Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler - FS 2018

Universität Zürich[UZH]

Liebe Prüflinge,

in dieser Prüfung können bis zu **60 Punkte** erzielt werden. Es gibt drei unterschiedliche Aufgabentypen.

Bei Aufgaben **ohne vorgegebene Antwortmöglichkeiten muss der Lösungsweg angegeben werden**. Denn bei diesen **'Freitextaufgaben'** wird der Lösungsweg bewertet. Der **Lösungsweg ist dabei in den Kasten direkt unter der jeweiligen Aufgabe einzutragen**. Es wird nur der im Kasten eingetragene Lösungsweg korrigiert. Auch korrekte Antworten werden mit 0 Punkten bewertet, wenn kein korrekter Lösungsweg ersichtlich ist. Die Fünfecke unter den Freitextaufgaben werden nur von der Korrektorin bzw. dem Korrektor ausgefüllt. **Wenn Sie ein Fünfeck selbst markieren, erhalten Sie für die betreffende Aufgabe 0 Punkte**.

Zusätzlich gibt es zwei Aufgabentypen, in denen Antwortmöglichkeiten vorgegeben sind. Bei diesen Aufgaben **mit Antwortmöglichkeiten muss kein Lösungsweg angegeben werden**. Sie müssen die korrekte Antwort bei diesen Fragen durch Ankreuzen des zugehörigen Kreises/Quadrats auswählen. Markieren Sie bitte Ihre Auswahl in der folgenden Weise: ○⊗○ .
Wenn Sie eine Auswahl korrigieren möchten, füllen Sie bitte den fälschlich markierten Kreis bzw. das fälschlich markierte Quadrat **vollständig** aus, ungefähr so: ○●⊗ . Falls Sie Ihre Auswahl **nochmals korrigieren** möchten, dann **füllen Sie alle markierten Kreise/Quadrate der Frage vollständig aus** und **kennzeichnen Ihre neue Auswahl durch Pfeile auf die jeweiligen Kreise/Quadrate**. **Nicht beantwortete Fragen werden stets als inkorrekte Auswahl bewertet**.

'Wahr oder Falsch'-Aufgaben bestehen aus 4 Aussagen, für die jeweils entschieden werden muss, ob sie wahr oder falsch sind. Diese Antwortmöglichkeiten sind mit **Quadraten** versehen. Sie erhalten für die Aufgabe **volle Punktzahl bei 4 korrekten Antworten**, **halbe Punktzahl bei 3 korrekten Antworten** und **0 Punkte bei 2 oder weniger korrekten Antworten.**

Bei Fragen des Typs **'Einfachauswahl'** sind die verschiedenen Antwortmöglichkeiten mit **Kreisen** versehen. Bei diesen Fragen ist **genau eine Antwort korrekt**. Sie erhalten **volle Punktzahl bei korrekter Auswahl** und **0 Punkte bei inkorrekter Auswahl**.

Platz für Nebenrechnungen gibt es am **Ende jeder Seite**, auf der **Rückseite dieses Deckblatts** und auf **den letzten drei Seiten** der Klausur. Antworten in diesem Bereich werden **nicht bewertet**. Die Antworten der Freitextfragen sind in die dafür vorgesehenen Kästen einzutragen.

Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler - FS 2018

Platz für Nebenrechnungen

Aufgabe 1.1 - Wahr oder Falsch (4 Punkte)

Sei $A = [\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2]$ eine Matrix mit Spaltenvektoren $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2 \in \mathbb{R}^3$. Zudem sei $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor, von dem bekannt ist, dass es ein $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ gibt, sodass

$$A\mathbf{x} = [\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2]\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{b}.$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind.

a) $\mathbf{b} \in \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$	☐ wahr	☐ falsch
b) $\mathbf{b} \in \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$	☐ wahr	☐ falsch
c) $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$	☐ wahr	☐ falsch
d) $\mathbf{a}^1$ und $\mathbf{a}^2$ sind orthogonal	☐ wahr	☐ falsch

Aufgabe 1.2 - Einfachauswahl (2 Punkte)

Es sei weiterhin

$$\mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und zusätzlich

$$\mathbf{a}^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Das Skalarprodukt von $\mathbf{a}^2$ und $\mathbf{a}^3$ ist

○ -7	○ -3	○ -1	○ 0
○ 1	○ 3	○ 7	○ keines davon

Platz für Nebenrechnungen

Aufgabe 2.1 - Einfachauswahl (2 Punkte)

In folgender Aufgabe bezeichnen wir die kanonischen Einheitsvektoren als $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$ und $\mathbf{e}^3$.

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ mit drei reellen Eigenvektoren $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{v}^2$ und $\mathbf{v}^3$ und jeweils zugehörigen reellen Eigenwerten λ_1, λ_2 und λ_3. Es ist bekannt, dass $\mathbf{v}^1 = \mathbf{e}^1$ mit zugehörigem Eigenwert $\lambda_1 = 3$. Zudem ist $\lambda_2 = 1$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = (6, 0, 0)^T$.

○ $\{\}$	○ $\{\mathbf{e}^1\}$	○ $\{\frac{1}{2}\mathbf{e}^1\}$	○ $\{2\mathbf{e}^1\}$
○ $\{\mathbf{e}^3\}$	○ $\{\frac{1}{2}\mathbf{e}^3\}$	○ $\{2\mathbf{e}^3\}$	○ keine davon

Aufgabe 2.2 - Freitext (3 Punkte)

Bestimmen Sie einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ mit Norm $3 \cdot \sqrt{2}$.

Erreichte Punktzahl:

⬠ 0 ⬠ 1 ⬠ 2 ⬠ 3

Aufgabe 2.3 - Einfachauswahl (2 Punkte)

Wie lautet der dritte Eigenwert λ_3?

○ 0	○ 1	○ 2	○ 3
○ 4	○ 6	○ 9	○ keiner davon

Platz für Nebenrechnungen

Aufgabe 3.1 - Wahr oder Falsch (4 Punkte)

Es sei $A = [\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3]$ eine 3×3 Matrix, $\mathbf{b} = (1, 2, 1)^T$. Vom linearen Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist bekannt, dass die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(2, 4, 2)^T + t\ (0, 1, 1)^T \mid t \in \mathbb{R}\}$ ist.
Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind.

a) A ist invertierbar	☐ wahr	☐ falsch
b) 0.5 ist ein Eigenwert von A.	☐ wahr	☐ falsch
c) $2\mathbf{a}^1 + 5\mathbf{a}^2 + 3\mathbf{a}^3 = \mathbf{b}$	☐ wahr	☐ falsch
d) Die Dimension von $\mathbb{L}$ ist 2.	☐ wahr	☐ falsch

Aufgabe 3.2 - Wahr oder Falsch (4 Punkte)

Es seien zusätzlich zu den Angaben in Aufgabe 3.1

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.
Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind.

a) $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$ ist äquivalent zu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.	☐ wahr	☐ falsch
b) B ist in Zeilenstufenform.	☐ wahr	☐ falsch
c) $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$ ist ein homogenes lineares Gleichungssystem.	☐ wahr	☐ falsch
d) $C\mathbf{x} = \mathbf{c}$ ist äquivalent zu $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$.	☐ wahr	☐ falsch

Platz für Nebenrechnungen

Platz für Nebenrechnungen

Aufgabe 4.1 - Einfachauswahl (2 Punkte)

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}$	
①	2	4	3	b_1	
②	4	16	2	b_2	
③	-6	-12	$2a-9$	b_3	
④	1	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}b_1$	$\frac{1}{2}\cdot$ ①
⑤	0	8	-4	d	② $-2\cdot$ ①
⑥	0	0	$2a$	$3b_1+b_3$	③ $+3\cdot$ ①
⑦	1	0	$\frac{5}{2}$	$b_1-\frac{1}{4}b_2$	④ $-\frac{1}{4}$ ⑤
⑧	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}b_1+\frac{1}{8}b_2$	$\frac{1}{8}\cdot$ ⑤
⑨	0	0	$2a$	$3b_1+b_3$	⑥

Gegeben ist obiges Tableau zur Umformung eines linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ mit $a, b_1, b_2, b_3, d \in \mathbb{R}$. Welchem Term entspricht d in Zeile 5?

- ○ $-\frac{1}{2}b_2$
- ○ b_2
- ○ $-\frac{1}{4}b_1+\frac{1}{8}b_2$
- ○ $\frac{1}{4}b_1+\frac{1}{8}b_2$
- ○ $-2b_1+b_2$
- ○ $2b_1+b_2$
- ○ $\frac{1}{2}b_1+\frac{1}{8}b_2+\frac{1}{4}b_3$
- ○ keinen davon

Aufgabe 4.2 - Einfachauswahl (2 Punkte)

Sei in Zeile 9 im Tableau aus Aufgabe 4.1 $a=0$. Für welche $\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3)^T$ ist das lineare Gleichungssystem lösbar?

- ○ Alle $\mathbf{b}$ mit $b_1=-b_2$
- ○ Alle $\mathbf{b}$ mit $b_1=3b_2$
- ○ Alle $\mathbf{b}$ mit $b_1=-b_3$
- ○ Alle $\mathbf{b}$ mit $b_1=-\frac{1}{3}b_3$
- ○ Alle $\mathbf{b}$ mit $b_2=-b_3$
- ○ Alle $\mathbf{b}$ mit $b_3=3b_2$
- ○ Alle $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^3$
- ○ keines davon

Platz für Nebenrechnungen

Aufgabe 4.3 - Freitext (3 Punkte)

Sei in Zeile 9 im Tableau aus Aufgabe 4.1 $a = 0$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems für $\mathbf{b} = (8,\ -8,\ -24)^T$.

Erreichte Punktzahl:

⬠ 0 ⬠ 1 ⬠ 2 ⬠ 3

Aufgabe 4.4 - Einfachauswahl (2 Punkte)

10	1	0	0	$-\frac{11}{4}b_1 - \frac{1}{4}b_2 - \frac{5}{4}b_3$	$7 - \frac{5}{4} \cdot 9$
11	0	1	0	$\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{8}b_2 + \frac{1}{4}b_3$	$8 + \frac{1}{4} \cdot 9$
12	0	0	1	$\frac{3}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_3$	$\frac{1}{2} \cdot 9$

Sei im Tableau aus Aufgabe 4.1 a = 1. In diesem Fall erhält man im nächsten Schritt des Eliminationsverfahrens das obige Tableau. Welche Matrix entspricht A^{-1}?

○ $\begin{pmatrix} -\frac{11}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

○ $\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{11}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

○ $\begin{pmatrix} -\frac{11}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

○ $\begin{pmatrix} -\frac{11}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

○ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

○ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

○ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$

○ keine davon

Platz für Nebenrechnungen

Platz für Nebenrechnungen

Aufgabe 5.1 - Einfachauswahl (2 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ mit $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ und

$$A = [\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3, \mathbf{a}^4] = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Für welchen Wert von α gilt $\operatorname{rang}(A) = 3$?

○ -6	○ -3	○ -1	○ 0
○ 1	○ 3	○ 6	○ keinen davon

Aufgabe 5.2 - Freitext (2 Punkte)

Sei in der Matrix A aus Aufgabe 5.1 $\alpha = 2$. Berechnen Sie die Determinante $\det(A)$.

Erreichte Punktzahl:

⬠ 0 ⬠ 1 ⬠ 2

Platz für Nebenrechnungen

Aufgabe 5.3 - Wahr oder Falsch (4 Punkte)

Sei in der Matrix A aus Aufgabe 5.1 $\alpha = 1$ und weiterhin $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

a) $f\left((1, 1, 0, 0)^T\right) = f\left((1, 1, 1, 0)^T\right)$	☐ wahr	☐ falsch
b) f ist injektiv.	☐ wahr	☐ falsch
c) $f\left((5, 10, 0, 15)^T\right) = 5 \cdot f\left((1, 2, 0, 3)^T\right)$	☐ wahr	☐ falsch
d) Die zweite Hauptunterdeterminante von A ist -1.	☐ wahr	☐ falsch

Platz für Nebenrechnungen

Aufgabe 5.4 - Einfachauswahl (2 Punkte)

Es sei weiter $\alpha = 1$, die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

und ausserdem die Matrix B gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sei $C = A \cdot B$ mit $C = (c_{ij})$. Was ist der Wert des Elements c_{32} der Matrix C?

○ 0	○ 1	○ 2	○ 3
○ 4	○ 6	○ 9	○ keiner davon

Aufgabe 5.5 - Wahr oder Falsch (4 Punkte)

Sei $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit stationärer Stelle $\mathbf{x}^0 \neq (0, 0, 0, 0)^T$ und positiv definiter Hesse-Matrix

$$H_g(\mathbf{x}^0) = B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind.

a) Ist $\alpha = 1$, dann gilt $\det(B) = -\frac{1}{3}\det(A)$.	☐ wahr	☐ falsch
b) Alle Eigenwerte von B sind grösser als Null.	☐ wahr	☐ falsch
c) $\nabla g(\mathbf{x}^0) = B\mathbf{x}^0$	☐ wahr	☐ falsch
d) g hat an der Stelle $\mathbf{x}^0$ ein Maximum.	☐ wahr	☐ falsch

Platz für Nebenrechnungen

Platz für Nebenrechnungen

Aufgabe 6.1 - Wahr oder Falsch (4 Punkte)

Sei $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$. Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 3x_2^2$. Der Gradient und die Hesse-Matrix von f an der Stelle $\mathbf{x}$ sind gegeben durch

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (2x_1, -6x_2)^T$$

und

$$H_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind.

a) Der Vertikalschnitt von f ausgehend von $\mathbf{x}^0 = (1, 1)^T$ in Richtung $\mathbf{e}^1 = (1, 0)^T$ ist gegeben durch $f_{\mathbf{x}^0, \mathbf{e}^1}(t) = t^2$.	☐ wahr	☐ falsch
b) Die Richtungsableitung von f an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (0, 0)^T$ in beliebige Richtung $\mathbf{r}$ ist 0.	☐ wahr	☐ falsch
c) f hat in $\mathbf{x}^0 = (0, 0)^T$ ein lokales Minimum.	☐ wahr	☐ falsch
d) f ist konvex auf $\mathbb{R}^2$.	☐ wahr	☐ falsch

Aufgabe 6.2 - Einfachauswahl (2 Punkte)

Sei $\mathbf{x}^0 = (1, 1)^T$. Die Tangentialebene an f an der Stelle $\mathbf{x}^0$ wird beschrieben durch $t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) =$

○ $x_1^2 - 3x_2^2$	○ $-2 + 2(x_1 - 1) - 6(x_2 - 1)$	○ $2(x_1 - 1) - 6(x_2 - 1)$	○ $-2 + 2x_1 - 6x_2$
○ $2x_1^2 - 6x_2^2$	○ $-2 + 2x_1^2 - 6x_2^2$	○ $2x_1 - 6x_2$	○ keines davon

Aufgabe 6.3 - Einfachauswahl (2 Punkte)

Sei $\mathbf{x}^0 = (1, 1)^T$. Das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f an der Stelle $\mathbf{x}^0$ ist gegeben durch $t_{2,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) =$

○ $x_1^2 - 3x_2^2$	○ $-2 + 2(x_1 - 1) - 6(x_2 - 1)$	○ $-2 + x_1^2 - 3x_2^2$	○ $-4x_1x_2$
○ $2x_1^2 - 6x_2^2$	○ $2x_1^2 + 18x_2^2$	○ $2x_1 - 6x_2$	○ keines davon

Platz für Nebenrechnungen

Platz für Nebenrechnungen

Aufgabe 7.1 - Freitext (2 Punkte)

Sei $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = e^{x_1}+x_2$. Berechnen Sie den Gradienten von f an der Stelle $\mathbf{x}^0=(2,2)^T$.

Erreichte Punktzahl:

⬠ 0 ⬠ 1 ⬠ 2

Aufgabe 7.2 - Wahr oder Falsch (4 Punkte)

Die Hesse-Matrix von f an der Stelle $\mathbf{x}^0=(2,2)^T$ ist gegeben durch

$$H_f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind.

a) $H_f(\mathbf{x}^0)$ ist symmetrisch.	☐ wahr	☐ falsch
b) $H_f(\mathbf{x}^0)$ ist positiv definit.	☐ wahr	☐ falsch
c) $H_f(\mathbf{x}^0)$ ist invertierbar.	☐ wahr	☐ falsch
d) f ist konkav.	☐ wahr	☐ falsch

Platz für Nebenrechnungen

Aufgabe 7.3 - Einfachauswahl (2 Punkte)

Sei $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ und $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g(\mathbf{x}) = x_1^4\ x_2^2$. Der Gradient von g an der Stelle $\mathbf{x}$ ist gegeben durch

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 4\,x_1^3\ x_2^2 \\ 2\,x_1^4\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Die Hesse-Matrix von g an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (1, 2)^T$ ist gegeben durch

○ $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$	○ $\begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$	○ $\begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 16 & 2 \end{pmatrix}$	○ $\begin{pmatrix} 16 & 48 \\ 32 & 16 \end{pmatrix}$
○ $\begin{pmatrix} 48 & 16 \\ 16 & 2 \end{pmatrix}$	○ $\begin{pmatrix} 48 & 16 \\ 16 & 32 \end{pmatrix}$	○ $\begin{pmatrix} 48 & 64 \\ 64 & 2 \end{pmatrix}$	○ keine davon

Platz für Nebenrechnungen

Platz für Nebenrechnungen

Platz für Nebenrechnungen

Platz für Nebenrechnungen