Es werden die Aufgaben 1,4,5 und 8 in den Tutorien besprochen.

Aufgabe 1 (Determinante und Fläche eines Parallelogramms)

Die Vektoren $\mathbf{a}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ spannen ein Parallelogramm mit Flächeninhalt S auf.

(a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms S.
(b) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $A = [\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2]$.
(c) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $A = [\mathbf{a}^2, \mathbf{a}^1]$.

Aufgabe 2 (Inverse einer 2×2-Matrix (*))

(a) Leiten Sie eine allgemeine Formel für die Inverse einer 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mit $\det(A) \neq 0$ her.
(b) Nutzen Sie Ihre Formel aus Teilaufgabe (a), um die Inverse der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ zu bestimmen.

Aufgabe 3 (2×2-Matrizen, Orthogonale Matrizen, Determinante)

(a) Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) Die Matrix A ist eine orthogonale Matrix und es gilt $A^{-1} = A^T$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Der Vektor $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})^T$ hat die Länge 1. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Die Zeilenvektoren von A sind paarweise orthogonal und die Spaltenvektoren von A sind paarweise orthogonal. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Die Determinante der Matrix A ist 5. ☐ wahr ☐ falsch

(b) Betrachten Sie die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) B ist genau dann singulär, wenn $\det(B) = 1$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Sei $b_{21} = 0,$ dann ist $\det(B) = b_{11}b_{22}$. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Tauscht man die Spalten von $B,$ bleibt der Betrag der Determinante gleich, aber das Vorzeichen verändert sich. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Multipliziert man eine Spalte von B mit $2,$ vervierfacht sich die Determinante. ☐ wahr ☐ falsch

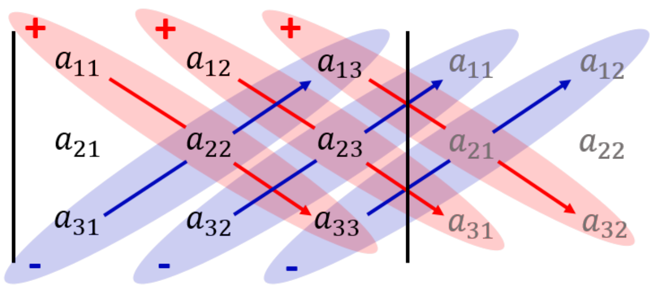
Aufgabe 4 (Volumen eines Parallelotops mit Sarrus)

(a) Nutzen Sie die Definition der Determinante einer $n \times n$-Matrix, um zu zeigen, dass man die Determinante einer 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

als Summe der in Abbildung 4.1 rot schraffierten Produkte abzüglich der blau schraffierten Produkte bestimmen kann. (Diese Rechenvorschrift bezeichnet man auch als Regel von Sarrus.)

Abbildung 4.1: Die Regel von Sarrus



(b) Betrachten Sie nun die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wie gross ist das Volumen des von diesen Vektoren aufgespannten Parallelotops? Benutzen Sie hierfür

(i) den Entwicklungssatz von Laplace,

(ii) die Regel von Sarrus.

(c) Betrachten Sie nun die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wie gross ist das Volumen des von diesen Vektoren aufgespannten Parallelotops?

(i) Berechnen Sie dieses mit Hilfe des Entwicklungssatzes von Laplace.

(ii) Kann man die Regel von Sarrus auf 4×4-Matrizen erweitern?

Aufgabe 5 (Determinante, Rechenregeln)

Wir betrachten die Matrix

$$A = \left[\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3, \mathbf{a}^4\right] = \begin{pmatrix} -2 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 3 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Werte:

(a) $\det(A)$,

(b) $\det(B)$ mit $B = \left[\mathbf{a}^3, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^4, \mathbf{a}^1\right]$,

(c) $\det(\alpha A)$ für $\alpha = 2$,

(d) $\det(A) + \det(D)$ und $\det(A + D)$ mit $D = \left[-\mathbf{a}^1, -\mathbf{a}^2, -\mathbf{a}^3, -\mathbf{a}^4\right]$.

Aufgabe 6 (Determinanten mit Parametern)

Betrachten Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 2-\lambda & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A invertierbar?

(b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A orthogonal?

(c) Berechnen Sie die Determinanten von B, B^T und $4 \cdot B$.

(d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist B regulär?

(e) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\det(C) = 0$?

Aufgabe 7 (Determinante und Rang einer Matrix)

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{R}, b_j \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ gegeben, und es sei bekannt, dass $\det(A) = -12$.
Berechnen Sie

(a) $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$ und

(b) $\operatorname{rang} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 8 (Determinante, Rang, Inverse, LGS)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinanten von A, B und $2A$.
(b) Welche der Matrizen aus (a) sind invertierbar?
(c) Bestimmen Sie $\operatorname{rang}(A)$ und $\operatorname{rang}(B)$.
(d) Wie viele Lösungen hat das LGS $A\mathbf{x} = (1, 1, -2)^T$? Wie viele Lösungen hat das LGS $B\mathbf{x} = (1, 1, -2)^T$?
(e) Wie viele Lösungen hat das LGS $A\mathbf{x} = (1, 2, 3)^T$? Wie viele Lösungen hat das LGS $B\mathbf{x} = (1, 2, 3)^T$?

Aufgabe 9 (Determinanten und LGS)

Gegeben ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -8 \\ 1 & -3 & t \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante für allgemeine $t \in \mathbb{R}$.
(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist A regulär?
(c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat das folgende Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 8x_3 & = & -1 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & tx_3 & = & -2 \end{array}$$

(i) genau eine Lösung
(ii) unendlich viele Lösungen
(iii) keine Lösung?

Aufgabe 10 (Determinante von Inversen und Produkten)

Gegeben seien drei reguläre Matrizen A, B und C der Ordnung n.

(a) Stellen Sie die Inverse der Matrix $F = ABC$ mit Hilfe von A^{-1}, B^{-1} und C^{-1} dar.
(b) Sei nun $\det(A) = \alpha$, $\det(B) = \beta$ und $\det(C) = \gamma$. Berechnen Sie $\det(F^{-1})$, mit $F = ABC$ aus Teilaufgabe (a).
(c) $(*)$ Zeigen Sie mit Hilfe der Determinante, dass die Matrix $C = AB$ genau dann regulär ist, wenn A und B regulär sind.

Aufgabe 11 (Determinante als Flächenveränderung)

Betrachten Sie die lineare Abbildung f mit Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}.$$

Zudem sei $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2\}$. Was ist der Flächeninhalt des Bildes $f(M)$?

Aufgabe 12 ((#) Determinante, Zeilenumformungen, transponierter Matrix)

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 4 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

mit $\det(A) = 92$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) $\det(A^T) = -92.$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $\det \begin{pmatrix} 4 & 9 & 10 \\ 4 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = -92.$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $\det \begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 4 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = -92.$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $\det \begin{pmatrix} 5 & -5 & 2 \\ 4 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 108.$ ☐ wahr ☐ falsch