Serie 12 - Musterlösungen ab 13.05.2019 FS 2019

Aufgabe 1 (lokale Extrema)

Sei f eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion in n Variablen mit offenem und konvexem Definitionsbereich D. Die Hesse-Matrix der Funktion f an der Stelle $\mathbf{x}^0$ ist $H_f(\mathbf{x}^0)$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) Die Funktion f hat an der Stelle $\mathbf{x}^0$ genau dann ein lokales Minimum, wenn die Funktion $(-f)$ an der Stelle $\mathbf{x}^0$ ein lokales Maximum hat. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Ist $\mathbf{x}^0$ eine lokale Minimalstelle von f, so ist $H_f(\mathbf{x}^0)$ positiv semidefinit. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Ist $H_f(\mathbf{x}^0)$ negativ semidefinit und $\nabla f(\mathbf{x}^0) = 0$, dann liegt an der Stelle $\mathbf{x}^0$ ein globales Extremum vor. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Ist $H_f(\mathbf{x}^0)$ negativ semidefinit für alle $\mathbf{x}^0 \in D$ und gilt $\nabla f(\mathbf{x}^0) = 0$, dann liegt an der Stelle $\mathbf{x}^0$ ein globales Extremum vor. ☐ wahr ☐ falsch

Lösung:

- Zu (1):

  Satz 9.4.3 - Min-Max Dualität
  Die reelle Funktion $f : D \to Z$ in n Variablen hat genau dann ein lokales Maximum an der Stelle $\mathbf{x}^0 \in D$, wenn die reelle Funktion $-f$ an der Stelle $\mathbf{x}^0$ ein lokales Minimum hat. Die reelle Funktion $f : D \to Z$ in n Variablen hat genau dann ein lokales Minimum an der Stelle $\mathbf{x}^0 \in D$, wenn $-f$ an der Stelle $\mathbf{x}^0$ ein lokales Maximum hat.
  Hat f ein globales Maximum, gilt $\min_{\mathbf{x}\in D}(-f(\mathbf{x})) = -\max_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$. Hat f ein globales Minimum, gilt $\max_{\mathbf{x}\in D}(-f(\mathbf{x})) = -\min_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$.

  Nach Satz 9.4.3 ist die Aussage (1) wahr.
- Zu (2):

  Satz 9.4.5 - Notwendige Kriterien lokaler Extrema zweiter Ordnung
  Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to Z$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion in n Variablen und $\mathbf{x}^0 \in D$ eine stationäre Stelle, d.h. mit $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$ und Hesse-Matrix $H_f(\mathbf{x}^0)$. Dann gilt:
  - f hat in $\mathbf{x}^0$ eine lokales Minimum $\Rightarrow H_f(\mathbf{x}^0)$ ist positiv semidefinit;
  - f hat in $\mathbf{x}^0$ eine lokales Maximum $\Rightarrow H_f(\mathbf{x}^0)$ ist negativ semidefinit.

  Nach Satz 9.4.5 ist die Aussage (2) wahr.
- Zu (3): Es gilt

Satz 9.4.6 - Globale Extrema konvexer und konkaver Funktionen
Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene, konvexe Menge und $f : D \to Z$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion in n Variablen.
- Ist f konvex, dann besitzt f in $\mathbf{x}^0 \in D$ ein globales Minimum genau dann, wenn $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$ gilt.
- Ist f konkav, dann besitzt f in $\mathbf{x}^0 \in D$ ein globales Maximum genau dann, wenn $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$ gilt.

Nach Satz 9.4.6 besitzt also f in $\mathbf{x}^0$ ein globales Extremum genau dann, wenn $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$ gilt und zudem f konvex oder konkav ist. Damit f konvex oder konkav ist, muss gelten, dass $H_f(\mathbf{x}^0)$ positiv semidefinit oder negativ semidefinit für alle $\mathbf{x}^0 \in D$ ist, vgl. Satz 9.3.7 aus Serie 11. Dies ist hier aber nicht gegeben. Die Aussage (3) ist falsch.

- Zu (4): Ist $H_f(\mathbf{x}^0)$ negativ semidefinit für alle $\mathbf{x}^0 \in D$, so ist nach Satz 9.3.7 aus Serie 11 die Funktion f konkav. Da zudem $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$ gilt, besitzt f in $\mathbf{x}^0 \in D$ ein globales Maximum, vgl. Satz 9.4.6. Die Aussage (4) ist wahr.

Aufgabe 2 (Extremalstellen für zwei Funktionen in 3 Variablen)

Gegeben seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{3}x_1^3 - 3x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 - x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4 \text{ und} \\ g(\mathbf{x}) &= x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 5x_1. \end{aligned}$$

(a) Finden Sie die stationären Stellen von f und klassifizieren Sie diese: Liegt ein lokales Minimum, lokales Maximum oder ein Sattelpunkt vor?

(b) Finden Sie die stationären Stellen von g und klassifizieren Sie diese: Liegt ein lokales Minimum, lokales Maximum oder ein Sattelpunkt vor?

Lösung:

(a) Um die stationären Stellen der Funktion f zu bestimmen, lösen wir $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Es gilt

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 - 1 \\ -6x_2 + 2x_3 + 2 \\ -2x_3 + 2x_2 + 2 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$:
Wenden wir die Substitutionsmethode aus Serie 1 an, erhalten wir die stationären Stellen von f:
$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Um zu bestimmen, ob es sich dabei um Minimal- oder Maximalstellen handelt, wenden wir Satz 9.4.2 aus Serie 11 an. Es gilt:

$$H_f(\mathbf{x}^0) = \left(f_{x_ix_j}\right)_{ij} = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{x}^0) & f_{x_1x_2}(\mathbf{x}^0) & f_{x_1x_3}(\mathbf{x}^0) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{x}^0) & f_{x_2x_2}(\mathbf{x}^0) & f_{x_2x_3}(\mathbf{x}^0) \\ f_{x_3x_1}(\mathbf{x}^0) & f_{x_3x_2}(\mathbf{x}^0) & f_{x_3x_3}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1^0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Wir überprüfen die Hesse-Matrix an den stationären Stellen auf ihre Definitheit mit Hilfe des Hauptunterdeterminantenkriteriums, vgl. Satz 9.3.6 aus Serie 11. Es gilt

$$H_f(\mathbf{x}^1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \text{ mit } \begin{array}{l} \det(U_1) = 2 \\ \det(U_2) = -12 \\ \det(U_3) = \det(H_f(\mathbf{x}^1)) = 16. \end{array}$$

Da $\det(U_2)$ negativ ist, kann $H_f(\mathbf{x}^1)$ weder positiv noch negativ semidefinit sein. Es folgt, dass $H_f(\mathbf{x}^1)$ indefinit ist und somit f einen Sattelpunkt an der Stelle $\mathbf{x}^1 = (1,1,2)^T$ besitzt.
Es gilt

$$H_f(\mathbf{x}^2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \text{ mit } \begin{array}{l} \det(U_1) = -2 \\ \det(U_2) = 12 \\ \det(U_3) = \det(H_f(\mathbf{x}^2)) = -16 \end{array}$$

Die Matrix $H_f(\mathbf{x}^2)$ ist also negativ definit. Somit hat f an der Stelle $\mathbf{x}^2 = (-1,1,2)^T$ ein lokales Maximum.

(b) Um die stationären Stellen der Funktion g zu bestimmen, lösen wir $\nabla g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Es gilt

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 - 5 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen $\nabla g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$:
Wenden wir die Substitutionsmethode aus Serie 1 an, erhalten wir die stationäre Stelle von g:

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Um zu bestimmen, ob es sich dabei um Minimal- oder Maximalstellen handelt, wenden wir wieder Satz 9.4.2 aus Serie 11 an. Es gilt

$$H_g(\mathbf{x}^1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ mit } \begin{array}{l} \det(U_1) = 2 \\ \det(U_2) = 1 \\ \det(U_3) = \det(H_g(\mathbf{x}^1)) = 1. \end{array}$$

Somit ist $H_g(\mathbf{x}^1)$ positiv definit, vgl. Satz 9.3.6 aus Serie 11. Die Funktion g hat an der Stelle $\mathbf{x}^1 = (10,-10,-5)^T$ ein lokales Minimum.

Aufgabe 3 (Optimierung, Anwendung)

Eine Firma stellt drei Produkte P_1, P_2 und P_3 her. Werden x_1, x_2 und x_3 Mengeneinheiten der jeweiligen Produkte hergestellt, entstehen Kosten von

$$k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + 5, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T,$$

wobei Q durch

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Die Produkte können zu Marktpreisen

$$p_1 = 80 \text{ CHF/Stück}, \; p_2 = 100 \text{ CHF/Stück}, \; p_3 = 160 \text{ CHF/Stück}$$

abgesetzt werden. Mit $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)^T$ kann die Gewinnfunktion als $g(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T\mathbf{x} - k(\mathbf{x})$ bestimmt werden, welche den zu erwartenden Gewinn bei Produktion der Mengen x_1, x_2 und x_3 beschreibt.

(a) Bestimmen Sie den zu erwartenden Gewinn, wenn Mengen $x_1 = 5, x_2 = 0$ und $x_3 = 10$ hergestellt werden.

(b) Bestimmen Sie das globale Maximum der Gewinnfunktion.

Lösung:

(a) Die Kosten der Firma sind gegeben durch

$$k(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + 5.$$

Die Gewinnfunktion lautet daher

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T\mathbf{x} - k(\mathbf{x}) &= 80x_1 + 100x_2 + 160x_3 - k(\mathbf{x}) \\ &= -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - 5 + 80x_1 + 100x_2 + 160x_3. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$g(5,0,10) = -5^2 - 2\cdot 0^2 - 3\cdot 10^2 - 5\cdot 0 - 0\cdot 10 - 5 + 80\cdot 5 + 100\cdot 0 + 160\cdot 10 = 1670.$$

(b) Wir bestimmen zuerst die stationären Stellen der Gewinnfunktion g. Es gilt,

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcrrrrcl} g_{x_1} & = & -2x_1 & -x_2 & & +80 & = & 0 \\ g_{x_2} & = & -x_1 & -4x_2 & -x_3 & +100 & = & 0 \\ g_{x_3} & = & & -x_2 & -6x_3 & +160 & = & 0. \end{array}$$

Wenden wir die Substitutionsmethode aus Serie 1 an, erhalten wir die einzige stationäre Stelle von g: $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)^T = (35\,,\,10\,,\,25)^T$.

Wir wenden nun das Hauptunterdeterminantenkriterium (Satz 9.3.6 aus Serie 11) an, um die Hesse-Matrix auf ihre Definitheit zu überprüfen. Es gilt

$$H_g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \det(U_1) = -2 < 0 \\ \det(U_2) = 7 > 0 \\ \det(U_3) = \det(H_g(\mathbf{x})) = -40 < 0. \end{array}$$

Die Matrix $H_g(\mathbf{x})$ ist negativ definit und somit auch negativ semidefinit für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Aus Satz 9.3.7 aus Serie 11 folgt damit, dass die Gewinnfunktion g eine konkave Funktion ist. Daraus folgt, dass die Funktion g an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (35, 10, 25)^T$ ein globales Maximum hat, vgl. Satz 9.4.6 aus Aufgabe 1. Das globale Maximum der Gewinnfunktion ist also gegeben durch

$$g(35\,,\,10\,,\,25) = -35^2 - 2\cdot 10^2 - 3\cdot 25^2 - 35\cdot 10 - 10\cdot 25 - 5 + 80\cdot 35 + 100\cdot 10 + 160\cdot 25 = 3895.$$

Aufgabe 4 (Monopolgewinn, Optimierung für $n = 2$)

Ein Monopolist plant die Herstellung zweier Substitutionsgüter. Seine Produktionsentscheidung besteht in der Wahl von $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, wobei x_1 die produzierte Menge des ersten Gutes und x_2 die produzierte Menge des zweiten Gutes darstellt. Die Kostenfunktion ist gegeben durch

$$k(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2.$$

Zudem hat eine Marktanalyse ergeben, dass die Gesamtproduktion $\mathbf{x}$ zu den Stückpreisen

$$\begin{aligned} p_1(\mathbf{x}) &= 80 - x_1 - x_2 \quad \text{für das Gut 1 und} \\ p_2(\mathbf{x}) &= 90 - x_1 - 2x_2 \ \text{für das Gut 2} \end{aligned}$$

abgesetzt werden kann. Die Gewinnfunktion kann daher als $g(\mathbf{x}) = p_1(\mathbf{x})x_1 + p_2(\mathbf{x})x_2 - k(\mathbf{x})$ bestimmt werden, welche den zu erwartenden Gewinn bei Produktion der Mengen x_1 und x_2 beschreibt.

(a) Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen konvex oder konkav sind:
  (i) $k(\mathbf{x})$
  (ii) $p(\mathbf{x}) = p_1(\mathbf{x})x_1 + p_2(\mathbf{x})x_2$
  (iii) $g(\mathbf{x})$

(b) Bestimmen Sie eine globale Maximalstelle der Gewinnfunktion g.

Lösung:

(a) (i) Um zu untersuchen ob $k(\mathbf{x})$ konvex oder konkav ist, wenden wir Satz 9.3.7 aus Serie 11 an. Wir bestimmen die Hesse-Matrix von k. Es gilt

$$\nabla k(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 2x_2 + x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow H_k(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da $\det(U_1) = 2 > 0$ und $\det(U_2) = \det(H_k(\mathbf{x})) = 3 > 0$ für alle $\mathbf{x}$, ist $H_k(\mathbf{x})$ positiv definit für alle $\mathbf{x}$, vgl. Satz 9.3.6 aus Serie 11. Somit ist k streng konvex, vgl. 9.3.7 aus Serie 11.

(ii) Um zu untersuchen ob $p(\mathbf{x}) = p_1(\mathbf{x})x_1 + p_2(\mathbf{x})x_2$ konvex oder konkav ist, wenden wir Satz 9.3.7 aus Serie 11 an. Wir bestimmen die Hesse-Matrix von $p(\mathbf{x}) = 80x_1 - x_1^2 - x_2x_1 + 90x_2 - x_1x_2 - 2x_2^2$. Es gilt

$$\nabla p(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 80 - 2x_1 - x_2 - x_2 \\ -x_1 + 90 - x_1 - 4x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow H_p(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Da $\det(U_1) = -2 < 0$ und $\det(U_2) = \det(H_p(\mathbf{x})) = 4 > 0$ für alle $\mathbf{x}$, ist $H_p(\mathbf{x})$ negativ definit für alle $\mathbf{x}$, vgl. Satz 9.3.6 aus Serie 11. Somit ist g streng konkav, vgl. 9.3.7 aus Serie 11.

(iii) Um zu untersuchen ob $g(\mathbf{x})$ konvex oder konkav ist, wenden wir Satz 9.3.7 aus Serie 11 an. Wir bestimmen die Hesse-Matrix von g. Es gilt für $g(\mathbf{x}) = -2x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_1x_2 + 80x_1 + 90x_2$

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 80 - 4x_1 - 3x_2 \\ 90 - 3x_1 - 6x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow H_k(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Da $\det(U_1) = -4 < 0$ und $\det(U_2) = \det(H_g(\mathbf{x})) = 15 > 0$ für alle $\mathbf{x}$, ist $H_g(\mathbf{x})$ negativ definit für alle $\mathbf{x}$, vgl. Satz 9.3.6 aus Serie 11. Somit ist g streng konkav, vgl. 9.3.7 aus Serie 11.

> **Bemerkung** Es ist nicht überraschend, dass g konkav ist, da g die Summe von p und $-k$ ist und somit die Summe zweier konkaven Funktionen ist.

(b) Wir bestimmen zunächst die stationären Stellen der Gewinnfunktion g. Es gilt,

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{lcrrrcl} g_{x_1} & = & -4x_1 & -3x_2 & +80 & = & 0 \\ g_{x_2} & = & -3x_1 & -6x_2 & +90 & = & 0. \end{array}$$

Aus Teilaufgabe (a) wissen wir, dass die Funktion g konkav ist. Somit ist $(14,8)^T$ eine globale Maximalstelle der Gewinnfunktion g, vgl. Satz 9.4.6 aus Aufgabe 1.

Aufgabe 5 (Parameterintegral)

Sei $f(\mathbf{x}) = 5x_1^2 - x_2^3$ mit $x_1, x_2 \in [0,2]$. Bestimmen Sie

(a)

$$\int_0^2 f(x)\, dx_1$$

(b)

$$\int_0^2 f(x)\, dx_2$$

Lösung:

Definition 9.5.1 - Parameterintegral

Für eine stetige reelle Funktion (in zwei Variablen) $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ ist

$$F_1(x_2) = \int_{a_1}^{b_1} f(\mathbf{x})\, dx_1$$

das (Parameter-)Integral der Funktion f über x_1 (für festes x_2) und

$$F_2(x_1) = \int_{a_2}^{b_2} f(\mathbf{x})\, dx_2$$

das (Parameter-)Integral der Funktion f über x_2 (für festes x_1).

(a) Das (Parameter-)Integral von f über x_1 ist

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)\, dx_1 = F_1(x_2) = \int_0^2 5x_1^2 - x_2^3\, dx_1 &= \left[\frac{5}{3}x_1^3 - x_1 x_2^3\right]_0^2 \\ &= \frac{40}{3} - 2x_2^3 - 0 + 0 = \frac{40}{3} - 2x_2^3. \end{aligned}$$

(b) Das (Parameter-)Integral von f über x_2 ist

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)\, dx_2 = F_2(x_1) = \int_0^2 5x_1^2 - x_2^3\, dx_2 &= \left[5x_1^2 x_2 - \frac{1}{4}x_2^4\right]_0^2 \\ &= 10x_1^2 - \frac{1}{4}16 - 0 + 0 = 10x_1^2 - 4. \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (Doppelintegrale)

Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale:

(a)
$$\int_1^2 \int_{-1}^2 (x_1 + \frac{1}{x_2})\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

(b)
$$\int_0^1 \int_0^1 x_1\, e^{x_2}\, \mathrm{d}x_1\ \mathrm{d}x_2$$

(c)
$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2\right)\ \mathrm{d}x_1\ \mathrm{d}x_2$$

(d)
$$\int_0^e \int_0^\pi x_1\ \mathrm{d}x_1\ \mathrm{d}x_2$$

(e)
$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x_1 x_2 + e^{x_1})\ \mathrm{d}x_1\ \mathrm{d}x_2$$

Lösung:

Definition 9.5.2 - Doppelintegral

Für eine stetige reelle Funktion (in zwei Variablen) $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ mit Parameterintegralen $F_1(x_2)$ und $F_2(x_1)$ nennt man

$$\int_{a_2}^{b_2} F_1(x_2)\ dx_2 = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(\mathbf{x})\ dx_1\right)\ dx_2 \text{ bzw.}$$
$$\int_{a_1}^{b_1} F_2(x_1)\ dx_1 = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(\mathbf{x})\ dx_2\right)\ dx_1$$

das Doppelintegral der Funktion f über $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

(a)
$$\begin{aligned}\int_1^2 \int_{-1}^2 (x_1 + \frac{1}{x_2})\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 &= \int_1^2 \left[\frac{1}{2}{x_1}^2 + x_1 \frac{1}{x_2}\right]_{x_1=-1}^{x_1=2} \mathrm{d}x_2 = \int_1^2 \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{x_2} - \frac{-1}{x_2}\right) \mathrm{d}x_2 \\ &= \int_1^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{x_2}\right) \mathrm{d}x_2 = \left[\frac{3}{2}x_2 + 3\ln(x_2)\right]_1^2 = 3 + 3\ln(2) - \frac{3}{2} - 3\ln(1) \\ &= \frac{3}{2} + 3\ln(2).\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 (x_1 e^{x_2})\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}{x_1}^2 e^{x_2}\right]_{x_1=0}^{x_1=1} \mathrm{d}x_2 = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot e^{x_2} - \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot e^{x_2}\right) \mathrm{d}x_2 \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}e^{x_2}\right) \mathrm{d}x_2 = \left[\frac{1}{2}e^{x_2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1).\end{aligned}$$

– –

Alternative Lösung:

Wir hätten auch Satz 9.5.2 aus der Vorlesung anwenden können. Dort heisst es:

Satz 9.5.2 - Integration des Produkts zweier Funktionen

Sind g_1 und g_2 stetige reelle Funktionen, wobei g_1 stetig ist auf $[a_1, b_1]$ und g_2 stetig ist auf $[a_2, b_2]$, dann gilt

$$\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} g_1(x_1)\cdot g_2(x_2)\,dx_1\,dx_2 = \left(\int_{a_1}^{b_1} g_1(x_1)\,dx_1\right)\cdot\left(\int_{a_2}^{b_2} g_2(x_2)\,dx_2\right).$$

Die Funktion $x_1e^{x_2}$ lässt sich als Produkt der Funktionen $g_1(x_1) = x_1$ und $g_2(x_2) = e^{x_2}$ schreiben. Auch die Integrationsgrenzen sind unabhängig von den Variablen. Wir können somit Satz 9.5.2 anwenden und erhalten:

$$\int_0^1\left[\int_0^1 x_1e^{x_2}\mathrm{d}x_1\right]\mathrm{d}x_2 = \int_0^1 e^{x_2}\left[\int_0^1 x_1\mathrm{d}x_1\right]\mathrm{d}x_2 = \int_0^1 e^{x_2}\mathrm{d}x_2\cdot\int_0^1 x_1\mathrm{d}x_1$$
$$= [e^{x_2}]_0^1\cdot\left[\frac{1}{2}x_1^2\right]_0^1 = (e-1)\cdot\frac{1}{2}.$$

(c)

$$\int_{-1}^1\int_{-1}^1\left(\frac{1}{2}x_1^2+x_2^2\right)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \int_{-1}^1\left[\frac{1}{6}{x_1}^3+x_2^2x_1\right]_{x_1=-1}^{x_1=1}\mathrm{d}x_2 = \int_{-1}^1(\frac{1}{3}+2x_2^2)\mathrm{d}x_2$$
$$= \left[\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_2^3\right]_{-1}^1 = (\frac{1}{3}+\frac{2}{3})-(-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}) = 2.$$

(d)

$$\int_0^e\int_0^\pi x_1\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \int_0^e\left[\frac{1}{2}{x_1}^2\right]_{x_1=0}^{x_1=\pi}\mathrm{d}x_2 = \int_0^e\frac{\pi^2}{2}\mathrm{d}x_2$$
$$= \left[\frac{\pi^2}{2}x_2\right]_0^e = \frac{\pi^2}{2}e.$$

(e)

$$\int_{-1}^1\left[\int_{-1}^1(x_1x_2+e^{x_1})\,\mathrm{d}x_1\right]\,\mathrm{d}x_2 = \int_{-1}^1\left[\frac{1}{2}{x_1}^2x_2+e^{x_1}\right]_{x_1=-1}^{x_1=1}\mathrm{d}x_2 = \int_{-1}^1\left(0+e-e^{-1}\right)\,\mathrm{d}x_2$$
$$= \left[(e-e^{-1})x_2\right]_{-1}^1 = 2(e-e^{-1}).$$

Aufgabe 7 (Doppelintegrale)

Integrieren Sie die Cobb-Douglas Funktion $u(\mathbf{x}) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ für $\alpha = \frac{1}{3}$

(a) über dem Rechteck $R := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in [0,1],\ x_2 \in [0,4]\}$ und
$(b)^*$ über dem Dreieck $D := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in [0,1],\ x_2 \in [0,4x_1]\}$.

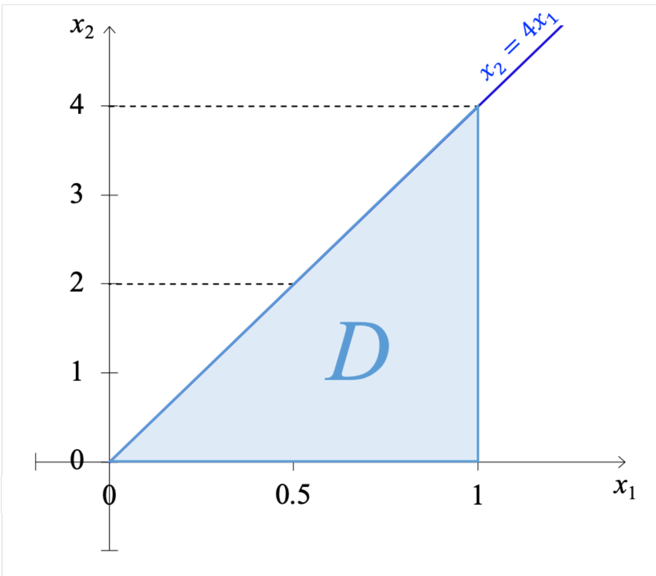
Lösung:

(a)

$$\int_0^1 \int_0^4 {x_1}^{1/3}{x_2}^{2/3}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 = \int_0^1 \left[\frac{3}{5}{x_1}^{1/3}{x_2}^{5/3}\right]_{x_2=0}^{x_2=4} \mathrm{d}x_1 = \int_0^1 \frac{3}{5}4^{5/3}{x_1}^{1/3}\,\mathrm{d}x_1$$
$$= \frac{3}{5}4^{5/3}\left[\frac{3}{4}{x_1}^{4/3}\right]_0^1 = \frac{9}{5}4^{2/3} = \frac{18}{5}2^{1/3}$$

(b)* Um zu sehen, dass D ein Dreieck beschreibt, zeichnen wir D in ein Koordinatensystem ein. Es gilt $x_1 \in [0,1]$ und $x_2 \in [0,4x_1]$. Für $x_1 = 1$ ist beispielsweise $x_2 \in [0,4]$ oder für $x_2 = 0.5$ ist $x_2 \in [0,2]$. Mit $x_2 \in [0,4x_1]$ wird die Menge der Punkte oberhalb der x_1-Achse und unterhalb der Geraden $x_2 = 4x_1$ beschrieben. Es wird also folgende Menge beschrieben:

Abbildung 7.1: Die Menge D.



Nun integrieren wir die Funktion $u(\mathbf{x}) = x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$ für $\alpha = \frac{1}{3}$ über D:

$$\int_0^1 \int_0^{4x_1} {x_1}^{1/3}{x_2}^{2/3}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 = \int_0^1 \left[\frac{3}{5}{x_1}^{1/3}{x_2}^{5/3}\right]_{x_2=0}^{x_2=4x_1} \mathrm{d}x_1 = \int_0^1 \frac{3}{5}4^{5/3}{x_1}^{2}\,\mathrm{d}x_1$$
$$= \frac{3}{5}4^{5/3}\left[\frac{1}{3}{x_1}^{3}\right]_0^1 = \frac{3}{15}4^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{5}4^{\frac{5}{3}}$$

Aufgabe 8 (Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen)

Sei

$$B = \left\{\mathbf{x} \in (0,+\infty)^2 \mid g_1(\mathbf{x}) \le 0, g_2(\mathbf{x}) = 0\right\},$$

mit

$$g_1 : (0,+\infty)^2 \to \mathbb{R},\ g_1(\mathbf{x}) = 9x_1 + x_2 - 100,$$
$$g_2 : (0,+\infty)^2 \to \mathbb{R},\ g_2(\mathbf{x}) = x_1 + x_2.$$

Zudem sei $f : (0,+\infty)^2 \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = x_1^{0.6}x_2^{0.4}$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) Der Vektor $\mathbf{x} = (0,0)^T$ ist eine zulässige Lösung von $\min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Das Optimierungsproblem $\max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ unter Nebenbedingungen ist lösbar. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Für die optimale Lösung $\mathbf{x}^*$ von $\max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ gilt $f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in (0,+\infty)^2$. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Ist $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)^T$ eine optimale Lösung von $\min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$, dann glit $x_1^* = -x_2^*$. ☐ wahr ☐ falsch

Lösung:

Definition 10.1.1 - Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen
Seien $f, g_1, \ldots, g_m$ reelle Funktionen in n Variablen mit Definitionsbereich D und

$$B = \{\mathbf{x} \in D \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1,\ldots,k, g_i(\mathbf{x}) = 0, i = k+1,\ldots,m\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Das Problem $\min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ schreibt man auch als

$$\begin{array}{lll} \text{(P-min)} & \min\limits_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x}) & \\ \text{u.d.N.} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, & i = 1,\ldots,k, \\ & g_i(\mathbf{x}) = 0, & i = k+1,\ldots,m, \end{array}$$

wobei $k \leq m, k \in \mathbb{N}_0$. (P-min) heisst Minimierungsproblem oder Optimierungsproblem unter (oder mit) Nebenbedingungen.

Das Problem $\max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ schreibt man auch als

$$\begin{array}{lll} \text{(P-max)} & \max\limits_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x}) & \\ \text{u.d.N.} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, & i = 1,\ldots,k, \\ & g_i(\mathbf{x}) = 0, & i = k+1,\ldots,m, \end{array}$$

wobei $k \leq m, k \in \mathbb{N}_0$. (P-max) heisst Maximierungsproblem oder Optimierungsproblem unter (oder mit) Nebenbedingungen.

Die Funktion f nennt man Zielfunktion, die Menge B zulässigen Bereich, Elemente aus B nennt man auch zulässige Lösungen. Ist $B \neq \{\}$, dann heissen (P-min) und (P-max) lösbar.

- Zu (1): Da $g_1(\mathbf{0}) = -100 \leq 0$ und $g_2(\mathbf{0}) = 0$ ist $\mathbf{0} \in B$. Somit ist $\mathbf{0}$ eine zulässige Lösung von $\min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$. Die Aussage (1) ist wahr.
- Zu (2): Das Optimierungsproblem $\max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ unter Nebenbedingungen heisst lösbar wenn $B \neq \{\}$. Wir haben in Teilaufgabe (1) schon gezeigt, dass $\mathbf{0} \in B$. Somit ist $B \neq \{\}$ und $\max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ lösbar. Die Aussage (2) ist wahr.
- Zu (3): Da $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)^T$ die optimale Lösung von $\max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ ist gilt $\mathbf{x}^* \in B$. Aus $g_2(\mathbf{x}^*) = x_1^* + x_2^* = 0$ folgt $x_2^* = -x_1^*$. Aus $g_1(\mathbf{x}^*) = 9x_1^* + x_2^* - 100 \leq 0$ folgt mit $x_2^* = -x_1^*$, dass $9x_1^* - x_1^* - 100 = 8x_1^* - 100 \leq 0$. Es muss also $x_1^* \leq \frac{100}{8} = 12.5$ gelten. Es ist aber beispielsweise $f(13, x_2^*) > f(\mathbf{x}^*)$. Die Aussage (3) ist falsch.
- Zu (4): Da $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)^T$ eine optimale Lösung von $\min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ ist gilt $\mathbf{x}^* \in B$. Aus $g_2(\mathbf{x}^*) = x_1^* + x_2^* = 0$ folgt $x_2^* = -x_1^*$. Die Aussage (4) ist wahr.

Aufgabe 9 (Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen)

(a) Betrachten Sie das Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 + x_2^2 - 7 \\ \text{u.d.N. } & x_1^4 = 16, \\ & x_1 + x_2 = 5. \end{aligned}$$

(i) Bestimmen Sie $\min_{x\in\mathbb{R}^2} x_1^2 + x_2^2 - 7$ und zeigen Sie, dass der so entstandene Wert eine untere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert ist.

(ii) Bestimmen Sie die optimale Lösung sowie den optimalen Zielfunktionswert dieses Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen.

(b) Sei eine zusätzliche Nebenbedingung gegeben durch $x_2 \geq 5$. Wir betrachten also folgendes Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 + x_2^2 - 7 \\ \text{u.d.N. } & x_1^4 = 16, \\ & x_1 + x_2 = 5, \\ & x_2 \geq 5. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die optimale Lösung sowie den optimalen Zielfunktionswert dieses neuen Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen.

(c) Sind die Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen aus Teilaufgaben (a) und (b) äquivalent?

(d) Formulieren Sie das Minimierungsproblem unter Nebenbedingungen aus Teilaufgabe (a) als ein äquivalentes Maximierungsproblem unter Nebenbedingungen.

Lösung:

> **Definition 10.1.2 - Globale Extrema und optimale Lösungen.**
> Sei $f : D \to Z$ eine reelle Funktion in n Variablen und $B \subseteq D$ ein zulässiger Bereich. Existiert ein Vektor $\mathbf{x}^* \in B$ mit
> $$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \text{ für alle } \mathbf{x} \in B,$$
> so heisst $\mathbf{x}^*$ globale Minimalstelle von f unter B und optimale Lösung von (P-min) bzw. $\min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$. Den Wert $f(\mathbf{x}^*)$ nennt man auch globales Minimum oder optimalen Zielfunktionswert von (P-min) bzw. $\min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$.
>
> Analog nennt man $\mathbf{x}^*$ eine globale Maximalstelle von f unter B und optimale Lösung von (P-max) bzw. $\max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$, wenn
> $$f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}) \text{ für alle } \mathbf{x} \in B.$$
> Den Wert $f(\mathbf{x}^*)$ nennt man dann auch globales Maximum oder optimalen Zielfunktionswert von (P-max) bzw. $\max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$.
>
> Globale Minimal- und Maximalstellen heissen auch globale Extremalstellen von f unter B.

Die Zielfunktion des Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen ist gegeben durch $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 7$.

(a) (i) Es gilt $x_1^2 + x_2^2 \geq 0$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Daher hat die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to Z$ mit $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 7$ ihr globales Minimum an der Stelle $\mathbf{x}^{\min} = (0,0)^T$ mit $f(\mathbf{x}^{\min}) = -7$. Es gilt:

> **Satz 10.1.2 - Eine untere Schranke des optimalen Zielfunktionswerts**
> Sei $f : D \to Z$ eine reelle Funktion in n Variablen und $B \subseteq D$. Hat f ein globales Minimum $f(\mathbf{x}^{\min})$ und $\min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ eine optimale Lösung $\mathbf{x}^*$, so gilt
> $$f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}^{\min}).$$

Es gilt $B \subseteq \mathbb{R}^2$ und mit Satz 10.1.2 gilt somit für eine optimale Lösung $\mathbf{x}^*$ von $\min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$, dass
$$f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}^{\min}).$$
Eine untere Schranke des optimalen Zielfunktionswerts ist somit gegeben durch $f(\mathbf{x}^{\min}) = -7$.

(ii) Da $x_1^4 = 16$ gelten muss, ist $x_1 = 2$ oder $x_1 = -2$. Aus der Bedingung $x_1 + x_2 = 5$ folgt, dass $B = \{(2,3)^T, (-2,7)^T\}$. Die Zielfunktionswerte zulässiger Lösungen sind $f(2,3) = 6$ und $f(-2,7) = 46$. Das Minimierungsproblem unter Nebenbedingungen $\min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ hat also die optimale Lösung $\mathbf{x}^* = (2,3)^T$ und einen optimalen Zielfunktionswert von $f(\mathbf{x}^*) = 6$.

(b) Mit der zusätzlichen Nebenbedingung ist der Vektor $(2,3)^T$ keine zulässige Lösung mehr, da $3 < 5$. Somit ist der zulässige Bereich des Optimierungsproblems $B' = \{(-2,7)^T\}$. Wir haben also nur eine zulässige Lösung. Das Minimierungsproblem unter Nebenbedingungen hat somit die optimale Lösung $\mathbf{x}^* = (-2,7)^T$ und einen optimalen Zielfunktionswert von $f(\mathbf{x}^*) = 46$.

(c)

> **Definition 10.1.4 - Äquivalente Optimierungsprobleme**
> Zwei Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen heissen äquivalent, wenn jede optimale Lösung des einen auch eine optimale Lösung des anderen ist und umgekehrt.

Die optimale Lösung $\mathbf{x}^* = (2,3)^T$ des Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen aus Teilaufgabe (a) ist keine optimale Lösung des Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen aus Teilaufgabe (b). Die Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen aus Teilaufgaben (a) und (b) können somit nicht äquivalent sein.

(d) Es gilt:

Satz 10.1.1 - Max-Min-Dualität für Optimierungsprobleme
Sei f eine reelle Funktion in n Variablen und $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Der Vektor $\mathbf{x}^* \in B$ ist eine optimale Lösung von $\max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ genau dann, wenn $\mathbf{x}^*$ eine optimale Lösung von $\min_{\mathbf{x}\in B} -f(\mathbf{x})$ ist.

Aus Satz 10.1.1 folgt, dass die Probleme $\max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ und $\min_{\mathbf{x}\in B} -f(\mathbf{x})$ äquivalent sind. Ein äquivalentes Optimierungsproblem zu $\min_{x\in B} f(\mathbf{x})$ ist also

$$\begin{aligned} \max\ & -x_1^2 - x_2^2 + 7 \\ \text{u.d.N. } & x_1^4 = 16, \\ & x_1 + x_2 = 5. \end{aligned}$$

Aufgabe 10 (Graphische Darstellung eines Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen)

(a) Betrachten Sie das Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \max\ & x^2 + 4 \\ \text{u.d.N. } & x \geq -1, \\ & x \leq 4. \end{aligned}$$

(i) Stellen Sie die den Graphen der Zielfunktion sowie den zulässigen Bereich in einem Koordinatensystem dar.

(ii) Bestimmen Sie anhand der Skizze aus Teilaufgabe (i) die optimale Lösung sowie den optimalen Zielfunktionswert.

(b) Betrachten Sie das Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + x_2 \\ \text{u.d.N. } & x_1 + x_2 \leq 3, \\ & 6x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

(i) Stellen Sie den zulässigen Bereich in einem zweidimensionalen Koordinatensystem mit einer x_1- und einer x_2-Achse dar.

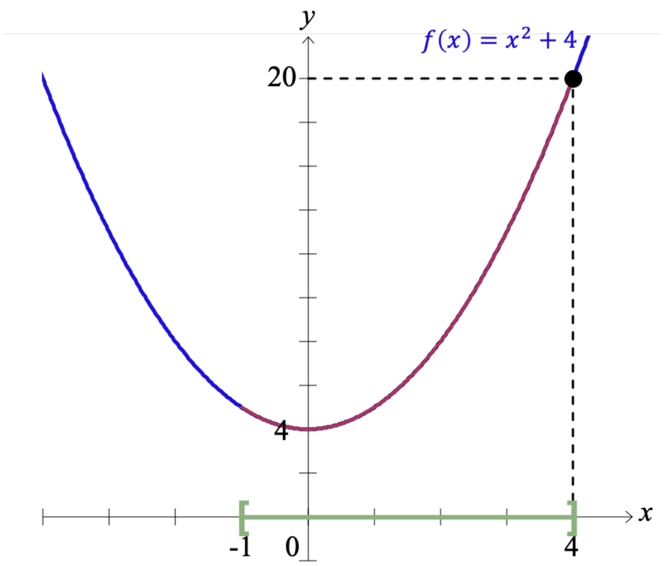
(ii) Zeichnen Sie im Koordinatensystem aus Teilaufgabe (i) zusätzlich Höhenlinien der Zielfunktion zu Niveaus $0, 1, \frac{4}{3}, 2$ und 3 ein.

(iii) Bestimmen Sie anhand ihrer Graphik die optimale Lösung sowie den optimalen Zielfunktionswert des obigen Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen.

Lösung:

(a) (i) Bei einem Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen in einer Variablen kann man den zulässigen Bereich auf der x-Achse einzeichnen. Gesucht ist dann der kleinste oder grösste Funktionswert in diesem zulässigen Bereich. Für das gegebene Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen (P-max) ist dies in Abbildung 10.1 illustriert.

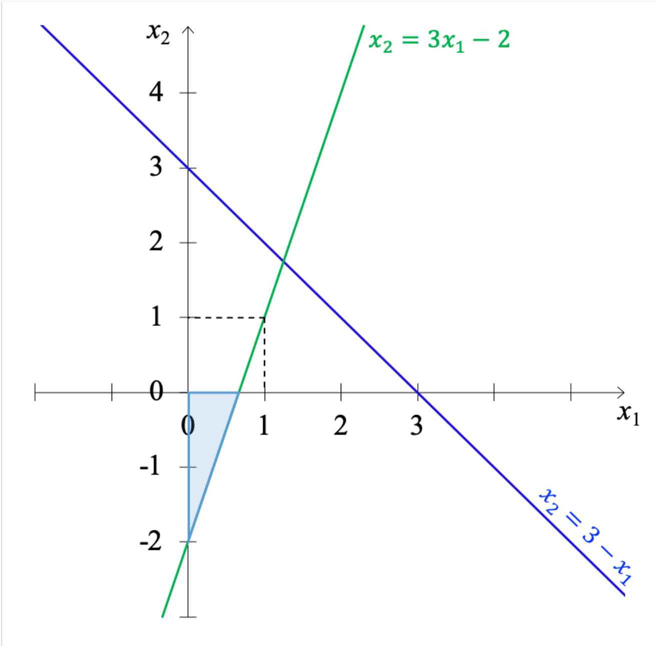
Abbildung 10.1: Die Funktion f und der zulässige Bereich B.



(ii) Man erkennt leicht, dass die optimale Lösung des Maximierungsproblems unter Nebenbedingungen gegeben ist durch $x^* = 4$. Der optimale Zielfunktionswert ist somit $f(x^*) = 4^2 + 4 = 20$.

(b) (i) Aus $x_1 + x_2 \leq 3$ folgt $x_2 \leq 3 - x_1$. Alle Punkte, die unterhalb oder auf der Geraden $x_2 = 3 - x_1$ liegen, befinden sich in der durch $x_1 + x_2 \leq 3$ beschriebenen Menge. Aus $6x_1 - 2x_2 \leq 4$ folgt $-2x_2 \leq 4 - 6x_1$ und somit $x_2 \geq 3x_1 - 2$. Alle Punkte, die oberhalb oder auf der Geraden $x_2 = 3x_1 - 2$ liegen, befinden sich in der durch $6x_1 - 2x_2 \leq 4$ beschriebenen Menge. Wegen $x_1 \geq 0$ und $x_2 \leq 0$ liegen alle zulässigen Lösungen im vierten Quadranten des Koordinatensystems, vgl. Abbildung 10.2.

Abbildung 10.2: Darstellung des zulässigen Bereichs B.



(ii) Wir berechnen zuerst die Höhenlinien der Zielfunktion zu den gegeben Niveaus und zeichnen diese dann im Koordinatensystem aus Teilaufgabe (i) ein.

$$\underline{\text{Für } y=0}: 2x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -2x_1.$$

Daher ist

$$N_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = -2x_1\}.$$

$$\underline{\text{Für } y=1}: 2x_1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1 - 2x_1.$$

Daher ist

$$N_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 1 - 2x_1\}.$$

$$\underline{\text{Für } y=\frac{4}{3}}: 2x_1 + x_2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x_2 = \frac{4}{3} - 2x_1.$$

Daher ist

$$N_{\frac{4}{3}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = \frac{4}{3} - 2x_1\}.$$

$$\underline{\text{Für } y=2}: 2x_1 + x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = 2 - 2x_1.$$

Daher ist

$$N_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 2 - 2x_1\}.$$

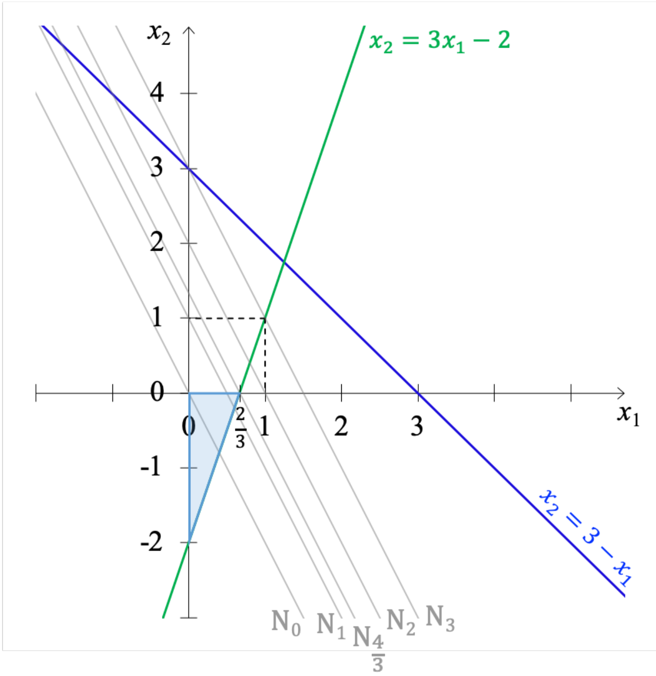
$$\underline{\text{Für } y=3}: 2x_1 + x_2 = 3 \Leftrightarrow x_2 = 3 - 2x_1.$$

Daher ist

$$N_3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 3 - 2x_1\}.$$

Die Abbildung 10.3 zeigt den zulässigen Bereich mit diesen Höhenlinien.

Abbildung 10.3: Höhenlinien zu den Niveaus $0, 1, \frac{4}{3}, 2$ und 3 und der zulässigen Bereich.



(iii) Graphisch kann man die optimale Lösung des Maximierungsproblems erhalten, indem man die Höhenlinie zum höchsten Niveau findet, welche mindestens ein Element im zulässigen Bereich hat. Dies geschieht durch eine Parallelverschiebung einer Höhenlinie in Richtung steigender Niveaus bis die Höhenlinie den zulässigen Bereich nur noch an einem Eckpunkt oder einer Kante schneidet. Die optimale Lösung ist $\mathbf{x}^* = (\frac{2}{3}, 0)^T$ mit $f(\mathbf{x}^*) = \frac{4}{3}$.

Aufgabe 11 (Tangenten, implizite Funktion)

Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ mit } f(\mathbf{x}) = e^{1-x_1^2+2x_2}.$$

Die Gleichung $f(\mathbf{x}) = e^2$ definiert in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0 = (1,1)^T$ eine implizite Funktion $x_2 = \tilde{g}(x_1)$.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von f an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (1,1)^T$.

(b) Berechnen Sie $\tilde{g}'(1)$, indem Sie den Satz über implizite Funktionen anwenden.

(c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente $t_{1,x_1^0}(x_1) = \tilde{g}(x_1^0) + \tilde{g}'(1)(x_1 - x_1^0)$ an den Graphen der Funktion $x_2 = \tilde{g}(x_1)$ im Punkt $x_1^0 = 1$.

(d) Bestimmen Sie nun die implizite Funktion $x_2 = \tilde{g}(x_1)$ aus (b) direkt und berechnen Sie $\tilde{g}'(1)$.

Lösung:

(a) Es gilt:

$$f_{x_1}(\mathbf{x}) = -2x_1 e^{1-x_1^2+2x_2} \quad \Rightarrow \quad f_{x_1}(1,1) = -2e^2,$$

$$f_{x_2}(\mathbf{x}) = 2e^{1-x_1^2+2x_2} \quad \Rightarrow \quad f_{x_2}(1,1) = 2e^2.$$

(b)

Definition 10.2.1 - Implizite Funktion im Fall $n = 2$
Sei $g : D \to Z$ eine reelle Funktion in 2 Variablen und $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)^T \in D$. Falls $\varepsilon, \delta > 0$ existieren mit $(x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta) \times (x_2^0 - \varepsilon, x_2^0 + \varepsilon) = U(x_1^0, \delta) \times U(x_2^0, \varepsilon) \subseteq D$ und eine Funktion $\tilde{g} : U(x_1^0, \delta) \to U(x_2^0, \varepsilon)$ mit $x_2 = \tilde{g}(x_1)$ existiert, so dass für alle $\mathbf{x} \in U(x_1^0, \delta) \times U(x_2^0, \varepsilon)$

$$g(\mathbf{x}) = 0 \;\Leftrightarrow x_2 = \tilde{g}(x_1),$$

gilt, sagt man, die Funktion $\tilde{g}(x_1)$ ist implizit durch die Gleichung $g(\mathbf{x}) = 0$ in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0$ gegeben oder definiert. Die Gleichung $g(\mathbf{x}) = 0$ nennt man dann auch implizite Funktion.

Satz 10.2.3 - Satz von der impliziten Funktion für $n = 2$
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge. Ist eine reelle Funktion $g : D \to Z$ in 2 Variablen stetig partiell differenzierbar und gilt für $\mathbf{x}^0 \in D$

$$g(\mathbf{x}^0) = 0 \qquad \text{und} \qquad g_{x_2}(\mathbf{x}^0) \neq 0,$$

dann

- gibt es $\varepsilon, \delta > 0$, so dass zu jedem $x_1 \in U(x_1^0, \delta)$ genau ein $x_2 = \tilde{g}(x_1) \in U(x_2^0, \varepsilon)$ existiert mit $g(\mathbf{x}) = 0$, d.h. durch $g(\mathbf{x}) = 0$ ist in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0$ implizit die Funktion $\tilde{g} : U(x_1^0, \delta) \to U(x_2^0, \varepsilon)$ mit $x_2 = \tilde{g}(x_1)$ gegeben;
- ist die durch $g(\mathbf{x}) = 0$ implizit gegebene Funktion $\tilde{g}$ stetig differenzierbar auf $U(x_1^0, \delta)$ mit
$$\tilde{g}'(x_1) = -\frac{g_{x_1}(x_1, \tilde{g}(x_1))}{g_{x_2}(x_1, \tilde{g}(x_1))} = -\frac{g_{x_1}(x_1, x_2)}{g_{x_2}(x_1, x_2)}..$$

$f(\mathbf{x}) = e^2 \quad \Leftrightarrow \quad f(\mathbf{x}) - e^2 = e^{1 - x_1^2 + 2x_2} - e^2 = 0.$
Wir setzen $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - e^2$. Dann gilt $g(1,1) = 0$ und $g_{x_2}(1,1) \neq 0$. Somit erhalten wir mit dem Satz über implizite Funktionen für die implizit gegebene Funktion $\tilde{g}$:

$$\tilde{g}'(1) \;=\; -\frac{g_{x_1}(\mathbf{x}^0)}{g_{x_2}(\mathbf{x}^0)} = -\frac{f_{x_1}(\mathbf{x}^0)}{f_{x_2}(\mathbf{x}^0)} = -\frac{-2e^2}{2e^2} = 1.$$

(c) Die Tangente an den Graphen der Funktion $x_2 = \tilde{g}(x_1)$ im Punkt $x_1^0 = 1$ ist gegeben durch

$$t_{1,1}(x_1) = \tilde{g}(1) + \tilde{g}'(1)(x_1 - 1) = 1 + (x_1 - 1) = x_1.$$

(d) Die durch $f(\mathbf{x}) = e^2$ implizit gegebene Funktion $x_2 = \tilde{g}(x_1)$ kann auch direkt bestimmt werden:

$$f(\mathbf{x}) = e^2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{1 - x_1^2 + 2x_2} = e^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x_1^2 + 2x_2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2} = \tilde{g}(x_1).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{g}'(x_1) &= \frac{d\left(\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}\right)}{dx_1} = x_1, \\ \tilde{g}'(1) &= 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 12 (Satz von der impliziten Funktion)

Berechnen Sie, falls möglich, den Wert der partiellen Ableitung(en) an der Stelle $\mathbf{x}^0$ der durch

(a) $g(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ implizit definierten Funktion $\tilde{g}(x_1)$ mit $\mathbf{x}^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$.

(b) $h(x_1,x_2,x_3) = x_3 + x_1 \ln(x_3) + x_2 = 0$ implizit definierten Funktion $\tilde{h}(x_1,x_2)$ mit $\mathbf{x}^0 = (5,-1,1)^T$.

Lösung:

(a) Die partiellen Ableitungen von g sind gegeben durch

$$g_{x_1}(x_1,x_2) = 2x_1 \text{ und } g_{x_2}(x_1,x_2) = 2x_2.$$

Da $g(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$ und $g_{x_2}(\mathbf{x}^0) = \sqrt{2} \neq 0$, garantiert der Satz der impliziten Funktion die Existenz von $\tilde{g}$. Für die partielle Ableitung von $\tilde{g}$ an der Stelle $x_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ folgt:

$$\frac{\partial \tilde{g}(x_1^0)}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial g(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1}}{\frac{\partial g(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2}} = -\frac{2x_1^0}{2x_2^0} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1.$$

(b)

Satz 10.2.4 - Satz von der impliziten Funktion (allgemein)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ist eine reelle Funktion $g : D \to Z$ in n Variablen stetig partiell differenzierbar und gilt für $\mathbf{x}^0 \in D$

$$g(\mathbf{x}^0) = 0 \qquad \text{und} \qquad g_{x_n}(\mathbf{x}^0) \neq 0,$$

dann

- gibt es $\varepsilon, \delta > 0$, so dass zu jedem $(x_1,\dots,x_{n-1})^T \in U((x_1^0,\dots,x_{n-1}^0)^T,\delta)$ genau ein $x_n = \tilde{g}(x_1,\dots,x_{n-1}) \in U(x_n^0,\varepsilon)$ existiert mit $g(\mathbf{x}) = 0$, d.h. durch $g(\mathbf{x}) = 0$ ist in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0$ implizit die Funktion $\tilde{g} : U((x_1^0,\dots,x_{n-1}^0)^T,\delta) \to U(x_n^0,\varepsilon)$ mit $x_n = \tilde{g}(x_1,\dots,x_{n-1})$ gegeben;
- ist die implizit gegebene Funktion $\tilde{g}$ stetig differenzierbar auf $U((x_1^0,\dots,x_{n-1}^0)^T,\delta)$ mit

$$\frac{\partial \tilde{g}(x_1,\dots,x_{n-1})}{\partial x_i} = -\frac{g_{x_i}(x_1,\dots,x_{n-1},\tilde{g}(x_1,\dots,x_{n-1}))}{g_{x_n}(x_1,\dots,x_{n-1},\tilde{g}(x_1,\dots,x_{n-1}))} = -\frac{g_{x_i}(\mathbf{x})}{g_{x_n}(\mathbf{x})} \text{ für } i = 1,\dots,n-1.$$

Die partiellen Ableitungen von h sind gegeben durch

$$h_{x_1}(x_1,x_2,x_3) = \ln(x_3), \quad h_{x_2}(x_1,x_2,x_3) = 1 \text{ und } h_{x_3}(x_1,x_2,x_3) = 1 + \frac{x_1}{x_3}.$$

Da $h(\mathbf{x}^0) = 1 + 5\ln(1) + (-1) = 0$ und $h_{x_3}(\mathbf{x}^0) = 1 + \frac{5}{1} = 6 \neq 0$, garantiert der Satz der impliziten Funktion die Existenz von $\tilde{h}$. Für die partielle Ableitungen von $\tilde{h}$ an der Stelle $(x_1^0,x_2^0)^T = (5,-1)^T$

folgt:

$$\frac{\partial \tilde{h}(5,-1)}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial h(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1}}{\frac{\partial h(\mathbf{x}^0)}{\partial x_3}} = -\frac{\ln(x_3^0)}{1+\frac{x_1^0}{x_3^0}} = -\frac{x_3^0 \ln(x_3^0)}{x_3^0 + x_1^0} = -\frac{1\ln(1)}{1+5} = 0,$$

$$\frac{\partial \tilde{h}(5,-1)}{\partial x_2} = -\frac{\frac{\partial h(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2}}{\frac{\partial h(\mathbf{x}^0)}{\partial x_3}} = -\frac{1}{1+\frac{x_1^0}{x_3}} = -\frac{x_3^0}{x_3^0 + x_1^0} = -\frac{1}{1+5} = -\frac{1}{6}.$$

Aufgabe 13 (Optimierung - Verständnis)

Gegeben ist folgendes Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen:

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$
$$\text{u.d.N. } g_i(\mathbf{x}) = 0, \ (i = 1,\dots,m)$$

mit $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g_i(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $i = 1,\dots,m$. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

(1) Bei Anwendung der Substitutionsmethode löst man statt des ursprünglichen Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen ein äquivalentes Optimierungsproblem mit mehr Variablen. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Bei Anwendung der Lagrangemethode zur Lösung eines Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen sucht man stationäre Stellen einer Funktion, welche mehr Variablen hat als die ursprüngliche Zielfunktion. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Sind alle g_i affin-lineare Funktionen, so ist die zulässige Menge ein affiner Raum oder die leere Menge. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Ist das Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen lösbar, so existiert genau eine optimale Lösung. ☐ wahr ☐ falsch

Lösung:

- Zu (1):

Satz 10.2.2 - Satz zum Verfahren der Substitution

Seien $f, g_i : D \to Z$ reelle Funktionen in n Variablen, $i = 1,\dots,m$, $m < n$, und $B = \{\mathbf{x} \in D \,|\, g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1,\dots,m\}$. Das Gleichungssystem $g_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1,\dots,m$, sei äquivalent zum Gleichungssystem $x_i = \tilde{g}_i(x_{m+1},\dots,x_n)$, $i = 1,\dots,m$, mit bekannten, reellen Funktionen $\tilde{g}_i(x_{m+1},\dots,x_n)$. So ist

$$\mathbf{x}^* = (\tilde{g}_1(x_{m+1}^*,\dots,x_n^*),\dots,\tilde{g}_m(x_{m+1}^*,\dots,x_n^*),x_{m+1}^*,\dots,x_n^*)^T$$

eine optimale Lösung von

(P-max) $\max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ bzw. (P-min) $\min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$

genau dann wenn $(x^*_{m+1},\dots,x^*_n)^T$ eine globale Maximalstelle bzw. Minimalstelle der Funktion

$$f^{\text{sub}}(\mathbf{x}) : \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-m} \;\middle|\; \begin{pmatrix} \tilde{g}_1(x_{m+1},\dots,x_n) \\ \vdots \\ \tilde{g}_m(x_{m+1},\dots,x_n) \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in D \right\} \to Z \text{ mit}$$

$$f^{\text{sub}}(\mathbf{x}) = f \begin{pmatrix} \tilde{g}_1(x_{m+1},\dots,x_n) \\ \vdots \\ \tilde{g}_m(x_{m+1},\dots,x_n) \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ist.

Will man ein Optimierungsproblems in n Variablen unter m Gleichheitsnebenbedingungen mit reeller Zielfunktion $f : D \to Z$ in n Variablen mithilfe des Verfahrens der Substitution lösen, so geht man wie folgt vor:

Das Verfahren der Substitution

1. Auflösen aller m Gleichheitsnebenbedingungen nach m verschiedenen Variablen, so dass auf der rechten Seite nur noch die verbleibenden $n-m$ Variablen auftreten.
2. Substitution dieser m Variablen in der Zielfunktion f durch die im vorherigen Schritt erhaltenen rechten Seiten.
3. Bestimmung der entsprechenden globalen Extremalstellen der so erhaltenen Funktion in $n-m$ Variablen.
4. Rücksubstitution der Variablen, um die optimale Lösung des ursprünglichen Systems zu erhalten.

Bei der Substitutionsmethode reduziert man also die Anzahl der Variablen um m. Die Aussage (1) ist falsch.

- Zu (2):

Satz 10.2.6 - Der Satz von Lagrange (allgemein)

Seien $f, g_i : D \to Z$, $i = 1,\dots,m$ reelle stetig partiell differenzierbare Funktionen in n Variablen, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $B = \{\mathbf{x} \in D \,|\, g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1,\dots,m\}$, $\mathbf{x}^* \in D$ und die Gradienten $\nabla g_1(\mathbf{x}^*),\dots,\nabla g_m(\mathbf{x}^*)$ linear unabhängig. Zudem sei $L : D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ die Lagrange Funktion in $n+m$ Variablen mit Abbildungsvorschrift

$$L(x_1,x_2,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m) = f(x_1,x_2,\dots,x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1,x_2,\dots,x_n).$$

Ist $\mathbf{x}^* \in D$ eine optimale Lösung von

$$\text{(P-max)} \qquad \max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x}) \qquad\qquad \text{oder} \qquad \text{(P-min)} \qquad \min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x}),$$

dann existieren $\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^* \in \mathbb{R}$ mit $\nabla L(x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*,\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*) = \mathbf{0}$. Zudem gilt $L(x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*,\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*) = f(\mathbf{x}^*)$.
Ist $\mathbf{x}^0$ eine lokale Extremalstelle von f unter B, dann existieren $\lambda_1^0,\dots,\lambda_m^0 \in \mathbb{R}$, so dass $\nabla L(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0,\lambda^0,\dots,\lambda_m^0) = \mathbf{0}$ gilt. Zudem gilt $L(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0,\lambda^0,\dots,\lambda_m^0) = f(\mathbf{x}^0)$.

Bei der Lagrangemethode sucht man stationäre Stellen der Lagrange-Funktion. Diese Lagrange-Funktion hat als Argument $\mathbf{x}$ und die Lagrangemultiplikatoren λ_i, $i = 1,\dots,m$. Die Anzahl der Variablen wird dadurch um m Variablen erhöht. Die Aussage (2) ist wahr.

- Zu (3): Die Aussage (3) ist wahr, vgl. Kapitel 7.
- Zu (4): Ein Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen ist lösbar, wenn $B \neq \{\}$. Um die Aussage zu widerlegen, genügt es ein Gegenbeispiel anzugeben. Betrachten wir das folgende Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} &\max\ x_1^2 \\ &\text{u.d.N. } x_1^2 = 9. \end{aligned}$$

Die Nebenbedingung ist nur dann erfüllt, wenn $x_1 = 3$ oder $x_1 = -3$ und somit ist $B = \{3,-3\} \neq \{\}$. Es gilt zudem, dass $f(3) = f(-3) = 9$. Dieses Optimierungsproblem unter Nebenbedingung ist also lösbar, hat aber nicht genau eine optimale Lösung. Die Aussage (4) ist falsch.

Aufgabe 14 (Substitutionsmethode und Lagrangesche Multiplikatorenregel)

Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2}\ x_1^2 + 2x_1x_2 \\ &\text{u.d.N.}\ \ -\frac{3}{2}x_1 + 3x_2 + 6 = 0. \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Funktion die Kandidaten für die optimale Lösung des Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Verfahrens der Substitution die optimale Lösung des Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen.

Lösung:

(a) Es gilt

Definition 10.2.3 - Die Lagrange-Funktion mit $n = 2$, $m = 1$
Seien $f, g_1 : D \to Z$ reelle Funktionen in 2 Variablen. Die Funktion $L : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Abbildungsvorschrift

$$L(x_1,x_2,\lambda) = f(x_1,x_2) - \lambda g_1(x_1,x_2)$$

heisst Lagrange-Funktion eines Optimierungsproblems mit Zielfunktion f und Nebenbedingung $g_1(\mathbf{x}) = 0$.

Satz 10.2.5 - Der Satz von Lagrange mit $n = 2$
Seien $f, g_1 : D \to Z$ reelle stetig partiell differenzierbare Funktionen in 2 Variablen, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $B = \{\mathbf{x} \in D | g_1(\mathbf{x}) = 0\}$ und $\mathbf{x}^* \in D$ mit $\nabla g_1(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$. Zudem sei L die Lagrange-Funktion

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) - \lambda g_1(x_1, x_2).$$

Ist $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)^T$ eine optimale Lösung von

$$\text{(P-max)} \quad \max_{\mathbf{x} \in B} f(\mathbf{x}) \qquad \text{oder} \qquad \text{(P-min)} \quad \min_{\mathbf{x} \in B} f(\mathbf{x}),$$

dann existiert ein $\lambda^* \in \mathbb{R}$ mit $\nabla L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) = \mathbf{0}$. Zudem gilt $L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) = f(x_1^*, x_2^*)$.
Ist $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)^T$ eine lokale Extremalstelle von f unter B, dann existiert ein $\lambda^0 \in \mathbb{R}$, so dass $\nabla L(x_1^0, x_2^0, \lambda^0) = \mathbf{0}$ gilt. Zudem gilt $L(x_1^0, x_2^0, \lambda^0) = f(x_1^0, x_2^0)$.

Die Lagrange-Funktion lautet also

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + 2x_1x_2 - \lambda\left(-\tfrac{3}{2}x_1 + 3x_2 + 6\right).$$

Die Nebenbedingung ist gegeben durch $g(\mathbf{x}) = 0$ mit $g(\mathbf{x}) = -\frac{3}{2}x_1 + 3x_2 + 6$. Laut dem Satz von Lagrange mit $n = 2$ (Satz 10.2.5) muss für eine optimale Lösung $\mathbf{x}^*$ mit $\nabla g(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$ ein λ^* existieren, sodass $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)^T$ eine stationäre Stelle von L ist.
Hier ist $\nabla g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Der Gradient von g ist somit für kein $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ gleich $\mathbf{0}$ und die Voraussetzung des Satzes von Lagrange, $\nabla g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$, ist für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ erfüllt. Die stationären Stellen der Lagrange-Funktion berechnen sich dann durch:

$$\begin{aligned}
(i)\ L_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) &= \quad 2x_1 + 2x_2 + \tfrac{3}{2}\lambda &&= 0 \\
(ii)\ L_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) &= \quad 2x_1 - 3\lambda &&= 0 \\
(iii)\ L_{\lambda}(x_1, x_2, \lambda) &= \quad +\tfrac{3}{2}x_1 - 3x_2 - 6 &&= 0.
\end{aligned}$$

Umformen ergibt:

$$\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 + \tfrac{3}{2}\lambda &= 0 \iff 2x_1 + 2x_2 + \tfrac{3}{2}\lambda = 0 \\
2x_1 - 3\lambda &= 0 \iff \lambda = \tfrac{2}{3}x_1 \\
\tfrac{3}{2}x_1 - 3x_2 - 6 &= 0 \iff x_2 = -2 + \tfrac{x_1}{2}.
\end{aligned}$$

Einsetzen der letzten beiden Gleichungen in die Erste führt zu:

$$2x_1 + 2\left(-2 + \tfrac{x_1}{2}\right) + \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{2}{3}x_1\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x_1 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1.$$

Der x_1-Wert der stationären Stelle ist daher $x_1^* = 1$. Durch Einsetzen in die Gleichungen $x_2 = -2 + \frac{x_1}{2}$ und $\lambda = \frac{2}{3}x_1$ erhalten wir die stationären Stelle der Lagrange-Funktion L:

$$\left(1, -\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)^T.$$

Damit ist $(1, -\frac{3}{2})^T$ der einzige Kandidat für eine optimale Lösung.

Bemerkung Der Satz von Lagrange mit $n = 2$ (Satz 10.2.5) besagt, dass wenn für die optimale Lösung des Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen $\nabla g_1(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$ gilt, es ein $\lambda^* \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die Stelle $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)^T$ eine stationäre Stelle der Lagrange-Funktion ist. Satz 10.2.5 entscheidet dabei aber nicht, ob das Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen eine optimale Lösung hat oder an welcher dieser Stellen diese Lösung vorliegt. Um dies mit Hilfe der Lagrange-Funktion analytisch zu zeigen, benötigt man Sätze, die über den hier behandelten Stoff hinausgehen.

(b) Wir wenden das Verfahren der Substitution aus Aufgabe 13 an:
1. Auflösen der Nebenbedingung $g(\mathbf{x}) = -\frac{3}{2}x_1 + 3x_2 + 6 = 0$ nach x_1 ergibt

$$x_1 = \tilde{g}(x_2) = 2x_2 + 4. \quad \text{mit } x_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Substituiert man x_1 durch $\tilde{g}(x_2)$ in $f(\mathbf{x})$, erhält man

$$f^{sub}(x_2) = f(\tilde{g}(x_2), x_2) = (\tilde{g}(x_2))^2 + 2\tilde{g}(x_2)x_2 = (2x_2+4)^2 + 2(2x_2+4)x_2$$

also

$$f^{sub}(x_2) = 8x_2^2 + 24x_2 + 16 \text{ für } x_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Es gilt

$$\begin{aligned} \left(f^{sub}\right)'(x_2) = \quad 16x_2 + 24 &= \quad 0 \\ \Longleftrightarrow \qquad\qquad x_2 &= \quad -\tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\left(f^{sub}\right)''(x_2) \quad = 16 > 0 \; \forall x_2 \in \mathbb{R}.$$

Somit ist $x_2^* = -\frac{3}{2}$ lokale und globale Minimalstelle von f^{sub}.
4. Insgesamt folgt somit, dass die Stelle $(\tilde{g}(-\frac{3}{2}), -\frac{3}{2})^T = (1, -\frac{3}{2})^T$ eine globale Minimalstelle der Zielfunktion f unter der gegebenen Nebenbedingung ist. Das ist genau die stationäre Stelle, die wir mit Hilfe der Lagrange Methode gefunden haben. Jedoch können wir nun schliessen, dass $(1, -\frac{3}{2})^T$ die optimale Lösung des Minimierungsproblems unter Nebenbedingung ist.