10. Einführung in die Optimierung

Viele ökonomische Probleme befassen sich mit der Minimierung von Kosten oder der Maximierung von Erlösen und Gewinnen. Hierbei unterliegt man jedoch oft Einschränkungen bei der Wahl der Variablen. Ohne eine Budgetbeschränkung würde ein Konsument mit Cobb Douglas Nutzenfunktion immer unendlich viel von allen Gütern kaufen. Ohne eine Kapazitätsbeschränkung der Maschinen könnte eine sehr kleine Fabrik beliebig hohe Nachfragen bedienen. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns daher mit Optimierungsproblemen unter der Berücksichtigung von Nebenbedingungen.

Ein in der Finanzwirtschaft häufig betrachtetes Problemen ist die Bestimmung eines risikominimalen Portfolios:

■ Beispiel 10.0.1 — Bestimmung des risikominimalen Portfolios.
Ein Anleger steht vor der Frage, wie gross er die Anteile x_1, x_2 und x_3 von drei zur Auswahl stehenden Wertpapieren bei der Bildung seines Portfolios wählen soll. Dabei ist bekannt, dass die Renditen der drei Wertpapiere $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ bzw. $\frac{3}{10}$ betragen. Der Anleger will eine Gesamtrendite von $\frac{7}{30}$ erzielen. Existieren mehrere Portfolios, die diese Gesamtrendite erzielen, so will er sein Geld so anlegen, dass das mit dem Portfolio verbundene Investitionsrisiko minimiert wird. Dabei nimmt er an, dass das Risiko des Portfolios mit Anteilen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ durch die Funktion

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{20}x_1^2 + \frac{1}{20}x_2^2 + \frac{1}{20}x_3^2$$

beschrieben werden kann. Wie sollte der Anleger die Anteile x_1, x_2 und x_3 wählen, um sein Ziel zu erreichen? ■

Aus der Mikroökonomie kennen Sie sicher bereits Fragestellungen der folgenden Art:

■ Beispiel 10.0.2 — Ein Konsument mit Budgetbeschränkung.
Ein Konsument hat 600 CHF, die er für zwei Güter ausgeben kann. Gut 1 kostet 2 CHF

pro Einheit und Gut 2 kostet 3 CHF pro Einheit. Der Nutzen des Konsumenten ist gegeben durch die Cobb Douglas Nutzenfunktion

$$f(\mathbf{x}) = x_1^{0.8} x_2^{0.2},$$

wobei x_1 die Anzahl an Einheiten von Gut 1 und x_2 die Anzahl an Einheiten von Gut 2 repräsentiert. Wie viele Einheiten sollte der Konsument von beiden Gütern kaufen, um seinen Nutzen zu maximieren? ■

In einem Produktionsunternehmen treten in der Regel Probleme der Deckungsbeitragsmaximierung bei gegebenen Ressourcen wie in Einführungsbeispiel 1.0.6 beschrieben auf. Auch folgendes Problem stellt ein solches Produktionsplanungsproblem dar:

■ Beispiel 10.0.3 — Pralinenproduktion.
Die Pralinenproduktion aus Beispiel 6.5.1 hat für den aktuellen Produktionslauf 6796.74 Kilogramm K_1 (Kakaobutter) und 5277 Kilogramm K_2 (Kakaomasse) zur Verfügung. Jede Praline erbringt einen Deckungsbeitrag von 2 CHF. Es erscheint daher naheliegend, von jeder Sorte gleich viele Pralinen herzustellen. Ist diese Vermutung korrekt? ■

Auch Mischungsprobleme werden häufig unter dem Stichwort Produktionsprogrammplanung adressiert:

■ Beispiel 10.0.4 — Ein Mischungsproblem.
Drei Gase mit jeweils bekanntem Preis, Schwefelgehalt und Heizwert sollen so gemischt werden, dass ein Mischgas mit einem Schwefelgehalt von höchstens 2 $[g/m^3]$ und einem Heizwert von mindestens 2000 $[kcal/m^3]$ entsteht. Preise, Schwefelgehalte und Heizwerte der Gase sind in folgender Tabelle aufgelistet:

Gas	1	2	3
Preis (CHF/m^3)	0.1	0.3	0.2
Schwefelgehalt (g/m^3)	2	1	3
Heizwert ($kcal/m^3$)	1000	2000	4000

In welchen Anteilen sind die Gase zu mischen, wenn man eine kostenminimale Mischung (je m^3) erzielen will, die obige Bedingungen erfüllt?

■

10.1 Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen

Wir definieren zunächst, was wir genau unter einem Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen verstehen, bevor wir die Ideen an einigen Beispielen illustrieren und im Anschluss zwei Sonderfälle ausführlicher besprechen.

10.1.1 Definition eines Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen

Ziele dieses Unterkapitels

- Was versteht man unter einem Minimierungsproblem unter Nebenbedingungen (P-min)?
- Was versteht man unter einem Maximierungsproblem unter Nebenbedingungen

(P-max)?
- Was versteht man unter zulässigen Lösungen?

Ein Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen formuliert die Suche nach einem Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, der den maximalen bzw. minimalen Funktionswert $f(\mathbf{x})$ unter allen Vektoren liefert, welche eine gegebene Menge an Gleichheits- und Ungleichheitsnebenbedingungen erfüllen. Dabei nennen wir f die Zielfunktion. Vektoren, welche im Definitionsbereich von f liegen und die Nebenbedingungen erfüllen, heissen zulässige Vektoren. Die Menge aller zulässigen Vektoren nennt man zulässigen Bereich B. Ein Vektor heisst optimale Lösung des Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen, wenn er unter allen Vektoren des zulässigen Bereichs den grössten (oder kleinsten) Funktionswert von f erzielt. Als Standardproblem bezeichnen wir dabei folgendes Problem:[1]

Definition 10.1.1 — Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen. Seien $f, g_1, \ldots, g_m$ reelle Funktionen in n Variablen mit Definitionsbereich D und

$$B = \{\mathbf{x} \in D \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \ldots, k, g_i(\mathbf{x}) = 0, i = k+1, \ldots, m\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Das Problem $\min_{\mathbf{x} \in B} f(\mathbf{x})$ schreibt man auch als

$$\begin{array}{lll} \text{(P-min)} & \min\limits_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}) & \\ & \text{u.d.N. } g_i(\mathbf{x}) \leq 0, & i = 1, \ldots, k, \\ & g_i(\mathbf{x}) = 0, & i = k+1, \ldots, m, \end{array}$$

wobei $k \leq m, k \in \mathbb{N}_0$. (P-min) heisst Minimierungsproblem oder Optimierungsproblem unter (oder mit) Nebenbedingungen.

Das Problem $\max_{\mathbf{x} \in B} f(\mathbf{x})$ schreibt man auch als

$$\begin{array}{lll} \text{(P-max)} & \max\limits_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}) & \\ & \text{u.d.N. } g_i(\mathbf{x}) \leq 0, & i = 1, \ldots, k, \\ & g_i(\mathbf{x}) = 0, & i = k+1, \ldots, m, \end{array}$$

wobei $k \leq m, k \in \mathbb{N}_0$. (P-max) heisst Maximierungsproblem oder Optimierungsproblem unter (oder mit) Nebenbedingungen.[a]

Die Funktion f nennt man Zielfunktion, die Menge B zulässigen Bereich, Elemente aus B nennt man auch zulässige Lösungen. Ist $B \neq \{\}$, dann heissen (P-min) und (P-max) zulässig.

[a] u.d.N. steht dabei für unter den Nebenbedingungen

Entspricht der Definitonsbereich D dem natürlichen Definitionsbereich, lässt man die Beschreibung $\mathbf{x} \in D$ unter dem max- bzw. min-Symbol oft weg. Wir versuchen im Folgenden die Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen der oben erwähnten Beispiele zu formulieren.

Beispiel 10.1.1 — Bestimmung des risikominimalen Portfolios - Fortsetzung.

[1] In folgender Definition entfallen Nebenbedingungen der Form $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ im Fall $k = 0$ und Nebenbedingungen der Form $g_i(\mathbf{x}) = 0$ im Fall $k = m$.

Wie in Beispiel 10.0.1 erläutert, stehen dem Anleger drei Wertpapiere zur Bildung des Portfolios zur Auswahl. Bezeichnen wir die Anteile der Wertpapiere mit x_1, x_2 und x_3, ist das Ziel des Anlegers, das Risiko

$$f : [0,+\infty)^3 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{20}x_1^2 + \frac{1}{20}x_2^2 + \frac{1}{20}x_3^2$$

des Portfolios zu minimieren. Ohne Nebenbedingungen hat diese Zielfunktion ihr globales Minimum an der Stelle $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Natürlich ist dies aber keine zulässige Lösung, da (unter anderem) die Summe der Anteile bei dieser Lösung nicht 1 ergibt und diese Werte daher keine Portfolioanteile darstellen.

Wir formulieren daher nun die Nebenbedingungen des Anlegers: Um sicherzustellen, dass die Summe der Anteile 1 ergibt, fordern wir

$$g_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0.$$

Zudem soll die Gesamtrendite genau $\frac{7}{30}$ betragen, wobei die Renditen der drei Wertpapiere $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ bzw. $\frac{3}{10}$ betragen. Die Nebenbedingung, dass die Gesamtrendite, also das gewichtete Mittel dieser drei Renditen, $\frac{7}{30}$ betragen soll, lautet damit

$$\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{3}{10}x_3 = \frac{7}{30}$$

bzw.

$$g_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{3}{10}x_3 - \frac{7}{30} = 0.$$

Damit gelangen wir zu folgendem Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}\in[0,+\infty)^3} \frac{1}{20}x_1^2 + \frac{1}{20}x_2^2 + \frac{1}{20}x_3^2 \\
&\text{u.d.N.} \qquad x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \\
&\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{3}{10}x_3 - \frac{7}{30} = 0.
\end{aligned}$$

Die Zielfunktion ist hier f. Es gibt keine Ungleichheitsnebenbedingungen und zwei Gleichheitsnebenbedingungen.

■

Auch das Mischungsproblem hat zum Ziel, einen minimalen Funktionswert zu finden:

■ Beispiel 10.1.2 — Ein Mischungsproblem - Fortsetzung.

Das Mischungsproblem hat zum Ziel, die kostengünstigste Mischung dreier Gase zu finden, welche einen vorgegebenen Heizwert erreicht ohne einen vorgegebenen Schwefelgehalt zu übertreffen.

Gas 1 kostet 0.1, Gas 2 kostet 0.3 und Gas 3 kostet 0.2 CHF pro Kubikmeter. Das kostengünstigste der drei betrachteten Gase ist somit Gas 1. Dieses Gas hat jedoch nicht den vorgegebenen Heizwert. Eine Mischung von drei Gasen mit Anteilen x_1, x_2 und x_3 verursacht Kosten in Höhe von $0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3$ CHF pro m^3. Die zu minimierende Zielfunktion ist also

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ mit } f(\mathbf{x}) = 0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3.$$

Der Schwefelgehalt der Mischung ist $2x_1 + 1x_2 + 3x_3$ Gramm je Kubikmeter. Dieser Wert darf höchstens 2 sein. Die Nebenbedingung ist somit

$$2x_1 + 1x_2 + 3x_3 \leq 2 \text{ bzw. } g_1(\mathbf{x}) = 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 - 2 \leq 0.$$

Der Heizwert der Mischung ist $1000x_1 + 2000x_2 + 4000x_3$ kcal je Kubikmeter. Dieser Wert muss mindestens 2000 sein. Die Nebenbedingung ist somit

$$1000x_1 + 2000x_2 + 4000x_3 \geq 2000 \text{ bzw. } g_2(\mathbf{x}) = 2000 - 1000x_1 - 2000x_2 - 4000x_3 \leq 0.$$

Da die Summe der Anteile gleich 1 sein muss und Anteile der Mischung nicht negativ sein können, muss zudem

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \text{ bzw. } g_3(\mathbf{x}) = -x_1 \leq 0, g_4(\mathbf{x}) = -x_2 \leq 0, g_5(\mathbf{x}) = -x_3 \leq 0$$

und

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \text{ bzw. } g_6(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$$

gefordert werden.

Zusammenfassend ergibt sich das folgende Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \min\ 0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 & \\ \text{u.d.N.} \qquad 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 - 2 &\leq 0 \\ 2000 - 1000x_1 - 2000x_2 - 4000x_3 &\leq 0 \\ -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \\ -x_3 &\leq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

■

Im letzten Beispiel nutzten wir bereits, dass man Nebenbedingungen der Form $h(\mathbf{x}) \geq 0$ durch Subtraktion von $h(\mathbf{x})$ bzw. durch Multiplikation mit (-1) stets in Nebenbedingungen der Form $-h(\mathbf{x}) = g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ umformen kann. Dass in Definition 10.1.1 nur Gleichheitsnebenbedingungen und Ungleichheitsnebenbedingungen der Form $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ vorkommen, stellt also keine Einschränkung dar.

■ Beispiel 10.1.3 — Produktionsplanung - Fortsetzung.
Im Einführungsbeispiel 1.0.6 soll der Deckungsbeitrag maximiert werden. Der Deckungsbeitrag von Produkt P_1 ist 4 CHF pro Mengeneinheit, der von P_2 ist 5 CHF pro Mengeneinheit. Wenn x_1 Einheiten von Produkt P_1 und x_2 Einheiten von P_2 produziert werden, ist der Gesamtdeckungsbeitrag

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ mit } f(\mathbf{x}) = 4x_1 + 5x_2$$

zu maximieren.

In einem Problem ohne Nebenbedingungen würde man unendlich viel von x_1 und x_2 produzieren wollen. Durch die begrenzten Ressourcen von F_1 und F_2 sowie die Kapazität der Presse ergeben sich jedoch Nebenbedingungen: Da die Herstellungsdauer der beiden Produkte jeweils 1 Minute ist, ergibt sich eine Gesamtherstellungsdauer von $x_1 + x_2$ Minuten. Insgesamt stehen 700 Minuten zur Verfügung. Somit muss

$$x_1 + x_2 \leq 700 \text{ bzw. } g_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 700 \leq 0$$

gelten.

Für eine Einheit von P_1 wird eine Einheit von F_1 und für eine Einheit von P_2 werden drei Einheiten von F_1 benötigt . Insgesamt werden also $x_1 + 3x_2$ Einheiten von F_1 verbraucht. Da 1500 Einheiten von F_1 zur Verfügung stehen, ergibt sich

$$x_1 + 3x_2 \leq 1500 \text{ bzw. } g_2(\mathbf{x}) = x_1 + 3x_2 - 1500 \leq 0.$$

Für eine Einheit von P_1 werden zwei Einheiten von F_2 und für eine Einheit von P_2 wird eine Einheit von F_2 benötigt. Insgesamt werden also $2x_1 + x_2$ Einheiten von F_2 verbraucht. Da 1200 Einheiten von F_2 zur Verfügung stehen, ergibt sich

$$2x_1 + x_2 \leq 1200 \text{ bzw. } g_3(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2 - 1200 \leq 0.$$

Fordert man zudem, dass die Anzahl der Mengeneinheiten nicht-negativ sind, also $g_4(\mathbf{x}) = -x_1 \leq 0$ und $g_5(\mathbf{x}) = -x_2 \leq 0$, ergibt sich das folgende Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} & \max\ 4x_1 + 5x_2 \\ \text{u.d.N.} \quad & x_1 + x_2 - 700 \leq 0 \\ & x_1 + 3x_2 - 1500 \leq 0 \\ & 2x_1 + x_2 - 1200 \leq 0 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Um die Nebenbedingungen einfacher interpretieren zu können, schreibt man die Konstanten häufig auf der rechten Seite. So liest man hier zum Beispiel links den Verbrauch bei der Herstellung von Mengen x_1 und x_2 und rechts die Kapazitäten ab. Nichtnegativitätsbedingungen belässt man zur Übersichtlichkeit oft in der Schreibweise $x_i \geq 0$. Wir schreiben also z.B. auch:

$$\begin{aligned} & \max\ 4x_1 + 5x_2 \\ \text{u.d.N.} \quad & x_1 + x_2 \leq 700 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 1500 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 1200 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

■

■ **Beispiel 10.1.4 — Konsument mit Budgetbeschränkung - Fortsetzung.**
Bezeichnet man die Anzahl der Einheiten von Gut 1 als x_1 und die von Gut 2 als x_2, kann man die Budgetbeschränkung des Konsumenten aus Beispiel 10.0.2 als

$$2x_1 + 3x_2 \leq 600 \text{ bzw. } 2x_1 + 3x_2 - 600 \leq 0$$

ausdrücken. Will der Konsument die gesamten 600 CHF des Budgets vollständig nutzen, kann man auch

$$g_1(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2 - 600 = 0$$

schreiben. Das Problem, dass der Konsument seinen Nutzen unter dieser Budgetrestriktion maximieren will, kann man also mit Zielfunktion $f:(0,+\infty)^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = x_1^{0.8} x_2^{0.2}$ als

$$\begin{aligned} &\max_{\mathbf{x}\in(0,+\infty)^2} && x_1^{0.8} x_2^{0.2} \\ &\text{u.d.N.} && 2x_1 + 3x_2 - 600 = 0 \end{aligned}$$

formulieren. Gleichbedeutend hätte man auch

$$\max_{\mathbf{x}\in B} x_1^{0.8} x_2^{0.2}$$

mit

$$B = \left\{ \mathbf{x} \in (0,+\infty)^2 \,\middle|\, 2x_1 + 3x_2 - 600 = 0 \right\}$$

schreiben können. ■

Z Für reelle Funktionen $f, g_1, \ldots, g_m$ mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $k \leq m$, $k \in \mathbb{N}_0$, und $B = \{\mathbf{x} \in D \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \ldots, k, g_i(\mathbf{x}) = 0, i = k+1, \ldots, m\}$ nennt man das Problem $\min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ bzw. $\max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ Minimierungsproblem bzw. Maximierungsproblem unter Nebenbedingungen (P-min) bzw. (P-max).

Vektoren $\mathbf{x} \in B$ heissen zulässige Lösungen.

10.1.2 Optimale Lösungen

Ziele dieses Unterkapitels

- Was versteht man unter der optimalen Lösung eines Minimierungsproblems unter Nebenbedingungen?
- Was versteht man unter der optimalen Lösung eines Maximierungsproblems unter Nebenbedingungen?
- Was sind globale und lokale Extrema einer Funktion unter Nebenbedingungen?

Eine zulässige Lösung, welche den minimalen Zielfunktionswert erzielt, heisst auch optimale Lösung des Minimierungsproblems unter Nebenbedingungen. Entsprechend heisst eine zulässige Lösung, welche den maximalen Zielfunktionswert erzielt, auch optimale Lösung des Maximierungsproblems unter Nebenbedingungen. Zudem definieren wir globale Extrema von Optimierungsproblemen unter Nebenbedingungen analog zu Kapitel 9.

Definition 10.1.2 — Globale Extrema und optimale Lösungen. Sei $f: D \to Z$ eine reelle Funktion in n Variablen und $B \subseteq D$ ein zulässiger Bereich. Existiert ein Vektor $\mathbf{x}^* \in B$ mit

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \text{ für alle } \mathbf{x} \in B,$$

so heisst $\mathbf{x}^*$ globale Minimalstelle von f auf B und optimale Lösung von (P-min) bzw. $\min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$. Den Wert $f(\mathbf{x}^*)$ nennt man auch globales Minimum oder optimalen Zielfunktionswert von (P-min) bzw. $\min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$.

Analog nennt man $\mathbf{x}^*$ eine globale Maximalstelle von f auf B und optimale Lösung von (P-max) bzw. $\max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$, wenn

$$f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}) \text{ für alle } \mathbf{x} \in B.$$

Den Wert $f(\mathbf{x}^*)$ nennt man dann auch globales Maximum oder optimalen Zielfunktionswert von (P-max) bzw. $\max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$.

Globale Minimal- und Maximalstellen heissen auch globale Extremalstellen von f auf B.

In der Regel ist es nicht einfach, die optimale Lösung eines Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen zu finden. Ist der zulässige Bereich B leer, hat das Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen keine zulässige und damit auch keine optimale Lösung. Enthält B endlich viele Elemente, kann man versuchen, all diese Elemente aufzuzählen.[2] Das Element, welches den minimalen Zielfunktionswert ergibt, ist die optimale Lösung von $\min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$. Das Element, welches den maximalen Zielfunktionswert ergibt, ist die optimale Lösung von $\max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$.

Beispiel 10.1.5 — Ein zulässiger Bereich mit endlich vielen Elementen.
Wir betrachten das Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \min\ x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3 & \\ \text{u.d.N. } x_1^2 &= 4 \\ x_2^2 &= 9 \\ x_1 x_2 &= 6. \end{aligned}$$

Hier gilt $B = \{(2,3)^T, (-2,-3)^T\}$. Die Zielfunktionswerte zulässiger Lösungen sind $f(2,3) = 23$ und $f(-2,-3) = 71$. Das Minimierungsproblem unter Nebenbedingungen $\min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ hat also die optimale Lösung $\mathbf{x}^* = (2,3)^T$ und einen optimalen Zielfunktionswert von $f(\mathbf{x}^*) = 23$. ■

Wir beschäftigen uns im Folgenden überwiegend mit Problemen, deren zulässiger Bereich B unendlich viele Elemente enthält. Da es wie für Probleme ohne Nebenbedingungen in der Regel einfacher ist, zunächst lokale und dann globale Extrema zu bestimmen, definieren wir lokale Extrema für Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen:

Definition 10.1.3 — Lokale Extrema.
Sei $f: D \to Z$ eine reelle Funktion in n Variablen, $B \subseteq D$ ein zulässiger Bereich und $\mathbf{x}^0 \in B$. Existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$f(\mathbf{x}^0) \leq f(\mathbf{x}) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in B \cap U(\mathbf{x}^0, \varepsilon),$$

dann heisst $\mathbf{x}^0$ lokale Minimalstelle und $f(\mathbf{x}^0)$ lokales Minimum von f auf B. Existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$f(\mathbf{x}^0) \geq f(\mathbf{x}) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in B \cap U(\mathbf{x}^0, \varepsilon),$$

dann heisst $\mathbf{x}^0$ lokale Maximalstelle und $f(\mathbf{x}^0)$ lokales Maximum von f auf B.

[2] Enthält B sehr viele, aber endlich viele Elemente, ist eine Lösung durch Aufzählen aller Elemente (Enumeration) in der Regel (zu) aufwändig. Um den Aufwand dann zu reduzieren, werden Sie in weiterführenden Veranstaltungen verschiedene Verfahren kennenlernen.

Lokale Minimal- und Maximalstellen von f auf B heissen auch lokale Extremalstellen von f auf B.

■ Beispiel 10.1.6 — Ein Beispiel mit nur einer Variablen.
Versucht man, den maximalen Wert der Zielfunktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x) = -2+(x+1)^2$ innerhalb des zulässigen Bereichs $B = [-3,2]$ zu bestimmen, kann man dies als folgendes Maximierungsproblem beschreiben:

$$\begin{aligned} \max\ & -2+(x+1)^2 \\ \text{u.d.N.}\ & -x \le 3 \\ & x \le 2. \end{aligned}$$

Abbildung 10.1 zeigt die Funktion f und den zulässigen Bereich. Wir nennen analog zu den Ausführungen in Kapitel 9 die Stelle $x = -1$ lokale und globale Minimalstelle von f über B. Die Stellen $x = -3$ und $x = 2$ nennen wir lokale Maximalstellen. Das globale Maximum befindet sich an der Stelle $x^* = 2$. Diese Stelle ist die Lösung des obigen Maximierungsproblems unter Nebenbedingungen. Der optimale Zielfunktionswert dieses Problems ist 7.

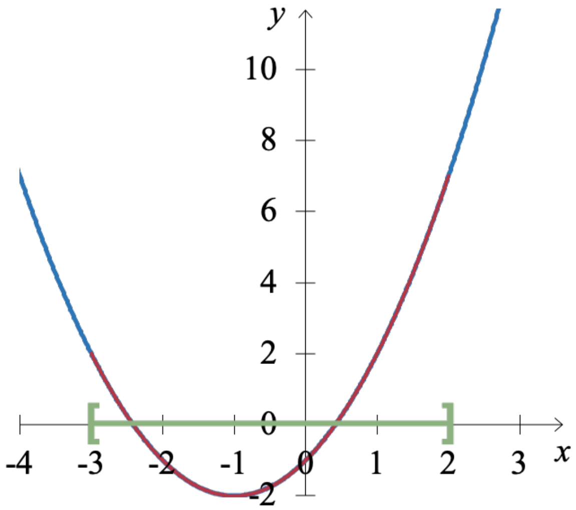


Abbildung 10.1: Die Funktion f und der zulässige Bereich B.

■

Z Eine zulässige Lösung $\mathbf{x}^* \in B$, welche den minimalen bzw. maximalen Zielfunktionswert aller zulässigen Lösungen erzielt, heisst optimale Lösung des Minimierungsproblems (P-min) bzw. des Maximierungsproblems (P-max).

$f(\mathbf{x}^*) = \min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ bzw. $f(\mathbf{x}^*) = \max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ heisst globales Minimum bzw. Maximum von f auf B. Gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $f(\mathbf{x}^0) = \min_{\mathbf{x}\in B\cap U(\mathbf{x}_0,\varepsilon)} f(\mathbf{x})$ bzw. $f(\mathbf{x}^0) = \max_{\mathbf{x}\in B\cap U(\mathbf{x}_0,\varepsilon)} f(\mathbf{x})$, dann heisst $f(\mathbf{x}^0)$ lokales Minimum bzw. Maximum von f auf B.

10.1.3 Äquivalente Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen

Ziele dieses Unterkapitels

- Wann nennt man zwei Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen äquivalent?
- Wie kann man ein Maximierungsproblem unter Nebenbedingungen als ein äquivalentes Minimierungsproblem unter Nebenbedingungen formulieren?

Aus Satz 9.4.3 wissen wir, dass jede globale Maximalstelle einer reellen Funktion in n Variablen eine globale Minimalstelle von $-f$ ist und

$$\max_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x}) = -\min_{\mathbf{x}\in D} -f(\mathbf{x})$$

gilt. Analog gilt auch für Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen:

Satz 10.1.1 — Max-Min-Dualität für Optimierungsprobleme.
Sei f eine reelle Funktion in n Variablen und $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Der Vektor $\mathbf{x}^* \in B$ ist eine optimale Lösung von $\max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ genau dann, wenn $\mathbf{x}^*$ eine optimale Lösung von $\min_{\mathbf{x}\in B} -f(\mathbf{x})$ ist.

Beweis. Der Beweis folgt durch Multiplikation der Ungleichungen in Definition 10.1.2 mit (-1). ■

Wir nutzen dies zur Formulierung von Minimierungsproblemen unter Nebenbedingungen in den Beispielen, welche wir zuvor als Maximierungsprobleme unter Nebenbedingungen formulierten:

■ Beispiel 10.1.7 — Konsument mit Budgetbeschränkung - Fortsetzung.
Das Maximierungsproblem des Konsumenten mit Budgetbeschränkung ist

$$\text{(P-max)} \max_{\mathbf{x}\in B} x_1^{0.8} x_2^{0.2}$$

mit

$$B = \left\{\mathbf{x} \in (0,+\infty)^2 \,\middle|\, 2x_1 + 3x_2 - 600 = 0\right\}.$$

Aus Satz 10.1.1 kann man schliessen, dass

$$\text{(P-min)} \min_{\mathbf{x}\in B} -x_1^{0.8} x_2^{0.2}$$

oder, anders formuliert

$$\begin{array}{ll} & \min\ -x_1^{0.8} x_2^{0.2} \\ \text{u.d.N.} & 2x_1 + 3x_2 - 600 = 0 \end{array}$$

die gleichen optimalen Lösungen hat. Der Zielfunktionswert, welcher sich aus der Lösung von (P-min) ergibt, ist jedoch das (-1)-fache des gesuchten Nutzen. ■

Formuliert man wie in obigem Beispiel ein Maximierungsproblem unter Nebenbedingungen (P-max) als ein Minimierungsproblem unter Nebenbedingungen, ergibt sich ein Problem (P-min), dessen optimaler Zielfunktionswert in der Regel nicht dem optimalen Zielfunktionswert von (P-max) entspricht. Das Problem (P-min) hat aber die gleichen optimalen Lösungen wie (P-max). Man spricht in diesem Zusammenhang auch von äquivalenten Optimierungsproblemen.

Definition 10.1.4 — Äquivalente Optimierungsprobleme.
Zwei Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen heissen äquivalent, wenn jede optimale Lösung des einen auch eine optimale Lösung des anderen ist und umgekehrt.

Wir formulieren das äquivalente Minimierungsproblem unter Nebenbedingungen des (Deckungsbeitrag-maximierenden) Maximierungsproblems unter Nebenbedingungen aus Beispiel 10.1.3.

■ Beispiel 10.1.8 — Produktionsplanung - Fortsetzung.
Das im Produktionsbeispiel zu lösende Optimierungsproblem lautet

$$\begin{aligned} \text{(P-max)} \qquad & \max\ 4x_1 + 5x_2 \\ \text{u.d.N.} \qquad & x_1 + x_2 \leq 700 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 1500 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 1200 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Die zu minimierende Zielfunktion ist damit

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ mit } f(\mathbf{x}) = -y = -4x_1 - 5x_2.$$

(P-max) ist also äquivalent zu folgendem Minimierungsproblem unter Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{(P-min)} \qquad & \min\ -4x_1 - 5x_2 \\ \text{u.d.N.} \qquad & x_1 + x_2 - 700 \leq 0 \\ & x_1 + 3x_2 - 1500 \leq 0 \\ & 2x_1 + x_2 - 1200 \leq 0 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass die Lösung $\mathbf{x}^*$ des Minimierungsproblems zwar der Vektor ist, der unter allen Vektoren im zulässigen Bereich den maximalen Deckungsbeitrag erzielt, aber $f(\mathbf{x}^*)$ natürlich nicht den maximalen Deckungsbeitrag beschreibt. In der Tat gilt

$$f(\mathbf{x}^*) = -(4x_1^* + 5x_2^*).$$

Das Problem (P-min) ist also äquivalent zu (P-max), die optimalen Zielfunktionswerte unterscheiden sich jedoch (um das Vorzeichen). ■

Maximierungsprobleme unter Nebenbedingungen können also mithilfe von Satz 10.1.1 auch als Minimierungsprobleme unter Nebenbedingungen formuliert werden und umgekehrt.

Z Zwei Optimierungsprobelme unter Nebenbedingungen heissen äquivalent, wenn sie die gleichen optimalen Lösungen haben. Unter anderem sind die Probleme $\min_{\mathbf{x}\in B}(-f(\mathbf{x}))$ und $\max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ äquivalent.

10.1.4 Globale Extremalstellen und optimale Lösungen

Ziele dieses Unterkapitels

- Was kann man aus dem globalen Minimum von f (im Fall der Existenz) über die optimale Lösung von (P-min) schliessen?

In Kapitel 9 bestimmten wir globale und lokale Extremalstellen einer reellen Funktion $f : D \to Z$ in n Variablen (ohne Nebenbedingungen). Eine globale Minimalstelle von f ist dabei eine Stelle $\mathbf{x}^{\min}$, für welche $f(\mathbf{x}^{\min}) \leq f(\mathbf{x})$ für alle Stellen des Definitionsbereichs D von f gilt. Hat f ein globales Minimum und liegt die globale Minimalstelle $\mathbf{x}^{\min}$ der Zielfunktion im zulässigen Bereich $B \neq \{\}, B \subseteq D$, dann gilt offensichtlich auch $f(\mathbf{x}^{\min}) \leq f(\mathbf{x})$ für alle Stellen des zulässigen Bereichs B. In anderen Worten: Gilt $\mathbf{x}^{\min} \in B$, dann ist die globale Minimalstelle auch die optimale Lösung von $\min_{\mathbf{x} \in B} f(\mathbf{x})$. Im Allgemeinen liegt die globale Minimalstelle der Zielfunktion jedoch nicht im zulässigen Bereich. Dann muss die Menge B bei der Suche nach einer optimalen Lösung $\mathbf{x}^*$ berücksichtigt werden. Wir demonstrieren diese Idee in folgendem Beispiel:

Beispiel 10.1.9 — Globale Extremalstellen und optimale Lösungen.
Suchen wir die Lösung von

$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 3 \\ \text{u.d.N. } x_1 &\leq 2 \\ -x_1 &\leq 2 \\ x_2 &\leq 2 \\ -x_2 &\leq 2, \end{aligned}$$

so wissen wir aus Beispiel 9.4.3, dass das globale Minimum der Zielfunktion $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 3$ an der Stelle $\mathbf{x}^{\min} = (0,1)^T$ liegt. Es gilt also

$$f(\mathbf{x}^{\min}) = 3 \leq f(\mathbf{x}) \text{ für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$$

und damit auch

$$f(\mathbf{x}^{\min}) = 3 \leq f(\mathbf{x}) \text{ für alle } \mathbf{x} \in B \subseteq \mathbb{R}^2,$$

wobei

$$B = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x_1 \leq 2, -2 \leq x_2 \leq 2 \right\}.$$

Da für die Stelle $\mathbf{x}^{\min}$ alle Nebenbedingungen erfüllt sind, d.h. $\mathbf{x}^{\min} \in B$, ist $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{\min} = (0,1)^T$ eine optimale Lösung des obigen Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen. Der optimale Zielfunktionswert ist $f(\mathbf{x}^{\min}) = f(\mathbf{x}^*) = 3$. Auch durch Hinzunahme der Gleichheitsnebenbedingung $x_1^2 + 2(x_2 - 1) = 0$ bleibt $\mathbf{x}^{\min} = (0,1)^T$ im zulässigen Bereich B. Somit ist $\mathbf{x}^{\min} = (0,1)^T$ auch die optimale Lösung von

$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 3 \\ \text{u.d.N. } x_1 &\leq 2 \\ -x_1 &\leq 2 \\ x_2 &\leq 2 \\ -x_2 &\geq 2 \\ x_1^2 + 2(x_2 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Suchen wir hingegen beispielsweise die optimale Lösung von

$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2+4(x_2-1)^2+3 \\ \text{u.d.N. } & x_1^2+2(x_2-1)-2=0, \end{aligned}$$

so erfüllt $\mathbf{x}=(0,1)^T$ die Nebenbedingung nicht. Der Vektor $(0,1)^T$ ist damit keine zulässige und somit auch keine optimale Lösung.

Da die Ungleichung $f(\mathbf{x}^{\min})=3\le f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$ gilt, muss sie auch für alle zulässigen Lösungen gelten. Aus der Tatsache, dass eine optimale Lösung auch zulässig ist, folgt damit, dass der optimale Zielfunktionswert $f(\mathbf{x}^*)$ des obigen Minimierungsproblems mit einer Gleichheitsnebenbedingung auch mindestens 3 ist. Welchen Wert $f(\mathbf{x}^*)$ dieses Minimierungsproblem hat, werden wir in Beispiel 10.2.20 herausfinden. ▪

Zusammenfassend gilt:

Satz 10.1.2 — Eine Schranke für den optimalen Zielfunktionswert. Sei $f:D\to Z$ eine reelle Funktion in n Variablen und $B\subseteq D$. Hat f ein globales Minimum $f(\mathbf{x}^{\min})$ und $\min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ eine optimale Lösung $\mathbf{x}^*$, so gilt $f(\mathbf{x}^*)\ge f(\mathbf{x}^{\min})$. Hat f ein globales Maximum $f(\mathbf{x}^{\max})$ und $\max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ eine optimale Lösung $\mathbf{x}^*$, so gilt $f(\mathbf{x}^*)\le f(\mathbf{x}^{\max})$.

Beweis. Der Beweis folgt aus den Überlegungen oben. ■

Z Ist $f:D\to Z$ eine reelle Funkton in n Variablen mit globaler Minimalstelle $\mathbf{x}^{\min}$, globaler Maximalstelle $\mathbf{x}^{\max}$ und $B\subseteq D$, dann gilt für die optimale Lösung $\mathbf{x}^*$ von $\min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x}) : f(\mathbf{x}^*)\ge f(\mathbf{x}^{\min})$ und für die optimale Lösung $\mathbf{x}^*$ von $\max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x}) : f(\mathbf{x}^*)\le f(\mathbf{x}^{\max})$.

10.1.5 Graphische Darstellung

Ziele dieses Unterkapitels

- Wie kann man ein Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen und Definitionsbereich $D\subseteq\mathbb{R}$ graphisch darstellen?
- Wie kann man ein Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen und Definitionsbereich $D\subseteq\mathbb{R}^2$ graphisch darstellen?

Wir demonstrieren im Folgenden, wie man sich Optimierungsprobleme mit Nebenbedingungen in n Variablen für kleine n graphisch veranschaulichen kann. Dabei konzentrieren wir uns wieder auf den Fall, dass B unendlich viele Elemente enthält.

Reelle Funktionen in einer Variablen kann man in einem Koordinatensystem mit einer x- und einer y-Achse darstellen. Bei einem Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen in einer Variablen kann man hierbei den zulässigen Bereich auf der x-Achse einzeichnen. Gesucht ist dann der kleinste oder grösste Funktionswert in diesem zulässigen Bereich.

Da die Lösung von Optimierungsproblemen unter Nebenbedingungen in einer Variablen, also im Fall $D\subseteq\mathbb{R}$, sowohl analytisch als auch graphisch in der Regel relativ einfach zu bestimmen ist, betrachten wir als erste Beispiele Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen in einer Variablen ($n=1$):

■ **Beispiel 10.1.10 — Fortsetzung von Beispiel 10.1.6.**
Schon in Beispiel 10.1.6 illustrierten wir in Abbildung 10.1 das Maximierungsproblem

$$\begin{aligned} \max\ & -2+(x+1)^2 \\ \text{u.d.N. } & x \geq -3 \\ & x \leq 2, \end{aligned}$$

indem die Zielfunktion in einem Koordinatensystem dargestellt und der zulässige Bereich $B = [-3, 2]$ markiert wurde. Ein äquivalentes Minimierungsproblem ist

$$\begin{aligned} \min\ & 2-(x+1)^2 \\ \text{u.d.N. } & x \geq -3 \\ & x \leq 2. \end{aligned}$$

Dieses ist in Abbildung 10.2 illustriert. Man erkennt leicht, dass auch die optimale Lösung des Minimierungsproblems $x^* = 2$ ist. Diese Lösung findet man auch mithilfe des in Kapitel 5.7 vorgestellten Schemas, wenn man das globale Minimum von $-f(x) = 2-(x+1)^2$ auf dem (durch die Nebenbedingungen eingeschränkten) Definitionsbereich $B = [-3, 2]$ sucht. ■

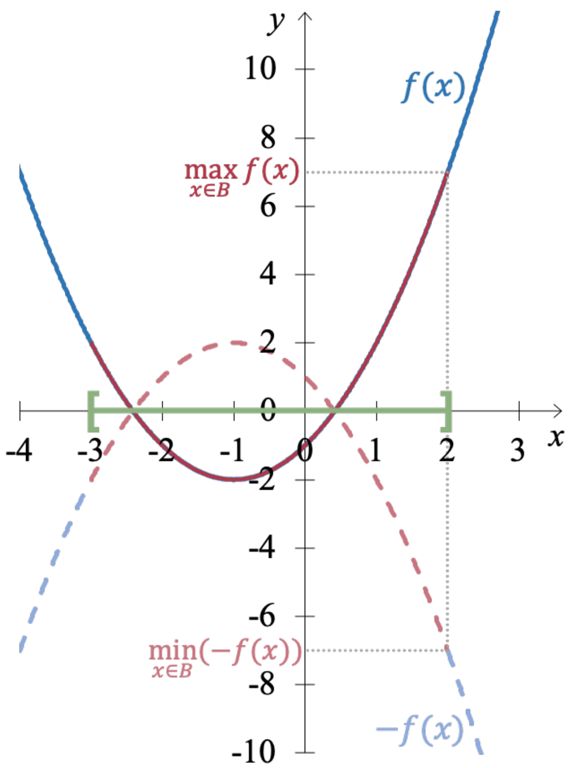


Abbildung 10.2: $f(x) = -2+(x+1)^2$ und $-f(x)$ über B.

■ **Beispiel 10.1.11 — Eine lineare Zielfunktion.**

Wir betrachten das Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} &\max\ \alpha x_1 \\ &\text{u.d.N. } x_1 \leq 5 \\ &\qquad\quad x_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Ist die Zielfunktion $f(x_1) = 3x_1$, also $\alpha = 3$, so ist graphisch klar, dass sich das Maximum

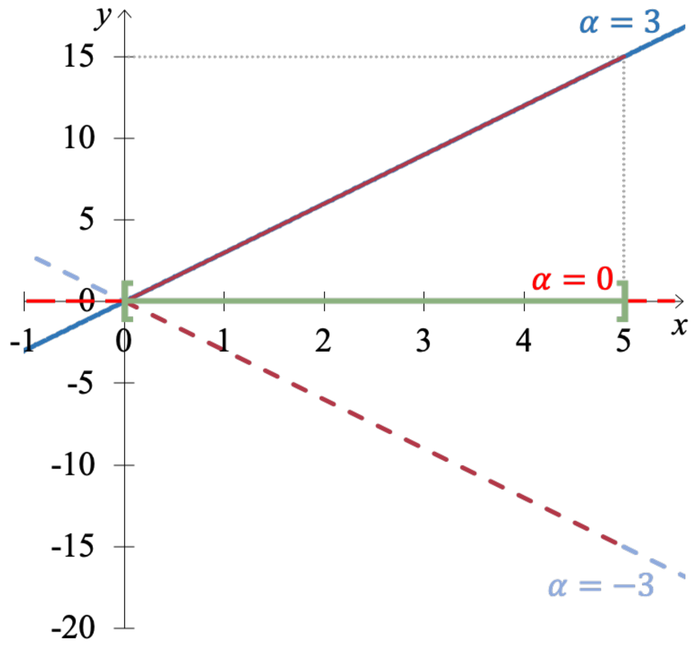


Abbildung 10.3: Die Funktion $f(x) = \alpha x$ und der zulässige Bereich $B = [0,5]$.

an der Stelle $x_1 = 5$ befindet, vgl. Abbildung 10.3. Analytisch kann man dies auch zeigen, indem man feststellt, dass f in x_1 monoton steigt. Somit ist der grösste zulässige Wert von x_1 eine optimale Lösung des Problems, $x_1^* = 5$. Dies gilt für alle $\alpha > 0$. Wäre die Zielfunktion $f(x_1) = -3x_1$, also $\alpha = -3$, so ist graphisch klar, dass sich das Maximum an der Stelle $x_1 = 0$ befindet. Analytisch kann man dies auch zeigen, indem man feststellt, dass f in x_1 monoton fällt. Somit ist der kleinste zulässige Wert von x_1 eine optimale Lösung des Problems, $x_1^* = 0$. Dies gilt für alle $\alpha < 0$. Im Fall $\alpha = 0$ ist der Zielfunktionswert für alle x_1 gleich 0. Jede zulässige Lösung ist damit eine optimale Lösung, $x_1^* \in [0,5]$. ■

Hat ein Optimierungsproblem mit affin-linearer Zielfunktion und affin-linearen Ungleichheitsnebenbedingungen genau eine optimale Lösung, findet man diese also am Rand des zulässigen Bereichs. Wie wir im Abschnitt über lineare Optimierung sehen werden, gilt dies nicht nur im Fall $n = 1$, sondern allgemein für Optimierungsprobleme mit affin-linearer Zielfunktion und affin-linearen Ungleichheitsnebenbedingungen in n Variablen.

Ein Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen und $D \subseteq \mathbb{R}^2$, also in zwei Variablen, kann man sich graphisch veranschaulichen, indem man den zulässigen Bereich in einem 3-dimensionalen Koordinatensystem auf der x_1-x_2-Ebene und die Zielfunktion als Gebirge einzeichnet. Gesucht ist dann der minimale oder maximale Zielfunktionswert, der an einer Stelle innerhalb des zulässigen Bereichs angenommen wird. Statt die Zielfunktion als Gebirge mit einer dritten Achse einzuzeichnen, kann f auch in Form von Höhenlinien repräsentiert werden. Wir demonstrieren dies im Beispiel:

■ Beispiel 10.1.12 — Produktionsplanung - Fortsetzung.
Wir betrachten erneut Beispiel 1.0.6,

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 5x_2 \\ \text{u.d.N.}\quad & x_1 + x_2 \leq 700 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 1500 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 1200 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Um den zulässigen Bereich B graphisch zu kennzeichnen, überlegen wir uns zunächst, welche Punkte die jeweiligen Nebenbedingungen erfüllen, vgl. auch Beispiel 2.2.3. Hierbei gehen wir schrittweise vor. Um die durch $x_1 + x_2 \leq 700$ beschriebene Menge einzuzeichnen, zeichnen wir zunächst alle Punkte auf der Geraden $x_1 + x_2 = 700$ ein. Alle Punkte, die unterhalb dieser Geraden sind, befinden sich in der durch $x_1 + x_2 \leq 700$ beschriebenen Menge. Um die durch $x_1 + 3x_2 \leq 1500$ beschriebene Menge einzuzeichnen, zeichnen wir zunächst alle Punkte auf der Geraden $x_1 + 3x_2 = 1500$ ein. Alle Punkte, die unterhalb dieser Geraden sind, befinden sich in der durch $x_1 + 3x_2 \leq 1500$ beschriebenen Menge. Ebenso gehen wir für die dritte Ungleichung vor. Wegen $x_1, x_2 \geq 0$ liegen alle zulässigen Lösungen im ersten Quadranten des Koordinatensystems, vgl. Abbildung 10.4, welche in grün erneut die Menge P aus Beispiel 2.2.3 und Abbildung 2.18 darstellt. Abbildung

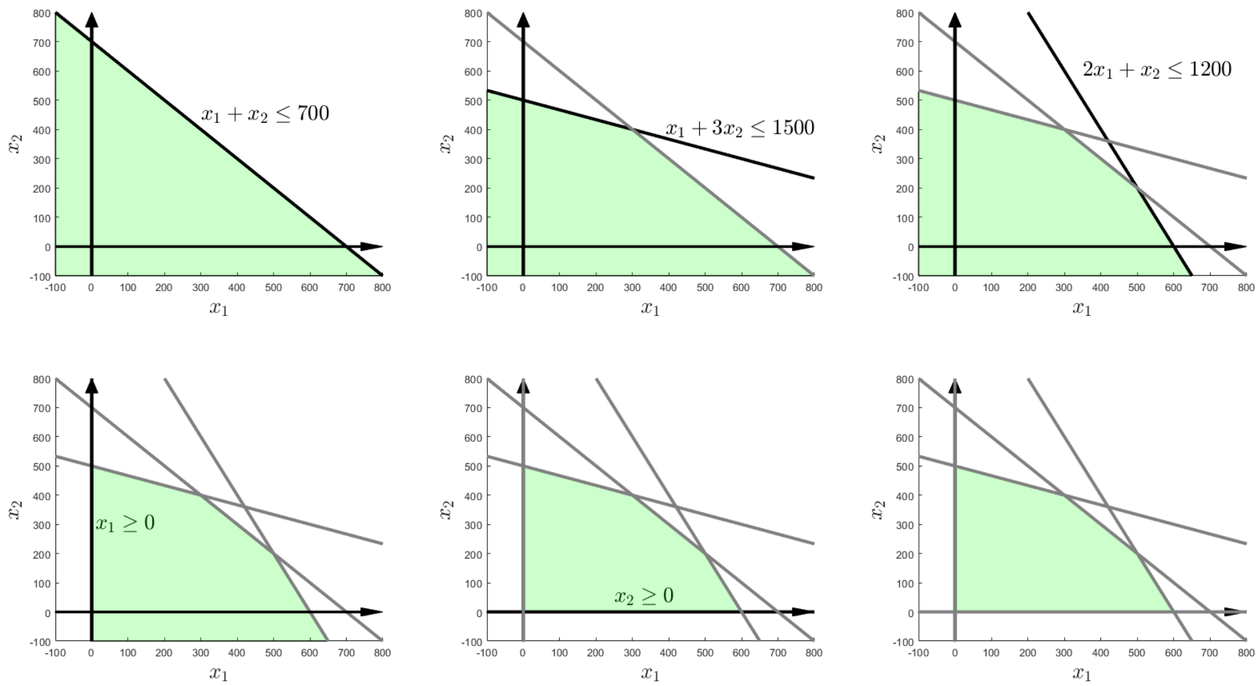


Abbildung 10.4: Darstellung des zulässigen Bereichs B.

10.5 (links) visualisiert nun die affin-lineare Zielfunktion $4x_1 + 5x_2$ als Gebirge über dem zulässigen Bereich B. Abbildung 10.5 (rechts) zeigt entsprechend Höhenlinien der Zielfunktion sowie den zulässigen Bereich. Man erahnt, dass sich auch hier die optimale Lösung, also der Vektor mit maximalem Zielfunktionswert, am Rand des zulässigen Bereiches befindet, $\mathbf{x}^* = (300, 400)^T$. Wir bestimmen diese optimale Lösung im Abschnitt über lineare Optimierung auch analytisch.

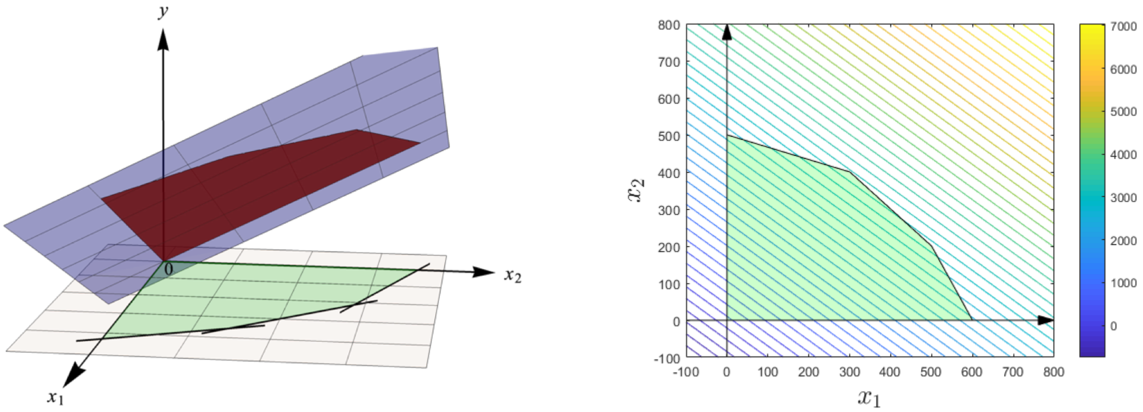


Abbildung 10.5: Die Zielfunktion $f(\mathbf{x}) = 4x_1 + 5x_2$ und Höhenlinien über dem durch die Nebenbedingungen definierten zulässigen Bereich.

■

Ist die Zielfunktion keine affin-lineare Funktion, liegt die optimale Lösung nicht zwingend am Rand des zulässigen Bereichs. Wir demonstrieren dies in folgendem Beispiel:

■ Beispiel 10.1.13 — Globale Extremalstellen und optimale Lösungen von Optimierungsproblemen unter Nebenbedingungen.
Wir betrachten erneut das Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 3 \\ \text{u.d.N. } & x_1 \leq 2 \\ & x_2 \leq 2. \end{aligned}$$

Abbildung 10.6 (links) visualisiert die Zielfunktion $x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 3$ als Gebirge über dem zulässigen Bereich. Abbildung 10.6 (rechts) zeigt entsprechend Höhenlinien der Zielfunktion sowie den zulässigen Bereich. Da das globale Minimum der Zielfunktion $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 3$ an der Stelle $\mathbf{x}^{\min} = (0, 1)^T$ liegt, und $\mathbf{x}^{\min}$ im zulässigen Bereich B ist, $\mathbf{x}^{\min} \in B$, ist $\mathbf{x}^{\min}$ auch die optimale Lösung des Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen. In diesem Fall liegt die optimale Lösung nicht am Rand. In Abbildung 10.6 ist sie durch einen roten Punkt gekennzeichnet. Die Bestimmung der Lösung von

$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 3 \\ \text{u.d.N. } & x_1 \leq 2 \\ & x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

ist schwieriger. Das globale Minimum liegt nun nicht mehr im zulässigen Bereich. Abbildung 10.7 visualisiert dieses Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen. Die Lösung

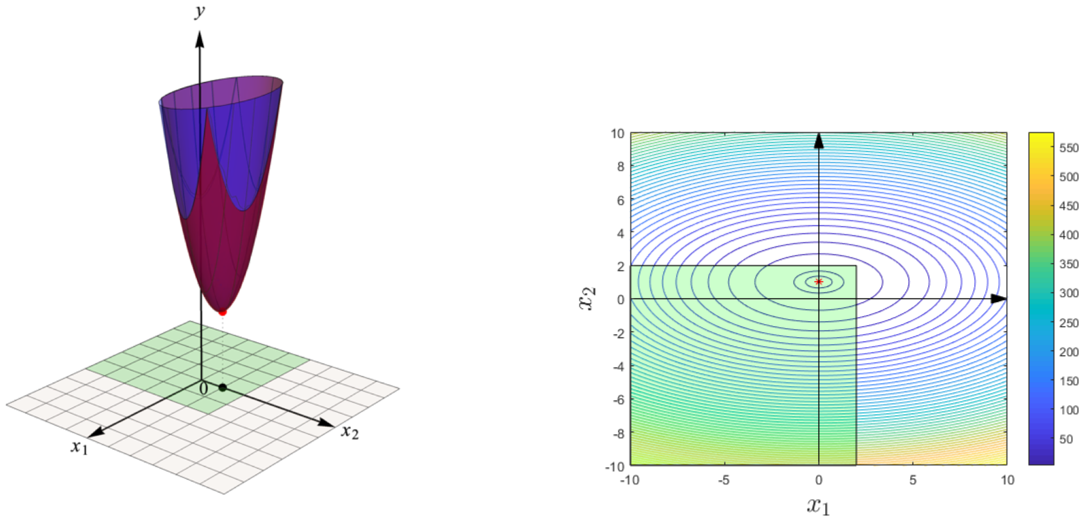


Abbildung 10.6: Die Funktion $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 3$ und Höhenlinien über dem zulässigen Bereich $x_1 \leq 2$, $x_2 \leq 2$.

scheint nun erneut am Rand von B zu liegen. Im Gegensatz zu den Beispielen 10.1.12 und 10.1.15 befindet sie sich jedoch nicht an einer Ecke.

Das Optimierungsproblem unter Nebenbedingung

$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 3 \\ \text{u.d.N. } & x_1^2 + 2(x_2 - 1) - 2 = 0 \end{aligned}$$

ist in Abbildungen 10.8 dargestellt. Unter allen Stellen $\mathbf{x}$, welche auf der durch die Nebenbedingung beschriebenen Parabel liegen, werden diejenigen gesucht, welche $x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 3$ minimieren. Sucht man in Abbildung 10.8 (rechts) die Höhenlinie zum kleinsten Niveau, welche die Parabel berührt, findet man hier die optimalen Lösungen. Wir werden diese später analytisch bestimmen. ■

■ **Beispiel 10.1.14 — Konsument mit Budgetbeschränkung - Fortsetzung.**
Wir betrachten das Problem aus Beispiel 10.1.4,

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in (0,+\infty)^2}\ & x_1^{0.8} x_2^{0.2} \\ \text{u.d.N. } & 2x_1 + 3x_2 = 600. \end{aligned}$$

Der zulässige Bereich entspricht also einer Geraden welche durch die Gleichung $2x_1 + 3x_2 = 600$ beschrieben wird. Abbildung 10.9 (links) visualisiert die Zielfunktion $x_1^{0.8} x_2^{0.2}$ als Gebirge über dem zulässigen Bereich. Abbildung 10.9 (rechts) zeigt entsprechend Höhenlinien der Zielfunktion sowie den zulässigen Bereich. Gesucht ist die Stelle auf der Geraden, welche die Höhenlinie mit dem höchsten Niveau berührt. Wir werden auch diese Stelle später analytisch bestimmen. ■

Optimierungsprobleme in drei oder mehr Variablen kann man im Allgemeinen nur schwer graphisch darstellen.[3] In folgendem Beispiel zeigen wir, wie man Gleichheitsne-

[3]Denkbar wäre es bei einem Optimierungsproblem in drei Variablen, den zulässigen Bereich in einem

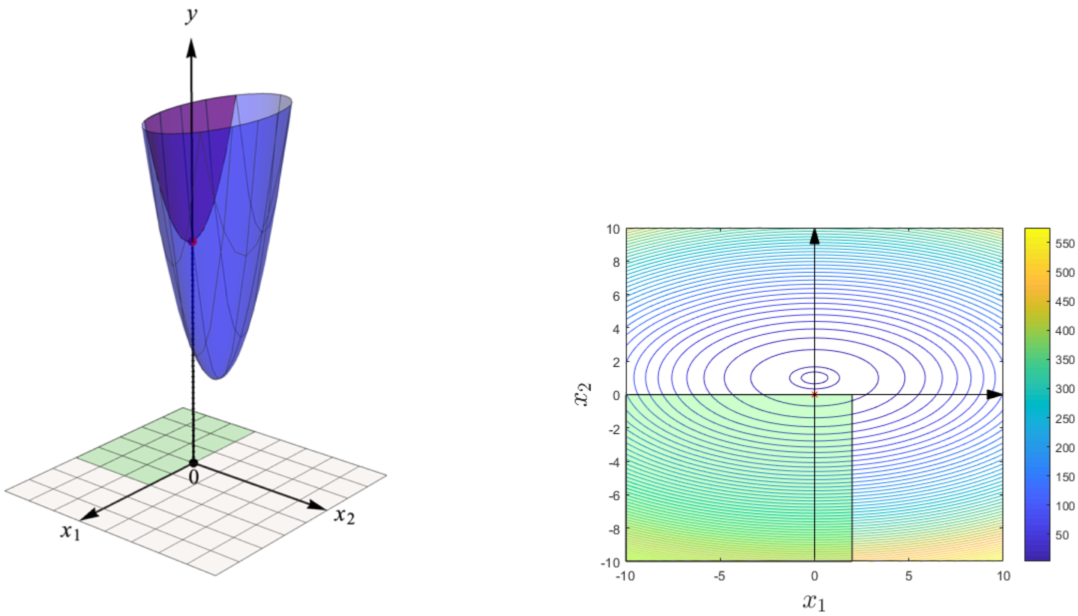


Abbildung 10.7: Die Funktion $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3$ und Höhenlinien über dem neuen Gebiet $x_1 \leq 2$, $x_2 \leq 0$.

benbedingungen ggf. nutzen kann, um eine Variable zu ersetzen. Diese Idee werden wir im kommenden Abschnitt dann auch zur analytischen Optimierung nutzen.

■ Beispiel 10.1.15 — Mischungsproblem - Fortsetzung.
Das Mischungsproblem

$$\begin{aligned}
\min\ & 0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 \\
\text{u.d.N.}\quad & 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 \leq 2 \\
& 1000x_1 + 2000x_2 + 4000x_3 \geq 2000 \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

aus Beispiel 10.1.2 ist ein Optimierungsproblem in drei Variablen. Da laut der dritten Nebenbedingung $x_3 = 1 - x_1 - x_2$ gelten muss, kann man das Mischungsproblem auch wie

dreidimensionalen Koordinatensystem einzuzeichnen. Die Zielfunktion könnte man hier in Form von Mengen mit gleichem Zielfunktionswert (also eine Verallgemeinerung unserer Definition von Höhenlinien auf mehrere Dimensionen) ebenfalls in diesem Koordinatensystem visualisieren. Im Allgemeinen erkennt man in einer derartigen Abbildung aber nicht viel.

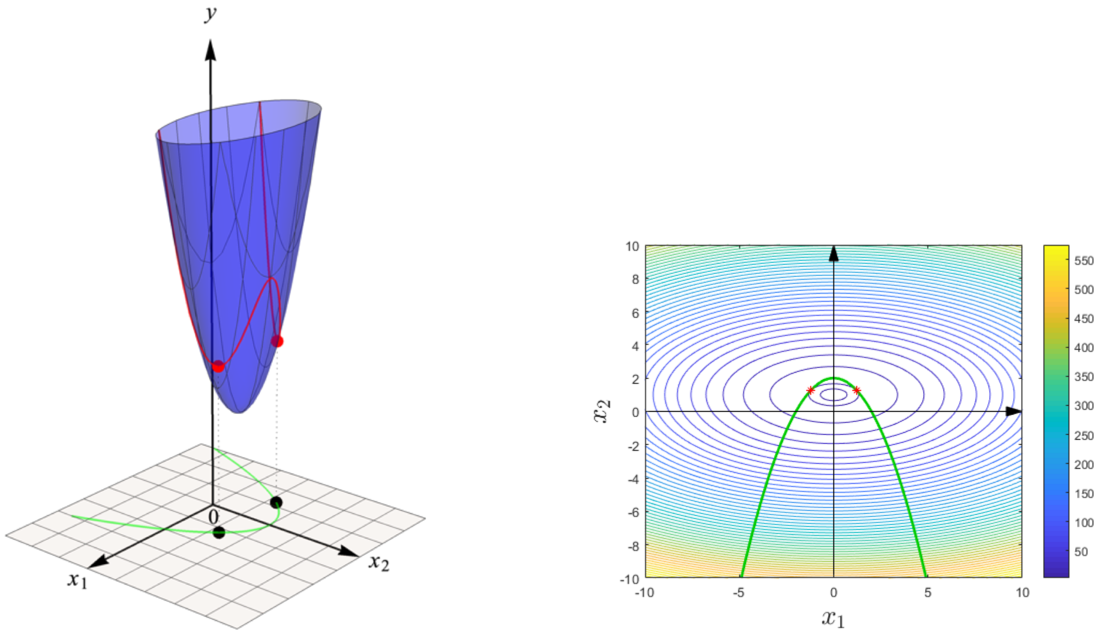


Abbildung 10.8: Die Funktion $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3$ und Höhenlinien mit der Nebenbedingung $x_1^2 + 2(x_2-1) - 2 = 0$.

folgt formulieren:

$$\begin{aligned}
\min\ & 0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.2(1-x_1-x_2)\\
\text{u.d.N.}\ & 2x_1 + 1x_2 + 3(1-x_1-x_2) \leq 2\\
& 1000x_1 + 2000x_2 + 4000(1-x_1-x_2) \geq 2000\\
& x_1 + x_2 \leq 1\\
& x_1 \geq 0\\
& x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Die dritte Ungleicheitsnebenbedingung folgt dabei aus der Nebenbedingung $x_3 \geq 0$ durch $0 \leq x_3 = 1 - x_1 - x_2 = 1 - (x_1 + x_2) \Leftrightarrow x_1 + x_2 \leq 1$. Diese Umformulierung ergibt ein Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen in nur zwei Variablen und kann analog zum Produktionsplanungsproblem graphisch dargestellt werden. Die erste Nebenbedingung vereinfacht sich durch Ausmultiplizieren und Abziehen von 3 zu

$$-x_1 - 2x_2 \leq -1.$$

Die zweite Nebenbedingung ergibt

$$-3000x_1 - 2000x_2 \geq -2000.$$

Multiplikation von (-1) ergibt

$$3000x_1 + 2000x_2 \leq 2000.$$

Vereinfacht man zudem die Zielfunktion, erhält man

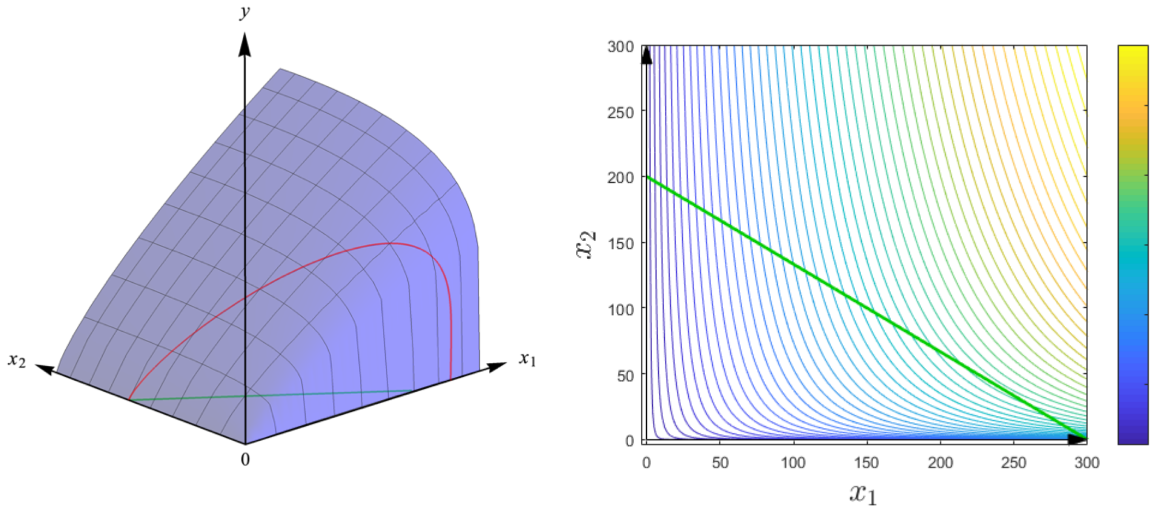


Abbildung 10.9: Die Cobb Douglas Funktion und Höhenlinien mit der Nebenbedingung $2x_1 + 3x_2 = 600$.

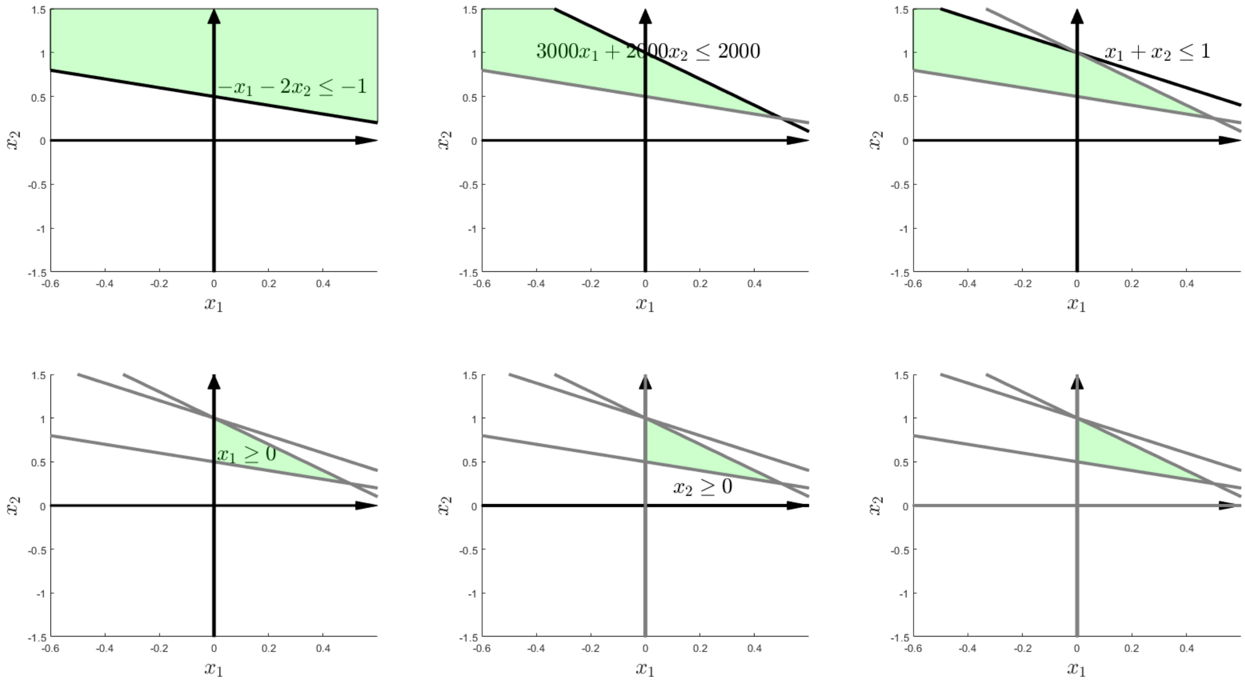
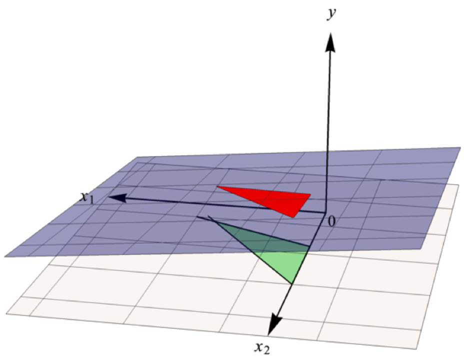


Abbildung 10.10: Darstellung des zulässigen Bereichs B.

$$
\begin{aligned}
\min \ & -0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.2 \\
\text{u.d.N.} \ & -x_1 - 2x_2 \leq -1 \\
& 3000x_1 + 2000x_2 \leq 2000 \\
& x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Abbildung 10.10 zeigt den zulässigen Bereich B, Abbildung 10.11 (links) visualisiert die affin-lineare Zielfunktion $-0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.2$ als Gebirge über dem zulässigen Bereich B und Abbildung 10.11 (rechts) zeigt entsprechend Höhenlinien der Zielfunktion sowie den zulässigen Bereich. Man erahnt, dass erneut die optimale Lösung am Rand des zulässigen Bereichs B zu finden ist. Wir bestimmen auch diese Lösung später analytisch. ■



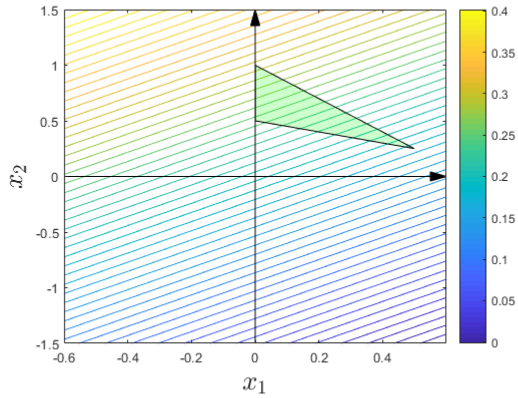


Abbildung 10.11: Die affin-lineare Funktion $f(\mathbf{x}) = -0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.2$ und Höhenlinien über dem zulässigen Bereich B.

Z Ein Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen und Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ kann man graphisch darstellen, indem man den Graphen der Zielfunktion in einem Koordinatensystem zeichnet und den zulässigen Bereich auf der x-Achse markiert.

Ein Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen und Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ kann man graphisch darstellen, indem man den Graphen der Zielfunktion als Gebirge in einem Koordinatensystem mit drei Achsen x_1, x_2, y zeichnet und den zulässigen Bereich auf der x_1-x_2-Ebene (mit $y = 0$) markiert. Eine andere verbreitete Art der Darstellung markiert den zulässigen Bereich in einem Korrdinatensystem zusammen mit den Höhenlinien der Zielfunktion.

10.2 Optimierung unter Gleichheitsnebenbedingungen

Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen sind im Allgemeinen schwer zu lösen. Wir beschränken uns daher zunächst auf einen wichtigen Spezialfall: Optimierungsprobleme, deren Nebenbedingungen Gleichungen entsprechen. Optimierungsprobleme unter Gleichheitsnebenbedingungen haben die Form

$$\begin{array}{llcll} \text{(P-max)} & \max\limits_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x}) & \text{oder} & \text{(P-min)} & \min\limits_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x}) \\ \text{u.d.N. } g_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = 1,\dots,m & & & \text{u.d.N. } g_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = 1,\dots,m. & \end{array}$$

In Beispielen 10.1.13 und 10.1.14 betrachteten wir bereits derartige Optimierungsprobleme in $n = 2$ Variablen und mit $m = 1$ Nebenbedingung(en) graphisch. Der zulässige Bereich B entspricht hier der Lösungsmenge eines Gleichungssystems,

$$B = \{\mathbf{x} \in D \,|\, g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1,\dots,m\}.$$

Ist B leer, hat das Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen keine zulässige und damit auch keine optimale Lösung. Dabei stellen wir zwei Verfahren mit unterschiedlichen Vor- und Nachteilen vor:

1. Das Verfahren der Substitution und
2. das Verfahren von Lagrange.

Wir demonstrieren diese beiden Verfahren anhand von fünf Beispielen: Dem Problem eines Konsumenten mit Budgetbeschränkung aus Beispiel 10.1.4, dem Portfolioproblem aus Beispiel 10.1.1, dem Optimierungsproblem unter der Gleichheitsnebenbedingung aus Beispiel 10.1.9, sowie folgenden zwei Optimierungsproblemen unter Nebenbedingungen:

Beispiel 10.2.1 — Eine einfache Nebenbedingung.
Wir betrachten das Problem

$$\text{(P-min)} \qquad \begin{aligned} &\min\ x_1^2 + x_2 \\ &\text{u.d.N. } (x_1 - x_2)^2 = 0 \end{aligned}$$

mit Zielfunktion $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2$ und $g_1(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2)^2$. Der zulässige Bereich B ist gegeben durch

$$B = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x_1 - x_2)^2 = 0 \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 = x_2 \right\},$$

die Menge aller Vielfachen von $(1,1)^T$. Abbildung 10.12 visualisiert (P-min) sowohl als Gebirge auf B als auch mithilfe von Höhenlinien. Graphisch vermutet man eine optimale Lösung nahe des Nullpunkts $(0,0)^T$. ■

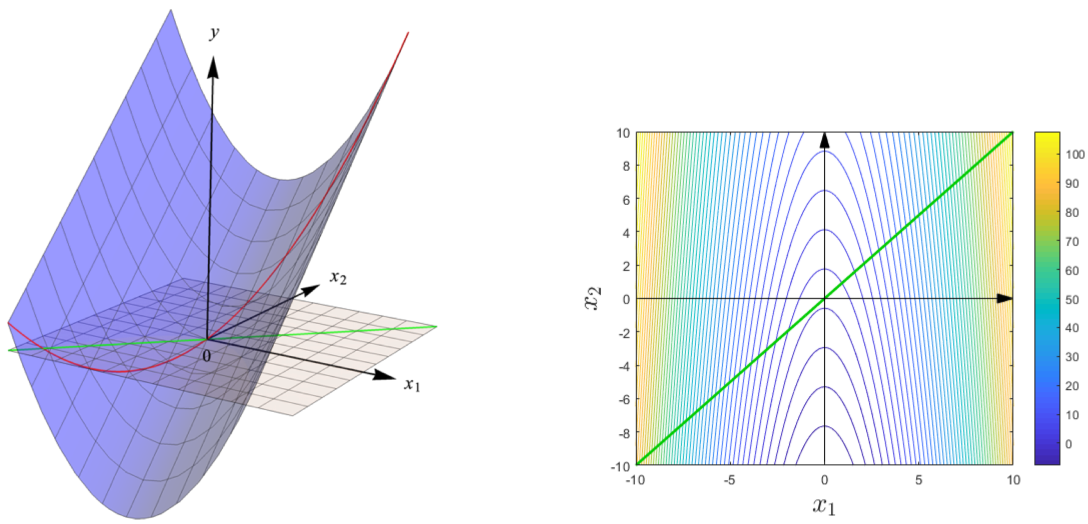


Abbildung 10.12: Die Funktion $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2$ und die Höhenlinien mit der Nebenbedingung $(x_1 - x_2)^2 = 0$.

Beispiel 10.2.2 — Eine schwierigere Nebenbedingung.
Der zulässige Bereich von

$$\text{(P-min)} \qquad \begin{aligned} &\min\ x_1^2 + x_2^2 \\ &\text{u.d.N. } x_2 + x_1 x_2^2 - \mathrm{e}^{x_1 x_2} = 0 \end{aligned}$$

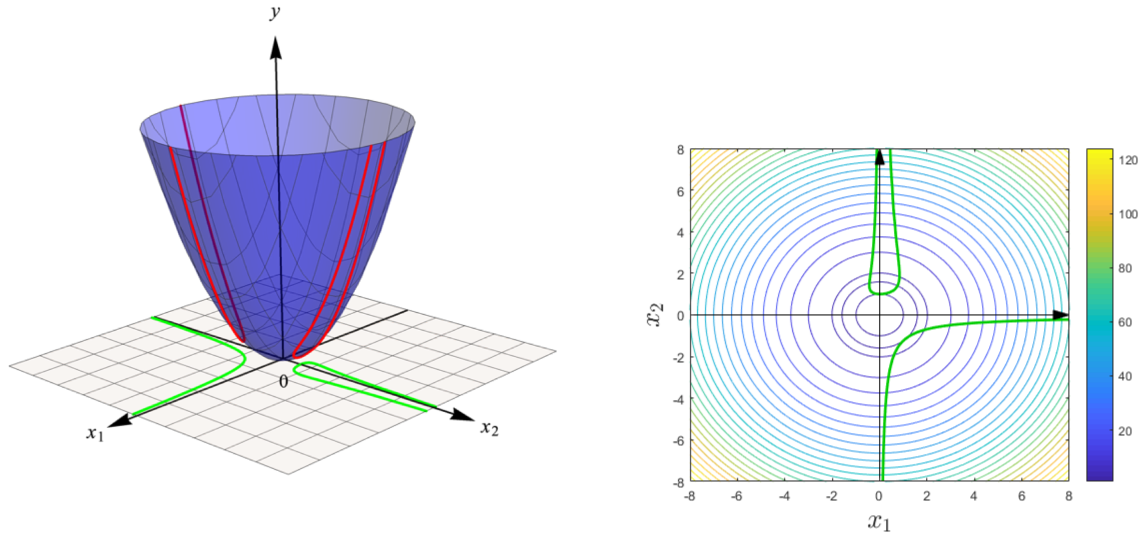


Abbildung 10.13: Die Funktion $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$ und die Höhenlinien mit der Nebenbedingung $x_2 + x_1x_2^2 - e^{x_1x_2} = 0$.

ist gegeben durch

$$B = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_2 + x_1x_2^2 - e^{x_1x_2} = 0 \right\}.$$

Da die Gleichung $g_1(\mathbf{x}) = x_2 + x_1x_2^2 - e^{x_1x_2} = 0$ nicht analytisch nach x_1 oder x_2 aufgelöst werden kann, ist es hier schwer, Elemente im zulässigen Bereich B zu finden. Abbildung 10.13 visualisiert (P-min) sowohl als Gebirge über B als auch mithilfe von Höhenlinien. Graphisch vermutet man die optimale Lösung bei $(0,1)^T$. ■

10.2.1 Das Verfahren der Substitution

Ziele dieses Unterkapitels

- Wie geht man beim Verfahren der Substitution zur Lösung eines Optimierungsproblems in n Variablen mit $m < n$ Gleichheitsnebenbedingungen (und ohne Ungleichheitsnebenbedingungen) vor?

Wir beginnen diesen Abschnitt, indem wir eine einfache Herangehensweise zur Nutzenmaximierung des Konsumenten mit Budgetbeschränkung präsentieren:

■ Beispiel 10.2.3 — Konsument mit Budgetbeschränkung - Fortsetzung.
Wir betrachten $\max_{\mathbf{x}\in B}\, x_1^{0.8}x_2^{0.2}$ mit $B = \{\mathbf{x} \in (0,+\infty)^2 \mid 2x_1 + 3x_2 - 600 = 0\}$. Offensichtlich gilt für alle Stellen im zulässigen Bereich, dass $x_1 = 300 - \frac{3}{2}x_2$. Substituiert man in der Zielfunktion $f(\mathbf{x}) = x_1^{0.8}x_2^{0.2}$ die Variable x_1 durch $300 - \frac{3}{2}x_2$, ergibt sich die Funktion f^{sub} mit Abbildungsvorschrift

$$f^{\text{sub}}(x_2) = f\left(300 - \frac{3}{2}x_2, x_2\right) = \left(300 - \frac{3}{2}x_2\right)^{0.8} x_2^{0.2}$$

und Definitionsbereich

$$D^{\text{sub}} = \left\{ x_2 \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left(300 - \frac{3}{2}x_2, x_2\right)^T \in (0,+\infty)^2 \right\} = (0,200).$$

Das Maximum der Funktion f^{sub} kann man mithilfe der in Kapitel 5.7 vorgestellten Methoden bestimmen: Da f^{sub} auf D^{sub} beliebig oft stetig differenzierbar ist, bestimmen wir zunächst die stationären Stellen, indem wir die erste Ableitung gleich 0 setzen. Im Anschluss überprüfen wir das Vorzeichen der zweiten (und ggf. höherer) Ableitung(en), um lokale Maxima zu identifizieren. Dabei gilt für $x_2 \in D^{\text{sub}} = (0, 200)$:

$$\begin{aligned}\left(f^{\text{sub}}\right)'(x_2) =& 0.8 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(300 - \frac{3}{2}x_2\right)^{-0.2} x_2^{0.2} + 0.2 \cdot \left(300 - \frac{3}{2}x_2\right)^{0.8} x_2^{-0.8} \\ =& \left(300 - \frac{3}{2}x_2\right)^{-0.2} x_2^{-0.8} (60 - 1.5x_2).\end{aligned}$$

Nullsetzen ergibt

$$\begin{aligned}\left(f^{\text{sub}}\right)'(x_2) = \left(300 - \frac{3}{2}x_2\right)^{-0.2} x_2^{-0.8} (60 - 1.5x_2) = 0 \\ \Leftrightarrow x_2 = 40.\end{aligned}$$

Die zweite Ableitung ist

$$\begin{aligned}\left(f^{\text{sub}}\right)''(x_2) &= -14400 \cdot \left(300 - \frac{3}{2}x_2\right)^{-1.2} x_2^{-1.8} \\ &\leq 0 \quad \forall x_2 \in D^{\text{sub}}.\end{aligned}$$

Die Funktion $f^{\text{sub}} : D^{\text{sub}} \to \mathbb{R}$ mit $f^{\text{sub}}(x_2) = f(300 - \frac{3}{2}x_2, x_2) = \left(300 - \frac{3}{2}x_2\right)^{0.8} x_2^{0.2}$ ist also konkav. Sie hat an der stationären Stelle $x_2 = 40$ somit ein globales Maximum. Das nutzenmaximierende Konsumbündel ist damit $x_2 = 40$ und $x_1 = 300 - \frac{3}{2} \cdot 40 = 240$. Das Problem der Nutzenmaximierung mit Budgetbeschränkung, $\max_{\mathbf{x} \in B} x_1^{0.8} x_2^{0.2}$, hat die optimale Lösung $\mathbf{x}^* = (240, 40)^T$. ■

Im Beispiel konnten wir die Gleichheitsnebenbedingung nach einer Variablen eindeutig auflösen und erhielten so ein Optimierungsproblem ohne Gleichheitsnebenbedingungen. Dieses Verfahren nennt man Lösen durch Substitution oder Reduktionsmethode. Um die Idee des Verfahrens besser zu verdeutlichen, formulieren wir die Vorgehensweise und das zentrale Ergebnis zunächst für den Fall $n = 2$ und $m = 1$:

1. Will man ein Optimierungsproblem in 2 Variablen mit einer Gleichheitsnebenbedingung durch Substitution lösen, muss man die Gleichheitsnebenbedingung explizit nach einer Variablen in Abhängigkeit der verbleibenden Variablen auflösen (können).
2. In einem zweiten Schritt setzt man die in Schritt 1 erhaltene Gleichung in die Zielfunktion ein.
3. Die Extrema der so resultierenden Funktion in einer Variablen ohne Nebenbedingungen können dann mithilfe der in Kapitel 5.7 diskutierten Methoden in einem dritten Schritt bestimmt werden.
4. Aus den globalen Extremalstellen des reduzierten Problems mit einer Variablen ergibt sich in einem letzten Schritt die optimale Lösung des Optimierungsproblems mit Gleichheitsnebenbedingung.

Folgender Satz rechtfertigt das Vorgehen:

Satz 10.2.1 — Das Verfahren der Substitution für $n = 2$ und $m = 1$.
Seien $f, g_1 : D \to Z$ reelle Funktionen in 2 Variablen und $B = \{\mathbf{x} \in D \,|\, g_1(\mathbf{x}) = 0\}$. Zudem sei das Gleichungssystem $g_1(\mathbf{x}) = 0$ (mit einer Gleichung) äquivalent zu $x_1 = \tilde{g}_1(x_2)$ mit bekannter, reeller Funktion $\tilde{g}_1(x_2)$. Dann ist $\mathbf{x}^* = (\tilde{g}_1(x_2^*), x_2^*)^T$ eine optimale Lösung von

$$\text{(P-max)} \qquad \max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x}) \qquad\qquad \text{bzw.} \qquad \text{(P-min)} \qquad \min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$$

genau dann wenn x_2^* eine globale Maximalstelle bzw. Minimalstelle der Funktion

$$f^{\text{sub}}(x_2) : \left\{x_2 \in \mathbb{R} \,\middle|\, (\tilde{g}_1(x_2), x_2)^T \in D\right\} \to Z \quad \text{mit} \quad f^{\text{sub}}(x_2) = f(\tilde{g}_1(x_2), x_2)$$

ist.

Beweis. Zunächst beweisen wir für (P-max) die Implikation $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)^T$ Lösung von (P-max) $\Rightarrow x_2^*$ globale Maximalstelle von f^{sub}: Ist $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)^T$ eine optimale Lösung von $\max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$, dann gilt für alle $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in B$: $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^*)$. Da man laut Voraussetzung $\mathbf{x} \in B$ auch als $(\tilde{g}_1(x_2), x_2)^T$ und $\mathbf{x}^* \in B$ auch als $(\tilde{g}_1(x_2^*), x_2^*)^T$ darstellen kann, folgt $f^{\text{sub}}(x_2) = f(\tilde{g}_1(x_2), x_2) \leq f(\tilde{g}_1(x_2^*), x_2^*) = f^{\text{sub}}(x_2^*)$ für alle x_2 mit $(\tilde{g}_1(x_2), x_2)^T \in D$. Somit ist x_2^* eine globale Maximalstelle von f^{sub}.

Wir beweisen nun die Umkehrung der obigen Implikation. Ist x_2^* eine globale Maximalstelle von f^{sub}, dann gilt $f^{\text{sub}}(x_2) \leq f^{\text{sub}}(x_2^*)$ für alle x_2. Da für alle x_2 mit $(\tilde{g}_1(x_2), x_2)^T \in D$ die Stelle $(\tilde{g}_1(x_2), x_2)^T$ ein Element von B ist, folgt $f(\mathbf{x}) = f(\tilde{g}_1(x_2), x_2) = f^{\text{sub}}(x_2) \leq f^{\text{sub}}(x_2^*) = f(\tilde{g}_1(x_2^*), x_2^*)$ für alle $\mathbf{x} \in B$. Somit ist $\mathbf{x}^* = (\tilde{g}_1(x_2^*), x_2^*)^T$ eine Lösung von (P-max).

Zusammenfassend gilt die im Satz behauptete Äquivalenz für (P-max). Die Äquivalenz für (P-min) kann analog bewiesen werden. ■

Wir demonstrieren das Verfahren an weiteren Beispielen:

■ **Beispiel 10.2.4 — Lösung von Beispiel 10.2.1 durch Substitution.**
Wir betrachten

$$\begin{aligned} \text{(P-min)} \qquad & \min\ x_1^2 + x_2 \\ & \text{u.d.N. } (x_1 - x_2)^2 = 0 \end{aligned}$$

mit Zielfunktion $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2$ und $g_1(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2)^2$.

1. Auflösen von $g_1(\mathbf{x}) = 0$ nach x_1 ergibt
$$x_1 = \tilde{g}_1(x_2) = x_2.$$
2. Einsetzen in f ergibt
$$f^{\text{sub}}(x_2) = f(\tilde{g}_1(x_2), x_2) = (\tilde{g}_1(x_2))^2 + x_2 = x_2^2 + x_2.$$
3. Durch Ableiten und Nullsetzen bestimmt man die stationäre Stelle:
$$\left(f^{\text{sub}}\right)'(x_2) = 2x_2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Da für die zweite Ableitung

$$\left(f^{\text{sub}}\right)''(x_2) = 2 > 0 \quad \forall x_2 \in \mathbb{R}$$

gilt, ist f^{sub} (streng) konvex. Damit ist die stationäre Stelle eine globale Minimalstelle. Somit ist $x_2^* = -\frac{1}{2}$ eine globale Minimalstelle der Funktion $f^{\text{sub}}(x_2)$.

4. Folglich ist $(\tilde{g}_1(x_2^*), x_2^*)^T = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^T$ die optimale Lösung von (P-min).

■

Laut Satz 10.2.1 wird die Gleichung $g_1(\mathbf{x}) = 0$ nach der Variable x_1 aufgelöst und in f substituiert. Natürlich kann man aber die Variablen auch umbenennen bzw. vertauschen und nach x_2 auflösen. Wir demonstrieren dies in folgendem Beispiel.

■ Beispiel 10.2.5 — Lösung von Beispiel 10.1.9 durch Substitution.
Wir lösen folgendes Problem mithilfe der Substitution:

$$\begin{array}{ll} \text{(P-min)} \qquad & \min\ x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3 \\ & \text{u.d.N. } x_1^2 + 2(x_2-1) - 2 = 0. \end{array}$$

1. Auflösen der Nebenbedingung $g_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2(x_2-1) - 2 = 0$ nach x_2 ergibt

$$x_2 = \tilde{g}_1(x_1) = 1 + \frac{2 - x_1^2}{2}.$$

2. Substituiert man x_2 durch $\tilde{g}_1(x_1)$ in $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3$, erhält man

$$\begin{aligned} f^{\text{sub}}(x_1) = f(x_1, \tilde{g}_1(x_1)) &= x_1^2 + 4(\tilde{g}_1(x_1) - 1)^2 + 3 \\ &= x_1^2 + 4\left(\frac{2 - x_1^2}{2}\right)^2 + 3 \\ &= x_1^2 + \left(2 - x_1^2\right)^2 + 3 \\ &= x_1^4 - 3x_1^2 + 7. \end{aligned}$$

3. Die Funktion f^{sub} ist beliebig oft stetig differenzierbar. Existiert ein globales Extremum, findet man dieses also an einer stationären Stelle. Diese bestimmen sich als

$$\left(f^{\text{sub}}\right)'(x_1) = 4x_1^3 - 6x_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Da $\left(f^{\text{sub}}\right)''(x_1) = 12x_1^2 - 6$, gilt

$$\begin{aligned} \left(f^{\text{sub}}\right)''(0) &= -6 < 0, \\ \left(f^{\text{sub}}\right)''\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) &= 12 > 0 \text{ und} \\ \left(f^{\text{sub}}\right)''\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) &= 12 > 0. \end{aligned}$$

Die Funktion f^{sub} hat damit lokale Minimalstellen $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ und $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Da $f^{\text{sub}}\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = f^{\text{sub}}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{19}{4} = 4.75$ und $f^{\text{sub}}(x_1)$ für $x_1 \to +\infty$ und $x_1 \to -\infty$ über alle Grenzen wächst, kann man schliessen, dass es sich bei den Stellen um globale Minimalstellen handelt.

4. (P-min) besitzt somit an den Stellen $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \tilde{g}_1\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)^T = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{4}\right)^T$ und $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \tilde{g}_1\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)^T = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{4}\right)^T$ optimale Lösungen.

■

■ Beispiel 10.2.6 — Lösung von Beispiel 10.2.2 durch Substitution.
Im Problem

$$\text{(P-min)} \qquad \begin{aligned} &\min\ x_1^2 + x_2^2 \\ &\text{u.d.N. } g_1(\mathbf{x}) = x_2 + x_1 x_2^2 - \mathrm{e}^{x_1 x_2} = 0 \end{aligned}$$

kann man die Nebenbedingung $g_1(\mathbf{x}) = x_2 + x_1 x_2^2 - \mathrm{e}^{x_1 x_2} = 0$ explizit weder nach x_1 noch nach x_2 auflösen. In diesem Beispiel kann das Verfahren der Substitution also nicht angewandt werden. ■

Allgemein benötigt man für das Lösen durch Substitution ein Optimierungsproblem in n Variablen mit $m < n$ Gleichheitsnebenbedingungen, die man explizit nach m Variablen in Abhängigkeit der verbleibenden $n-m$ Variablen auflösen kann. Zur leichteren Darstellung nehmen wir an, diese Variablen sind $x_1, \dots, x_m$. Ist dies der Fall, geht man analog zum Fall $n = 2$ und $m = 1$ in vier Schritten vor:

1. Unter den obigen Voraussetzungen gibt es ausgehend vom Gleichungssystem
$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}) &= 0 \\ &\dots \\ g_m(\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned}$$
ein äquivalentes Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{g}_1(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ &\dots \\ x_m &= \tilde{g}_m(x_{m+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$
mit bekannten reellen Funktionen $\tilde{g}_i$, $i = 1, \dots, m$, in $n-m$ Variablen.
2. Dann kann man in der Zielfunktion die ersten m Variablen durch $\tilde{g}_i(x_{m+1}, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, m$, ersetzen.
3. Die globalen Extrema der so resultierenden Funktion in $n-m$ Variablen ohne Nebenbedingungen können dann im Fall $n-m = 1$ mithilfe der in Kapitel 5.7 und im Fall $n-m > 1$ mithilfe der in Kapitel 9 diskutierten Methoden bestimmt werden.
4. Aus der entsprechenden globalen Extremalstelle des reduzierten Problems in $n-m$ Variablen können dann die verbleibenden m Variablen des ursprünglichen Problems mithilfe des Gleichungssystems wieder bestimmt werden. Der so erhaltene Vektor mit n Komponenten ist die optimale Lösung des ursprünglichen Problems.

Es gilt:

Satz 10.2.2 — Satz zum Verfahren der Substitution.
Seien $f, g_i : D \to Z$ reelle Funktionen in n Variablen, $i = 1, \dots, m$, $m < n$, und $B = \{\mathbf{x} \in D \,|\, g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, \dots, m\}$. Das Gleichungssystem $g_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, \dots, m$, sei äquivalent zum Gleichungssystem $x_i = \tilde{g}_i(x_{m+1}, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, m$, mit bekannten, reellen Funktionen $\tilde{g}_i(x_{m+1}, \dots, x_n)$. So ist

$$\mathbf{x}^* = (\tilde{g}_1(x^*_{m+1}, \dots, x^*_n), \dots, \tilde{g}_m(x^*_{m+1}, \dots, x^*_n), x^*_{m+1}, \dots, x^*_n)^T$$

eine optimale Lösung von

$$\text{(P-max)} \qquad \max_{\mathbf{x} \in B} f(\mathbf{x}) \qquad \text{bzw.} \qquad \text{(P-min)} \qquad \min_{\mathbf{x} \in B} f(\mathbf{x})$$

genau dann wenn $(x^*_{m+1}, \dots, x^*_n)^T$ eine globale Maximalstelle bzw. Minimalstelle der Funktion

$$f^{\text{sub}}(\mathbf{x}) : \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-m} \;\middle|\; \begin{pmatrix} \tilde{g}_1(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \tilde{g}_m(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in D \right\} \to Z \text{ mit}$$

$$f^{\text{sub}}(\mathbf{x}) = f \begin{pmatrix} \tilde{g}_1(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \tilde{g}_m(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ist.

Beweis. Ersetzt man $g_1(\mathbf{x})$ durch $g_1(\mathbf{x}), \dots g_m(\mathbf{x})$ und x_2 durch $x_{m+1}, \dots x_n$ usw. kann die Beweisidee von Satz 10.2.1 entsprechend verallgemeinert werden. ■

▪ Beispiel 10.2.7 — Lösung von Beispiel 10.1.1 durch Substitution.
Wir lösen nun das in Beispiel 10.1.1 formulierte Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen durch Substitution. Dazu müssen wir zuerst die Nebenbedingungen $g_1(\mathbf{x}) = 0$ und $g_2(\mathbf{x}) = 0$ nach x_1 und x_2 auflösen.

1. Die Nebenbedingungen lassen sich als lineares Gleichungssystem schreiben

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 1 &= 0 \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{3}{10}x_3 - \frac{7}{30} &= 0, \end{aligned}$$

welches mit den Methoden aus Kapitel 7 gelöst werden kann. Wir erhalten die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - 2x_3 \\ x_3 - \frac{1}{3} \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

bzw.

$$x_1 = \tilde{g}_1(x_3) = \frac{4}{3} - 2x_3 \quad \text{und} \quad x_2 = \tilde{g}_2(x_3) = x_3 - \frac{1}{3}.$$

2. Nun können wir die Funktion $f^{\text{sub}}(x_3)$ als

$$\begin{aligned} f^{\text{sub}}(x_3) = f(\tilde{g}_1(x_3), \tilde{g}_2(x_3), x_3) &= \frac{1}{20}\left((\tilde{g}_1(x_3))^2 + (\tilde{g}_2(x_3))^2 + x_3^2\right) \\ &= \frac{1}{20}\left(\left(\frac{4}{3} - 2x_3\right)^2 + \left(x_3 - \frac{1}{3}\right)^2 + x_3^2\right) \end{aligned}$$

mit Definitionsbereich

$$D^{\text{sub}} = \left\{x_3 \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{4}{3} - 2x_3 \geq 0,\ x_3 - \frac{1}{3} \geq 0,\ x_3 \geq 0\right\} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$$

definieren.

3. Durch Ableiten nach x_3 können wir die stationäre Stelle der Funktion f^{sub} bestimmen:

$$\begin{aligned} \left(f^{\text{sub}}\right)'(x_3) &= \frac{2}{20} \cdot (-2) \cdot \left(\frac{4}{3} - 2x_3\right) + \frac{2}{20}\left(x_3 - \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{20}x_3 = \frac{3}{10}(2x_3 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_3 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung von f^{sub} gilt

$$\left(f^{\text{sub}}\right)''(x_3) = \frac{3}{5} > 0 \quad \forall x_3 \in D^{\text{sub}}.$$

Somit ist f^{sub} (streng) konvex. Die stationäre Stelle bei $x_3 = \frac{1}{2}$ ist also ein globales Minimum von f^{sub}.

4. Die Portfolioanteile x_1 und x_2 lassen sich nun einfach bestimmen: $x_1 = \tilde{g}_1(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$ und $x_2 = \tilde{g}_2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{6}$. Somit können wir die Frage des Anlegers beantworten: Wählt er die Anteile $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{6}$ und $x_3 = \frac{1}{2}$, beträgt die erwartete Gesamtrendite $\frac{7}{30}$ bei minimalem Risiko.

■

Z Will man ein Optimierungsproblems in n Variablen unter m Gleichheitsnebenbedingungen mit reeller Zielfunktion $f : D \to Z$ in n Variablen mithilfe des Verfahrens der Substitution lösen, so geht man wie folgt vor:

1. Auflösen aller m Gleichheitsnebenbedingungen nach m verschiedenen Variablen, so dass auf der rechten Seite nur noch die verbleibenden $n - m$ Variablen auftreten.
2. Substitution dieser m Variablen in der Zielfunktion f durch die im vorherigen Schritt erhaltenen rechten Seiten.
3. Bestimmung der entsprechenden globalen Extremalstellen der so erhaltenen Funktion in $n - m$ Variablen.
4. Rücksubstitution der Variablen, um die optimale Lösung des ursprünglichen Systems zu erhalten.

10.2.2 Das Verfahren von Lagrange und implizite Funktionen

Ziele dieses Unterkapitels

Seien f, g reelle Funktionen in n Variablen auf einem offenen Definitionsbereich D.

- Was versteht man unter einer durch die Gleichung $g(\mathbf{x}) = 0$ in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0$ implizit definierten Funktion?
- Was sind hinreichende Bedingungen für die Existenz einer durch die Gleichung $g(\mathbf{x}) = 0$ in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0$ implizit definierten Funktion? Wie berechnet man in diesem Fall den Gradienten einer solchen implizit definierten Funktion?
- Was ist die Lagrange-Funktion eines Optimierungsproblems $\min f(\mathbf{x})$ unter der Gleichheitsnebenbedingung $g(\mathbf{x}) = 0$?
- Was ist eine notwendige Bedingung für eine lokale Extremalstelle eines Optimierungsproblems mit Zielfunktion f unter der Gleichheitsnebenbedingung $g(\mathbf{x}) = 0$, wenn f und g stetig partiell differenzierbar sind?

Sind die Nebenbedingungen nicht eindeutig in obiger Form auflösbar, kann das Verfahren der Substitution in der Regel nicht eingesetzt werden. In diesem Fall nutzen wir einen Ansatz, der durch die graphische Darstellung mithilfe der Höhenlinien und des zulässigen Bereichs motiviert werden kann, aber auch auf Optimierungsprobleme in mehr als 2 Variablen angewendet werden kann.

Beispiel 10.2.8 — Konsument mit Budgetbeschränkung - Fortsetzung.
Wir lösen erneut das Problem

$$\max_{\mathbf{x}\in B} x_1^{0.8} x_2^{0.2} \text{ mit } B = \{\mathbf{x} \in (0, +\infty)^2 \mid \underbrace{2x_1 + 3x_2 - 600}_{=g_1(\mathbf{x})} = 0\}.$$

Die Höhenlinien der Zielfunktion und der zulässige Bereich sind in Abbildung 10.9 dargestellt. Die Menge aller zulässigen Lösungen B, also die Menge aller $\mathbf{x} \in D$ mit $g_1(\mathbf{x}) = 0$, ist hellgrün dargestellt.

Wir betrachten die zulässige Lösung $\mathbf{x} = (75, 150)^T$ mit $f(75, 150) = 75^{0.8} 150^{0.2}$. In Abbildung 10.14 erkennen wir, dass die dunkelblaue Höhenlinie zum Niveau $y = 75^{0.8} 150^{0.2}$ den zulässigen Bereich an dieser Stelle $(75, 150)^T$ schneidet. An den Höhenlinien erkennt man, dass rechts oben von $(75, 150)^T$ Stellen mit höherem Funktionswert liegen, links unten mit kleinerem. Bewegt man sich auf der hellgrünen Linie zulässiger Lösungen weiter nach rechts, z.B. zu $\mathbf{x} = (150, 100)^T$ mit $f(150, 100) = 150^{0.8} 100^{0.2}$, schneidet hier die hellblaue Höhenlinie zum Niveau $y = 150^{0.8} 100^{0.2} > 75^{0.8} 150^{0.2}$ den zulässigen Bereich. Wieder liegen rechts oberhalb von $(150, 100)^T$ andere Stellen mit höherem Funktionswert, links unten mit kleinerem. Bewegt man sich auf der hellgrünen Linie weiter nach rechts, erreicht man irgendwann eine Stelle $\mathbf{x}^0$, an welcher die hellgrüne Linie die Höhenlinie zum Niveau $y = f(\mathbf{x}^0)$ nur berührt, aber nicht schneidet. In diesem Fall haben alle Stellen im zulässigen Bereich einen Funktionswert, der kleiner als $f(\mathbf{x}^0)$ oder gleich ist. Diese Stelle ist also die optimale Lösung.

An der optimalen Lösung $\mathbf{x}^0$ berührt die hellgrüne Linie also die Höhenlinie zum Niveau $f(\mathbf{x}^0)$ ohne sie zu schneiden. Die Steigung der hellgrünen Linie entspricht an dieser Stelle der Ableitung der Höhenlinie. Um diese Idee weiterzuverfolgen, müssen wir klären, was wir mit Steigung oder Ableitung eines zulässigen Bereichs bzw. einer Höhenlinie meinen und diese Werte bestimmen.

Wir beginnen mit der Steigung des zulässigen Bereichs: Löst man die Gleichung $g_1(\mathbf{x}) = 0$ nach x_2 auf, ergibt sich die Geradengleichung $x_2 = 200 - \frac{2}{3}x_1$. Die Funktion $x_2 = \tilde{g}_1(x_1) = 200 - \frac{2}{3}x_1$ hat eine erste Ableitung von $-\frac{2}{3}$. Man sagt auch, die Gleichung $g_1(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2 - 600 = 0$ definiert implizit die Funktion $\tilde{g}_1(x_1) = 200 - \frac{2}{3}x_1$ mit Ableitung

$$\tilde{g}_1'(x_1) = -\frac{2}{3}.$$

Die gesuchte Steigung ist also $-\frac{2}{3}$. Die Höhenlinie zum Niveau y entspricht wegen $y = x_1^{0.8}x_2^{0.2} \Leftrightarrow y^5 = x_1^4 x_2$ dem Graphen der Funktion

$$x_2 = \tilde{f}_y(x_1) = \frac{y^5}{x_1^4}.$$

Die Höhenlinie zum Niveau y definiert somit implizit eine Funktion mit Abbildungsvorschrift $\tilde{f}_y(x_1)$ und Ableitung

$$\tilde{f}_y'(x_1) = -4\frac{y^5}{x_1^5}.$$

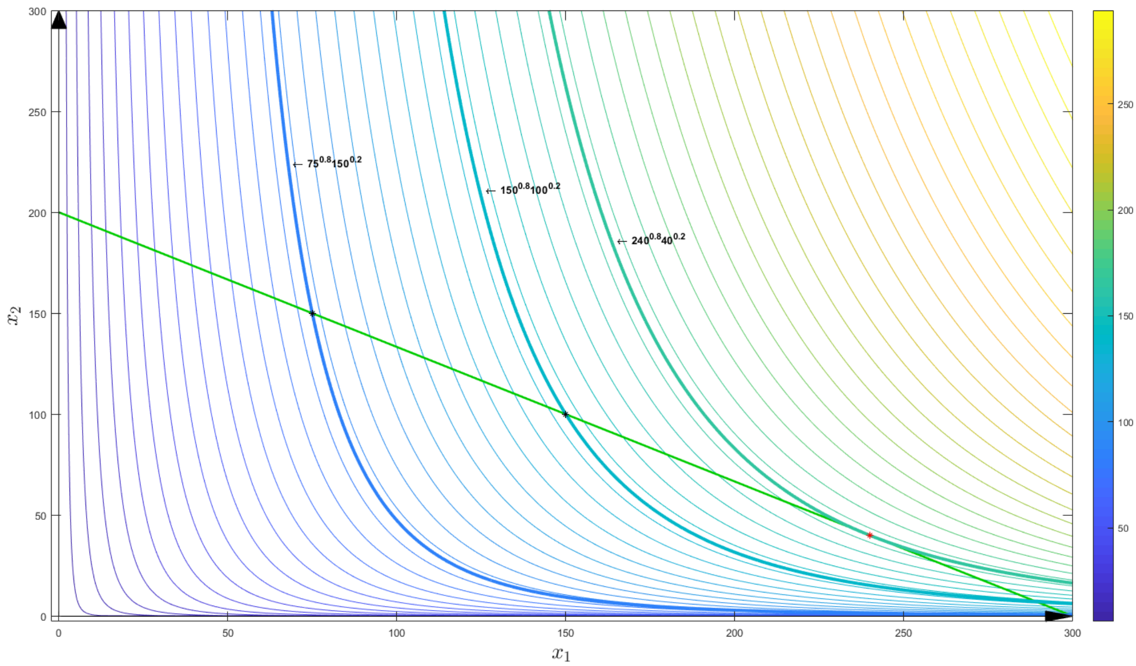


Abbildung 10.14: Budgetbeschränkung und Höhenlinien der Cobb Douglas Funktion.

Sucht man also die Stelle $\mathbf{x}^0$, welche im zulässigen Bereich ist und deren Höhenlinie zum Niveau $f(\mathbf{x}^0)$ die gleiche Steigung hat wie die hellgrüne Linie, fordert man:

(i) $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)^T \in B$, also

$$x_2^0 = \tilde{g}_1(x_1^0) = 200 - \frac{2}{3}x_1^0.$$

(ii) Die Ableitung der Höhenlinie zum Niveau $y = f(\mathbf{x}^0) = (x_1^0)^{0.8}(x_2^0)^{0.2}$, d.h.

$$\tilde{f}_y'(x_1^0) = -4\frac{y^5}{(x_1^0)^5} = -4\frac{((x_1^0)^{0.8}(x_2^0)^{0.2})^5}{(x_1^0)^5} = -4\frac{x_2^0}{x_1^0},$$

entspricht der Steigung von $\tilde{g}_1$, also

$$\tilde{f}_y'(x_1^0) = -4\frac{x_2^0}{x_1^0} = -\frac{2}{3} = \tilde{g}_1'(x_1^0).$$

Die einzige Stelle $\mathbf{x}^0$, welche diese beiden Bedingungen erfüllt, ist $\mathbf{x}^0 = (240,40)^T$. Dass $\mathbf{x}^0$ beide Bedingungen erfüllt, kann man durch Einsetzen leicht überprüfen.

Da der zulässige Bereich an allen anderen Stellen Höhenlinien kleinerer Niveaus schneidet, ist diese Stelle die zulässige Lösung mit dem grössten Zielfunktionswert aller zulässigen Lösungen und damit die optimale Lösung.

Die optimale Lösung ist somit $\mathbf{x}^* = (240,40)^T$ mit einem maximalen Nutzen von $f(\mathbf{x}^*) = 240^{0.8}40^{0.2}$. ∎

Im obigen Beispiel mit $n = 2$ Variablen und $m = 1$ Gleichheitsnebenbedingungen beobachteten wir Folgendes: Schneidet eine Höhenlinie der Funktion f die Lösungsmenge der Gleichung $g_1(\mathbf{x}) = 0$, so gibt es stets eine Höhenlinie mit grösserem oder kleinerem Funktionswert. An einer optimalen Lösung berührt eine Höhenlinie von f die Lösungsmenge von $g_1(\mathbf{x}) = 0$ ohne diese zu schneiden. Im Beispiel definierten die Höhenlinien $f(\mathbf{x}) - y = 0$ und die Lösungsmenge von $g_1(\mathbf{x}) = 0$ implizit Funktionen, welche x_1 auf x_2 abbildeten. Wir konnten die Ableitung dieser Funktionen berechnen und Gleichsetzen, um Stellen zu bestimmen, an denen sich die Funktionen berühren.

Leider ist dieser Ansatz nicht immer so durchführbar. Beispielsweise beschreiben in Beispiel 10.2.2 weder die Höhenlinien N_y noch die Menge der zulässigen Lösungen B Graphen einer Funktion. Will man hier die Ableitung an einer Stelle bestimmen, muss man erst klären, welche Funktion überhaupt abgeleitet werden soll. Um die im Beispiel illustrierte Idee allgemeiner nutzen zu können, müssen wir also zunächst besprechen,

- wann durch die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $g(x_1,x_2) = 0$ bzw.

$$g(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$$

  (möglichst allgemein) eine Funktion gegeben ist, welche x_1 auf x_2 bzw. $(x_1,\ldots,x_{n-1})^T$ auf x_n abbildet[4] und
- wie man dann die Ableitung bzw. die partiellen Ableitungen dieser Funktion berechnen kann.

Implizite Funktionen

Reelle Funktionen, die in Gleichungsform gegeben sind und deren Lösungsmenge als Graph einer Funktion betrachtet werden kann, nennt man durch die Gleichung implizit definierte Funktionen oder kurz implizite Funktionen.

∎ Beispiel 10.2.9 — Die Höhenlinie der Cobb Douglas Funktion.
Die Höhenlinie N_y der Nutzenfunktion $f(\mathbf{x}) = x_1^{0.8}x_2^{0.2}$ zum Niveau $y = 75^{0.8}150^{0.2}$ stellt

[4] Dabei kann die Gleichung $g(\mathbf{x}) = 0$ Höhenlinien zu einem Niveau y, bzw. Mengen mit $f(\mathbf{x}) - y = 0$, oder Gleichheitsnebenbedingungen der Form $g_i(\mathbf{x}) = 0$ repräsentieren.

den Graphen einer Funktion dar, da es zu jedem $x_1 \in (0,+\infty)$ genau einen Wert $x_2 \in (0,+\infty)$ gibt, welcher sich auf der Höhenlinie befindet. Löst man die Gleichung $f(\mathbf{x}) = x_1^{0.8}x_2^{0.2} = y$ bzw.

$$f(\mathbf{x}) - y = 0$$

nach x_2 auf, ergibt sich

$$x_2 = \tilde{f}_y(x_1) = \frac{y^5}{x_1^4} = \frac{(75^{0.8}150^{0.2})^5}{x_1^4}.$$

Die Höhenlinie zum Niveau $y = 75^{0.8}150^{0.2}$ definiert also implizit eine Funktion $\tilde{f}_y : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ mit dieser Abbildungsvorschrift $\tilde{f}_y(x_1)$. Die Ableitung von $\tilde{f}_y$ ist

$$\tilde{f}_y'(x_1) = -4\frac{(75^{0.8}150^{0.2})^5}{x_1^5} = -4\frac{75^4 150}{x_1^5}.$$

An der Stelle $x_1 = 75$ mit $x_2 = \tilde{f}_y(75) = 150$ ist die Ableitung beispielsweise

$$\tilde{f}_y'(75) = -4\frac{75^4 150}{75^5} = -8.$$

■

Würde man sich aber auf eine solch einfache Definition beschränken, könnte man in folgendem Beispiel keine Ableitungen der Höhenlinien an verschiedenen Stellen bestimmen:

■ Beispiel 10.2.10 — Die Höhenlinie einer quadratischen Funktion.

Abbildung 10.15 zeigt den Graphen der Höhenlinie der Zielfunktion aus Beispiel 10.1.9 zum Niveau 4. Die Menge $N_4 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3 = 4\right\}$ beschreibt nicht den Graphen einer Funktion, da es beispielsweise für $x_1 = 0$ zwei x_2-Werte gibt, so dass $\mathbf{x} \in N_4$ gilt. Diese Werte sind $x_2 = 0.5$ und $x_2 = 1.5$. Obwohl die Menge aller $\mathbf{x}$ mit $x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3 = 4$ in diesem Fall keinem Graphen einer Funktion entspricht, kann man aber z.B. sagen, dass ausgehend von $\mathbf{x}^0 = (0, 0.5)^T$ die Werte von x_2 für x_1-Werte kleiner als $x_1^0 = 0$ monoton fallen und für x_1-Werte grösser als $x_1^0 = 0$ monoton steigen. Betrachtet man den Graphen nur für x_1-Werte in einer (kleinen) δ-Umgebung von 0 und x_2-Werte in einer (kleinen) ε-Umgebung von 0.5, also z.B. mit $\delta = 0.5$ und $\varepsilon = 0.25$ für $\mathbf{x} \in U(0,\delta) \times U(0.5,\varepsilon) = (-0.5, 0.5) \times (0.25, 0.75)$, dann gibt es zu jedem x_1 genau ein $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{4}(1-x_1^2)} + 1$. Abbildung 10.16 zeigt den Graphen von N_4 innerhalb dieser Umgebungen. Diese Teilmenge von N_4 beschreibt den Graphen einer Funktion $\tilde{f}$ mit Definitionsmenge $(-0.5, 0.5)$, Zielmenge $(0.25, 0.75)$ und Abbildungsvorschrift $\tilde{f}(x_1) = -\sqrt{\frac{1}{4}(1-x_1^2)} + 1$.

Für alle Punkte $(x_1, \tilde{f}(x_1))^T$ mit $x_1 \in (-0.5, 0.5)$ gilt also $x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3 = 4$ bzw. $f(\mathbf{x}) - 4 = x_1^2 + 4(x_2-1)^2 - 1 = 0$.

Die Ableitung dieser Funktion ist

$$\tilde{f}'(x_1) = \frac{x_1}{2\sqrt{1-x_1^2}} \text{ mit } \tilde{f}'(0) = 0.$$

Die Ableitung der impliziten Funktion entspricht für alle $\mathbf{x} \in N_4 \cap ((-0.5, 0.5) \times (0.25, 0.75))$ dem Quotienten

$$-\frac{f_{x_1}(\mathbf{x})}{f_{x_2}(\mathbf{x})} = -\frac{2x_1}{8(x_2 - 1)},$$

denn für alle $\mathbf{x} \in N_4 \cap ((-0.5, 0.5) \times (0.25, 0.75))$ gilt $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{4}(1 - x_1^2)} + 1$ und damit

$$-\frac{f_{x_1}(\mathbf{x})}{f_{x_2}(\mathbf{x})} = -\frac{2x_1}{8\left(-\sqrt{\frac{1}{4}(1-x_1^2)} + 1 - 1\right)} = \frac{x_1}{2\left(\sqrt{(1-x_1^2)}\right)} = \tilde{f}'(x_1).$$

Unter anderem ergibt dieser Ausdruck natürlich für $(0, 0.5)^T \in N_4$ den Wert 0, denn für $x_1 = 0$ gilt $\tilde{f}'(0) = 0$. ■

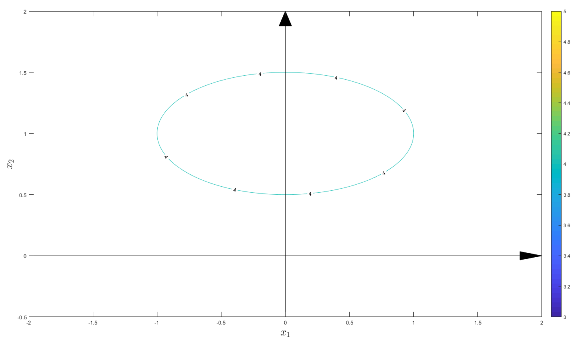


Abbildung 10.15: Die Menge N_4.

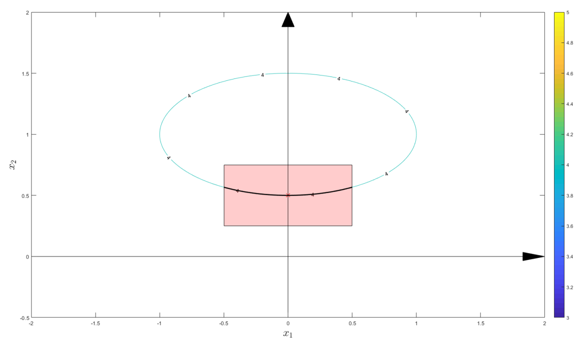


Abbildung 10.16: $x_2 = \tilde{f}(x_1) = -\sqrt{\frac{1}{4}(1 - x_1^2)} + 1$ mit $x_1 \in (-0.5, 0.5)$.

Gibt es zu jedem Wert x_1 innerhalb einer Teilmenge $U(x_1^0, \delta) \times U(x_2^0, \varepsilon) \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{x}^0 \in D$ genau ein x_2, so dass die Gleichung $g(\mathbf{x}) = 0$ erfüllt ist, sagt man, dass für eine reelle Funktion $g : D \to Z$ in 2 Variablen die Gleichung $g(\mathbf{x}) = 0$ in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0$ implizit eine Funktion $\tilde{g}(x_1)$ definiert. Ist $\tilde{g}$ eine durch $g(\mathbf{x}) = 0$ implizit definierte Funktion, so lässt sich für gegebenes x_1 eindeutig ein Wert x_2 bestimmen, so dass $g(\mathbf{x}) = 0$, wenn man nur $\mathbf{x} \in U(x_1^0, \delta) \times U(x_2^0, \varepsilon)$ zulässt. Setzt man $(x_1, \tilde{g}(x_1))^T$ in die Funktion g ein, erhält man den Wert 0 für alle $x_1 \in U(x_1^0, \delta)$.

Definition 10.2.1 — Implizite Funktion im Fall $n = 2$.
Sei $g : D \to Z$ eine reelle Funktion in 2 Variablen und $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)^T \in D$. Falls $\varepsilon, \delta > 0$ existieren mit $(x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta) \times (x_2^0 - \varepsilon, x_2^0 + \varepsilon) = U(x_1^0, \delta) \times U(x_2^0, \varepsilon) \subseteq D$ und eine Funktion $\tilde{g} : U(x_1^0, \delta) \to U(x_2^0, \varepsilon)$ mit $x_2 = \tilde{g}(x_1)$ existiert, so dass für alle $\mathbf{x} \in U(x_1^0, \delta) \times U(x_2^0, \varepsilon)$

$$g(\mathbf{x}) = 0 \;\Leftrightarrow x_2 = \tilde{g}(x_1)$$

gilt, sagt man, die Funktion $\tilde{g}(x_1)$ ist implizit durch die Gleichung $g(\mathbf{x}) = 0$ in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0$ gegeben oder definiert. Die Funktion $\tilde{g}(x_1)$ nennt man manchmal auch kurz nur implizite Funktion.

Ist $\tilde{g}(x_1)$ implizit durch die Gleichung $g(\mathbf{x}) = 0$ in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0$ gegeben, dann gibt es also für alle $x_1 \in U(x_1^0, \delta)$ genau ein $x_2 = \tilde{g}(x_1) \in U(x_2^0, \varepsilon)$ mit $g(x_1, \tilde{g}(x_1)) = 0$.[5]

■ Beispiel 10.2.11 — Eine durch eine Höhenlinie implizit definierte Funktion - Fortgesetzt.
In Beispiel 10.2.10 haben wir gesehen, dass $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2-1)^2 - 1 = 0$ in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0 = (0, 0.5)^T$ die Funktion $x_2 = \tilde{f}(x_1) = -\sqrt{\frac{1}{4}(1-x_1^2)} + 1$ implizit definiert. Allerdings gibt es keine Umgebungen um $\mathbf{x}^0 = (1,1)^T$, so dass f implizit eine Funktion $\tilde{f}(x_1)$ definiert. Egal wie klein δ gewählt wird, gibt es $x_1 \in U(1,\delta)$, so dass es zwei oder keine Werte von x_2 gibt mit $f(\mathbf{x}) = 0$, vgl. Abbildung 10.17.[6] ■

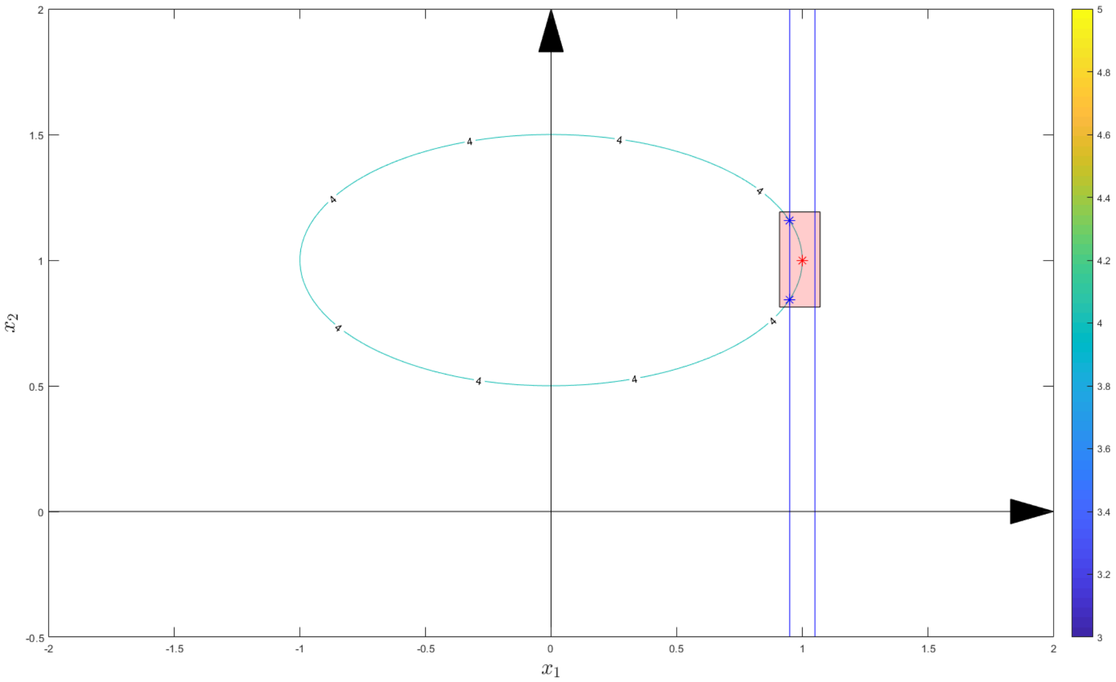


Abbildung 10.17: Eine Umgebung, in der keine Funktion $\tilde{f}(x_1)$ implizit definiert ist.

■ Beispiel 10.2.12 — Eine schwierige Gleichung.
Abbildung 10.18 visualisiert die Lösungsmenge der Gleichung

$$g(\mathbf{x}) = x_2 + x_1 x_2^2 - e^{x_1 x_2} = 0.$$

Je nach Wahl von $\mathbf{x}^0$ kann es sein, dass durch die Gleichung $g(\mathbf{x}) = 0$ in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0$ implizit eine Funktion $\tilde{g}(x_1)$ definiert wird oder nicht.

An der Stelle $\mathbf{x}^0 = (0,1)^T$ beispielsweise kann man ε- und δ-Umgebungen finden, so dass der Graph innerhalb $U(x_1^0, \delta) \times U(x_2^0, \varepsilon)$ eine Funktion beschreibt.

An der in der Abblildung ebenfalls eingezeichneten Stelle $\tilde{\mathbf{x}}^0 \approx (0.840, 1.926)^T$ scheinen keine solche Umgebungen zu existieren, da es zu jedem $0.5 < x_1 < \tilde{x}_1^0 \approx 0.840$ zwei

[5] Analog kann man die implizit durch die Gleichung $g(\mathbf{x}) = 0$ in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0$ gegebene Funktion $\tilde{g}(x_2)$ definieren, indem man die Rollen von x_1 und x_2 vertauscht.

[6] Würde man die Rollen von x_1 und x_2 vertauschen, wäre es hier jedoch möglich eine implizite Funktion $\tilde{f}(x_2)$ in einer Umgebung von $(1,1)^T$ zu definieren.

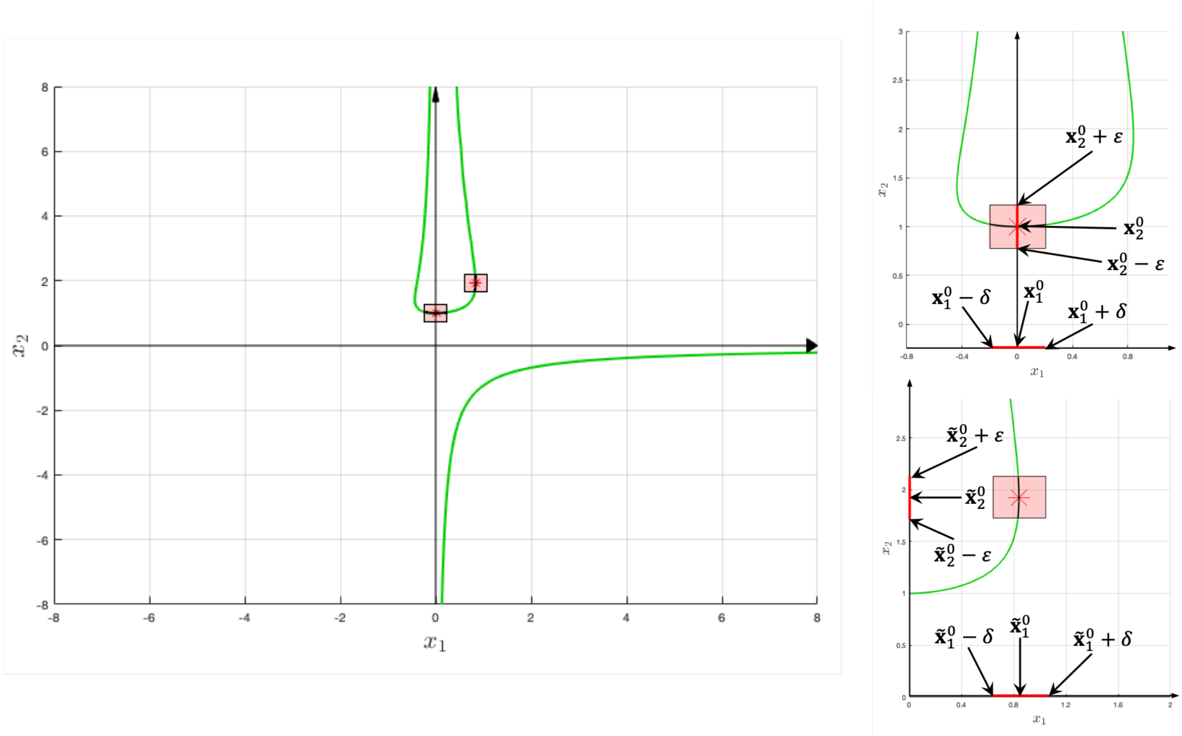


Abbildung 10.18: Eine implizit definierte Funktion.

x_2-Werte nahe $\tilde{x}_2^0$ gibt, für welche die Gleichung erfüllt ist.[7] ■

Die Existenz einer impliziten Funktion in der Umgebung einer Stelle $\mathbf{x}^0$ ist für uns wichtig, um unsere bekannte Definition der Ableitung einfach auf diese implizite Funktion übertragen zu können. Schliesslich haben wir den Begriff der Ableitung nur für Funktionen und nicht für Lösungsmengen von Gleichungen definiert. Ist aber in einer Umgebung einer Stelle $\mathbf{x}^0$ durch die Gleichung $g(\mathbf{x}) = 0$ implizit eine Funktion definiert, wäre es schön, wenn man aus Wissen über die Funktion g direkt auf die Ableitung der implizit definierten Funktion schliessen könnte. Wir demonstrieren die Idee am Beispiel:

■ Beispiel 10.2.13 — Die Budgetbeschränkung als implizit definierte Funktion. Höhenlinien sowie der zulässige Bereich des Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen

$$\max_{\mathbf{x}\in B} x_1^{0.8}x_2^{0.2} \text{ mit } B = \{\mathbf{x} \in (0,+\infty)^2 \mid \underbrace{2x_1+3x_2-600}_{=g_1(\mathbf{x})} = 0\}$$

sind in Abbildung 10.14 dargestellt. Die Menge aller Güterkombinationen $\mathbf{x} \in D$, welche die Budgetrestriktion einhalten, also mit $g_1(\mathbf{x}) = 0$, entspricht der hellgrünen Linie. An den Achsen kann man ablesen, dass diese Gerade eine Steigung von $-\frac{200}{300} = -\frac{2}{3}$ haben muss. Für jede zusätzliche Einheit von Gut 1 muss der Konsument mit einem fixen Budget von 600 auf $\frac{2}{3}$ Einheiten von Gut 2 verzichten.

In Beispiel 10.2.8 wurde diese Ableitung bestimmt, indem wir in einem ersten Schritt die Abbildungsvorschrift $x_2 = \tilde{g}_1(x_1)$ bestimmten, welche den Graphen B hat und für die $g(x_1, \tilde{g}_1(x_1)) = 0$ gilt. In einem zweiten Schritt leiteten wir $\tilde{g}_1$ ab. Die Ableitung der durch

[7] Insgesamt gibt es sogar 3, nämlich auch ein $x_2 < 0$.

die Budgetrestriktion gegebenen Funktion kann man alternativ aber auch mithilfe der partiellen Ableitungen von $g_1(\mathbf{x})$ bestimmen.

Die Funktion $g_1(\mathbf{x})$ steigt in x_1 mit der Rate $(g_1)_{x_1}(\mathbf{x}) = 2$ und in x_2 mit der Rate $(g_1)_{x_2}(\mathbf{x}) = 3$ für alle $\mathbf{x}$. Schliesslich vergrössert ein Zuwachs von x_1 um Δx_1 das benötigte Budget um $2\Delta x_1$ und ein Zuwachs von x_2 um Δx_2 das Budget um $3\Delta x_2$.

Steigt $x_1 < 300 - \Delta x_1$ ausgehend von einem Wert mit $g_1(\mathbf{x}) = 0$ um Δx_1, steigt der Funktionswert von g_1 also um $2\Delta x_1$. Die Budgetrestriktion ist dann nicht mehr erfüllt. Es gilt $g_1(x_1 + \Delta x_1, x_2) \neq 0$ bzw. $(x_1 + \Delta x_1, x_2)^T \notin B$. Verringert man im Gegenzug x_2 um $\Delta x_2 = \frac{2}{3}\Delta x_1$, fällt der Funktionswert wieder um $\frac{2}{3}\Delta x_1 \cdot 3 = 2\Delta x_1$ und es gilt erneut $g_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 - \frac{2}{3}\Delta x_1) = 0$, bzw. $(x_1 + \Delta x_1, x_2 - \frac{2}{3}\Delta x_1)^T \in B$.

Verändert sich x_1 um Δx_1, so muss x_2 also um das

$$-\frac{2}{3} = -\frac{(g_1)_{x_1}(\mathbf{x})}{(g_1)_{x_2}(\mathbf{x})}$$

fache steigen, bzw. um $\frac{2}{3}\Delta x_1$ fallen, um die Budgetrestriktion einzuhalten. Anders ausgedrückt muss der Konsument für jede zusätzliche Einheit von x_1 auf $\frac{2}{3}$ Einheiten von x_2 verzichten, um die Budgetrestriktion einzuhalten. ▪

Auch wenn sich obige Motivation für die Ableitung der implizit definierten Funktion als das (-1)-fache des Quotienten der partiellen Ableitungen auf den Fall einer linearen Gleichung beschränkt, lässt sie sich für kleine Veränderungen von x_1 bzw. x_2 auf allgemeinere Fälle übertragen, solange der Nenner ungleich 0 ist.

Folgender Satz von der impliziten Funktion besagt, dass im Fall einer stetig partiell differenzierbaren Funktion $g : D \to Z$ in 2 Variablen, D offen, in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0 \in D$ eine differenzierbare implizite Funktion $\tilde{g}(x_1)$ definiert wird, wenn

- die Stelle $\mathbf{x}^0$ eine Lösung der Gleichung $g(\mathbf{x}) = 0$ ist und
- der Quotient $-\frac{g_{x_1}(\mathbf{x}^0)}{g_{x_2}(\mathbf{x}^0)}$ definiert ist, d.h. $g_{x_2}(\mathbf{x}^0) \neq 0$ gilt.

Die Ableitung dieser Funktion entspricht an der Stelle $\mathbf{x}^0$ dann eben genau diesem Quotienten.

Satz 10.2.3 — Satz von der impliziten Funktion für $n = 2$.
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge. Ist eine reelle Funktion $g : D \to Z$ in 2 Variablen stetig partiell differenzierbar und gilt für $\mathbf{x}^0 \in D$

$$g(\mathbf{x}^0) = 0 \qquad \text{und} \qquad g_{x_2}(\mathbf{x}^0) \neq 0,$$

dann

- gibt es $\varepsilon, \delta > 0$, so dass zu jedem $x_1 \in U(x_1^0, \delta)$ genau ein $x_2 = \tilde{g}(x_1) \in U(x_2^0, \varepsilon)$ existiert mit $g(\mathbf{x}) = 0$, d.h. durch $g(\mathbf{x}) = 0$ ist in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0$ implizit die Funktion $\tilde{g} : U(x_1^0, \delta) \to U(x_2^0, \varepsilon)$ mit $x_2 = \tilde{g}(x_1)$ gegeben;
- ist die durch $g(\mathbf{x}) = 0$ implizit gegebene Funktion $\tilde{g}$ stetig differenzierbar auf $U(x_1^0, \delta)$ mit

$$\tilde{g}'(x_1) = -\frac{g_{x_1}(x_1, \tilde{g}(x_1))}{g_{x_2}(x_1, \tilde{g}(x_1))} = -\frac{g_{x_1}(x_1, x_2)}{g_{x_2}(x_1, x_2)}..$$

Beweis. Einen Beweis findet man in Kall (1982, Satz 5.17). ■

Interessiert man sich für die Ableitung der implizit definierten Funktion $\tilde{g}$ an der Stelle x_1^0, ist es also nicht notwendig, zunächst die implizit definierte Funktion zu bestimmen und dann abzuleiten. Die Ableitung an der Stelle x_1^0 entspricht dem Quotienten der partiellen Ableitungen von g, mit umgekehrtem Vorzeichen.

Wir demonstrieren die Überprüfung der Existenz sowie die Berechnung der Ableitung von implizit gegebenen Funktionen in einigen Beispielen:

■ Beispiel 10.2.14 — Anwendung des Satzes in Beispiel 10.2.9.
Bereits in Beispiel 10.2.9 hatten wir die Ableitung der durch die Gleichung

$$f(\mathbf{x}) = y \text{ bzw. } \underbrace{f(\mathbf{x}) - y}_{=g(\mathbf{x})} = 0$$

mit Nutzenfunktion $f(\mathbf{x}) = x_1^{0.8} x_2^{0.2}$ zum Niveau $y = 75^{0.8} 150^{0.2}$ implizit definierten Funktion an der Stelle $x_1 = 75,\ x_2 = 150$ bestimmt.

Wir demonstrieren die Anwendung von Satz 10.2.3, um diese Ableitung zu bestimmen.

- Zunächst muss man hierfür zeigen, dass $g(75,150) = 0$ gilt:

$$g(75,150) = f(75,150) - y = 75^{0.8} 150^{0.2} - 75^{0.8} 150^{0.2} = 0.$$

- Die Funktion g ist zudem stetig partiell differenzierbar mit partiellen Ableitungen

$$g_{x_1}(\mathbf{x}) = 0.8 x_1^{-0.2} x_2^{0.2} \text{ und } g_{x_2}(\mathbf{x}) = 0.2 x_1^{0.8} x_2^{-0.8}.$$

  Es gilt somit

$$g_{x_2}(75,150) = 0.2 \cdot 75^{0.8} \cdot 150^{-0.8} > 0.$$

Damit ergibt sich an der Stelle $(75,150)^T$ die Ableitung

$$-\frac{g_{x_1}(75,150)}{g_{x_2}(75,150)} = -\frac{0.8 \cdot 75^{-0.2} 150^{0.2}}{0.2 \cdot 75^{0.8} 150^{-0.8}} = -\frac{4 \cdot 150}{75} = -8.$$

Natürlich haben wir in Beispiel 10.2.9 den gleichen Wert erhalten. In Beispiel 10.2.9 mussten wir hierfür jedoch erst die implizit definierte Funktion bestimmen. Durch Anwendung des Satzes konnten wir die Ableitung dieser impliziten Funktion bestimmen ohne die implizite Funktion selbst zu kennen. ■

■ Beispiel 10.2.15 — Anwendung des Satzes in Beispiel 10.2.10.
Wir betrachten erneut die Höhenlinie der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 3$ zum Niveau $y = 4$, also Lösungen der Gleichung $x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 3 = 4$ bzw. $g(\mathbf{x}) = 0$ mit $g(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 - 1$. Die partiellen Ableitungen von g nach x_1 und x_2 sind

$$g_{x_1}(\mathbf{x}) = 2x_1, \quad g_{x_2}(\mathbf{x}) = 8(x_2 - 1).$$

Die partiellen Ableitungen sind stetig. An der Stelle $\mathbf{x}^0 = \left(0, \frac{1}{2}\right)^T$ gilt:

- $g(\mathbf{x}^0) = 0^2 + 4\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 - 1 = 0$
- $g_{x_2}(\mathbf{x}^0) = 8\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{8}{2} = -4 \neq 0.$

Die Stelle liegt also auf der Höhenlinie zum Niveau 4 und die partielle Ableitung nach x_2 ist ungleich 0. Aus Satz 10.2.3 folgt damit, dass durch die Höhenlinie in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0$ implizit eine Funktion definiert wird. Es gibt somit $\varepsilon, \delta > 0$, so dass $\tilde{g} : U(0, \delta) \to U(\frac{1}{2}, \varepsilon)$ mit $x_2 = \tilde{g}(x_1)$ und $g(x_1, \tilde{g}(x_1)) = 0$ eine Funktion ist. Über diese Funktion wissen wir aus Satz 10.2.3 zudem, dass

$$\tilde{g}'(0) = -\frac{g_{x_1}(\mathbf{x}^0)}{g_{x_2}(\mathbf{x}^0)} = -\frac{2 \cdot 0}{-4} = 0.$$

Um zu überprüfen, ob die Höhenlinie in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0 = (1,1)^T$ implizit eine Funktion definiert, überprüfen wir die Bedingungen von Satz 10.2.3 an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (1,1)^T$:

- $g(\mathbf{x}^0) = 1^2 + 4(1-1)^2 - 1 = 1 + 0 - 1 = 0$
- $g_{x_2}(\mathbf{x}^0) = 8(1-1) = 0.$

Die Stelle liegt also auf der Höhenlinie zum Niveau 4. Die partielle Ableitung nach x_2 ist jedoch gleich 0. Somit können wir mithilfe von Satz 10.2.3 nicht schliessen, dass $g(\mathbf{x}) = 0$ in einer Umgebung von $(1,1)^T$ eine implizite Funktion definiert. In der Tat hatten wir in Beispiel 10.2.11 gesehen, dass durch $g(\mathbf{x}) = 0$ in einer Umgebung von $(1,1)^T$ keine Funktion in x_1 implizit definiert wird. ▪

Satz 10.2.3 gibt hinreichende, nicht notwendige Kriterien für die Existenz einer impliziten Funktion. Folgendes Beispiel demonstriert dies:

▪ Beispiel 10.2.16 — Die durch die einfache Nebenbedingung implizit definierte Funktion.
Wir betrachten die Nebenbedingung $g_1(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2)^2 = 0$ aus Beispiel 10.2.1. Die partiellen Ableitungen nach x_1 und x_2 sind durch

$$(g_1)_{x_1}(\mathbf{x}) = 2(x_1 - x_2) \quad \text{und} \quad (g_1)_{x_2}(\mathbf{x}) = -2(x_1 - x_2)$$

gegeben. Beide Ableitungen sind stetig. An jeder Stelle $\mathbf{x}^0$ mit $g_1(\mathbf{x}^0) = (x_1^0 - x_2^0)^2 = 0$ gilt jedoch $x_1^0 = x_2^0$ und damit auch

$$(g_1)_{x_2}(\mathbf{x}^0) = -2(x_1^0 - x_2^0) = 0.$$

Da die partielle Ableitung nach x_2 für alle $\mathbf{x}$ mit $g_1(\mathbf{x}) = 0$ den Wert 0 hat, liefert Satz 10.2.3 von der impliziten Funktion hier keine Aussage darüber, ob in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0$ implizit eine Funktion definiert wird. Allerdings definiert die Gleichung offensichtlich in jeder Umgebung von jeder Stelle $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)^T$ mit $x_1^0 = x_2^0$ implizit die Funktion $\tilde{g}_1(x_1) = x_1$, vgl. Abbildung 10.19. ▪

Von besonderem Nutzen ist Satz 10.2.3, wenn die Gleichung nicht analytisch nach x_2 auflösbar ist, also die implizit definierte Funktion selbst nicht explizit bestimmbar ist. Wir demonstrieren dies in folgendem Beispiel:

▪ Beispiel 10.2.17 — Die durch die schwierige Nebenbedingung implizit definierte Funktion.
Wir betrachten die Nebenbedingung $g_1(\mathbf{x}) = x_2 + x_1 x_2^2 - \mathrm{e}^{x_1 x_2} = 0$. Die partiellen Ableitungen von g_1 nach x_1 und x_2 lauten

$$(g_1)_{x_1}(\mathbf{x}) = x_2^2 - x_2 \mathrm{e}^{x_1 x_2} \quad \text{und} \quad (g_1)_{x_2}(\mathbf{x}) = 1 + 2x_1 x_2 - x_1 \mathrm{e}^{x_1 x_2}.$$

Beide partiellen Ableitungen sind stetig. An der Stelle $\mathbf{x}^0 = (0,1)^T$ gilt

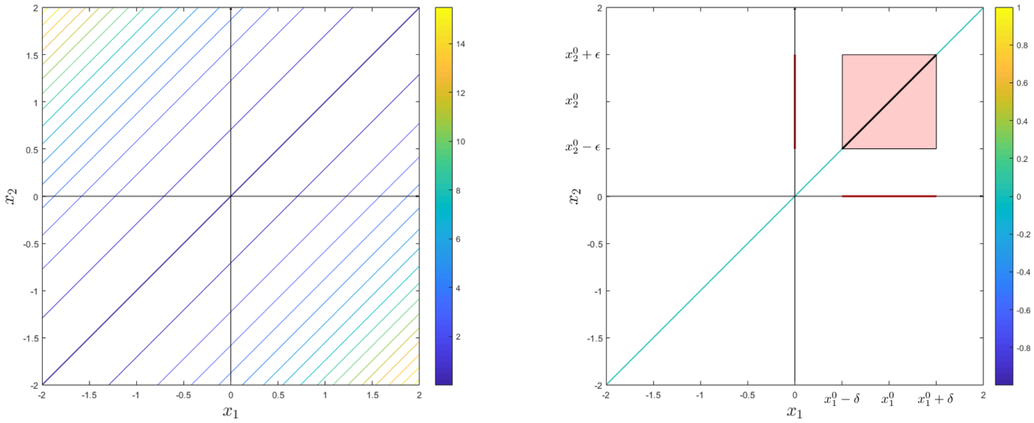


Abbildung 10.19: Die durch $(x_1 - x_2)^2 = 0$ implizit definierte Funktion.

- $g_1(\mathbf{x}^0) = 1 + 0 \cdot 1^2 - e^0 = 1 - 1 = 0$
- $(g_1)_{x_2}(\mathbf{x}^0) = 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 - 0 \cdot e^0 = 1 \neq 0.$

Gemäss Satz 10.2.3 definiert also $g_1(\mathbf{x}) = 0$ in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0 = (0,1)^T$ implizit eine Funktion und es existieren $\delta, \varepsilon > 0$ und ein Funktion $\tilde{g}_1 : U(x_1^0, \delta) \to U(x_2^0, \varepsilon)$, für welche $g_1(x_1, \tilde{g}_1(x_1)) = 0$ für alle $x_1 \in U(x_1^0, \delta)$ gilt, und deren Ableitung an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (0,1)^T$ wie folgt ist:

$$\tilde{g}_1'(x_1^0) = -\frac{(g_1)_{x_1}(\mathbf{x}^0)}{(g_1)_{x_2}(\mathbf{x}^0)} = -\frac{(x_2^0)^2 - x_2^0 e^{x_1^0 x_2^0}}{1 + 2x_1^0 x_2^0 - x_1^0 e^{x_1^0 x_2^0}} = -\frac{1 - 1 \cdot e^0}{1 + 2 \cdot 0 - 0} = 0.$$

■

Natürlich kann man implizite Funktionen nicht nur für reelle Funktionen in 2 Variablen sondern allgemein für reelle Funktionen in n Variablen definieren. Die Funktion g definiert dann implizit eine (reelle) Funktion in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0 \in D$, wenn man aus $g(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = 0$ für alle $(x_1, \dots, x_{n-1})^T \in U((x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)^T, \delta)$ eindeutig ein $x_n \in U(x_n^0, \varepsilon)$ mit $g(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = 0$ bestimmen kann.

Definition 10.2.2 — Implizite Funktion (allgemein).
Sei $g : D \to Z$ eine reelle Funktion in n Variablen und $\mathbf{x}^0 \in D$. Falls $\varepsilon, \delta > 0$ existieren mit $U((x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)^T, \delta) \times U(x_n^0, \varepsilon) \subseteq D$ und eine Funktion $\tilde{g} : U((x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)^T, \delta) \to U(x_n^0, \varepsilon)$ mit $x_n = \tilde{g}(x_1, \dots, x_{n-1})$ existiert, so dass für alle $\mathbf{x} \in U((x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)^T, \delta) \times U(x_n^0, \varepsilon)$

$$g(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow x_n = \tilde{g}(x_1, \dots, x_{n-1})$$

gilt, heisst die Funktion $\tilde{g}$ implizit durch die Gleichung $g(\mathbf{x}) = 0$ in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0$ gegeben oder vereinfachend implizite Funktion.

Auch hier gilt:

Satz 10.2.4 — Satz von der impliziten Funktion (allgemein).
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ist eine reelle Funktion $g : D \to Z$ in n Variablen stetig partiell differenzierbar und gilt für $\mathbf{x}^0 \in D$

$$g(\mathbf{x}^0) = 0 \qquad \text{und} \qquad g_{x_n}(\mathbf{x}^0) \neq 0,$$

dann

- gibt es $\varepsilon, \delta > 0$, so dass zu jedem $(x_1, \ldots, x_{n-1})^T \in U((x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0)^T, \delta)$ genau ein $x_n = \tilde{g}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in U(x_n^0, \varepsilon)$ existiert mit $g(\mathbf{x}) = 0$, d.h. durch $g(\mathbf{x}) = 0$ ist in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0$ implizit die Funktion $\tilde{g} : U((x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0)^T, \delta) \to U(x_n^0, \varepsilon)$ mit $x_n = \tilde{g}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ gegeben;
- ist die implizit gegebene Funktion $\tilde{g}$ stetig differenzierbar auf $U((x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0)^T, \delta)$ mit

$$\frac{\partial \tilde{g}(x_1, \ldots, x_{n-1})}{\partial x_i} = -\frac{g_{x_i}(x_1, \ldots, x_{n-1}, \tilde{g}(x_1, \ldots, x_{n-1}))}{g_{x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, \tilde{g}(x_1, \ldots, x_{n-1}))} = -\frac{g_{x_i}(\mathbf{x})}{g_{x_n}(\mathbf{x})} \text{ für } i = 1, \ldots, n-1.$$

Beweis. Einen Beweis findet man in Kall (1982, Satz 5.17). ■

▪ Beispiel 10.2.18 — Eine implizit definierte Funktion im Fall $n = 3$.
Wir betrachten die Nebenbedingung $g_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{3}{10}x_3 - \frac{7}{30} = 0$ aus Beispiel 10.1.1. Offensichtlich sind die partiellen Ableitungen nach x_1, x_2 und x_3 konstant. Damit ist g_2 stetig partiell differenzierbar.

Sei $\mathbf{x}^0$ eine Stelle mit $g_2(\mathbf{x}^0) = 0$. Für die Funktion $g_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{3}{10}x_3 - \frac{7}{30}$ gilt

$$(g_2)_{x_3}(\mathbf{x}) = \frac{3}{10} \neq 0$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ und damit auch für alle $\mathbf{x}^0$, welche die Bedingung $g_2(\mathbf{x}^0) = 0$ erfüllen. Somit definiert $g_2(\mathbf{x}) = 0$ in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0$ implizit eine Funktion $\tilde{g}_2 : U((x_1^0, x_2^0)^T, \delta) \to U(x_3^0, \varepsilon)$ mit $x_3 = \tilde{g}_2(x_1, x_2)$. Diese implizit gegebene Funktion $\tilde{g}_2$ ist stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial \tilde{g}_2(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1} = -\frac{(g_2)_{x_1}(\mathbf{x}^0)}{(g_2)_{x_3}(\mathbf{x}^0)} = -\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{10}} = -\frac{2}{3},$$

$$\frac{\partial \tilde{g}_2(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2} = -\frac{(g_2)_{x_2}(\mathbf{x}^0)}{(g_2)_{x_3}(\mathbf{x}^0)} = -\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}} = -\frac{1}{3}.$$

Der Gradient von $\tilde{g}_2$ an einer Stelle $\mathbf{x}^0$ mit $g_2(\mathbf{x}^0) = 0$ ist somit

$$\nabla \tilde{g}_2(x_1^0, x_2^0) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Natürlich kann man $\tilde{g}_2(x_1^0, x_2^0)$ hier auch explizit als $\tilde{g}_2(x_1^0, x_2^0) = \frac{7}{9} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2$ bestimmen und so direkt den Gradienten berechnen. ▪

Die Idee des Verfahrens von Lagrange am Beispiel von zwei Variablen und einer Gleichung

Im Folgenden erläutern wir das Verfahren von Lagrange anhand eines Optimierungsproblems mit Zielfunktion f und einer Gleichheitsnebenbedingung $g_1(\mathbf{x}) = 0$, wobei f und g_1 reelle Funktionen in zwei Variablen sind.

Zu Beginn des Abschnittes hielten wir fest, dass die optimale Lösung $\mathbf{x}^*$ für ein derartiges Problem an einer Stelle zu sein scheint, welche die Nebenbedingung erfüllt und zudem die Eigenschaft hat, dass die Ableitung der durch die Höhenlinie $f(\mathbf{x}^*) = y$ implizit gegebenen Funktion gleich der Ableitung der durch $g_1(\mathbf{x}) = 0$ implizit gegebenen Funktion ist. Sind f und g_1 stetig partiell differenzierbar mit $f_{x_2}(\mathbf{x}^*) \neq 0$ und $(g_1)_{x_2}(\mathbf{x}^*) \neq 0$, dann kann man die Steigung der implizit durch die Höhenlinie von f und Nebenbedingung $g_1(\mathbf{x}) = 0$ gegebenen Funktionen mithilfe von Satz 10.2.3 berechnen. Es ergibt sich die Bedingung

$$-\frac{f_{x_1}(\mathbf{x}^*)}{f_{x_2}(\mathbf{x}^*)} = -\frac{(g_1)_{x_1}(\mathbf{x}^*)}{(g_1)_{x_2}(\mathbf{x}^*)}.$$

Führt man nun eine zusätzliche Variable, den Lagrange-Multiplikator, als

$$\lambda^* = \frac{f_{x_2}(\mathbf{x}^*)}{(g_1)_{x_2}(\mathbf{x}^*)}$$

ein, so ist obige Bedingung sowie die Definition von λ^* im Fall $(g_1)_{x_2}(\mathbf{x}^*), f_{x_2}(\mathbf{x}^*) \neq 0$ äquivalent zu

$$\begin{aligned} &(i) && f_{x_1}(\mathbf{x}^*) - \lambda^*(g_1)_{x_1}(\mathbf{x}^*) = 0 \\ &(ii) && f_{x_2}(\mathbf{x}^*) - \lambda^*(g_1)_{x_2}(\mathbf{x}^*) = 0. \end{aligned}$$

Ausserdem muss eine optimale Lösung $\mathbf{x}^*$ im zulässigen Bereich sein. Also muss

$$(iii) \qquad g_1(\mathbf{x}^*) = 0$$

gelten.

Wir definieren nun die sogenannte Lagrange-Funktion wie folgt:

Definition 10.2.3 — Die Lagrange-Funktion mit $n = 2, m = 1$.
Seien $f, g_1 : D \to Z$ reelle Funktionen in 2 Variablen. Die Funktion $L : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Abbildungsvorschrift

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) - \lambda g_1(x_1, x_2)$$

heisst Lagrange-Funktion eines Optimierungsproblems mit Zielfunktion f und Nebenbedingung $g_1(\mathbf{x}) = 0$.

Mithilfe der oben definierten Lagrange-Funktion kann man die Gleichungen (i)-(iii) auch als

$$\begin{aligned} &(i) && \frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = f_{x_1}(\mathbf{x}^*) - \lambda^*(g_1)_{x_1}(\mathbf{x}^*) = 0 \\ &(ii) && \frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_2} = f_{x_2}(\mathbf{x}^*) - \lambda^*(g_1)_{x_2}(\mathbf{x}^*) = 0 \\ &(iii) && \frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = -g_1(\mathbf{x}^*) = 0, \end{aligned}$$

bzw. $\nabla L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) = \mathbf{0}$ formulieren.[8]

Ist also $\mathbf{x}^*$ eine optimale Lösung und gilt $(g_1)_{x_2}(\mathbf{x}^*) \neq 0$, hat die Lagrange-Funktion die stationäre Stelle

$$\left(x_1^*, x_2^*, \frac{f_{x_2}(\mathbf{x}^*)}{(g_1)_{x_2}(\mathbf{x}^*)}\right)^T.$$

Gilt hingegen $(g_1)_{x_1}(\mathbf{x}^*) \neq 0$, hat die Lagrange-Funktion die stationäre Stelle

$$\left(x_1^*, x_2^*, \frac{f_{x_1}(\mathbf{x}^*)}{(g_1)_{x_1}(\mathbf{x}^*)}\right)^T.$$

Zusammenfassend hat L also an der Stelle $\mathbf{x}^*$ eine stationäre Stelle, wenn $\nabla g_1(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$ gilt. Folgender Satz fasst diese Idee zusammen und erweitert sie für alle lokalen Extremalstellen von f auf B.

Satz 10.2.5 — Der Satz von Lagrange mit $n = 2$.
Seien $f, g_1 : D \to Z$ reelle stetig partiell differenzierbare Funktionen in 2 Variablen, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $B = \{\mathbf{x} \in D | g_1(\mathbf{x}) = 0\}$ und $\mathbf{x}^* \in D$ mit $\nabla g_1(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$. Zudem sei L die Lagrange-Funktion

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) - \lambda g_1(x_1, x_2).$$

Ist $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)^T$ eine optimale Lösung von

$$\text{(P-max)} \quad \max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x}) \qquad \text{oder} \qquad \text{(P-min)} \quad \min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x}),$$

dann existiert ein $\lambda^* \in \mathbb{R}$ mit $\nabla L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) = \mathbf{0}$. Zudem gilt $L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) = f(x_1^*, x_2^*)$. Ist $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)^T$ eine lokale Extremalstelle von f auf B, dann existiert ein $\lambda^0 \in \mathbb{R}$, so dass $\nabla L(x_1^0, x_2^0, \lambda^0) = \mathbf{0}$ gilt. Zudem gilt $L(x_1^0, x_2^0, \lambda^0) = f(x_1^0, x_2^0)$.

Beweis. Einen Beweis findet man in Kall (1982, Satz 5.18). ■

Unter den Voraussetzungen des Satzes 10.2.5 sind Stellen $(x_1, x_2, \lambda)^T$ mit $\nabla L(x_1, x_2, \lambda) = \mathbf{0}$ also die einzigen Kandidaten für optimale Lösungen von Optimierungsproblemen mit einer Gleichheitsnebenbedingung. Analog zu Definition 9.4.3 aus Kapitel 9 nennen wir derartige Stellen stationäre Stellen der Lagrange-Funktion. Sind f und g_1 stetig partiell differenzierbar mit $\nabla g_1(x_1^*, x_2^*) \neq \mathbf{0}$, so stellt $\nabla L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) = \mathbf{0}$ also eine notwendige Bedingung für lokale Extremalstellen von f unter der Bedingung $g_1(\mathbf{x}) = 0$ dar. Wir demonstrieren die Anwendung des Satzes in Beispielen:

■ **Beispiel 10.2.19 — Nutzenmaximierung unter Budgetrestriktion.**
Formulieren wir die Lagrange-Funktion zum Nutzenmaximierungsproblem des Konsumenten aus Beispiel 10.1.4, ergibt sich:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{0.8} x_2^{0.2} - \lambda(2x_1 + 3x_2 - 600).$$

[8] Man kann analog $\lambda^* = -\frac{f_{x_2}(x_1^*, x_2^*)}{(g_1)_{x_2}(x_1^*, x_2^*)}$ definieren und bekommt so

$$f_{x_1}(\mathbf{x}^*) + \lambda^*(g_1)_{x_1}(\mathbf{x}^*) = 0$$
$$f_{x_2}(\mathbf{x}^*) + \lambda^*(g_1)_{x_2}(\mathbf{x}^*) = 0.$$

In diesem Fall erhält man mit der Lagrange-Funktion $L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g_1(x_1, x_2)$ die gleichen Ergebnisse.

Der Gradient dieser Funktion ist

$$\nabla L(x_1,x_2,\lambda) = \begin{pmatrix} 0.8x_1^{-0.2}x_2^{0.2} - 2\lambda \\ 0.2x_1^{0.8}x_2^{-0.8} - 3\lambda \\ 600 - 2x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}.$$

Stationäre Stellen der Lagrange-Funktion sind Stellen mit

$$\begin{pmatrix} 0.8x_1^{-0.2}x_2^{0.2} - 2\lambda \\ 0.2x_1^{0.8}x_2^{-0.8} - 3\lambda \\ 600 - 2x_1 - 3x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

bzw.

$$\begin{aligned} (i) \quad & 0.8x_2^{0.2} = 2\lambda x_1^{0.2} && \Leftrightarrow \quad \lambda = 0.4\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{0.2} \\ (ii) \quad & 0.2x_1^{0.8} = 3\lambda x_2^{0.8} && \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{15}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{0.8} \\ (iii) \quad & 2x_1 + 3x_2 = 600. \end{aligned}$$

Gleichsetzen der umgeformten Bedingungen (i) und (ii) ergibt $0.4(\frac{x_2}{x_1})^{0.2} = \frac{1}{15}(\frac{x_1}{x_2})^{0.8}$ bzw.

$$4\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{2}{3},$$

siehe Bedingung (ii) aus Beispiel 10.2.8. Zusammen mit (iii) ergibt sich die stationäre Stelle $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)^T = (240, 40, 0.4(\frac{1}{6})^{0.2})^T$ der Lagrange-Funktion. Die Lösung $\mathbf{x}^* = (240, 40)^T$ entspricht der optimalen Lösung, welche wir in Beispiel 10.2.3 gefunden hatten. ■

■ Beispiel 10.2.20 — Lösen von Beispiel 10.1.9 mit der Lagrange-Funktion.
Die Lagrange-Funktion von

$$\begin{aligned} \text{(P-min)} \qquad & \min x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3 \\ & \text{u.d.N. } x_1^2 + 2(x_2-1) - 2 = 0 \end{aligned}$$

ist

$$L(x_1,x_2,\lambda) = x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3 - \lambda\left(x_1^2 + 2(x_2-1) - 2\right).$$

Bildet man den Gradienten von L und setzt diesen gleich dem Nullvektor, ergibt sich

$$\begin{aligned} (i) \quad & L_{x_1}(x_1,x_2,\lambda) = 2x_1 - \lambda \cdot 2x_1 = 2x_1(1-\lambda) && = 0 \\ (ii) \quad & L_{x_2}(x_1,x_2,\lambda) = 8(x_2-1) - 2\lambda && = 0 \\ (iii) \quad & L_\lambda(x_1,x_2,\lambda) = -\left(x_1^2 + 2(x_2-1) - 2\right) = -x_1^2 - 2x_2 + 4 && = 0. \end{aligned}$$

Aus (i) folgt direkt $x_1 = 0$ oder $\lambda = 1$. Im Fall $x_1 = 0$ folgt aus (iii) $x_2 = 2$ und aus (ii) $\lambda = 4$. Im Fall $\lambda = 1$ folgt aus (ii) $x_2 = \frac{5}{4}$ und aus (iii) $x_1 = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Die Lagrange-Funktion hat somit die stationären Stellen $(0,2,4)^T$, $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{4}, 1)^T$, und $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{4}, 1)^T$. Satz

10.2.5 entscheidet dabei nicht, ob das Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen eine optimale Lösung hat oder an welcher dieser stationären Stellen diese Lösung vorliegt. Setzt man die Stellen in f ein, ergibt sich $f(0,2) = 7$, $f(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{4}) = \frac{19}{4}$ und $f(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{4}) = \frac{19}{4}$. An den Stellen $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{4})^T$ und $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{4})^T$ liegen Kandidaten für lokale Minimalstellen von f auf B vor. In Beispiel 10.2.5 hatten wir gezeigt, dass es sich an diesen Stellen um optimale Lösungen von (P-min) handelt. Um dies an dieser Stelle jedoch mithilfe der Lagrange-Funktion analytisch zu zeigen, benötigt man Sätze, die über den hier behandelten Stoff hinausgehen. ■

Im Gegensatz zum Verfahren der Substitution muss die Nebenbedingung zur Anwendung dieses Verfahrens nicht nach einer der Variablen explizit aufgelöst werden.

■ Beispiel 10.2.21 — Beispiel mit einer schwierigen Nebenbedingung.
Die Lagrange-Funktion von

$$\begin{aligned} \text{(P-min)} \qquad & \min\ x_1^2 + x_2^2 \\ & \text{u.d.N. } x_2 + x_1 x_2^2 - e^{x_1 x_2} = 0 \end{aligned}$$

ist

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 - \lambda\left(x_2 + x_1 x_2^2 - e^{x_1 x_2}\right).$$

Bildet man den Gradienten von L und setzt diesen gleich dem Nullvektor, ergibt sich

$$\begin{aligned} (i) \quad & L_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1 - \lambda\left(x_2^2 - x_2 e^{x_1 x_2}\right) && = 0 \\ (ii) \quad & L_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = 2x_2 - \lambda\left(1 + 2x_1 x_2 - x_1 e^{x_1 x_2}\right) && = 0 \\ (iii) \quad & L_\lambda(x_1, x_2, \lambda) = -\left(x_2 + x_1 x_2^2 - e^{x_1 x_2}\right) && = 0. \end{aligned}$$

Gleichung (iii) hat eine Lösung $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$. Gleichungen (i) und (ii) sind dann erfüllt, wenn $\lambda = 2$. Eine zweite Lösung kann numerisch als $x_1 = 1.07654$, $x_2 = -1.15904$ und $\lambda = 1.28452$ bestimmt werden.[9] Somit sind $(0,1,2)^T$ und $(1.07654, -1.15904, 1.28452)^T$ stationäre Stellen der Lagrange-Funktion. Setzt man die x_1- und x_2-Komponenten dieser Stellen in $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$ ein, ergibt sich $f(0,1) = 1$ und $f(1.07654, -1.15904) \approx 2.5$. Graphisch erkennt man aus Abbildung 10.13, dass es sich bei $(0,1)^T$ um die optimale Lösung von (P-min) handelt. Um analytisch zu zeigen, dass $(0,1)^T$ die optimale Lösung ist, benötigt man auch hier Sätze, die über den hier behandelten Stoff hinausgehen. ■

Zu beachten ist, dass Satz 10.2.5 nur anwendbar ist, wenn $\nabla g(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$.

■ Beispiel 10.2.22 — Beispiel mit einfacher Nebenbedingung.
Das Problem aus Beispiel 10.2.1,

$$\begin{aligned} \text{(P-min)} \qquad & \min\ x_1^2 + x_2 \\ & \text{u.d.N. } (x_1 - x_2)^2 = 0, \end{aligned}$$

hat die Lagrange-Funktion

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2 - \lambda(x_1 - x_2)^2.$$

[9] Z.B. unter Zuhilfenahme der Stetigkeit von $g_1(\mathbf{x}) = x_2 + x_1 x_2^2 - e^{x_1 x_2}$ und einer Erweiterung des Nullstellensatzes aus Kapitel 5.

Die stationären Stellen dieser Funktion lassen sich durch

$$
\begin{aligned}
(i) \quad & L_{x_1}(x_1,x_2,\lambda) = 2x_1 - \lambda \cdot 2(x_1 - x_2) && = 0\\
(ii) \quad & L_{x_2}(x_1,x_2,\lambda) = 1 + \lambda \cdot 2(x_1 - x_2) && = 0\\
(iii) \quad & L_{\lambda}(x_1,x_2,\lambda) = -(x_1 - x_2)^2 && = 0
\end{aligned}
$$

bestimmen. Aus (iii) folgt $x_1 = x_2$. Einsetzen in (ii) ergibt $1 = 0$. Ein Gleichungssystem mit einer Gleichung $1 = 0$ hat keine Lösung. Die Lagrange-Funktion hat somit auch keine stationären Stellen. Wir haben jedoch eine Lösung des Problems durch Substitution gefunden. Wie kann das sein?

Satz 10.2.5 besagt, dass wenn für die optimale Lösung des Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen $\nabla g_1(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$ gilt, es ein $\lambda^* \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die Stelle $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)^T$ eine stationäre Stelle der Lagrange-Funktion ist. Hier im Beispiel gilt aber für jede zulässige Lösung $x_1 = x_2$ und somit $(g_1)_{x_1}(x_1,x_2) = (g_1)_{x_2}(x_1,x_2) = 0$. Die Voraussetzungen des Satzes von Lagrange sind hier also nicht erfüllt. ▪

Das Verfahren (allgemein)

Auch für den allgemeinen Fall eines Optimierungsproblems in n Variablen und mit $m \leq n$ Gleichheitsnebenbedingungen kann eine entsprechende Lagrange-Funktion mit m Lagrange-Multiplikatoren definiert werden.

Definition 10.2.4 — Die Lagrange-Funktion (allgemein).
Seien $f, g_i : D \to Z$, $i = 1,\ldots,m$ reelle Funktionen in n Variablen. Die Funktion $L : D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ mit Abbildungsvorschrift

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

heisst Lagrange-Funktion eines Optimierungsproblems mit Zielfunktion f und Nebenbedingungen $g_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1,\ldots,m$.

Auch hier ergibt sich ein notwendiges Kriterium für Lösungen des Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen:

Satz 10.2.6 — Der Satz von Lagrange (allgemein).
Seien $f, g_i : D \to Z$, $i = 1,\ldots,m$ reelle stetig partiell differenzierbare Funktionen in n Variablen, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $B = \{\mathbf{x} \in D \,|\, g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1,\ldots,m\}$, $\mathbf{x}^* \in D$ und die Gradienten $\nabla g_1(\mathbf{x}^*),\ldots,\nabla g_m(\mathbf{x}^*)$ linear unabhängig. Zudem sei $L : D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ die Lagrange-Funktion in $n+m$ Variablen mit Abbildungsvorschrift

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Ist $\mathbf{x}^* \in D$ eine optimale Lösung von

$$\text{(P-max)} \quad \max_{\mathbf{x} \in B} f(\mathbf{x}) \qquad \text{oder} \qquad \text{(P-min)} \quad \min_{\mathbf{x} \in B} f(\mathbf{x}),$$

dann existieren $\lambda_1^*,\ldots,\lambda_m^* \in \mathbb{R}$ mit $\nabla L(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*,\lambda_1^*,\ldots,\lambda_m^*) = \mathbf{0}$. Zudem gilt

$L(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*) = f(\mathbf{x}^*)$.
Ist $\mathbf{x}^0$ eine lokale Extremalstelle von f auf B, dann existieren $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0 \in \mathbb{R}$, so dass $\nabla L(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \lambda^0, \ldots, \lambda_m^0) = \mathbf{0}$ gilt. Zudem gilt $L(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \lambda^0, \ldots, \lambda_m^0) = f(\mathbf{x}^0)$.

Beweis. Einen Beweis findet man in Kall (1982, Satz 5.18). ■

Dass alle Gradienten der Nebenbedingungen an der Stelle $\mathbf{x}^*$ linear unabhängig sein müssen, ist dabei eine Verallgemeinerung von $\nabla g(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$. Satz 10.2.5 ergibt sich also als Spezialfall für $m = 1 < 2 = n$. Wir demonstrieren die Anwendung dieses allgemeineren Satzes in folgendem Beispiel:

■ Beispiel 10.2.23 — Risikominimales Portfolio - Fortsetzung.
Die Lagrange-Funktion des Problems aus Beispiel 10.1.1, in dem ein Anleger ein risikominimales Portfolio mit einer Rendite von $\frac{7}{30}$ sucht, ist

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{20}x_1^2 + \frac{1}{20}x_2^2 + \frac{1}{20}x_3^2 - \lambda_1\left(\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{3}{10}x_3 - \frac{7}{30}\right) - \lambda_2(x_1 + x_2 + x_3 - 1).$$

Nullsetzen der partiellen Ableitungen ergibt das zu lösende Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial x_1} &= \frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{5}\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\
\frac{\partial L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial x_2} &= \frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{10}\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\
\frac{\partial L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial x_3} &= \frac{1}{10}x_3 - \frac{3}{10}\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\
\frac{\partial L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} &= -\left(\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{3}{10}x_3 - \frac{7}{30}\right) = 0 \\
\frac{\partial L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} &= -(x_1 + x_2 + x_3 - 1) = 0
\end{aligned}$$

mit 5 Gleichungen. Dieses LGS hat eine eindeutige Lösung. Die einzige stationäre Stelle von L ist somit $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0)^T$. Wenn es also ein risikominimales Portfolio mit dieser Rendite gibt, dann ist es das Portfolio mit Anteilen von $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{6}$ und $x_3 = \frac{1}{2}$.[10] Mit diesem Portfolio ergibt sich ein Risiko von

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{360}.$$

■

Ökonomische Interpretation des Lagrangemultiplikators

Wir erläutern im Folgenden eine Interpretation des sogenannten Lagrangemultiplikators λ im Fall $m = 1 < n = 2$. Sie gilt aber für alle $m \leq n$.

In den Wirtschaftswissenschaften sucht man häufig das Maximum oder das Minimum einer Funktion $f(x_1, x_2)$ unter der Nebenbedingung

$$h(\mathbf{x}) = b,$$

[10] In diesem Beispiel kann man sogar schliessen, dass obiges Portfolio die optimale Lösung des Minimierungsproblems darstellt. Diese Rechtfertigung geht aber über den hier behandelten Stoff hinaus. Man findet sie beispielsweise in Merz und Wüthrich (2013, Beispiel 24.40).

wobei h zum Beispiel für das benötigte Budget zum Kauf des Güterbündels $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ steht oder den Verbrauch einer Ressource zur Produktion von $(x_1, x_2)^T$ beschreibt und b das zur Verfügung stehende Budget bzw. die zur Verfügung stehende Menge einer Ressource repräsentiert. Mit $g(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) - b = 0$ kann dann das Verfahren von Lagrange angewandt werden. Wir bezeichnen die Lagrange-Funktion in Abhängigkeit vom gegebenen Budget b als

$$L^b(x_1, x_2, \lambda, b) = f(\mathbf{x}) - \lambda(h(\mathbf{x}) - b).$$

Da f und g stetig partiell differenzierbare Funktionen sind, gilt für ein gegebenes Budget b und zugehöriger optimaler Lösung $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$

$$\nabla L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*, b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Verändert man also das Budgets um eine kleine Menge Δb, verändert sich die optimale Lösung zu $(x_1^* + \Delta x_1, x_2^* + \Delta x_2, \lambda^* + \Delta\lambda)$ und ergibt einen veränderten Zielfunktionswert. Für jedes $\mathbf{x}$, welches die Nebenbedingung $h(\mathbf{x}) = b$ erfüllt, gilt

$$L^b(x_1, x_2, \lambda, b) = f(\mathbf{x}) - \lambda(h(\mathbf{x}) - b) = f(\mathbf{x}),$$

d.h. der Wert der Lagrange-Funktion entspricht dem Zielfunktionwert. Daher entspricht die Veränderung des Zielfunktionswerts bei einer Veränderung des Budgets um Δb der Veränderung der Langrangefunktion, also etwa

$$\nabla L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*, b) \begin{pmatrix} \Delta x_1^* \\ \Delta x_2^* \\ \Delta\lambda^* \\ \Delta b \end{pmatrix} = \lambda \Delta b.$$

Der Wert λ ist demnach unter gewissen Voraussetzungen ein Mass der Sensitivität des Zielfunktionswertes bezüglich einer Veränderung von b, also des zur Verfügung stehenden Budgets oder der Menge der zur Verfügung stehenden Ressource. Neben der Bezeichnung Lagrangemultiplikator wird in den Wirtschaftswissenschaften für λ daher auch oft der Begriff des Schattenpreises oder der Opportunitätskosten verwendet.

Wir illustrieren dies am Beispiel:

■ Beispiel 10.2.24 — Interpretation von λ bei der Nutzenmaximierung.
Wir betrachten erneut das Problem des nutzenmaximierenden Konsumenten aus Beispiel 10.1.4 mit Zielfunktion $f(\mathbf{x}) = x_1^{0.8} x_2^{0.2}$ und Nebenbedingung $2x_1 + 3x_2 = 600$. Wir haben bereits berechnet, dass $(240, 40)^T$ die optimale Lösung des Problems ist mit $f(240, 40) = 240^{0.8} 40^{0.2} \approx 167.72$ und $\lambda = 0.4(\frac{1}{6})^{0.2} \approx 0.28$. Wie würde sich aber der (optimale) Nutzen des Konsumenten verändern, wenn sich sein Budget um 1.5 Geldeinheiten vergrössert? Oben wurde behauptet, dass dieser Wert 1.5λ entspricht. Mit einem Budget von 601.5 sollte sich also ein Nutzen von etwa $167.72 + 1.5 \cdot 0.28 = 168.14$ ergeben.

Berechnen wir die Lösung von $\max_{\mathbf{x} \in B} f(\mathbf{x})$ mit $B = \{\mathbf{x} \in (0, +\infty)^2 | 2x_1 + 3x_2 = 601.5\}$ analog zu Beispiel 10.2.19, ergibt sich $x_1 = 240.6$, $x_2 = 40.1$ mit $f(240.6, 40.1) \approx 168.14$. In diesem Fall ist die Schätzung also bis auf zwei Nachkommastellen genau. ■

Obige Interpretation kann auf den Fall von beliebig vielen Gleichheitsnebenbedingungen und Variablen übertragen werden solange $m \leq n$ gilt.

Beispiel 10.2.25 — Risikominimales Portfolio.
Wir betrachten erneut das Problem des risikominimalen Portfolios zu gegebener Rendite. Hier hat der Parameter λ_1 folgende Bedeutung: Erhöht man die zu erreichende Rendite um (ein kleines) Δr, so erhöht sich das Risiko in etwa um $\lambda_1 \Delta r = \frac{\Delta r}{6}$. Da sich Anteile stets auf 1 addieren sollten, ist eine analoge ökonomische Interpretation von λ_2 wenig hilfreich. ■

Z

Sei g eine reelle Funktion in n Variablen mit offenem Definitionsbereich D und $\mathbf{x}_0 \in D$. Falls für $\varepsilon, \delta > 0$ Umgebungen $U((x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)^T, \delta) \times U(x_n^0, \varepsilon) \subseteq D$ existieren, so dass eine Funktion $\tilde{g} : U((x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)^T, \delta) \to U(x_n^0, \varepsilon)$ mit $x_n = \tilde{g}(x_1, \dots, x_{n-1})$ und

$$g(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow x_n = \tilde{g}(x_1, \dots, x_{n-1})$$

für alle $\mathbf{x} \in U((x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)^T, \delta) \times U(x_n^0, \varepsilon)$ existiert, heisst die Funktion $\tilde{g}$ implizit durch die Gleichung $g(\mathbf{x}) = 0$ in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0$ gegeben.

Ist g stetig partiell differenzierbar mit offenem Definitionsbereich D und gilt $g(\mathbf{x}^0) = 0$ sowie $g_{x_n}(\mathbf{x}) \neq 0$, dann ist in einer Umgebung $U((x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)^T, \delta) \times U(x_n^0, \varepsilon)$ von $\mathbf{x}^0$ durch $g(\mathbf{x}) = 0$ implizit eine Funktion $\tilde{g}(x_1, \dots, x_{n-1})$ gegeben und $\frac{\partial \tilde{g}(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)}{\partial x_i} = -\frac{g_{x_i}(\mathbf{x}^0)}{g_{x_n}(\mathbf{x}^0)}$.

Die sogenannte Lagrange-Funktion eines Optimierungsproblems $\min f(\mathbf{x})$ unter der Gleichheitsnebenbedingung $g(\mathbf{x}) = 0$ ist $L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda g(\mathbf{x})$.

Sind f und g stetig partiell differenzierbare Funktionen in n Variablen mit offenem Definitionsbereich und ist $\mathbf{x}^0$ eine lokale Extremalstelle des Optimierungsproblems $\min f(\mathbf{x})$ unter der Gleichheitsnebenbedingung $g(\mathbf{x}) = 0$ und gilt $\nabla g(\mathbf{x}^0) \neq \mathbf{0}$, dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\nabla L(x_1^0, \dots, x_n^0, \lambda) = \mathbf{0}$.

10.3 Lineare Optimierung

Die lineare Optimierung erlaubt das Auftreten von Ungleichheitsnebenbedingungen, beschränkt sich dafür aber auf Zielfunktionen und Nebenbedingungen, welche durch affin-lineare Funktionen $f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$ beschrieben sind.

10.3.1 Die Standardform der linearen Optimierung

Ziele dieses Unterkapitels

- Was versteht man unter einem linearen Optimierungsproblem?
- Was versteht man unter einem linearen Optimierungsproblem in Standardform?
- Kann jedes lineare Optimierungsproblem als ein lineares Optimierungsproblem in Standardform formuliert werden?

Definition 10.3.1 — Lineares Optimierungsproblem in Standardform.
(P-max) und (P-min) heissen lineares Optimierungsproblem oder lineares Programm (LP), wenn $f, g_1, \dots, g_m$ affin-lineare Funktionen mit Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^n$ und Zielmenge $Z = \mathbb{R}$ sind.
Ein lineares Optimierungsproblem liegt in Standardform vor, wenn es für $A = (a_{ij}) \in$

$\mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in der Form

$$\text{(P-max)} \qquad \begin{aligned} \max\, & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{u.d.N. } A\mathbf{x} & \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

beschrieben ist.

Dabei bezeichnet man die Matrix A als Koeffizientenmatrix und $\mathbf{b}$ als rechte Seite des linearen Ungleichungssystems. Den Vektor $\mathbf{c}$ nennt man den Vektor der Zielfunktionskoeffizienten und $\mathbf{x}$ den Vektor der Entscheidungsvariablen. Die Bedingung $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ heisst Nichtnegativitätsbedingung.

Bei einem linearen Optimierungsproblem in Standardform handelt es sich also stets um ein Maximierungsproblem mit einer Zielfunktion, welche eine lineare Abbildung ist, und einem zulässigen Bereich $B = \{\mathbf{x} \in [0,+\infty)^n | A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$.

Die Definition eines linearen Optimierungsproblem umfasst alle Optimierungsprobleme mit affin-linearer Zielfunktion und Nebenbedingungen, welche nur mithilfe affin-linearer Funktionen beschrieben werden. Damit umfasst sie unter anderem auch Minimierungsprobleme, Optimierungsprobleme mit Gleichheitsnebenbedingungen, Optimierungsprobleme mit Zielfunktionen der Form $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + d, \mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}$, oder Optimierungsprobleme mit Entscheidungsvariablen, welche negative Werte annehmen dürfen. Zu jedem linearen Optimierungsproblem kann durch geeignete Umformulierung jedoch entweder

- ein äquivalentes lineares Optimierungsproblem in Standardform gefunden werden oder
- eines, aus dem man die Lösung des ursprünglichen Problems wieder rekonstruieren kann.

Wir demonstrieren dies in Beispielen:

■ Beispiel 10.3.1 — Das Produktionsplanungsproblem in Standardform.

Wir betrachten erneut das Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen aus Beispiel 1.0.6, welches wir in Beispiel 10.1.3 formulierten:

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 5x_2 \\ \text{u.d.N.}\quad x_1 + x_2 & \leq 700 \\ x_1 + 3x_2 & \leq 1500 \\ 2x_1 + x_2 & \leq 1200 \\ x_1 & \geq 0 \\ x_2 & \geq 0. \end{aligned}$$

Dieses Problem liegt bereits als lineares Optimierungsproblem in Standardform vor mit

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 700 \\ 1500 \\ 1200 \end{pmatrix}.$$

Die Zielfunktion ergibt sich als

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = (4,5)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4x_1 + 5x_2$$

und die Nebenbedingungen als

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 700 \\ 1500 \\ 1200 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

sowie

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

■

■ Beispiel 10.3.2 — Das Mischungsproblem in Standardform.
Wir betrachten erneut das Mischungsproblem aus Beispiel 10.1.2.

$$\begin{aligned} \min\ 0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 & \\ \text{u.d.N.} \qquad 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 &\leq 2 \\ 1000x_1 + 2000x_2 + 4000x_3 &\geq 2000 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Dieses lineare Optimierungsproblem liegt nicht in Standardform vor, da die zweite Nebenbedingung eine $\geq$-Bedingung und die dritte eine Gleichheitsbedingung ist.

Da $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ genau dann gilt, wenn $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$ und $x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$, ergibt sich folgendes lineares Optimierungsproblem mit gleicher Zielfunktion und gleichem zulässigen Bereich:

$$\begin{aligned} \min\ 0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 & \\ \text{u.d.N.} \qquad 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 &\leq 2 \\ 1000x_1 + 2000x_2 + 4000x_3 &\geq 2000 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Multipliziert man die zweite und vierte Ungleichung mit (-1), ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \min\ 0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 & \\ \text{u.d.N.} \qquad 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 &\leq 2 \\ -1000x_1 - 2000x_2 - 4000x_3 &\leq -2000 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &\leq -1 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Mit $\min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x}) = -\max_{\mathbf{x}\in B} -f(\mathbf{x})$ aus Satz 10.1.1 ergibt sich

$$\begin{aligned}
\max\ & -0.1x_1 - 0.3x_2 - 0.2x_3 \\
\text{u.d.N.}\ & 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 \leq 2 \\
& -1000x_1 - 2000x_2 - 4000x_3 \leq -2000 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\
& -x_1 - x_2 - x_3 \leq -1 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

Dieses lineare Optimierungsproblem ist ein lineares Optimierungsproblem in Standardform mit

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -0.1 \\ -0.3 \\ -0.2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1000 & -2000 & -4000 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2000 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

■

■ **Beispiel 10.3.3 — Das Mischungsproblem mit 2 Variablen in Standardform.** Nach der Vereinfachung des Mischungsproblems in Beispiel 10.1.15 zu einem Optimierungsproblem in 2 Variablen ergab sich folgendes Minimierungsproblem:

$$\begin{aligned}
\min\ & -0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.2 \\
\text{u.d.N.}\ & -x_1 - 2x_2 \leq -1 \\
& 3000x_1 + 2000x_2 \leq 2000 \\
& x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Dieses Optimierungsproblem ist laut Satz 10.1.1 äquivalent zu dem Optimierungsproblem

$$\begin{aligned}
\max\ & 0.1x_1 - 0.1x_2 - 0.2 \\
\text{u.d.N.}\ & -x_1 - 2x_2 \leq -1 \\
& 3000x_1 + 2000x_2 \leq 2000 \\
& x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Dieses Problem liegt jedoch immer noch nicht in Standardform vor, da die Zielfunktion nicht in der Form $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ geschrieben werden kann, sondern noch einen zusätzlichen Summanden -0.2 enthält. Dieser zusätzliche Summand verändert allerdings lediglich den Zielfunktionswert, nicht die (optimale) Lösung eines linearen Optimierungsproblems. Definieren wir

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3000 & 2000 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2000 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und $B = \left\{\mathbf{x} \in [0,+\infty)^2 \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\right\}$, dann ist $\mathbf{x}^*$ eine optimale Lösung des obigen Maximierungsproblems $\max_{\mathbf{x}\in B} 0.1x_1 - 0.1x_2 - 0.2$ genau dann, wenn $\mathbf{x}^* \in B$ und

$$0.1x_1^* - 0.1x_2^* - 0.2 \geq 0.1x_1 - 0.1x_2 - 0.2 \text{ für alle } \mathbf{x} \in B.$$

Addiert man auf beiden Seiten 0.2, erkennt man, dass diese Ungleichung genau dann gilt, wenn

$$0.1x_1^* - 0.1x_2^* \geq 0.1x_1 - 0.1x_2 \text{ für alle } \mathbf{x} \in B,$$

also wenn $\mathbf{x}^*$ eine optimale Lösung von $\max_{\mathbf{x}\in B} \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ mit $\mathbf{c} = (0.1, -0.1)^T$ ist. Das lineare Optimierungsproblem, welches die Funktion $0.1x_1 - 0.1x_2 - 0.2$ über B maximiert, ist also äquivalent zu folgendem linearen Optimierungsproblem in Standardform:

$$\begin{aligned} &\max\ \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{u.d.N.} \quad & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

■

■ **Beispiel 10.3.4 — Ein lineares Optimierungsproblem mit möglichen negativen Lösungen.**
Suchen wir die optimale Lösung des Optimierungsproblems

$$\begin{aligned} &\max\ x_1 - 3x_2 \\ &\text{u.d.N.} \quad x_1 \leq 4 \\ &x_1 + x_2 \leq 5 \\ &-x_2 \leq 1 \\ &x_1 \geq 0, \end{aligned}$$

so liegt das lineare Optimierungsproblem nicht in Standardform vor, da $x_2 \geq 0$ nicht gelten muss. In der Tat ist x_2 hier eine beliebige reelle Zahl, für welche aus der zweiten und dritten Ungleichung hervorgeht, dass sie mindestens den Wert -1 und für gegebenes x_1 höchstens den Wert $5 - x_1$ hat. Eine Standard-Vorgehensweise ist es, in solchen Fällen Variablen $\tilde{x}_2 \geq 0$ und $\tilde{x}_3 \geq 0$ zu definieren mit $x_2 = \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3$. Schreibt man zudem $\tilde{x}_1$ statt x_1, ergibt sich dann

$$\begin{aligned} &\max\ \tilde{x}_1 - 3(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3) \\ &\text{u.d.N.} \quad \tilde{x}_1 \leq 4 \\ &\tilde{x}_1 + (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3) \leq 5 \\ &-(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3) \leq 1 \\ &\tilde{x}_1 \geq 0 \\ &\tilde{x}_2 \geq 0 \\ &\tilde{x}_3 \geq 0 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} &\max\ \mathbf{c}^T\tilde{\mathbf{x}} \\ \text{u.d.N.} \quad & A\tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{b} \\ & \tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

mit

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}, \mathbf{b}=\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{c}=\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}.$$

Ein Vektor $\tilde{\mathbf{x}}^*$ ist genau dann eine optimale Lösung zu diesem linearen Optimierungsproblem in Standardform, wenn $(\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^* - \tilde{x}_3^*)^T$ eine optimale Lösung des urspünglichen Problems ist. Erhält man also für das lineare Optimierungsproblem in Standardform die optimale Lösung $(4,0,1)^T$, dann ist die optimale Lösung des urspünglichen linearen Optimierungsproblems $(4,0-1)^T = (4,-1)^T$. ■

Z Ein Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen, in welchem alle Funktionen affin-linear sind, heisst lineares Optimierungsproblem.

Ein lineares Optimierungsproblem liegt in Standardform vor, wenn es für $A=(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ als $\max_{\mathbf{x}\in B} \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ mit $B = \{\mathbf{x} \in [0,+\infty)^n | A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ beschrieben ist. Jedes lineare Optimierungsproblem kann als ein lineares Optimierungsproblem in Standardform formuliert werden, welches äquivalent zum ursprünglichen Problem ist oder aus welchem man die Lösung des ursprünglichen Problems einfach ablesen kann.

10.3.2 Graphische Lösung

Ziele dieses Unterkapitels

- Wie kann man ein lineares Optimierungsproblem mit zwei Variablen graphisch lösen?

Für lineare Optimierungsprobleme in nur zwei Variablen ist es besonders einfach, eine Lösung graphisch zu bestimmen. Wir demonstrieren das Vorgehen an Beispielen:

■ Beispiel 10.3.5 — Das Produktionsproblem in Standardform.
Betrachten wir erneut das Produktionsproblem aus Beispiel 10.1.3, welches in Abbildung 10.20 (links) visualisiert ist, so lässt sich der zulässige Bereich einfach als Schnitt der Mengen $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 700\}$, $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 3x_2 \leq 1500\}$, $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + x_2 \leq 1200\}$, $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0\}$ und $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 0\}$ ermitteln. Die Höhenlinie zum Niveau $y = 4x_1 + 5x_2$ kann man explizit als $x_2 = \frac{y}{5} - \frac{4}{5}x_1$ bestimmen. Alle Höhenlinien haben also die gleiche Steigung von $-\frac{4}{5}$. Ausgehend von einer Höhenlinie zum Niveau y, erhält man eine Höhenlinie mit höherem Niveau durch eine Parallelverschiebung der Höhenlinie nach oben. So lange man die Höhenlinie weiter nach oben schieben kann, kann man eine Höhenlinie mit höherem Niveau erreichen und den Zielfunktionswert verbessern. Hier im Beispiel erkennt man in Abbildung 10.20 (rechts), dass das grösste erzielbare Niveau an der Ecke $(300,400)^T$ des zulässigen Bereichs angenommen wird. Man kann kein höheres Niveau erzielen, da man durch eine weitere Parallelverschiebung nach oben den zulässigen Bereich verlässt. ■

■ Beispiel 10.3.6 — Das Mischungsproblem in zwei Variablen.
Wir betrachten erneut das Mischungsproblem in Standardform aus Beispiel 10.3.3, welches in Abbildung 10.21 dargestellt ist. Der zulässige Bereich entspricht dem Schnitt der Mengen $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1 - 2x_2 \leq -1\}$, $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 3000x_1 + 2000x_2 \leq 2000\}$, $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 1\}$, $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0\}$ und $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 0\}$. Die Höhenlinie zum Niveau

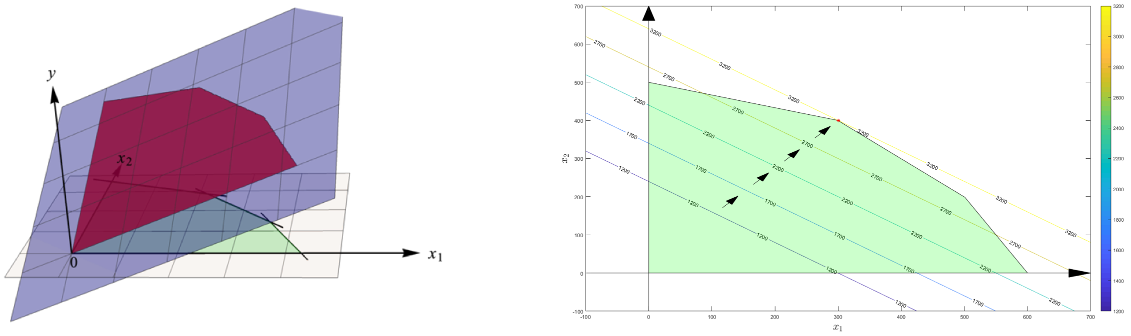


Abbildung 10.20: Die Funktion $4x_1 + 5x_2$ und Höhenlinien über dem zulässigen Bereich.

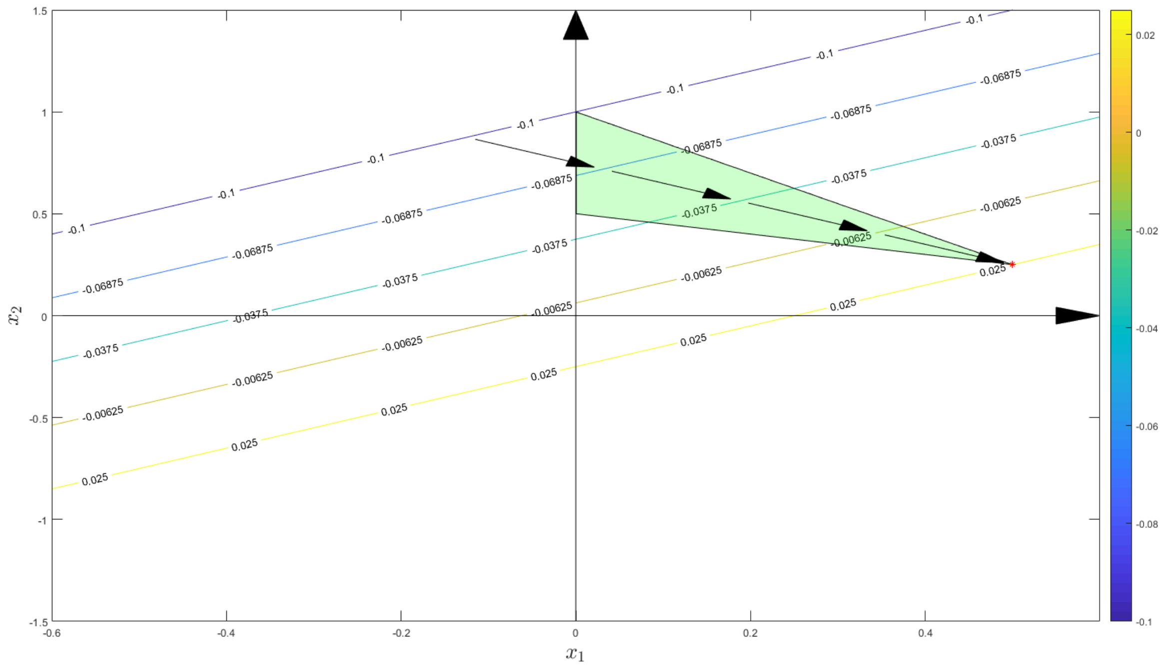


Abbildung 10.21: Höhenlinien der Funktion $0.1x_1 - 0.1x_2$ und der zulässige Bereich.

$y = 0.1x_1 - 0.1x_2$ kann man auch hier explizit bestimmen. Sie hat die Form $x_2 = x_1 - 10y$. Alle Höhenlinien haben also eine Steigung von 1. Ausgehend von einer Höhenlinie zum Niveau y, erhält man eine Höhenlinie mit höherem Niveau durch eine Parallelverschiebung der Höhenlinie nach unten. So lange man die Höhenlinie weiter nach unten schieben kann, kann man den Zielfunktionswert verbessern. Hier im Beispiel scheint das grösste erzielbare Niveau an der Ecke $(0.5, 0.25)^T$ des zulässigen Bereichs angenommen zu werden. Ausgehend von diesem Niveau gibt es keine Höhenlinie zu einem höheren Niveau, welche Punkte im zulässigen Bereich enthält. ■

■ **Beispiel 10.3.7 — Ein Beispiel ohne zulässige Lösung.**

Betrachten wir das Problem

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + x_2 \\ \text{u.d.N.}\quad & -x_2 \leq -2 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

so ist der Schnitt der Mengen $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid -x_2 \leq -2\}$, $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 1\}$, $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0\}$ und $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 0\}$, also der zulässige Bereich, leer, vgl. Abbildung 10.22. Somit hat das lineare Optimierungsproblem keine zulässige und auch keine optimale Lösung. ■

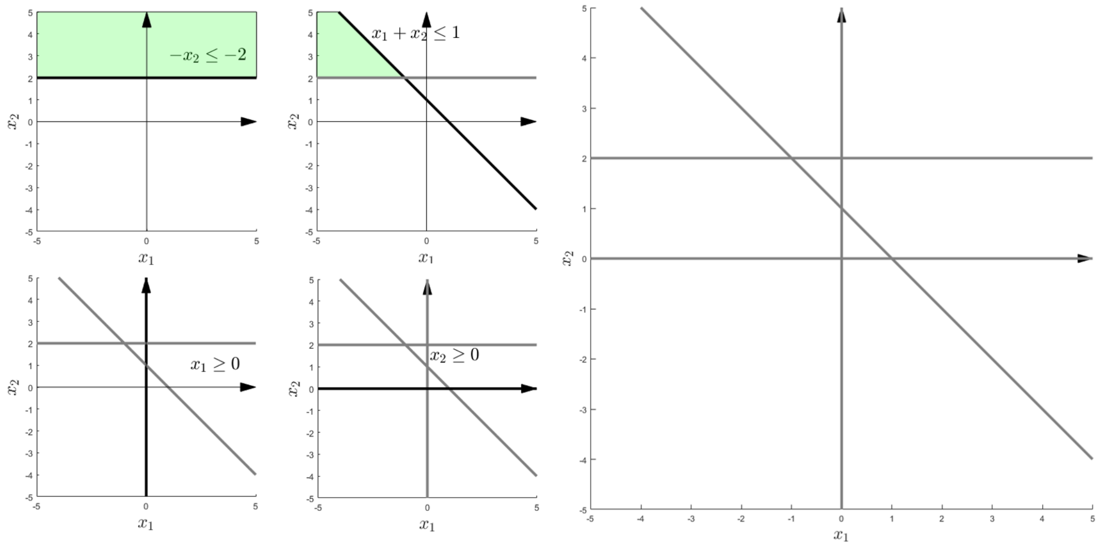


Abbildung 10.22: Ein leerer zulässiger Bereich.

■ **Beispiel 10.3.8 — Ein Beispiel mit vielen Lösungen.**
Der zulässige Bereich des Problems

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + x_2 \\ \text{u.d.N.}\quad & x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

entspricht dem Schnitt der Mengen $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq 2\}$, $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 1\}$, $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0\}$ und $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 0\}$ und ist nicht leer, vgl. Abbildung 10.23. Ausgehend von der Höhenlinie $x_2 = -x_1$ zum Niveau 0 kann man Höhenlinien mit höheren Niveaus finden, indem man die Höhenlinie parallel nach oben verschiebt. Abbildung 10.24 zeigt die Höhenlinie $x_2 = 1 - x_1$ zum Niveau 1. Eine weitere Parallelverschiebung hätte zur Folge, dass kein Element der Höhenlinie im zulässigen Bereich ist. Innerhalb des zulässigen Bereichs gibt es jedoch unendlich viele Stellen mit Zielfunktionswert 1, u.a. $(0,1)^T$ und $(1,0)^T$. Sowohl

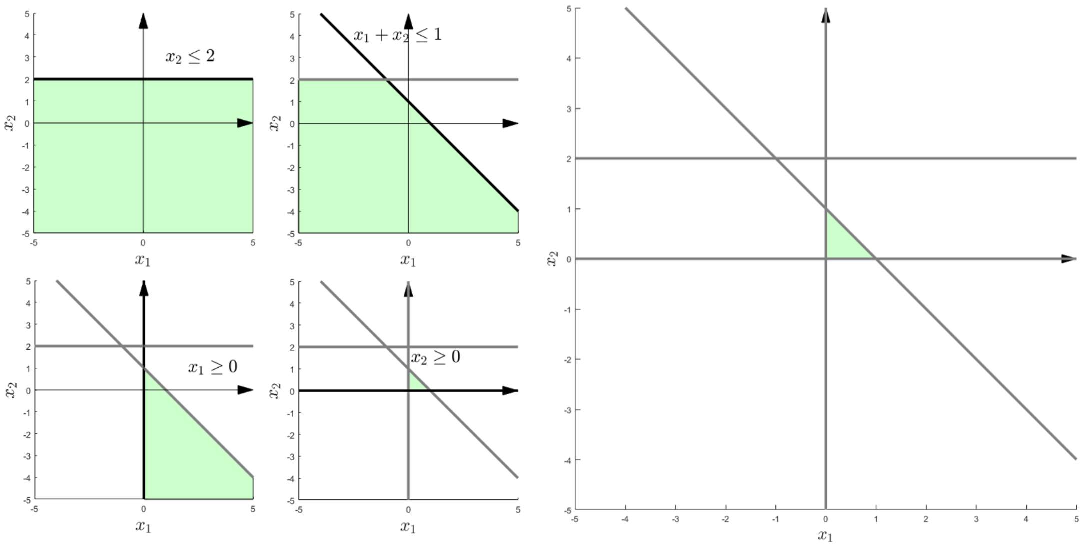


Abbildung 10.23: Der zulässige Bereich aus Beispiel 10.3.8.

$(0,1)^T$ als auch $(1,0)^T$ sind optimale Lösungen des linearen Optimierungsproblems. Auch alle Stellen auf der Verbindungslinie dieser zwei Stellen haben den Zielfunktionswert 1 und stellen somit optimale Lösungen dar. Dieses Problem hat unendlich viele optimale Lösungen. Die Menge aller optimalen Lösungen $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha(0,1)^T + (1-\alpha)(1,0)^T, \alpha \in [0,1]\}$ ist in Abbildung 10.24 rot markiert. ■

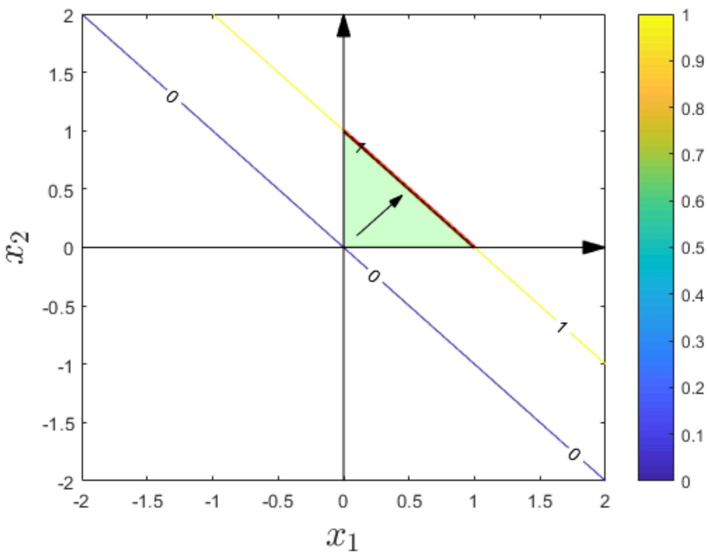


Abbildung 10.24: Ein lineares Optimierungsproblem mit unendlich vielen optimalen Lösungen.

■ **Beispiel 10.3.9 — Ein Beispiel ohne optimale Lösung.**

Abbildung 10.25 zeigt den zulässigen Bereich des linearen Optimierungsproblems

$$\begin{aligned}
\max\ & x_1 + x_2 \\
\text{u.d.N.}\quad & x_2 \leq 2 \\
& -x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Verschiebt man die Höhenlinie $x_2 = -x_1$ zum Niveau $y = 0$ nach oben, um höhere

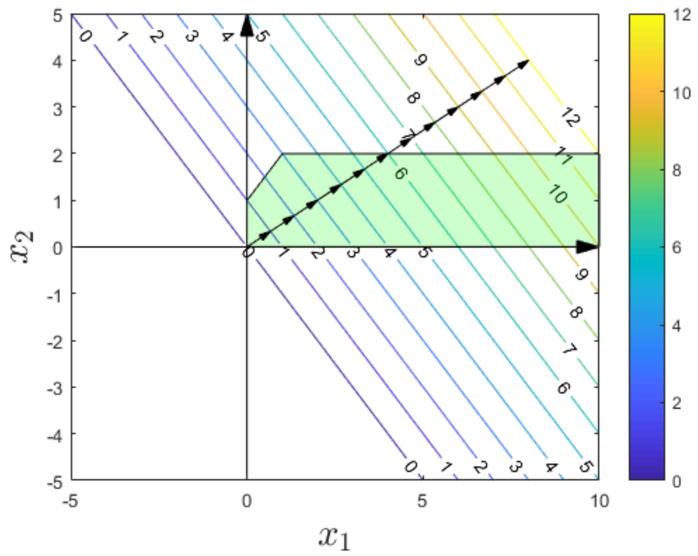


Abbildung 10.25: Ein lineares Optimierungsproblem mit unbeschränkter Zielfunktion.

Niveaus zu erreichen, stellt man schnell fest, dass Höhenlinien beliebig hoher Niveaus den zulässigen Bereich schneiden. Man kann die Höhenlinie beliebig weit parallel nach oben verschieben, ohne den zulässigen Bereich zu verlassen. Die Zielfunktion f ist im zulässigen Bereich also nach oben unbeschränkt. Es gilt also $\sup_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x}) = +\infty$. Damit hat das lineare Optimierungsproblem zwar zulässige Lösungen aber keine optimale Lösung. ■

Will man ein lineares Optimierungsproblem mit zwei Variablen in Standardform graphisch lösen, geht man also wie folgt vor:

1. Bestimmung des zulässigen Bereichs: Man zeichnet den zulässigen Bereich als Schnitt der Mengen, die durch die einzelnen Ungleichheitsnebenbedingungen (inklusive Nichtnegativitätsbedingungen) gegeben sind.
2. Bestimmung einer Höhenlinie und der Richtung, in welcher sich der Zielfunktionswert vergrössert: Ist der zulässige Bereich leer, so hat das lineare Optimierungsproblem keine optimale Lösung. Ist der zulässige Bereich nicht-leer, zeichnet man eine Höhenlinie durch eine beliebige Stelle $\mathbf{x}^0 \in B$ mit Niveau $f(\mathbf{x}^0) = y$ und bestimmt die Richtung, in der eine Parallelverschiebung der Höhenlinie zu einer Vergrösserung von y führt.[11]

[11] Diese Richtung entspricht auch der Richtung des Gradienten der Zielfunktion.

3. Bestimmung der optimalen Lösung: Kann die Höhenlinie in diese Richtung beliebig weit verschoben werden, ohne den zulässigen Bereich B vollständig zu verlassen, hat das lineare Optimierungsproblem keine optimale Lösung. Die Zielfunktion wächst innerhalb des zulässigen Bereichs über alle Schranken. Kann die Höhenlinie in diese Richtung nicht beliebig verschoben werden ohne den zulässigen Bereich B zu verlassen, bestimmt man die (eindeutige) Höhenlinie von f mit maximalem Zielfunktionswert, welche die zulässige Menge in mindestens einem Punkt schneidet. Man bestimmt also das Niveau y^*, für das es ein $\mathbf{x}^* \in B$ mit $f(\mathbf{x}^*) = y^*$ und $f(\mathbf{x}) \leq y^*$ für alle $\mathbf{x} \in B$ gibt. Jede Stelle $\mathbf{x} \in B$ mit $f(\mathbf{x}) = y^*$ ist dann eine optimale Lösung des linearen Optimierungsproblems.

Z Nachdem man in einem zweidimensionalen Koordinatensystem den zulässigen Bereich markiert hat, zeichnet man eine Höhenlinie (zu einem beliebigen Niveau) ein. Verschiebt man diese Höhenlinie parallel, erreicht man andere Zielfunktionswerte. Verschiebt man die Höhenlinie im Fall eines Maximierungsproblems (Minimierungsproblems) in Richtung ansteigender (abfallender) Zielfunktionswerte so weit, bis der zulässige Bereich von ihr nicht mehr geschnitten sondern nur berührt wird, sind die Stellen, an welchen diese Höhenlinie den zulässigen Bereich berührt, die optimalen Lösungen des linearen Optimierungsproblems.

10.3.3 Eckpunkte des zulässigen Bereichs

Ziele dieses Unterkapitels

- Ist der zulässige Bereich eines linearen Optimierungsproblems stets konvex? Ist er stets beschränkt?
- Was versteht man unter einem Eckpunkt des zulässigen Bereichs? Hat der zulässige Bereich eines linearen Optimierungsproblems stets endlich viele Eckpunkte?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen Eckpunkten des zulässigen Bereichs und der optimalen Lösung eines linearen Optimierungsproblems?

In allen bisher betrachteten Beispielen bildete der zulässige Bereich eine konvexe Menge.[12] Wenn das betrachtete lineare Optimierungsproblem eine Lösung hatte, befand sich in den Beispielen stets mindestens eine dieser Lösungen an einer Ecke des zulässigen Bereichs. In diesem Abschnitt halten wir diese Beobachtung fest und verallgemeinern sie.

Satz 10.3.1 — Konvexität von B.
Der zulässige Bereich B eines linearen Optimierungsproblems in Standardform ist eine konvexe Menge.

Beweis. Bei einem linearen Optimierungsproblem entspricht B stets der Schnittmenge der m konvexen Mengen, welche durch die Nebenbedingungen $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ als Punkte ober- oder unterhalb einer Hyperebene gegeben sind, und der n konvexen Mengen, welche durch die Nichtnegativitätsbedingungen gegeben sind. Da der Schnitt endlich vieler konvexer Mengen wieder konvex ist, ist B konvex.[13] ■

[12] Die leere Menge ist ja ebenfalls eine konvexe Menge, vgl. Definition 2.2.8 in Kapitel 2.2.

[13] Die Menge aller Punkte unter- oder oberhalb einer Hyperebene bezeichnet man auch als Halbebene. Die Schnittmenge endlich vieler Halbebenen bezeichnet man als konvexes Polyeder.

Abbildung 10.26 zeigt exemplarisch verschiedene zulässige Bereiche und deren Ecken, welche wir auch Eckpunkte nennen. Um das im $\mathbb{R}^2$ geometrisch intuitive Konzept eines Eckpunktes auch im $\mathbb{R}^n$ mit $n > 2$ verwenden zu können, benötigen wir eine allgemeine Definition eines Eckpunktes. Hierbei ist zu beachten, dass die meisten Elemente aus B als eine Konvexkombination zweier anderer Punkte aus B dargestellt werden können, d.h. für die meisten Elemente $\mathbf{x} \in B$ gilt

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x}^1 + (1-\alpha)\mathbf{x}^2, \quad \alpha \in [0,1], \quad \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \neq \mathbf{x},$$

vgl. Abbildung 10.27. An Eckpunkten ist dies jedoch nicht möglich. Ist $\mathbf{x}$ ein Eckpunkt, gibt

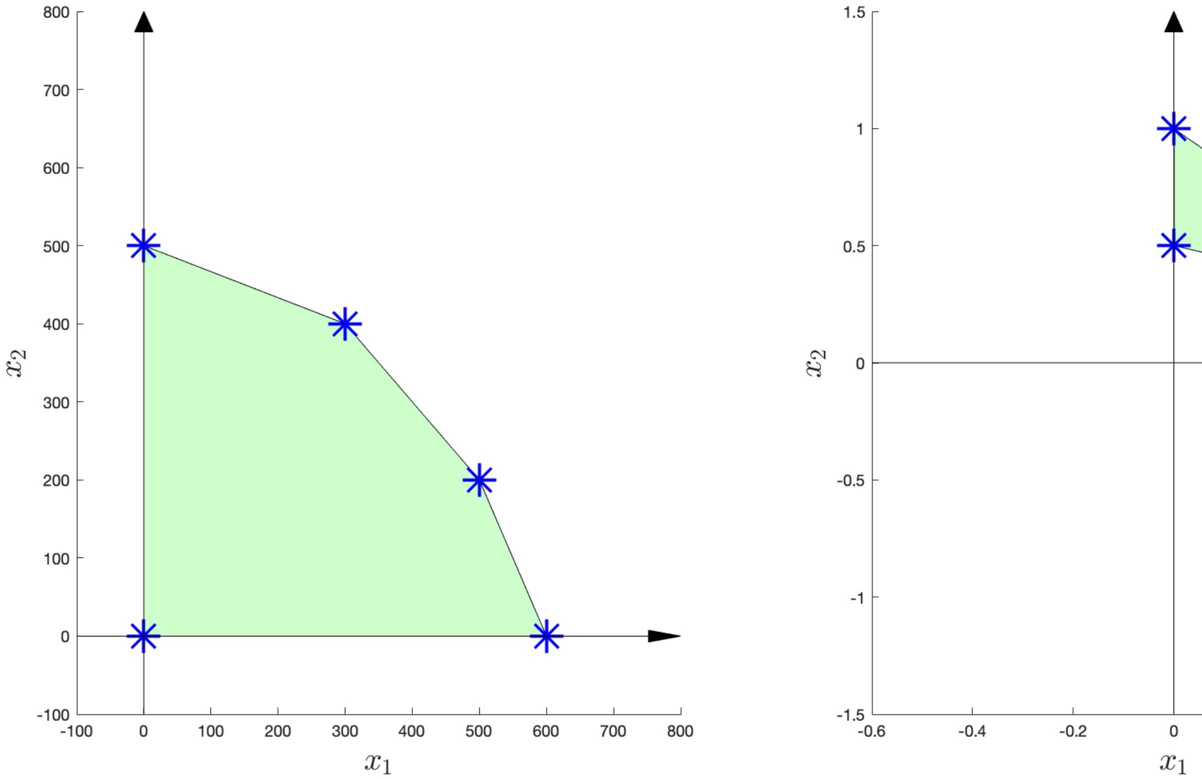


Abbildung 10.26: Zulässige Bereiche mit markierten Eckpunkten.

es keine $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in B$, $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \neq \mathbf{x}$, so dass $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x}^1 + (1-\alpha)\mathbf{x}^2$ für ein $\alpha \in [0,1]$.

Definition 10.3.2 — Eckpunkt.
Sei B ein nichtleerer zulässiger Bereich eines linearen Optimierungsproblems. Das Element $\mathbf{x} \in B$ heisst Eckpunkt (oder Ecke), wenn es keine $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in B$, $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \neq \mathbf{x}$ gibt, so dass $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x}^1 + (1-\alpha)\mathbf{x}^2$ für ein $\alpha \in [0,1]$.

Wir betrachten ein Beispiel.

■ **Beispiel 10.3.10 — Eckpunkte des zulässigen Bereichs im Produktionsproblem.**
Der zulässige Bereich von Beispiel 10.3.5 ist

$$B = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 3x_2 \leq 1500, 2x_1 + x_2 \leq 1200, x_1 + x_2 \leq 700, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}$$

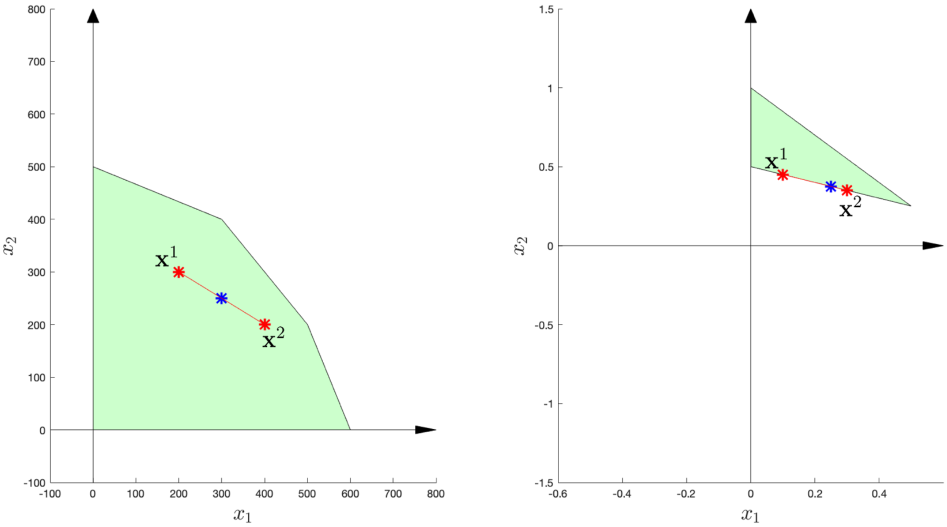


Abbildung 10.27: Konvexität des zulässigen Bereichs.

und ist in Abbildung 10.26 (links) erneut dargestellt. Jeder innere Punkt von B kann als eine Konvexkombination zweier Randpunkte aus B dargestellt werden, d.h. der Punkt liegt auf der Verbindungslinie zweier Randpunkte von B. Beispielsweise überprüft man leicht, dass $(200,300)^T \in B$ ein innerer Punkt von B ist. Zudem gilt $(0,500)^T, (500,0)^T \in B$ und $(200,300)^T = 0.4(500,0)^T + (1-0.4)(0,500)^T$. Der innere Punkt ist also eine Konvexkombination der Randpunkte $(0,500)^T, (500,0)^T \in B$. Auch der Punkt $(500,0)^T$ kann als Konvexkombination zweier anderer Randpunkte dargestellt werden. Wählt man zum Beispiel $\mathbf{0}, (600,0)^T \in B$, so gilt $(500,0)^T = \frac{1}{6}\mathbf{0} + (1-\frac{1}{6})(600,0)^T$. Weder $(600,0)^T$ noch $(0,500)^T$ oder $\mathbf{0}$ lassen sich jedoch als Konvexkombination zweier anderer Punkte in B darstellen. $(600,0)^T$, $(0,500)^T$ und $\mathbf{0}$ sind demnach Eckpunkte von B.

In Abbildung 10.26 (links) scheint es klar zu sein, dass Eckpunkte im Beispiel durch die Punkte $(600,0)^T$, $(0,500)^T$, $\mathbf{0}$, $(300,400)^T$ und $(500,200)^T$ gegeben sind. Dabei entspricht $(600,0)^T$ dem Punkt, an welchem die Nebenbedingungen $2x_1 + x_2 \leq 1200$ und $x_2 \geq 0$ mit Gleichheit erfüllt sind. Der Eckpunkt liegt am Schnittpunkt der Geraden, welche die Begrenzungen der den Nebenbedingungen entsprechenden Mengen darstellen. Am Punkt $(0,500)^T$ sind die Nebenbedingungen $x_1 + 3x_2 \leq 1500$ und $x_1 \geq 0$ mit Gleichheit erfüllt. Am Ursprung $\mathbf{0}$ sind die beiden Nichtnegativitätsbedingungen mit Gleichheit erfüllt. Am Punkt $(300,400)^T$ sind die Nebenbedingungen $x_1 + 3x_2 \leq 1500$ und $x_1 + x_2 \leq 700$ mit Gleichheit erfüllt. Die Nebenbedingungen $2x_1 + x_2 \leq 1200$ und $x_1 + x_2 \leq 700$ sind am Punkt $(500,200)^T$ mit Gleichheit erfüllt.

Nicht immer liegt am Schnittpunkt der Geraden, welche die Begrenzungen der den Nebenbedingungen entsprechenden Mengen darstellen, ein Eckpunkt von B. Beispielsweise ergibt sich der Schnittpunkt der zu den Nebenbedingungen $x_1 \geq 0$ und $x_1 + x_2 \leq 700$ gehörenden Geraden als $(0,700)^T$. Dieser Punkt ist nicht in B und damit auch kein Eckpunkt von B. ∎

Anschaulich ist klar, dass der zulässige Bereich B eines linearen Optimierungsproblems mit endlich vielen Variablen und Nebenbedingungen keine oder endlich viele Eckpunkte besitzt.[14]

Satz 10.3.2 — Endlich viele Eckpunkte.
Der zulässige Bereich eines linearen Optimierungsproblems hat höchstens endlich viele Eckpunkte.

Beweis. Einen Beweis findet man in **?**, Satz 1.7. ∎

In allen betrachteten Beispielen gab es entweder keine zulässige Lösung, der maximale Zielfunktionswert war unbeschränkt, oder es gab eine optimale Lösung an einem Eckpunkt von B. Diese Eigenschaft, dass im Falle der Existenz einer optimalen Lösung stets eine optimale Lösung an einem Eckpunkt zu finden ist, macht lineare Optimierungsprobleme relativ einfach lösbar. Da es nur endlich viele Eckpunkte geben kann, kann man sie zur Not alle aufzählen und ihre Funktionswerte bestimmen. Wir halten diese Aussage in folgendem Satz fest:

Satz 10.3.3 — Hauptsatz der linearen Optimierung.
Für ein lineares Optimierungsproblem mit Zielfunktion f und zulässigem Bereich B gilt:

- Ist $B = \{\}$, so hat das lineare Optimierungsproblem keine optimale Lösung.
- Ist $B \neq \{\}$, dann ist entweder mindestens einer der Eckpunkte von B eine optimale Lösung $\mathbf{x}^*$ des linearen Optimierungsproblems oder das lineare Optimierungsproblem hat keine optimale Lösung.
- Existieren optimale Lösungen an Eckpunkten $\mathbf{x}^{*1}, \dots \mathbf{x}^{*s}$, so ist auch jede Konvexkombination dieser Eckpunkte

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \mathbf{x}^{*i}, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, s, \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$$

  optimal.

Beweis. Einen Beweis findet man in **?**, Satz 1.9. ∎

Laut Satz 10.3.3 gibt es bei der Lösung eines linearen Optimierungsproblems vier zu unterscheidende Fälle. Abbildung 10.28 fasst diese zusammen. Abbildung 10.29 visualisiert die vier Fälle anhand von Beispielen. Hat ein lineares Optimierungsproblem also eine optimale Lösung, so findet man eine optimale Lösung an einem Eckpunkt. Zählt man alle Eckpunkte von B auf und bestimmt ihre Funktionswerte, kann man die optimale Lösung bestimmen (falls diese existiert). Wir demonstrieren dieses Vorgehen im Beispiel.

▪ Beispiel 10.3.11 — Lösung des Produktionsproblems durch Bestimmung der Funktionswerte aller Eckpunkte.

[14] Selbst wenn alle Geraden, welche die Begrenzungen der den Nebenbedingungen entsprechenden Mengen darstellen, sich paarweise schneiden würden und die Schnittpunkte in B lägen, könnte es höchstens $\binom{n+m}{2} < +\infty$ Eckpunkte geben.

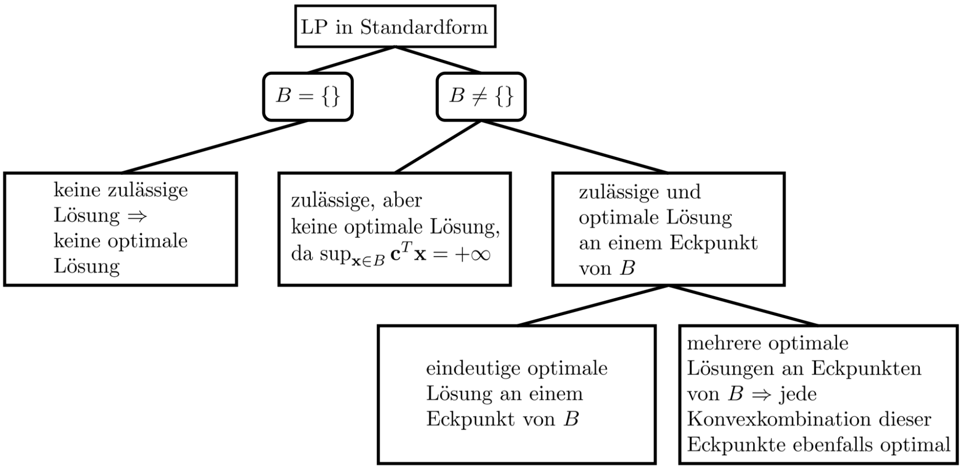


Abbildung 10.28: Schematische Darstellung des Hauptsatzes der linearen Optimierung.

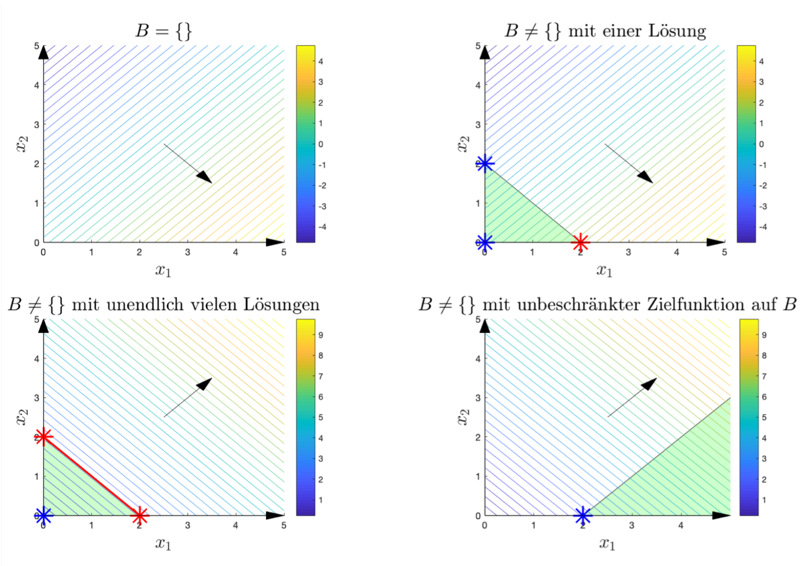


Abbildung 10.29: Visualisierung der 4 Fälle im Hauptsatz der linearen Optimierung.

Wir betrachten erneut das Produktionsproblem

$$
\begin{aligned}
\max\ & 4x_1 + 5x_2 \\
\text{u.d.N.}\ & x_1 + x_2 \leq 700 \\
& x_1 + 3x_2 \leq 1500 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 1200 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

aus Beispiel 10.1.3. In Beispiel 10.3.10 hatten wir bereits gesehen, dass der zulässige Bereich eine nichtleere Menge ist. Zudem gilt für alle $\mathbf{x} \in B$, dass $x_1 + x_2 \leq 700$ und damit

$$4x_1 + 5x_2 \underbrace{\leq}_{\text{da } x_1 \geq 0} 5(x_1 + x_2) \leq 5 \cdot 700 = 3500.$$

Die Zielfunktion ist auf B damit auf jeden Fall nach oben beschränkt. Aus Satz 10.3.3 können wir demnach schliessen, dass das lineare Optimierungsproblem (mindestens) eine optimale Lösung an einem Eckpunkt hat. Wir berechnen nun die Zielfunktionswerte aller Eckpunkte $(600,0)^T$, $(0,500)^T$, $\mathbf{0}$, $(300,400)^T$ und $(500,200)^T$ des zulässigen Bereichs.

$$\begin{array}{rrr} f(600,0) = 2400 & f(0,500) = 2500 & f(0,0) = 0 \\ f(300,400) = 3200 & f(500,200) = 3000. & \end{array}$$

Die Lösung des linearen Optimierungsproblems ist also $(300,400)^T$ mit Zielfunktionswert $y^* = 3200$. ■

Z Der zulässige Bereich eines linearen Optimierungsproblems ist stets konvex, er muss aber nicht beschränkt sein.

Ein Eckpunkt einer nichtleeren konvexen Menge ist ein Punkt, der sich nicht als Konvexkombination zweier anderer Punkte der Menge darstellen lässt. Der zulässige Bereich eines linearen Optimierungsproblems hat keinen oder endlich viele Eckpunkte.

Ein lineares Optimierungsproblem in Standardform hat keine Lösung, wenn der zulässige Bereich leer ist. Ist der zulässige Bereich nicht leer, so hat das lineare Optimierungsproblem entweder (mindestens) eine Lösung an einem Eckpunkt oder der Zielfunktionswert ist auf B nach oben unbeschränkt.

10.3.4 Bestimmung von Eckpunkten mithilfe von Basislösungen

Ziele dieses Unterkapitels

- Was versteht man unter einer zulässigen Basislösung des Gleichungssystems $A\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}$?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen einer zulässigen Basislösung des Gleichungssystems $A\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}$ und Eckpunkten des zulässigen Bereichs?

Wie kann man systematisch alle Eckpunkte von B bestimmen? Um das in Kapitel 7 dargelegte Wissen zum Thema linearer Gleichungssysteme nutzen zu können, führen wir zusätzliche Variablen, sogenannte Schlupfvariablen, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ ein. Mithilfe dieser Variablen verwandeln wir das Ungleichungssystem $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ in das Gleichungssystem $A\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}$. Statt

$$\left.\begin{array}{rl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & \leq b_2 \\ & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \leq b_m \end{array}\right. \quad \text{bzw. } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

schreiben wir also

$$\left.\begin{array}{rl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + y_1 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + y_2 & = b_2 \\ & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + y_m & = b_m \end{array}\right. \quad \text{bzw. } A\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

Offensichtlich löst $\mathbf{x}$ das Ungleichungssystem $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, wenn $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}$ löst und $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ gilt.

Satz 10.3.4 — Alternative Darstellung des zulässigen Bereichs.
Es gilt $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \ge \mathbf{0}\}$.

Beweis. Der Beweis folgt direkt aus den Überlegungen oben. ∎

Wir beschäftigen uns zunächst mit der Lösung von $A\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}$.

Beispiel 10.3.12 — Das LGS im Produktionsproblem.
Im Produktionsproblem aus Beispiel 10.3.1 ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 700 \\ 1500 \\ 1200 \end{pmatrix}.$$

Wir befassen uns nun also statt mit der zulässigen Menge B, den Stellen mit $A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$ und $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$, mit dem LGS $A\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}$, also

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + y_1 &= 700 \\ x_1 + 3x_2 + y_2 &= 1500 \\ 2x_1 + x_2 + y_3 &= 1200. \end{aligned}$$

Lösungen dieses LGS können wir mithilfe des Eliminationsverfahrens bestimmen:

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$\mathbf{b}$	
①	1	1	1	0	0	700	
②	1	3	0	1	0	1500	
③	2	1	0	0	1	1200	
④	1	1	1	0	0	700	①
⑤	0	2	-1	1	0	800	②$-$①
⑥	0	-1	-2	0	1	-200	③-2 ①
⑦	1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	300	④$-\frac{1}{2}$ ⑤
⑧	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	400	$\frac{1}{2}$⑤
⑨	0	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	200	⑥$+\frac{1}{2}$ ⑤
⑩	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	420	⑦$+\frac{3/2}{5/2}$ ⑨
⑪	0	1	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	360	⑧$-\frac{1/2}{5/2}$⑨
⑫	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	-80	$-\frac{2}{5}$⑨

Die Lösungsmenge dieses linearen Gleichungssystems ist also

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 420 + \frac{1}{5}y_2 - \frac{3}{5}y_3 \\ 360 - \frac{2}{5}y_2 + \frac{1}{5}y_3 \\ -80 + \frac{1}{5}y_2 + \frac{2}{5}y_3 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \middle| \, y_2, y_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 420 \\ 360 \\ -80 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems hat den Rang $r = 3$. Für $t_1 = t_2 = 0$ ergibt sich die Lösung $x_1 = 420, x_2 = 360, y_1 = -80, y_2 = y_3 = 0$, in welcher nur 3 der 5

Variablen Werte verschieden von 0 haben, bzw. $5-3=2$ Variablen den Wert 0 haben. Es handelt sich also um eine Basislösung des Gleichungssystems. Die $\mathbf{x}$-Werte dieser Lösung des LGS $A\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{b}$ lösen die Ungleichungen jedoch nicht, da $y_1=-80<0$ und damit

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &= 780 \not\leq 700 \\ x_1+3x_2 &= 1500 \leq 1500 \\ 2x_1+x_2 &= 1200 \leq 1200 \end{aligned}$$

gilt. Auch in Abbildung 10.30 sehen wir, dass $\mathbf{x}=(420,360)^T \notin B$.

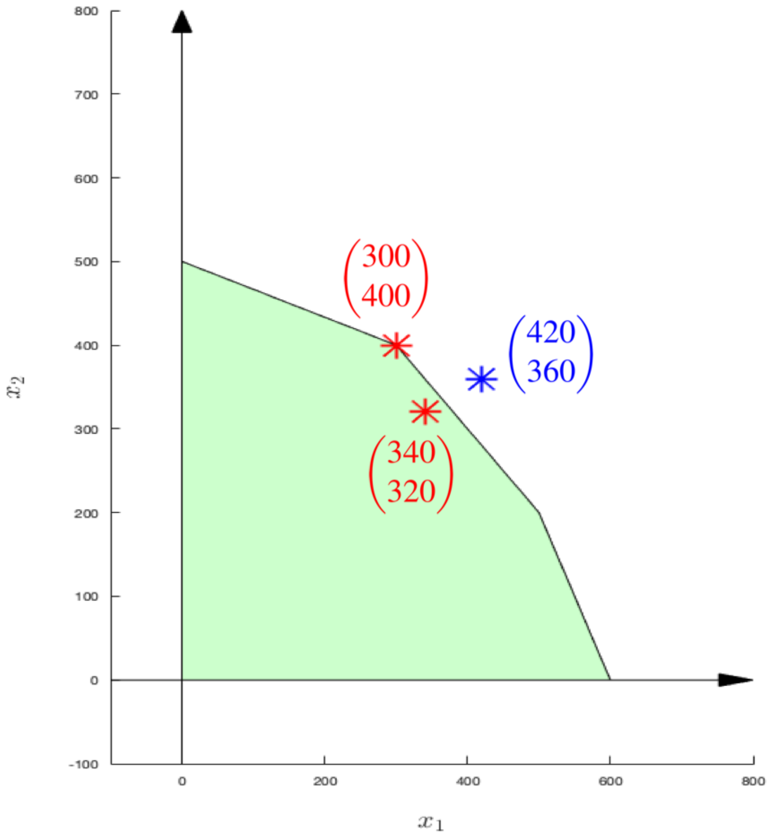


Abbildung 10.30: Der zulässige Bereich B.

Für $t_1=200$ und $t_2=200$ ergibt sich die Lösung $x_1=340, x_2=320, y_1=40, y_2=200, y_3=200$. Für diese Lösung gilt $\mathbf{y}\geq\mathbf{0}$. Damit ist $x_1=340, x_2=320$ auch eine Lösung der Ungleichungen:

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &= 660 \leq 700 \\ x_1+3x_2 &= 1300 \leq 1500 \\ 2x_1+x_2 &= 1000 \leq 1200. \end{aligned}$$

In Abbildung 10.30 erkennen wir, dass diese Lösung im Inneren des zulässigen Bereichs liegt.

Für $t_1=0$ und $t_2=200$ ergibt sich die Basislösung $x_1=300, x_2=400, y_1=0, y_2=0, y_3=200$. Diese Basislösung hätte man auch direkt aus Zeilen 7-9 ablesen können. Für diese Lösung gilt $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$. Damit ist $x_1 = 300, x_2 = 400$ auch eine Lösung der Ungleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 700 \leq 700 \\ x_1 + 3x_2 &= 1500 \leq 1500 \\ 2x_1 + x_2 &= 1000 \leq 1200. \end{aligned}$$

In Abbildung 10.30 erkennen wir, dass diese Lösung einem Randpunkt des zulässigen Bereichs entspricht. ■

Basislösungen eines linearen Gleichungssystems ergeben sich durch Nullsetzen einiger Variablen. Sie haben in der linearen Optimierung eine besondere Bedeutung, da die Basislösungen von $A\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}$ in einem Optimierungsproblem mit n Variablen geometrisch den Schnittpunkten der Hyperebenen des $\mathbb{R}^n$ entsprechen, welche durch die Gleichungen $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i$ bzw. $x_i = 0$ gegeben sind. Wir veranschaulichen dies weiterhin im Beispiel mit $n = 2$ Variablen, in dem Basislösungen Schnittpunkten der durch die Nebenbedingungen gegebenen Geraden (Hyperebenen des $\mathbb{R}^2$) entsprechen.

■ Beispiel 10.3.13 — Einige Basislösungen im Produktionsproblem.
Da das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}$ mit Koeffzientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

im Endtableau drei von Nullzeilen verschiedene Zeilen und damit den Rang 3 hat, kann man Basislösungen einfach aus den Tableaus ablesen, wenn man alle drei Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$ in den Tableaus wiederfindet. Bei der Bestimmung der Lösungsmenge in Beispiel 10.3.12 sind wir bereits auf einige Basislösungen gestossen:

- Aus Zeilen ① bis ③ ergibt sich die Basislösung $x_1 = x_2 = 0, y_1 = 700, y_2 = 1500, y_3 = 1200$. Es gilt $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ und $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$. Daher ist $x_1 = x_2 = 0$ auch eine Lösung des Ungleichungssystems $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Veranschaulichen wir uns diese Lösungen in Abbildung 10.31, so stellen wir fest, dass die Basislösung $x_1 = x_2 = 0, y_1 = 700, y_2 = 1500, y_3 = 1200$ dem Punkt entspricht, an welchem sich die Geraden der Nebenbedingungen $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ schneiden, denn diese beiden Nebenbedingungen sind hier mit Gleichheit erfüllt, die anderen nicht.
- Aus Zeilen ④ bis ⑥ ergibt sich die Basislösung $x_1 = 700, x_2 = 0, y_1 = 0, y_2 = 800, y_3 = -200$. Hier gilt $y_3 < 0$, also ist $x_1 = 700, x_2 = 0$ keine Lösung des Ungleichungssystems $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. In Abbildung 10.31 entspricht diese Basislösung dem Schnittpunkt der Geraden, welche sich aus den Nebenbedingungen $x_2 \geq 0$ und $x_1 + x_2 \leq 700$ ergeben, denn diese beiden Nebenbedingungen sind in diesem Punkt mit Gleichheit erfüllt. Der Schnittpunkt liegt nicht im zulässigen Bereich.
- Aus Zeilen ⑦ bis ⑨ ergibt sich die Basislösung $x_1 = 300, x_2 = 400, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 200$. Wie zuvor bereits festgestellt, ist keine der Komponenten negativ und damit $x_1 = 300, x_2 = 400$ eine Lösung des Ungleichungssystems $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. In Abbildung 10.31 entspricht dieser Punkt dem Schnittpunkt der Geraden, welche sich aus den Nebenbedingungen $x_1 + x_2 \leq 700$ und $x_1 + 3x_2 \leq 1500$ ergeben, denn diese beiden Nebenbedingungen sind in diesem Punkt mit Gleichheit erfüllt. Der Schnittpunkt liegt im zulässigen Bereich.

- Aus Zeilen ⑩ bis ⑫ ergibt sich die Basislösung $x_1 = 420, x_2 = 360, y_1 = -80, y_2 = 0, y_3 = 0$. Wie zuvor bereits festgestellt, ist $y_1 < 0$ und damit $x_1 = 420, x_2 = 360$ keine Lösung des Ungleichungssystems $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Dieser Punkt entspricht in der Abbildung dem Schnittpunkt der Geraden, welche sich aus den Nebenbedingungen $x_1 + 3x_2 \leq 1500$ und $2x_1 + x_2 \leq 1200$ ergeben. Er liegt nicht im zulässigen Bereich.

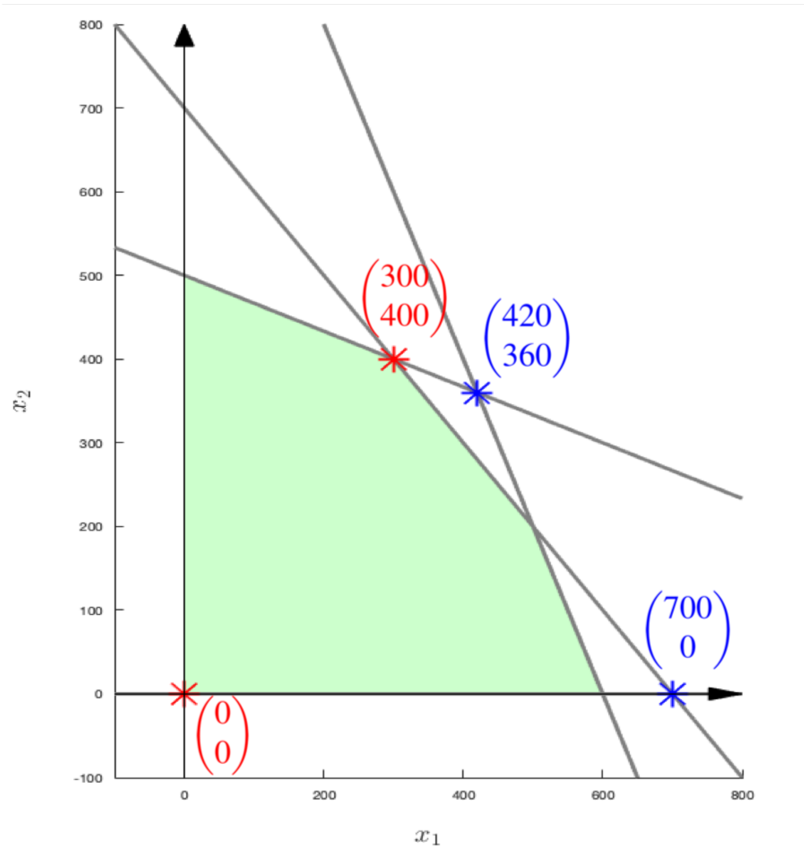


Abbildung 10.31: Basislösungen des zulässigen Bereichs.

■

In obigem Beispiel haben wir gesehen, dass nicht jede Basislösung $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)^T$ des linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}$ zu einer zulässigen Lösung $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ des Ungleichungssystems $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ bzw. zu $\mathbf{x} \in B$ führt. Basislösungen des linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}$, für die $\mathbf{x} \in B$ gelten, heissen auch zulässige Basislösungen.

Definition 10.3.3 — Zulässige Basislösungen.
Eine Basislösung des LGS $A\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}$ mit $m \times n$-Matrix A und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ heisst zulässige Basislösung des LGS $A\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}$, wenn zudem $\mathbf{x}, \mathbf{y} \geq 0$ gilt, sonst unzulässige Basislösung.

Zulässige Basislösungen stellen Eckpunkte des zulässigen Bereichs dar.

Satz 10.3.5 — Eckpunkte und zulässige Basislösungen.
Sei A eine $m \times n$-Matrix, $\mathbf{b}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$. Die Stel-

le $\mathbf{x}$ ist genau dann ein Eckpunkt von B, wenn $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)^T$ eine zulässige Basislösung des LGS $A\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{b}$ ist.

Beweis. Einen Beweis findet man in **?**, Satz 1.8. ■

Obiger Satz führt zu der Idee, dass man durch Aufzählen aller zulässigen Basislösungen die Eckpunkte von B systematisch aufzählen kann. Dies ist die zugrundeliegende Idee des wohl wichtigsten Algorithmus in der linearen Optimierung: dem Simplexalgorithmus. Wir demonstrieren zunächst, wie man mithilfe des Eliminationsverfahrens alle Eckpunkte aufzählen kann, bevor wir uns eine geschickte Reihenfolge der Aufzählung überlegen.

Beispiel 10.3.14 — Basislösungen im Produktionsproblem.

Ausgehend von den Tableaus aus Beispiel 10.3.12 mit Variablen x_1,x_2,y_1,y_2 und y_3 haben wir in Beispiel 10.3.13 bereits Basislösungen gefunden, welche Einheitsvektoren in den zu

- y_1,y_2 und y_3 gehörenden Spalten hat: $(0,0,700,1500,1200)^T$,
- x_1,y_2 und y_3 gehörenden Spalten hat: $(700,0,0,800,-200)^T$,
- x_1,x_2 und y_3 gehörenden Spalten hat: $(300,400,0,0,200)^T$ und
- x_1,x_2 und y_1 gehörenden Spalten hat: $(420,360,-80,0,0)^T$.

Wir bestimmen nun systematisch alle anderen Kombinationen mithilfe weiterer Eliminationsschritte. Um eine Basislösung zu erhalten, welche Einheitsvektoren in den zu

- x_1,x_2 und y_2 gehörenden Spalten hat: Ein Eliminationsschritt mit $i=3$ und $j=4$ ausgehend vom Endtableau in Beispiel 10.3.12 ergibt

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$\mathbf{b}$	
⑩	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	420	
⑪	0	1	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	360	
⑫	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	-80	
⑬	1	0	-1	0	1	500	⑩ − ⑫
⑭	0	1	2	0	-1	200	⑪ + 2 ⑫
⑮	0	0	-5	1	2	400	(-5)⑫

und damit die zulässige Basislösung $(500,200,0,400,0)^T$.

- x_1,y_1 und y_2 gehörenden Spalten hat: Ein weiterer Eliminationsschritt mit $i=2$ und $j=3$ ergibt

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$\mathbf{b}$	
⑯	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	600	⑬ + $\frac{1}{2}$ ⑭
⑰	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	100	$\frac{1}{2}$ ⑭
⑱	0	$\frac{5}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	900	⑮ + $\frac{5}{2}$ ⑭

und damit die zulässige Basislösung $(600,0,100,900,0)^T$.

- x_1,y_1 und y_3 gehörenden Spalten hat: Ein weiterer Eliminationsschritt mit $i=3$ und $j=5$ ergibt

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$\mathbf{b}$	
⑲	1	3	0	1	0	1500	⑯ + ⑱
⑳	0	-2	1	-1	0	-800	⑰ − ⑱
㉑	0	-5	0	-2	1	-1800	(-2)⑱

und damit die unzulässige Basislösung $(1500, 0, -800, 0, -1800)^T$.

- x_2, y_1 und y_3 gehörenden Spalten hat: Ein weiterer Eliminationsschritt mit $i = 1$ und $j = 2$ ergibt

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	**b**	
22	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	500	$\frac{1}{3}$ 19
23	$\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	200	20 $+\frac{2}{3}$ 19
24	$\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	700	21 $+\frac{5}{3}$ 19

und damit die zulässige Basislösung $(0, 500, 200, 0, 700)^T$.

- x_2, y_1 und y_2 gehörenden Spalten hat: Ein weiterer Eliminationsschritt mit $i = 3$ und $j = 4$ ergibt

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	**b**	
25	2	1	0	0	1	1200	22 + 24
26	-1	0	1	0	-1	-500	23 $-$ 24
27	-5	0	0	1	-3	-2100	(-3) 24

und damit die unzulässige Basislösung $(0, 1200, -500, -2100, 0)^T$.

- x_2, y_2 und y_3 gehörenden Spalten hat: Ein weiterer Eliminationsschritt mit $i = 2$ und $j = 5$ ergibt

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	**b**	
28	1	1	1	0	0	700	25 + 26
29	1	0	-1	0	1	500	(-1) 26
30	-2	0	-3	1	0	-600	27 -3 26

und damit die unzulässige Basislösung $(0, 700, 0, -600, 500)^T$.

Zusammenfassend ergibt sich folgende Tabelle:

Basislösung $(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3)^T$	Eckpunkt $(x_1, x_2)^T$	Zielfunktionswert $4x_1 + 5x_2$
$(0, 0, 700, 1500, 1200)^T$	$(0, 0)^T$	0
$(700, 0, 0, 800, -200)^T$	–	–
$(1500, 0, -800, 0, -1800)^T$	–	–
$(600, 0, 100, 900, 0)^T$	$(600, 0)^T$	2400
$(0, 700, 0, -600, 500)^T$	–	–
$(0, 500, 200, 0, 700)^T$	$(0, 500)^T$	2500
$(0, 1200, -500, -2100, 0)^T$	–	–
$(420, 360, -80, 0, 0)^T$	–	–
$(500, 200, 0, 400, 0)^T$	$(500, 200)^T$	3000
$(300, 400, 0, 0, 200)^T$	$(300, 400)^T$	3200

Der Eckpunkt mit dem grössten Zielfunktionswert ist $(300, 400)^T$ mit Zielfunktionswert 3200. Laut dem Hauptsatz der linearen Optimierung, Satz 10.3.3, ist $x_1 = 300, x_2 = 400$ die optimale Lösung, wenn eine Lösung existiert. Ob eine optimale Lösung existiert, kann durch eine solch naive Aufzählung aller zulässigen Basislösungen nicht aus dem Hauptsatz geschlossen werden. Der Hauptsatz besagt aber, dass es nur drei Arten von linearen Optimierungsproblemen in Standardform gibt: 1) Probleme mit optimaler Lösung

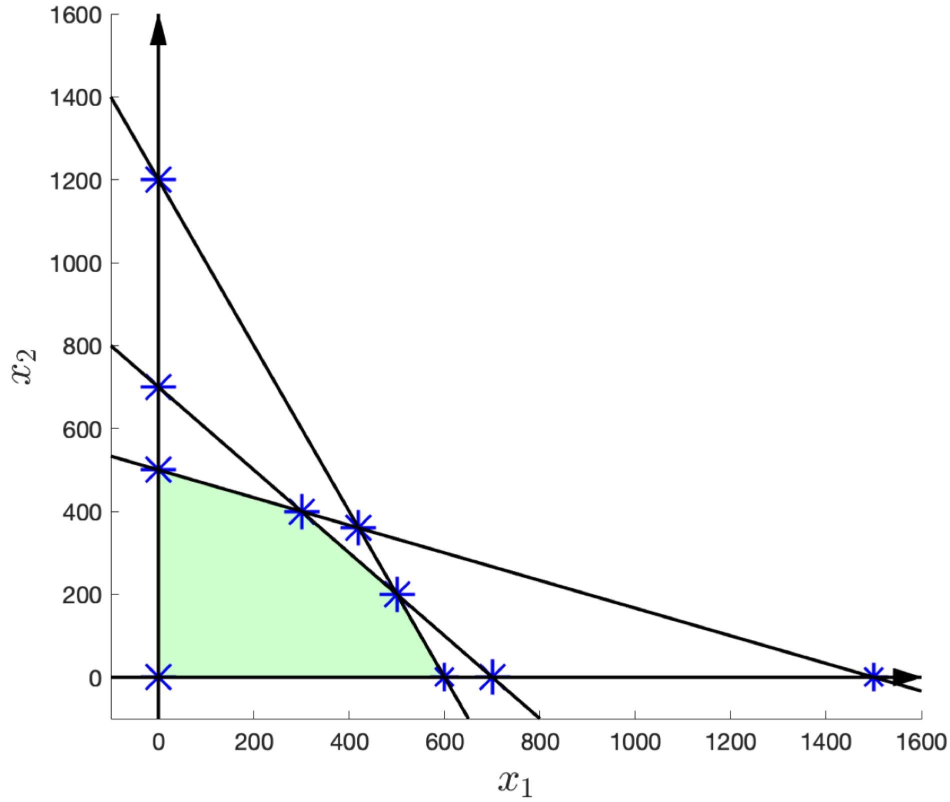


Abbildung 10.32: Alle Basislösungen des zulässigen Bereichs.

2) Probleme ohne zulässige Lösung 3) Probleme mit zulässigen Lösungen, welche beliebig hohe Zielfunktionswerte erzielen können.

Offensichtlich haben wir eine zulässige Basislösung gefunden. Es gibt hier also Lösungen. Damt können wir Fall 2) ausschliessen. Um Fall 3) auszuschliessen, kann man den Zielfunktionswert mithilfe der Nebenbedingungen z.B. wie folgt abschätzen: Es gilt $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$. Damit nun $x_1 + x_2 \leq 700$ gelten kann, muss $x_1 \leq 700$ und $x_2 \leq 700$ sein. Somit gilt

$$4x_1 + 5x_2 \leq 4(700) + 5(700) = 6300.$$

Der Zielfunktionswert kann also nicht über alle Schranken steigen.

Damit muss es eine optimale Lösung an einem Eckpunkt geben. Diese ist $(300,400)^T$ mit Zielfunktionswert 3200. ■

Verändert sich die Zielfunktion eines linearen Optimierungsproblem, so hat dies keinen Einfluss auf den zulässigen Bereich und dessen Eckpunkte. Wir nutzen dies in folgendem Beispiel:

■ Beispiel 10.3.15 — Lösung des Produktionsproblems mit veränderten Deckungsbeiträgen.

Wir betrachten erneut das Produktionsproblem aus Beispiel 10.3.14, aber mit veränderten Deckungsbeiträgen. Statt einem Deckungsbeitrag von 5 hat Produkt 2 nun nur noch einen Deckungsbeitrag von 4. Das zu lösende lineare Optimierungsproblem in Standardform ist also nun

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 4x_2 \\ \text{u.d.N.} \quad & x_1 + x_2 \le 700 \\ & x_1 + 3x_2 \le 1500 \\ & 2x_1 + x_2 \le 1200 \\ & x_1 \ge 0 \\ & x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Da der zulässige Bereich unverändert ist, müssen wir zur Lösung nur die Eckpunkte von B aus der Tabelle aus Beispiel 10.3.14 erneut durch die Zielfunktion bewerten.

Basislösung $(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3)^T$	Eckpunkt $(x_1,x_2)^T$	Zielfunktionswert $4x_1+5x_2$
$(0,0,700,1500,1200)^T$	$(0,0)^T$	0
$(700,0,0,800,-200)^T$	–	–
$(1500,0,-800,0,-1800)^T$	–	–
$(600,0,100,900,0)^T$	$(600,0)^T$	2400
$(0,700,0,-600,500)^T$	–	–
$(0,500,200,0,700)^T$	$(0,500)^T$	2000
$(0,1200,-500,-2100,0)^T$	–	–
$(420,360,-80,0,0)^T$	–	–
$(500,200,0,400,0)^T$	$(500,200)^T$	2800
$(300,400,0,0,200)^T$	$(300,400)^T$	2800

Nun haben die Eckpunkte $(500,200)^T \in B$ und $(300,400)^T \in B$ den gleichen maximalen Zielfunktionswert. Aus dem Hauptsatz kann man schliessen, dass diese Lösungen optimale Lösungen sind, da der zulässige Bereich offensichtlich nicht leer ist und die Abschätzung

$$4x_1 + 4x_2 \le 4x_1 + 5x_2 \le 6300$$

zeigt, dass der Zielfunktionswert innerhalb des zulässigen Bereichs nicht über alle Schranken wächst. Die Menge aller optimalen Lösungen beinhaltet somit jedes Element auf der Verbindungslinie dieser beiden Eckpunkte. Eine optimale Lösung entspricht damit einer Konvexkombination dieser Eckpunkte. In anderen Worten ist jedes Element der Menge

$$\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 500 \\ 200 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0,1] \right\}$$

eine optimale Lösung. ∎

Nicht immer ergibt sich aus jeder Kombination von m Spalten des Tableaus eine Basislösung. Erneut wandeln wir das Produktionsbeispiel ab, um dies zu illustrieren:

∎ Beispiel 10.3.16 — Lösung des Produktionsproblems mit veränderten Bedarfen. Wir betrachten erneut das Produktionsproblem mit Deckungsbeiträgen von 4 und 5, diesmal aber mit veränderten Bedarfen zur Produktion von Spanplatten des Typs P_2. Spanplatten des Typs P_2 benötigen statt 3 nur noch 2 Blätter von F_1. Dafür werden 4 Blätter von F_2 und zwei Minuten auf der Presse benötigt. Das zu lösende lineare Optimierungsproblem lautet demnach:

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 5x_2 \\ \text{u.d.N.}\quad & x_1 + 2x_2 \leq 700 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 1500 \\ & 2x_1 + 4x_2 \leq 1200 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Auch hier versuchen wir alle Eckpunkte aufzuzählen, indem wir alle zulässigen Basislösungen bestimmen. Als ersten Schritt lösen wir das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}$ mithilfe des Eliminationsverfahrens:

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$\mathbf{b}$	
①	1	2	1	0	0	700	
②	1	2	0	1	0	1500	
③	2	4	0	0	1	1200	
④	1	2	1	0	0	700	①
⑤	0	0	-1	1	0	800	②$-$①
⑥	0	0	-2	0	1	-200	③-2 ①
⑦	1	2	0	1	0	1500	④+ ⑤
⑧	0	0	1	-1	0	-800	(-1)⑤
⑨	0	0	0	-2	1	-1800	⑥-2 ⑤
⑩	1	2	0	0	$\frac{1}{2}$	600	⑦$+\frac{1}{2}$ ⑨
⑪	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	100	⑧$-\frac{1}{2}$⑨
⑫	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	900	$-\frac{1}{2}$⑨

- Aus Zeilen ① bis ③ ergibt sich die erste zulässige Basislösung als $(0,0,700,1500,1200)^T$.
- Aus ④ bis ⑥ ergibt sich die unzulässige Basislösung: $(700,0,0,800,-200)^T$.
- Aus ⑦ bis ⑨ ergibt sich die unzulässige Basislösung: $(1500,0,-800,0,-1800)^T$.
- Aus ⑩ bis ⑫ ergibt sich die zweite zulässige Basislösung: $(600,0,100,900,0)^T$.

Versucht man Einheitsvektoren in der zu x_2 gehörenden Spalte zu erzeugen, kann man jeweils die Zeilen ④, ⑦ oder ⑩ durch zwei teilen, um

- aus $\frac{1}{2}$④, ⑤, ⑥ die unzulässige Basislösung $(0,350,0,800,-200)^T$
- aus $\frac{1}{2}$⑦, ⑧, ⑨ die unzulässige Basislösung $(0,750,-800,0,-1800)^T$
- aus $\frac{1}{2}$⑩, ⑪, ⑫ die dritte zulässige Basislösung: $(0,300,100,900,0)^T$

zu erhalten. Es ist hier aufgrund der linearen Abhängigkeit der Spaltenvektoren unter x_1 und x_2 jedoch nicht möglich, eine Basislösung mit $x_1 \neq 0$ und $x_2 \neq 0$ zu erzeugen. Geometrisch entspricht dies der Tatsache, dass sich die Geraden, welche sich in Abbildung 10.33 aus den Nebenbedingungen des Problems ergeben, nicht schneiden.

Man erhält folgende Übersicht:

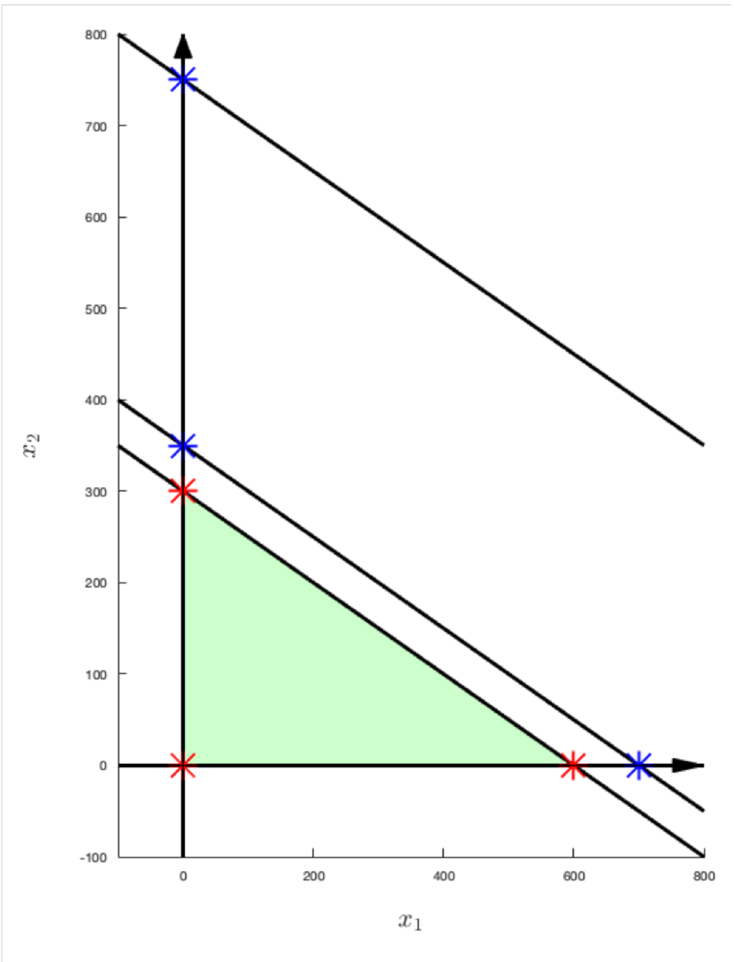


Abbildung 10.33: Der zulässige Bereich B.

Basislösung $(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3)^T$	Eckpunkt $(x_1, x_2)^T$	Zielfunktionswert $4x_1 + 5x_2$
$(0,0,700,1500,1200)^T$	$(0,0)^T$	0
$(700,0,0,800,-200)^T$	–	–
$(1500,0,-800,0,-1800)^T$	–	–
$(600,0,100,900,0)^T$	$(600,0)^T$	2400
$(0,350,0,800,-200)^T$	–	–
$(0,750,-800,0,-1800)^T$	–	–
$(0,300,100,900,0)^T$	$(0,300)^T$	1500

Mithilfe obiger Aufzählung der Eckpunkte (sowie dem Wissen, dass $B \neq \{\}$ und dem Ausschluss einer unbeschränkten Zielfunktion durch eine Abschätzung analog zu den vorherigen Beispielen) schliessen wir, dass das lineare Optimierungsproblem die optimale Lösung $(600,0)^T$ mit Zielfunktionswert 2400 hat. ■

■ **Beispiel 10.3.17 — Lösung des Mischungsproblems.**

Löst man das Mischungsproblem aus Beispiel 10.3.3,

$$\begin{aligned}
&\max\ 0.1x_1 - 0.1x_2\\
\text{u.d.N.}\quad & -x_1 - 2x_2 \leq -1\\
&3000x_1 + 2000x_2 \leq 2000\\
&x_1 + x_2 \leq 1\\
&x_1 \geq 0\\
&x_2 \geq 0,
\end{aligned}$$

zunächst, indem man das Gleichungssystem $A\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{b}$ mithilfe des Eliminationsverfahrens löst, erhält man:

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$\mathbf{b}$	
①	-1	-2	1	0	0	-1	
②	3000	2000	0	1	0	2000	
③	1	1	0	0	1	1	
④	1	2	-1	0	0	1	(-1)①
⑤	0	-4000	3000	1	0	-1000	②$+3000$①
⑥	0	-1	1	0	1	0	③$+$①
⑦	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2000}$	0	$\frac{1}{2}$	④$+\frac{1}{2000}$⑤
⑧	0	1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4000}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{-4000}$⑤
⑨	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4000}$	1	$\frac{1}{4}$	⑥-$\frac{1}{4000}$⑤
⑩	1	0	0	$\frac{1}{1000}$	-2	0	⑦$-2$⑨
⑪	0	1	0	$-\frac{1}{1000}$	3	1	⑧$+3$⑨
⑫	0	0	1	$-\frac{1}{1000}$	4	1	$4$⑨

Im obigen Verfahren haben wir folgende Basislösungen gefunden:

- die unzulässige Basislösung $(0,0,-1,2000,1)^T$,
- die unzulässige Basislösung $(1,0,0,-1000,0)^T$,
- die zulässige Basislösung $(\frac{1}{2},\frac{1}{4},0,0,\frac{1}{4})^T$ mit Zielfunktionswert $\frac{1}{40}$,
- die zulässige Basislösung $(0,1,1,0,0)^T$ mit Zielfunktionswert $-\frac{1}{10}$.

Dabei wurde $(0,0,-1,2000,1)^T$ gefunden, indem man im Gleichungssystem $x_1=x_2=0$ setzt bzw. indem die Einheitsvektoren in den Spalten unter y_1,y_2 und y_3 stehen. Die Basislösung $(1,0,0,-1000,0)^T$ ergibt sich durch $x_2=y_1=0$ bzw. mithilfe der Einheitsvektoren in den Spalten unter x_1,y_2 und y_3. Da hier aber auch $y_3=0$ gilt, würde man durch Nullsetzen von $x_2=y_3=0$ oder $y_1=y_3=0$ die gleiche Lösung erhalten. Die Basislösung $(\frac{1}{2},\frac{1}{4},0,0,\frac{1}{4})^T$ ergibt sich durch Nullsetzen von $y_1=y_2=0$. Die Basislösung $(0,1,1,0,0)^T$ ergibt sich aus $y_2=y_3=0$. Da hier auch $x_1=0$ gilt, ergibt sich die gleiche Basislösung, wenn man $x_1=y_3=0$ oder $y_2=x_1=0$ fordert. Es verbleiben nur die Kombinationen $x_1=y_1=0$ und $x_2=y_2=0$ zu berechnen.

Um den Fall $x_2=y_2=0$ zu bestimmen, also Einheitsvektoren in den Spalten von x_1,y_1 und y_3 zu erzeugen, führen wir einen Eliminationsschritt mit $i=2$ und $j=5$ durch,

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$\mathbf{b}$	
(13)	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3000}$	0	$\frac{2}{3}$	(10)$+\frac{2}{3}$(11)
(14)	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3000}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$(11)
(15)	0	$-\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{3000}$	0	$-\frac{1}{3}$	(12)$-\frac{4}{3}$(11)

und erhalten die unzulässige Basislösung $(\frac{2}{3},0,-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3})^T$. Um den Fall $x_1 = y_1 = 0$ zu erhalten, kann man ausgehend vom ersten Tableau in Zeilen (1) bis (3) einen Eliminationsschritt mit $i = 1$ und $j = 2$ durchführen.[15] So erhält man

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$\mathbf{b}$	
(4')	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$(1)
(5')	2000	0	1000	1	0	1000	(2)$+1000$(1)
(6')	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	(3)$+\frac{1}{2}$(1)

mit zulässiger Basislösung $(0,\frac{1}{2},0,1000,\frac{1}{2})^T$. Zusammenfassend ergibt sich folgende Tabelle:

Basislösung $(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3)^T$	Eckpunkt $(x_1,x_2)^T$	Zielfunktionswert $0.1x_1 - 0.1x_2$
$(0,0,-1,2000,1)^T$	–	–
$(1,0,0,-1000,0)^T$	–	–
$(\frac{1}{2},\frac{1}{4},0,0,\frac{1}{4})^T$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{4})^T$	0.025
$(0,1,1,0,0)^T$	$(0,1)^T$	-0.1
$(\frac{2}{3},0,-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3})^T$	–	–
$(0,\frac{1}{2},0,1000,\frac{1}{2})^T$	$(0,\frac{1}{2})^T$	-0.05

In diesem Beispiel fällt auf, dass es zwar 10 verschiedene Möglichkeiten gibt, die drei Einheitsvektoren Spalten zuzuordnen. Dennoch gibt es nur 6 verschiedene Basislösungen. Dies entspricht in Abbildung 10.34 der Tatsache, dass sich beispielsweise an der Stelle $(0,1)^T$ die begrenzenden Geraden dreier Mengen schneiden. Insgesamt sind nur drei Basislösungen zulässig. Diese entsprechen den in Abbildung 10.34 rot gekennzeichneten Eckpunkten.

Existiert eine optimale Lösung, so ist diese also der Eckpunkt $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})^T$. Um sicherzustellen, dass es sich hierbei um eine optimale Lösung handelt, muss man wieder festhalten, dass B unter anderem das Element $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})^T$ enthält und damit nicht leer ist. Zudem gilt für alle $(x_1,x_2)^T \in B$, dass $0 \leq x_1 \leq 1$ und $0 \leq x_2 \leq 1$. Damit gilt

$$0.1x_1 - 0.1x_2 \leq 0.1.$$

Die Zielfunktionswerte können also auf B nicht beliebig gross werden.

Aus Satz 10.3.3 können wir damit schliessen, dass das lineare Optimierungsproblem eine optimale Lösung hat. Zudem wissen wir, dass eine optimale Lösung an einem Eckpunkt von B liegen wird. In obiger Tabelle haben wir alle Eckpunkte von B und deren Zielfunktionswerte bestimmt. Die optimale Lösung ist also $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})^T \in B$. Es sollte also $\frac{1}{2}$ von Gas 1, $\frac{1}{4}$ von Gas 2 und $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ von Gas 3 verwendet werden. ■

Zwar stellt die Aufzählung aller Basislösungen und damit aller Eckpunkte des zulässigen Bereichs sicher, dass im Falle der Existenz einer optimalen Lösung diese auch

[15] Ebenso kann man den Fall $x_1 = y_1 = 0$ erhalten, indem man ausgehend vom letzten Tableau einen Eliminationschritt mit $i = 1$ und $j = 2$ und dann einen weiteren mit $i = 3$ und $j = 4$ macht.

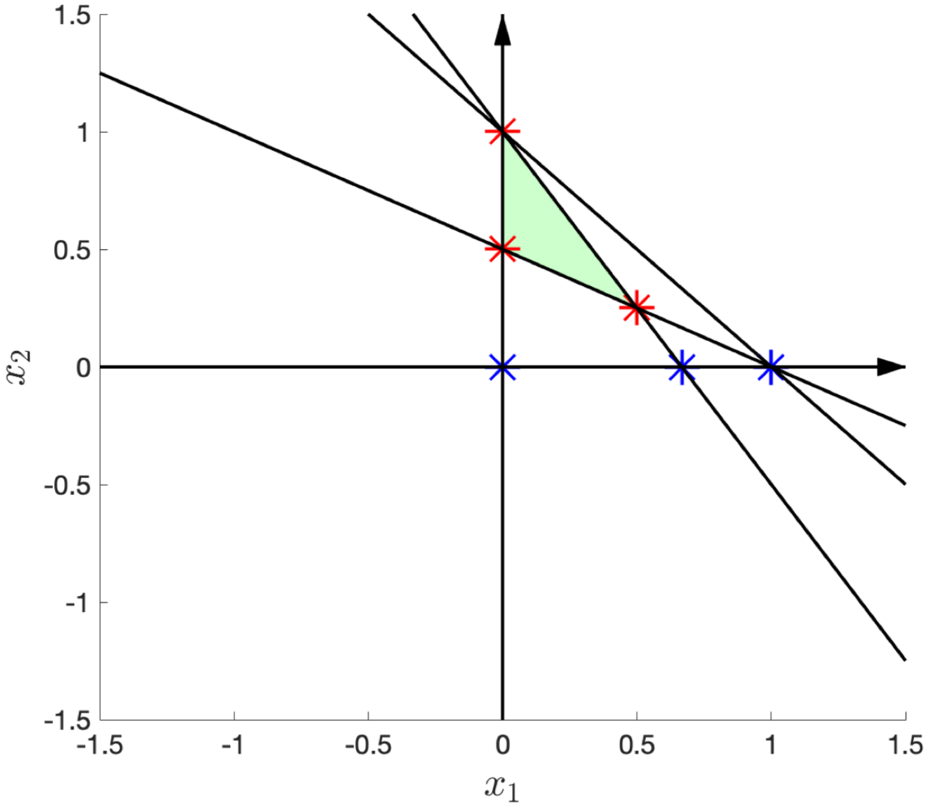


Abbildung 10.34: Zulässige Basislösungen.

gefunden wird. Existiert keine optimale Lösung, ist es mit diesem Ansatz jedoch schwer, herauszufinden, dass der gefundene beste Eckpunkt gar nicht die optimale Lösung darstellt:

■ Beispiel 10.3.18 — Ein unbeschränktes Problem.
Wir betrachten erneut das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + x_2 \\ \text{u.d.N.}\quad & x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

aus Beispiel 10.3.9. Wenden wir hier unser Verfahren zur Generierung von Basislösungen an, erhalten wir zunächst durch Anwendung des Eliminationsverfahrens

	x_1	x_2	y_1	y_2	**b**	
1	0	1	1	0	2	
2	−1	1	0	1	1	
3	−1	1	0	1	1	2
4	0	1	1	0	2	1
5	1	−1	0	−1	−1	(−1)3
6	0	1	1	0	2	4
7	1	0	1	−1	1	5+6
8	0	1	1	0	2	4

die
- zulässige Basislösung $(0,0,2,1)^T$ mit Zielfunktionswert 0,
- unzulässige Basislösung $(-1,0,2,0)^T$ und
- zulässige Basislösung $(1,2,0,0)^T$ mit Zielfunktionswert 3.

Durch Anwendung eines Eliminationsschritts mit $i=1$ und $j=4$ ergibt sich

	x_1	x_2	y_1	y_2	**b**	
9	−1	0	−1	1	−1	(−1)7
10	0	1	1	0	2	8

mit unzulässiger Basislösung $(0,2,0,-1)^T$. Ein weiterer Eliminationsschritt mit $i=1$ und $j=3$ ergibt

	x_1	x_2	y_1	y_2	**b**	
11	1	0	1	−1	1	(−1)9
12	−1	1	0	1	1	9+10

mit zulässiger Basislösung $(0,1,1,0)^T$ und Zielfunktionswert 1. Auch hier können wieder nicht beliebige Kombinationen von Variablen gleich 0 gesetzt werden, da nicht jede Kombination von zwei Spaltenvektoren linear unabhängig ist. Die x_1- und die x_2-Komponente der gefundenen Basislösungen sind in Abbildung 10.35 visualisiert.

Ohne die Abbildung könnte man hier nach der Aufzählung der Eckpunkte leicht zu dem Schluss kommen, dass $(1,2)^T$ mit Zielfunktionswert 3 die optimale Lösung des Optimierungsproblems sei,[16] obwohl beispielsweise die zulässige Lösung $x_1=5, x_2=2$ den höheren Zielfunktionswert von 7 hat. Die Aufzählung der Eckpunkte führt hier nicht zu einer optimalen Lösung, da das lineare Optimierungsproblem keine optimale Lösung hat. ∎

Das Verfahren der Aufzählung aller Basislösungen und damit aller Eckpunkte führt in der Regel zu zwei Problemen:
- Es bleibt ohne weitere Hilfsmittel unklar, ob der beste Eckpunkt die optimale Lösung ist, oder ob das Optimierungsproblem eventuell keine optimale Lösung hat.
- Es kann sehr aufwändig sein, alle Basislösungen zu bestimmen.

Der sogenannte Simplexalgorithmus adressiert beide Probleme. Er durchläuft systematisch Eckpunkte von B in einer Weise, in der sich (ausgehend von einer zulässigen Basislösung)

[16] Wäre die Zielfunktion z.B. durch $f(x) = x_2 - 0.5x_1$ gegeben, wäre dieser Eckpunkt auch die optimale Lösung.

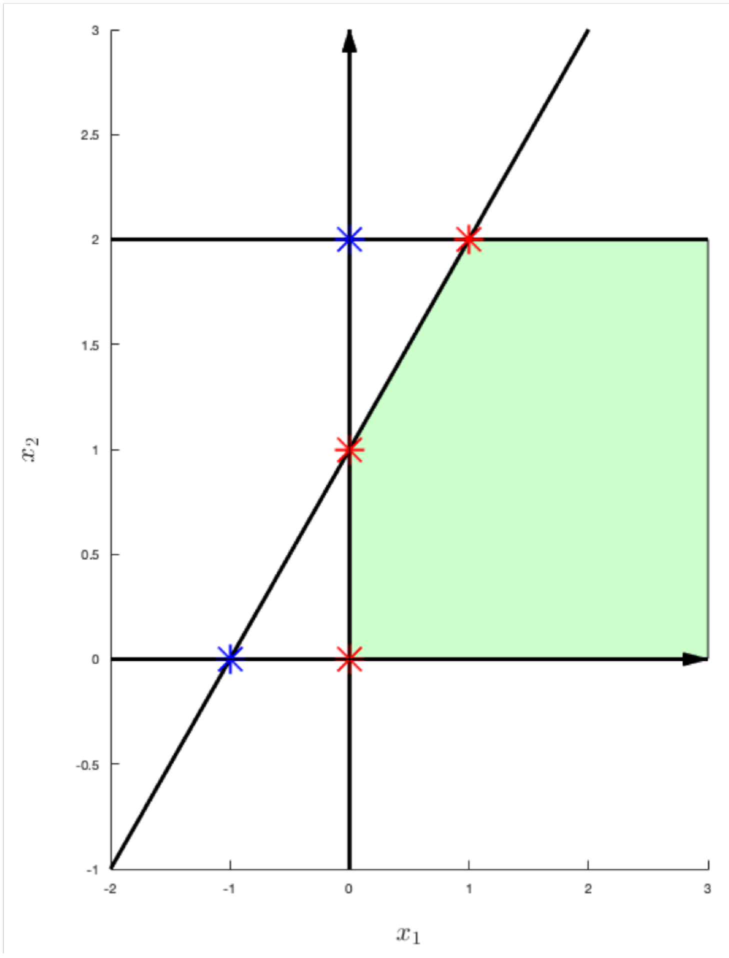


Abbildung 10.35: Eckpunkte des zulässigen Bereichs B.

der Zielfunktionswert stets verbessert und der zulässige Bereich nicht verlassen wird. Es ist ein sehr effizientes Verfahren, das Optimierungsprobleme mit mehreren Millionen Variablen und Nebenbedingungen auf modernen Computern in der Regel in wenigen Sekunden lösen kann. Viele sogenannte "intelligente Entscheidungssysteme" in der Industrie zur Lösung von Transportproblemen oder zur Flugpreisbestimmung basieren auf der Lösung eines linearen Optimierungsproblems. Sie finden den Simplexalgorithmus in fast jeder Programmiersprache, auch im Excel Solver, implementiert.

Z Eine Basislösung $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)^T$ von $A\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}$ heisst zulässige Basislösung, wenn keine Komponente der Lösung negativ ist.

Die $\mathbf{x}$-Komponenten einer zulässigen Basislösung beschreiben Eckpunkte des zulässigen Bereichs des linearen Optimierungsproblems.

10.3.5 Die Idee des Simplexalgorithmus (#)

Ziele dieses Unterkapitels

- Wie wählt der Simplexalgorithmus ausgehend von einer zulässigen Basislösung die Spalte j und die Zeile i für den Eliminationsschritt um auf die nächste Basislösung zu kommen?

- Wie endet der Simplexalgorithmus bei einem lösbaren linearen Optimierungsproblem?

Die grundlegende Idee des Simplexalgorithmus ist die Aufzählung von Eckpunkten des zulässigen Bereichs in einer geschickten Reihenfolge, wobei geschickt bedeutet, dass der Zielfunktionswert stets besser wird und ausgehend von einer zulässigen Basislösung nur andere zulässige Basislösungen durchlaufen werden.

Wir erklären die grundlegenden Ideen erneut an unserem Produktionsbeispiel:

Beispiel 10.3.19 — Lösung des Produktionsbeispiels.
Wir betrachten erneut das Produktionsproblem aus Beispiel 10.3.1. In Beispiel 10.3.12 beschrieben wir den zulässigen Bereich mithilfe der nicht-negativen Lösungen des Gleichungssystems $A\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{b}$. Bei dieser Darstellungsform wurde die Zielfunktion gänzlich ausser Acht gelassen. Natürlich ergibt sich für eine gegebene Lösung von $A\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{b}$ der Zielfunktionswert jedoch als $4x_1+5x_2$. Da in der ersten Basislösung des Tableaus nur Schlupfvariablen Werte ungleich 0 haben, ist der Zielfunktionswert dieser ersten Basislösung gleich 0. Als vierte (neue) Zeile des Gleichungssystems schreiben wir daher den Zielfunktionswert , also $c_1=4$ in der zu x_1 gehörenden Spalte und $c_2=5$ in der zu x_2 gehörenden Spalte. Als rechte Seite schreiben wir 0.

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$\mathbf{b}$
①	1	1	1	0	0	700
②	1	3	0	1	0	1500
③	2	1	0	0	1	1200
④	4	5	0	0	0	0

Anstatt nun schematisch einen Eliminationsschritt mit $i=1$ und $j=1$ durchzuführen, überlegen wir uns, welche der Variablen, die aktuell gleich 0 sind, den grössten (positiven) Einfluss auf den Zielfunktionswert hat. Hier ist dies die Variable x_2, da $c_2=5>c_1=4$. Wir entscheiden uns daher dafür, einen Eliminationsschritt mit $j=2$ durchzuführen. Wir wählen also die "erfolgsversprechendste" Spalte. Die Zeile wird so gewählt, dass die zulässige Basislösung des ersten Tableaus nicht zu einer unzulässigen Basislösung im zweiten Tableau umgeformt wird. Was bedeutet das hier im Klartext?

Wählt man $i=1$, ergibt sich mit $a_{12}=1$ die neue rechte Seite $b_1=\frac{1}{a_{12}}700=700$, $b_2=1500-\frac{a_{22}}{a_{12}}700=-600$ und $b_3=1200-\frac{a_{32}}{a_{12}}700=500$. Die resultierende Basislösung ist nicht zulässig. Wählt man $i=2$, ergibt sich mit $a_{22}=3$ die neue rechte Seite $b_1=700-\frac{a_{12}}{a_{22}}1500=200$, $b_2=\frac{1}{a_{22}}1500=500$ und $b_3=1200-\frac{a_{32}}{a_{22}}1500=700$. Die resultierende Basislösung ist zulässig. Wählt man $i=3$, ergibt sich mit $a_{32}=1$ die neue rechte Seite $b_1=700-\frac{a_{12}}{a_{32}}1200=-500$, $b_2=1500-\frac{a_{22}}{a_{32}}1200=-2100$ und $b_3=\frac{1}{a_{32}}1200=1200$. Die resultierende Basislösung ist nicht zulässig. Da $i=4$ die Sonderrolle der Zielfunktion hat, wird diese Zeile nicht beachtet.

Die gesuchte Zeile, hier $i=2$, entspricht dabei für gegebenes j stets der Zeile mit dem kleinsten Quotienten $\frac{b_i}{a_{ij}}$, wobei wir nur die Quotienten mit positivem a_{ij} betrachten müssen. Ist a_{ij} kleiner oder gleich 0, erhalten wir in dieser Zeile nie eine negative rechte Seite. Wir wählen hier also $j=2$ und Zeile $i=2$. Nach einem entsprechenden Eliminationsschritt ergibt sich:

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	**b**
⑤	$\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	200
⑥	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	500
⑦	$\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	700
⑧	$\frac{7}{3}$	0	0	$-\frac{5}{3}$	0	-2500

Wir haben also nicht gemäss des Eliminationsschemas zunächst den ersten Einheitsvektor in Spalte eins generiert, sondern unser Wissen bezüglich der Zielfunktion genutzt, um zunächst x_2 einen positiven Wert zuzuweisen. Dann haben wir die Nebenbedingung ausgesucht, welche den Wert von x_2 am stärksten beschränkt, vgl. auch Abbildung 10.36. Die zu dieser Nebenbedingung zugehörige **y**-Komponente haben wir dann auf den Wert 0 gesetzt. Die neue zulässige Basislösung entspricht dem Eckpunkt $(0,500)^T$ mit Zielfunktionswert 2500.

Wir fahren analog fort: In der neuen Zielfunktionszeile, Zeile ⑧, suchen wir den Koeffizienten, welcher den grössten Zuwachs verspricht, hier $\frac{7}{3}$. Wir wählen also $j = 1$. Wieder wählen wir die Zeile so, dass sich eine zulässige Basislösung ergeben wird. Anstatt wieder alle Zeilen auszuprobieren, berechnen wir die Quotienten $\frac{b_1}{a_{11}} = 300$, $\frac{b_2}{a_{21}} = 1500$ und $\frac{b_3}{a_{31}} = 420$. Der kleinste Wert ergibt sich bei $i = 1$. Also führen wir einen Eliminationsschritt mit $i = 1$ und $j = 1$ durch:

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	**b**
⑨	1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	300
⑩	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	400
⑪	0	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	200
⑫	0	0	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-3200

Wollen wir nun weiterrechnen, stellen wir fest, dass die Zielfunktionszeile nun keinen positiven Koeffizienten mehr enthält. Der Zielfunktionswert kann also nicht weiter verbessert werden. Das Verfahren endet mit einer zulässigen Basislösung und $x_1 = 300, x_2 = 400$. Dass sich in der unteren rechten Ecke bei diesem Verfahren genau der negative Wert des Zielfunktionswerts $f(300,400) = 3200$ ergibt, ist dabei auch kein Zufall. ■

Ausgehend von einem Optimierungsproblem mit einer optimalen Lösung und einer zulässigen Basislösung mit $x_i = 0$ für alle $i = 1,\dots.n$, suchten wir also

- die Spalte j mit grösstem positiven Koeffizienten in der Zielfunktionszeile und
- die Zeile i mit kleinstem Wert von $\frac{b_i}{a_{ij}}$ und $a_{ij} > 0$

und führten damit einen Eliminationsschritt durch. Existiert keine Spalte mit positivem Koeffizienten in der Zielfunktionszeile, endet das Verfahren. Die **x**--Komponenten der zulässigen Basislösung des letzten Tableaus stellen die Lösung des linearen Optimierungsproblems dar.

Im Gegensatz zum Verfahren des Aufzählens aller Ecken, führt das oben beschriebene Vorgehen ausgehend von einer zulässigen Basislösung stets ausschliesslich zu anderen zulässigen Basislösungen. Zudem stellt das Verfahren sicher, dass sich der Zielfunktionswert in jedem Tableau verbessert.

Obwohl wir hier nur den Spezialfall eines lösbaren Problems mit Start bei einer zuläs-

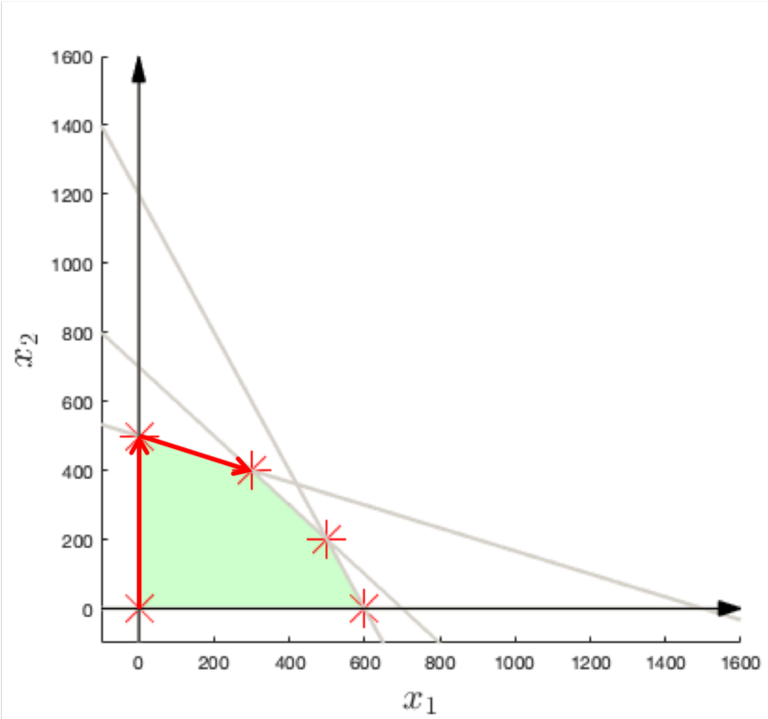


Abbildung 10.36: Der Weg des Simplex-Algorithmus.

sigen Basislösung besprochen haben, kann dieses Verfahren, welches unter dem Namen Simplexalgorithmus bekannt ist, für allgemeine lineare Optimierungsprobleme erweitert werden: Sind beim Zeilenvergleich alle a_{ij} kleiner oder gleich 0 und mindestens ein Koeffizient in der Zielfunktionszeile positiv, so kann beispielsweise geschlossen werden, dass das lineare Optimierungsproblem auf dem zulässigen Bereich unbeschränkt ist. Zudem kann eine Vorphase hinzugefügt werden, so dass bei einem Start bei einer unzulässigen Basislösung entweder eine zulässige Basislösung gefunden wird oder entschieden wird, dass das Problem keine zulässige Lösung besitzt.

Wir demonstrieren das bisher vorgestellte Verfahren noch einmal in unserem letzten Beispiel. Dabei wollen wir folgende zwei Punkte betonen:

- Zur Lösung linearer Optimierungsprobleme stehen einfache Lösungsverfahren zur Verfügung.
- Reale lineare Optimierungsprobleme sollten rechnergestützt gelöst werden. Genau deswegen ist dieses sogenannte Simplex-Verfahren in den meisten Programmiersprachen verfügbar oder in Software wie Excel bereits implementiert.

■ Beispiel 10.3.20 — Lösung des Pralinenproduktion-Beispiels.
In Kapitel 6 betrachteten wir eine Pralinenproduktion, welche 3 unterschiedliche Pralinen aus 3 verschiedenen Schokoladensorten herstellt. Die in der Produktion der Schokoladensorten nur begrenzt verfügbaren Rohstoffe waren Kakaobutter und Kakaomasse. In Beispiel 6.5.13 berechneten wir, dass sich die Mengen der zur Herstellung von x_1 Pralinen vom Typ P_1, x_2 Pralinen vom Typ P_2 und x_3 Pralinen vom Typ P_3 benötigten Rohstoffe als

$$R \cdot Z \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5.1 & 2.2 & 3.24 \\ 0.6 & 6 & 3.6 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

berechnet. Stehen nun 6796.74 Kilogramm K_1 (Kakaobutter) und 5277 Kilogramm K_2

(Kakaomasse) zur Verfügung und sind die Deckungsbeiträge jeweils 2, ist das zu lösende lineare Optimierungsproblem also

$$
\begin{aligned}
\text{(P-max)}\ \max\ & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\
\text{u.d.N.}\ & \begin{pmatrix} 5.1 & 2.2 & 3.24 \\ 0.6 & 6 & 3.6 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} \le \begin{pmatrix} 6796740 \\ 5277000 \end{pmatrix} \\
& \mathbf{x} \ge \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

Wir wenden erneut das oben beschriebene Verfahren an.

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	$\mathbf{b}$
①	5.1	2.2	3.24	1	0	6796740
②	0.6	6	3.6	0	1	5277000
③	2	2	2	0	0	0

Da hier der Zielfunktionskoeffizient aller **x**-Variablen gleich ist, kann man $j = 1$, $j = 2$ oder $j = 3$ wählen. Wir wählen hier $j = 1$. Um die Zeile zu wählen, vergleichen wir $\frac{b_1}{a_{11}} \approx 1332694$ mit $\frac{b_2}{a_{21}} = 8795000$. Da der erste Quotient kleiner ist, wird ein Eliminationsschritt mit $i = j = 1$ durchgeführt:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	$\mathbf{b}$
④	$\frac{5.1}{5.1} = 1$	$\frac{2.2}{5.1} = \frac{22}{51}$	$\frac{3.24}{5.1} = \frac{54}{85}$	$\frac{1}{5.1} = \frac{10}{51}$	$\frac{0}{5.1} = 0$	$\frac{6796740}{5.1} = \frac{22655800}{17}$
⑤	$0.6 - 5.1\frac{0.6}{5.1} = 0$	$6 - 2.2\frac{0.6}{5.1} = \frac{488}{85}$	$3.6 - 3.24\frac{0.6}{5.1} = \frac{1368}{425}$	$0 - 1\frac{0.6}{5.1} = -\frac{2}{17}$	$1 - 0\frac{0.6}{5.1} = 1$	$5277000 - 6796740\frac{0.6}{5.1} = \frac{76115520}{17}$
⑥	$2 - 5.1\frac{2}{5.1} = 0$	$2 - 2.2\frac{2}{5.1} = \frac{58}{51}$	$2 - 3.24\frac{2}{5.1} = \frac{62}{85}$	$0 - 1\frac{2}{5.1} = -\frac{20}{51}$	$0 - 0\frac{2}{5.1} = 0$	$0 - 6796740\frac{2}{5.1} = -\frac{45311600}{17}$

Erneut wählt man die Spalte mit grösstem positiven Zielfunktionskoeffizienten. Hier ist dies Spalte $j = 2$. Um die Zeile zu bestimmen, vergleicht man die Quotienten $\frac{b_i}{a_{i2}}$. Da

$$\frac{b_1}{a_{12}} = \frac{\frac{22655800}{17}}{\frac{22}{51}} > \frac{\frac{76115520}{17}}{\frac{488}{85}} = \frac{b_2}{a_{12}},$$

wählen wir die zweite Zeile des Tableaus. Wir führen also einen weiteren Eliminationsschritt durch, diesmal mit $i = j = 2$. Es ergibt sich folgendes Tableau:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	$\mathbf{b}$
7	$1-0\frac{22/51}{488/85} = 1$	$\frac{22}{51}-\frac{488}{85}\frac{22/51}{488/85} = 0$	$\frac{54}{85}-\frac{1368}{425}\frac{22/51}{488/85} = \frac{24}{61}$	$\frac{10}{51}+\frac{2}{17}\frac{22/51}{488/85} = \frac{25}{122}$	$0-1\frac{22/51}{488/85} = -\frac{55}{732}$	$\frac{22655800}{17}-\frac{76115520}{17}\frac{22/51}{488/85} = \frac{60773000}{61}$
8	$\frac{0}{488/85} = 0$	$\frac{488/85}{488/85} = 1$	$\frac{1368/425}{488/85} = \frac{171}{305}$	$\frac{-2/17}{488/85} = -\frac{5}{244}$	$\frac{1}{488/85} = \frac{85}{488}$	$\frac{76115520/17}{488/85} = \frac{47572200}{61}$
9	$0-0\frac{58/51}{488/85} = 0$	$\frac{58}{51}-\frac{488}{85}\frac{58/51}{488/85} = 0$	$\frac{62}{85}-\frac{1368}{425}\frac{58/51}{488/85} = \frac{28}{305}$	$-\frac{20}{51}+\frac{2}{17}\frac{58/51}{488/85} = -\frac{45}{122}$	$0-1\frac{58/51}{488/85} = -\frac{145}{732}$	$-\frac{45311600}{17}-\frac{76115520}{17}\frac{58/51}{488/85} = -\frac{216690400}{61}$

Noch immer ist ein Zielfunktionskoeffizient positiv. Wir wählen also $j=3$. Ein Vergleich von $\frac{b_i}{a_{i3}}$ ergibt einen kleineren Wert in Zeile 2. Wir führen daher einen Eliminationsschritt mit $i=2$ und $j=3$ durch. So erhalten wir

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	$\mathbf{b}$
10	$1-0\frac{24/61}{171/305} = 1$	$0-1\frac{24/61}{171/305} = -\frac{40}{57}$	$\frac{24}{61}-\frac{171}{305}\frac{24/61}{171/305} = 0$	$\frac{25}{122}+\frac{5}{244}\frac{24/61}{171/305} = \frac{25}{114}$	$-\frac{55}{732}-\frac{85}{488}\frac{24/61}{171/305} = -\frac{15}{76}$	$\frac{60773000}{61}-\frac{47572200}{61}\frac{24/61}{171/305} = 449000$
11	$\frac{0}{171/305} = 0$	$\frac{1}{171/305} = \frac{305}{171}$	$\frac{171/305}{171/305} = 1$	$\frac{-5/244}{171/305} = -\frac{25}{684}$	$\frac{85/488}{171/305} = \frac{425}{1368}$	$\frac{47572200/61}{171/305} = 1391000$
12	$0-0\frac{28/305}{171/305} = 0$	$0-1\frac{28/305}{171/305} = -\frac{28}{171}$	$\frac{28}{305}-\frac{171}{305}\frac{28/305}{171/305} = 0$	$-\frac{45}{122}+\frac{5}{244}\frac{28/305}{171/305} = -\frac{125}{342}$	$-\frac{145}{732}-\frac{85}{488}\frac{28/305}{171/305} = -\frac{155}{684}$	$-\frac{216690400}{61}-\frac{47572200}{61}\frac{28/305}{171/305} = -3680000$

Da nun alle Zielfunktionskoeffizienten gleich 0 oder negativ sind, endet das Verfahren mit einer optimalen Lösung von $x_1 = 449000, x_2 = 0, x_3 = 1391000$. Obwohl alle Pralinen den gleichen Deckungsbeitrag erzielen, führen die unterschiedlichen Bedarfe bei diesen Rohstoffkapazitäten dazu, dass keine Pralinen von Typ 2 hergestellt werden sollten. Abbildung 10.37 visualisiert die gefundenen Basislösungen.

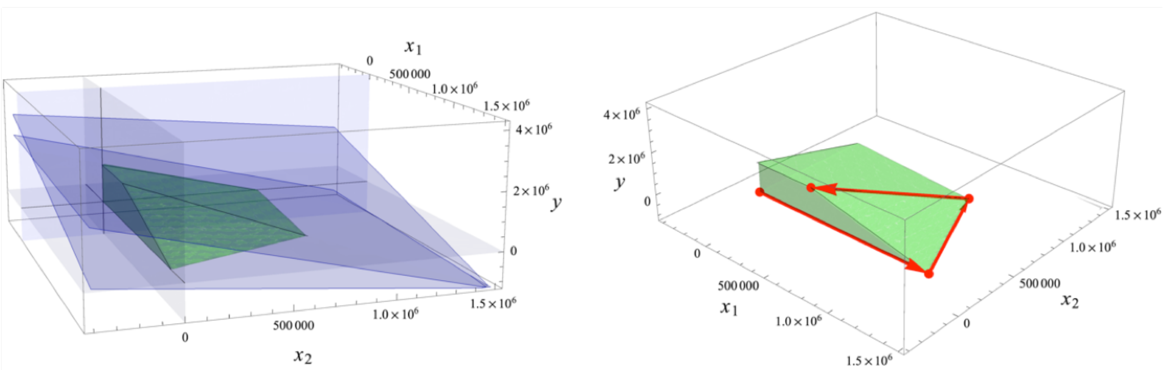


Abbildung 10.37: Der Weg des Simplex-Algorithmus im Pralinenbeispiel.

■

Z Ausgehend von einer zulässigen Basislösung mit $x_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ fügt man zur Durchführung des Simplexalgorithmus dem Gleichungssystem die Gleichung $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = 0$ mit einem Zielfunktionskoeffizienten hinzu. In jedem Iterationsschritt wählt der Simplexalgorithmus dann die Spalte j mit dem grössten, positiven Zielfunktionskoeffizienten. Von allen Gleichungen des Gleichungssystems $A\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}$ wählt er dann die Zeile i, welche den kleinsten, positiven Quotienten $\frac{b_i}{a_{ij}}$ hat. Falls solche i und j existieren, so wird der Zielfunktionswert stets vergrössert und eine andere zulässige Basislösung erreicht.

10.4 Ausblick

In diesem Kapitel widmeten wir uns der Optimierung unter Nebenbedingungen - einem aktiven Forschungsfeld, welches in den Wirtschaftswissenschaften auch oft unter den Schlagworten Operations Research oder Management Science verbreitet ist.

Wir besprachen das Verfahren der Substitution sowie das Lagrange-Verfahren für Optimierungsprobleme mit Gleichheitsnebenbedingungen. Für Ungleichheitsnebenbedingungen haben wir nur den Spezialfall der linearen Optimierung betrachtet und die Idee der Enumeration der Eckpunkte vorgestellt, welche eine Grundidee des sogenannten Simplex-Verfahrens darstellt.

Wie bereits erwähnt, wurde hier auch im Zusatzkapitel nur die Grundidee des Simplexalgorithmus vorgestellt. Das gesamte Verfahren wird in weiterführenden Veranstaltungen unter dem Stichwort "Lineare Programmierung" unterrichtet. Zudem werden Sie in weiterführenden Veranstaltungen sehen, dass sich bei der Lösung eines linearen Problems mithilfe des Simplex-Verfahrens auch stets Schattenpreise der Kapazitätsrestriktionen (wie bei Lagrange) ergeben. Im Kontext der linearen Optimierung werden diese auch als duale Variablen bezeichnet und sogenannte "Duale Probleme" formuliert.

In den vorgestellten Produktionsproblemen, in welchen entschieden werden musste, wie viele Einheiten eines Gutes herzustellen sind, hatte sich jeweils eine ganzzahlige Lösung ergeben. Hätte sich eine nicht ganzzahlige Lösung ergeben, wäre sicher aufgefallen, dass wir diese Probleme stark vereinfacht haben, indem wir beliebige Lösungen zulassen. Lineare Optimierungsprobleme, welche (zumindest für einige Komponenten) nur ganzzahlige Werte der Variablen zulassen, sind unter dem Namen Mixed Integer Programming bekannt. Lösungsverfahren für derartige Probleme, Schnittebenen und Branch-and-Bound Verfahren werden in weiterführenden Veranstaltungen unterrichtet.

Der allgemeine Fall der Lösung eines Optimierungsproblems unter Ungleichheitsnebenbedingungen ist ungemein schwieriger als das Lösen linearer Optimierungsprobleme. Aber auch hierfür können notwendige Bedingungen ähnlich zu der Lagrange-Bedingung, Satz 10.2.6, hergeleitet werden. Man nennt diese dann Karush-Kuhn-Tucker oder einfach Kuhn-Tucker Bedingungen. Oft sind solche Probleme aber nur im Fall konvexer Zielfunktionen über konvexen zulässigen Bereichen zuverlässig (und rechnergestützt) zu bewältigen. Derartige Verfahren und Probleme werden ebenfalls in weiterführenden Vorlesungen im Bereich Management Science besprochen.