Name: ______________________________ Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ________________________________

Institut für Operations Research und mathematische Methoden
der Wirtschaftswissenschaften der Universität Zürich

PRÜFUNG IN MATHEMATIK II (BACHELORSTUDIUM)

5. Juni 2009

Zulässige Hilfsmittel: Schreibzeug (keine Taschenrechner)

Prüfungsdauer: 90 Minuten

Es können maximal 40 Punkte erzielt werden, und zwar 10 Punkte pro Aufgabe.

In Teil 1 jeder Aufgabe wird nur nach der Lösung gefragt. Dort wird der Lösungsweg nicht angeschaut, es zählen nur die in die Kästchen eingetragenen Lösungen!

Bei allen anderen Teilaufgaben müssen die angewandte Lösungsmethode bzw. die Begründungen und Argumente deutlich erkennbar sein, die Lösungen sind unmittelbar unter "Platz für Lösung" einzutragen. Die Aufgabenstellung ist genau zu beachten.

Falls der Platz nicht ausreicht, kann die Bearbeitung der Aufgaben auf Zusatzblättern fortgesetzt werden. Ungültige Lösungsversuche sind in jedem Fall durchzustreichen!

(leer lassen)

Aufgabe	1	2	3	4	Summe
Punkte Teil 1					
Punkte Teil 2					

Total	

AUFGABE 1 (10 Punkte)

Teil 1 (4 Punkte): Nur die in die Kästchen eingetragenen Ergebnisse zählen! Der Lösungsweg wird nicht angeschaut. Nebenrechnungen bitte auf Extrablättern durchführen.

(i) Gegeben sind die Matrizen M, N und der Vektor $\underline{u}$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme

a) (falls möglich) das Produkt $MN\underline{u}$ $=$ $\boxed{}$

b) (falls möglich) das Produkt $N^\mathsf{T} N$ $=$ $\boxed{}$

(ii) Es seien P, Q, R reguläre Matrizen der Ordnung n und X, Y unbekannte Matrizen, die den Gleichungen $PXQ = Q^{-1}R$ bzw. $PY = QR$ genügen. Bestimmen Sie

X $=$ $\boxed{}$

Y^{-1} $=$ $\boxed{}$

Teil 2 (6 Punkte): Der Lösungsweg bzw. die Begründung ist ausführlich anzugeben.

(i) Man berechne die Inverse C^{-1} der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(ii) Gegeben sind

eine Matrix A mit 3 Zeilen und 5 Spalten,
eine *reguläre* 3-reihige Matrix B und der Vektor $\underline{0} = (0, 0, 0)^\mathsf{T}$.

Es sei bekannt, dass das homogene lineare Gleichungssystem

$$BA\underline{x} = \underline{0}$$

eine 2-dimensionale Lösungsmenge hat, dabei ist $\underline{x}$ der Vektor der Unbekannten.

Beantworten Sie folgende Fragen und <u>begründen Sie Ihre Antworten</u>:

a) Wieviele Gleichungen und Unbekannte hat dieses System?
b) Ist das inhomogene Gleichungssystem $BA\underline{x} = \underline{b}$ für jede rechte Seite $\underline{b} \in \mathbb{R}^3$ lösbar?
c) Wie gross ist der Rang von A?

PLATZ FÜR LÖSUNG:

AUFGABE 2 (10 Punkte)

Teil 1 (5 Punkte): Nur die in die Kästchen eingetragenen Ergebnisse zählen! Der Lösungsweg wird nicht angeschaut. Nebenrechnungen bitte auf Extrablättern durchführen.

Für einen Parameter $s \in \mathbb{R}$ betrachten wir das lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \\ & & & & & & (1+s)\,x_4 & = & -6\,. \end{array}$$

(i) Bestimmen Sie jeweils <u>alle</u> Werte des Parameters s, für die das LGS

a) keine Lösung hat:

b) eine Lösungsmenge der Dimension 2 hat:

c) eine Lösungsmenge der Dimension 1 hat:

Falls eine Antwort nicht zutrifft, schreiben Sie dort bitte *"nicht möglich"*.

(ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses LGS für $s = 2$.

Teil 2 (5 Punkte): Der Lösungsweg bzw. die Begründung ist ausführlich anzugeben.

(i) Von der Lösungsmenge $L \subset \mathbb{R}^4$ eines homogenen linearen Gleichungssystems in 4 Variablen sei bekannt, dass die Menge

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ein Erzeugendensystem des Vektorraums L ist. Bestimmen Sie eine Basis von L.

(ii) Von den zwei Vektoren $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ sei bekannt, dass sie linear unabhängig sind. Untersuchen Sie, ob dann die Vektoren $\underline{x} = \underline{u} + \underline{v}$ und $\underline{y} = \underline{u} - \underline{v}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden.

PLATZ FÜR LÖSUNG:

AUFGABE 3 (10 Punkte)

Teil 1 (4 Punkte): Nur die in die Kästchen eingetragenen Ergebnisse zählen! Der Lösungsweg wird nicht angeschaut. Nebenrechnungen bitte auf Extrablättern durchführen.

(i) Gegeben sind die Matrix C und ihre Determinante $\det C$ wie folgt:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \\ \varrho & \phi & \psi \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \det C = 2,$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu, \varrho, \phi, \psi$ reelle Elemente sind. Berechnen Sie

(a) den Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \lambda & \varrho & 1 \\ \beta & \mu & \phi & 1 \\ \gamma & \nu & \psi & 1 \end{pmatrix} =$ ☐

(b) die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} \lambda-\alpha & \mu-\beta & \nu-\gamma \\ \lambda & \mu & \nu \\ \varrho & \phi & \psi \end{pmatrix} =$ ☐

(ii) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie die richtige Antwort an:

	wahr	falsch
Die Differenz zweier Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems ist wieder Lösung dieses Systems.		
Ist A eine reguläre $(n \times n)$-Matrix, so ist auch A^{T} regulär.		
Sind A und B reguläre $(n \times n)$-Matrizen und $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$, so hat das Gleichungssystem $(A+B)\underline{x} = \underline{b}$ stets eine eindeutige Lösung.		
Ist A eine $(m \times n)$-Matrix, so ist $A^{\mathsf{T}}(-A)$ eine symmetrische Matrix.		
Ist A eine Matrix mit 4 Zeilen und 3 linear unabhängigen Spalten, so ist das Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ für jedes $\underline{b} \in \mathbb{R}^4$ eindeutig lösbar.		

Hinweis: 5 richtige Antworten ergeben 2 Punkte, 4 richtige Antworten 1 Punkt.

Teil 2 (6 Punkte): Der Lösungsweg bzw. die Begründung ist ausführlich anzugeben.

Wir betrachten die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 32 & 4 & -4 \\ 0 & -16 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 14 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinanten

$$\det A, \quad \det B, \quad \det\left((\tfrac{1}{2}A)^{-1} B \right), \quad \det\left(B^{-1} - BB^{-1} \right).$$

Die angewandten Rechenregeln müssen erkennbar sein!

PLATZ FÜR LÖSUNG:

AUFGABE 4 (10 Punkte)

Teil 1 (4 Punkte): Nur die in die Kästchen eingetragenen Ergebnisse zählen! Der Lösungsweg wird nicht angeschaut. Nebenrechnungen bitte auf Extrablättern durchführen.

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale

(a) $$\int \frac{1}{2}\cos(2x-1)\,dx \quad = \quad \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad +C}$$

(b) $$\int \sqrt{3x+2}\,dx \quad = \quad \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad +C}$$

(c) $$\int x\,e^{1-2x^2}\,dx \quad = \quad \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad +C}$$

d) $$\int \frac{\ln x}{x}\,dx \quad = \quad \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad +C}$$

Teil 2 (6 Punkte): Der Lösungsweg bzw. die Begründung ist ausführlich anzugeben.

(i) Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\int_1^4 \int_1^4 \left(1 + \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right) \, dx\, dy\,.$$

(ii) Sei F definiert durch

$$F(x) = \int_x^4 e^{(-t^2)}\,dt\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Berechnen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ableitung $F'(x)$.

(iii) Seien f und g stetige reelle Funktionen über einem Intervall $[a,b]$. Zeigen Sie

$$\left|\int_a^b (f(x)+g(x))dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx + \int_a^b |g(x)|dx\,.$$

Hinweis: $|\int_a^b h(x)dx| \leq \int_a^b |h(x)|dx$

PLATZ FÜR LÖSUNG:

PLATZ FÜR LÖSUNG: