Aufgabe 1 (Vertikalschnitte)

(a) Betrachten Sie die Funktion $f_1 = x_1^2 + x_1 x_2$. Bestimmen Sie den Vertikalschnitt von f_1 ausgehend von $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ in Richtung
  (i) $\mathbf{e}^1$,
  (ii) $\mathbf{e}^2$,
  (iii) der Diagonalen $\mathbf{r}_d = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$?

(b) Betrachten Sie die Funktion $f_2 = 6 - 3x_1 - 2x_2$. Bestimmen Sie den Vertikalschnitt von f_2 ausgehend von $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ in Richtung
  (i) $\mathbf{e}^1$,
  (ii) $\mathbf{e}^2$,
  (iii) der Diagonalen $\mathbf{r}_d = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$?

Lösung:

Definition 9.1.4 - Vertikalschnitte
Sei $f : D \to Z$ eine reelle Funktion in n Variablen. Für einen Punkt $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ und eine Richtung $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ heisst die Funktion

$$f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}} : \{t \in \mathbb{R} \mid \mathbf{x}^0 + t\mathbf{r} \in D\} \to \mathbb{R} \text{ mit } f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{r})$$

Vertikalschnitt von f durch bzw. ausgehend von $\mathbf{x}^0$ in Richtung $\mathbf{r}$. Die Variable des Vertikalschnitts t nennt man Schrittweite. Ist $\mathbf{r} = \mathbf{e}^i$, für $i = 1, \ldots, n$, spricht man auch von senkrechten Vertikalschnitten.

(a) Für $f_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1 x_2$ ist $f_{1\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t) = (x_1^0 + tr_1)^2 + (x_1^0 + tr_1)(x_2^0 + tr_2)$.
  (i) Ist $\mathbf{x}^0 = (0,0)^T$ und $\mathbf{r} = \mathbf{e}^1 = (1,0)^T$, gilt

$$f_{1\mathbf{0},\mathbf{e}^1}(t) = f_1(\mathbf{0} + t\mathbf{e}^1) = f_1\begin{pmatrix} 0 + t \cdot 1 \\ 0 + t \cdot 0 \end{pmatrix} = f_1\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = t^2.$$

  (ii) Ist $\mathbf{x}^0 = (0,0)^T$ und $\mathbf{r} = \mathbf{e}^2 = (0,1)^T$, gilt

$$f_{1\mathbf{0},\mathbf{e}^2}(t) = f_1(\mathbf{0} + t\mathbf{e}^2) = f_1\begin{pmatrix} 0 + t \cdot 0 \\ 0 + t \cdot 1 \end{pmatrix} = 0.$$

  (iii) Ist $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ und $\mathbf{r} = \mathbf{r}_d = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$, gilt

$$f_{1\mathbf{0},\mathbf{r}_d}(t) = f_1(\mathbf{0} + t\mathbf{r}_d) = f_1\begin{pmatrix} 0 + t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 + t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{t^2}{2} = t^2.$$

(b) Für $f_2(\mathbf{x}) = 6 - 3x_1 - 2x_2$ ist $f_{2\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t) = 6 - 3tr_1 - 2tr_2$.

(i) Ist $\mathbf{x}^0 = (0,0)^T$ und $\mathbf{r} = \mathbf{e}^1 = (1,0)^T$, gilt

$$f_{2\mathbf{0},\mathbf{e}^1}(t) = f_2(\mathbf{0}+t\mathbf{e}^1) = f_2\begin{pmatrix} 0+t\cdot 1 \\ 0+t\cdot 0 \end{pmatrix} = 6-3t.$$

(ii) Ist $\mathbf{x}^0 = (0,0)^T$ und $\mathbf{r} = \mathbf{e}^2 = (0,1)^T$, gilt

$$f_{2\mathbf{0},\mathbf{e}^2}(t) = f_2(\mathbf{0}+t\mathbf{e}^2) = f_2\begin{pmatrix} 0+t\cdot 0 \\ 0+t\cdot 1 \end{pmatrix} = 6-2t.$$

(iii) Ist $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ und $\mathbf{r} = \mathbf{r}_d = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$, gilt

$$f_{2\mathbf{0},\mathbf{r}_d}(t) = f_2(\mathbf{0}+t\mathbf{r}_d) = f_2\begin{pmatrix} 0+t\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0+t\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 6-3\frac{t}{\sqrt{2}} - 2\frac{t}{\sqrt{2}} = 6 - \frac{5}{\sqrt{2}}t.$$

Aufgabe 2 (Stetigkeit)

Bestimmen Sie den natürlichen Definitionsbereich der folgenden Funktionen in 2 Variablen und untersuchen Sie die Funktionen auf Stetigkeit.

(a) $f_1(\mathbf{x}) = f_1(x_1,x_2) = \ln(x_1^2 + \sqrt{x_1}\sqrt{x_2})$

(b) $f_2(\mathbf{x}) = f_2(x_1,x_2) = \dfrac{x_1^2+x_1x_2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2+1}$

(c) $f_3(\mathbf{x}) = f_3(x_1,x_2) = \dfrac{x_1^2+x_1x_2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2-1}$

(d) $f_4(\mathbf{x}) = f_4(x_1,x_2) = \ln(x_1^2-x_2^2)$

Lösung:

Aus der Vorlesung ist folgendes bekannt:

Definition 9.1.6 - Stetigkeit einer Funktion

Es sei $f : D \to Z$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Z \subseteq \mathbb{R}$ eine reelle Funktion in n Variablen und $\mathbf{x}^0 \in D$. Man sagt, f ist an der Stelle $\mathbf{x}^0$ stetig, wenn

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0).$$

Die Funktion f heisst stetig, falls f stetig ist für alle $\mathbf{x}^0 \in D$.

Satz 9.1.1 - Verknüpfungen stetiger Funktionen

Sind die beiden reellen Funktionen $f : D \to Z$ und $g : D \to Z$, mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Z \subseteq \mathbb{R}$ stetig, so gilt

- $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $\max\{f,g\}$ und $\min\{f,g\}$ sind stetig auf D,
- $\left(\frac{f}{g}\right)$ ist stetig auf $\{\mathbf{x} \in D \mid g(\mathbf{x}) \neq 0\}$.

Ist h eine stetige reelle Funktion in einer Variablen mit einem Definitionsbereich $g(D)$, so ist die Komposition $h \circ g$ ebenfalls eine reelle Funktion in n Variablen und stetig.

Wie im Fall von reellen Funktionen in einer Variablen verifiziert man die Stetigkeit einer reellen Funktion in mehreren Variablen oft dadurch, dass man die Funktion auf eine einfache Funktion zurückführt. Dabei können wir analog zum Fall $n = 1$ nutzen, dass viele Grundfunktionen, u.a. affinlineare, quadratische, Cobb Douglas und Leontief Funktionen stetig sind.

(a) f_1 ist die Verknüpfung des natürlichen Logarithmus $h(x) = \ln(x)$ mit der Funktion $g(\mathbf{x}) = x_1^2 + \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$,
$$f_1(\mathbf{x}) = (h \circ g)(\mathbf{x}) = h(g(\mathbf{x})).$$
Die Wurzelfunktion ist nur für Argumente die grösser oder gleich 0 sind definiert. Daher ist der natürliche Definitionsbereich von g gegeben durch $D_g = [0, +\infty)^2$. Der natürliche Logarithmus und damit $h(x)$ ist nur für Argumente (echt) grösser als 0 definiert. Da $g(x_1, x_2) \geq 0$ für alle x_1, x_2 und $g(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$, ist der natürliche Definitionsbereich von $h(g(\mathbf{x}))$ gegeben durch $D_{f_1} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 > 0, x_2 \geq 0\right\} = (0, +\infty) \times [0, +\infty)$.
Die Funktion g ist die Summe einer quadratischen Funktion $\mathbf{x} \mapsto x_1^2$ und einer Cobb Douglas Funktion $\mathbf{x} \mapsto x_1^{b_1} x_2^{b_2}$ mit $b_1 = b_2 = 0.5$. Da sowohl quadratische als auch Cobb Douglas Funktionen stetig sind, ist deren Summe und damit auch g stetig. Aus Kapitel 5 wissen wir zudem, dass $h(x) = \ln(x)$ stetig ist. Damit ist auch die Verknüpfung $h \circ g$ stetig.

(b) Die Funktion ist ein Quotient zweier quadratischer Funktionen $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$ und $g(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 1$. Entsprechend ist $D_{f_2} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(\mathbf{x}) \neq 0\right\} = \mathbb{R}^2$.
Die Funktion im Zähler, $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$, ist eine quadratische Funktion. Genauso ist die Funktion im Nenner, $g(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 1$, eine quadratische Funktion, vgl. Definition 9.1.2 aus Serie 9. Quadratische Funktionen sind stetig und daher ist auch der Quotient dieser Funktionen und somit f_2 stetig auf $\mathbb{R}^2$, vgl. Satz 9.1.1.

(c) Die Funktion ist ein Quotient zweier quadratischer Funktionen $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$ und $g(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1$. Entsprechend ist $D_{f_3} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(\mathbf{x}) \neq 0\right\}$.
Die Funktion im Zähler, $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$, ist eine quadratische Funktion. Genauso ist die Funktion im Nenner, $g(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1$, eine quadratische Funktion, vgl. Definition 9.1.2 aus Serie 9. Quadratische Funktionen sind stetig und daher ist auch der Quotient dieser Funktionen, f_3, stetig auf D_{f_3} nach dem Satz zur Verknüpfung stetiger Funktionen, vgl. Satz 9.1.1.

(d) f_4 ist die Verknüpfung des natürlichen Logarithmus $h(x) = \ln(x)$ mit der Funktion $g(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2$,
$$f_4(\mathbf{x}) = (h \circ g)(\mathbf{x}) = h(g(\mathbf{x})).$$
Der natürliche Logarithmus und damit $h(x)$ ist nur für Argumente (echt) grösser als 0 definiert. Da $g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 > 0$ genau dann wenn $x_1^2 > x_2^2$ und somit genau dann wenn $-|x_1| < x_2 < |x_1|$, ist der natürliche Definitionsbereich von $h(g(\mathbf{x}))$ gegeben durch $D_{f_4} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, -|x_1| < x_2 < |x_1|\right\}$.
Die Funktion g ist eine quadratische Funktion und damit auch stetig. Aus Kapitel 5 wissen wir zudem, dass $h(x) = ln(x)$ stetig ist. Damit ist auch die Verknüpfung $h \circ g$ stetig.

Aufgabe 3 (Stetigkeit - Verständnis)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) Das Produkt zweier stetiger Funktionen in mehreren Variablen mit identischem Definitionsbereich D ist stetig auf D. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Der Quotient zweier stetiger Funktionen in mehreren Variablen mit identischem Definitionsbereich D ist stetig auf D. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Jede stetige Funktion ist nach allen Variablen partiell differenzierbar. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Ist eine Funktion nach allen Variablen partiell differenzierbar, so ist sie auch stetig. ☐ wahr ☐ falsch

Lösung:

- Zu (1): Siehe Satz 9.1.1 aus Aufgabe 2. Die Aussage (1) ist wahr.
- Zu (2): Seien $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen in n Variablen. Dann ist die Funktion $\left(\frac{f}{g}\right)$ stetig auf $\{\mathbf{x} \in D \mid g(\mathbf{x}) \neq 0\}$, vgl. Satz 9.1.1 aus Aufgabe 2. Allgemein ist $\{\mathbf{x} \in D \mid g(\mathbf{x}) \neq 0\} \neq D$. Die Aussage (2) ist falsch.
- Zu (3): In der Vorlesung wurde die partielle Ableitung definiert:

Definition 9.2.1 - Partielle Ableitung
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine reelle Funktion $f: D \to Z$ in n Variablen heisst an der Stelle $\mathbf{x}^0 \in D$ partiell nach x_i, $i = 1, \ldots, n$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + \Delta x \cdot \mathbf{e}^i) - f(\mathbf{x}^0)}{\Delta x}$$

existiert. Im Falle der Existenz nennt man den Grenzwert die partielle Ableitung, symbolisch $\frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_i}$. Die Funktion f heisst partiell differenzierbar nach x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, wenn sie an jeder Stelle $\mathbf{x}^0 \in D$ partiell nach x_i differenzierbar ist. Die Funktion mit Abbildungsvorschrift

$$f_{x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$$

nennt man die partielle Ableitung von f nach x_i. Ist eine Funktion f nach allen Variablen $x_i, i = 1, \ldots, n$ differenzierbar, so nennt man f auch partiell differenzierbar.

Aus Stetigkeit folgt nicht (partielle) Differenzierbarkeit. Diese Aussage ist schon bei Funktionen in einer Variablen falsch. So ist beispielsweise die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ stetig auf $\mathbb{R}$, aber nicht nach x differenzierbar in $x = 0$. Die Aussage (3) ist falsch.

- Zu (4): Nicht jede partiell differenzierbare Funktion ist auch stetig. Ein Gegenbeispiel findet man auch im Skript, siehe das Beispiel „Partielle Ableitungen einer unstetigen Funktion“. Die Aussage (4) ist falsch. [1]

Aufgabe 4 (Gradient)

Bestimmen Sie den Gradienten an einer beliebige Stelle $\mathbf{x}^0$ des Definitionsbereiches folgender Funktionen:

(a) $f(\mathbf{x}) = \ln(x_1^2 + x_2^2 + 1), \quad \mathbf{x} \in D_f = \mathbb{R}^2$

(b) $g(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^4 + a^6 - x_1 x_2^3 - 2x_3, \quad a \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x} \in D_g = \mathbb{R}^3$

(c) $b(\mathbf{x}) = \dfrac{1 - e^{-a(x_2 - x_1)}}{a}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\mathbf{x} \in D_b = \mathbb{R}^2$

(d) $p(\mathbf{x}) = c x_1^{0.4} x_2^{0.6}, \quad c \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x} \in D_p = \mathbb{R}^2$.

Lösung:

Definition 9.2.2 - Der Gradient
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f: D \to Z$ eine reelle und an der Stelle $\mathbf{x}^0$ partiell differenzierbare Funktion in n Variablen. Der Vektor

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0) = \nabla f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

heisst Gradient von f an der Stelle $\mathbf{x}^0$.

[1] Aus der Vorlesung kennen wir folgende Definition und folgenden Satz:

Definition 9.2.4 - Stetige partielle Differenzierbarkeit
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \to Z$ eine reelle Funktion in n Variablen. Sind die partiellen Ableitungen f_{x_i} fÃ¼r alle $i = 1, \dots, n$ stetig an der Stelle $\mathbf{x}^0$, so heisst f stetig (partiell) differenzierbar in $\mathbf{x}^0$.
Sind die partiellen Ableitungen f_{x_i} fÃ¼r alle $i = 1, \dots, n$ auf dem gesamten Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig, so heisst f stetig (partiell) differenzierbar.

Satz 9.2.1 - Stetigkeit stetig partiell differenzierbarer Funktionen
Eine stetig partiell differenzierbare reelle Funktion in n Variablen ist stetig.

Wie in Definition 9.2.4 und Satz 9.2.1 gesehen, kann man neben der Existenz der partiellen Ableitungen zusätzlich die Stetigkeit dieser partiellen Ableitungen fordern, um hinreichende Kriterien für die Stetigkeit zu erhalten.

(a)

$$f_{x_1}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} = \frac{\partial(\ln(x_1^2+x_2^2+1))}{\partial x_1} = \frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2+1}$$

$$f_{x_2}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} = \frac{\partial(\ln(x_1^2+x_2^2+1))}{\partial x_2} = \frac{2x_2}{x_1^2+x_2^2+1}$$

$$\implies \operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0) = \nabla f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\mathbf{x}^0) \\ f_{x_2}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x_1^0}{(x_1^0)^2+(x_2^0)^2+1} \\ \frac{2x_2^0}{(x_1^0)^2+(x_2^0)^2+1} \end{pmatrix} = \frac{2}{(x_1^0)^2+(x_2^0)^2+1} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$g_{x_1}(\mathbf{x}) = \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_1} = \frac{\partial(x_1^2+x_2^4+a^6-x_1x_2^3-2x_3)}{\partial x_1} = 2x_1 - x_2^3$$

$$g_{x_2}(\mathbf{x}) = \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_2} = \frac{\partial(x_1^2+x_2^4+a^6-x_1x_2^3-2x_3)}{\partial x_2} = 4x_2^3 - 3x_1x_2^2$$

$$g_{x_3}(\mathbf{x}) = \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_3} = \frac{\partial(x_1^2+x_2^4+a^6-x_1x_2^3-2x_3)}{\partial x_3} = -2$$

$$\implies \operatorname{grad} g(\mathbf{x}^0) = \nabla g(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} g_{x_1}(\mathbf{x}^0) \\ g_{x_2}(\mathbf{x}^0) \\ g_{x_3}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g(\mathbf{x}^0)}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1^0 - (x_2^0)^3 \\ 4(x_2^0)^3 - 3x_1^0(x_2^0)^2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c)

Die Funktion $b(\mathbf{x})$ lässt sich auch schreiben als $b(\mathbf{x}) = a^{-1} - a^{-1}e^{-a(x_2-x_1)}$.

$$b_{x_1}(\mathbf{x}) = \frac{\partial b(\mathbf{x})}{\partial x_1} = \frac{\partial(a^{-1}-a^{-1}e^{-a(x_2-x_1)})}{\partial x_1} = -\frac{a}{a}e^{-a(x_2-x_1)} = -e^{-a(x_2-x_1)}$$

$$b_{x_2}(\mathbf{x}) = \frac{\partial b(\mathbf{x})}{\partial x_2} = \frac{\partial(a^{-1}-a^{-1}e^{-a(x_2-x_1)})}{\partial x_2} = \frac{a}{a}e^{-a(x_2-x_1)} = e^{-a(x_2-x_1)}$$

$$\implies \operatorname{grad} b(\mathbf{x}^0) = \nabla b(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} b_{x_1}(\mathbf{x}^0) \\ b_{x_2}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial b(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial b(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-a(x_2^0-x_1^0)} \\ e^{-a(x_2^0-x_1^0)} \end{pmatrix} = e^{-a(x_2^0-x_1^0)} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d)

$$p_{x_1}(\mathbf{x}) = \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial x_1} = \frac{\partial(c \cdot x_1^{0.4}x_2^{0.6})}{\partial x_1} = c \cdot 0.4x_1^{-0.6}x_2^{0.6} = c \cdot 0.4 \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{0.6}$$

$$p_{x_2}(\mathbf{x}) = \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial x_1} = \frac{\partial(c \cdot x_1^{0.4}x_2^{0.6})}{\partial x_2} = c \cdot 0.6x_1^{0.4}x_2^{-0.4} = c \cdot 0.6 \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{0.4}$$

$$\implies \operatorname{grad} p(\mathbf{x}^0) = \nabla p(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} p_{x_1}(\mathbf{x}^0) \\ p_{x_2}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial p(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot 0.4 \left(\frac{x_2^0}{x_1^0}\right)^{0.6} \\ c \cdot 0.6 \left(\frac{x_1^0}{x_2^0}\right)^{0.4} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (Die Tangentialebene)

(a) Betrachten Sie die Funktion

$$f(\mathbf{x}) = \ln\left(1 + x_1^2 + x_2^2\right), \ \mathbf{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Bestimmen Sie die Tangentialebene von f an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (1,2)^T$.

(b) Betrachten Sie die Funktion

$$f(\mathbf{x}) = \ln(x_1) - x_1 x_2^2, \; \mathbf{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Bestimmen Sie die Tangentialebene von f an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (1,2)^T$.

(c) Betrachten Sie die Funktion

$$f(\mathbf{x}) = x_2 + \sqrt{x_1^3 x_2}, \; \mathbf{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Bestimmen Sie die Tangentialebene von f an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (2,8)^T$.

(d) Betrachten Sie die Funktion

$$f(\mathbf{x}) = \ln(2x_1 + e^{x_2}), \; \mathbf{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Bestimmen Sie die Tangentialebene von f an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (0,0)^T$.

Lösung:

Definition 9.2.3 - Tangentialebene und Tangentialhyperebene
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to Z$ eine partiell differenzierbare reelle Funktion in n Variablen und $\mathbf{x}^0 \in D$. Die Funktion

$$t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0) = f(\mathbf{x}^0) + \nabla f(\mathbf{x}^0)^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$$

beschreibt im Fall $n = 1$ eine Tangente, im Fall $n = 2$ eine Tangentialebene, und allgemein eine Tangentialhyperebene (an den Graphen) von f an der Stelle $\mathbf{x}^0$.

(a) Der Gradient von $f(\mathbf{x}) = \ln\left(1 + x_1^2 + x_2^2\right)$ an der Stelle $\mathbf{x}^0$ berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
f_{x_1}(\mathbf{x}) &= \frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2} &\Rightarrow\quad& f_{x_1}(1,2) = \frac{1}{3} \\
f_{x_2}(\mathbf{x}) &= \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2} &\Rightarrow\quad& f_{x_2}(1,2) = \frac{2}{3} \\
\nabla f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\mathbf{x}^0) \\ f_{x_2}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2} \\ \frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix} &\Rightarrow\quad& \nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Laut Definition 9.2.3 ist die Tangentialebene an den Graphen von $f(\mathbf{x})$ an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (1,2)^T$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = f(1,2) + f_{x_1}(1,2)(x_1 - 1) + f_{x_2}(1,2)(x_2 - 2) &= \ln(6) + \frac{1}{3}(x_1 - 1) + \frac{2}{3}(x_2 - 2) \\
&= \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \ln(6) - \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

(b) Der Gradient von $f(\mathbf{x}) = \ln(x_1) - x_1 x_2^2$ an der Stellte $\mathbf{x}^0$ berechnet sich wie folgt:

$$
\begin{aligned}
f_{x_1}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{x_1} - x_2^2 \quad &\Rightarrow \quad & f_{x_1}(1,2) = -3 \\
f_{x_2}(\mathbf{x}) &= -2x_1x_2 \quad &\Rightarrow \quad & f_{x_2}(1,2) = -4 \\
\nabla f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\mathbf{x}^0) \\ f_{x_2}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1^0} - x_2^0 \\ -2x_1^0x_2^0 \end{pmatrix} \quad &\Rightarrow \quad & \nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Laut Definition 9.2.3 ist die Tangentialebene von $f(\mathbf{x})$ an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (1,2)^T$ gegeben durch

$$
\begin{aligned}
t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = f(1,2) + f_{x_1}(1,2)(x_1 - 1) + f_{x_2}(1,2)(x_2 - 2) &= -4 - 3(x_1 - 1) - 4(x_2 - 2) \\
&= -3x_1 - 4x_2 + 7.
\end{aligned}
$$

(c) Der Gradient von $f(\mathbf{x}) = x_2 + x_1^{\frac{3}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$ an der Stelle $\mathbf{x}^0$ berechnet sich wie folgt:

$$
\begin{aligned}
f_{x_1}(\mathbf{x}) &= \frac{3}{2} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x_1x_2} \quad &\Rightarrow \quad & f_{x_1}(2,8) = \frac{3}{2}\sqrt{2\cdot 8} = 6 \\
f_{x_2}(\mathbf{x}) &= 1 + \frac{1}{2} x_1^{\frac{3}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_1^3}{x_2}} \quad &\Rightarrow \quad & f_{x_2}(2,8) = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2^3}{8}} = \frac{3}{2} \\
\nabla f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\mathbf{x}^0) \\ f_{x_2}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{x_1^0x_2^0} \\ 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x_1^0)^3}{x_2^0}} \end{pmatrix} \quad &\Rightarrow \quad & \nabla f(2,8) = \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Laut Definition 9.2.3 ist die Tangentialebene von $f(\mathbf{x})$ an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (2,8)^T$ gegeben durch

$$
\begin{aligned}
t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = f(2,8) + f_{x_1}(2,8)(x_1 - 2) + f_{x_2}(2,8)(x_2 - 8) &= 16 + 6(x_1 - 2) + \frac{3}{2}(x_2 - 8) \\
&= 6x_1 + \frac{3}{2}x_2 - 8.
\end{aligned}
$$

(d) Der Gradient von $f(\mathbf{x}) = \ln(2x_1 + e^{x_2})$ an der Stelle $\mathbf{x}^0$ berechnet sich wie folgt:

$$
\begin{aligned}
f_{x_1}(\mathbf{x}) &= \frac{2}{2x_1 + e^{x_2}} \quad &\Rightarrow \quad & f_{x_1}(0,0) = \frac{2}{0+1} = 2 \\
f_{x_2}(\mathbf{x}) &= \frac{e^{x_2}}{2x_1 + e^{x_2}} \quad &\Rightarrow \quad & f_{x_2}(0,0) = \frac{1}{0+1} = 1 \\
\nabla f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\mathbf{x}^0) \\ f_{x_2}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} &= \frac{1}{2x_1^0 + e^{x_2^0}} \begin{pmatrix} 2 \\ e^{x_2^0} \end{pmatrix} \quad &\Rightarrow \quad & \nabla f(0,0) = \frac{1}{0 + e^0} \begin{pmatrix} 2 \\ e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Laut Definition 9.2.3 ist die Tangentialebene von $f(\mathbf{x})$ an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (0,0)^T$ gegeben durch

$$
\begin{aligned}
t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = f(0,0) + f_{x_1}(0,0)(x_1 - 0) + f_{x_2}(0,0)(x_2 - 0) &= 0 + 2(x_1 - 0) + 1(x_2 - 0) \\
&= 2x_1 + x_2.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6 (Die Hesse-Matrix)

(a) Betrachten Sie die Funktion $t:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ mit $t(\mathbf{x})=x_1+x_2+x_3$. Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von t an der Stelle $\mathbf{x}^0=(x_1^0,x_2^0)^T$.
(b) Betrachten Sie die Funktion $u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ mit $u(\mathbf{x})=x_1^2+x_2^2+x_3^2$. Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von u an der Stelle $\mathbf{x}^0=(x_1^0,x_2^0)^T$.
(c) Betrachten Sie die Funktion $w:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $w(\mathbf{x})=\frac{1}{4}x_1^2+2x_1+x_1x_2-3x_2+1$. Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von w an der Stelle $\mathbf{x}^0=(x_1^0,x_2^0)^T$.
(d) Betrachten Sie die Funktion $f:(0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x})=-\sqrt{x_1x_2}+\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2$. Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f an der Stelle $\mathbf{x}^0=(x_1^0,x_2^0)^T$.
(e) Betrachten Sie die Funktion $g:(0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$ mit $g(\mathbf{x})=\ln(2x_1+x_2)$. Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von g an der Stelle $\mathbf{x}^0=(x_1^0,x_2^0)^T$.
(f) Betrachten Sie die Funktion $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $h(\mathbf{x})=e^{x_1}-x_1e^{-x_2}$. Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von h an der Stelle $\mathbf{x}^0=(x_1^0,x_2^0)^T$.
(g) Ist die Hesse-Matrix immer symmetrisch?

Lösung:

Definition 9.2.5 - Partielle Ableitung zweiter Ordnung und Hesse-Matrix
Sei f eine partiell differenzierbare reelle Funktion in n Variablen. Ist die partielle Ableitung nach x_i, $f_{x_i}(\mathbf{x})=\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$, partiell differenzierbar nach x_j, so entstehen partielle Ableitungen zweiter Ordnung

$$f_{x_ix_j}(\mathbf{x})=\frac{\partial f_{x_i}(\mathbf{x})}{\partial x_j}=\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j\partial x_i}.$$

Die Matrix, die alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion an einer Stelle $\mathbf{x}^0$ enthält,

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}^0)=H_f(\mathbf{x}^0)=\left(f_{x_ix_j}(\mathbf{x}^0)\right)_{ij}=\begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{x}^0) & f_{x_1x_2}(\mathbf{x}^0) & \dots & f_{x_1x_n}(\mathbf{x}^0)\\ f_{x_2x_1}(\mathbf{x}^0) & f_{x_2x_2}(\mathbf{x}^0) & \dots & f_{x_2x_n}(\mathbf{x}^0)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\mathbf{x}^0) & f_{x_nx_2}(\mathbf{x}^0) & \dots & f_{x_nx_n}(\mathbf{x}^0)\end{pmatrix},$$

nennt man Hesse-Matrix der Funktion f an der Stelle $\mathbf{x}^0$.

(a)

$$\nabla t(\mathbf{x})=\begin{pmatrix} t_{x_1}(\mathbf{x})\\ t_{x_2}(\mathbf{x})\\ t_{x_3}(\mathbf{x})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\implies H_t(\mathbf{x}^0)=\begin{pmatrix} t_{x_1x_1}(\mathbf{x}^0) & t_{x_1x_2}(\mathbf{x}^0) & t_{x_1x_3}(\mathbf{x}^0)\\ t_{x_2x_1}(\mathbf{x}^0) & t_{x_2x_2}(\mathbf{x}^0) & t_{x_2x_3}(\mathbf{x}^0)\\ t_{x_3x_1}(\mathbf{x}^0) & t_{x_3x_2}(\mathbf{x}^0) & t_{x_3x_3}(\mathbf{x}^0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

(b)

$$\nabla u(\mathbf{x})=\begin{pmatrix} u_{x_1}(\mathbf{x})\\ u_{x_2}(\mathbf{x})\\ u_{x_3}(\mathbf{x})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1\\2x_2\\2x_3\end{pmatrix}\implies H_u(\mathbf{x}^0)=\begin{pmatrix} u_{x_1x_1}(\mathbf{x}^0) & u_{x_1x_2}(\mathbf{x}^0) & u_{x_1x_3}(\mathbf{x}^0)\\ u_{x_2x_1}(\mathbf{x}^0) & u_{x_2x_2}(\mathbf{x}^0) & u_{x_2x_3}(\mathbf{x}^0)\\ u_{x_3x_1}(\mathbf{x}^0) & u_{x_3x_2}(\mathbf{x}^0) & u_{x_3x_3}(\mathbf{x}^0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

(c)

$$\nabla w(\mathbf{x})=\begin{pmatrix} w_{x_1}(\mathbf{x})\\ w_{x_2}(\mathbf{x})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x_1+2+x_2\\ x_1-3\end{pmatrix}\implies H_w(\mathbf{x}^0)=\begin{pmatrix} w_{x_1x_1}(\mathbf{x}^0) & w_{x_1x_2}(\mathbf{x}^0)\\ w_{x_2x_1}(\mathbf{x}^0) & w_{x_2x_2}(\mathbf{x}^0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

(d) $f_{x_1}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} + x_1 \implies f_{x_1x_1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x_2}{x_1^3}} + 1, \qquad f_{x_1x_2}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\sqrt{x_1x_2}}$

$f_{x_2}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + x_2 \implies f_{x_2x_1}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\sqrt{x_1x_2}} = f_{x_1x_2}(\mathbf{x}), \qquad f_{x_2x_2}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x_1}{x_2^3}} + 1$

$$H_f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{x}^0) & f_{x_1x_2}(\mathbf{x}^0) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{x}^0) & f_{x_2x_2}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x_2^0}{(x_1^0)^3}} + 1 & -\frac{1}{4\sqrt{x_1^0x_2^0}} \\ -\frac{1}{4\sqrt{x_1^0x_2^0}} & \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x_1^0}{(x_2^0)^3}} + 1 \end{pmatrix}.$$

(e) $g_{x_1}(\mathbf{x}) = \frac{2}{2x_1+x_2} \implies g_{x_1x_1}(\mathbf{x}) = \frac{-4}{(2x_1+x_2)^2}, \qquad g_{x_1x_2}(\mathbf{x}) = \frac{-2}{(2x_1+x_2)^2}$

$g_{x_2}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2x_1+x_2} \implies g_{x_2x_1}(\mathbf{x}) = \frac{-2}{(2x_1+x_2)^2} = g_{x_1x_2}(\mathbf{x}), \qquad g_{x_2x_2}(\mathbf{x}) = \frac{-1}{(2x_1+x_2)^2}$

$$H_g(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} g_{x_1x_1}(\mathbf{x}^0) & g_{x_1x_2}(\mathbf{x}^0) \\ g_{x_2x_1}(\mathbf{x}^0) & g_{x_2x_2}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{(2x_1^0+x_2^0)^2} & \frac{-2}{(2x_1^0+x_2^0)^2} \\ \frac{-2}{(2x_1^0+x_2^0)^2} & \frac{-1}{(2x_1^0+x_2^0)^2} \end{pmatrix}.$$

(f) $h_{x_1}(\mathbf{x}) = e^{x_1} - e^{-x_2} \implies h_{x_1x_1}(\mathbf{x}) = e^{x_1}, \qquad h_{x_1x_2}(\mathbf{x}) = e^{-x_2}$

$h_{x_2}(\mathbf{x}) = x_1e^{-x_2} \implies h_{x_2x_1}(\mathbf{x}) = e^{-x_2} = h_{x_1x_2}(\mathbf{x}), \qquad h_{x_2x_2}(\mathbf{x}) = -x_1e^{-x_2}$

$$H_h(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} h_{x_1x_1}(\mathbf{x}^0) & h_{x_1x_2}(\mathbf{x}^0) \\ h_{x_2x_1}(\mathbf{x}^0) & h_{x_2x_2}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x_1^0} & e^{-x_2^0} \\ e^{-x_2^0} & -x_1^0e^{-x_2^0} \end{pmatrix}.$$

(g) Aus der Vorlesung kennen wir folgenden Satz:

> **Satz 9.2.2 - Symmetrie der Hesse-Matrix (Satz von Schwarz)**
> Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ist die reelle Funktion $f : D \to Z$ in n Variablen zweimal stetig differenzierbar, dann ist die Hesse-Matrix $H_f(\mathbf{x}^0)$ von f an jeder Stelle $\mathbf{x}^0 \in D$ symmetrisch.

Die Hesse-Matrix einer zweimal stetig partiell differenzierbaren Funktion ist an allen Stellen $\mathbf{x}^0$ des Definitionsbereichs symmetrisch. Besitzt eine Funktion keine stetigen zweiten partiellen Ableitungen, muss die Hesse-Matrix nicht symmetrisch sein. Die Hesse-Matrix ist somit nicht immer symmetrisch.

Aufgabe 7 (Hesse-Matrix - Verständnis)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Funktion in 3 Variablen. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

(1) Ist f zweimal stetig nach allen Variablen differenzierbar,
dann ist die dabei entstehende 3×3 Hesse-Matrix symmetrisch. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Ist f eine quadratische Funktion,
so ist die Hesse-Matrix von f eine Diagonalmatrix. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Ist f eine quadratische Funktion,
so ist die Hesse-Matrix unabhängig von der betrachteten Stelle $\mathbf{x}^0$. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Ist f eine affin-lineare Funktion,
so ist die Hesse-Matrix von f die Einheitsmatrix I. ☐ wahr ☐ falsch

Lösung:

- Zu (1): Nach dem Satz 9.2.2 aus Aufgabe 6 für den Fall $n = 3$ ist die Aussage (1) ist wahr.
- Zu (2): Als Gegenbeispiel betrachten wir die quadratische Funktion $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Die Hesse-Matrix $H_f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist keine Diagonalmatrix. Die Aussage (2) ist falsch.
- Zu (3): Da f eine quadratische Funktion ist, gibt es nach Definition 9.1.2 in Serie 9 eine symmetrische 3×3-Matrix A, einen Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c \\ &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{3} b_i x_i + c. \end{aligned}$$

Der Gradient ist daher

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 + b_1 \\ 2a_{21}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3 + b_2 \\ 2a_{31}x_1 + 2a_{32}x_2 + 2a_{33}x_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

und somit ist die Hesse-Matrix an der Stelle $\mathbf{x}^0$ gegeben durch

$$H_f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{pmatrix} = 2A$$

für alle $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^3$. Also ist die Hesse-Matrix unabhängig von der betrachteten Stelle $\mathbf{x}^0$. Die Aussage (3) ist wahr.
- Zu (4): Eine affin-lineare Funktion in 3 Variablen hat die Form

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c \\ &= \sum_{i=1}^{3} b_i x_i + c \end{aligned}$$

mit einem Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ und einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$, vgl. Definition 9.1.2 in Serie 9. Dadurch ist der Gradient konstant, nämlich $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ und somit ist die Hesse-Matrix die Nullmatrix (und nicht wie behauptet die Einheitsmatrix). Die Aussage (4) ist falsch.

Aufgabe 8 (Tangentialebene und das Taylorpolynom)

Betrachten Sie die Funktion $f : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(\mathbf{x}) = \ln(2x_1 + e^{x_2}).$$

(a) Bestimmen Sie die Tangentialebene von f an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (1,0)^T$.
(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 1. Ordnung von f an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (1,0)^T$.
(c) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung von f an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (1,0)^T$.
(d) Berechnen Sie einen Näherungswert für $f(2,1)$ mit Hilfe
 (i) des 1. Taylorpolynoms an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (1,0)^T$,
 (ii) des 2. Taylorpolynoms an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (1,0)^T$.
(e) Vergleichen Sie die Näherungen aus Teilaufgabe (d) mit dem exakten Wert von $f(2,1)$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\mathbf{x}) \\ f_{x_2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2x_1 + e^{x_2}} \begin{pmatrix} 2 \\ e^{x_2} \end{pmatrix} \implies \nabla f(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{2x_1^0 + e^{x_2^0}} \begin{pmatrix} 2 \\ e^{x_2^0} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Laut Definition 9.2.3 aus Aufgabe 5 ist die Tangentialebene von $f(\mathbf{x})$ an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (1,0)^T$ gegeben durch

$$t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = \ln(3) + \frac{2}{3} \cdot (x_1 - 1) + \frac{1}{3}(x_2 - 0) = \frac{2}{3}(x_1 - 1) + \frac{1}{3}x_2 + \ln(3).$$

(b)

Definition 9.2.7 - Taylorpolynome ersten und zweiten Grades
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : D \to Z$ eine reelle Funktion in n Variablen, die an der Stelle $\mathbf{x}^0 \in D$ partiell differenzierbar ist. Die Funktion

$$t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \nabla f(\mathbf{x}^0)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$$

heisst Taylorpolynom erster Ordnung von f an der Stelle $\mathbf{x}^0$.
Existieren an der Stelle $\mathbf{x}^0 \in D$ die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f, so heisst die Funktion

$$t_{2,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \nabla f(\mathbf{x}^0)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^T H_f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$$

Taylorpolynom zweiter Ordnung von f an der Stelle $\mathbf{x}^0$.

Das Taylorpolynom 1. Ordnung beschreibt genau die Tangentialebene, welche wir schon in Teilaufgabe (a) berechnet haben. Somit ist das Taylorpolynom 1. Ordnung von f an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (1,0)^T$ gegeben durch

$$t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = \ln(3) + \frac{2}{3}\cdot(x_1 - 1) + \frac{1}{3}(x_2 - 0) = \frac{2}{3}(x_1 - 1) + \frac{1}{3}x_2 + \ln(3).$$

(c) Laut Definition 9.2.7 ist das Taylorpolynom 2. Ordnung von f an einer Stelle $\mathbf{x}^0$ gegeben durch

$$t_{2,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \nabla f(\mathbf{x}^0)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^T H_f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) = t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^T H_f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0).$$

Wir müssen also die Hesse-Matrix von f bestimmen. Aus dem Gradienten $\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\mathbf{x}) \\ f_{x_2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2x_1+e^{x_2}}\begin{pmatrix} 2 \\ e^{x_2} \end{pmatrix}$ folgt,

$$H_f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{x}^0) & f_{x_1x_2}(\mathbf{x}^0) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{x}^0) & f_{x_2x_2}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{(2x_1^0+e^{x_2^0})^2} & \frac{-2e^{x_2^0}}{(2x_1^0+e^{x_2^0})^2} \\ \frac{-2e^{x_2^0}}{(2x_1^0+e^{x_2^0})^2} & \frac{2x_1^0\cdot e^{x_2^0}}{(2x_1^0+e^{x_2^0})^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aus Teilaufgabe (a) wissen wir, dass $t_{1,\mathbf{x}^0} = \frac{2}{3}(x_1-1) + \frac{1}{3}x_2 + \ln(3)$. Das Taylorpolynom 2. Ordnung von f an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (1,0)^T$ lautet somit

$$\begin{aligned} t_{2,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) =& t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^T H_f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) \\ =& \frac{2}{3}(x_1-1) + \frac{1}{3}x_2 + \ln(3) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^T H_f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) \\ =& \frac{2}{3}(x_1-1) + \frac{1}{3}x_2 + \ln(3) + \frac{1}{2}(x_1-1, x_2)\begin{pmatrix} \frac{-4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1-1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ =& \frac{2}{3}(x_1-1) + \frac{1}{3}x_2 + \ln(3) + \frac{1}{18}(x_1-1, x_2)\begin{pmatrix} -4(x_1-1)-2x_2 \\ -2(x_1-1)+2x_2 \end{pmatrix} \\ =& \frac{2}{3}(x_1-1) + \frac{1}{3}x_2 + \ln(3) + \frac{1}{18}\left(-4(x_1-1)^2 - 4x_2(x_1-1) + 2x_2^2\right) \end{aligned}$$

(d) (i) Mit dem Taylorpolynom 1. Ordnung von f an der Stelle $\mathbf{x^0} = (1,0)^T$ erhalten wir folgende Approximation:

$$f(2,1) \approx t_{1,\mathbf{x}^0}(2,1) = \frac{2}{3}(2-1) + \frac{1}{3} + \ln(3) \approx 2.098612289.$$

(ii) Mit Hilfe des Taylorpolynoms 2. Ordnung von f an der Stelle $\mathbf{x^0} = (1,0)^T$ erhalten wir folgende Approximation:

$$f(2,1) \approx t_{2,\mathbf{x}^0}(2,1) = \frac{2}{3}(2-1) + \frac{1}{3} + \ln(3) - \frac{6}{18} \approx 1.765278955.$$

(e) Der exakte Wert ist $f(2,1) = \ln(4+e) \approx 1.904832442$. Es gilt

$$|\Delta f| = |f(2,1) - t_{1,\mathbf{x}^0}(2,1)| \approx 0.1937798471$$

und

$$|\Delta f| = |f(2,1) - t_{2,\mathbf{x}^0}(2,1)| \approx 0.1395534862.$$

Wie zu erwarten war, approximiert das Taylorpolynom 2. Ordnung den Funktionswert genauer als das Taylorpolynom 1. Ordnung. Jedoch zahlen wir den Preis eines höheren Rechenaufwands.

Aufgabe 9 (Das Taylorpolynom)

(a) Betrachten Sie die Funktion $l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $l(\mathbf{x}) = e^{x_1+2x_2}$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 1. und 2. Ordnung von l an der Stelle $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$.
(b) Betrachten Sie die Funktion $f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = -\sqrt{x_1x_2} + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 1. und 2. Ordnung von f an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (1,1)^T$.
(c) Betrachten Sie die Funktion $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $t(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 1. und 2. Ordnung von t an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (1,0,-1)^T$.
(d) Betrachten Sie die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(\mathbf{x}) = e^{x_1} - x_1e^{-x_2}$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 1. und 2. Ordnung von h an der Stelle $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$.

Lösung:

In Aufgabe 8 haben wir die Definition der Taylorpolynome wiederholt. Für den Spezialfall einer Funktion f in 2 Variablen, gilt dann

$$t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + f_{x_1}(\mathbf{x}^0)(x_1 - x_1^0) + f_{x_2}(\mathbf{x}^0)(x_2 - x_2^0)$$

und

$$\begin{aligned} t_{2,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) =& f(\mathbf{x}^0) + (x_1 - x_0^1)f_{x_1}(\mathbf{x}^0) + (x_2 - x_2^0)f_{x_2}(\mathbf{x}^0) + \\ & \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_1^0)^2 f_{x_1x_1}(\mathbf{x}^0) + 2(x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0)f_{x_1x_2}(\mathbf{x}^0) + (x_2 - x_2^0)^2 f_{x_2x_2}(\mathbf{x}^0)\right] \\ =& t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\left[f_{x_1x_1}(\mathbf{x}^0)(x_1 - x_1^0)^2 + 2f_{x_1x_2}(\mathbf{x}^0)(x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0) + f_{x_2x_2}(\mathbf{x}^0)(x_2 - x_2^0)^2\right] \end{aligned}$$

(a) Es gilt,

$$\nabla l(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} l_{x_1}(\mathbf{x}) \\ l_{x_2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x_1+2x_2} \\ 2e^{x_1+2x_2} \end{pmatrix}$$

$$H_l(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} l_{x_1x_1}(\mathbf{x}) & l_{x_1x_2}(\mathbf{x}) \\ l_{x_2x_1}(\mathbf{x}) & l_{x_2x_2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x_1+2x_2} & 2e^{x_1+2x_2} \\ 2e^{x_1+2x_2} & 4e^{x_1+2x_2} \end{pmatrix}.$$

Ausgewertet an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (0,0)^T$ erhalten wir

$$\nabla l(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$H_l(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Da zudem $l(0,0) = e^0 = 1$ ist, lautet das Taylorpolynom 2. Ordnung

$$t_{2,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = \underbrace{1 + x_1 + 2x_2}_{=t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x})} + \frac{1}{2}\left[1 \cdot x_1^2 + 2 \cdot 2 \cdot x_1x_2 + 4 \cdot x_2^2\right] = 1 + x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2)$$

und das Taylorpolynom 1. Ordnung

$$t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = 1 + x_1 + 2x_2.$$

(b) Es gilt,

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\mathbf{x}) \\ f_{x_2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} + x_1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + x_2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{x}) & f_{x_1x_2}(\mathbf{x}) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{x}) & f_{x_2x_2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x_2}{(x_1)^3}} + 1 & -\frac{1}{4\sqrt{x_1x_2}} \\ -\frac{1}{4\sqrt{x_1x_2}} & \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x_1}{(x_2)^3}} + 1 \end{pmatrix}.$$

Ausgewertet an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (1,1)^T$ erhalten wir

$$\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{1}} + 1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{1}} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{1^3}} + 1 & -\frac{1}{4\sqrt{1\cdot 1}} \\ -\frac{1}{4\sqrt{1\cdot 1}} & \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{1^3}} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Da zudem $f(1,1) = -\sqrt{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ ist, lautet das Taylorpolynom 2. Ordnung

$$\begin{aligned}
t_{2,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) &= \underbrace{0 + \frac{1}{2}(x_1 - 1) + \frac{1}{2}(x_2 - 1)}_{=t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x})} + \frac{1}{2}\left[\frac{5}{4} \cdot (x_1 - 1)^2 + 2 \cdot (-\frac{1}{4}) \cdot (x_1 - 1)(x_2 - 1) + \frac{5}{4} \cdot (x_2 - 1)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}(x_1 - 1) + \frac{1}{2}(x_2 - 1) + \frac{1}{2}\left[\frac{5}{4} \cdot (x_1 - 1)^2 - \frac{1}{2}(x_1 - 1)(x_2 - 1) + \frac{5}{4} \cdot (x_2 - 1)^2\right] \\
&= \frac{5}{8}(x_1^2 + x_2^2 - 0.4x_1x_2 - 0.8x_1 - 0.8x_2)
\end{aligned}$$

und das Taylorpolynom 1. Ordnung

$$t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1 - 1) + \frac{1}{2}(x_2 - 1).$$

(c) Es gilt,

$$\nabla t(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} t_{x_1}(\mathbf{x}^0) \\ t_{x_2}(\mathbf{x}^0) \\ t_{x_3}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow H_t(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} t_{x_1x_1}(\mathbf{x}^0) & t_{x_1x_2}(\mathbf{x}^0) & t_{x_1x_3}(\mathbf{x}^0) \\ t_{x_2x_1}(\mathbf{x}^0) & t_{x_2x_2}(\mathbf{x}^0) & t_{x_2x_3}(\mathbf{x}^0) \\ t_{x_3x_1}(\mathbf{x}^0) & t_{x_3x_2}(\mathbf{x}^0) & t_{x_3x_3}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da zudem $t(1,0,-1) = 0$ ist, lautet das Taylorpolynom 2. Ordnung

$$\begin{aligned} t_{2,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) =& \underbrace{0 + 1(x_1-1) + 1x_2 + 1(x_3+1)}_{=t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x})} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^T H_t(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)}_{=0} \\ =& 1(x_1-1) + 1x_2 + 1(x_3+1) \\ =& x_1 + x_2 + x_3 = t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

was zudem auch dem Taylorpolynom 1. Ordnung entspricht. Das ist wieder die affin-lineare Funktion t selbst.

(d) Es gilt,

$$\nabla h(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} h_{x_1}(\mathbf{x}) \\ h_{x_2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x_1} - e^{-x_2} \\ x_1 e^{-x_2} \end{pmatrix}$$

$$H_h(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} h_{x_1x_1}(\mathbf{x}) & h_{x_1x_2}(\mathbf{x}) \\ h_{x_2x_1}(\mathbf{x}) & h_{x_2x_2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x_1} & e^{-x_2} \\ e^{-x_2} & -x_1^0 e^{-x_2} \end{pmatrix}.$$

Ausgewertet an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (0,0)^T$ erhalten wir

$$\nabla h(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da zudem $h(0,0) = 1$ ist, lautet das Taylorpolynom 2. Ordnung

$$t_{2,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = \underbrace{1 + 0x_1 + 0x_2}_{=t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x})} + \frac{1}{2}\left[1 \cdot x_1^2 + 2 \cdot 1 \cdot x_1x_2 + 0 \cdot x_2^2\right] = 1 + \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2$$

und das Taylorpolynom 1. Ordnung

$$t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = 1.$$

Aufgabe 10 (Produktion)

Gegeben ist folgende Produktionsfunktion f eines Unternehmens:

$$y = f(\mathbf{x}) = f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + \sqrt{x_2x_3} = x_1 + \sqrt{x_2}\sqrt{x_3}$$

mit den Produktionsfaktorquantitäten $x_1,x_2,x_3 \geq 0$ und der Produktquantität $y \geq 0$.

(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen nach x_1, x_2 und x_3 an einer beliebigen Stelle $\mathbf{x}^0$.

(b) Aktuell nutzt das Unternehmen $x_1^0 = 10$, $x_2^0 = 81$ und $x_3^0 = 49$ Einheiten der Produktionsfaktoren. Nutzen Sie die partiellen Ableitungen aus (a) um abzuschätzen, wie sich die Produktionsquantität verändert, wenn x_2 erhöht wird (für kleine x_2).

(c) Wieder nutzt das Unternehmen $x_1^0 = 10$, $x_2^0 = 81$ und $x_3^0 = 49$ Einheiten der Produktionsfaktoren. Wie verändert sich die Produktionsquantität, wenn sich x_1,x_2 und x_3 je um eine Einheit erhöhen? Berechnen Sie diese Änderung exakt und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Näherung, die Sie mit Hilfe des totalen Differentials erhalten.

Lösung:

(a) In Aufgabe 3 haben wir die Definition von partiellen Ableitungen wiederholt. Leiten wir nach x_i, $i=1,2,3$, ab, so müssen die anderen Variablen x_j, $j \neq i$, als Konstanten betrachtet werden:

(i) $f_{x_1}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} = \frac{\partial(x_1+\sqrt{x_2x_3})}{\partial x_1} = 1 \implies f_{x_1}(\mathbf{x}^0) = 1,$

(ii) $f_{x_2}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} = \frac{\partial(x_1+\sqrt{x_2x_3})}{\partial x_2} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x_3}}{\sqrt{x_2}} \implies f_{x_2}(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x_3^0}}{\sqrt{x_2^0}},$

(iii) $f_{x_3}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_3} = \frac{\partial(x_1+\sqrt{x_2x_3})}{\partial x_3} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_3}} \implies f_{x_3}(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x_2^0}}{\sqrt{x_3^0}}.$

(b) Die partielle Ableitung $f_{x_2}(10,81,49)$ ist der Grenzwert von

$$\frac{f(10,81+\Delta x_2,49) - f(10,81,49)}{\Delta x_2}$$

für kleine Δx_2. Multipliziert man beide Seiten mit Δx_2 ergibt sich

$$\Delta x_2 f_{x_2}(10,81,49) \approx f(10,81+\Delta x_2,49) - f(10,81,49).$$

Nach einer Erhöhung Δx_2 des Produktionsfaktors x_2 ist die Produktionsquantität also um

$$f(10,81+\Delta x_2,49) - f(10,81,49) \approx \Delta x_2 f_{x_2}(10,81,49) = \Delta x_2 \frac{1}{2}\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} = \Delta x_2 \frac{7}{18}.$$

Einheiten gestiegen.

(c)

> **Definition 9.2.8 - Totales Differential**
> Eine stetig partiell differenzierbare reelle Funktion f in n Variablen nennt man total differenzierbar. Für $\Delta\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ heisst dann der Ausdruck $(\nabla f(\mathbf{x}^0))^T \Delta\mathbf{x}$ auch totales Differential von f in $\mathbf{x}^0$.

Die Differenz der Quantitäten $\mathbf{x}^0 = (10,81,49)^T$ zu $\mathbf{x} = (11,82,50)^T$, ist $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 = (1,1,1)$. Das totale Differential ist eine Näherung für die Veränderung der Produktquantität, wenn man an Stelle der Produktionsfaktorquantitäten $x_1^0 = 10, x_2^0 = 81$ und $x_3^0 = 49$ nun die Produktionsfaktorquantitäten $x_1 = 11, x_2 = 82$ und $x_3 = 50$ benutzt. Laut Definition 9.2.8 ist es gegeben durch

$$\begin{aligned}(\nabla f(\mathbf{x}^0))^T \Delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\mathbf{x}^0) \\ f_{x_2}(\mathbf{x}^0) \\ f_{x_3}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix}^T \Delta\mathbf{x} = \left(1, \quad \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{49}{81}}, \quad \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{81}{49}}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \left(1, \quad \tfrac{7}{18}, \quad \tfrac{9}{14}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 + \frac{7}{18} + \frac{9}{14} \\ &= \frac{128}{63}\end{aligned}$$

und daher lässt sich die Veränderung der Produktionsquantität abschätzen durch

$$\Delta f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) \approx \frac{128}{63} \approx 2.031746.$$

Der exakte Wert ist $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = 11 + \sqrt{82 \cdot 50} - 10 - 9 \cdot 7 = -62 + 10\sqrt{41} \approx 2.031242$. Die Näherung ist also bis auf drei Nachkommastellen genau.

Aufgabe 11 ((#) Verallgemeinerte Kettenregel)

Sei $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^5 - 9x_1x_2$ und $g(t) = (g_1(t), g_2(t)) = (t^4, 3t)$. Sei zudem $h = f \circ g$.
Berechnen Sie $h'(1) = (f \circ g)'(1)$.

Lösung:

Satz 10.2.4 - Verallgemeinerte Kettenregel
Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $Z_i \subseteq \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$, $g : D \to Z_1 \times \cdots \times Z_n \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Funktion mit Abbildungsvorschrift

$$g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix},$$

wobei die Funktionen $g_i : D \to Z_i$ an der Stelle $t_0 \in D$ differenzierbare Funktionen sind, und $f : g(D) \to Z \subseteq \mathbb{R}$ eine total differenzierbare Funktion. Dann ist die Komposition $h = f \circ g : D \to Z$ an der Stelle t_0 differenzierbar und hat die erste Ableitung

$$\begin{aligned} h'(t_0) = (f \circ g)'(t_0) = \nabla f(g(t_0))^T \begin{pmatrix} g_1'(t_0) \\ \vdots \\ g_n'(t_0) \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(g(t_0)) \cdot g_i'(t_0) \\ &= f_{x_1}(g(t_0)) \cdot g_1'(t_0) + \cdots + f_{x_n}(g(t_0)) \cdot g_n'(t_0). \end{aligned}$$

Wir können $h'(1) = (f \circ g)'(1)$ mit Hilfe der verallgemeinerten Kettenregel berechnen. Es gilt,

$$\begin{aligned} g_1'(t) &= 4t^3 \\ g_2'(t) &= 3 \\ f_{x_1}(\mathbf{x}) &= 2x_1 - 9x_2 \\ f_{x_2}(\mathbf{x}) &= 5x_2^4 - 9x_1. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} h'(t) = (f \circ g)'(t) &= \nabla f(g(t))^T \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \end{pmatrix} \\ &= (2 \cdot t^4 - 9 \cdot 3t) \cdot 4t^3 + (5 \cdot (3t)^4 - 9 \cdot t^4) \cdot 3. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit $h'(1) = (2 - 9 \cdot 3) \cdot 4 + (5 \cdot 3^4 - 9) \cdot 3 = 1088$.