A$, die ein führendes Element enthält, keine weiteren von 0 verschiedenen Einträge besitzt.

- Zu (1): Wie in Teilaufgabe (a) gesehen, liegt die Matrix aus Aufgabe (1) in Zeilenstufenform vor. Der erste Punkt ist somit erfüllt. Es gibt zwei führende Elemente. Beide sind 1, somit ist der zweite Punkt erfüllt. Die zweite Spalte enthält ein führendes Element, sie enthält aber auch weitere von 0 verschiedenen Einträge. Der dritte Punkt ist daher nicht erfüllt. Die Matrix aus Aufgabe (1) liegt nicht in expliziter Form vor. Die Aussage (1) ist falsch.

- Zu (2): Wie in Teilaufgabe (a) gesehen, liegt die Matrix aus (2) in Zeilenstufenform vor. Der erste Punkt ist somit erfüllt. Es gibt zwei führende Elemente. Beide sind 1, somit ist der zweite Punkt erfüllt. In den Spalten der führenden Elemente, Spalte 1 und 3, sind alle Einträge 0, bis auf die der führenden Elemente. Der dritte Punkt ist daher auch erfüllt. Die Matrix aus Aufgabe (2) liegt in expliziter Form vor. Die Aussage (2) ist wahr.
- Zu (3): Wie in Teilaufgabe (a) gesehen, liegt die Matrix nicht in Zeilenstufenform vor. Der erste Punkt ist somit nicht erfüllt. Die Matrix aus Aufgabe (3) liegt somit nicht in expliziter Form vor. Die Aussage (3) ist falsch.
- Zu (4): Wie in Teilaufgabe (a) gesehen, liegt die Matrix aus Aufgabe (4) in Zeilenstufenform vor. Der erste Punkt ist somit erfüllt. Die führenden Elemente dieser Matrix sind aber nicht alle 1. Daher ist der zweite Punkt nicht erfüllt. Die Matrix aus Aufgabe (4) liegt nicht in expliziter Form vor. Die Aussage (4) ist falsch.

(d) Wir können Satz 6.5.3 aus dem Skript anwenden. Dort heisst es:

> **Satz 6.5.3 - Linear unabhängige Zeilenvektoren der Zeilenstufenform**
> Sei $A$ eine $m \times n$-Matrix in Zeilenstufenform mit $k \leq m$ Zeilen, welche keine Nullzeilen sind. Dann sind die Zeilenvektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ linear unabhängig. Zudem sind alle Spaltenvektoren, welche führende Elemente enthalten, linear unabhängig.

Die Vektoren $(1,0,0)^T$, $(0,9,0)^T$ und $(3,8,1)^T$ sind die Spaltenvektoren der Matrix aus Aufgabe (a) (4) die führende Elemente enthalten. Wie in Teilaufgabe (a) gesehen, liegt diese Matrix in Zeilenstufenform vor. Satz 6.5.3 sagt somit, dass die Menge aller Spaltenvektoren, welche führende Elemente enthalten, linear unabhängig ist. Somit sind die Vektoren $(1,0,0)^T$, $(0,9,0)^T$ und $(3,8,1)^T$ linear unabhängig.

(e) Die Vektoren $(1,2,0)$ und $(0,0,1)$ sind die Zeilenvektoren der Matrix aus Aufgabe (a) (2). Wie in Teilaufgabe (a) gesehen, liegt diese Matrix in Zeilenstufenform vor. Satz 6.5.3 sagt somit, dass die Zeilenvektoren linear unabhängig ist. Somit sind die Zeilenvektoren $(1,2,0)$ und $(0,0,1)$ linear unabhängig.

**Aufgabe 2** (Gleichungssysteme)

Beurteilen Sie jeweils die Aussage: „Das folgende Gleichungssystem ist ein lineares Gleichungssystem.“

(1) $$\begin{aligned} 3x &+ 4y &= 7 \\ \ln(8)x &+ y &= 9 \end{aligned}$$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $$\begin{aligned} \ln(x) &+ 4y &= 7 \\ \ln(8)x &+ y &= 9 \end{aligned}$$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $$\begin{aligned} 3x^2 &+ 4y &= 7 \\ 8x &+ y &= 9 \end{aligned}$$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $$\begin{aligned} \tfrac{9}{4}x &+ 4y &= 0 \\ e^{\pi}x &+ y &= 9 \end{aligned}$$ ☐ wahr ☐ falsch

**Lösung:**

**Definition 7.1.4 - Lineares Gleichungssystem**
Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix vom Typ $m \times n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Ein Gleichungssystem der Form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, bzw.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

heisst lineares Gleichungssystem (LGS) mit $m$ Gleichungen und $n$ Variablen oder LGS in den Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$. Man nennt $A$ die Koeffizientenmatrix und $\mathbf{b}$ die rechte Seite. Ist $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, so heisst das lineare Gleichungssystem homogen, andernfalls inhomogen.

- Zu (1): Betrachten wir das Gleichungssystem in (1), so sieht man, dass mit

$$\begin{aligned} a_{11} &= 3,\ a_{12} = 4,\ b_1 = 7 \\ a_{21} &= \ln(8),\ a_{22} = 1,\ b_2 = 9 \\ x_1 &= x,\ x_2 = y \end{aligned}$$

  das gegebene Gleichungssystem in linearer Form vorliegt. Man darf sich durch $\ln(8)$ nicht beirren lassen, da es sich bei $\ln(x)$ zwar um eine nichtlineare Funktion handelt, $\ln(8)$ aber eine reelle Zahl ist. Die Aussage (1) ist wahr.

- Zu (2): $\ln(x)$ ist keine lineare Funktion. Man kann die erste Gleichung also niemals in der Form

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

  darstellen. Die Aussage (2) ist falsch.
- Zu (3): Betrachtet man das Gleichungssystem aus (3), so sieht man sofort, dass die Variable $x$ in quadratischer Form vorliegt. Man kann die erste Gleichung also nicht in der Form

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

  darstellen. Die Aussage (3) ist falsch.

- Zu (4): Dies ist ein Gleichungssystem in linearer Form, mit

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{9}{4},\ a_{12} = 4,\ b_1 = 0 \\ a_{21} &= e^{\pi},\ a_{22} = 1,\ b_2 = 9 \\ x_1 &= x,\ x_2 = y. \end{aligned}$$

  Die Aussage (4) ist wahr.

**Aufgabe 3** (Die Koeffizientenmatrix eines LGS)

Bestimmen Sie für folgende lineare Gleichungssysteme die erweiterte Koeffizientenmatrix.

(a)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 7 \\ 8x_1 + x_2 &= 9. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 7 \\ \ln(8)x_1 + x_2 &= 9. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 &= 2\ . \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= 7 \\ x_1 + e^2 x_2 &= 9 \\ \pi x_1 + x_2 + 4x_4 &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= 7 \\ \pi x_1 + x_2 + 4x_4 &= -\frac{1}{2} \\ \ln(8)x_1 + x_2 &= 9 \\ x_3 &= 9. \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= 7 \\ \pi x_1 + x_2 + 4x_4 &= -\frac{1}{2} \\ \ln(8)x_1 + x_2 &= 9 \\ 3 &= 9. \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= 7 \\ \pi x_1 + x_2 &= -\frac{1}{2} \\ \ln(8)x_1 + x_3 &= 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -9. \end{aligned}$$

**Lösung:**

**Definition 7.1.5 - Die erweiterte Koeffizientenmatrix**
Sei $A$ eine $m \times n$-Matrix und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Dann heisst die $m \times (n+1)$-Matrix

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

erweiterte Koeffizientenmatrix.

Die erweiterte Koeffizientenmatrix fasst also die Koeffizienten und die rechte Seite eines LGS zusammen. Somit erhalten wir:

(a) $(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & 9 \end{array}\right)$

(b) $(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 7 \\ \ln(8) & 1 & 9 \end{array}\right)$

(c) $(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

(d) $(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & -4 & 0 & 7 \\ 1 & e^2 & 0 & 0 & 9 \\ \pi & 1 & 0 & 4 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$

(e) $(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & -4 & 0 & 7 \\ \pi & 1 & 0 & 4 & -\frac{1}{2} \\ \ln(8) & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 \end{array}\right)$

(f) $(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & -4 & 0 & 7 \\ \pi & 1 & 0 & 4 & -\frac{1}{2} \\ \ln(8) & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$

(g) $(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -4 & 7 \\ \pi & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \ln(8) & 0 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & -9 \end{array}\right)$

**Aufgabe 4** (Lösen von LGS in expliziter Form)

Gegeben sind die linearen Gleichungssysteme (a)-(h) in expliziter Form. Stellen Sie für die Gleichungssysteme (a)-(h) die erweiterte Koeffizientenmatrix auf und bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge des LGS.

(a)
$$\begin{array}{rcl} x_1 \quad\; + 3x_3 &=& 1 \\ x_2 + 2x_3 &=& 2 \\ 2 &=& 2 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcl} x_1 \quad\quad + \; x_4 &=& 1 \\ x_2 \quad - \; x_4 &=& 2 \\ x_3 + 4x_4 &=& -2 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcl} x_1 \quad\; + 3x_3 &=& 1 \\ x_2 + 2x_3 &=& 2 \\ 0 &=& 2 \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{rcl} x_1 &=& 1 \\ x_2 &=& 2 \\ x_3 &=& -2 \end{array}$$

(e)
$$\begin{array}{rcl} x_1 \quad + 4x_3 &=& 5 \\ x_2 - \; x_3 &=& 2 \end{array}$$

(f)
$$\begin{array}{rcl} x_1 \quad - 4x_3 + \; x_4 + 2x_5 &=& 0 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 7x_5 &=& 0 \end{array}$$

(g)
$$\begin{array}{rcl} x_1 \quad\quad + \; x_4 &=& 1 \\ x_2 \quad - \; x_4 - 3x_5 &=& 0 \\ x_3 + 4x_4 + \pi x_5 &=& -2 \end{array}$$

(h)
$$\begin{array}{rcl} x_1 \quad\quad\quad + 3x_5 - \; x_6 + 2x_7 &=& 0 \\ x_2 \quad\quad - 4x_5 + 7x_6 + 9x_7 &=& 0 \\ x_3 \quad + 9x_5 + 3x_6 + 4x_7 &=& 0 \\ x_4 + 2x_5 + 8x_6 - 6x_7 &=& 0 \end{array}$$

(i) Entscheiden Sie, welche der Gleichungssysteme (a)-(h) äquivalent sind.

**Lösung:**

> **Definition 7.1.7 - Ein LGS in expliziter Form**
> Sei $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Liegt die Matrix $A$ in expliziter Form vor, sagt man auch, das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, mit Variablen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ liegt in expliziter Form vor. Variablen, die zu Spalten mit führenden Elementen gehören, nennt man führende Variablen. Variablen, die nicht zu Spalten mit führenden Elementen gehören, heissen freie Variablen.

(a) Die Koeffizientenmatrix $A$ und die rechte Seite $\mathbf{b}$ des Gleichungssystems lauten wie folgt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die führende Eins der ersten Zeile ist in Spalte 1, die führende Eins der zweiten Zeile ist in Spalte 2. Die dritte Gleichung ist immer erfüllt und kann somit ignoriert werden. Damit sind $x_1$ und $x_2$ führende Variablen und $x_3$ eine freie Variable. Lösungen ergeben sich, indem wir $x_1$ und $x_2$ durch die freie Variable $x_3$ ausdrücken:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 3x_3 \\ x_2 &= 2 - 2x_3. \end{aligned}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix und die Lösungsmenge des LGS sind somit:

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \implies \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1-3x_3 \\ 2-2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Geht man analog zu Aufgabe (a) vor, erhält man hier:

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \implies \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1-x_4 \\ 2+x_4 \\ -2-4x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c) Geht man analog zu Aufgabe (a) vor, erhält man hier:

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \implies \mathbb{L} = \{\}, \text{ da die letzte Gleichung, 0=2, niemals erfüllt ist.}$$

(d) Geht man analog zu Aufgabe (a) vor, erhält man hier:

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \implies \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(e) Geht man analog zu Aufgabe (a) vor, erhält man hier:

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \implies \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5-4x_3 \\ 2+x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(f) Geht man analog zu Aufgabe (a) vor, erhält man hier:

$$\begin{aligned}
(A|\mathbf{b}) &= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -7 & 0 \end{array}\right) \\
\Longrightarrow \mathbb{L} &= \left\{ \left. \begin{pmatrix} 4x_3 - x_4 - 2x_5 \\ -3x_3 - 2x_4 + 7x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \right| x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \left. x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \left. t_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

(g) Geht man analog zu Aufgabe (a) vor, erhält man hier:

$$\begin{aligned}
(A|\mathbf{b}) &= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \pi & -2 \end{array}\right) \\
\Longrightarrow \mathbb{L} &= \left\{ \left. \begin{pmatrix} 1 - x_4 \\ x_4 + 3x_5 \\ -2 - 4x_4 - \pi x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \right| x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \left. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -\pi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \left. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -\pi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

(h) Die Koeffizientenmatrix $A$ und die rechte Seite $\mathbf{b}$ des Gleichungssystems lauten wie folgt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 8 & -6 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Die führende Eins der ersten Zeile ist in Spalte 1, die führende Eins der zweiten Zeile ist in Spalte 2, die führende Eins der dritten Zeile ist in Spalte 3 und die führende Eins der vierten Zeile ist in Spalte 4. Damit sind $x_1, x_2, x_3$ und $x_4$ führende Variablen und $x_5, x_6$ und $x_7$ freie Variablen. Lösungen ergeben sich, indem wir $x_1, x_2, x_3$ und $x_4$ durch die freien Variablen $x_5, x_6$ und $x_7$ ausdrücken:

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_5 + x_6 - 2x_7 \\ x_2 &= 4x_5 - 7x_6 - 9x_7 \\ x_3 &= -9x_5 - 3x_6 - 4x_7 \\ x_4 &= -2x_5 - 8x_6 + 6x_7. \end{aligned}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix und die Lösungsmenge des LGS sind somit:

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 8 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\implies \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -3x_5+x_6-2x_7 \\ 4x_5-7x_6-9x_7 \\ -9x_5-3x_6-4x_7 \\ -2x_5-8x_6+6x_7 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \middle| \, x_5,x_6,x_7 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_5 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -9 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -3 \\ -8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_7 \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ -4 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, x_5,x_6,x_7 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -9 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -3 \\ -8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ -4 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t_1,t_2,t_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(i) Um zu entscheiden , welche der Gleichungssysteme (a)-(h) äquivalent sind, müssen wir zuerst wissen, wann zwei Gleichungssysteme äquivalent heissen.

> **Definition 7.1.3 - Äquivalente Gleichungssysteme**
> Zwei Gleichungssysteme heissen äquivalent, wenn ihre Lösungsmengen gleich sind.

Da von den berechneten Lösungsmengen keine zwei gleich sind, ist keines der Gleichungssysteme (a)-(h) äquivalent zu einem anderen Gleichungssystem.

**Aufgabe 5** (Von der Lösungsmenge zum LGS)

Finden Sie zu jeder der folgenden Mengen ein LGS, das diese als Lösungsmenge besitzt.

(a)
$$\mathbb{L} = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

(b)
$$\mathbb{L} = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

(c)
$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\}$$

**Lösung:**

(a) Sei $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{L}$, dann gilt
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ für } t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Man liest ab $x_3 = t_1$ und $x_4 = t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ und erhält $x_1 = 2t_1 + t_2 = 2x_3 + x_4$ und $x_2 = 3t_1 + 7t_2 = 3x_3 + 7x_4$. Umformung ergibt:
$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & -2x_3 & -x_4 & = & 0 \\ & x_2 & -3x_3 & -7x_4 & = & 0. \end{array}$$

(b) Sei $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \in \mathbb{L}$, dann gilt
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ für } t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}.$$

Man liest ab $x_2 = t_1$, $x_3 = t_2$, $x_4 = t_3$ und $x_5 = t_4$, $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}$ und erhält $x_1 = t_1 + 3t_3 - 7t_4 = x_2 + 3x_4 - 7x_5$. Umformung ergibt:
$$x_1 \quad -x_2 \quad -3x_4 \quad +7x_5 \quad = \quad 0.$$

(c) Sei $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{L}$, dann gilt
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R}.$$

Man liest ab $x_2 = t, t \in \mathbb{R}$ und erhält $x_1 = 2+2t = 2+2x_2$ und $x_3 = 7+7t = 7+7x_2$. Umformung ergibt:

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & -2x_2 & & = & 2 \\ & -7x_2 & +x_3 & = & 7. \end{array}$$

**Aufgabe 6** (LGS, Eliminationsverfahren)

In einer Klausur war das folgende lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 8. \end{array}$$

Studentin A löste die Aufgabe indem sie in jedem Tableau nur eine Umformung machte. Der Student B versuchte mehrere Umformungen im gleichen Tableau zu machen, um Zeit zu sparen. Sie erhielten folgende Ergebnisse:

Studentin A

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | **b** | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 4 | |
| 3 | 1 | 4 | 3 | 8 | |
| 4 | 1 | 0 | 2 | 1 | |
| 5 | 0 | 4 | 2 | 2 | 2 − 2 1 |
| 6 | 1 | 4 | 3 | 8 | |
| 7 | 1 | 0 | 2 | 1 | |
| 8 | 0 | 4 | 2 | 2 | |
| 9 | 0 | 4 | 1 | 7 | 6 − 4 |
| 10 | 1 | 0 | 2 | 1 | |
| 11 | 0 | 4 | 2 | 2 | |
| 12 | 0 | 0 | −1 | 5 | 9 − 8 |
| 13 | 1 | 0 | 2 | 1 | |
| 14 | 0 | 1 | 0.5 | 0.5 | $\frac{1}{4}$ 11 |
| 15 | 0 | 0 | −1 | 5 | |
| 16 | 1 | 0 | 2 | 1 | |
| 17 | 0 | 1 | 0 | 3 | 14 + 0.5 15 |
| 18 | 0 | 0 | −1 | 5 | |
| 19 | 1 | 0 | 0 | 11 | 16 + 2 18 |
| 20 | 0 | 1 | 0 | 3 | |
| 21 | 0 | 0 | −1 | 5 | |
| 22 | 1 | 0 | 0 | 11 | |
| 23 | 0 | 1 | 0 | 3 | |
| 24 | 0 | 0 | 1 | −5 | (−1) 21 |

Student B

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | **b** | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 4 | |
| 3 | 1 | 4 | 3 | 8 | |
| 4 | 1 | 0 | 2 | 1 | |
| 5 | 0 | 4 | 2 | 2 | 2 − 2 1 |
| 6 | 0 | 4 | 1 | 7 | 3 − 1 |
| 7 | 1 | 0 | 2 | 1 | |
| 8 | 0 | 0 | 1 | −5 | 5 − 6 |
| 9 | 0 | 0 | −1 | 5 | 6 − 5 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 11 | 7 − 2 8 |
| 11 | 0 | 0 | 1 | −5 | |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 + 8 |

Studentin A erhielt die Lösungsmenge $\mathbb{L}_A = \{(11, 3, -5)^T\}$.
Student B erhielt aus dem Endtableau die Gleichungen $x_1 = 11, x_3 = -5$ und mit $x_2 = t$ die Lösungsmenge $\mathbb{L}_B = \{(11, 0, -5)^T + t\,(0, 1, 0)^T \mid t \in \mathbb{R}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass der Vektor der Lösungsmenge $\mathbb{L}_A$ eine Lösung des LGS ist und geben Sie einen Vektor aus $\mathbb{L}_B$ an, der keine Lösung des LGS darstellt.

(b) In welchen Zeilen hat Student B einen Fehler gemacht?

(c) Wie kann Studentin A den angegebenen Lösungsweg abkürzen, ohne den Fehler des Studenten B zu begehen?

**Lösung:**

(a) Die Lösung der Studentin A erfüllt die Gleichungen des gegebenen LGS. Einsetzen der Lösung in das LGS ergibt:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1\cdot 11 & & & + & 2\cdot(-5) & = & 1 & \surd \\ 2\cdot 11 & + & 4\cdot 3 & + & 6\cdot(-5) & = & 4 & \surd \\ 1\cdot 11 & + & 4\cdot 3 & + & 3\cdot(-5) & = & 8 & \surd. \end{array}$$

Die Lösung $x = (11, 0, -5)^T \in \mathbb{L}_B$ des Studenten B, eingesetzt in das LGS, ergibt hingegen:

$$\begin{array}{cccccccc} 1\cdot 11 & & & + & 2\cdot(-5) & = & 1 \ \surd \\ 2\cdot 11 & + & 4\cdot 0 & + & 6\cdot(-5) & = & -8 \neq 4 \\ 1\cdot 11 & + & 4\cdot 0 & + & 3\cdot(-5) & = & -4 \neq 8. \end{array}$$

Somit ist der Vektor $(11, 0, -5)^T$ keine Lösung des LGS.

(b) Zeilenumformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix, die zu äquivalenten linearen Gleichungssystemen führen, nennen wir elementare Zeilenumformungen.

**Satz 7.2.1 - Elementare Zeilenumformungen**

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

- Multipliziert man Zeile $i_1 \in \{1, \ldots, m\}$ der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ mit $\alpha \neq 0$, erhält man eine neue erweiterte Koeffizientenmatrix $(\tilde{A}|\tilde{\mathbf{b}})$ mit

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij},\ i \neq i_1 \\ \alpha a_{i_1 j},\ i = i_1 \end{cases} \qquad \tilde{b}_i = \begin{cases} b_i,\ i \neq i_1 \\ \alpha b_{i_1},\ i = i_1 \end{cases}.$$

  Das so entstandene lineare Gleichungssystem $\tilde{A}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$ ist äquivalent zu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- Addiert man das $\alpha$-fache einer Zeile $i_1 \in \{1, \ldots, m\}$ der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ zu Zeile $i_2 \neq i_1$, erhält man eine neue erweiterte Koeffizientenmatrix $(\tilde{A}|\tilde{\mathbf{b}})$ mit

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij},\ i \neq i_2 \\ a_{i_2 j} + \alpha a_{i_1 j},\ i = i_2 \end{cases} \qquad \tilde{b}_i = \begin{cases} b_i,\ i \neq i_2 \\ b_{i_2} + \alpha b_{i_1},\ i = i_2 \end{cases}.$$

  Das so entstandene lineare Gleichungssystem $\tilde{A}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$ ist äquivalent zu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- Vertauscht man zwei Zeilen $i_1$ und $i_2$, $1 \leq i_1 < i_2 \leq m$, der erweiterten Koeffizientenmatrix

$(A|\mathbf{b})$, erhält man eine neue erweiterte Koeffizientenmatrix $(\tilde{A}|\tilde{\mathbf{b}})$ mit

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij},\ i \notin \{i_1, i_2\} \\ a_{i_2 j},\ i = i_1 \\ a_{i_1 j},\ i = i_2 \end{cases} \qquad \tilde{b}_i = \begin{cases} b_i,\ i \notin \{i_1, i_2\} \\ b_{i_2},\ i = i_1 \\ b_{i_1},\ i = i_2 \end{cases} .$$

Das so entstandene lineare Gleichungssystem $\tilde{A}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$ ist äquivalent zu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Die Umformungen des Studenten B von Zeilen $4-6$ zu $7-9$ führen dazu, dass das in Zeilen $4-6$ beschriebene LGS nicht äquivalent zum LGS aus Zeilen $7-9$ ist.
Er hätte entweder Zeile 8 durch $5-6$ ersetzen können, um

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\mathbf{b}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| ... | | | | | |
| 4 | 1 | 0 | 2 | 1 | |
| 5 | 0 | 4 | 2 | 2 | |
| 6 | 0 | 4 | 1 | 7 | |
| 7 | 1 | 0 | 2 | 1 | |
| 8 | 0 | 0 | 1 | $-5$ | 5 − 6 |
| 9 | 0 | 4 | 1 | 7 | |

zu erhalten oder Zeile 9 durch $6-5$ ersetzen können, um

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\mathbf{b}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| ... | | | | | |
| 4 | 1 | 0 | 2 | 1 | |
| 5 | 0 | 4 | 2 | 2 | |
| 6 | 0 | 4 | 1 | 7 | |
| 7 | 1 | 0 | 2 | 1 | |
| 8 | 0 | 4 | 2 | 2 | |
| 9 | 0 | 0 | $-1$ | 5 | 6 − 5 |

zu erhalten. Er darf nicht beide Ersetzungen gleichzeitig durchführen.

(c) Studentin A kann ihren Lösungsweg korrekt verkürzen, indem sie alle Berechnungen eines Schritts des Eliminationsschemas gleichzeitig, also in einem Tableau, durchführt.

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 4 | |
| 3 | 1 | 4 | 3 | 8 | |
| 4 | 1 | 0 | 2 | 1 | |
| 5 | 0 | 4 | 2 | 2 | 2 − 2·1 |
| 6 | 0 | 4 | 1 | 7 | 3 − 1 |
| 7 | 1 | 0 | 2 | 1 | |
| 8 | 0 | 1 | 0.5 | 0.5 | $\frac{1}{4}$ 5 |
| 9 | 0 | 0 | $-1$ | 5 | 6 − 5 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 11 | 7 + 2·9 |
| 11 | 0 | 1 | 0 | 3 | 8 + 0.5·9 |
| 12 | 0 | 0 | 1 | $-5$ | $(-1)\cdot$ 9 |

**Aufgabe 7** (Ein kleines Algebra-Rätsel)

Gesucht sind diejenigen Zahlen, welche, eingetragen in die Kästchen, die horizontalen und vertikalen Gleichungen gleichzeitig lösen:

$$\begin{array}{ccccc} \square & + & \square & = & 8 \\ + & & + & & \\ \square & - & \square & = & 6\ . \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \\ 13 & & 8 & & \end{array}$$

(a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, um die 4 Unbekannten zu finden.
(b) Lösen Sie dieses Gleichungssystem nur mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen.

**Lösung:**

(a) Gesucht sind $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, welche die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems darstellen:

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & x_1 + x_2 & = 8 \\ \text{(II)} & x_1 + x_3 & = 13 \\ \text{(III)} & x_3 - x_4 & = 6 \\ \text{(IV)} & x_2 + x_4 & = 8. \end{array}$$

(b) Das LGS in (a) entspricht folgender erweiterter Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right).$$

Wir bringen nun die Koeffizientenmatrix mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen in explizite Form:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\mathbf{b}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 8 | | eliminiere $x_1$ und erzeuge führende 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 13 | | |
| 3 | 0 | 0 | 1 | $-1$ | 6 | | |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 1 | 8 | | |
| 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 8 | 1 | |
| 6 | 0 | $-1$ | 1 | 0 | 5 | 2 $-$ 1 | eliminiere $x_2$ und erzeuge führende 1 |
| 7 | 0 | 0 | 1 | $-1$ | 6 | 3 | |
| 8 | 0 | 1 | 0 | 1 | 8 | 4 | |
| 9 | 1 | 0 | 1 | 0 | 13 | 5 $+$ 6 | |
| 10 | 0 | 1 | $-1$ | 0 | $-5$ | $-1 \cdot$ 6 | |
| 11 | 0 | 0 | 1 | $-1$ | 6 | 7 | eliminiere $x_3$ und erzeuge führende 1 |
| 12 | 0 | 0 | 1 | 1 | 13 | 8 $+$ 6 | |
| 13 | 1 | 0 | 0 | 1 | 7 | 9 $-$ 11 | |
| 14 | 0 | 1 | 0 | $-1$ | 1 | 10 $+$ 11 | |
| 15 | 0 | 0 | 1 | $-1$ | 6 | 11 | |
| 16 | 0 | 0 | 0 | 2 | 7 | 12 $-$ 11 | eliminiere $x_4$ und erzeuge führende 1 |
| 17 | 1 | 0 | 0 | 0 | $\frac{7}{2}$ | 13 $- \frac{1}{2} \cdot$ 16 | |
| 18 | 0 | 1 | 0 | 0 | $\frac{9}{2}$ | 14 $+ \frac{1}{2}$ 16 | |
| 19 | 0 | 0 | 1 | 0 | $\frac{19}{2}$ | 15 $+ \frac{1}{2}$ 16 | |
| 20 | 0 | 0 | 0 | 1 | $\frac{7}{2}$ | $\frac{1}{2}$ 16 | |

Das LGS im Endtableau liegt in expliziter Form vor. Wir lesen aus dem Tableau die eindeutige Lösung $\mathbf{x} = (\frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{19}{2}, \frac{7}{2})^T$ ab. Die Lösungsmenge ist daher gegeben durch

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 19 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Aufgabe 8** (Investment Planung)

Ein Fondsmanager muss ein Kapital von CHF 200'000 anlegen. Bei den drei ihm zur Verfügung stehenden Fonds wird eine jährliche Rendite von 10% für Fonds 1, 7% für Fonds 2 bzw. 8% für Fonds 3 erwartet. Das Kapital soll dabei einen jährlichen Ertrag von CHF 16'000 erzielen. Ausserdem soll genau ein Drittel, der insgesamt in die Fonds 2 und 3 fliessenden Geldmenge, in den ersten Fonds investiert werden. Wie kann unter diesen Umständen das Kapital auf die drei Fonds verteilt werden, um die gestellten Forderungen einzuhalten?

**Lösung:**

Das Gesamtkapital ist durch 200'000 CHF beschränkt. Dieses möchte er auf 3 Fonds verteilen. Somit ist die erste Forderung, dass

$$\text{(I)} \ \ x_1 + x_2 + x_3 = 200'000,$$

wobei $x_i$ das Geld in CHF repräsentiert, welches in Fond $i$ investiert wird. Aus der Forderung für die Renditen, erhalten wir die folgende Bedingung

$$\text{(II)} \ \ \frac{10}{100}x_1 + \frac{7}{100}x_2 + \frac{8}{100}x_3 = 16'000.$$

Zuletzt gibt es noch die Forderung, dass das Investment in Fond 1 durch die anderen beiden Fonds wie folgt bestimmt ist:

$$\text{(III)}\ \ \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = x_1.$$

Damit erhalten wir das folgende LGS

$$\begin{array}{lrl}
\text{(I)} & x_1 + x_2 + x_3 = & 200'000 \\
\text{(II)} & \frac{1}{10}x_1 + \frac{7}{100}x_2 + \frac{8}{100}x_3 = & 16'000 \\
\text{(III)} & -x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = & 0.
\end{array}$$

Dieses LGS entspricht folgender erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 1 & 200'000 \\
\frac{1}{10} & \frac{7}{100} & \frac{8}{100} & 16'000 \\
-1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0
\end{array}\right).$$

Wir bringen nun die Koeffizientenmatrix mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen in explizite Form:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | **b** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 200'000 | | eliminiere $x_1$ und erzeuge führende 1 |
| 2 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{7}{100}$ | $\frac{8}{100}$ | 16'000 | | |
| 3 | $-1$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 | | |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 200'000 | 1 | |
| 5 | 0 | $-\frac{3}{100}$ | $-\frac{2}{100}$ | $-4000$ | 2 $- \frac{1}{10}$ 1 | eliminiere $x_2$ und erzeuge führende 1 |
| 6 | 0 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | 200'000 | 1 + 3 | |
| 7 | 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3} \cdot 100'000$ | 4 $+ \frac{100}{3}$ 5 | |
| 8 | 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{3} \cdot 100'000$ | $-\frac{100}{3}$ 5 | |
| 9 | 0 | 0 | $\frac{4}{9}$ | $\frac{2}{9} \cdot 100'000$ | 6 $+ \frac{100}{3} \cdot \frac{4}{3}$ 5 | eliminiere $x_3$ und erzeuge führende 1 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 50'000 | 7 $- \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3}$ 9 | |
| 11 | 0 | 1 | 0 | 100'000 | 8 $- \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3}$ 9 | |
| 12 | 0 | 0 | 1 | 50'000 | $\frac{9}{4}$ 9 | |

Das LGS im Endtableau liegt in expliziter Form vor. Wir lesen aus dem Tableau, dass wir 50'000 CHF in Fond 1, 100'000 CHF in Fond 2 und 50'000 CHF in Fond 3 investieren müssen, um die gestellten Forderungen einzuhalten. Die Lösungsmenge ist daher gegeben durch

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 50'000 \\ 100'000 \\ 50'000 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Aufgabe 9** (Elementare Zeilenumformungen)

Bringen Sie folgende lineare Gleichungssysteme mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen in explizite Form und bestimmen Sie anschliessend deren Lösungsmengen:

(a)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 7 \\ 8x_1 + 2x_2 &= 9 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = 8 \\ 2x_1 & + & 9x_2 & + & 14x_3 & = 25 \\ 5x_1 & + & 12x_2 & + & 18x_3 & = 39 \end{array}$$

(c)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 &= 2 \\ x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 8 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array}$$

(e)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & x_2 & - & 4x_4 & = & 24 \\ -4x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -23 \\ & & 4x_1 & + & 3x_2 & = & 26 \end{array}$$

(f) Bestimmen Sie zu jedem der LGS die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen LGS.

**Lösung:**

Wir haben in Aufgabe 4 gesehen, dass ein LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ in expliziter Form vorliegt, wenn $A$ in expliziter Form vorliegt. In Aufgabe 6 haben wir elementare Zeilenumformungen definiert. Wir bringen die folgenden Koeffizientenmatrizen in explizite Form mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen und bestimmen dann die Lösungsmenge des LGS.

(a)

| | $x_1$ | $x_2$ | $\mathbf{b}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 7 | | eliminiere $x_1$ und erzeuge führende 1 |
| 2 | 8 | 2 | 9 | | |
| 3 | 1 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{7}{3}$ | $\frac{1}{3} \cdot$ 1 | |
| 4 | 0 | $-\frac{26}{3}$ | $-\frac{29}{3}$ | 2 $- \frac{8}{3} \cdot$ 1 | eliminiere $x_2$ und erzeuge führende 1 |
| 5 | 1 | 0 | $\frac{11}{13}$ | 3 $+ \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{26} \cdot$ 4 | |
| 6 | 0 | 1 | $\frac{29}{26}$ | $-\frac{3}{26} \cdot$ 4 | |

Das LGS im Endtableau liegt in expliziter Form vor. Wir lesen aus dem Tableau die eindeutige Lösung $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{11}{13} \\ \frac{29}{26} \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 11 \\ \frac{29}{2} \end{pmatrix}$ ab. Es gilt also $\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 11 \\ \frac{29}{2} \end{pmatrix} \right\}$. Das selbe Ergebnis hätten wir auch mit der Substitutionsmethode aus Serie 1 erhalten.

(b)

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | **b** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 4 | 8 | | eliminiere $x_1$ und erzeuge führende 1 |
| 2 | 2 | 9 | 14 | 25 | | |
| 3 | 5 | 12 | 18 | 39 | | |
| 4 | 1 | 3 | 4 | 8 | 1 | |
| 5 | 0 | 3 | 6 | 9 | $2 - 2 \cdot 1$ | eliminiere $x_2$ und erzeuge führende 1 |
| 6 | 0 | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $3 - 5 \cdot 1$ | |
| 7 | 1 | 0 | $-2$ | $-1$ | $4 - 5$ | |
| 8 | 0 | 1 | 2 | 3 | $\frac{1}{3}5$ | |
| 9 | 0 | 0 | 4 | 8 | $6 + 5$ | eliminiere $x_3$ und erzeuge führende 1 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 3 | $7 + \frac{1}{2} \cdot 9$ | |
| 11 | 0 | 1 | 0 | $-1$ | $8 - \frac{1}{2} \cdot 9$ | |
| 12 | 0 | 0 | 1 | 2 | $\frac{1}{4} \cdot 9$ | |

Das LGS im Endtableau liegt in expliziter Form vor. Wir lesen aus dem Tableau die eindeutige Lösung $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ab. Es gilt also $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

(c)

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | **b** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | | eliminiere $x_1$ und erzeuge führende 1 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 2 | | |
| 3 | 0 | 1 | $-1$ | 3 | | |
| 4 | 1 | 0 | 2 | 1 | 1 | |
| 5 | 0 | 0 | $-2$ | 1 | $2 - 1$ | tausche Zeile 5 mit Zeile 6 |
| 6 | 0 | 1 | $-1$ | 3 | 3 | |
| 7 | 1 | 0 | 2 | 1 | 4 | |
| 8 | 0 | 1 | $-1$ | 3 | 6 | |
| 9 | 0 | 0 | $-2$ | 1 | 5 | eliminiere $x_3$ und erzeuge führende 1 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 2 | $7 + 9$ | |
| 11 | 0 | 1 | 0 | $\frac{5}{2}$ | $8 - \frac{1}{2}9$ | |
| 12 | 0 | 0 | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}9$ | |

Das LGS im Endtableau liegt in expliziter Form vor. Wir lesen aus dem Tableau die eindeutige Lösung $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ ab. Es gilt also $\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

(d)

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\mathbf{b}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | | eliminiere $x_1$ und erzeuge führende 1 |
| 2 | 2 | 3 | 5 | 8 | | |
| 3 | 3 | $-2$ | $-1$ | 3 | | |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 5 | 1 | |
| 5 | 0 | 1 | 3 | $-2$ | $2 - 2 \cdot 1$ | eliminiere $x_2$ und erzeuge führende 1 |
| 6 | 0 | $-5$ | $-4$ | $-12$ | $3 - 3 \cdot 1$ | |
| 7 | 1 | 0 | $-2$ | 7 | $4 - 5$ | |
| 8 | 0 | 1 | 3 | $-2$ | 5 | |
| 9 | 0 | 0 | 11 | $-22$ | $6 + 5 \cdot 5$ | eliminiere $x_3$ und erzeuge führende 1 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 3 | $7 + \frac{2}{11} \cdot 9$ | |
| 11 | 0 | 1 | 0 | 4 | $8 - \frac{3}{11} \cdot 9$ | |
| 12 | 0 | 0 | 1 | $-2$ | $\frac{1}{11} \cdot 9$ | |

Das LGS im Endtableau liegt in expliziter Form vor. Wir lesen aus dem Tableau die eindeutige Lösung $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ab. Es gilt also $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

(e)

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\mathbf{b}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 1 | 0 | $-4$ | 24 | | eliminiere $x_1$ und erzeuge führende 1 |
| 2 | $-4$ | $-1$ | 1 | 0 | $-23$ | | |
| 3 | 4 | 3 | 0 | 0 | 26 | | |
| 4 | 1 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $-1$ | 6 | $\frac{1}{4} 1$ | |
| 5 | 0 | 0 | 1 | $-4$ | 1 | $2 + 1$ | tausche Zeile 5 mit Zeile 6 |
| 6 | 0 | 2 | 0 | 4 | 2 | $3 - 1$ | |
| 7 | 1 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $-1$ | 6 | 4 | |
| 8 | 0 | 2 | 0 | 4 | 2 | 6 | |
| 9 | 0 | 0 | 1 | $-4$ | 1 | 5 | eliminiere $x_2$ und erzeuge führende 1 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | $-\frac{3}{2}$ | $\frac{23}{4}$ | $7 - \frac{1}{8} 8$ | |
| 11 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | $\frac{1}{2} 8$ | |
| 12 | 0 | 0 | 1 | $-4$ | 1 | 9 | |

Das LGS im Endtableau liegt in expliziter Form vor. Wir lesen aus dem Tableau die Lösung $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{23}{4} + \frac{3}{2}x_4 \\ 1 - 2x_4 \\ 1 + 4x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $x_4 \in \mathbb{R}$, ab. Es gilt also

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{23}{4} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{23}{4} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(f) In Aufgabe 2 haben wir die Definition von LGS wiederholt. Ein LGS heisst homogen, falls $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ gilt, vgl. Definition 7.1.4 in Aufgabe 2. Die rechte Seite $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ bleibt nach elementaren

Zeilenumformungen stets unverändert. Deswegen hat die rechte Seite keinen Einfluss darauf, wie die Matrix in explizite Form gebracht wurde. Somit erhalten wir stets das selbe Endtableau wie zuvor, nur mit rechter Seite $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Daher gilt

(a) $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  (b) $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  (d) $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(e) $\mathbb{L} = \left\{ t \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$

**Aufgabe 10** (Eliminationsverfahren)

Ermitteln Sie mit Hilfe des Eliminationsverfahrens die Lösungsmenge der folgenden Gleichungssysteme:

(a) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & -6 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 13x_3 & = & -17 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & -9 \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 4 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 36x_3 & + & 5x_4 & = & 13 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & + & 37x_3 & + & 15x_4 & = & 11 \\ 3x_1 & + & \frac{13}{2}x_2 & + & 89x_3 & + & \frac{5}{2}x_4 & = & \frac{69}{2} \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

(d) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & + & 8x_4 & = & -11 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & -7 \end{array}$$

(e) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 7x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & + & 8x_4 & = & 10 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & - & 5x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 4 \end{array}$$

(f) Bestimmen Sie zu jedem der LGS aus den Teilaufgaben (a)-(e) die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen LGS.

**Lösung:**

(a)

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\mathbf{b}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 5 | $-6$ | | eliminiere $x_1$ |
| 2 | 3 | 2 | 13 | $-17$ | | |
| 3 | 2 | $-1$ | 4 | $-9$ | | |
| 4 | 1 | 1 | 5 | $-6$ | 1 | |
| 5 | 0 | $-1$ | $-2$ | 1 | $2 - 3 \cdot 1$ | eliminiere $x_2$ und erzeuge führende 1 |
| 6 | 0 | $-3$ | $-6$ | 3 | $3 - 2 \cdot 1$ | |
| 7 | 1 | 0 | 3 | $-5$ | $4 + 5$ | |
| 8 | 0 | 1 | 2 | $-1$ | $-1 \cdot 5$ | |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | $6 - 3 \cdot 5$ | streiche die Nullzeile 9 |
| 10 | 1 | 0 | 3 | $-5$ | 7 | |
| 11 | 0 | 1 | 2 | $-1$ | 8 | |

Das LGS im Endtableau liegt in expliziter Form vor. Wir lesen aus dem Tableau die folgende Lösungsmenge ab:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -5-3x_3 \\ -1-2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b)

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\mathbf{b}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | | eliminiere $x_1$ |
| 2 | 3 | 3 | 7 | 4 | | |
| 3 | $-1$ | $-1$ | 3 | 0 | | |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | |
| 5 | 0 | 0 | 4 | $-2$ | $2 - 3 \cdot 1$ | |
| 6 | 0 | 0 | 4 | 2 | $3 + 1$ | |

Da $a_{22} = 0$ ($a_{22}$ ist das zweite Element der Zeile 5), können wir $x_2$ überspringen, um ein führendes Element in der zweiten Zeile und dritten Spalte zu erhalten. Die Zeilen 5 und 6 entsprechen den folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \text{(V)} & 4x_3 = -2 \\ \text{(VI)} & 4x_3 = 2 \end{array}$$

Aus (V) folgt, dass $x_3 = -\frac{1}{2}$. Aus Gleichung (VI) folgt, dass $x_3 = \frac{1}{2}$. Dies ist ein Widerspruch und somit ist die Lösungsmenge leer,

$$\mathbb{L} = \{\}.$$

---

**Alternative Lösung:**

*Das selbe Resultat erhalten wir wenn wir $x_2$ überspringen und die Matrix in eine explizite Form* *bringen.*

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\mathbf{b}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 1 | 1 | 2 | | |
| 5 | 0 | 0 | 4 | $-2$ | | *überspringe $x_2$, eliminiere $x_3$ und erzeuge führende 1* |
| 6 | 0 | 0 | 4 | 2 | | |
| 7 | 1 | 1 | 0 | $\frac{5}{2}$ | $4 - \frac{1}{4} 5$ | |
| 8 | 0 | 0 | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4} 5$ | |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 4 | $6 - 5$ | |

*Die Lösungsmenge ist leer, da die Gleichung in Zeile 9 niemals erfüllt ist.*

(c)

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\mathbf{b}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 36 | 5 | 13 | | eliminiere $x_1$ und erzeuge führende 1 |
| 2 | 4 | $-3$ | 37 | 15 | 11 | | |
| 3 | 3 | $\frac{13}{2}$ | 89 | $\frac{5}{2}$ | $\frac{69}{2}$ | | |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | | |
| 5 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 18 | $\frac{5}{2}$ | $\frac{13}{2}$ | $\frac{1}{2} \cdot 1$ | |
| 6 | 0 | $-5$ | $-35$ | 5 | $-15$ | $2 - 2 \cdot 1$ | eliminiere $x_2$ und erzeuge führende 1 |
| 7 | 0 | 5 | 35 | $-5$ | 15 | $3 - \frac{3}{2} \cdot 1$ | |
| 8 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 4 | |
| 9 | 1 | 0 | $\frac{29}{2}$ | 3 | 5 | $5 + \frac{1}{10} \cdot 6$ | |
| 10 | 0 | 1 | 7 | $-1$ | 3 | $-\frac{1}{5} \cdot 6$ | |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $7 + 6$ | streiche die Nullzeile 11 |
| 12 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 8 | |
| 13 | 1 | 0 | $\frac{29}{2}$ | 3 | 5 | 9 | |
| 14 | 0 | 1 | 7 | $-1$ | 3 | 10 | |
| 15 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 12 | eliminiere $x_3$ |
| 16 | 1 | 0 | 0 | $-\frac{23}{2}$ | 5 | $13 - \frac{29}{2} \cdot 15$ | |
| 17 | 0 | 1 | 0 | $-8$ | 3 | $14 - 7 \cdot 15$ | |
| 18 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 15 | |

Das LGS im Endtableau liegt in expliziter Form vor. Wir lesen aus dem Tableau die folgende Lösungsmenge ab

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 + \frac{23}{2}x_4 \\ 3 + 8x_4 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{23}{2} \\ 8 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(d)

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\mathbf{b}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | $-1$ | 3 | $-3$ | | eliminiere $x_1$ und erzeuge führende 1 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 4 | $-1$ | | |
| 3 | 2 | 3 | $-5$ | 8 | $-11$ | | |
| 4 | $-1$ | 1 | $-5$ | 1 | $-7$ | | |
| 5 | 1 | 1 | $-1$ | 3 | $-3$ | 1 | |
| 6 | 0 | $-1$ | 3 | $-2$ | 5 | $2 - 2 \cdot 1$ | eliminiere $x_2$ und erzeuge führende 1 |
| 7 | 0 | 1 | $-3$ | 2 | $-5$ | $3 - 2 \cdot 1$ | |
| 8 | 0 | 2 | $-6$ | 4 | $-10$ | $4 + 1$ | |
| 9 | 1 | 0 | 2 | 1 | 2 | $5 + 6$ | |
| 10 | 0 | 1 | $-3$ | 2 | $-5$ | $-1 \cdot 6$ | |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $7 + 6$ | |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $8 + 2 \cdot 6$ | streiche die Nullzeilen 11 und 12 |
| 13 | 1 | 0 | 2 | 1 | 2 | 9 | |
| 14 | 0 | 1 | $-3$ | 2 | $-5$ | 10 | |

Das LGS im Endtableau liegt in expliziter Form vor. Wir lesen aus dem Tableau die folgende Lösungsmenge ab

$$\begin{aligned}
\mathbb{L} &= \left\{ \begin{pmatrix} 2-2x_3-x_4 \\ -5+3x_3-2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

(e)

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\mathbf{b}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ① | 1 | 2 | 4 | 7 | 6 | | eliminiere $x_1$ |
| ② | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | | |
| ③ | 1 | 2 | 0 | $-5$ | 2 | | |
| ④ | 1 | 2 | 2 | 1 | 4 | | |
| ⑤ | 1 | 2 | 4 | 7 | 6 | ① | |
| ⑥ | 0 | 0 | $-2$ | $-6$ | $-2$ | ② $-2$① | überspringe $x_2$, eliminiere $x_3$ und erzeuge führende 1 |
| ⑦ | 0 | 0 | $-4$ | $-12$ | $-4$ | ③ $-$ ① | |
| ⑧ | 0 | 0 | $-2$ | $-6$ | $-2$ | ④ $-$ ① | |
| ⑨ | 1 | 2 | 0 | $-5$ | 2 | ⑤ $+2$⑥ | |
| ⑩ | 0 | 0 | 1 | 3 | 1 | $-\frac{1}{2}$⑥ | |
| ⑪ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ⑦ $-2$⑥ | |
| ⑫ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ⑧ $-$ ⑥ | streiche die Nullzeilen ⑪ und ⑫ |
| ⑬ | 1 | 2 | 0 | $-5$ | 2 | ⑨ | |
| ⑭ | 0 | 0 | 1 | 3 | 1 | ⑩ | |

Das LGS im Endtableau liegt in expliziter Form vor. Wir lesen die folgende Lösungsmenge ab:

$$\begin{aligned}
\mathbb{L} &= \left\{ \begin{pmatrix} 2-2x_2+5x_4 \\ x_2 \\ 1-3x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \, x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

(f) Das homogene LGS entspricht einer rechten Seite $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, vgl. Definition 7.1.4 in Aufgabe 2. Diese rechte Seite bleibt daher stets unverändert nach elementaren Zeilenumformungen. Somit erhalten wir stets dasselbe Tableau, nur mit rechter Seite $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Daher sind die Lösungsmengen der homogenen LGS wie folgt gegeben:

(a) $\mathbb{L}_0 = \left\{ t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$

(b) $\mathbb{L}_0 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$

(c) $\mathbb{L}_0 = \left\{ t \begin{pmatrix} \frac{23}{2} \\ 8 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$

(d) $\mathbb{L}_0 = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$

(e) $\mathbb{L}_0 = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$