Aufgabe 1 (Optimierungsproblem unter Nebenbedingung I)

Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen:

$$\min_{\mathbf{x}\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}} x_1x_2^2 - 3e^{x_2}$$
$$\text{u.d.N. } x_2 - \ln(x_1) = 0.$$

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Funktion
  (i) alle Stellen, an denen eine optimale Lösung des Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen vorliegen kann;
  (ii) den Zielfunktionswert aller in (i) ermittelten Stellen.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Verfahrens der Substitution die optimale Lösung des Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen.

Lösung:

(a) (i) Die Lagrange-Funktion lautet

$$L(x_1,x_2,\lambda) = x_1x_2^2 - 3e^{x_2} - \lambda(x_2 - \ln(x_1)),$$

vgl. Definition 10.2.3 aus Serie 12. Die Nebenbedingung ist gegeben durch $g(\mathbf{x}) = 0$ mit $g(\mathbf{x}) = x_2 - \ln(x_1)$. Laut dem Satz von Lagrange muss für eine optimale Lösung $\mathbf{x}^*$ mit $\nabla g(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$, ein $\lambda^* \in \mathbb{R}$ existieren, sodass $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)^T$ eine stationäre Stelle von L ist. Hier ist $\nabla g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x_1} \\ 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{x} \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}$. Der Gradient von g ist somit für kein $\mathbf{x} \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}$ gleich $\mathbf{0}$. Damit muss eine optimale Lösung $\mathbf{x}^*$ eine stationäre Stelle der Lagrange-Funktion L sein. Die stationären Stellen berechnen sich als:

$$\begin{aligned}
(i)\ L_{x_1}(x_1,x_2,\lambda) &= \qquad x_2^2 + \frac{\lambda}{x_1} = 0 \\
(ii)\ L_{x_2}(x_1,x_2,\lambda) &= 2x_1x_2 - 3e^{x_2} - \lambda = 0 \\
(iii)\ L_{\lambda}(x_1,x_2,\lambda) &= \qquad -x_2 + \ln(x_1) = 0.
\end{aligned}$$

Umformen der Bedingungen $(i) - (iii)$ ergibt:

$$\begin{aligned}
x_2^2 + \frac{\lambda}{x_1} = &\ 0 \iff -x_1x_2^2 = \lambda \\
2x_1x_2 - 3e^{x_2} - \lambda = &\ 0 \iff 2x_1x_2 - 3e^{x_2} = \lambda \\
-x_2 + \ln(x_1) = &\ 0 \iff \ln(x_1) = x_2 \iff x_1 = e^{x_2}.
\end{aligned}$$

Setzen wir für e^{x_2} das Ergebnis aus der letzten Gleichung in die zweite ein, erhalten wir

$$2x_1x_2 - 3x_1 = x_1(2x_2 - 3) = \lambda.$$

Um diese und die erste Gleichung zu erfüllen, muss

$$x_1(2x_2-3) = -x_1x_2^2$$

sein. Da $x_1 \neq 0$ ist (siehe Definitionsbereich der Zielfunktion oder aus der Bedingung (iii) $x_1 = e^{x_2} > 0 \ \forall x_2 \in \mathbb{R}$), können wir durch x_1 teilen und sehen, dass die x_2-Komponente einer stationären Stelle der Lagrange-Funktion folgende Gleichung erfüllen muss:

$$2x_2 - 3 = -x_2^2.$$

Wir erhalten daher $x_2^* = -3$ oder $x_2^* = 1$. Durch Einsetzen in die Gleichungen $x_1 = e^{x_2}$ und $\lambda = -x_1x_2^2$ erhalten wir die stationären Stellen der Lagrange-Funktion L:

$$(e^{-3}, -3, -9e^{-3})^T, \quad (e,1,-e)^T.$$

Damit sind $(e^{-3},-3)^T$ und $(e,1)^T$ die einzigen Kandidaten für eine optimale Lösung.

(ii) Die Zielfunktionswerte der in Teilaufgabe (i) ermittelten Stellen sind

$$f(e^{-3},-3) = \frac{6}{e^3} \text{ und } f(e,1) = -2e.$$

Vergleicht man diese Zielfunktionswerte, so kommt nur $(e,1)^T$ als optimale Lösung in Frage.

(b) Wir wenden das Verfahren der Substitution aus Serie 12 an:
1. Auflösen der Nebenbedingung $g(\mathbf{x}) = x_2 - \ln(x_1) = 0$ nach x_1 ergibt

$$x_1 = \tilde{g}(x_2) = e^{x_2} \quad \text{mit } x_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Substituiert man x_1 durch $\tilde{g}(x_2)$ in $f(\mathbf{x})$, erhält man

$$f^{sub}(x_2) = f(\tilde{g}(x_2), x_2) = e^{x_2}x_2^2 - 3e^{x_2},$$

also

$$f^{sub}(x_2) = e^{x_2}(x_2^2-3) \text{ für } x_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Es gilt

$$\begin{aligned} \left(f^{sub}\right)'(x_2) = \quad e^{x_2}(x_2^2-3) + e^{x_2}(2x_2) &= 0 \\ \iff \qquad e^{x_2}(x_2^2+2x_2-3) &= 0 \\ \iff \qquad x_2^2+2x_2-3 &= 0 \\ \iff \qquad x_2 = -3 \text{ oder } x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \left(f^{sub}\right)''(x_2) &= e^{x_2}(x_2^2+2x_2-3) + e^{x_2}(2x_2+2) \\ &= e^{x_2}(x_2^2+4x_2-1), \end{aligned}$$

also

$$\left(f^{sub}\right)''(-3) = e^{-3}(9-12-1) < 0 \text{ und } \left(f^{sub}\right)''(1) = e^1(1+4-1) > 0.$$

Somit ist $x_2 = (-3)$ eine lokale Maximalstelle und $x_2 = 1$ eine lokale Minimalstelle von f^{sub}. An den Rändern des Definitionsbereichs ergibt sich:

$$\lim_{x_2 \to -\infty} e^{x_2}(x_2^2-3) = 0 \text{ und } \lim_{x_2 \to \infty} e^{x_2}(x_2^2-3) = \infty.$$

Die Funktion ist somit nach oben unbeschränkt, d.h. es existiert kein globales Maximum. An der Stelle $x_2 = (-3)$ liegt (nur) ein lokales Maximum vor. An der Stelle 1 befindet sich das globale Minimum $\min_{x_2 \in \mathbb{R}} f^{sub}(x_2) = f^{sub}(1) = -2e$.
4. Insgesamt folgt somit, dass die Stelle $(\tilde{g}(1), 1)^T = (e, 1)^T$ eine globale Minimalstelle der Zielfunktion f unter der gegebenen Nebenbedingung ist. Das ist genau die stationäre Stelle, die wir mit Hilfe der Lagrange Methode gefunden haben. Jedoch können wir nun schliessen, dass $(e, 1)^T$ die optimale Lösung des Minimierungsproblem unter Nebenbedingungen ist.

Aufgabe 2 (Optimierungsproblem unter Nebenbedingung II)

Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen:

$$\max_{\mathbf{x} \in (0,\infty)^2} x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2}$$
$$\text{u.d.N. } x_1 + x_2 = 20.$$

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Funktion
  (i) alle Stellen, an denen eine optimale Lösung des Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen vorliegen kann;
  (ii) den Zielfunktionswert aller in (i) ermittelten Stellen.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Verfahrens der Substitution die optimale Lösung des Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen.

Lösung:

(a) (i) Die Lagrange-Funktion lautet

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} - \lambda(x_1 + x_2 - 20),$$

vgl. Definition 10.2.3 aus Serie 12. Die Nebenbedingung ist gegeben durch $g(\mathbf{x}) = 0$ mit $g(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 20$. Laut dem Satz von Lagrange muss für eine optimale Lösung $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}$ mit $\nabla g(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$, ein λ^* existieren, sodass $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)^T$ eine stationäre Stelle von L ist.
Hier ist $\nabla g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Der Gradient von g ist somit für kein $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ gleich $\mathbf{0}$. Damit muss eine optimale Lösung $\mathbf{x}^*$ eine stationäre Stelle der Lagrange-Funktion L sein. Die stationären Stellen berechnen sich als:

$$\begin{aligned}
(i)\ L_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) &= 1 + (x_1)^{-\frac{1}{2}}(x_2)^{\frac{1}{2}} - \lambda = 0 \\
(ii)\ L_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) &= 1 + (x_1)^{\frac{1}{2}}(x_2)^{-\frac{1}{2}} - \lambda = 0 \\
(iii)\ L_{\lambda}(x_1, x_2, \lambda) &= \qquad -x_1 - x_2 + 20 = 0.
\end{aligned}$$

Die ersten beiden Gleichungen lassen sich auch schreiben als

$$\begin{aligned}
(x_1)^{-\frac{1}{2}}(x_2)^{\frac{1}{2}} &= \lambda - 1 \text{ und} \\
(x_1)^{\frac{1}{2}}(x_2)^{-\frac{1}{2}} &= \lambda - 1.
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}} \iff x_2 = x_1.$$

Setzen wir diese Information in Bedingung (iii) ein, so erhalten wir

$$2x_1 - 20 = 0 \iff x_1 = 10.$$

Mit $x_1 = x_2$ folgt, dass auch $x_2 = 10$ sein muss. Mit $(x_1)^{-\frac{1}{2}}(x_2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 1 = \lambda - 1$ folgt $\lambda = 2$. Die einzige stationäre Stelle der Lagrange-Funktion ist $(10,10,2)^T$.
Damit ist $(10,10)^T$ der einzige Kandidat für eine optimale Lösung.

(ii) Der Zielfunktionswert der in Teilaufgabe (i) ermittelten Stelle ist

$$f(10,10) = 10 + 10 + 2\sqrt{10^2} = 40.$$

(b) Wir wenden das Verfahren der Substitution aus Serie 12 an:
1. Auflösen der Nebenbedingung $g(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 20 = 0$ nach x_1 ergibt

$$x_1 = \tilde{g}(x_2) = 20 - x_2 \quad \text{mit } x_2 > 0.$$

2. Substituiert man x_1 durch $\tilde{g}(x_2)$ in $f(\mathbf{x})$, erhält man

$$f^{sub}(x_2) = f(\tilde{g}(x_2), x_2) = \tilde{g}(x_2) + x_2 + 2\sqrt{\tilde{g}(x_2)x_2} = (20 - x_2) + x_2 + 2(20 - x_2)^{0.5}x_2^{0.5}$$

also

$$f^{sub}(x_2) = 20 + 2x_2^{\frac{1}{2}}(20 - x_2)^{\frac{1}{2}} \text{ für } x_2 \in (0,20).$$

3. Es gilt

$$\begin{aligned} \left(f^{sub}\right)'(x_2) = \quad & x_2^{-0.5}(20-x_2)^{0.5} - x_2^{0.5}(20-x_2)^{-0.5} = && 0 \\ \iff \quad & x_2^{-0.5}(20-x_2)^{0.5} = && x_2^{0.5}(20-x_2)^{-0.5} \\ \iff \quad & (20-x_2) = && x_2 \\ \iff \quad & x_2 = && 10. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \left(f^{sub}\right)''(x_2) = \quad & -0.5x_2^{-1.5}(20-x_2)^{0.5} - 0.5x_2^{-0.5}(20-x_2)^{-0.5} \\ & -0.5x_2^{-0.5}(20-x_2)^{-0.5} - 0.5x_2^{0.5}(20-x_2)^{-1.5} \\ & = -0.5\sqrt{\frac{20-x_2}{x_2^3}} - \frac{1}{\sqrt{x_2(20-x_2)}} - 0.5\sqrt{\frac{x_2}{(20-x_2)^3}}. \end{aligned}$$

Da

$$\left(f^{sub}\right)''(x_2) < 0 \text{ für alle } x_2 \in (0,20)$$

ist die Funktion f^{sub} konkav und hat an der Stelle $x_2 = 10$ ein globales Maximum.
4. Die Stelle $(\tilde{g}(10), 10)^T = (10,10)^T$ ist also die globale Maximalstelle der Zielfunktion f unter $B = \left\{\mathbf{x} \in (0,\infty)^2 \mid x_1 + x_2 = 20\right\}$. Das ist genau die stationäre Stelle, die wir mit Hilfe der Lagrange Methode gefunden haben. Jedoch können wir nun schliessen, dass $(10,10)^T$ die optimale Lösung des Maximierungsproblem unter Nebenbedingungen ist.

Aufgabe 3 (Kostenminimierung)

Gegeben ist die Produktionsfunktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x_1,x_2) = x_1 + 2x_2$$

eines Unternehmens mit den beiden unabhängigen Inputs x_1 und x_2, d.h. $(x_1,x_2)^T$ führt zu $y = f(x_1,x_2)$ Einheiten des Endprodukts. Die Kostenfunktion $c(x_1,x_2)$ des Unternehmens sei

$$c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ mit } c(x_1,x_2) = x_1^2 + 6x_2^2 + k,$$

wobei $k \in \mathbb{R}$ Fixkosten darstellen.

(a) Wann sind die Kosten minimal, wenn keine Produktionsrestriktionen vorliegen? Beantworten Sie die Frage einmal intuitiv und einmal rechnerisch.

(b) Das Unternehmen hat den Auftrag genau $y_0 > 0$ Einheiten zu minimalen Kosten zu produzieren. Berechnen Sie den einzigen Kandidaten $(x_1^*, x_2^*)^T$, welcher die Kosten minimieren könnte.

(c) Verwenden Sie ohne Beweis, dass der ermittelte Kandidat $(x_1^*, x_2^*)^T$ aus Teilaufgabe (b) tatsächlich die Kosten minimiert, falls genau y_0 Einheiten produziert werden sollen. Wie verändern sich die Kosten bei einer kleinen Änderung der produzierten Einheiten y_0 und in welchem Zusammenhang steht dies mit λ aus der Lagrange-Funktion?

Lösung:

(a) Wir nehmen an, dass keine Produktionsrestriktionen vorliegen. Da $c(x_1,x_2) > k = c(0,0)$ ist für alle $(x_1,x_2)^T \neq (0,0)^T$, wird das eindeutige globale Minimum immer bei $x_1 = x_2 = 0$ angenommen, also dort, wo die Firma nichts produziert.
Dies kann man auch rechnerisch zeigen:

$$\begin{aligned} c_{x_1} &= 2x_1 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0 \\ c_{x_2} &= 12x_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 0 \\ &\qquad\quad\;\Rightarrow\; \text{einziger Kandidat für ein Minimum: } (0,0)^T. \end{aligned}$$

Die Funktion c ist konvex, da die Hesse-Matrix

$$H_c(x_1^0,x_2^0) = \begin{pmatrix} c_{x_1x_1}(x_1^0,x_2^0) & c_{x_1x_2}(x_1^0,x_2^0) \\ c_{x_1x_2}(x_1^0,x_2^0) & c_{x_2x_2}(x_1^0,x_2^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

an jeder Stelle positiv definit und somit auch positiv semidefinit ist, vgl. Satz 9.3.7 aus Serie 11. Demnach ist $(0,0)^T$ die globale Minimalstelle, vgl. Satz 9.4.6 aus Serie 12.

(b) Die Produktionsrestriktion ist gegeben durch $x_1 + 2x_2 = y_0$ und das Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen lautet

$$\begin{aligned} &\min\; x_1^2 + 6x_2^2 + k \\ &\text{u.d.N. } x_1 + 2x_2 = y_0. \end{aligned}$$

Wir wenden das Verfahren von Lagrange an. Die Lagrange-Funktion lautet

$$L(x_1,x_2,\lambda) = x_1^2 + 6x_2^2 + k - \lambda(x_1 + 2x_2 - y_0),$$

vgl. Definition 10.2.3 aus Serie 12. Die Nebenbedingung ist gegeben durch $g(\mathbf{x}) = 0$ mit $g(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 - y_0$. Laut dem Satz von Lagrange muss für eine optimale Lösung $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}$ mit $\nabla g(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$, ein λ^* existieren, sodass $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)^T$ eine stationäre Stelle von L ist. Hier gilt $\nabla g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Damit muss eine optimale Lösung $\mathbf{x}^*$ eine stationäre Stelle der Lagrange-Funktion L sein. Die stationären Stellen der Lagrange-Funktion berechnen sich durch:

$$\begin{array}{lll} (i)\ L_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) & = 2x_1 - \lambda = 0 & \Leftrightarrow \lambda = 2x_1 \\ (ii)\ L_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) & = 12x_2 - 2\lambda = 0 & \Leftrightarrow \lambda = 6x_2 \\ (iii)\ L_\lambda(x_1, x_2, \lambda) & = -x_1 - 2x_2 + y_0 = 0. & \end{array}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $x_1 = 3x_2$. Durch das Einsetzen dieser Information in die Bedingung (iii) erhalten wir die stationäre Stelle der Lagrange-Funktion in Abhängigkeit von y_0:

$$x_2^* = \frac{1}{5}y_0 \text{ und } x_1^* = \frac{3}{5}y_0 \ \Rightarrow (x_1^*, x_2^*, \lambda^*) = (\frac{3}{5}y_0, \frac{1}{5}y_0, \frac{6}{5}y_0).$$

Wenn eine optimale Lösung existiert, dann ist sie $(x_1^*, x_2^*)^T = (\frac{3}{5}y_0, \frac{1}{5}y_0)^T$.

(c) Wir verwenden nun, dass $(x_1^*, x_2^*)^T = (\frac{3}{5}y_0, \frac{1}{5}y_0)^T$ die Kosten minimiert, falls genau y_0 Einheiten produziert werden. Die minimalen Kosten sind also

$$c(\frac{3}{5}y_0, \frac{1}{5}y_0) = \left(\frac{3}{5}y_0\right)^2 + 6\left(\frac{1}{5}y_0\right)^2 + k = \frac{3}{5}y_0^2 + k.$$

Ändert man die produzierten Einheiten y_0 um Δy, so ändern sich die optimalen Kosten um $\Delta c = \left(\frac{3}{5}(y_0 + \Delta y)^2 + k\right) - \left(\frac{3}{5}y_0^2 + k\right) = \frac{3}{5}(2y_0\Delta y + (\Delta y)^2)$. Das Verhältnis $\frac{\Delta c}{\Delta y}$ ist demnach gegeben durch

$$\frac{\Delta c}{\Delta y} = \frac{6}{5}y_0 + \frac{3}{5}\Delta y,$$

bzw. für kleine Δy annähernd durch $\frac{6}{5}y_0$. Die Veränderung der Kosten bei einer kleinen Änderung der produzierten Einheiten y_0 ist demnach annähernd gleich λ, vgl. Teilaufgabe (b). Man nennt λ in diesem Zusammenhang auch „Schattenpreis".

Aufgabe 4 (Lineare Optimierung mit 2 Variablen)

Sie sind verantwortlich für die Produktion von zwei Typen von Whirlpools: Aqua-Spa und Hydro-Lux. Insgesamt können nur 200 Whirlpools produziert werden. Die Fertigung eines Aqua-Spas benötigt 9 Stunden Arbeit und die Fertigung eines Hydro-Luxs 6 Stunden. Insgesamt stehen Ihnen nur 1566 Arbeitsstunden zur Verfügung. Beide Typen werden aus einem Rohr hergestellt, von dem insgesamt 2880m zur Verfügung stehen. Ein Aqua-Spa benötigt dabei 12m des Rohrs und ein Hydro-Lux 16m. Der Verkauf eines Whirpools des Typs Aqua-Spa bringt einen Erlös von 350 CHF ein, wohingegen ein Whirpool des Typs Hydro-Lux beim Verkauf 300 CHF einbringt.

(a) Würden ausschliesslich die Whirlpools mit dem höchsten Erlös produziert werden, wie viele könnten hergestellt werden? Wie hoch wäre der resultierende Erlös?
(b) Beschreiben Sie das Problem durch ein lineares Optimierungsproblem in Standardform mit zwei Variablen x_1 und x_2.
(c) Stellen Sie den zulässigen Bereich in einem zweidimensionalen Koordinatensystem mit einer x_1- und einer x_2-Achse dar.
(d) Zeichnen Sie im Koordinatensystem aus Teilaufgabe (c) zusätzlich Höhenlinien der Zielfunktion zu den Niveaus $y_1 = 35000$ und $y_2 = 52500$ ein.

(e) Zählen Sie alle Eckpunkte des zulässigen Bereichs auf und bestimmen Sie den Eckpunkt mit dem grössten Zielfunktionswert.
(f) Welche Aussage trifft der Hauptsatz der linearen Optimierung über den in (e) gefundenen Eckpunkt mit dem grössten Zielfunktionswert?
(g) Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem mit Hilfe Ihrer angefertigten Grafik aus Teilaufgabe (d).

Lösung:

(a) Die Aqua-Spa Whirlpools bringen einen höheren Erlös als die Hydro-Lux Whirlpools. Es sollen also nur Whirlpools des Typs Aqua-Spa produziert werden. Wegen der Produktionsrestriktion können höchstens 200 Whirlpools produziert werden. Wegen der Arbeitsrestriktion können höchstens $\frac{1566}{9} = 174$ Whirpools produziert werden. Wegen der Rohrrestriktion können höchstens $\frac{2880}{12} = 240$ Whirpools produziert werden. Es könnten also insgesamt 174 Whirlpools des Typs Aqua-Spa produziert werden. Der resultierende Erlös wäre $174 \cdot 350 = 60900$ CHF.

(b)

Definition 10.3.1 - Lineares Optimierungsproblem in Standardform
(P-max) und (P-min) heissen lineares Optimierungsproblem oder lineares Programm (LP), wenn $f, g_1, \ldots, g_m$ affin-lineare Funktionen sind.
Ein lineares Optimierungsproblem liegt in Standardform vor, wenn es für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in der Form

$$\text{(P-max)} \qquad \begin{aligned} \max\, & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{u.d.N. } & A\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

beschrieben ist.
Dabei bezeichnet man die Matrix A als Koeffizientenmatrix und $\mathbf{b}$ als rechte Seite des linearen Ungleichungssystems. Den Vektor $\mathbf{c}$ nennt man den Vektor der Zielfunktionskoeffizienten und $\mathbf{x}$ den Vektor der Entscheidungsvariablen. Die Bedingung $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$ heisst Nichtnegativitätsbedingung.

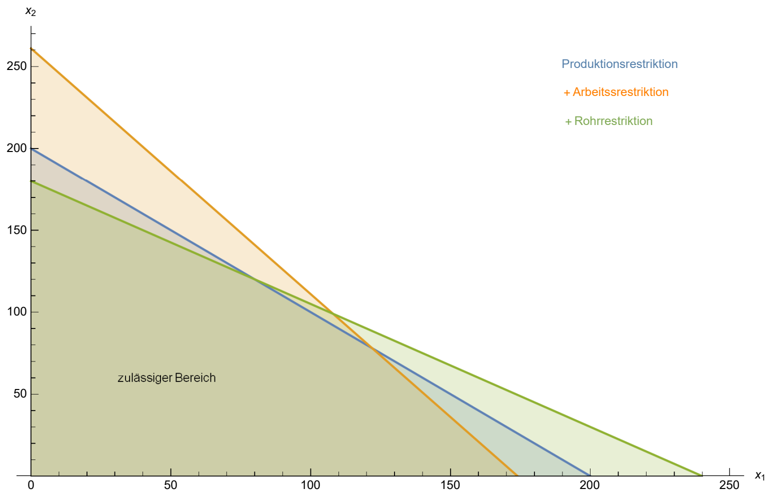
Bei einem linearen Optimierungsproblem in Standardform handelt es sich also stets um ein Maximierungsproblem mit einer Zielfunktion, welche eine lineare Abbildung ist, und einem zulässigen Bereich $B = \{\mathbf{x} \in [0, +\infty)^n | A\mathbf{x} \le \mathbf{b}\}$. Das in der Aufgabenstellung beschriebene Problem ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \max\ & 350x_1 + 300x_2 & \\ \text{u.d.N. } & x_1 + x_2 \le 200 & \text{(Produktionsrestriktion)} \\ & 9x_1 + 6x_2 \le 1566 & \text{(Arbeitsrestriktion)} \\ & 12x_1 + 16x_2 \le 2880 & \text{(Rohrrestriktion)} \\ & x_1 \ge 0 & \\ & x_2 \ge 0. & \end{aligned}$$

Mit
$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 350 \\ 300 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 6 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 200 \\ 1566 \\ 2880 \end{pmatrix}$$
kann es auch wie in obiger Definition als
$$\begin{aligned} \max \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{u.d.N. } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$
beschrieben werden.

(c) Um den zulässigen Bereich graphisch darzustellen, betrachten wir die Nebenbedingungen:
Aus der Produktionsrestriktion $x_1 + x_2 \leq 200$ folgt $x_2 \leq 200 - x_1$. Alle Punkte, die unterhalb oder auf der Geraden $x_2 = 200 - x_1$ liegen, befinden sich in der durch $x_1 + x_2 \leq 200$ beschriebenen Menge.
Aus der Arbeitsrestriktion $9x_1 + 6x_2 \leq 1566$ folgt $x_2 \leq \frac{1566}{6} - \frac{9}{6}x_1 = 261 - \frac{3}{2}x_1$. Alle Punkte, die unterhalb oder auf der Geraden $x_2 = 261 - \frac{3}{2}x_1$ liegen, befinden sich in der durch $9x_1 + 6x_2 \leq 1566$ beschriebenen Menge.
Aus der Rohrrestriktion $12x_1 + 16x_2 \leq 2880$ folgt $x_2 \leq \frac{2880}{16} - \frac{12}{16}x_1 = 180 - \frac{3}{4}x_1$. Alle Punkte, die unterhalb oder auf der Geraden $x_2 = 180 - \frac{3}{4}x_1$ liegen, befinden sich in der durch $12x_1 + 16x_2 \leq 2880$ beschriebenen Menge.
Da zudem $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ gilt, liegen alle zulässigen Lösungen im ersten Quadranten des Koordinatensystems. In der folgenden Abbildung ist der zulässige Bereich graphisch dargestellt:

Abbildung 4.1: Der zulässige Bereich.



(d) Wir berechnen zuerst die Höhenlinien der Zielfunktion zu den gegebenen Niveaus und zeichnen diese dann im Koordinatensystem aus Teilaufgabe (c) ein.
$$\underline{\text{Für } y_1 = 35000}: 350x_1 + 300x_2 = 35000 \iff x_2 = \frac{350}{3} - \frac{7}{6}x_1.$$
Daher ist
$$N_{y_1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = \frac{350}{3} - \frac{7}{6}x_1\}.$$

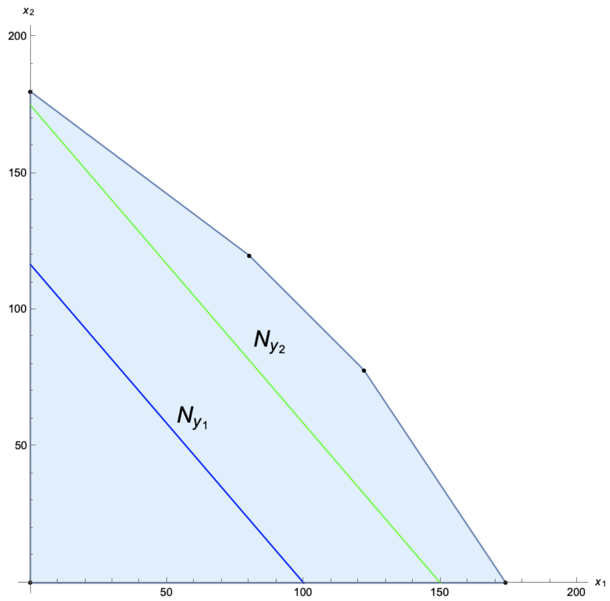
$$\underline{\text{Für } y_2 = 52500}: 350x_1 + 300x_2 = 52500 \;\Leftrightarrow\; x_2 = 175 - \frac{7}{6}x_1.$$

Daher ist

$$N_{y_2} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 175 - \frac{7}{6}x_1\}.$$

Die Abbildung 4.2 zeigt den zulässigen Bereich mit diesen Höhenlinien.

Abbildung 4.2: Der zulässige Bereich und Höhenlinien zu den Niveaus $y_1 = 35000$ und $y_2 = 52500$.



(e) Die Funktion $f(x_1,x_2) = 350x_1 + 300x_2$ ist die Zielfunktion und der zulässige Bereich ist gegeben durch

$$\begin{aligned} B &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 200, 9x_1 + 6x_2 \leq 1566, 12x_1 + 16x_2 \leq 2880, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\} \\ &= \{\mathbf{x} \in [0,+\infty)^2 \mid x_1 + x_2 \leq 200, 9x_1 + 6x_2 \leq 1566, 12x_1 + 16x_2 \leq 2880\}. \end{aligned}$$

Definition 10.3.2 - Eckpunkt
Sei B ein nichtleerer zulässiger Bereich eines linearen Optimierungsproblems. Das Element $\mathbf{x} \in B$ heisst Eckpunkt (oder Ecke), wenn es keine $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in B$, $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \neq \mathbf{x}$ gibt, so dass $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}^1 + (1-\alpha)\mathbf{x}^2$ für ein $\alpha \in [0,1]$.

Die Eckpunkte (siehe Abbildung 4.2) lassen sich in zwei Fällen direkt ablesen, $(0,0)^T$ und $(0,180)^T$. Wir berechnen nun die übrigen Eckpunkte:
Wir berechnen den Schnittpunkt der Geraden $x_2 = 200 - x_1$ (von der Produktionsrestriktion) mit der Geraden $6x_2 = 1566 - 9x_1$ (von der Arbeitsrestriktion):

$$x_2 = 200 - x_1 \implies 9x_1 + 6x_2 = 9x_1 + 6(200 - x_1) = 1566 \iff x_1 = 122 \implies (122,78)^T.$$

Der Schnittpunkt liefert also den Eckpunkt $(122,78)^T$.
Wir berechnen den Schnittpunkt der Geraden $x_2 = 200 - x_1$ (von der Produktionsrestriktion) mit

der Geraden $16x_2 = 2880 - 12x_1$ (von der Rohrrestriktion):

$$x_2 = 200 - x_1 \implies 12x_1 + 16x_2 = 12x_1 + 16(200 - x_1) = 2880 \iff x_1 = 80 \implies (80,120)^T.$$

Der Schnittpunkt liefert also den Eckpunkt $(80,120)^T$.
Wir berechnen den Schnittpunkt der Geraden $6x_2 = 1566 - 9x_1$ (von der Arbeitsrestriktion) mit der x_1-Achse:

$$9x_1 + 6x_2 = 1566 \text{ für } x_2 = 0 \implies x_1 = 174.$$

Der Schnittpunkt liefert den letzten Eckpunkt $(174,0)^T$. Die zugehörigen Zielfunktionswerte sind:

Eckpunkt $\mathbf{x}$	Zielfunktionswert $f(\mathbf{x})$
$(0,0)^T$	0
$(0,180)^T$	54000
$(122,78)^T$	66100
$(80,120)^T$	64000
$(174,0)^T$	60900

Der Eckpunkt mit dem grössten Zielfunktionswert ist $(122,78)^T$ mit Zielfunktionswert 66100.

(f) Der Hauptsatz der linearen Optimierung sagt:

Satz 10.3.3 - Hauptsatz der linearen Optimierung
Für ein lineares Optimierungsproblem mit Zielfunktion f und zulässigem Bereich B gilt:
- Ist $B = \{\}$, so hat das lineare Optimierungsproblem keine optimale Lösung.
- Ist $B \neq \{\}$, dann ist entweder mindestens einer der Eckpunkte von B eine optimale Lösung $\mathbf{x}^*$ des linearen Optimierungsproblems oder das lineare Optimierungsproblem hat keine optimale Lösung.
- Existieren optimale Lösungen an Eckpunkten $\mathbf{x}^{*1}, \dots \mathbf{x}^{*s}$, so ist auch jede Konvexkombination dieser Eckpunkte

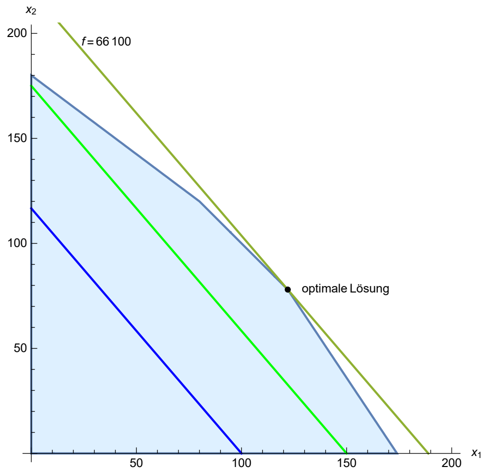
$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \mathbf{x}^{*i}, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, s, \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$$

optimal.

Laut dem Hauptsatz der linearen Optimierung ist der Eckpunkt $(122,78)^T$ die optimale Lösung, wenn eine optimale Lösung existiert. Ist die Zielfunktion auf B nach oben unbeschränkt, gilt also $\sup_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x}) = +\infty$, dann hat das lineare Optimierungsproblem keine optimale Lösung. Da aber hier mit Hilfe der ersten Nebenbedingung geschlossen werden kann, dass $x_1 \leq 200$ und $x_2 \leq 200$ gilt, muss auch $f(x_1,x_2) = 350x_1 + 300x_2 \leq 350(200) + 300(200) = 130000 < +\infty$ gelten. Somit können wir schliessen, dass $(122,78)^T$ die optimale Lösung ist.

(g) Graphisch kann man die optimale Lösung des Maximierungsproblems erhalten, indem man die Höhenlinie zum höchsten Niveau findet, welche mindestens ein Element im zulässigen Bereich hat. Dies geschieht durch eine Parallelverschiebung einer Höhenlinie in Richtung steigender Niveaus bis die Höhenlinie den zulässigen Bereich nur noch an einem Eckpunkt oder einer Kante schneidet. Die optimale Lösung befindet sich genau auf einem Eckpunkt, siehe Abbildung 4.3. Die optimale Lösung des linearen Optimierungsproblem ist $(122,78)^T$.

Abbildung 4.3: Optimale Lösung des LP.



Aufgabe 5 (Lineare Optimierung mit 3 Variablen)

Anlässlich und zur Finanzierung einer Examensfeier soll ein neues Mixgetränk "Leichte Abschlussprüfung" (LAP) kreiert werden. Zum Mischen stehen drei Basisflüssigkeiten in ausreichendem Masse zur Verfügung:

Basisflüssigkeit	Alkohol (%)	Kosten (CHF/Liter)
Klarer	40	12
Kräuterlikör	20	18
Orangensaft	0	2

Folgende Anforderungen werden an das Mixgetränk LAP gestellt:

- LAP soll einen Alkoholgehalt von mindestens 6% haben.
- Um Verwechslung mit bekannten Mixgetränken (Wodka-Orange etc.) zu vermeiden, soll LAP mindestens zu 10% Kräuterlikör enthalten.
- Der Orangensaftanteil soll höchstens 75% betragen.
- LAP soll möglichst geringe Kosten pro Liter verursachen.

(a) Beschreiben Sie das Problem durch ein lineares Optimierungsproblem mit drei Variablen x_1, x_2 und x_3.

(b) Bestimmen Sie ein lineares Optimierungsproblem in Standardform mit zwei Variablen x_2 und x_3, das äquivalent zu dem linearen Optimierungsproblem mit drei Variablen aus Teilaufgabe (a) ist.

(c) Stellen Sie den zulässigen Bereich des linearen Optimierungsproblems aus Teilaufgabe (b) in einem zweidimensionalen Koordinatensystem mit einer x_2- und einer x_3-Achse dar.

(d) Zeichnen Sie im Koordinatensystem aus Teilaufgabe (c) zusätzlich Höhenlinien der Zielfunktion zu den Niveaus $y_1 = -1, y_2 = 1$ und $y_3 = 3$ ein.

(e) Zählen Sie alle Eckpunkte auf und bestimmen Sie den Eckpunkt mit dem grössten Zielfunktionswert.

(f) Welche Aussage trifft der Hauptsatz der linearen Optimierung über den in (e) gefundenen Eckpunkt mit dem grössten Zielfunktionswert?

(g) Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem mit Hilfe Ihrer angefertigten Grafik.

Lösung:

(a) Wir verwenden die Variablen x_1, x_2 und x_3, um den Anteil von Klarer, Kräuterlikör und Orangensaft am LAP zu beschreiben. Somit erhalten wir folgendes lineares Programm:

$$
\begin{array}{rlr}
\min & 12x_1 + 18x_2 + 2x_3 & \text{(Kosten)} \\
\text{u.d.N.} & 40x_1 + 20x_2 \geq 6 & \text{(Alkoholgehalt)} \\
& x_2 \geq 0.1 & \text{(Kräuterlikörantei l)} \\
& x_3 \leq 0.75 & \text{(Orangensaftanteil)} \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 1 & \text{(Mischbedingung)} \\
& x_1 \geq 0 & \\
& x_2 \geq 0 & \\
& x_3 \geq 0. &
\end{array}
$$

(b) Die Mischbedingung lässt sich folgendermassen umschreiben: $x_1 = 1 - x_2 - x_3$. Die Bedingung $x_1 \geq 0$ ist dadurch äquivalent zu $1 - x_2 - x_3 \geq 0$. Die Bedingung für den Alkoholgehalt wird zu $40(1 - x_2 - x_3) + 20x_2 = 40 - 20x_2 - 40x_3 \geq 6 \iff 20x_2 + 40x_3 \leq 34$. Eingesetzt in die Zielfunktion $\mathbf{x} \mapsto 12x_1 + 18x_2 + 2x_3$, erhalten wir eine neue Zielfunktion in 2 Variablen: $f(x_2, x_3) = 12(1 - x_2 - x_3) + 18x_2 + 2x_3 = 12 + 6x_2 - 10x_3$.
Damit lässt sich das lineare Optimierungsproblem äquivalent zu folgendem linearen Optimierungsproblem umformulieren:

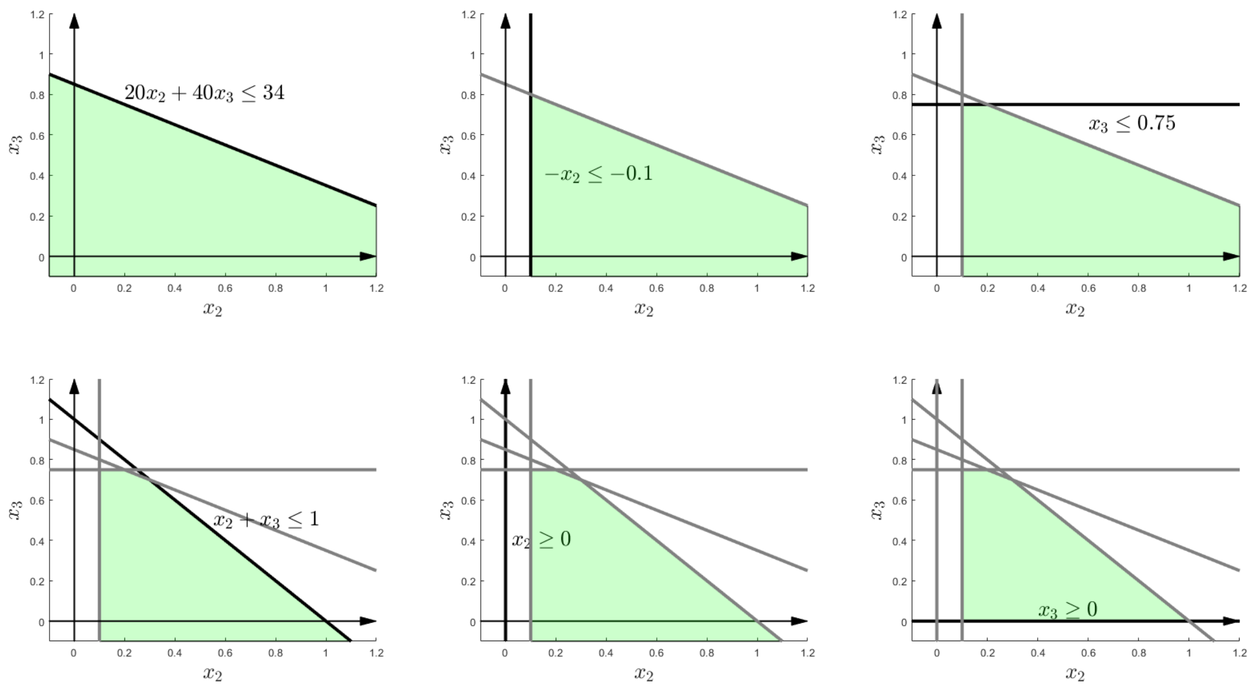
$$
\begin{array}{rl}
\min & 12 + 6x_2 - 10x_3 \\
\text{u.d.N.} & 20x_2 + 40x_3 \leq 34 \\
& x_2 \geq 0.1 \\
& x_3 \leq 0.75 \\
& x_2 + x_3 \leq 1 \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_3 \geq 0.
\end{array}
$$

Dieses lineare Optimierungsproblem ist nicht in Standarform. Um es in Standardform zu bringen, müssen wir es als Maximierungsproblem umformulieren mit einer linearen Zielfunktion und aus der Bedingung $x_2 \geq 0.1$ eine $\leq -$Bedingung machen. Es gilt $\min_{\mathbf{x} \in B} f(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x} \in B} -f(\mathbf{x})$, wobei B der zulässige Bereich ist. Konstanten in der Zielfunktion können wir weglassen, da diese die optimale Lösung nicht verändern. Zudem ist $x_2 \geq 0.1 \iff -x_2 \leq -0.1$. Wir erhalten somit folgendes äquivalentes lineares Optimierungsproblem in Standardform:

$$
\begin{array}{rl}
\max & -6x_2 + 10x_3 \\
\text{u.d.N.} & 20x_2 + 40x_3 \leq 34 \\
& -x_2 \leq -0.1 \\
& x_3 \leq 0.75 \\
& x_2 + x_3 \leq 1 \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_3 \geq 0.
\end{array}
$$

(c) Um den zulässigen Bereich graphisch darzustellen, betrachten wir die Nebenbedingungen: Aus $20x_2 + 40x_3 \leq 34$ folgt $x_3 \leq \frac{34}{40} - \frac{1}{2}x_2$. Alle Punkte, die unterhalb oder auf der Geraden $x_3 = \frac{34}{40} - \frac{1}{2}x_2$ liegen, befinden sich in der durch $20x_2 + 40x_3 \leq 34$ beschriebenen Menge. Zudem gilt $x_2 \geq 0.1$ und $x_3 \leq 0.75$. Aus $x_2 + x_3 \leq 1$ folgt $x_3 \leq 1 - x_2$. Alle Punkte, die unterhalb oder auf der Geraden $x_3 = 1 - x_2$ liegen, befinden sich in der durch $x_2 + x_3 \leq 1$ beschriebenen Menge. Da zudem $x_2 \geq 0$ und $x_3 \geq 0$, liegen alle zulässigen Lösungen im ersten Quadranten des Koordinatensystems. In der folgenden Abbildung ist der zulässige Bereich graphisch dargestellt:

Abbildung 5.1: Der zulässige Bereich.



(d) Wir berechnen zuerst die Höhenlinien der Zielfunktion zu den gegebenen Niveaus und zeichnen diese dann im Koordinatensystem aus Teilaufgabe (c) ein.

$$\underline{\text{Für } y_1 = -1}: 10x_3 - 6x_2 = -1 \;\Leftrightarrow\; x_3 = -\frac{1}{10} + \frac{3}{5}x_2.$$

Daher ist

$$N_{y_1} = \{(x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_3 = -\frac{1}{10} + \frac{3}{5}x_2\}.$$

$$\underline{\text{Für } y_2 = 1}: 10x_3 - 6x_2 = 1 \;\Leftrightarrow\; x_3 = \frac{1}{10} + \frac{3}{5}x_2.$$

Daher ist

$$N_{y_2} = \{(x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_3 = \frac{1}{10} + \frac{3}{5}x_2\}.$$

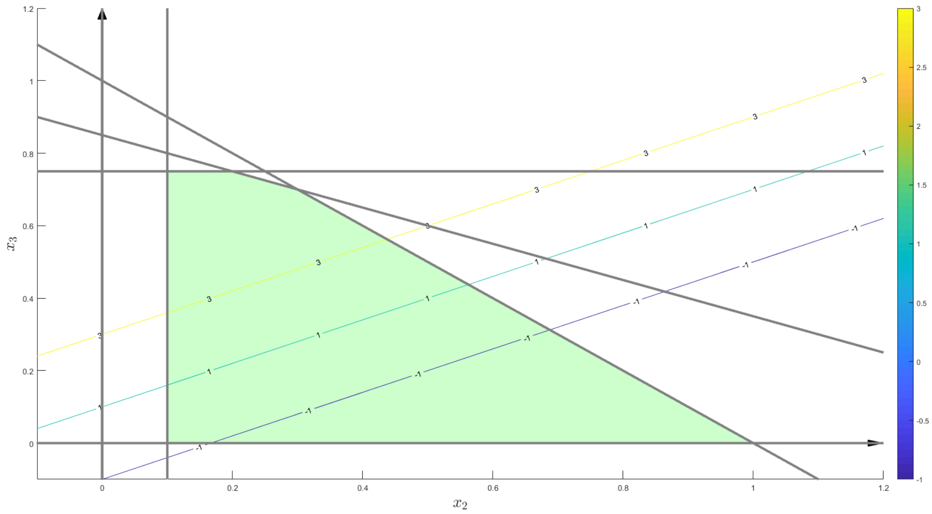
$$\underline{\text{Für } y_3 = 3}: 10x_3 - 6x_2 = 3 \;\Leftrightarrow\; x_3 = \frac{3}{10} + \frac{3}{5}x_2.$$

Daher ist

$$N_{y_3} = \{(x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_3 = \frac{3}{10} + \frac{3}{5}x_2\}.$$

Die Abbildung 5.2 zeigt den zulässigen Bereich mit diesen Höhenlinien.

Abbildung 5.2: Der zulässige Bereich und Höhenlinien zu den Niveaus $y_1 = -1, y_2 = 1, y_3 = 3$.



(e) Fast alle Eckpunkte lassen sich direkt ablesen: $(0.1,0)^T$, $(0.1,0.75)^T$ und $(1,0)^T$.
Der nächste Eckpunkt berechnet sich als Schnittpunkt der Geraden $x_3 = 1 - x_2$ (von der Nebenbedingung $x_2 + x_3 \leq 1$) mit der Geraden $40x_3 = 34 - 20x_2$ (von der Nebenbedingung $20x_2 + 40x_3 \leq 34$):

$$x_2 = 1 - x_3 \implies 20x_2 + 40x_3 = 20(1 - x_3) + 40x_3 = 34 \iff x_3 = 0.7 \implies (0.3, 0.7)^T.$$

Der Schnittpunkt liefert also den Eckpunkt $(0.3,0.7)^T$.
Der letzte Eckpunkt berechnet sich als Schnittpunkt der Geraden $x_3 = 0.75$ (von der Nebenbedingung $x_3 \leq 0.75$) mit der Geraden $40x_3 = 34 - 20x_2$ (von der Nebenbedingung $20x_2 + 40x_3 \leq 34$):

$$x_3 = 0.75 \implies 20x_2 + 40(0.75) = 34 \iff x_2 = 0.2 \implies (0.2, 0.75)^T.$$

Der Schnittpunkt liefert also den Eckpunkt $(0.2,0.75)^T$.
Die zugehörigen Zielfunktionswerte sind:

Eckpunkt $\mathbf{x}$	Zielfunktionswert $f(\mathbf{x})$
$(0.1,0)^T$	-0.6
$(0.1,0.75)^T$	6.9
$(0.2,0.75)^T$	6.3
$(1,0)^T$	-6
$(0.3,0.7)^T$	5.2

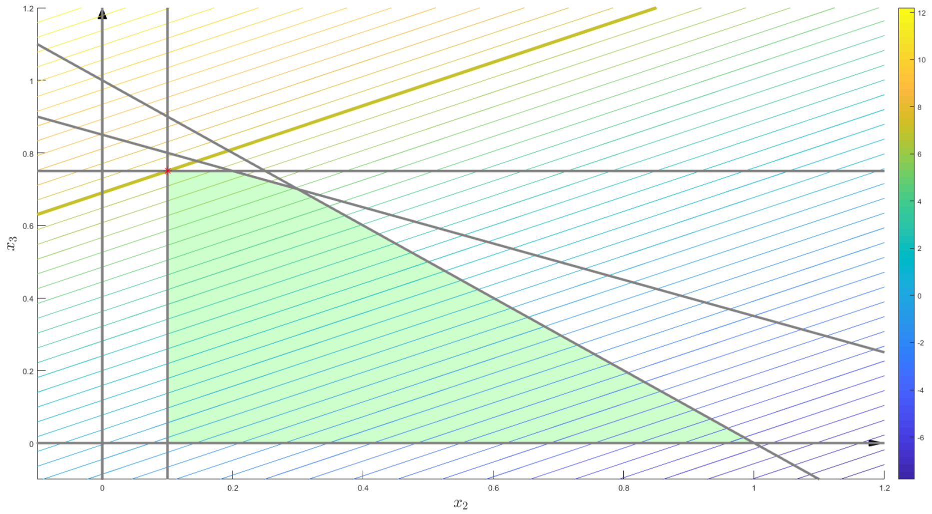
Der Eckpunkt mit dem grössten Zielfunktionswert ist $(0.1,0.75)^T$ mit Zielfunktionswert 6.9.

(f) Laut dem Hauptsatz der linearen Optimierung, Satz 10.3.3 aus Aufgabe 4, ist der Eckpunkt $(0.1,0.75)^T$ die optimale Lösung, wenn eine optimale Lösung existiert. Ist die Zielfunktion auf B nach oben unbeschränkt, gilt also $\sup_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x}) = +\infty$, dann hat das lineare Optimierungsproblem keine optimale Lösung. Da aber hier mit Hilfe der Nebenbedingung geschlossen werden kann, dass $-x_2 \leq -0.1$ und $x_3 \leq 0.75$ gilt, muss auch $f(x_1,x_2) = -6x_2 + 10x_3 \leq 6(-0.1) + 10(0.75) = 6.9 < +\infty$ gelten. Somit können wir schliessen, dass $(0.1,0.75)^T$ die optimale Lösung ist.

(g) Graphisch kann man die optimale Lösung des Maximierungsproblems erhalten, indem man die Höhenlinie zum höchsten Niveau findet, welche mindestens ein Element im zulässigen Bereich hat. Dies geschieht durch eine Parallelverschiebung einer Höhenlinie in Richtung steigender Niveaus bis die Höhenlinie den zulässigen Bereich nur noch an einem Eckpunkt oder einer Kante schneidet. Der Eckpunkt $(0.1, 0.75)^T$ ist die optimale Lösung, siehe Abbildung 5.3. Das optimale Mischverhältnis für das Mixgetränk LAP ist demnach

$$x_1 = 0.15,\ x_2 = 0.1,\ x_3 = 0.75.$$

Abbildung 5.3: Graphische Lösung des LP.



Aufgabe 6 (Lineare Optimierung Verständnis)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) Jedes lineare Optimierungsproblem mit $B \neq \{\}$ hat eine optimale Lösung. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Der zulässige Bereich eines linearen Optimierungsproblems hat höchstens endlich viele Eckpunkte. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Der zulässige Bereich eines linearen Optimierungsproblems in Standardform mit n Variablen kann $B = (0, 1)^n$ sein. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Sind $\mathbf{x}_1^* = (2, 2, 2)^T$ und $\mathbf{x}_2^* = (4, 2, 4)^T$ optimale Eckpunkte eines linearen Optimierungsproblems, dann ist auch $(3, 2, 3)^T$ optimal. ☐ wahr ☐ falsch

Lösung:

- Zu (1): Betrachten wir beispielsweise

$$\max x_1$$
$$\text{u.d.N. } x_1 \geq 0.$$

Der zulässige Bereich ist $B = [0, +\infty) \neq \{\}$. Da die Zielfunktion aber auf B nach oben unbeschränkt ist, $\sup_{x_1 \in B} f(x_1) = \sup_{x_1 \in B} x_1 = +\infty$, hat das lineare Optimierungsproblem keine optimale Lösung. Die Aussage (1) ist falsch.

- Zu (2):

> **Satz 10.3.2 - Endlich viele Eckpunkte**
> Der zulässige Bereich eines linearen Optimierungsproblems hat höchstens endlich viele Eckpunkte.

Die Aussage (2) ist wahr.

- Zu (3): Es gilt

> **Satz 10.3.1 - Konvexität und Abgeschlossenheit von B**
> Der zulässige Bereich B eines linearen Optimierungsproblems in Standardform ist eine abgeschlossene und konvexe Menge (oder leer).

Der zulässige Bereich hat die Form $B = \{\mathbf{x} \in [0, +\infty)^n \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Dieser Bereich ist stets abgeschlossen, vgl. Satz 10.3.1 und nicht offen wie $(0,1)^n$. Die Aussage (3) ist falsch.

- Zu (4): Es gilt $(3,2,3)^T = 0.5(2,2,2)^T + 0.5(4,2,4)^T$. Nach Satz 10.3.3 aus Aufgabe 4 ist somit die Aussage (4) wahr.

Aufgabe 7 (Basislösungen I)

Ein Bauunternehmer beabsichtigt zwei Typen von Eigenheimen zu bauen. Er rechnet mit einer Bauzeit von 2 Jahren und damit, dass sich sofort Käufer für fertiggestellte Eigenheime finden.
Folgende Daten wurden in Tausend CHF ermittelt:

pro Eigenheim	Typ A	Typ B
Baukosten 1. Jahr	200	200
Baukosten 2. Jahr	120	200
Verkaufserlöse	330	420

Im 1. Jahr stehen 1'600'000 CHF und im 2. Jahr 1'200'000 CHF zur Verfügung. Ziel ist die Ermittlung eines gewinnmaximalen Bauprogrammes bestehend aus Typ A und/oder Typ B. Wir nehmen an, dass der Bauunternehmer auch nicht-ganzzahlige Häuser bauen kann. Er kann beispielsweise auch halbe Häuser bauen.

(a) Würden ausschliesslich die Eigenheime mit den höchsten Verkaufserlösen produziert werden, wie viele könnten gebaut werden? Wie hoch wäre der resultierende Verkaufserlös?
(b) Formulieren Sie das zugehörige lineare Optimierungsproblem in Standardform und bestimmen Sie die dazugehörige Matrix A und die Vektoren $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$.

(c) Zählen Sie alle Basislösungen des LGS $A\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{b}$ auf.
(d) Welche der in Teilaufgabe (c) gefundenen Basislösungen sind zulässige Basislösungen des LGS $A\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{b}$?
(e) Sei $B=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2 \mid A\mathbf{x}\leq\mathbf{b},\mathbf{x}\geq\mathbf{0}\}$. Zählen Sie alle Eckpunkte von B auf und bestimmen Sie den Eckpunkt mit dem grössten Zielfunktionswert.
(f) Welche Aussage trifft der Hauptsatz der linearen Optimierung über den in (e) gefundenen Eckpunkt mit dem grössten Zielfunktionswert?
(g) (#) Lösen Sie obiges lineares Optimierungsproblem mit Hilfe des Simplexalgorithmus.

Lösung:

(a) Die Eigenheime vom Typ B haben einen höheren Verkaufserlös als die Eigenheime vom Typ A. Würden also nur Eigenheime vom Typ B gebaut werden, so könnten mit dem verfügbaren Geld im 1. Baujahr höchstens $\frac{1600}{200}=8$ Eigenheime gebaut werden und mit dem verfügbaren Geld im 2. Baujahr höchsten $\frac{1200}{200}=6$ Eigenheime gebaut werden. Es könnten also insgesamt 6 Eigenheime vom Typ B gebaut werden. Der resultierende Verkaufserlös wäre $6\cdot 420=2.52$ Millionen CHF.

(b) Sei $x_1\geq 0$ die Anzahl der Eigenheime vom Typ A und $x_2\geq 0$ die Anzahl der Eigenheime vom Typ B. Da im 1. Jahr 1'600'000 CHF zur Verfügung stehen, muss gelten, dass $200x_1+200x_2\leq 1600$ (Kosten in Tausend CHF im 1. Jahr). Im 2. Jahr stehen 1'200'000 CHF zur Verfügung und es muss somit gelten, dass $120x_1+200x_2\leq 1200$ (Kosten in Tausend CHF im 2. Jahr). Die Kosten pro Eigenheim vom Typ A über Jahr 1 und 2 sind $200+120=320$ Tausend CHF und der Verkaufserlös pro Eigenheim vom Typ A ist 330 Tausend CHF. Die Kosten pro Eigenheim vom Typ B über Jahr 1 und 2 sind $200+200=400$ Tausend CHF und der Verkaufserlös pro Eigenheim vom Typ A ist 420 Tausend CHF. Die Zielfunktion (Gewinnfunktion) ist somit gegeben durch $(330-320)x_1+(420-400)x_2=10x_1+20x_2$ (Gewinn in Tausend CHF). Diese Funktion soll maximiert werden. Wir erhalten das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rll} \max & 10x_1+20x_2 & \text{(Gewinn)} \\ \text{u.d.N.} & 200x_1+200x_2\leq 1600 & \text{(Kosten in Tausend CHF im 1. Jahr)} \\ & 120x_1+200x_2\leq 1200 & \text{(Kosten in Tausend CHF im 2. Jahr)} \\ & x_1\geq 0 & \\ & x_2\geq 0. & \end{array}$$

Dieses lineare Optimierungsproblem liegt in Standardform vor mit $A=\begin{pmatrix}200 & 200\\ 120 & 200\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1600\\ 1200\end{pmatrix}$ und $\mathbf{c}=\begin{pmatrix}10\\ 20\end{pmatrix}$, vgl. Definition 10.3.1 aus Aufgabe 4.

(c) Wir betrachten das LGS $A\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{b}$, also

$$\begin{aligned} 200x_1+200x_2+y_1&=1600\\ 120x_1+200x_2+y_2&=1200. \end{aligned}$$

	x_1	x_2	y_1	y_2	**b**	
①	200	200	1	0	1600	
②	120	200	0	1	1200	
③	1	1	$\frac{1}{200}$	0	8	$\frac{1}{200}$①
④	0	80	$-\frac{3}{5}$	1	240	②$-\frac{3}{5}$①
⑤	1	0	$\frac{1}{80}$	$-\frac{1}{80}$	5	③$-\frac{1}{80}$④
⑥	0	1	$-\frac{3}{400}$	$\frac{1}{80}$	3	$\frac{1}{80}$④

Die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems hat den Rang $r = 2$. Eine Lösung dieses Gleichungssystems heisst somit Basislösung, wenn höchstens 2 der 4 Komponenten verschieden von Null sind, bzw. mindestens $4 - 2 = 2$ Komponenten gleich Null sind. Wir bestimmen alle Basislösungen:

- Aus Zeilen ①-② ergibt sich die Basislösung $x_1 = x_2 = 0, y_1 = 1600, y_2 = 1200$.
- Aus Zeilen ③-④ ergibt sich die Basislösung $x_1 = 8, x_2 = 0, y_1 = 0, y_2 = 240$.
- Aus Zeilen ⑤-⑥ ergibt sich die Basislösung $x_1 = 5, x_2 = 3, y_1 = 0, y_2 = 0$.

Wir berechnen nun alle weiteren Basislösungen:
Es fehlt noch eine Basislösung, welche Einheitsvektoren in den zu x_1 und y_1 gehörenden Spalten hat. Ausgehend von Zeilen ⑤-⑥ erhalten wir:

	x_1	x_2	y_1	y_2	**b**	
⑦	1	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{120}$	10	⑤+$\frac{5}{3}$ ⑥
⑧	0	$-\frac{400}{3}$	1	$-\frac{5}{3}$	-400	$-\frac{400}{3}$⑥

- Aus Zeilen ⑦-⑧ ergibt sich die Basislösung $x_1 = 10, x_2 = 0, y_1 = -400, y_2 = 0$.

Es fehlt zudem noch eine Basislösung, welche Einheitsvektoren in den zu x_2 und y_1 gehörenden Spalten hat. Ausgehend von Zeilen ⑤- ⑥ erhalten wir:

	x_1	x_2	y_1	y_2	**b**	
⑨	80	0	1	-1	400	80⑤
⑩	$\frac{3}{5}$	1	0	$\frac{1}{200}$	6	⑥+$\frac{3}{5}$ ⑤

- Aus Zeilen ⑨-⑩ ergibt sich die Basislösung $x_1 = 0, x_2 = 6, y_1 = 400, y_2 = 0$.

Es fehlt nun nur noch eine Basislösung, welche Einheitsvektoren in den zu x_2 und y_2 gehörenden Spalten hat. Ausgehend von Zeilen ⑤ - ⑥ erhalten wir

	x_1	x_2	y_1	y_2	**b**	
⑪	-80	0	-1	1	-400	$-80$⑤
⑫	1	1	$\frac{1}{200}$	0	8	⑥+ ⑤

- Aus Zeilen ⑪-⑫ ergibt sich die Basislösung $x_1 = 0, x_2 = 8, y_1 = 0, y_2 = -400$.

(d)

Definition 10.3.3 - Zulässige Basislösungen

Eine Basislösung des LGS $A\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{b}$ mit $m\times n$-Matrix A und $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$ heisst zulässige Basislösung des LGS $A\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{b}$, wenn zudem $\mathbf{x},\mathbf{y}\geq\mathbf{0}$ gilt.

- Die Basislösung $(0,0,1600,1200)^T$ ist eine zulässige Basislösung.
- Die Basislösung $(8,0,0,240)^T$ ist eine zulässige Basislösung.
- Die Basislösung $(5,3,0,0)^T$ ist eine zulässige Basislösung.
- Die Basislösung $(10,0,-400,0)^T$ ist keine zulässige Basislösung.
- Die Basislösung $(0,6,400,0)^T$ ist eine zulässige Basislösung.
- Die Basislösung $(0,8,0,-400)^T$ ist keine zulässige Basislösung.

(e)

Satz 10.3.5 - Eckpunkte und zulässige Basislösungen.
Sei A eine $m\times n$-Matrix, $\mathbf{b},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ und $B=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\mid A\mathbf{x}\leq\mathbf{b},\mathbf{x}\geq\mathbf{0}\}$. Die Stelle $\mathbf{x}$ ist genau dann ein Eckpunkt von B, wenn $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)^T$ eine zulässige Basislösung des LGS $A\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{b}$ ist.

zulässige Basislösung $(x_1,x_2,y_1,y_2)^T$	Eckpunkt $(x_1,x_2)^T$	Zielfunktionswert $10x_1+20x_2$
$(0,0,1600,1200)^T$	$(0,0)^T$	0
$(8,0,0,240)^T$	$(8,0)^T$	80
$(5,3,0,0)^T$	$(5,3)^T$	110
$(0,6,400,0)^T$	$(0,6)^T$	120

Der Eckpunkt mit dem grössten Zielfunktionswert ist $(0,6)^T$ mit Zielfunktionswert 120.

(f) Laut dem Hauptsatz der linearen Optimierung, Satz 10.3.3 aus Aufgabe 4, ist der Eckpunkt $(0,6)^T$ die optimale Lösung, wenn eine optimale Lösung existiert. Ist die Zielfunktion auf B nach oben unbeschränkt, gilt also $\sup_{\mathbf{x}\in B}f(\mathbf{x})=+\infty$, dann hat das lineare Optimierungsproblem keine optimale Lösung. Aus der Nebenbedingung $200x_1+200x_2\leq 1600$ folgt $x_1+x_2\leq 8$ und wegen $x_1,x_2\geq 0$ somit $x_1\leq 8$ und $x_2\leq 8$. Somit muss auch $f(x_1,x_2)=10x_1+20x_2\leq 10(8)+20(8)=240<+\infty$ gelten. Somit können wir schliessen, dass $(0,6)^T$ die optimale Lösung ist.

(g) (#) Wir betrachten das LGS $A\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{b}$, also

$$\begin{aligned}200x_1+200x_2+y_1&=1600\\120x_1+200x_2+y_2&=1200.\end{aligned}$$

Als dritte Zeile des Gleichungssystems schreiben wir den Zielfunktionswert $c_1=10$ in der zu x_1 gehörenden Spalte und $c_2=20$ in der zu x_2 gehörenden Spalte. Als rechte Seite schreiben wir 0.

	x_1	x_2	y_1	y_2	$\mathbf{b}$
1	200	200	1	0	1600
2	120	200	0	1	1200
3	10	20	0	0	0

Wir überlegen uns, welche der Variablen, die aktuell gleich 0 sind, den grössten (positiven) Einfluss auf den Zielfunktionswert hat. Hier ist dies die Variable x_2, da $c_2=20>c_1=10$. Wir entscheiden uns daher dafür einen Eliminationsschritt mit $j=2$ durchzuführen. Die Zeile wird so gewählt, dass die zulässige Basislösung des ersten Tableaus nicht zu einer unzulässigen

Basislösung im zweiten Tableau umgeformt wird.
Mit $i = 1$ erhalten wir mit $a_{12} = 200$ die neue rechte Seite $b_1 = \frac{1}{a_{12}} 1600 = 8$, $b_2 = 1200 - \frac{a_{22}}{a_{12}} 1600 = -400$. Die resultierende Basislösung ist nicht zulässig. Mit $i = 2$ erhalten wir mit $a_{22} = 200$ die neue rechte Seite $b_2 = \frac{1}{a_{22}} 1200 = 1200$, $b_1 = 1600 - \frac{a_{12}}{a_{22}} 1200 = 400$. Die resultierende Basislösung ist zulässig.
Die gesuchte Zeile, hier $i = 2$, entspricht dabei für gegebenes j stets der Zeile mit dem kleinsten Quotienten b_i/a_{ij}, wobei wir nur die Quotienten mit positivem a_{ij} betrachten müssen. Ist a_{ij} kleiner oder gleich 0, erhalten wir in dieser Zeile nie eine negative rechte Seite. Wir wählen hier also $j = 2$ und Zeile $i = 2$ und erhalten:

	x_1	x_2	y_1	y_2	$\mathbf{b}$	
4	80	0	1	-1	400	1 − 2
5	$\frac{3}{5}$	1	0	$\frac{1}{200}$	6	$\frac{1}{200}$ 2
6	-2	0	0	$-\frac{1}{10}$	-120	3 $-\frac{1}{10}$ 2

Die neue zulässige Basislösung entspricht dem Eckpunkt $(0,6)^T$ mit Zielfunktionswert 120.
Wir stellen fest, dass die Zielfunktionszeile nun keinen positiven Koeffizienten mehr enthält. Der Zielfunktionswert kann also nicht weiter verbessert werden. Das Verfahren endet mit der optimalen Lösung $(0,6)^T$.

Aufgabe 8 (Grippaler Infekt)

Zur Verhütung eines grippalen Infekts während der Klausurvorbereitung will eine Studentin täglich mindestens 600 mg Vitamin C und mindestens 400 mg Kalzium in Form von Tabletten zu sich nehmen. In einer Apotheke sind 2 verschiedene Vitamin C/Kalzium-Tabletten erhältlich, deren Zusammensetzung der nachfolgenden Tabelle entnommen werden kann:

Tablettensorte	1	2
Vitamin C-Gehalt (in mg)	60	30
Kalzium-Gehalt (in mg)	25	50

Eine Tablette der Sorte 1 kostet 0.05 CHF und eine Tablette der Sorte 2 kostet 0.07 CHF. Die Studentin will die täglichen Beschaffungskosten minimieren. Wir nehmen an, dass die Studentin auch nicht-ganzzahlige Tabletten kaufen kann. Sie kann beispielsweise auch eine halbe Tablette kaufen.

(a) Formulieren Sie das Problem als lineares Optimierungsproblem in Standardform und bestimmen Sie die dazugehörige Matrix A und die Vektoren $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$.
(b) Stellen Sie den zulässigen Bereich $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ des linearen Optimierungsproblems aus Teilaufgabe (a) in einem zweidimensionalen Koordinatensystem mit einer x_1- und einer x_2-Achse dar.
(c) Zählen Sie mit Hilfe Ihrer angefertigten Grafik aus Teilaufgabe (b) alle Eckpunkte des zulässigen Bereichs auf.
(d) Zeichnen Sie im Koordinatensystem aus Teilaufgabe (b) zusätzlich Höhenlinien der Zielfunktion zu den Niveaus $y_1 = -70$ und $y_2 = -90$ ein.
(e) Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem mit Hilfe Ihrer angefertigten Grafik aus Teilaufgabe (d).

(f) Zählen Sie alle Basislösungen des LGS $A\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{b}$ auf.

(g) Zählen Sie mit Hilfe der in Teilaufgabe (f) gefundenen Basislösungen alle Eckpunkte des zulässigen Bereichs auf und bestimmen Sie den Eckpunkt mit dem grössten Zielfunktionswert.

(h) Welche Aussage trifft der Hauptsatz der linearen Optimierung über den in Teilaufgabe (g) gefundenen Eckpunkt mit dem grössten Zielfunktionswert?

Lösung:

(a) Sei $x_1 \geq 0$ die Anzahl der Tabletten der Sorte 1 und $x_2 \geq 0$ die Anzahl der Tabletten der Sorte 2. Da die Studentin täglich mindestens 600 mg Vitamin C zu sich nehmen will, muss gelten $60x_1 + 30x_2 \geq 600 \iff 2x_1 + x_2 \geq 20$ (Vitamin C-Gehalt in mg). Da sie zudem täglich mindestens 400 mg Kalzium zu sich nehmen will, muss gelten $25x_1 + 50x_2 \geq 400 \iff x_1 + 2x_2 \geq 16$ (Kalzium-Gehalt in mg). Eine Tablette der Sorte 1 kostet 0.05 CHF und eine Tablette der Sorte 2 kostet 0.07 CHF. Somit ist die Zielfunktion gegeben durch $5x_1 + 7x_2$ (Kosten in 0.01 CHF) und soll minimiert werden. Wir erhalten das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \min \quad & 5x_1 + 7x_2 \\ \text{u.d.N.} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 20 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 16 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

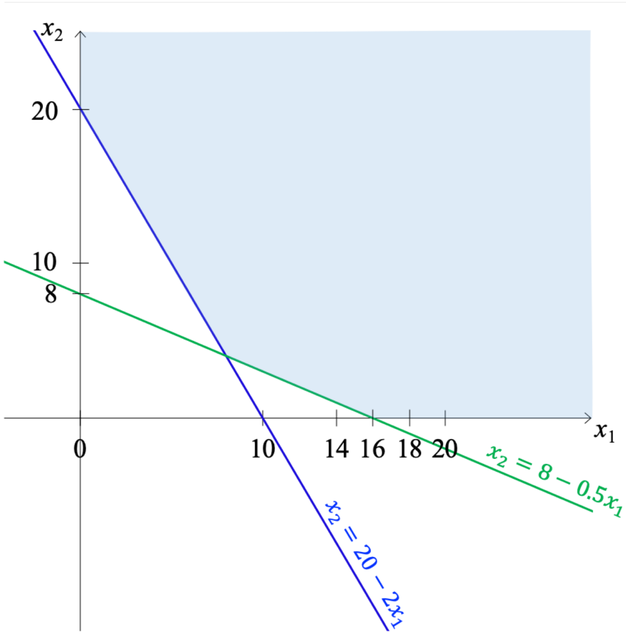
Dieses lineare Optimierungsproblem ist äquivalent zu folgendem linearen Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \max \quad & -5x_1 - 7x_2 \\ \text{u.d.N.} \quad & -2x_1 - x_2 \leq -20 \\ & -x_1 - 2x_2 \leq -16 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Dieses lineare Optimierungsproblem liegt in Standardform vor mit $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -20 \\ -16 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$, vgl. Definition 10.3.1 aus Aufgabe 4.

(b) Um den zulässigen Bereich graphisch darzustellen, betrachten wir die Nebenbedingungen:
Aus $2x_1 + x_2 \geq 20$ folgt $x_2 \geq 20 - 2x_1$. Alle Punkte, die oberhalb oder auf der Geraden $x_2 = 20 - 2x_1$ liegen, befinden sich in der durch $2x_1 + x_2 \geq 20$ beschriebenen Menge.
Aus $x_1 + 2x_2 \geq 16$ folgt $x_2 \geq 8 - 0.5x_1$. Alle Punkte, die oberhalb oder auf der Geraden $x_2 = 8 - 0.5x_1$ liegen, befinden sich in der durch $x_1 + 2x_2 \geq 16$ beschriebenen Menge.
Da zudem $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ gilt, liegen alle zulässigen Lösungen im ersten Quadranten des Koordinatensystems. In der folgenden Abbildung ist der zulässige Bereich graphisch dargestellt:

Abbildung 8.1: Der zulässige Bereich.



(c) Die Eckpunkte (siehe Abbildung 8.1) lassen sich in zwei Fällen direkt ablesen, $(16,0)^T$ und $(0,20)^T$. Wir berechnen nun den dritten Eckpunkt:
Wir berechnen den Schnittpunkt der Geraden $x_2 = 20 - 2x_1$ (von der Nebenbedingung $2x_1 + x_2 \geq 20$) mit der Geraden $x_2 = 8 - 0.5x_1$ (von der Nebenbedingung $x_1 + 2x_2 \geq 16$):

$$x_2 = 20 - 2x_1 \implies x_2 + 0.5x_1 = (20 - 2x_1) + 0.5x_1 = 8 \iff x_1 = 8 \implies (8,4)^T.$$

Der Schnittpunkt liefert also den Eckpunkt $(8,4)^T$.
Wir erhalten also die Eckpunkte $(16,0)^T$, $(0,20)^T$ und $(8,4)^T$.

(d) Wir berechnen zuerst die Höhenlinien der Zielfunktion zu den gegebenen Niveaus und zeichnen diese dann im Koordinatensystem aus Teilaufgabe (b) ein.

$$\underline{\text{Für } y_1 = -70} : -5x_1 - 7x_2 = -70 \Leftrightarrow x_2 = 10 - \frac{5}{7}x_1.$$

Daher ist

$$N_{y_1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 10 - \frac{5}{7}x_1\}.$$

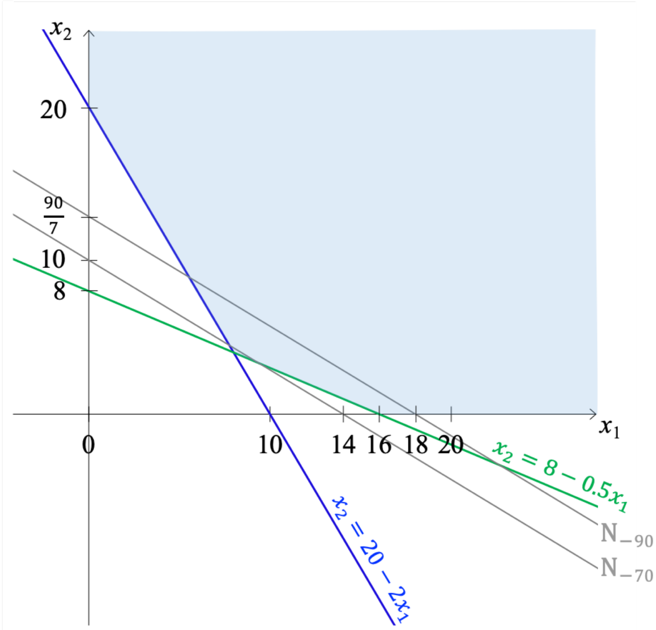
$$\underline{\text{Für } y_2 = -90} : -5x_1 - 7x_2 = -90 \Leftrightarrow x_2 = \frac{90}{7} - \frac{5}{7}x_1.$$

Daher ist

$$N_{y_2} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = \frac{90}{7} - \frac{5}{7}x_1\}.$$

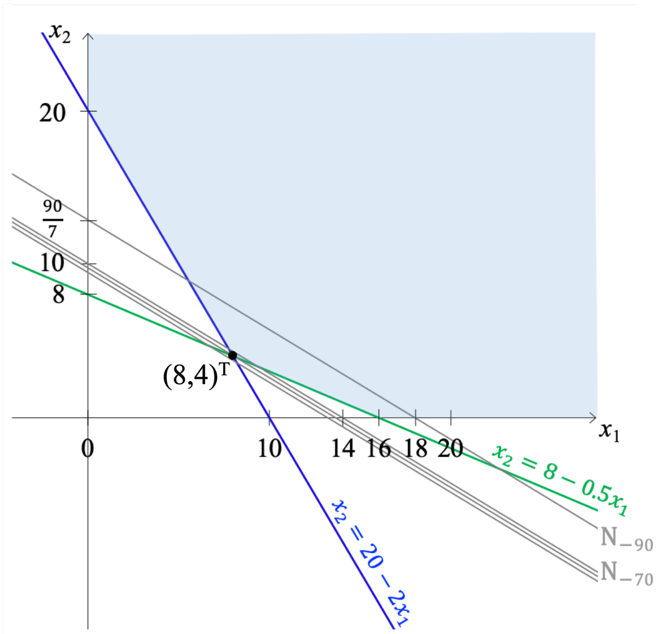
Die Abbildung 8.2 zeigt den zulässigen Bereich mit diesen Höhenlinien.

Abbildung 8.2: Der zulässige Bereich und Höhenlinien zu den Niveaus $y_1 = -70$ und $y_2 = -90$.



(e) Graphisch kann man die optimale Lösung des Maximierungsproblems erhalten, indem man die Höhenlinie zum höchsten Niveau findet, welche mindestens ein Element im zulässigen Bereich hat. Dies geschieht durch eine Parallelverschiebung einer Höhenlinie in Richtung steigender Niveaus bis die Höhenlinie den zulässigen Bereich nur noch an einem Eckpunkt oder einer Kante schneidet. Die optimale Lösung befindet sich genau auf einem Eckpunkt, siehe Abbildung 8.3. Die optimale Lösung des linearen Optimierungsproblem ist $(8,4)^T$.

Abbildung 8.3: Optimale Lösung des LP.



(f) Wir betrachten das LGS $A\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{b}$, also

$$-2x_1 - x_2 + y_1 = -20$$
$$-1x_1 - 2x_2 + y_2 = -16.$$

	x_1	x_2	y_1	y_2	$\mathbf{b}$	
1	-2	-1	1	0	-20	
2	-1	-2	0	1	-16	
3	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	10	$-\frac{1}{2}$ 1
4	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-6	2 $-\frac{1}{2}$ 1
5	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	8	3 $+\frac{1}{3}$ 4
6	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	4	$-\frac{2}{3}$ 4

Die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems hat den Rang $r=2$. Eine Lösung dieses Gleichungssystems heisst somit Basislösung, wenn höchstens 2 der 4 Komponenten verschieden von Null sind, bzw. mindestens $4-2=2$ Komponenten gleich Null sind. Wir bestimmen alle Basislösungen:

- Aus Zeilen 1-2 ergibt sich die Basislösung $x_1 = x_2 = 0, y_1 = -20, y_2 = -16$.
- Aus Zeilen 3-4 ergibt sich die Basislösung $x_1 = 10, x_2 = 0, y_1 = 0, y_2 = -6$.
- Aus Zeilen 5-6 ergibt sich die Basislösung $x_1 = 8, x_2 = 4, y_1 = 0, y_2 = 0$.

Es fehlt noch eine Basislösung, welche Einheitsvektoren in den zu x_1 und y_1 gehörenden Spalten hat. Ausgehend von Zeilen 1-2 erhalten wir:

	x_1	x_2	y_1	y_2	$\mathbf{b}$	
7	0	3	1	-2	12	1 -2 2
8	1	2	0	-1	16	-1 2

- Aus Zeilen 7-8 ergibt sich die Basislösung $x_1 = 16, x_2 = 0, y_1 = 12, y_2 = 0$.

Es fehlt noch eine Basislösung, welche Einheitsvektoren in den zu x_2 und y_1 gehörenden Spalten hat. Ausgehend von Zeilen 1-2 erhalten wir:

	x_1	x_2	y_1	y_2	$\mathbf{b}$	
9	$-\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	-12	1 $-\frac{1}{2}$ 2
10	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	8	$-\frac{1}{2}$ 2

- Aus Zeilen 9-10 ergibt sich eine Basislösung $x_1 = 0, x_2 = 8, y_1 = -12, y_2 = 0$.

Es fehlt noch eine Basislösung, welche Einheitsvektoren in den zu x_2 und y_2 gehörenden Spalten hat. Ausgehend von Zeilen 1-2 erhalten wir:

	x_1	x_2	y_1	y_2	$\mathbf{b}$	
11	2	1	-1	0	20	-1 1
12	3	0	-2	1	24	2 -2 1

- Aus Zeilen ⑪-⑫ ergibt sich die Basislösung $x_1 = 0, x_2 = 20, y_1 = 0, y_2 = 24$.

(g) Die Stelle $\mathbf{x}$ ist genau dann ein Eckpunkt von B, wenn $(x_1,x_2,y_1,y_2)^T$ eine zulässige Basislösung des LGS $A\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{b}$ ist, vgl. Satz 10.3.5 aus Aufgabe 7.
Wir bestimmen also zuerst, welche der in Teilaufgabe (f) gefundenen Basislösungen zulässige Basislösungen sind. Eine Basislösung des LGS $A\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{b}$ ist eine zulässige Basislösung, wenn $\mathbf{x},\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ gilt, vgl. Definition 10.3.3 aus Aufgabe 7. Somit gilt:
- Die Basislösung $(0,0,-20,-16)^T$ ist keine zulässige Basislösung.
- Die Basislösung $(10,0,0,-6)^T$ ist keine zulässige Basislösung.
- Die Basislösung $(8,4,0,0)^T$ ist eine zulässige Basislösung.
- Die Basislösung $(16,0,12,0)^T$ ist eine zulässige Basislösung.
- Die Basislösung $(0,8,-12,0)^T$ ist keine zulässige Basislösung.
- Die Basislösung $(0,20,0,24)^T$ ist eine zulässige Basislösung.

Wir erhalten also:

zulässige Basislösung $(x_1,x_2,y_1,y_2)^T$	Eckpunkt $(x_1,x_2)^T$	Zielfunktionswert $-5x_1-7x_2$
$(8,4,0,0)^T$	$(8,4)^T$	-68
$(16,0,12,0)^T$	$(16,0)^T$	-80
$(0,20,0,24)^T$	$(0,20)^T$	-140

Wir sehen, dass dies genau die Eckpunkte sind, die wir schon in Teilaufgabe (c) graphisch bestimmt haben. Der Eckpunkt mit dem grössten Zielfunktionswert ist $(8,4)^T$ mit Zielfunktionswert -68.

(h) Laut dem Hauptsatz der linearen Optimierung ist der Eckpunkt $(8,4)^T$ die optimale Lösung, wenn eine optimale Lösung existiert. Ist die Zielfunktion auf dem zulässigen Bereich nach oben unbeschränkt, gilt also $\sup_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x}) = +\infty$, dann hat das lineare Optimierungsproblem keine optimale Lösung. Da aber $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ gilt, ist $f(x_1,x_2) = -5x_1 - 7x_2 \leq 0 < +\infty$. Somit können wir schliessen, dass $(8,4)^T$ die optimale Lösung ist, wie wir schon in Teilaufgabe (e) gesehen haben.

Aufgabe 9 (Basislösungen II)

Betrachten Sie das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \max \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{u.d.N. } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(a) Liegt das obige lineare Optimierungsproblem in Standardform vor?

(b) Zählen Sie alle Basislösungen des LGS $A\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{b}$ auf.

(c) Welche der in Teilaufgabe (b) gefundenen Basislösungen sind zulässige Basislösungen des LGS $A\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{b}$?

(d) Sei $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$. Zählen Sie alle Eckpunkte von B auf und bestimmen Sie den Eckpunkt mit dem grössten Zielfunktionswert.

(e) Welche Aussage trifft der Hauptsatz der linearen Optimierung über den in (d) gefundenen Eckpunkt mit dem grössten Zielfunktionswert?

Lösung:

(a) Ja, das lineare Optimierungsproblem liegt in Standardform vor, vgl. Definition 10.3.1 aus Aufgabe 4.

(b) Wir betrachten das LGS $A\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{b}$, also

$$x_1+y_1=10$$
$$4x_1+x_2+y_2=20.$$

	x_1	x_2	y_1	y_2	$\mathbf{b}$	
①	1	0	1	0	10	
②	4	1	0	1	20	
③	1	0	1	0	10	①
④	0	1	-4	1	-20	②$-4$①

Die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems hat den Rang $r=2$. Eine Lösung dieses Gleichungssystems heisst somit Basislösung, wenn höchstens 2 der 4 Komponenten verschieden von Null sind, bzw. mindestens $4-2=2$ Komponenten gleich Null sind. Wir bestimmen alle Basislösungen:

Betrachten wir zuerst die Zeilen ①-②. Wir sehen, dass in den zu x_2, y_1 und y_2 gehörenden Spalten Einheitsvektoren stehen. Wir können deshalb aus den Zeilen ①-② direkt zwei Basislösungen ablesen. Setzen wir x_1 und x_2 gleich Null, so erhalten wir die Basislösung, welche Einheitsvektoren in den zu y_1 und y_2 gehörenden Spalten hat. Setzen wir x_1 und y_2 gleich Null, so erhalten wir die Basislösung, welche Einheitsvektoren in den zu y_1 und x_2 gehörenden Spalten hat.

Betrachten wir nun die Zeilen ③-④. Wir sehen, dass in den zu x_1, x_2 und y_2 gehörenden Spalten Einheitsvektoren stehen. Wir können deshalb aus den Zeilen ③-④ wieder direkt zwei Basislösungen ablesen. Setzen wir y_1 und y_2 gleich Null, so erhalten wir die Basislösung, welche Einheitsvektoren in den zu x_1 und x_2 gehörenden Spalten hat. Setzen wir x_2 und y_1 gleich Null, so erhalten wir die Basislösung, welche Einheitsvektoren in den zu x_1 und y_2 gehörenden Spalten hat.

Wir erhalten somit:

- Aus Zeilen ①-② ergibt sich die Basislösung $x_1=x_2=0, y_1=10, y_2=20$.
- Aus Zeilen ①-② ergibt sich die Basislösung $x_1=0, x_2=20, y_1=10, y_2=0$.
- Aus Zeilen ③-④ ergibt sich die Basislösung $x_1=10, x_2=-20, y_1=0, y_2=0$.
- Aus Zeilen ③-④ ergibt sich die Basislösung $x_1=10, x_2=0, y_1=0, y_2=-20$.

Es fehlt noch eine Basislösung, welche Einheitsvektoren in den zu x_1 und y_1 gehörenden Spalten hat. Ausgehend von Zeilen ③-④ erhalten wir:

	x_1	x_2	y_1	y_2	$\mathbf{b}$	
⑤	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	5	③+$\frac{1}{4}$ ④
⑥	0	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	5	$-\frac{1}{4}$⑥

- Aus Zeilen ⑤-⑥ ergibt sich die Basislösung $x_1=5, x_2=0, y_1=5, y_2=0$.

Es fehlt noch eine Basislösung, welche Einheitsvektoren in den zu x_2 und y_2 gehörenden Spalten hat. Es ist hier aufgrund der linearen Abhängigkeit der Spaltenvektoren unter x_2 und y_2 nicht möglich, eine Basislösung mit $x_2 \neq 0$ und $y_2 \neq 0$ zu erzeugen.

(c) Die in Teilaufgabe (b) gefundenen Basislösungen sind zulässige Basislösungen des LGS $A\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{b}$ wenn $\mathbf{x},\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ gilt, vgl. Definition 10.3.3 aus Aufgabe 7.

- Die Basislösung $(0,0,10,20)^T$ ist eine zulässige Basislösung.
- Die Basislösung $(0,20,10,0)^T$ ist eine zulässige Basislösung.
- Die Basislösung $(10,-20,0,0)^T$ ist keine zulässige Basislösung.
- Die Basislösung $(10,0,0,-20)^T$ ist keine zulässige Basislösung.
- Die Basislösung $(5,0,5,0)^T$ ist eine zulässige Basislösung.

(d) Die Stelle $\mathbf{x}$ ist genau dann ein Eckpunkt von B, wenn $(x_1,x_2,y_1,y_2)^T$ eine zulässige Basislösung des LGS $A\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{b}$ ist, vgl. Satz 10.3.5 aus Aufgabe 7.

zulässige Basislösung $(x_1,x_2,y_1,y_2)^T$	Eckpunkt $(x_1,x_2)^T$	Zielfunktionswert $2x_1+5x_2$
$(0,0,10,20)^T$	$(0,0)^T$	0
$(0,20,10,0)^T$	$(0,20)^T$	100
$(5,0,5,0)^T$	$(5,0)^T$	10

Der Eckpunkt mit dem grössten Zielfunktionswert ist $(0,20)^T$ mit Zielfunktionswert 100.

(e) Laut dem Hauptsatz der linearen Optimierung, Satz 10.3.3 aus Aufgabe 4, ist der Eckpunkt $(0,20)^T$ die optimale Lösung, wenn eine optimale Lösung existiert. Ist die Zielfunktion auf B nach oben unbeschränkt, gilt also $\sup_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x}) = +\infty$, dann hat das lineare Optimierungsproblem keine optimale Lösung. Mit Hilfe der Nebenbedingung kann geschlossen werden, dass $x_1 \leq 10$ und aus $4x_1+x_2 \leq 20$ folgt mit $x_1 \geq 0$, dass $x_2 \leq 20$. Somit muss auch $f(x_1,x_2) = 2x_1+5x_2 \leq 2(10)+5(20) = 120 < +\infty$ gelten. Somit können wir schliessen, dass $(0,20)^T$ die optimale Lösung ist.