Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät der Universität Zürich
Professur Mathematik für Ökonomen
Prof. Dr. Diethard Klatte

PRÜFUNG IN MATHEMATIK II (BACHELORSTUDIUM FS 2015)

27. Mai 2015

AUFGABE 1 (15 Punkte)

Aufgabe 1.1 (4 Punkte) Der Lösungsweg wird nicht angeschaut. Es zählen nur die in die Kästchen eingetragenen Ergebnisse!

Teilaufgabe (i) (2 Punkte)
Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x}\ \mathrm{d}x \quad = \quad \boxed{}$$

Teilaufgabe (ii) (2 Punkte)
Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $g(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$h(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}\,.$$

$$\text{Stammfunktion von } h \quad = \quad \boxed{}$$

Aufgabe 1.2 (11 Punkte) Der Lösungsweg bzw. die Begründungen sind anzugeben!

Teilaufgabe (a) (5 Punkte)
Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^1 e^{1-|x|}\ dx\,.$$

Teilaufgabe (b) (6 Punkte)
Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\int_1^2 \left(\int_0^1 (2x + \ln y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\,.$$

AUFGABE 2 (15 Punkte)

Aufgabe 2.1 (4 Punkte) Der Lösungsweg wird nicht angeschaut. Es zählen nur die in die Kästchen eingetragenen Ergebnisse!

Bewertung: Es gibt es pro Frage 1 bzw. -1 Punkt bei richtiger bzw. falscher Antwort sowie 0 Punkte bei leerem Kästchen. Die Gesamtpunktzahl von Aufgabe 2.1 kann nicht negativ sein.

Gegeben ist das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & & & - & 2x_3 & + & x_4 = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & 3x_4 = & 0 \end{array} \tag{1}$$

sowie die Vektoren

$$\underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{v}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen über die Lösungsmenge L des linearen Gleichungssystems (1) wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie die richtige Antwort an:

	wahr	falsch
Die Dimension von L ist gleich 2.		
Die Menge $X = \{\underline{v}^1, \underline{v}^2\}$ ist eine Basis von L.		
Die Menge $Y = \{\underline{v}^1, \underline{v}^3\}$ ist ein Erzeugendensystem von L.		
Die Menge $Z = \{\underline{v}^3\}$ ist eine Basis von L.		

Aufgabe 2.2 (11 Punkte) Der Lösungsweg bzw. die Begründungen sind anzugeben!

Überprüfen Sie, ob die 3 folgenden Matrizen invertierbar sind und berechnen Sie gegebenenfalls die Inverse:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = A^T.$$

AUFGABE 3 (15 Punkte)

Aufgabe 3.1 (4 Punkte) Der Lösungsweg wird nicht angeschaut. Es zählen nur die in die Kästchen eingetragenen Ergebnisse!

Bewertung: 4 Punkte bei richtiger Lösung, 2 Punkte bei 1 Fehler, 0 Punkte sonst.

Gegeben sind die Matrizen A und B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme, falls möglich (andernfalls schreibe man "unmöglich"),

das Produkt AB $=$ $\boxed{}$

Aufgabe 3.2 (11 Punkte) Der Lösungsweg bzw. die Begründungen sind anzugeben!

Teilaufgabe (a) (7 Punkte) Berechnen Sie die Determinanten

$$\mu = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \nu = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Teilaufgabe (b) (4 Punkte) Bestimmen Sie alle invertierbaren (2×2)-Matrizen der Form

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R}), \quad \text{so dass} \quad B = B^{-1} \quad \text{und} \quad \det B = -1 \text{ gilt,}$$

wobei $\det B$ die Determinante von B bezeichnet.

AUFGABE 4 (15 Punkte)

Bei allen Teilaufgaben wird der Lösungsweg nicht angeschaut. Es zählen nur die in die Kästchen eingetragenen Ergebnisse!

Aufgabe 4.1 (2 Punkte)

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{4\sin(2x)}{3x} = \boxed{}$$

Aufgabe 4.2 (2 Punkte)

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem (LGS) mit 2 Gleichungen in 4 Variablen

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \quad x_4 = 1 \ .$$

Die allgemeine Lösung dieses LGS lautet:

$$\boxed{}$$

Aufgabe 4.3 (4 Punkte, je 2 Punkte pro Kästchen)

Gegeben ist eine (4×4)-Matrix

$$A = [\ \underline{a}^1\ ,\ \underline{a}^2\ ,\ \underline{a}^3\ ,\ \underline{a}^4\ ] \ \text{ mit der Determinante } \ \det A = 3,$$

d.h., A ist spaltenweise aufgeschrieben mit den Spaltenvektoren $\underline{a}^1, \underline{a}^2, \underline{a}^3, \underline{a}^4$.

Berechnen Sie die Determinanten $\det B$ und $\det C$ der Matrizen

$$B = 2A^T \qquad \text{und} \qquad C = [\,\underline{a}^1\ ,\ (-5\underline{a}^2 + 3\underline{a}^3)\ ,\ \underline{a}^3\ ,\ \underline{a}^4\,]\,.$$

$$\det B = \boxed{}$$

$$\det C = \boxed{}$$

Aufgabe 4.4 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Inverse Q^{-1} einer $(n \times n)$-Matrix Q mit $Q^2 + Q = I$, wobei I die $(n \times n)$-Einheitsmatrix ist:

$Q^{-1} \quad = \quad \boxed{}$

Aufgabe 4.5 (2 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum, in dem eine Norm $\|\cdot\|$ definiert ist.

Man bestimme die <u>kleinste</u> Zahl α, so dass

$$\|3\underline{a} - 2\underline{b}\| \leq \alpha$$

für alle Vektoren $\underline{a}, \underline{b} \in V$ mit $\|\underline{a}\| = 11$ und $\|\underline{b}\| = 7$ gilt.

$\alpha \quad = \quad \boxed{}$

Aufgabe 4.6 (3 Punkte)

Bewertung: Es gibt es pro Frage 1 bzw. -1 Punkt bei richtiger bzw. falscher Antwort sowie 0 Punkte bei leerem Kästchen. Die Gesamtpunktzahl von Aufgabe 4.6 kann nicht negativ sein.

Gegeben ist eine symmetrische (3×3)-Matrix C, die eine quadratische Funktion

$$f(\underline{x}) = \underline{x}^T C \underline{x}\,, \ \underline{x} \in \mathbb{R}^3\,,$$

definiert. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie die richtige Antwort an:

	wahr	falsch
Sind alle Eigenwerte von C grösser oder gleich 0, so ist f konvex.		
Ist λ ein Eigenwert von C, so hat die Matrix $C - \lambda I$ den Rang 3.		
Ist C negativ definit, so gilt $\det C < 0$.		

Hinweis: I ist die (3×3)-Einheitsmatrix, $\det C$ ist die Determinante von C.