Matrikelnummer: ______________________ Prüfungsnummer: ____________________

Name: ______________________________ Vorname: ________________________

Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät der Universität Zürich
Professur Mathematik für Ökonomen
Prof. Dr. Diethard Klatte

PRÜFUNG IN MATHEMATIK II (BACHELORSTUDIUM FS 2013)

28. Mai 2013

Zulässige Hilfsmittel: Schreibzeug (keine Taschenrechner)

Prüfungsdauer: 90 Minuten

Es können maximal 80 Punkte erzielt werden, und zwar 20 Punkte pro Aufgabe.

In Teil 1 der Aufgaben 1, 2 und 3 sowie in der Aufgabe 4 wird nur nach der Lösung gefragt. Dort wird der Lösungsweg nicht angeschaut, es zählen nur die in die Kästchen eingetragenen Antworten!

In der Teilaufgabe 4.4, in der die richtigen Antworten anzukreuzen sind, gibt es pro Frage 2 bzw. -2 Punkte bei richtiger bzw. falscher Antwort sowie 0 Punkte bei leerem Kästchen. Die Gesamtpunktzahl der Teilaufgabe kann nicht negativ sein.

Bei allen anderen Teilaufgaben müssen die angewandte Lösungsmethode, die Argumente und Begründungen sowie Ihre Antwort bzw. das Ergebnis deutlich erkennbar sein. Die Lösungen sind unmittelbar unter "Platz für Lösung" einzutragen. Die Aufgabenstellung ist genau zu beachten.

Falls der Platz nicht ausreicht, kann die Bearbeitung der Aufgaben auf Zusatzblättern fortgesetzt werden. Ungültige Lösungsversuche sind in jedem Fall durchzustreichen!

(leer lassen)

Aufgabe	1	2	3	4	Summe
Punkte Teil 1					
Punkte Teil 2				entfällt	

Total	

AUFGABE 1 (20 Punkte)

Aufgabe 1.1 (6 Punkte) Der Lösungsweg wird nicht angeschaut. Es zählen nur die in die Kästchen eingetragenen Ergebnisse!

Teilaufgabe (i) (3 Punkte)
Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx \quad = \quad \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad + \mathrm{C}}$$

Teilaufgabe (ii) (3 Punkte)
Gegeben ist irgendeine zweimal differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Berechnen Sie eine Stammfunktion von $f(x) = 2\,g'(x)g(x) - g''(x),\ x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Stammfunktion von } f \ : \quad \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Aufgabe 1.2 (14 Punkte) Der Lösungsweg bzw. die Begründungen sind anzugeben!

Teilaufgabe (a) (8 Punkte)
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 - x \leq y \leq 1 - x^2\}\,,$$

d.h., den Inhalt der Fläche F, die von den Graphen der Funktionen $x \mapsto 1 - x^2$ und $x \mapsto -1 - x$ eingeschlossen wird.

Teilaufgabe (b) (6 Punkte)
Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\int_0^1 \left(\int_{-1}^1 (2x + y)\,dx \right)\,dy\,.$$

AUFGABE 2 (20 Punkte)

Aufgabe 2.1 (6 Punkte) Der Lösungsweg wird nicht angeschaut. Es zählen nur die in die Kästchen eingetragenen Ergebnisse!

Teilaufgabe (i) (3 Punkte)
Gegeben sind

die Vektoren $\underline{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\underline{q} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sowie die Matrix $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie das Produkt $\underline{p}^T Q\, \underline{q}$. Falls dieses Produkt nicht gebildet werden kann, schreiben Sie "existiert nicht".

$$\underline{p}^T Q\, \underline{q} \;=\; \boxed{}$$

Teilaufgabe (ii) (3 Punkte)
Berechnen Sie die Inverse B^{-1} der Matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$B^{-1} \;=\; \boxed{}$$

Aufgabe 2.2 (14 Punkte) Der Lösungsweg bzw. die Begründungen sind anzugeben!

Teilaufgabe (a) (10 Punkte)
Gegeben sind eine Matrix A und Vektoren $\underline{b}^1$ und $\underline{b}^2$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}^1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für jedes der linearen Gleichungssysteme

$$A\underline{x} = \underline{b}^1 \qquad \text{und} \qquad A\underline{x} = \underline{b}^2$$

mit $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ die allgemeine Lösung oder stellen Sie Unlösbarkeit fest.

Teilaufgabe (b) (4 Punkte)
Es seien C und D orthogonale Matrizen. Zeigen Sie, dass dann auch das Produkt CD orthogonal ist.
Hinweis: Eine $(n \times n)$- Matrix P heisst orthogonal, falls sie invertierbar ist und $P^{-1} = P^T$ gilt.

AUFGABE 3 (20 Punkte)

Aufgabe 3.1 (6 Punkte) Der Lösungsweg wird nicht angeschaut. Es zählen nur die in die Kästchen eingetragenen Ergebnisse!

Teilaufgabe (i) (3 Punkte)
Berechnen Sie die Determinante $\det C$ der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & -2 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} :$$

$$\det C \quad = \quad \boxed{}$$

Teilaufgabe (ii) (3 Punkte)
Gegeben ist eine (3×3)-Matrix

$$Q = [\ \underline{q}^1\ ,\ \underline{q}^2\ ,\ \underline{q}^3\ ] \text{ mit der Determinante } \det Q = -5,$$

d.h., Q ist spaltenweise aufgeschrieben mit den Spaltenvektoren $\underline{q}^1, \underline{q}^2, \underline{q}^3$. Berechnen Sie die Determinante $\det \widetilde{Q}$ der Matrix

$$\widetilde{Q} = [\ \underline{q}^1\ ,\ (2\underline{q}^1 + 3\underline{q}^3)\ ,\ (\underline{q}^2 + \underline{q}^3)\ ] :$$

$$\det \widetilde{Q} \quad = \quad \boxed{}$$

Aufgabe 3.2 (14 Punkte) Der Lösungsweg bzw. die Begründungen sind anzugeben!

Teilaufgabe (a) (10 Punkte)
Gegegeben ist das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & (t+1)\,x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & & & (t-1)\,x_3 & = & 0\,. \end{array} \qquad (1)$$

mit einem Parameter $t \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie jeweils alle $t \in \mathbb{R}$, für die

(i) das lineare Gleichungssystem (1) eine eindeutige Lösung hat,
(ii) die Lösungsmenge von (1) ein Vektorraum der Dimension 1 ist,
(iii) die Lösungsmenge von (1) ein Vektorraum der Dimension 2 ist,
(iv) der Vektor $\underline{x}^* = (1, 3, -1)^T$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems (1) ist.

Teilaufgabe (b) (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass das sogenannte *dyadische Produkt* $P = \underline{u}\,\underline{v}^T$ von zwei Vektoren

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (a \neq 0) \qquad \text{und} \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (c \neq 0)$$

stets den Rang 1 hat.

AUFGABE 4 (20 Punkte) Der Lösungsweg wird nicht angeschaut. Es zählen nur die in die Kästchen eingetragenen Ergebnisse!

Teilaufgabe 4.1 (4 Punkte)
Tragen Sie Ihre Ergebnisse in die Kästchen ein.

Gegeben sind die symmetrischen (2×2)-Matrizen C und Q sowie ein Vektor $\underline{q} \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie den Gradienten grad $f(\underline{x})$ und die Hesse-Matrix $H(\underline{x})$ der quadratischen Funktion

$$f(\underline{x}) = \underline{x}^T C \underline{x} + \underline{q}^T Q \underline{x}\,.$$

(2 Punkte) $\quad \text{grad } f(\underline{x}) \quad = \quad \boxed{}$

(2 Punkte) $\quad H(\underline{x}) \quad = \quad \boxed{}$

Teilaufgabe 4.2 (3 Punkte)
Tragen Sie Ihr Ergebnis in das Kästchen ein.

Gegeben sind zwei reguläre $(n \times n)-$Matrizen A und B sowie ein Vektor $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$. Finden Sie eine Formel für die Lösung $\underline{x}^*$ des linearen Gleichungssystems

$$AB\underline{x} = B\underline{b}\,,$$

in der (wenn überhaupt) nur die Symbole $\underline{b}$ und A, B, A^{-1}, B^{-1} vorkommen dürfen.

$\underline{x}^* \quad = \quad \boxed{}$

Teilaufgabe 4.3 (3 Punkte)
Kreuzen Sie die richtige Antwort an. Es gibt genau eine richtige Antwortmöglichkeit.

Betrachten Sie die folgenden Aussagen über Vektoren im $\mathbb{R}^3$, wobei $\|\underline{u}\|$ die euklidische Norm eines Vektors $\underline{u}$ bezeichnet:

(i) Für beliebige $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ gilt $\|\underline{u} - \underline{v}\| \leq |\,\|\underline{u}\| - \|\underline{v}\|\,|$.

(ii) Für beliebige $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ gilt $\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2$ genau dann, wenn $\underline{u}^T \underline{v} = 0$.

(iii) Für beliebige $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ gilt $\|\underline{u} - \underline{v}\| = 0$ genau dann, wenn $\underline{u} = \underline{v}$.

Welche der folgenden Antwortmöglichkeiten ist richtig?

1. ☐ Nur (i) ist falsch.
2. ☐ Nur (ii) ist falsch.
3. ☐ Nur (iii) ist falsch.
4. ☐ (i), (ii) und (iii) sind wahr.
5. ☐ Keine der Antworten 1-4 ist richtig.

Teilaufgabe 4.4 (10 Punkte)
Kreuzen Sie die richtigen Antworten an.

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem mit beliebiger rechter Seite

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & = & b_1 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & b_2 \end{array} \qquad \left(\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\right) . \tag{2}$$

Mit

L wird die Lösungsmenge des zugeordneten homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

bezeichnet; offenbar ist L ein Vektorraum. Ferner betrachten wir die Vektoren

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie die richtige Antwort an.

Punktverteilung: Pro Aussage gibt es 2 Punkte bei richtiger Antwort, −2 Punkte bei falscher Antwort und 0 Punkte bei fehlender Antwort.
Die Gesamtpunktzahl der Teilaufgabe kann nicht negativ sein.

	wahr	falsch
Die Menge $X = \{\underline{u}, \underline{v}\}$ ist eine Basis von L.		
Die Menge $Y = \{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$ ist ein Erzeugendensystem von L.		
Die Menge $U = \{\, t(\underline{u} + \underline{v}) \mid t \in \mathbb{R}\,\}$ ist ein Unterraum von L.		
Die Menge $V = \{\, \underline{u} + t\underline{v} \mid t \in \mathbb{R}\,\}$ ist ein Vektorraum.		
Das lineare Gleichungssystem (2) ist für jede rechte Seite $\underline{b}$ lösbar.		