Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät der Universität Zürich
Professur Mathematik für Ökonomen

Prüfung zur Vorlesung Mathematik II Frühlingssemester 2015
Musterlösungen

27. Mai 2015

AUFGABE 1
Aufgabe 1.1

(i) $\boxed{\int_0^1 \sqrt[3]{x}\ \mathrm{d}x = \frac{3}{4}}$

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x}\ \mathrm{d}x = \int_0^1 x^{1/3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{4}x^{4/3}\right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

(ii) $\boxed{\int h(x)\ \mathrm{d}x = 2\sqrt{g(x)}}$

Durch die Substitution $u = g(x),\ \mathrm{d}u = g'(x)\mathrm{d}x$ lässt sich das Integral wie folgt lösen:

$$\begin{aligned}\int \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u = \int u^{-1/2}\ \mathrm{d}u = 2u^{1/2} + C \\ &= 2\sqrt{g(x)} + C \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Aufgabe 1.2

(a) Auf $[-\infty, 1]$ ist die Funktion $1 - |x|$ wie folgt definiert:

$$1 - |x| = \begin{cases} 1 - x & \forall x \in [0,1] \\ 1 - (-x) = 1 + x & \forall x \in [-\infty, 0). \end{cases}$$

Damit kann das uneigentliche Integral geteilt werden. Mit $-\infty < a < 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^1 e^{1-|x|}\ \mathrm{d}x &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^1 e^{1-|x|}\ \mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{1+x}\ \mathrm{d}x + \int_0^1 e^{1-x}\ \mathrm{d}x \\ &= \lim_{a\to-\infty}\left[e^{1+x}\right]_a^0 + \left[-e^{1-x}\right]_0^1 \\ &= e - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^{1+a}}_{=0} - e^0 + e \quad = \quad \underline{2e-1}.\end{aligned}$$

(b) Das innere Integral wird zuerst bestimmt:

$$\int_0^1 (2x + \ln(y))\ \mathrm{d}x = \left[x^2 + x\ln(y)\right]_0^1 = 1 + \ln(y).$$

Das äussere Integral kann mit Hilfe einer partiellen Integration gelöst werden:

$$\begin{aligned} u &= 1 + \ln(y) \qquad & u' &= \tfrac{1}{y} \\ v' &= 1 & v &= y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^2 1\cdot(1+\ln(y))\ \mathrm{d}y &= \Big[y\cdot(1+\ln(y))\Big]_1^2 - \int_1^2 y\cdot\frac{1}{y}\ \mathrm{d}y = \Big[y + y\ln(y)\Big]_1^2 - \Big[y\Big]_1^2 = \Big[y\ln(y)\Big]_1^2 \\ &= 2\ln(2) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} \quad = \quad \underline{2\ln(2)}.\end{aligned}$$

AUFGABE 2

Aufgabe 2.1

Die zum linearen Gleichungssystem zugehörige Koeffizienten-Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ hat den Rang $r(A) = 2$, wie man aus folgenden Rechnungen sieht:

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & 0 & -2 & 1 & \\
0 & 1 & -1 & -1 & \\
2 & -1 & -3 & 3 & Z_3 - 2Z_1 \\
\hline
1 & 0 & -2 & 1 & \\
0 & 1 & -1 & -1 & \\
0 & -1 & 1 & 1 & Z_3 + Z_2 \\
\hline
1 & 0 & -2 & 1 & \\
0 & 1 & -1 & -1 & \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

w	f
×	
	×
×	
	×

- Wahr. Die Dimension von L ist: $\dim L = n - r(A) = 4 - 2 = 2$ (n = Anzahl Spalten von A).
- Falsch. Durch Einsetzen in die angegebenen Gleichungen sieht man, dass die Vektoren $\underline{v}^1$, $\underline{v}^3$ Lösungen des LGS sind, $\underline{v}^2$ hingegen nicht. Somit ist die Menge X keine Basis von L.
- Wahr. Für eine Basis von L braucht es zwei linear unabhängige Elemente aus L. Die Menge Y ist also eine Basis und somit auch ein Erzeugendensystem von L.
- Falsch. Die Menge Z kann mit nur einem Vektor keine Basis von L sein. Für eine Basis von L braucht es zwei linear unabhängige Vektoren aus L.

Aufgabe 2.2

- Die Determinante von
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
lässt sich z.B. durch die Regel von Sarrus berechnen:
$$\begin{aligned} \det A &= 2\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 0 + 0\cdot 1\cdot 1 - 0\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1 \\ &= 0+0+0-0-2-1 = -3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{A ist invertierbar.} \end{aligned}$$
Wir können z.B. mit Hilfe des Eliminationsverfahrens von Gauss die Inverse berechnen:
$$\begin{array}{rrr|rrr|l} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & Z_1 - 2Z_2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & Z_1 \text{ mit } Z_2 \text{ vertauschen} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & Z_3 - Z_2 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 & \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 & Z_3/3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & Z_1 - Z_3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 & Z_2 + 2Z_3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 1/3 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1/3 & \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 & 2/3 & \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 1/3 & \end{array}$$
$\Rightarrow$ Die Inverse von A ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

- In der Matrix
$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
ist die erste Spalte gleich wie die zweite Spalte multipliziert mit (-1). Die Matrix hat somit keinen vollen Rang und ist deshalb nicht invertierbar.

- Die Matrix $C = A^T$ hat die gleiche Determinante wie A, nämlich $\det C = \det A^T = \det A = -3 \neq 0$, und ist somit auch invertierbar. Da die Matrix A symmetrisch ist ($A^T = A$), ist
$$C^{-1} = (A^T)^{-1} = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$
Alternativ kann die Inverse ohne Kenntnis der Symmetrie berechnet werden, indem man die Transponierte zu A^{-1} bestimmt, ausgehend von der Regel $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

AUFGABE 3

Aufgabe 3.1

$$\boxed{AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.2

(a) Die Berechnung einer Determinante kann auf vielfältige Weise erfolgen. Hier geschieht dies mithilfe der Laplace-Entwicklung nach der letzten Zeile und anschliessend nach der letzten Spalte.

$$\mu = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 \\ 12 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

Das Vertauschen der ersten und letzten Zeile bei der Matrix von ν ergibt die Matrix der Determinante μ.

$$\nu = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{=\mu} = 8$$

(b) Die quadratische Matrix B ist regulär, da $\det B \neq 0$. Dadurch kann die Inversenberechnung mittels der Adjungierten erfolgen:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\underbrace{a^2 - b^2}_{=-1}} \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Das Gleichsetzen von B^{-1} und B,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = B,$$

liefert direkt $a = 0$, da $-a = a$. Aus der Voraussetzung $\det B = a^2 - b^2 = -1$ folgt nun $b = \pm 1$. Damit erfüllen die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die geforderten Voraussetzungen.

AUFGABE 4

4.1

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{4\sin(2x)}{3x} = \frac{8}{3}}$$

Einsetzen von $x = 0$ ergibt den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$. Mit Hilfe der l'Hospitalschen Regel Nr. 1 und mit $\lim\limits_{x\to 0} \cos(2x) = 1$ erhalten wir:

$$\lim_{x\to 0} \frac{4\sin(2x)}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{4\cdot 2\cos(2x)}{3} = \frac{8}{3} \cdot \lim_{x\to 0} \cos(2x) = \frac{8}{3}.$$

4.2

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}$$

Mit $x_2 = t_1$, sowie $x_3 = t_2$ erhalten wir die links angegebene Lösung: $x_1 = 4 + 2t_1 - 3t_2, \quad x_4 = 1$.

Allgemein: In diesem linearen Gleichungssystem mit 2 linear unabhängigen Gleichungen und 4 Unbekannten müssen 2 Variablen als Parameter gewählt werden. Da $x_4 = 1$ fest ist, stehen hierzu x_1, x_2, x_3 zur Verfügung. Die allgemeine Lösung hat die Form:
$\underline{x} = \underline{x}^0 + t_1 \cdot \underline{a} + t_2 \cdot \underline{b} \quad (\underline{x}^0, \underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^4)$. Dabei ist $\underline{x}^0$ eine beliebige Lösung des gegebenen LGS und $\underline{a}$, $\underline{b}$ sind zwei linear unabhängige Lösungen des dazugehörigen homogenen LGS $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \quad x_4 = 0$.

4.3

$$\boxed{\det B = 48}$$

Jede der 4 Zeilen (bzw. Spalten) von A^T wird mit dem Faktor 2 multipliziert. Es gilt also:
$\det B = 2^4 \cdot \det A^T = 2^4 \cdot \det A = 16 \cdot 3 = 48$.

$$\boxed{\det C = -15}$$

Die Determinante ist linear bezüglich jeder Spalte. Es gilt somit:
$\det C = \det[\underline{a}^1, (-5\underline{a}^2), \underline{a}^3, \underline{a}^4] \ + \ \det[\underline{a}^1, (3\underline{a}^3), \underline{a}^3, \underline{a}^4]$
$= -5 \cdot \det[\ \underline{a}^1,\ \underline{a}^2,\ \underline{a}^3,\ \underline{a}^4\ ] + 3 \cdot \det[\ \underline{a}^1,\ \underline{a}^3,\ \underline{a}^3,\ \underline{a}^4\ ]$
$= -5 \cdot \det A + 3 \cdot 0 = -15$
($\det[\ \underline{a}^1,\ \underline{a}^3,\ \underline{a}^3,\ \underline{a}^4] = 0$, da die Matrix zwei gleiche Spalten enthält und somit singulär ist).

4.4 $\boxed{Q^{-1} = Q + I}$

$Q^2 + Q = I$

Q auf linker Seite ausklammern:

$\Leftrightarrow Q \underbrace{(Q + I)}_{=Q^{-1}} = I$

da wir wissen, dass $QQ^{-1} = I$ und Q^{-1} eindeutig definiert ist.

$\Rightarrow (Q + I) = Q^{-1}$

4.5 $\boxed{\alpha = 47}$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} ||3\underline{a} - 2\underline{b}|| = ||3\underline{a} + (-2\underline{b})|| \quad \leq \quad & ||3\underline{a}|| + ||-2\underline{b}|| = 3||\underline{a}|| + 2||-\underline{b}|| \\ & = 3||\underline{a}|| + 2||\underline{b}|| = 33 + 14 \\ & = 47 = \alpha \end{aligned}$$

4.6

w	f
×	
	×
×	

- Wahr. Alle Eigenwerte von $C \geq 0 \Rightarrow C$ positiv semidefinit $\Rightarrow f$ konvex.
- Falsch. λ Eigenwert von $C \Rightarrow \det(C - \lambda I) = 0$ $\Rightarrow (C - \lambda I)$ singulär $\Rightarrow r(C - \lambda I) < 3$.
- Wahr. C negativ definit $\Rightarrow$ Alle Eigenwerte von $C < 0 \Rightarrow \det(C) < 0$ (da Produkt aus 3 negativen Eigenwerten).