Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät der Universität Zürich
Professur Mathematik für Ökonomen

Prüfung zur Vorlesung Mathematik II Frühlingssemester 2014
Musterlösungen

26. Mai 2014

AUFGABE 1

Aufgabe 1.1

Mit Hilfe der Substitution $u = x^3 + 1$, $du = 3x^2dx$ folgt

$$\int_0^1 \frac{6x^2}{(x^3+1)^3}\, dx = \int_{u(0)=1}^{u(1)=2} \frac{2\ du}{u^3} = 2\left[-\frac{1}{2}u^{-2}\right]_1^2 = \left[-\frac{1}{u^2}\right]_1^2 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}.$$

Aufgabe 1.2

$$\int_0^1\int_0^1 x\, e^{x+y}\ dx\, dy = \left(\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\ \underbrace{e^x}_{v'}\ dx\right)\cdot\left(\int_0^1 e^y\ dy\right) = \left(\Big[\underbrace{xe^x}_{uv}\Big]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{1\cdot e^x}_{u'v}\ dx\right)\cdot\left(\Big[e^y\Big]_0^1\right)$$

$$= \left(\Big[xe^x - e^x\Big]_0^1\right)\cdot\left(\Big[e^y\Big]_0^1\right) = \underbrace{\Big(e - e - (-e^0)\Big)}_{=e^0=1}\cdot\Big(e - e^0\Big) = e - e^0 = e - 1$$

Aufgabe 1.3

$$\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin(x)}_{u}\underbrace{\cos(x)}_{v'}\, dx \overbrace{=}^{\substack{v=\sin x\\ u'=\cos x}} \Big[\underbrace{\sin^2(x)}_{uv}\Big]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(x)}_{u'}\ \underbrace{\sin(x)}_{v}\, dx$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\ \cos(x)\, dx = \Big[\sin^2(x)\Big]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\ \cos(x)\, dx = \frac{1}{2}\Big[\sin^2(x)\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}(0-0) = 0$$

Alternativ kann diese Aufgabe mit Hilfe der Substitution $u = \sin(x)$, $du = \cos(x)dx$ gelöst werden und ergibt ebenfalls

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\ \cos(x)\, dx = \int_{u(-\pi)}^{u(\pi)} u\, du = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_{\sin(-\pi)=0}^{\sin(\pi)=0} = 0.$$

AUFGABE 2

(i) Mit Hilfe des Gauss'schen Algorithmus für das LGS $\lambda_1\underline{u} + \lambda_2\underline{v} + \lambda_3\underline{w} = \underline{b}$ erhalten wir:

$$
\begin{array}{rrr|ll}
1 & 0 & -1 & 1 & \\
0 & -1 & 5 & -1 & \\
-2 & 0 & 1 & 1 & +\,2Z_1 \\
4 & -2 & 3 & \alpha & -\,4Z_1 \\
\hline
1 & 0 & -1 & 1 & \\
0 & 1 & -5 & 1 & \\
0 & 0 & -1 & 3 & \cdot(-1) \\
0 & -2 & 7 & \alpha-4 & +\,2Z_2 \\
\hline
1 & 0 & -1 & 1 & \\
0 & 1 & -5 & 1 & \\
0 & 0 & 1 & -3 & \\
0 & 0 & -3 & \alpha-2 & +\,3Z_3 \\
\hline
1 & 0 & -1 & 1 & \\
0 & 1 & -5 & 1 & \\
0 & 0 & 1 & -3 & \\
0 & 0 & 0 & \alpha-11 &
\end{array}
$$

Das LGS ist nur dann lösbar, wenn $r(\underline{u}\ \underline{v}\ \underline{w}\ \underline{b}) = r(\underline{u}\ \underline{v}\ \underline{w})$ und somit wenn $\alpha = 11$ ist: Die letzte Zeile verschwindet und das übrig bleibende System von 3 Gleichungen und 3 Unbekannten $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ist eindeutig lösbar. In diesem Fall kann der Vektor $\underline{b}$ als Linearkombination der anderen 3 Vektoren geschrieben werden.

(ii) Aus dem letzten Tableau:

$$
\begin{array}{rrr|ll}
1 & 0 & -1 & 1 & +\,Z_3 \\
0 & 1 & -5 & 1 & +\,5Z_3 \\
0 & 0 & 1 & -3 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & -2 & \\
0 & 1 & 0 & -14 & \\
0 & 0 & 1 & -3 &
\end{array}
\qquad \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -14, \lambda_3 = -3
$$

$\Rightarrow \underline{b} = -2\underline{u} - 14\underline{v} - 3\underline{w}$.

(iii) Das Vektorsystem $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{b}\}$ ist linear unabhängig genau dann, wenn $r(\underline{u}\ \underline{v}\ \underline{w}\ \underline{b}) = 4$. Der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix in Teilaufgabe (i) muss also maximal sein. Aus dem letzten Tableau eben dieser Teilaufgabe (i) lässt sich ablesen, dass dies für $\alpha \neq 11$ der Fall ist.

AUFGABE 3
Aufgabe 3.1

(i) Nur eine reguläre quadratische Matrix besitzt eine Inverse. Die quadratische Matrix C der Ordnung 3 ist genau dann regulär, wenn $r(C) = 3$ bzw. $\det C \neq 0$.

Wir verzichten auf einen vorhergehenden Test auf Regularität von C. Sollte das Inversen-Verfahren mit Gauss abbrechen, ist $r(C) < 3$ und die Inverse C^{-1} existiert nicht.

-2	1	-1	1	0	0	$+Z_2$
1	-1	1	0	1	0	
-1	1	-2	0	0	1	$+Z_2$
-1	0	0	1	1	0	
1	-1	1	0	1	0	$+Z_1$
0	0	-1	0	1	1	
-1	0	0	1	1	0	
0	-1	1	1	2	0	$+Z_3$
0	0	-1	0	1	1	
-1	0	0	1	1	0	$\cdot(-1)$
0	-1	0	1	3	1	$\cdot(-1)$
0	0	-1	0	1	1	$\cdot(-1)$
1	0	0	-1	-1	0	
0	1	0	-1	-3	-1	
0	0	1	0	-1	-1	

Aus dem letzten Tableau (links explizite Diagonal-Form) können wir nun ablesen:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Die Determinante $\det C$ können wir mit Hilfe von Teilaufgabe (i) berechnen: Da nur die Addition eines Vielfachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte) die Determinante nicht verändert, verwenden wir die linke Seite des zweitletzten Tableaus zur Berechnung der Determinante

$$\det C = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1.$$

(iii) Für $f(\underline{x}) = \underline{x}^T C \underline{x}$ gilt bekanntlich (da $C = C^T$ symmetrisch ist) $\operatorname{grad} f(\underline{x}) = 2C\underline{x}$ und für die Hesse'sche Matrix $H_f(\underline{x}) = 2C$. Um zu entscheiden, ob f konkav oder konvex ist, müssen wir die Matrix

$$H = 2C = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

auf negative resp. positive (Semi-)Definitheit untersuchen. Dazu betrachten wir die Hauptabschnitts-Determinanten von H:

- $\det H^{[2]} = -4 < 0$,
- $\det H^{[1]} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (-4) \cdot (-2) - 2 \cdot 2 = 4 > 0$,
- $\det H^{[0]} = \det H = \det 2C = 2^3 \det C = 8 \cdot (-1) = -8 < 0$.

Somit ist H negativ definit und f konkav.
Hier könnte auch direkt mit C statt $H = 2C$ gearbeitet werden, der positive Faktor 2 ändert nichts an der Definitheit einer Matrix bzw. an der Konvexität/Konkavität von f.

Aufgabe 3.2
Für (2×2)-Matrizen kann die Aussage direkt gezeigt werden:
Eine symmetrische, reguläre (2×2)-Matrix B hat die Form

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \text{ mit } \det B = ac - b^2 \neq 0.$$

Mit der Adjungierten-Formel für die Inverse erhalten wir

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} B_{ad} = \frac{1}{ac - b^2} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

und sehen, dass B^{-1} offensichtlich wieder symmetrisch ist. $\square$

Der Beweis für *allgemeine* $(n \times n)$-Matrizen kann wie folgt geführt werden:
"B symmetrisch" bedeutet, dass $B = B^T$ und aus der Regularität von B folgt, dass die Inverse B^{-1} von B existiert. Weil für reguläre $(n \times n)$-Matrizen A immer gilt, dass $(A^{-1})^T = \left(A^T\right)^{-1}$, können wir unter Verwendung von $B = B^T$ also schreiben:

$$B^{-1} = \left(B^T\right)^{-1} = \left(B^{-1}\right)^T$$

$B^{-1} = (B^{-1})^T$ bedeutet wiederum, dass B^{-1} symmetrisch ist. $\square$

AUFGABE 4

4.1

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-2x-1}{x^2} = 2$$

Wir wenden zweimal die Regel von de L'Hospital an, da das Einsetzen von $x=0$ jeweils den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ liefert.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-2x-1}{x^2} &\overbrace{=}^{H} \lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-2x-1)'}{(x^2)'} = \\ = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}-2}{2x} &\overbrace{=}^{H} \lim_{x\to 0} \frac{(2e^{2x}-2)'}{(2x)'} = \\ = \lim_{x\to 0} \frac{4e^{2x}}{2} &= 2. \end{aligned}$$

4.2

w	f
	×
×	
×	
×	

Die Vektoren $\underline{v}^1, \underline{v}^2, \underline{v}^3$ sind Lösungen des gegebenen Gleichungssystems (Nachprüfen durch Einsetzen).
Die Zeilen der zugehörigen Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sind offenbar linear unabhängig. Somit gilt:
$r(A) = 2$ und $\dim L = n - r(A) = 5 - 2 = 3 \Rightarrow L$ ist ein dreidimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^5$ und jede Basis von L enthält 3 linear unabhängige Lösungsvektoren.

- Die erste Aussage ist falsch: X enthält nicht genügend viele Lösungsvektoren.
- Die zweite Aussage ist richtig, da $Y \subset L$ und linear unabhängig ist (aus $\lambda_1 \cdot \underline{v}^1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}^2 + \lambda_3 \cdot \underline{v}^3 = \underline{0}$ folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ als einzige Lösung). Y ist somit ein Erzeugendensystem und sogar eine Basis von L.
- Es gilt: $\underline{v}^2 \neq \underline{0}$, $\underline{v}^3 \neq \underline{0}$ und $\underline{v}^2$ ist offensichtlich kein Vielfaches von $\underline{v}^3$. Z ist also linear unabhängig.
- W ist ein Unterraum von L, denn es gilt das Unterraumkriterium: $W \subset L, W \neq \emptyset$ da $\underline{0} \in W$, $\lambda_1\underline{v}^2 + \lambda_2\underline{v}^2 = (\lambda_1+\lambda_2)\underline{v}^2 \in W$ und $\lambda_1 \cdot (\lambda\underline{v}^2) = (\lambda_1 \cdot \lambda)\underline{v}^2 \in W$.

4.3

$$B^T A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Mit

$$B^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir durch Multiplizieren der Zeilen von B^T mit den Spalten von A das Ergebnis.

Aufgabe 4.4

(a) $\boxed{(\underline{x}^*)^T = (2, -5, -4, 3)}$

Da A^{-1} existiert, gilt $A\underline{x}^* = \underline{b} \Leftrightarrow A^{-1}A\underline{x}^* = A^{-1}\underline{b} \Leftrightarrow \underline{x}^* = A^{-1}\underline{b}$.

$$\underline{x}^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) $\boxed{\det P = -\frac{8}{81}}$

$$\begin{aligned} \det A^{-1} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -8 \\ \det P &= \det\left(\frac{1}{3}A^{-1}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \det A^{-1} = -\frac{8}{81} \end{aligned}$$

(c) $\boxed{\det Q = \frac{1}{64}}$

$$\begin{aligned} \det Q &= \det(AA^T) = \det A \cdot \det A^T = \det A \cdot \det A \\ &= (\det A)^2 = \left(\frac{1}{\det A^{-1}}\right)^2 = \left(\frac{1}{-8}\right)^2 = \frac{1}{64} \end{aligned}$$

4.5 $\boxed{D = B^{-1}AC^{-1}A^{-1}}$

$$\underline{y} = A^{-1}B\underline{x} \quad \Leftrightarrow \quad A\underline{y} = B\underline{x} \quad \Leftrightarrow \quad B^{-1}A\underline{y} = \underline{x} \qquad (*)$$

$$\underline{z} = AC\underline{y} \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}\underline{z} = C\underline{y} \quad \Leftrightarrow \quad C^{-1}A^{-1}\underline{z} = \underline{y} \qquad (**)$$

$$\underline{x} \overset{(*)}{=} B^{-1}A\underline{y} \overset{(**)}{=} \underbrace{B^{-1}AC^{-1}A^{-1}}_{=D}\,\underline{z}$$