Es werden die Aufgaben 1,4,5 und 10 in den Tutorien besprochen.

Aufgabe 1 (Vertikalschnitt und Richtungsableitung)

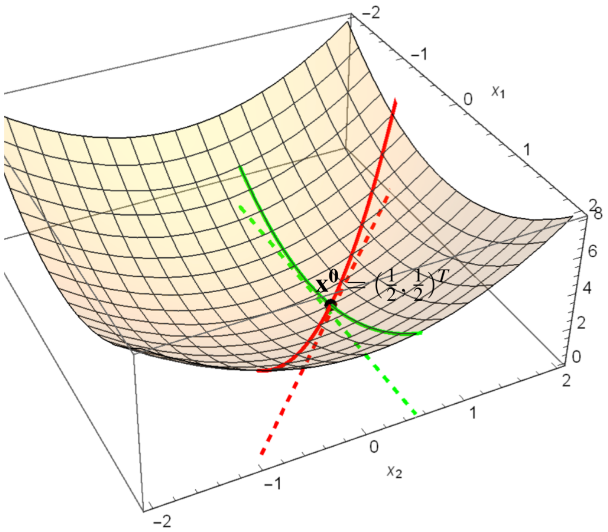
Betrachten Sie die quadratische Funktion $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Sei zudem $\mathbf{x}^0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$ und $\mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^T$.

(a) Bestimmen Sie die Höhenlinien von f zu den Niveaus $y = 1, 2, 4$ und zeichnen Sie diese in ein 2-dimensionales Koordinatensystem ein.

(b) Bestimmen Sie
  (i) den Vertikalschnitt $f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{r})$ durch $\mathbf{x}^0$ in Richtung $\mathbf{r}$,
  (ii) den Vertikalschnitt $f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{e}^1}(t) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}^1)$ durch $\mathbf{x}^0$ in Richtung $\mathbf{e}^1 = (1, 0)^T$.

(c) Veranschaulichen Sie sich die folgenden Ausdrücke in folgendem Schaubild und berechnen Sie Ihren Wert.

Abbildung 1.1



  (i) Die Richtungsableitung $f'_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0)$.
  (ii) Die Richtungsableitung $f'_{\mathbf{e}^1}(\mathbf{x}^0)$.
  (iii) Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0)$.

(d) Berechnen Sie $\frac{\nabla f(\mathbf{x}^0)}{||\nabla f(\mathbf{x}^0)||}$.

(e) Sei nun $\tilde{\mathbf{r}} = \left(r_1, \sqrt{(1 - r_1^2)}\right)^T$ mit $-1 \leq r_1 \leq 1$.
  (i) Bestimmen Sie den Vertikalschnitt von f durch $\mathbf{x}^0$ in Richtung $\tilde{\mathbf{r}}$.
  (ii) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $f'_{\tilde{\mathbf{r}}}(\mathbf{x}^0)$.
  (iii) Bestimmen Sie r_1 so, dass die Richtungsableitung $f'_{\tilde{\mathbf{r}}}(\mathbf{x}^0)$ maximal wird. Vergleichen Sie die so erhaltene Richtung mit $\frac{\nabla f(\mathbf{x}^0)}{||\nabla f(\mathbf{x}^0)||}$.

Aufgabe 2 (Richtungsableitung und Tangentialebene)

Um den Zusammenhang zwischen dem Absatz eines Produkts und den für zwei Medien eingesetzten Werbebudgets x_1 und x_2 zu analysieren, ist der Absatz eines Produkts in Abhängigkeit des Werbebudgets $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ durch folgende Funktion gegeben:

$$f(x_1, x_2) = 10\sqrt{x_1} + 20\ln(x_2 + 1) + 50, \quad \mathbf{x} \in [0, \infty) \times [0, \infty).$$

(a) Aktuell ist das Werbebudget $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)^T = (100, 100)^T$.
   (i) Welchen Wert hat der Absatz?
   (ii) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von f an der Stelle $\mathbf{x}^0$. Wie wirkt sich eine kleine Erhöhung von x_1^0 auf den Absatz aus? Wie wirkt sich eine kleine Erhöhung von x_2^0 auf den Absatz aus?

(b) Schätzen Sie die Veränderung der Absatzwirkung mit Hilfe der Tangentialebene von f ab, wenn die Werbebudgets von $x_1 = 100$ und $x_2 = 100$ jeweils um eine Einheit ansteigen. Schätzen Sie also
$$\Delta f(101, 101) = f(101, 101) - f(100, 100)$$
ab und runden Sie Ihr Ergebnis auf vier Nachkommastellen. Vergleichen Sie diese Abschätzung mit der exakten Veränderung der Absatzwirkung.

(c) Bestimmen Sie die Richtungsableitungen von f im Punkt $\mathbf{x}^0 = (100, 100)^T$ in Richtung $\mathbf{r}^1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)^T$ und $\mathbf{r}^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)^T$.

(d) Zeigen Sie, dass die Richtung $\mathbf{r}^2$ für die Absatzwirkung günstiger als die Richtung $\mathbf{r}^1$ ist.

Aufgabe 3 (Vertikalschnitte und Richtungsableitungen)

Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(\mathbf{x}) = (1 + x_2)x_1^2$.

(a) Bilden Sie die Vertikalschnitte von g durch die Stelle $\mathbf{x}^0 = (1, 0)^T$ in Richtung der Einheitsvektoren $\mathbf{e}^1$ und $\mathbf{e}^2$ und in Richtung der Diagonalen $\mathbf{r}^d = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$.

(b) Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen an der Stelle $t = 0$ der in (a) gebildeten Vertikalschnitte.

(c) Berechnen Sie den Gradienten sowie die Hessenmatrix von g an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (1, 0)^T$.

(d) Berechnen Sie die ersten beiden Richtungsableitungen an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (1, 0)^T$ in Richtung $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$ und $\mathbf{r}^d$ mit Hilfe der Hessematrix.

(e) Ist $g(\mathbf{x})$ in den Richtungen $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2$ und $\mathbf{r}^d$ monoton steigend?

Aufgabe 4 (Definitheit einer Matrix)

Untersuchen Sie folgende Matrizen auf ihre Definitheit.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5 (Konvexität)

Bestimmen Sie jeweils die Hesse-Matrix der folgenden Funktionen an Stellen $\mathbf{x}^0$ ihres Definitionsbereichs und überprüfen Sie die Funktionen auf Konvexität.

(a) $f : (0,\infty) \times (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = -\sqrt{x_1 x_2} + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$,

(b) $g : (0,\infty) \times (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g(\mathbf{x}) = \ln(2x_1 + x_2)$,

(c) $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $p(\mathbf{x}) = x_1^4 + x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2$,

(d) $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $q(\mathbf{x}) = (1 + x_2)x_1^2$.

Aufgabe 6 (Eigenwerte, konvexe Funktion)

Gegeben ist eine symmetrische 3×3-Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}, \; q_{ij} = q_{ji} \in \mathbb{R}, \;\; i,j = 1,2,3,$$

mit Eigenwerten $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 7$.

(a) Bestimmen Sie die charakteristische Gleichung $\det(Q - \lambda I) = 0$ von Q.

(b) Berechnen Sie die Determinante von Q.

(c) Begründen Sie, warum die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q\mathbf{x} = q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + q_{33}x_3^2 + 2q_{12}x_1x_2 + 2q_{13}x_1x_3 + 2q_{23}x_2x_3,$$

konvex ist.

Aufgabe 7 (Extremalstellen einer quadratischen Funktion, Anwendung der Definitheit)

Gegeben sind der Vektor $\mathbf{p} = (-1,-1,-2)^T$ und die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Untersuchen Sie die Matrix C auf Ihre Definitheit.

(b) Berechnen Sie alle stationären Punkte der quadratischen Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T C\mathbf{x} + \mathbf{p}^T\mathbf{x}.$$

(c) Klassifizieren Sie mithilfe der Erkenntnisse aus (a) die in (b) berechneten stationären Punkte: Liegt ein lokales Minimum, lokales Maximum oder ein Sattelpunkt vor?

Aufgabe 8 (Stationäre Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$ mit $\mathbf{x} \in [0,1] \times [0,1]$.

(a) Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial x_1}(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(1,1)$.

(b) Ist f monoton steigend oder fallend in Richtung
  (i) $\mathbf{e}^1 = (1,0)^T$?
  (ii) $\mathbf{e}^2 = (0,1)^T$?

(c) Bestimmen Sie alle stationären Stellen von f.

(d) Bestimmen Sie das globale Maximum von f.

(e) Was besagt das Kriterium von Fermat? Was kann man aus dem Kriterium von Fermat bezüglich lokaler Extrema von f schliessen?

Aufgabe 9 (Vertikalschnitte und Extrema)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ mit } f(\mathbf{x}) = 2x_1^4 - 3x_1^2 x_2 + x_2^2.$$

(a) Ist die Stelle $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ eine stationäre Stelle von f?
(b) Zeigen Sie, dass $f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t)$ für beliebige Richtungen $\mathbf{r}$ an der Stelle $t = 0$ ein lokales Minimum hat.
(c) Betrachten Sie die drei Stellen $\mathbf{x}^1 = (0,0)^T, \mathbf{x}^2 = (1,1.5)^T$ und $\mathbf{x}^3 = (2,6)^T$.
  (i) Bestimmen Sie die Funktionswerte dieser Stellen.
  (ii) Zeigen Sie, dass diese Stellen Elemente der folgenden Menge sind:

$$K = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = \frac{3}{2}x_1^2 \right\} = \left\{ (t, \frac{3}{2}t^2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

(d) Bestimmen Sie die Funktion $h(t) = f(t, \frac{3}{2}t^2)$, welche die Funktionswerte von Stellen in K berechnet.
(e) Zeigen Sie, dass $h(t)$ an der Stelle $t = 0$ ein lokales Maximum hat.
(f) Können Sie aus den bisherigen Ergebnissen schliessen, ob f in $\mathbf{x}^0$ ein lokales Minimum, lokales Maximum oder einen Sattelpunkt hat?
(g) (*) Geben Sie zudem zu jeder hinreichend kleinen ε-Umgebung, $\varepsilon > 0$, von $\mathbf{0}$ eine Stelle an, die einen kleineren Funktionswert aufweist als $\mathbf{0}$. Nutzen Sie hierfür die obige Funktion $h(t)$.

Aufgabe 10 (Extremalstellen für zwei Funktionen in $n = 2$ Variablen)

Gegeben seien die Funktionen f und h mit

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ mit } f(\mathbf{x}) = x_1^3 + 3x_1 x_2^2 - 60x_1 + 48x_2,$$
$$h : (-1,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } h(\mathbf{x}) = \left(1 - x_1^2\right)^{\frac{3}{2}} + x_1^2 + x_2^2.$$

(a) Finden Sie die stationären Punkte von f und klassifizieren Sie diese: Liegt ein lokales Minimum, lokales Maximum oder ein Sattelpunkt vor?

(b) Finden Sie die stationären Punkte von h und klassifizieren Sie diese: Liegt ein lokales Minimum, lokales Maximum oder ein Sattelpunkt vor?