

Es werden die Aufgaben 2 (1)&(2), 4(a),(d),(f)&(g), 6 und 9 in den Tutorien besprochen.

Aufgabe 1 (Zeilenstufenform, explizite Form)

(a) Beurteilen Sie jeweils die Aussage: „Die folgende Matrix liegt in Zeilenstufenform vor.“

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ☐ wahr ☐ falsch

(b) Geben Sie die führenden Elemente der Matrizen aus Aufgabe (a) an.

(c) Beurteilen Sie jeweils die Aussage: „Die folgende Matrix liegt in expliziter Form vor.“

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ☐ wahr ☐ falsch

(d) Sind die Vektoren $(1,0,0)^T$, $(0,9,0)^T$ und $(3,8,1)^T$ linear unabhängig?

(e) Sind die Vektoren $(1,2,0)$ und $(0,0,1)$ linear unabhängig?

Aufgabe 2 (Gleichungssysteme)

Beurteilen Sie jeweils die Aussage: „Das folgende Gleichungssystem ist ein lineares Gleichungssystem.“

(1)
$$\begin{array}{rcl} 3x & + & 4y = 7 \\ \ln(8)x & + & y = 9 \end{array} \quad \begin{array}{cc} \square & \text{wahr} \quad \square & \text{falsch} \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rcl} \ln(x) & + & 4y = 7 \\ \ln(8)x & + & y = 9 \end{array} \quad \begin{array}{cc} \square & \text{wahr} \quad \square & \text{falsch} \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{rcl} 3x^2 & + & 4y = 7 \\ 8x & + & y = 9 \end{array} \quad \begin{array}{cc} \square & \text{wahr} \quad \square & \text{falsch} \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{rcl} \frac{9}{4}x & + & 4y = 0 \\ e^{\pi x} & + & y = 9 \end{array} \quad \begin{array}{cc} \square & \text{wahr} \quad \square & \text{falsch} \end{array}$$

Aufgabe 3 (Die Koeffizientenmatrix eines LGS)

Bestimmen Sie für folgende lineare Gleichungssysteme die erweiterte Koeffizientenmatrix.

(a)

$$\begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 = 7 \\ 8x_1 + x_2 = 9. \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 = 7 \\ \ln(8)x_1 + x_2 = 9. \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 = 2. \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 7 \\ x_1 + e^2x_2 = 9 \\ \pi x_1 + x_2 + 4x_4 = -\frac{1}{2}. \end{array}$$

(e)

$$\begin{aligned}3x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= 7 \\ \pi x_1 + x_2 + 4x_4 &= -\frac{1}{2} \\ \ln(8)x_1 + x_2 &= 9 \\ x_3 &= 9.\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}3x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= 7 \\ \pi x_1 + x_2 + 4x_4 &= -\frac{1}{2} \\ \ln(8)x_1 + x_2 &= 9 \\ 3 &= 9.\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}3x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= 7 \\ \pi x_1 + x_2 &= -\frac{1}{2} \\ \ln(8)x_1 + x_3 &= 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -9.\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Lösen von LGS in expliziter Form)

Gegeben sind die linearen Gleichungssysteme (a)-(h) in expliziter Form. Stellen Sie für die Gleichungssysteme (a)-(h) die erweiterte Koeffizientenmatrix auf und bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge des LGS.

$$(a) \quad \begin{array}{rcl} x_1 & + 3x_3 & = 1 \\ x_2 + 2x_3 & = 2 \\ 2 & = 2 \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{array}{rcl} x_1 & + x_4 & = 1 \\ x_2 & - x_4 & = 2 \\ x_3 + 4x_4 & = -2 \end{array}$$

$$(c) \quad \begin{array}{rcl} x_1 & + 3x_3 & = 1 \\ x_2 + 2x_3 & = 2 \\ 0 & = 2 \end{array}$$

$$(d) \quad \begin{array}{rcl} x_1 & & = 1 \\ x_2 & & = 2 \\ x_3 & & = -2 \end{array}$$

$$(e) \quad \begin{array}{rcl} x_1 & + 4x_3 & = 5 \\ x_2 - x_3 & = 2 \end{array}$$

$$(f) \quad \begin{array}{rcl} x_1 & - 4x_3 + x_4 + 2x_5 & = 0 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 7x_5 & = 0 \end{array}$$

$$(g) \quad \begin{array}{rcl} x_1 & + x_4 & = 1 \\ x_2 & - x_4 - 3x_5 & = 0 \\ x_3 + 4x_4 + \pi x_5 & = -2 \end{array}$$

$$(h) \quad \begin{array}{rcl} x_1 & + 3x_5 - x_6 + 2x_7 & = 0 \\ x_2 & - 4x_5 + 7x_6 + 9x_7 & = 0 \\ x_3 & + 9x_5 + 3x_6 + 4x_7 & = 0 \\ x_4 + 2x_5 + 8x_6 - 6x_7 & = 0 \end{array}$$

(i) Entscheiden Sie, welche der Gleichungssysteme (a)-(h) äquivalent sind.

Aufgabe 5 (Von der Lösungsmenge zum LGS)

Finden Sie zu jeder der folgenden Mengen ein LGS, das diese als Lösungsmenge besitzt.

(a)

$$\mathbb{L} = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

(b)

$$\mathbb{L} = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

(c)

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 6 (LGS, Eliminationsverfahren)

In einer Klausur war das folgende lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + 2x_3 & = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 & = 4 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 & = 8. \end{array}$$

Studentin A löste die Aufgabe indem sie in jedem Tableau nur eine Umformung machte. Der Student B versuchte mehrere Umformungen im gleichen Tableau zu machen, um Zeit zu sparen. Sie erhielten folgende Ergebnisse:

Studentin A					
	x_1	x_2	x_3	\mathbf{b}	
①	1	0	2	1	
②	2	4	6	4	
③	1	4	3	8	
④	1	0	2	1	
⑤	0	4	2	2	② - 2①
⑥	1	4	3	8	
⑦	1	0	2	1	
⑧	0	4	2	2	
⑨	0	4	1	7	⑥ - ④
⑩	1	0	2	1	
⑪	0	4	2	2	
⑫	0	0	-1	5	⑨ - ⑧
⑬	1	0	2	1	
⑭	0	1	0.5	0.5	$\frac{1}{4}$ ⑪
⑮	0	0	-1	5	
⑯	1	0	2	1	
⑰	0	1	0	3	⑭ + 0.5⑮
⑱	0	0	-1	5	
⑲	1	0	0	11	⑯ + 2⑱
⑳	0	1	0	3	
㉑	0	0	-1	5	
㉒	1	0	0	11	
㉓	0	1	0	3	
㉔	0	0	1	-5	(-1)㉑

Student B					
	x_1	x_2	x_3	\mathbf{b}	
①	1	0	2	1	
②	2	4	6	4	
③	1	4	3	8	
④	1	0	2	1	
⑤	0	4	2	2	② - 2①
⑥	0	4	1	7	③ - ①
⑦	1	0	2	1	
⑧	0	0	1	-5	⑤ - ⑥
⑨	0	0	-1	5	⑥ - ⑤
⑩	1	0	0	11	⑦ - 2⑧
⑪	0	0	1	-5	
⑫	0	0	0	0	⑨ + ⑧

Studentin A erhielt die Lösungsmenge $\mathbb{L}_A = \{(11, 3, -5)^T\}$.

Student B erhielt aus dem Endtableau die Gleichungen $x_1 = 11, x_3 = -5$ und mit $x_2 = t$ die Lösungsmenge $\mathbb{L}_B = \{(11, 0, -5)^T + t(0, 1, 0)^T \mid t \in \mathbb{R}\}$.

- Zeigen Sie, dass der Vektor der Lösungsmenge \mathbb{L}_A eine Lösung des LGS ist und geben Sie einen Vektor aus \mathbb{L}_B an, der keine Lösung des LGS darstellt.
- In welchen Zeilen hat Student B einen Fehler gemacht?
- Wie kann Studentin A den angegebenen Lösungsweg abkürzen, ohne den Fehler des Studenten B zu begehen?

Aufgabe 7 (Ein kleines Algebra-Rätsel)

Gesucht sind diejenigen Zahlen, welche, eingetragen in die Kästchen, die horizontalen und vertikalen Gleichungen gleichzeitig lösen:

$$\begin{array}{rclcl}
 \square & + & \square & = & 8 \\
 + & & + & & \\
 \square & - & \square & = & 6 \\
 \parallel & & \parallel & & \\
 13 & & 8 & &
 \end{array}$$

- (a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, um die 4 Unbekannten zu finden.
 (b) Lösen Sie dieses Gleichungssystem nur mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen.

Aufgabe 8 (Investment Planung)

Ein Fondsmanager muss ein Kapital von CHF 200'000 anlegen. Bei den drei ihm zur Verfügung stehenden Fonds wird eine jährliche Rendite von 10% für Fonds 1, 7% für Fonds 2 bzw. 8% für Fonds 3 erwartet. Das Kapital soll dabei einen jährlichen Ertrag von CHF 16'000 erzielen. Ausserdem soll genau ein Drittel, der insgesamt in die Fonds 2 und 3 fliessenden Geldmenge, in den ersten Fonds investiert werden. Wie kann unter diesen Umständen das Kapital auf die drei Fonds verteilt werden, um die gestellten Forderungen einzuhalten?

Aufgabe 9 (Elementare Zeilenumformungen)

Bringen Sie folgende lineare Gleichungssysteme mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen in explizite Form und bestimmen Sie anschliessend deren Lösungsmengen:

(a)

$$\begin{array}{l}
 3x_1 + 4x_2 = 7 \\
 8x_1 + 2x_2 = 9
 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 8 \\
 2x_1 & + & 9x_2 & + & 14x_3 & = & 25 \\
 5x_1 & + & 12x_2 & + & 18x_3 & = & 39
 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{l}
 x_1 + 2x_3 = 1 \\
 x_1 = 2 \\
 x_2 - x_3 = 3
 \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\
 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 8 \\
 3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 3
 \end{array}$$

(e)

$$\begin{array}{rclcl}
 4x_1 & + & x_2 & - & 4x_4 & = & 24 \\
 -4x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -23 \\
 & & 4x_1 & + & 3x_2 & = & 26
 \end{array}$$

(f) Bestimmen Sie zu jedem der LGS die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen LGS.

Aufgabe 10 (Eliminationsverfahren)

Ermitteln Sie mit Hilfe des Eliminationsverfahrens die Lösungsmenge der folgenden Gleichungssysteme:

$$(a) \begin{array}{rrrrr} x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & -6 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 13x_3 & = & -17 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & -9 \end{array}$$

$$(b) \begin{array}{rrrrr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 4 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$(c) \begin{array}{rrrrrr} 2x_1 & + & x_2 & + & 36x_3 & + & 5x_4 & = & 13 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & + & 37x_3 & + & 15x_4 & = & 11 \\ 3x_1 & + & \frac{13}{2}x_2 & + & 89x_3 & + & \frac{5}{2}x_4 & = & \frac{69}{2} \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

$$(d) \begin{array}{rrrrrr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & + & 8x_4 & = & -11 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & -7 \end{array}$$

$$(e) \begin{array}{rrrrr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 7x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & + & 8x_4 & = & 10 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & - & 5x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 4 \end{array}$$

(f) Bestimmen Sie zu jedem der LGS aus den Teilaufgaben (a)-(e) die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen LGS.