Musterlösung

Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler - FS 2016

Universität Zürich[UZH]

Liebe Prüflinge,

in dieser Prüfung können maximal **60 Punkte** erzielt werden.

Bei Fragen **ohne vorgegebene Antwortmöglichkeiten muss der Lösungsweg angegeben werden**. Bei Fragen **mit vorgegebenen Antwortmöglichkeiten muss kein Lösungsweg angegeben werden**. Bei letzteren müssen Sie die korrekten Antwortmöglichkeiten durch Ankreuzen auswählen. Markieren Sie bitte Ihre Auswahl in der folgenden Weise: ○⊗○ .

Wenn Sie eine Auswahl korrigieren möchten, füllen Sie bitte die fälschlich markierte Antwortmöglichkeit **vollständig** aus, ungefähr so: ○●⊗ . Falls Sie Ihre Auswahl **nochmals korrigieren** möchten, dann **füllen Sie alle markierten Antwortmöglichkeiten der Frage vollständig aus** und **kennzeichnen Ihre neue Auswahl durch Pfeile auf die jeweiligen Kreise/Quadrate**.

Bei Aufgaben, die aus Fragen des Typs **'Richtig oder Falsch'** bestehen, gibt es bei jeder Frage nur 2 Antwortoptionen ('richtig' und 'falsch'). Die Antwortmöglichkeiten sind mit Kreisen versehen. In jeder Frage ist genau eine Antwortmöglichkeit korrekt. Sie erhalten **1 Punkt bei korrekter Auswahl**, **-1 Punkt bei inkorrekter Auswahl** und **0 Punkte bei keiner Auswahl. Die Gesamtpunktzahl in einer solchen Aufgabe** ergibt sich als **Summe der Punkte der einzelnen Fragen** und ist **nie negativ**.

Bei anderen Aufgaben gibt es drei Fragetypen, die auftreten können; Freitextfragen, Einfachauswahl und/oder Mehrfachauswahl.

- **'Freitextfragen'** erkennen Sie daran, dass keine Antwortmöglichkeiten zur Verfügung stehen. Bei diesen Fragen sollen Sie Ihre Lösung und Ihren **Lösungsweg in den Kasten direkt unter der Frage eintragen,** da auch der Lösungsweg bewertet wird. Die Fünfecke unter den Freitextfragen werden nur von der Korrektorin bzw. dem Korrektor ausgefüllt; **wenn Sie ein Fünfeck selbst markieren, erhalten Sie für die betreffende Frage 0 Punkte**.
- Bei Fragen des Typs **'Einfachauswahl'** ist **genau eine Antwort korrekt**. Sie erkennen diese Fragen daran, dass die Antwortmöglichkeiten mit Kreisen versehen sind. Sie erhalten **volle Punktzahl bei korrekter Auswahl** und **0 Punkte bei inkorrekter Auswahl** oder keiner Auswahl.
- Bei Fragen des Typs **'Mehrfachauswahl'** ist eine beliebige, Ihnen unbekannte Anzahl $d \geq 1$ der Antwortmöglichkeiten korrekt. Sie erkennen diese Fragen daran, dass die Antwortmöglichkeiten mit Quadraten versehen sind. Sind bei einer solchen Frage k Punkte zu erreichen, so erhalten Sie für **jedes korrekte Kreuz** k/d **Punkte** und für **jedes inkorrekte Kreuz -1 Punkt**. Die **erreichte Punktzahl** bei einer solchen Frage ist dabei **nie negativ**.

Platz für Nebenrechnungen gibt es am **Ende jeder Seite**, auf der **Rückseite dieses Deckblatts** und auf **den letzten zwei Seiten** der Klausur. Antworten in diesem Bereich werden **nicht bewertet**. Die Antworten der Freitextfragen sind in die dafür vorgesehenen Kästen einzutragen.

Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler - FS 2016

Platz für Nebenrechnungen

Aufgabe 1.1 - Einfachauswahl (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2\cos(x)$.

Welche der folgenden Funktionen ist eine Stammfunktion von f?

○ $x^2\sin(x) - 2x\sin(x) + 2\cos(x)$	● $x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x)$
○ $\frac{1}{2}x^2\sin(x) - 2x\cos(x) + 2\sin(x)$	○ $\frac{1}{2}x^2\sin(x) - 2x\sin(x) + 2\cos(x)$
○ $\frac{1}{2}x^2\cos(x) + 2x\sin(x) - 2\cos(x)$	○ $x^2\cos(x) - 2x\cos(x) + 2\sin(x)$
○ $2x^2\cos(x) + 2x\sin(x) - 2\cos(x)$	○ Keine davon.

Platz für Nebenrechnungen

Aufgabe 1.2 - Einfachauswahl (3 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine überall stetig differenzierbare Funktion und f' die Ableitung von f.

Bestimmen Sie		
$\int f'(x)\,(1+2f(x))\,dx.$	○ $f^2(x)+2f(x)+c$	● $f(x)\,(1+f(x))+c$
	○ $f^2(x)+1+c$	○ $\frac{1}{2}f^2(x)+f(x)+c$
	○ $f(x)\,(1+2f(x))+c$	○ $(1+2f(x))^2+c$
	○ $2f(x)\,(1+2f(x))+c$	○ Keine davon.

Platz für Nebenrechnungen

Aufgabe 1.3 - Einfachauswahl (9 Punkte)

a) Was ist der Wert des Integrals $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} x(x+2y)\,dy\,dx$?	○ $-\frac{2}{3}$ ○ $-\frac{1}{2}$ ○ $-\frac{1}{3}$ ○ 0 ○ $\frac{1}{3}$ ○ $\frac{1}{2}$ ● $\frac{2}{3}$ ○ Keiner davon.
b) Was ist der Wert des Integrals $\int_{-1}^{1} \sin(x)\,\lvert\sin(x)\rvert\,dx$?	○ $-\pi$ ○ $-\frac{\pi}{2}$ ○ $-\frac{\pi}{3}$ ● 0 ○ $\frac{\pi}{3}$ ○ π ○ 2π ○ Keiner davon.
c) Was ist der Wert des Integrals $\int_{-\infty}^{1} \exp(1-\lvert x\rvert)\,dx$?	○ 1 ○ e ● $2e-1$ ○ e^2-1 ○ e^2 ○ $2e^2-1$ ○ Existiert nicht. ○ Keiner davon.

Platz für Nebenrechnungen

Aufgabe 1.4 - Freitext (2 Punkte)

Sei $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Bestimmen Sie $\int_0^1 f(x)\,dx$.

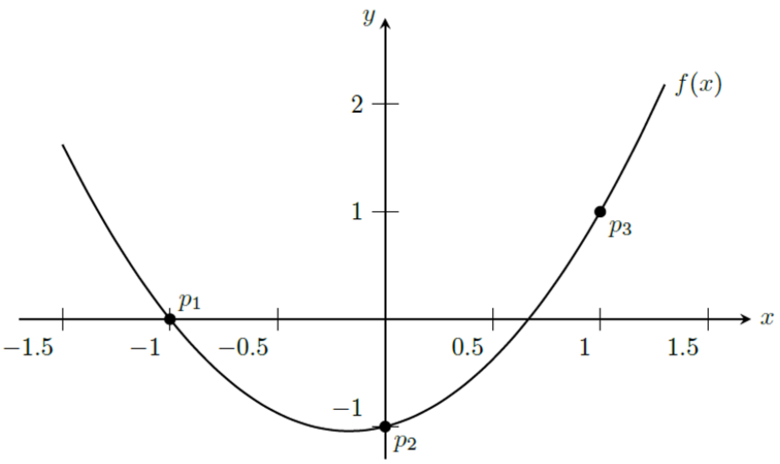
$$\lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 x^{-1/2}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \left(\frac{1}{(1-1/2)} x^{(1-1/2)}\Big|_a^1 \right) = \lim_{a\to 0^+} \left(\frac{1}{1/2} x^{1/2}\Big|_a^1 \right)$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \left(2x^{1/2}\Big|_a^1 \right) = \lim_{a\to 0^+} 2 \cdot (1 - a^{1/2}) = 2 - \lim_{a\to 0^+} 2a^{1/2} = 2 - 0 = 2.$$

Platz für Nebenrechnungen

Aufgabe 2.1 - Freitext (6 Punkte)

Gegeben ist eine Parabel $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ mit $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.
Gesucht sind die Koeffizienten (a_0, a_1, a_2) so, dass die Parabel durch die Punkte $p_1 = (-1, 0)$, $p_2 = (0, -1)$ und $p_3 = (1, 1)$ geht.



a) Geben Sie das zu lösende lineare Gleichungssystem an.

Für jeden Punkt $p_i = (x_i, y_i)$ der Parabel gilt $y_i = f(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2$, mit den Unbekannten a_0, a_1, a_2.
Einsetzen der drei Punkte p_i führt zum folgenden LGS:

$$\begin{array}{llll} a_0 & -a_1 & +a_2 & = 0 \\ a_0 & & & = -1 \\ a_0 & +a_1 & +a_2 & = 1 \end{array}$$

b) Lösen Sie das System aus Teilaufgabe a)

Das LGS lässt sich z.B. mit Hilfe des folgenden Gauss-Algorithmus lösen:

	a_0	a_1	a_2	b	
(1)	1	-1	1	0	
(2)	1	0	0	-1	
(3)	1	1	1	1	
(4)	1	-1	1	0	
(5)	0	1	-1	-1	(2) - (1)
(6)	0	2	0	1	(3) - (1)
(7)	1	0	0	-1	(4) + (5)
(8)	0	1	-1	-1	
(9)	0	0	2	3	(6) - 2(5)
(10)	1	0	0	-1	
(11)	0	1	0	0.5	(8) + 0.5(9)
(12)	0	0	1	1.5	(9):2

Hieraus lassen sich die Koeffizienten ablesen: $a_0 = -1$, $a_1 = 0.5$ *und* $a_2 = 1.5$.

Platz für Nebenrechnungen

Aufgabe 2.2 - Mehrfachauswahl (8 Punkte)

Gegeben ist das inhomogene LGS

$$\begin{array}{rrrrl} 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & +3x_4 & =4 \\ & x_2 & -2x_3 & +2x_4 & =6 \\ & x_2 & +ux_3 & -ux_4 & =2v \end{array}$$

mit $u, v \in \mathbb{R}$ und Lösungsmenge $\mathbb{L}$.

a) Für welche der folgenden Werte von *(u, v)* gilt $\mathbb{L} = \{\}$?	■ $(-2, -3)$	□ $(-2, 3)$	■ $(-2, -2)$	□ $(2, 2)$
	□ $(2, -3)$	□ $(2, 3)$	□ $(0, 0)$	□ $(3, 3)$
b) Für welche der folgenden Werte von *(u, v)* gilt $\dim(\mathbb{L}) = 1$?	□ $(-2, -3)$	□ $(-2, 3)$	□ $(-2, -2)$	■ $(2, 2)$
	■ $(2, -3)$	■ $(2, 3)$	■ $(0, 0)$	■ $(3, 3)$

Platz für Nebenrechnungen

Aufgabe 3.1 - Richtig oder Falsch? (5 Punkte)

Gegeben sind die beiden linearen Unterräume $L = \{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 | x_1 + 3x_2 = 0, x_3 = 0 \}$ und $M = \{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 | x_1 + 3x_2 = 0 \}$.
Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist ein Erzeugendensystem von L.	● richtig	○ falsch
b) $\left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis von L.	○ richtig	● falsch
c) Sei V ein beliebiges Erzeugendensystem von L. Dann ist V auch eine Basis von L.	○ richtig	● falsch
d) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis von M.	○ richtig	● falsch
e) $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ ist ein Erzeugendensystem von M.	○ richtig	● falsch

Platz für Nebenrechnungen

Aufgabe 3.2 - Mehrfachauswahl (4 Punkte)

Gegeben sei der lineare Unterraum

$$U = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \text{ des } \mathbb{R}^3.$$

Welche der folgenden Mengen von Vektoren stellen eine Basis von U dar?

- □ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$
- □ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$
- ■ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$
- ■ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$
- □ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- ■ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$
- ■ $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$
- □ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

Platz für Nebenrechnungen

Aufgabe 3.3 - Freitext (3 Punkte)

Gegeben seien die quadratische, symmetrische Matrix

$M = \begin{pmatrix} -1 & b \\ b & 3 \end{pmatrix}$ der Ordnung 2 und $b \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die beiden Eigenwerte λ_1 und λ_2 der Matrix M in Abhängigkeit von b.

Die Matrix $M - \lambda I$ muss singulär sein, ihre Determinante also gleich Null. Wir bestimmen mit Hilfe der Determinante von $M - \lambda I$ die charakteristische Gleichung von M:

$$\det\left(\begin{pmatrix} -1 & b \\ b & 3 \end{pmatrix} - \lambda \mathrm{I}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} -1 & b \\ b & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} -1-\lambda & b \\ b & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) = (-1-\lambda)(3-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 - b^2 = 0.$$

Wir lösen die charakteristische Gleichung nach λ auf:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 - b^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-3-b^2)}}{2} = 1 \pm \sqrt{4+b^2}.$$

Folglich sind $\lambda_1 = 1 + \sqrt{4+b^2}$ und $\lambda_2 = 1 - \sqrt{4+b^2}$ die beiden Eigenwerte der Matrix M in Abhängigkeit von b.

Platz für Nebenrechnungen

Aufgabe 3.4 - Einfachauswahl (3 Punkte)

Weiterhin gegeben seien die quadratische, symmetrische Matrix

$M = \begin{pmatrix} -1 & b \\ b & 3 \end{pmatrix}$ der Ordnung 2 und $b \in \mathbb{R}$.

Für welchen Wert von b sind die beiden Eigenwerte von M, λ_1 *und* λ_2, positiv?	○ $b < -4$ ○ $b < -3$ ○ $b < -2$ ○ $b = 0$ ○ $b > 2$ ○ $b > 3$ ○ $b > 4$ ● Keinen davon.

Platz für Nebenrechnungen

Aufgabe 4.1 - Richtig oder Falsch? (5 Punkte)

Gegeben sind die quadratischen Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ der Ordnung 3, sowie die quadratische Matrix $C = A + B$ der Ordnung 3.

Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

a) A besitzt eine Inverse.	● richtig	○ falsch
b) B besitzt eine Inverse.	○ richtig	● falsch
c) C besitzt eine Inverse.	● richtig	○ falsch
d) $A \cdot B$ ist eine quadratische Matrix der Ordnung 3.	● richtig	○ falsch
e) $A \cdot B$ ist eine symmetrische (3×3)-Matrix.	○ richtig	● falsch

Platz für Nebenrechnungen

Aufgabe 4.2 - Einfachauswahl (4 Punkte)

Weiterhin gegeben sind die quadratischen Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ der Ordnung 3.

a) Was ist der Wert von $\det(A)$?	○ -2	○ -1	○ 0	● 2
	○ 4	○ 7	○ 8	○ Keiner davon.
b) Was ist der Wert von $\det(B)$?	○ -2	○ -1	● 0	○ 2
	○ 4	○ 7	○ 8	○ Keiner davon.

Platz für Nebenrechnungen

Aufgabe 4.3 - Richtig oder Falsch? (5 Punkte)

Gegeben sind die Matrizen

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} a & b & c & 1 \\ d & e & f & 2 \\ g & h & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$$

und es sei $\det(C) = 2$.

Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

a) C ist invertierbar.	● richtig	○ falsch
b) $\operatorname{rang}(C) = \operatorname{rang}(D)$.	○ richtig	● falsch
c) $\operatorname{rang}(D) = 4$.	● richtig	○ falsch
d) $\det(D) = 2\det(C)$.	● richtig	○ falsch
e) D ist eine reguläre Matrix.	● richtig	○ falsch

Platz für Nebenrechnungen

Platz für Nebenrechnungen

Platz für Nebenrechnungen