7. Lineare Gleichungssysteme

In diesem Kapitel definieren wir, was ein lineares Gleichungssystem ist und stellen ein Rechenschema vor, mithilfe dessen alle Lösungen eines linearen Gleichungssystems bestimmt werden können. Nach der Einführung des Rechenschemas werden wir geometrische Interpretationen linearer Gleichungssysteme vorstellen und die Lösungsmengen mithilfe des sogenannten Rangs einer Matrix charakterisieren.

7.1 Gleichungssysteme

Unter einer Gleichung versteht man eine Aussage über die Gleichheit zweier Terme, die mithilfe des Gleichheitszeichens ("=") symbolisiert wird. Formal hat eine Gleichung die Gestalt:

$$\underbrace{\text{Term 1}}_{\text{linke Seite}} = \underbrace{\text{Term 2}}_{\text{rechte Seite}} .$$

Gleichungen sind entweder wahr bzw. erfüllt oder falsch bzw. nicht erfüllt. Die Gleichung $0 = 0$ ist beispielsweise stets wahr, die Gleichung $1 = 0$ ist stets falsch. Wenn Term 1 oder Term 2 von einer oder mehreren Variablen abhängig ist, hängt es von den konkret eingesetzten Werten der Variablen ab, ob die Gleichung wahr oder falsch ist. Beispielsweise ist die Gleichung $x^2 = 4$ wahr, wenn x den Wert 2 oder den Wert -2 hat, sonst falsch. Die Werte der Variablen, für die eine Gleichung erfüllt ist, heissen Lösungen der Gleichung.

7.1.1 Die Lösungsmenge eines Gleichungssystems

Ziele dieses Unterkapitels

- Was ist ein Gleichungssystem?
- Was ist die Lösungsmenge eines Gleichungssystems?
- Wann heissen zwei Gleichungssysteme äquivalent?

Allgemein bezeichnet man eine Menge von Gleichungen mit Variablen als ein Gleichungssystem.

Definition 7.1.1 — Gleichungssystem.
Eine Menge von m Gleichungen mit n Variablen (Unbekannten) $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ heisst Gleichungssystem. Ein Vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ heisst Lösung des Gleichungssystems, wenn alle m Gleichungen für diese Werte $x_1, \ldots, x_n$ erfüllt sind.

Eine Lösung eines Gleichungssystems erfüllt alle Gleichungen simultan. Gleichungssysteme müssen keine Lösung haben, sie können aber auch mehr als eine Lösung haben. Die Menge aller Lösungen eines Gleichungssystems nennt man die Lösungsmenge $\mathbb{L}$.

Definition 7.1.2 — Lösungsmenge.
Die Menge $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{R}^n$ aller Lösungen eines Gleichungssystems heisst Lösungsmenge oder Lösungsraum des Gleichungssytems. Ist $\mathbb{L} \neq \{\}$, so heisst das Gleichungssystem konsistent bzw. lösbar, andernfalls inkonsistent bzw. unlösbar.

Im folgenden Beispiel stellen wir verschiedene Gleichungssysteme vor, die sehr unterschiedliche Lösungsmengen haben.

■ Beispiel 7.1.1 — Gleichungssysteme.
Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (x_1)^2 &= 4 \\ (x_2)^2 &= 9 \\ x_1 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

hat keine Lösung. Denn ein Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ ist nur dann eine Lösung der ersten Gleichung, wenn $x_1 = -2$ oder $x_1 = 2$. Ein Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ ist nur dann eine Lösung der zweiten Gleichung, wenn $x_2 = -3$ oder $x_2 = 3$. Ein Vektor $\mathbf{x}$ ist eine Lösung der dritten Gleichung $x_1 x_2 = 0$, wenn $x_1 = 0$ oder $x_2 = 0$. Im Fall $x_1 = 0$ kann der Vektor keine Lösung zur ersten Gleichung sein. Im Fall $x_2 = 0$ kann der Vektor keine Lösung zur zweiten Gleichung sein. Da es keinen Vektor gibt, der eine Lösung zu allen Gleichungen darstellt, ist die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ leer: man schreibt $\mathbb{L} = \{\}$. Das Gleichungssystem ist somit unlösbar.

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (x_1)^2 &= 4 \\ (x_2)^2 &= 9 \\ x_1 x_2 &= 6 \end{aligned}$$

ist lösbar. Es hat zwei Lösungen: $x_1 = 2, x_2 = 3$, bzw. $\mathbf{x} = (2,3)^T$, und $x_1 = -2, x_2 = -3$, bzw. $\mathbf{x} = (-2,-3)^T$,

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (x_1)^2 &= 4 \\ (x_2)^2 &= 9 \\ (x_1)^2 (x_2)^2 &= 36 \end{aligned}$$

ist ebenfalls lösbar. Es hat vier Lösungen,

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (x_1)^2 &= 4 \\ (x_2)^2 &= 9 \\ x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}$$

ist lösbar und hat eine Lösung,

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Betrachten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 5 \\ -2x_1 - 2x_2 &= -10 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 &= 2.5, \end{aligned}$$

so ist jeder Vektor mit $x_2 = 5 - x_1$, also jeder Vektor der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 5 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + x_1 \\ 5 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } x_1 \in \mathbb{R}, \text{ eine Lösung.}$$

Dieses Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Schreibt man die Lösungsmenge mit Parameter t anstelle von x_1, ergibt sich

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

■

Haben zwei Gleichungssysteme die gleiche Lösungsmenge, spricht man von äquivalenten Gleichungssystemen.

Definition 7.1.3 — Äquivalente Gleichungssysteme.
Zwei Gleichungssysteme heissen äquivalent, wenn ihre Lösungsmengen gleich sind.

■ **Beispiel 7.1.2 — Äquivalente Gleichungssysteme.**
Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (x_1)^2 &= 4 \\ (x_2)^2 &= 9 \end{aligned}$$

hat vier Lösungen,

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}(x_1)^2 &= 4\\(x_2)^2 &= 9\\(x_1)^2(x_2)^2 &= 36\end{aligned}$$

aus dem vorherigen Beispiel hat die gleiche Lösungsmenge. Damit sind die beiden Gleichungssysteme äquivalent. Auch das Gleichungssytem

$$\begin{aligned}(x_1)^2 &= 4\\(x_2)^2 &= 9\\(x_1)^2(x_2)^2 &= 36\\(x_1)^2+(x_2)^2 &= 13\\(x_2)^2-(x_1)^2 &= 5\\0 &= 0\end{aligned}$$

ist äquivalent zu diesen Gleichungssystemen, d.h. es hat die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix} \right\}.$$

■

Gleichungssysteme sind in der Regel nur schwer lösbar. So kann es auch vorkommen, dass ein Gleichungssystem eine Lösung besitzt, welche man nicht exakt sondern nur approximativ bestimmen kann.

■ Beispiel 7.1.3 — Fortsetzung von Beispiel 5.3.19.
Betrachten wir die Gleichung (bzw. das Gleichungssystem mit $m = 1$ Gleichungen und $n = 1$ Variablen)

$$x + e^x = 0.$$

In Beispiel 5.3.19 nutzten wir den Nullstellensatz, um zu schliessen, dass die Funktion mit Abbildungsvorschrift $y = x + e^x$ (mindestens) eine Nullstelle hat. Also hat obige Gleichung (mindestens) eine Lösung. Wir kamen in Beispiel 5.3.19 zu dem Ergebnis, dass die Lösung im Intervall $[-0.59375, -0.5625]$ liegt, konnten die genaue Lösung aber nicht bestimmen. Die Lösungsmenge kann man daher hier als

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x + e^x = 0\} \neq \{\}$$

beschreiben. Den in dieser Menge enthaltenen Wert von x kann man aber nicht einfach angeben. ■

Aufgrund dieser Schwierigkeit stellen wir kein allgemeines Lösungsschema für Gleichungssysteme vor. Stattdessen werden wir uns im Folgenden auf lineare Gleichungssysteme beschränken. Lineare Gleichungssysteme sind besondere Gleichungssysteme, die viele Anwendungen haben und relativ einfach schematisch lösbar sind.

Z Eine Menge von m Gleichungen mit n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ bezeichnet man als Gleichungssystem.

Ein Vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ heisst Lösung des Gleichungssystems, wenn alle m Gleichungen des Gleichungssystems für dieses $\mathbf{x}$ erfüllt sind.

Die Menge aller Lösungen eines Gleichungssystems bezeichnet man als Lösungsmenge des Gleichungssystems.

Haben zwei Gleichungssysteme die gleiche Lösungsmenge, nennt man sie äquivalent.

7.1.2 Definition eines linearen Gleichungssystems

Ziele dieses Unterkapitels

- Wann nennt man ein Gleichungssystem auch lineares Gleichungssystem? Wann nennt man ein lineares Gleichungssystem homogen?
- Was versteht man unter der Koeffizientenmatrix, der rechten Seite und der erweiterten Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems?

Man nennt eine Gleichung mit n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ linear, wenn man die Gleichung in der Form

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

mit $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, b_1 \in \mathbb{R}$ schreiben kann. Die Konstanten $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ auf der linken Seite obiger Gleichung, die mit den entsprechenden Variablen multipliziert werden, nennt man Koeffizienten. Die Konstante b_1 auf der rechten Seite obiger Gleichung, die nicht mit einer Variable multipliziert wird, nennt man rechte Seite.

Die linke Seite einer linearen Gleichung kann man also als Linearkombination der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit Gewichten $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ verstehen. Variablen treten in einer linearen Gleichung also unter anderem nie in quadratischer, logarithmischer oder exponentieller Form auf. Unterschiedliche Variablen werden zudem nie miteinander multipliziert.

Lineare Gleichungssysteme sind Gleichungssysteme, die nur aus linearen Gleichungen bestehen.

Definition 7.1.4 — Lineares Gleichungssystem.
Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix vom Typ $m \times n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Ein Gleichungssystem der Form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, bzw.

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

heisst lineares Gleichungssystem (LGS) mit m Gleichungen und n Variablen oder LGS in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Man nennt A die Koeffizientenmatrix und $\mathbf{b}$ die rechte Seite. Ist $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, so heisst das lineare Gleichungssystem homogen, andernfalls inhomogen.

Ein homogenes lineares Gleichungssystem wird also durch die Koeffizientenmatrix vollständig beschrieben. Bei einem inhomogenen linearen Gleichungssystem ist die rechte Seite ebenfalls notwendig, um das lineare Gleichungssystem zu beschreiben. Die erweiterte

Koeffizientenmatrix fasst beide Informationen zusammen. Um die Trennung der Elemente der erweiterten Koeffizientenmatrix sinngemäss wiederzugeben, setzt man einen vertikalen Strich zwischen A und $\mathbf{b}$.

Definition 7.1.5 — Die erweiterte Koeffizientenmatrix.
Sei A eine $m \times n$-Matrix und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Dann heisst die $m \times (n+1)$-Matrix

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

erweiterte Koeffizientenmatrix.

Im Folgenden überprüfen wir, welche der Gleichungssysteme aus Beispiel 7.1.1 lineare Gleichungssysteme darstellen.

■ **Beispiel 7.1.4 — Fortsetzung von Beispiel 7.1.1 .**
Die ersten vier Gleichungssysteme in Beispiel 7.1.1 sind alle nicht linear. In den ersten drei Gleichungssystemen ist keine der $m = 3$ Gleichungen linear. Beispielsweise ist in der ersten Gleichung x_1 und in der zweiten x_2 in quadratischer Form enthalten. In der dritten Gleichung werden zwei Variablen miteinander multipliziert. Das vierte Gleichungssystem besteht aus zwei nichtlinearen Gleichungen und einer linearen Gleichung. Da in einem linearen Gleichungssystem alle Gleichungen in linearer Form vorliegen müssen, ist auch das vierte Gleichungssystem nicht linear.

Das fünfte Gleichungssystem in Beispiel 7.1.1 ist ein lineares Gleichungssystem mit $n = 2$ Variablen und $m = 3$ Gleichungen. Die Koeffizientenmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

ist die rechte Seite. Damit ist die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ -2 & -2 & -10 \\ 0.5 & 0.5 & 2.5 \end{array}\right).$$

■

■ **Beispiel 7.1.5 — Ein weiteres Beispiel.**
Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5^2 x_1 - \exp(5) x_2 &= \cos(1) \\ -\sin(7) x_1 + \ln(8) x_2 &= \pi \end{aligned}$$

ist ebenfalls ein lineares Gleichungssystem mit $n = 2$ Variablen und $m = 2$ Gleichungen. Die Koeffizientenmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 5^2 & -\exp(5) \\ -\sin(7) & \ln(8) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \cos(1) \\ \pi \end{pmatrix}$$

ist die rechte Seite. Damit ist die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 5^2 & -\exp(5) & \cos(1) \\ -\sin(7) & \ln(8) & \pi \end{array}\right).$$

Auch hier werden die Variablen x_1 und x_2 jeweils mit reellen Koeffizienten multipliziert und dann addiert.[1] ■

In den folgenden Beispielen stellen wir zwei lineare Gleichungssysteme vor, anhand derer wir später Lösungsverfahren sowie die Geometrie linearer Gleichungssysteme genauer erläutern werden.

■ Beispiel 7.1.6 — Ein Beispiel mit zwei Variablen.
Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 11 \end{aligned}$$

ist ein lineares Gleichungssystem mit $n = 2$ Variablen und $m = 2$ Gleichungen. Die Koeffizientenmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

ist die rechte Seite. Damit ist die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 11 \end{array}\right).$$

Wir werden später Methoden kennenlernen, mithilfe derer wir die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems bestimmen können. ■

■ Beispiel 7.1.7 — Ein Beispiel mit drei Variablen.
Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

ist ein lineares Gleichungssystem mit $n = 3$ Variablen und $m = 3$ Gleichungen. Hier sind die Koeffizientenmatrix, die rechte Seite und die erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

■

Z Ein lineares Gleichungssystem mit Variablen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ hat die Form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Ist $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, so spricht man auch von einem homogenen linearen Gleichungssystem, sonst von einem inhomogenen linearen Gleichungssystem.

Man nennt A die Koeffizientenmatrix, $\mathbf{b}$ die rechte Seite und $(A|\mathbf{b})$ die erweiterte Koeffizientenmatrix.

[1] Würde das Gleichungssystem hingegen die Gleichung $5^2 x_1 - \exp(x_2) = \cos(1)$ beinhalten, wäre es kein lineares Gleichungssystem.

7.1.3 Lineare Gleichungssysteme in expliziter Form

Ziele dieses Unterkapitels

- Was versteht man unter einem LGS in expliziter Form?
- Wie kann man erkennen, ob ein LGS in expliziter Form lösbar ist?

In manchen Fällen ist es einfach, die Lösung eines linearen Gleichungssystems zu finden.

■ Beispiel 7.1.8 — Einfach zu bestimmende Lösungsmengen.
Es ist klar, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

mit

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

die (einzige) Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{b} = (2,4)^T$ hat, $\mathbb{L} = \left\{(2,4)^T\right\} = \{\mathbf{b}\}$.

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 4 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

mit

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

hat die gleiche Lösungsmenge.

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 4 \\ 0 &= 7 \end{aligned}$$

mit

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

ist unlösbar, d.h. die Lösungsmenge ist leer, $\mathbb{L} = \{\}$.

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

mit

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

entspricht

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2 - x_3 \\
x_2 &= 6 - 2x_3.
\end{aligned}
$$

Für $x_3 = 0$ ergibt sich direkt die Lösung $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$, also $\mathbf{x} = (2,6,0)^T$. Für beliebiges x_3 hat eine Lösung stets die Form

$$\begin{pmatrix} 2 - x_3 \\ 6 - 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

Die Lösungsmenge ist

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dabei verwendet man in der Regel den Parameter t statt x_3, um Verwechslungen mit der Variablen x_3 zu vermeiden und zu betonen, dass dieser Wert frei gewählt werden kann. ■

Folgende Definition beschreibt, wann die Koeffizientenmatrix in einer besonderen Zeilenstufenform, der expliziten Form, vorliegt. In diesem Fall kann die Lösung des linearen Gleichungssystems, wie in den Beispielen angedeutet, einfach bestimmt werden.

Definition 7.1.6 — Eine Matrix in expliziter Form.
Eine $m \times n$-Matrix A liegt in expliziter Form vor, wenn
- sie in Zeilenstufenform vorliegt;
- jedes führende Element eine 1 ist;
- jede Spalte von A, die ein führendes Element enthält, keine weiteren von 0 verschiedenen Einträge besitzt.

Jedes führende Element einer Matrix in expliziter Form nennt man auch führende Eins.

Ist die Koeffizientenmatrix eines LGS in expliziter Form, spricht man auch von einem LGS in expliziter Form.

Definition 7.1.7 — Ein LGS in expliziter Form.
Sei $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Liegt die Matrix A in expliziter Form vor, sagt man auch, das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, mit Variablen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ liegt in expliziter Form vor. Variablen, die zu Spalten mit führenden Elementen gehören, nennt man führende Variablen. Variablen, die nicht zu Spalten mit führenden Elementen gehören, heissen freie Variablen.

Eine Matrix in expliziter Form ist also eine Matrix in Zeilenstufenform, bei der 1) jedes führende Element eine 1 ist und 2) oberhalb (und unterhalb) führender Elemente keine von Null verschiedenen Einträge auftreten. Abbildung 7.1 stellt schematisch eine Matrix in expliziter Form dar.

Hat ein lineares Gleichungssystem mit $n \geq 1$ Variablen eine Lösung und liegt die Matrix A in expliziter Form vor, erhält man die allgemeine Lösung, indem man die führenden Variablen ggf. durch freie Variablen ausdrückt. Die freien Variablen können frei gewählt werden. Wir demonstrieren dies an drei Beispielen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildung 7.1: Eine Matrix in expliziter Form.

■ **Beispiel 7.1.9 — Einfache lineare Gleichungssysteme ohne freie Variablen.** Wir betrachten erneut das lineare Gleichungssystem mit

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Die Matrix A, und somit auch das lineare Gleichungssystem, liegt in expliziter Form vor. Die führende Eins der ersten Zeile ist in Spalte 1, die führende Eins der zweiten Zeile ist in Spalte 2. Damit sind die Variablen x_1 und x_2 führende Variablen. Es gibt keine freie Variable.

Die einzige Lösung des linearen Gleichungssystems ist offensichtlich $\mathbf{x} = (2,4)^T = \mathbf{b}$. Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \left\{(2,4)^T\right\} = \left\{(b_1,b_2)^T\right\}$.

Fügt man die Gleichung $0 = 0$ hinzu, entspricht dies einer zusätzlichen Nullzeile der erweiterten Koeffizentenmatrix. So ergibt sich

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Auch hier liegt A, und somit auch das lineare Gleichungssystem, in expliziter Form vor. Die Lösungsmenge ist auch in diesem Fall gleich $\mathbb{L} = \left\{(2,4)^T\right\} = \left\{(b_1,b_2)^T\right\}$, wobei nun aber $\mathbf{b} = (2,4,0)^T \notin \mathbb{L}$ gilt. Fügt man stattdessen die Gleichung $0 = 1$ hinzu, ergibt sich wieder ein lineares Gleichungssystem in expliziter Form, diesmal mit

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Die Lösungsmenge ist leer, da $0 = 1$ für keinen Wert von $\mathbf{x}$ erfüllt werden kann, $\mathbb{L} = \{\}$. ■

Nicht jedes lineare Gleichungssystem in expliziter Form hat eine Lösung. Ist die linke Seite der i-ten Gleichung gleich 0, d.h. hat A eine Nullzeile in Zeile i, aber die rechte Seite, b_i, ungleich 0, so hat die i-te Gleichung keine Lösung. Ein lineares Gleichungssystem, das eine solche Gleichung enthält, hat somit keine Lösung. Ein lineares Gleichungssystem in expliziter Form hat genau dann eine Lösung, wenn jede zu einer Nullzeile von A gehörige Komponente der rechten Seite $\mathbf{b}$ gleich 0 ist.

Satz 7.1.1 — Lösbarkeit eines LGS in expliziter Form. Sei A eine Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems in expliziter Form mit n Variablen und m Gleichungen und rechter Seite $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Zudem seien alle Zeilen $i > r$, mit r aus $\mathbb{N}_0$, von A Nullzeilen, d.h. die ersten r Zeilen von A keine Nullzeilen. Das lineare Gleichungssystem hat genau dann eine Lösung, wenn $b_i = 0$ für alle $i > r$.

Beweis. Falls $b_i \neq 0$ für ein $i > r$, dann ist das lineare Gleichungssystem unlösbar, da die i-te Gleichung $\mathbf{a}_i\mathbf{x} = 0 = b_i \neq 0$ lautet.

Falls $b_i = 0$ für alle $i > r$, dann ist der Vektor $\mathbf{x}$ mit $x_i = b_i$ für $i \leq r$ und $x_i = 0$ für $i > r$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems. ■

Ein lineares Gleichungssystem in expliziter Form kann auch mehr als eine Lösung haben. Auch dann ist die Lösung aber relativ einfach abzulesen:

■ Beispiel 7.1.10 — Ein LGS in expliziter Form mit einer freien Variablen.
Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

mit erweiterter Koeffizientenmatrix

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

liegt ebenfalls in expliziter Form vor. Die führende Eins der ersten Zeile ist in Spalte 1, die führende Eins der zweiten Zeile ist in Spalte 2. Damit sind die Variablen x_1 und x_2 führende Variablen und x_3 eine freie Variable. Die Matrix A hat keine Nullzeile. Damit ist das LGS lösbar.

Lösungen ergeben sich, indem wir x_1 und x_2 durch die freie Variable x_3 ausdrücken:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - x_3 = b_1 - a_{13}x_3 \\ x_2 &= 6 - 2x_3 = b_2 - a_{23}x_3. \end{aligned}$$

Damit ist für jeden Wert $x_3 \in \mathbb{R}$ der Vektor

$$\begin{pmatrix} 2 - x_3 \\ 6 - 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_{13}x_3 \\ b_2 - a_{23}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

eine Lösung. Nennt man den Parameter x_3 nun t, ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -a_{13} \\ -a_{23} \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

■

■ Beispiel 7.1.11 — Ein weiteres LGS in expliziter Form mit einer freien Variablen.
Das LGS

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_3 &= 2, \end{aligned}$$

mit

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

liegt ebenfalls in expliziter Form vor. Die führende Eins der ersten Zeile ist in Spalte 1, die führende Eins der zweiten Zeile ist in Spalte 3. Damit sind die Variablen x_1 und x_3 führende Variablen und x_2 eine freie Variable. Die Matrix A hat keine Nullzeile. Damit ist das LGS lösbar.

Lösungen ergeben sich, indem wir x_1 und x_3 durch die freie Variable x_2 ausdrücken:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2x_2 = b_1 - a_{12}x_2 \\ x_3 &= 2 = b_2 - a_{22}x_2. \end{aligned}$$

Damit ist für jeden Wert $x_2 \in \mathbb{R}$ der Vektor

$$\begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_{12}x_2 \\ x_2 \\ b_2 - a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

eine Lösung. Schreibt man erneut t statt x_3, ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ b_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -a_{12} \\ 1 \\ -a_{22} \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

■

Z Ein LGS liegt in expliziter Form vor, wenn 1) die Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform vorliegt und 2) jedes führende Element eine 1 ist und 3) in Spalten mit führenden Elementen alle anderen Koeffizienten gleich 0 sind.

Ein LGS in expliziter Form ist genau dann unlösbar, wenn es ein Nullzeile $\mathbf{a}_i$ von A gibt mit $b_i \neq 0$.

7.1.4 Basislösungen

Ziele dieses Unterkapitels

- Was versteht man unter einer Basislösung eines linearen Gleichungssystems?

Bestimmt man die Lösungsmenge eines lösbaren linearen Gleichungssystems in expliziter Form mit einer freien Variable wie in obigen Beispielen, erhält man immer eine Darstellung der Lösungsmenge als Summe eines Vektors $\mathbf{v}^0$ und beliebigen Vielfachen eines anderen Vektors. Den Vektor $\mathbf{v}^0$ kann man dabei stets aus den Komponenten der rechten Seite ablesen, indem man die Komponente b_i der Variable zuweist, in deren Spalte der i-te kanonische Einheitsvektor steht, und die anderen Variablen gleich 0 setzt.

Die Anzahl der Komponenten von $\mathbf{v}^0 \in \mathbb{L}$, welche gleich 0 sind, ist damit stets mindestens so gross wie die Anzahl der freien Variablen. Derartige Lösungen des Gleichungssystems nennt man Basislösungen. Sie spielen in der linearen Optimierung eine grosse Rolle.

Definition 7.1.8 — Basislösungen.
Ist das lösbare lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ äquivalent zu einem linearen Gleichungssystem in expliziter Form mit r führenden Variablen, dann heisst eine Lösung $\mathbf{x}$ von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ Basislösung, wenn höchstens r Komponenten von 0 verschieden sind.

Ein lineares Gleichungssystem hat dabei in der Regel mehr als nur eine Basislösung.

■ **Beispiel 7.1.12 — Fortsetzung von Beispiel 7.1.10.**
In Beispiel 7.1.10 drückten wir die $r = 2$ führenden Variablen x_1 und x_2 des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

in Abhängigkeit der einen freien Variable x_3 aus. Mit

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - x_3 \\ x_2 &= 6 - 2x_3 \end{aligned}$$

ergab sich so die Darstellung

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 - x_3 \\ 6 - 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Der Vektor $(2,6,0)^T$ ist hier eine Basislösung, da nur $r = 2$ Komponenten von 0 verschieden sind. Nur die Komponente der freien Variable x_3 ist gleich 0. Eine weitere Basislösung des linearen Gleichungssystems erhält man, indem man beispielsweise $x_2 = 0$ setzt und dann nach den verbleibenden Variablen auflöst. Man erhält so

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 \\ 0 + 2x_3 &= 6. \end{aligned}$$

Hier muss also $x_3 = 3$ und damit $x_1 = -1$ gelten. Eine zweite Basislösung ist damit $(-1,0,-3)^T$. Eine dritte Basislösung ergibt sich mit $x_1 = 0$ aus

$$\begin{aligned} 0 + x_3 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

als $(0,2,2)^T$. ■

Z Hat eine Lösung des LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, zu dem ein äquivalentes LGS in expliziter Form mit r führenden Variablen existiert, höchstens r von 0 verschiedene Komponenten, spricht man von einer Basislösung von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

7.2 Ein Eliminationsverfahren

Liegt ein lineares Gleichungssystem in expliziter Form vor, kann die Lösung einfach durch Auflösen nach den führenden Variablen erhalten werden. Für allgemeine lineare Gleichungssysteme kann man die Lösung jedoch nicht immer so einfach bestimmen. Wir stellen in diesem Kapitel zu diesem Zweck ein Eliminationsverfahren vor. Die Grundidee des Eliminationsverfahrens ist es, das lineare Gleichungssystem so umzuformen, dass ein lineares Gleichungssystem in expliziter Form entsteht.

7.2.1 Elementare Zeilenumformungen

Ziele dieses Unterkapitels

- Welche Zeilenumformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix führen zu äquivalenten linearen Gleichungssystemen?

Wir demonstrieren das Vorgehen des Eliminationsverfahrens anhand des linearen Gleichungssystems aus Beispiel 7.1.6.

■ Beispiel 7.2.1 — Das Beispiel mit zwei Variablen.
Das Verfahren wird Eliminationsverfahren genannt, da es zum Ziel hat, Variablen aus Gleichungen zu eliminieren. Beginnt man mit dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 11 \end{aligned} \quad \text{bzw. } (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 11 \end{array}\right)$$

aus Beispiel 7.1.6 und versucht x_1 aus der zweiten Gleichung zu eliminieren, so kann man die erste Gleichung drei mal von der zweiten abziehen. Man erhält

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 8x_2 &= 8 \end{aligned} \quad \text{bzw. } (\tilde{A}|\tilde{\mathbf{b}}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 8 \end{array}\right).$$

Aus der Gleichung $8x_2 = 8$ ergibt sich nach Division durch 8 unmittelbar, dass $x_2 = 1$. Setzt man dies in $x_1 - 2x_2 = 1$ ein, erhält man $x_1 - 2 = 1$ und damit

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Die Lösung ist also $\mathbf{x} = (3,1)^T$, $\mathbb{L} = \{(3,1)^T\}$.

Die Operationen, die hier angewendet wurden, sind in diesem Kapitel sehr zentral:

1. Um eine Variable zu eliminieren, wurde ein Vielfaches einer Gleichung von einer anderen Gleichung abgezogen. Im Beispiel wurde das Dreifache der Gleichung 1 von Gleichung 2 abgezogen.
2. Die rechte und linke Seite einer Gleichung wurde durch eine Konstante geteilt. Im Beispiel wurde die neu erhaltene Gleichung $8x_2 = 8$ durch 8 geteilt.

■

In obigem Beispiel wurde ein Gleichungssystem zu einem anderen umgeformt. Die beiden Gleichungssysteme haben unterschiedliche rechte Seiten und unterschiedliche Koeffizientenmatrizen. Sie haben aber die gleiche Lösungsmenge und sind daher äquivalent.

Folgender Satz besagt, dass man aus einem linearen Gleichungssystem ein äquivalentes lineares Gleichungssystem erhält, wenn man eine Zeile der erweiterten Koeffizientenmatrix, d.h. alle Koeffizienten und die rechte Seite einer Zeile, mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ multipliziert. Zudem entsteht ein äquivalentes lineares Gleichungssystem, wenn man ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addiert. Verändert man die Reihenfolge, in der die Gleichungen aufgezählt werden, so verändert sich die Lösungsmenge ebenfalls nicht.

Man nennt derartige Umformungen von Zeilen eines linearen Gleichungssystems, die zu einem äquivalenten linearen Gleichungssystem führen, elementare Zeilenumformungen.

Satz 7.2.1 — Elementare Zeilenumformungen.
Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

- Multipliziert man Zeile $i_1 \in \{1,\dots,m\}$ der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ mit $\alpha \neq 0$, erhält man eine neue erweiterte Koeffizientenmatrix $(\tilde{A}|\tilde{\mathbf{b}})$ mit
$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij},\ i \neq i_1 \\ \alpha a_{i_1 j},\ i = i_1 \end{cases} \qquad \tilde{b}_i = \begin{cases} b_i,\ i \neq i_1 \\ \alpha b_{i_1},\ i = i_1 \end{cases} .$$
Das so entstandene lineare Gleichungssystem $\tilde{A}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$ ist äquivalent zu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- Addiert man das α-fache einer Zeile $i_1 \in \{1,\dots,m\}$ der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ zu Zeile $i_2 \neq i_1$, erhält man eine neue erweiterte Koeffizientenmatrix $(\tilde{A}|\tilde{\mathbf{b}})$ mit
$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij},\ i \neq i_2 \\ a_{i_2 j} + \alpha a_{i_1 j},\ i = i_2 \end{cases} \qquad \tilde{b}_i = \begin{cases} b_i,\ i \neq i_2 \\ b_{i_2} + \alpha b_{i_1},\ i = i_2 \end{cases} .$$
Das so entstandene lineare Gleichungssystem $\tilde{A}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$ ist äquivalent zu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- Vertauscht man zwei Zeilen i_1 und i_2, $1 \leq i_1 < i_2 \leq m$, der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$, erhält man eine neue erweiterte Koeffizientenmatrix $(\tilde{A}|\tilde{\mathbf{b}})$ mit
$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij},\ i \notin \{i_1,i_2\} \\ a_{i_2 j},\ i = i_1 \\ a_{i_1 j},\ i = i_2 \end{cases} \qquad \tilde{b}_i = \begin{cases} b_i,\ i \notin \{i_1,i_2\} \\ b_{i_2},\ i = i_1 \\ b_{i_1},\ i = i_2 \end{cases} .$$
Das so entstandene lineare Gleichungssystem $\tilde{A}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$ ist äquivalent zu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Beweis. Einen Beweis findet man in Kall (1984, Satz 2.23). ■

Z Das LGS mit erweiterter Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ ist äquivalent zu einem LGS mit einer erweiterten Koeffizientenmatrix, die entstanden ist, indem

1. eine Zeile von $(A|\mathbf{b})$ mit $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ multipliziert wurde;
2. das α-fache einer Zeile von $(A|\mathbf{b})$ zu einer anderen Zeile addiert wurde;
3. zwei Zeilen von $(A|\mathbf{b})$ vertauscht wurden.

Diese Zeilenumformungen nennt man elementare Zeilenumformungen.

7.2.2 Die Grundidee des Eliminationsverfahrens

Ziele dieses Unterkapitels

- Was wird im i-ten Schritt des Eliminationsverfahrens erzielt?

Die Grundidee des Eliminationsverfahrens ist es, in einem ersten Schritt x_1 aus allen Gleichungen ausser der ersten Gleichung zu entfernen, in einem zweiten Schritt x_2 aus allen Gleichungen ausser der zweiten Gleichung zu entfernen, in einem dritten Schritt x_3 aus allen Gleichungen ausser der dritten Gleichung zu entfernen, und so weiter. Zum Entfernen einer Variablen werden Vielfache der einen Zeile von den anderen Zeilen abgezogen oder zu den anderen Zeilen addiert. Da diese Grundidee bei einigen linearen Gleichungssystemen so nicht umsetzbar ist, werden wir sie im Folgenden erweitern. Wir demonstrieren aber zunächst die Grundidee an Beispiel 7.1.7:

Beispiel 7.2.2 — Grundidee des Eliminationsverfahrens.
Ausgehend vom linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrl} ① & x_1+2x_2+3x_3 & =6 \\ ② & 2x_1+5x_2+2x_3 & =4 \\ ③ & 6x_1-3x_2+x_3 & =2 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

versuchen wir in einem ersten Schritt, x_1 aus den Gleichungen 2 und 3 zu entfernen. Hierfür ziehen wir Gleichung 1 zweimal von Gleichung 2 und sechsmal von Gleichung 3 ab. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3 &= 6 \\ (2-2\cdot 1)x_1+(5-2\cdot 2)x_2+(2-2\cdot 3)x_3 &= 4-2\cdot 6 \\ (6-6\cdot 1)x_1+(-3-6\cdot 2)x_2+(1-6\cdot 3)x_3 &= 2-6\cdot 6, \end{aligned}$$

also

$$\begin{array}{rl} x_1+2x_2+3x_3 & =6 \\ x_2-4x_3 & =-8 \\ -15x_2-17x_3 & =-34. \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & -15 & -17 & -34 \end{array}\right).$$

In einem zweiten Schritt versuchen wir, x_2 aus der ersten und dritten Gleichung des neu erhaltenen linearen Gleichungssystems zu entfernen. Hierfür ziehen wir die zweite Gleichung zweimal von der ersten Gleichung ab und addieren sie 15-mal zur dritten. Wir erhalten

$$\begin{aligned} x_1+(2-2\cdot 1)x_2+(3-2\cdot(-4))x_3 &= 6-2\cdot(-8) \\ x_2-4x_3 &= -8 \\ (-15+15\cdot 1)x_2+(-17+15\cdot(-4))x_3 &= -34+15\cdot(-8), \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{array}{rl} x_1 \quad +11x_3 & =22 \\ x_2-4x_3 & =-8 \\ -77x_3 & =-154. \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 22 \\ 0 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -77 & -154 \end{array}\right).$$

Im dritten Schritt eliminieren wir x_3 aus den ersten beiden Gleichungen des neu erhaltenen Gleichungssystems. Wir addieren $\frac{11}{77}$-mal die dritte Gleichung zur ersten und ziehen $\frac{4}{77}$-mal die dritte von der zweiten Gleichung ab. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} x_1 \quad +\left(11+\frac{11}{77}(-77)\right)x_3 &= 22+\frac{11}{77}(-154) \\ x_2+\left(-4-\frac{4}{77}(-77)\right)x_3 &= -8-\frac{4}{77}(-154) \\ -77x_3 &= -154, \end{aligned}$$

und so

$$\begin{array}{rcl} x_1 & & = 0 \\ & x_2 & = 0 \\ & -77x_3 & = -154. \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -77 & -154 \end{array}\right).$$

Noch einfacher erkennt man die Lösung, wenn man die letzte Gleichung durch -77 teilt und somit

$$\begin{array}{rcl} x_1 & & = 0 \\ & x_2 & = 0 \\ & x_3 & = 2 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

erhält. Die Lösung zum obigen linearen Gleichungssystem lautet also $\mathbf{x} = (0,0,2)^T$, $\mathbb{L} = \{(0,0,2)^T\}$.

Um sich lästige Schreibarbeit zu sparen, notiert man in der Regel nur die erweiterte Koeffizientenmatrix in einem Tableau und notiert die Rechenschritte in einer zusätzlichen Spalte. Die obigen Berechnungen entsprechen dann:

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}$	
①	1	2	3	6	
②	2	5	2	4	
③	6	-3	1	2	
④	1	2	3	6	①
⑤	0	1	-4	-8	② -2 ·①
⑥	0	-15	-17	-34	③ - 6·①
⑦	1	0	11	22	④ - 2·⑤
⑧	0	1	-4	-8	⑤
⑨	0	0	-77	-154	⑥ + 15·⑤
⑩	1	0	0	0	⑦ +$\frac{11}{77}$·⑨
⑪	0	1	0	0	⑧ - $\frac{4}{77}$·⑨
⑫	0	0	-77	-154	⑨
⑬	1	0	0	0	⑩
⑭	0	1	0	0	⑪
⑮	0	0	1	2	-$\frac{1}{77}$·⑫

Wir besprechen Tableaus dieser Art im Folgenden. ■

Das Tableau

Schreibt man Gleichungen der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

als Tableau, so beschriftet man die j-te Spalte mit x_j und schreibt die Koeffizienten a_{ij} in Zeile i der entsprechenden Spalte. Die der jeweiligen Zeile entsprechende rechte Seite notiert man in einer weiteren Spalte. Oft fügt man links noch eine Spalte hinzu, in der man die einzelnen entstehenden Gleichungen nummeriert. Das den obigen Gleichungen mit erweiterter Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ entsprechende Tableau ist also

	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\mathbf{b}$
①	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	b_1
②	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
ⓜ	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	b_m

Führt man Umformungen durch, so wird das neu entstandene lineare Gleichungssystem unter dem vorherigen ergänzt. Zur besseren Übersicht trennt man die so entstehenden äquivalenten linearen Gleichungssysteme durch horizontale Linien und notiert in einer weiteren Spalte, wie die neuen Gleichungen aus dem vorherigen linearen Gleichungssystem entstanden sind.

■ Beispiel 7.2.3 — Fortsetzung von Beispiel 7.1.6.
Das Tableau

	x_1	x_2	$\mathbf{b}$	
①	1	-2	1	
②	3	2	11	
③	1	-2	1	①
④	0	8	8	② - 3·①
⑤	1	0	3	③ + $\frac{1}{4}$·④
⑥	0	8	8	④
⑦	1	0	3	⑤
⑧	0	1	1	$\frac{1}{8}$·⑥

zeigt also in den Zeilen ① und ② das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 11. \end{aligned}$$

In einer ersten Umformung entsteht daraus das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 8x_2 &= 8, \end{aligned}$$

welches man in Zeilen ③ und ④ ablesen kann. Die letzte Spalte in Zeile ③ zeigt an, dass die erste Gleichung im Vergleich zum vorherigen linearen Gleichungssystem unverändert, also gleich ①, ist. Die letzte Spalte in Zeile ④ zeigt, dass man das Dreifache der Gleichung

① von Gleichung ② abzieht, um die neue zweite Gleichung, Gleichung ④, zu erhalten. In einer zweiten Umformung entstehen die Zeilen ⑤ und ⑥, das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ 8x_2 &= 8. \end{aligned}$$

In der rechten Spalte dieser Zeilen kann man ablesen, wie diese Gleichungen aus dem vorherigen linearen Gleichungssystem, den Gleichungen ③ und ④, entstanden sind. In Zeilen ⑦ und ⑧ kann dann die Lösung als $\mathbf{x} = (3,1)^T$ abgelesen werden. ■

Schritt i der Grundidee

Die Grundidee des Eliminationsverfahrens ist es, bei einem linearen Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit n Variablen und m Gleichungen folgende Schritte auszuführen:

Schritt 0: Beginne mit $i = 1$. Betrachte die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$.

Schritt i: Wenn $a_{ii} \neq 0$,[2]

a) eliminiere Variable x_i in allen Zeilen $i_2 \neq i$, d.h. erziele Koeffizient $a_{i_2 i} = 0$ in Spalte i für alle Zeilen i_2 ausser Zeile i, indem das passende Vielfache[3] der Zeile i zu Zeile i_2 addiert[4] wird;
b) teile Zeile i durch $a_{ii} \neq 0$;
c) nenne die Koeffizientenmatrix des neu entstandenen linearen Gleichungssystems wieder A. Falls es ein Element $a_{(i+1)(i+1)}$ dieser Matrix gibt, also A mindestens $i+1$ Zeilen und $i+1$ Spalten hat, erhöhe i um 1 und wiederhole Schritt i.

Die i-te Wiederholung dieser Schritte kreiert eine Koeffizientenmatrix mit i-ter Spalte $\mathbf{a}^i = \mathbf{e}^i$. Die i-te Spalte wird zum i-ten Einheitsvektor. Dass dieses Eliminationsverfahren zu äquivalenten Gleichungssystemen führt, ergibt sich aus Satz 7.2.1.

Dieses Schema wurde in beiden Beispielen dieses Unterkapitels angewandt. Wir führen dies für Beispiel 7.2.2 genauer aus.

■ Beispiel 7.2.4 — Die Schritte im Beispiel 7.2.2.
Im Gleichungssystem in Beispiel 7.2.2 ist $a_{11} \neq 0$, daher wird in Schritt 1, Teilschritt a) Variable x_1 aus Gleichungen ② und ③ entfernt, vgl. Gleichungen ④ bis ⑥. Da $a_{11} = 1$ gilt, kann auf Teilschritt b) verzichtet werden.

In Schritt 2 wird $a_{22} \neq 0$ geprüft, vgl. die Spalte x_2 in Gleichung ⑤. Da $a_{22} = 1$ gilt, wird nun Variable x_2 aus Gleichungen ④ und ⑥ entfernt. Da $a_{22} = 1$ gilt und die Division durch 1 keine Zahl verändert, kann wieder auf Teilschritt b) verzichtet werden.

In Schritt 3 wird $a_{33} \neq 0$ geprüft, vgl. die Spalte x_3 in Gleichung ⑨. Da $a_{33} = -77$ gilt, wird nun Variable x_3 aus Gleichungen ⑦ und ⑧ entfernt. So ergeben sich Gleichungen ⑩ bis ⑫. Anschliessend wird Gleichung ⑫ durch $a_{33} = -77$ geteilt. Da weder 4 Zeilen noch 4 Spalten existieren, endet dieses Verfahren hier.

In den bisherigen Tableaus wurde für jeden Teilschritt das lineare Gleichungssystem erneut aufgeschrieben. Abkürzend kann man stets alle Teilschritte a) bis c) eines Schritts der Grundidee gemeinsam ausführen. Man kann also auch bereits zur Generierung von Gleichung ⑫ die entsprechende Zeile durch a_{33} teilen. So spart man sich drei Zeilen und

[2] Ist $a_{ii} = 0$, muss eine der Erweiterungen des folgenden Abschnitts 7.2.3 genutzt werden.

[3] Dieses passende Vielfache ist $\frac{-a_{i_2 i}}{a_{ii}}$.

[4] Hierbei kann auch eine negative Zahl addiert werden.

erhält

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}$	
①	1	2	3	6	
②	2	5	2	4	
③	6	-3	1	2	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⑩	1	0	0	0	⑦ + $\frac{11}{77}\cdot$⑨
⑪	0	1	0	0	⑧ - $\frac{4}{77}\cdot$⑨
⑫	0	0	1	2	-$\frac{1}{77}\cdot$⑨

■

Erhält man bei der Durchführung obiger Schritte ein Element $a_{ii} = 0$, so stösst dieses einfache Schema an seine Grenzen. Wir stellen daher im Folgenden drei Mechanismen vor, wie man in diesen Fällen verfahren kann.

Z Ziel des i-ten Schritts ist es, Variable x_i aus allen Gleichungen ausser der i-ten Gleichung zu entfernen und $a_{ii} = 1$ zu erhalten. Somit wird der i-te Einheitsvektor in Spalte i der erweiterten Koeffizientenmatrix erzeugt.

7.2.3 Erweiterungen

Ziele dieses Unterkapitels

- Wie kann man das Eliminationsverfahren fortführen, wenn $a_{ii} = 0$ gilt?

Erhält man nach $i-1$ Schritten ein Element $a_{ii} = 0$, kann man den i-ten Schritt des Eliminationsverfahrens nicht ausführen, da man Zeile i nicht nutzen kann, um Variable x_i aus den anderen Zeilen zu eliminieren. Wir demonstrieren drei Möglichkeiten, wie man in diesem Fall das Eliminationsverfahren gegebenenfalls fortführen kann:

Erweiterung 1: Nullzeilen von A

Enthält die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ eine Nullzeile, so kann diese stets gestrichen werden. Folgendes Beispiel illustriert dieses Vorgehen:

■ Beispiel 7.2.5 — Nullzeilen der erweiterten Koeffizientenmatrix.
Will man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 - 4x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 11 \end{aligned}$$

lösen, erhält man das Tableau

	x_1	x_2	**b**	
①	1	-2	1	
②	2	-4	2	
③	3	2	11	
④	1	-2	1	①
⑤	0	0	0	② - 2·①
⑥	0	8	8	③ - 3·①

Nach Schritt 1 kommt man an dieser Stelle nicht zu Schritt 2 der obigen Grundidee, da $a_{22} = 0$ gilt. Zeilen ④ bis ⑥ entsprechen dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 0x_1 + 0x_2 &= 0 \\ 8x_2 &= 8. \end{aligned}$$

Da die mittlere Gleichung stets erfüllt ist, ist jede Lösung dieses linearen Gleichungssystems offensichtlich eine Lösung von

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 8x_2 &= 8 \end{aligned}$$

und umgekehrt. Die mittlere Gleichung ⑤ kann daher einfach weggelassen werden. Mit dem so entstandenen Tableau ergibt sich ein Element $a_{22} = 8 \neq 0$ und man kann wie folgt weiterrechnen:

	x_1	x_2	**b**	
⑦	1	-2	1	④
⑧	0	8	8	⑥
⑨	1	0	3	⑦ + $\frac{1}{4}$·⑧
⑩	0	1	1	$\frac{1}{8}$·⑧

Die Lösung $\mathbf{x} = (3,1)^T$ bzw. $\mathbb{L} = \left\{(3,1)^T\right\}$ kann aus ⑨ und ⑩ abgelesen werden. ■

Nullzeilen verändern ein lineares Gleichungssystem also nicht. Wir fassen dies in einem Satz zusammen:

Satz 7.2.2 — Streichen von Nullzeilen.
Lässt man in einem linearen Gleichungssystem der Form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, eine Gleichung der Form

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0,$$

also eine Zeile i_1 mit $a_{i_1 j} = 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$ und $b_{i_1} = 0$, weg oder fügt sie hinzu, so entsteht ein lineares Gleichungssystem, das zu dem ursprünglichen linearen Gleichungssystem äquivalent ist.

Beweis. Eine Gleichung der Form

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0$$

ist offensichtlich für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems wird durch Hinzufügen oder Streichen dieser Gleichung deshalb nicht verändert. ■

Trifft man bei der Ausführung der Grundidee auf eine Nullzeile, so kann diese also einfach gestrichen werden. Hat A in Zeile i eine Nullzeile, aber $b_i \neq 0$, kann man die Zeile nicht einfach streichen, wie folgendes Beispiel zeigt:

■ Beispiel 7.2.6 — Nullzeilen der Koeffizientenmatrix.
Will man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 - 4x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 11 \end{aligned}$$

lösen, erhält man das Tableau

	x_1	x_2	$\mathbf{b}$	
①	1	-2	1	
②	2	-4	3	
③	3	2	11	
④	1	-2	1	①
⑤	0	0	1	② - 2·①
⑥	0	8	8	③ - 3·①

Auch hier kann man Schritt 2 obiger Grundidee nicht ausführen, da $a_{22} = 0$ gilt. Zeilen ④ bis ⑥ entsprechen dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 0x_1 + 0x_2 &= 1 \\ 8x_2 &= 8. \end{aligned}$$

Da die mittlere Gleichung nie erfüllt sein kann, hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung, $\mathbb{L} = \{\}$. Das Verfahren kann an dieser Stelle also abgebrochen werden. ■

Hat A in Zeile i eine Nullzeile und gilt $b_i = 0$, hat also die erweiterte Koeffizientenmatrix eine Nullzeile, so kann Zeile i einfach gestrichen und Schritt i des Grundschemas wiederholt werden. Hat A in Zeile i eine Nullzeile und gilt $b_i \neq 0$, so kann das Verfahren abgebrochen werden, da dann das lineare Gleichungssystem unlösbar ist und $\mathbb{L} = \{\}$ gelten muss.

Erweiterung 2: Zeilentausch

Ergibt sich ein Element $a_{ii} = 0$ in einer Zeile von A, die keine Nullzeile ist, und gibt es eine andere Zeile $i_2 > i$ mit $a_{i_2 i} \neq 0$, so kann ein Zeilentausch mit dieser Zeile vorgenommen werden.

■ Beispiel 7.2.7 — Zeilentausch.
Will man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2x_2 &= -2 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 10 \end{aligned}$$

ausgehend vom Tableau

	x_1	x_2	**b**
①	0	-2	-2
②	2	4	10

lösen, so kann man die erste Gleichung nicht nutzen, um x_1 aus den anderen Gleichungen zu eliminieren, da $a_{11} = 0$. Erweiterung 1 hilft nicht weiter, da die Matrix A in Zeile 1 keine Nullzeile hat. Schreibt man die Gleichungen jedoch in anderer Reihenfolge, also

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 10 \\ -2x_2 &= -2, \end{aligned}$$

kann man wie gewohnt rechnen:

	x_1	x_2	**b**	
③	2	4	10	②
④	0	-2	-2	①
⑤	1	2	5	$\frac{1}{2}\cdot$③
⑥	0	-2	-2	④
⑦	1	0	3	⑤ + ⑥
⑧	0	1	1	$-\frac{1}{2}\cdot$⑥

Man erhält die Lösung $\mathbf{x} = (3,1)^T$ bzw. $\mathbb{L} = \{(3,1)^T\}$. ■

Kommt man bei der Durchführung des Eliminationsverfahrens also zu einem Punkt, an dem $a_{ii} = 0$ ist, aber A keine Nullzeile hat, so kann man versuchen, durch einen geeigneten Zeilentausch das Tableau auf eine Form zu bringen, in der man fortfahren kann. Da ein Zeilentausch einer einfachen Veränderung der Reihenfolge der Gleichungen entspricht, ergibt sich durch Vertauschung zweier Zeilen i_1 und i_2 aus einem linearen Gleichungssystem stets ein äquivalentes lineares Gleichungssystem, vgl. Satz 7.2.1. Da man mithilfe des Eliminationsverfahrens in den ersten Schritten die ersten Spalten bereits auf eine Form gebracht hat, in der die führenden Einsen der ersten Zeilen richtig geordnet sind, tauscht man Zeile $i_1 = i$ in der Regel nur mit Zeilen $i_2 > i$, also unterhalb von i.

Erweiterung 3: Überspringen von Variablen

Nicht jedes lineare Gleichungssystem hat in expliziter Form in jeder Spalte eine führende Eins. Dann kann es vorkommen, dass man eine Spalte überspringen muss, wie folgendes Beispiel zeigt.

■ Beispiel 7.2.8 — Überspringen von Variablen.
Um das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

zu lösen, betrachten wir das Tableau

	x_1	x_2	x_3	**b**	
①	1	2	3	6	
②	1	2	2	4	
③	1	2	3	6	①
④	0	0	-1	-2	② - ①

In Schritt 1 wurde mittels der ersten Zeile x_1 aus der zweiten Zeile eliminiert. Nun kann man aber nicht mit Hilfe der zweiten Zeile die zweite Variable eliminieren, da $a_{22} = 0$ gilt. Zeile 2 dieses linearen Gleichungssystems ist keine Nullzeile von A. Daher kann Erweiterung 1 nicht angewandt werden. Zudem gibt es keine Zeile $i_2 > 2$, mit der man eine Vertauschung vornehmen könnte.

Das lineare Gleichungssystem aus Zeilen ③ und ④ lautet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ -x_3 &= -2. \end{aligned}$$

Statt x_2 kann man nun x_3 mithilfe der zweiten Gleichung aus der ersten entfernen und eine führende Eins in der dritten Spalte erzeugen. Man erhält

	x_1	x_2	x_3	**b**	
⑤	1	2	0	0	③ + 3·④
⑥	0	0	1	2	-1·④

Da es keine dritte Zeile gibt, sind die Berechnungen beendet. Man erhält

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Jeder Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ mit belieber zweiter Komponente $x_2 \in \mathbb{R}$, erster Komponente $x_1 = -2x_2$ und dritter Komponente $x_3 = 2$ ist eine Lösung des obigen Gleichungssystems. Lösungen kann man also in der Form

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

darstellen. Schreibt man statt x_2 den Parameter t, ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} -2t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} \right| t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \left. \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

■

Dass diese Erweiterung zu äquivalenten linearen Gleichungssystemen führt, ergibt sich wieder direkt aus Satz 7.2.1.

Z Hat A in Zeile i eine Nullzeile und gilt $b_i = 0$, dann kann Zeile i gestrichen und Schritt i des Grundschemas wiederholt werden. Hat A in Zeile i eine Nullzeile und gilt $b_i \neq 0$, so kann das Verfahren abgebrochen werden und es gilt $\mathbb{L} = \{\}$.

Gilt $a_{ii} = 0$ in einer Zeile i von A, die keine Nullzeile ist, und gibt es eine andere Zeile $i_2 > i$ mit $a_{i_2 i} \neq 0$, so kann ein Zeilentausch mit dieser Zeile vorgenommen und danach Schritt i durchgeführt werden.

Gilt $a_{ii} = 0$ in einer Zeile i von A, die keine Nullzeile ist, und gibt es keine andere Zeile $i_2 > i$ mit $a_{i_2 i} \neq 0$, so kann die Spalte i übersprungen werden und im Fall $a_{i,i+1} \neq 0$ die Variable x_{i+1} aus allen Zeilen ausser Zeile i eliminiert werden.

7.2.4 Das Eliminationsverfahren

Ziele dieses Unterkapitels

- Wie kann man ein beliebiges lineares Gleichungssystem in eine explizite Form überführen oder entscheiden, dass es keine Lösung hat?

Zusammenfassend gehen wir also wie folgt mit Zeile $i = 1$ und Variable $j = 1$ beginnend vor, vgl. auch Abbildung 7.2:

Eliminationsverfahren:
Initialisierung: Setze $i = j = 1$.
Schritt (i, j):

- Nenne die aktuelle erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$.
- Ist $a_{ij} \neq 0$, dann überspringe den Erweiterungsschritt und führe den Eliminationsschritt aus.

  Erweiterungsschritt: Erweiterungen im Fall $a_{ij} = 0$:
  - Falls Zeile i eine Nullzeile von A ist:
    * Gilt $b_i = 0$, streiche die gesamte Zeile i und gehe zu Schritt (i, j), falls es ein Element a_{ij} gibt, also falls $(A|\mathbf{b})$ nach dem Streichen der Zeile mindestens noch i Zeilen besitzt. Gibt es kein solches Element, so endet das Eliminationsverfahren mit einem linearen Gleichungssystem in expliziter Form.
    * Gilt $b_i \neq 0$, hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung, $\mathbb{L} = \{\}$.
  - Falls Zeile i keine Nullzeile von A ist:
    * Existiert eine Zeile $i_2 > i$ mit $a_{i_2 j} \neq 0$, so tausche in der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ Zeile i mit dieser Zeile i_2 und gehe zu Schritt (i, j).
    * Existiert keine Zeile $i_2 > i$ mit $a_{i_2 j} \neq 0$, so betrachte die nächste Spalte, d.h. erhöhe j um 1, und gehe zu Schritt (i, j), falls es ein Element a_{ij} gibt, also falls $(A|\mathbf{b})$ nach dem Erhöhen von j mindestens j Spalten besitzt. Gibt es kein solches Element, so endet das Eliminationsverfahren mit einem linearen Gleichungssystem in expliziter Form.

  Eliminationsschritt:
  - Eliminiere Variable x_j in allen Zeilen $i_2 \neq i$, indem jeweils das $\frac{-a_{i_2 j}}{a_{ij}}$-fache der Zeile i zu Zeile i_2 in der Matrix $(A|\mathbf{b})$ addiert wird.
  - Teile Zeile i der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ durch a_{ij}.
  - Erhöhe i und j um 1 und gehe zu Schritt (i, j), falls es ein Element a_{ij}

gibt, also falls $(A|\mathbf{b})$ nach dem Erhöhen von i und j mindestens i Zeilen und j Spalten besitzt. Gibt es kein solches Element, so endet das Eliminationsverfahren mit einem linearen Gleichungssystem in expliziter Form.

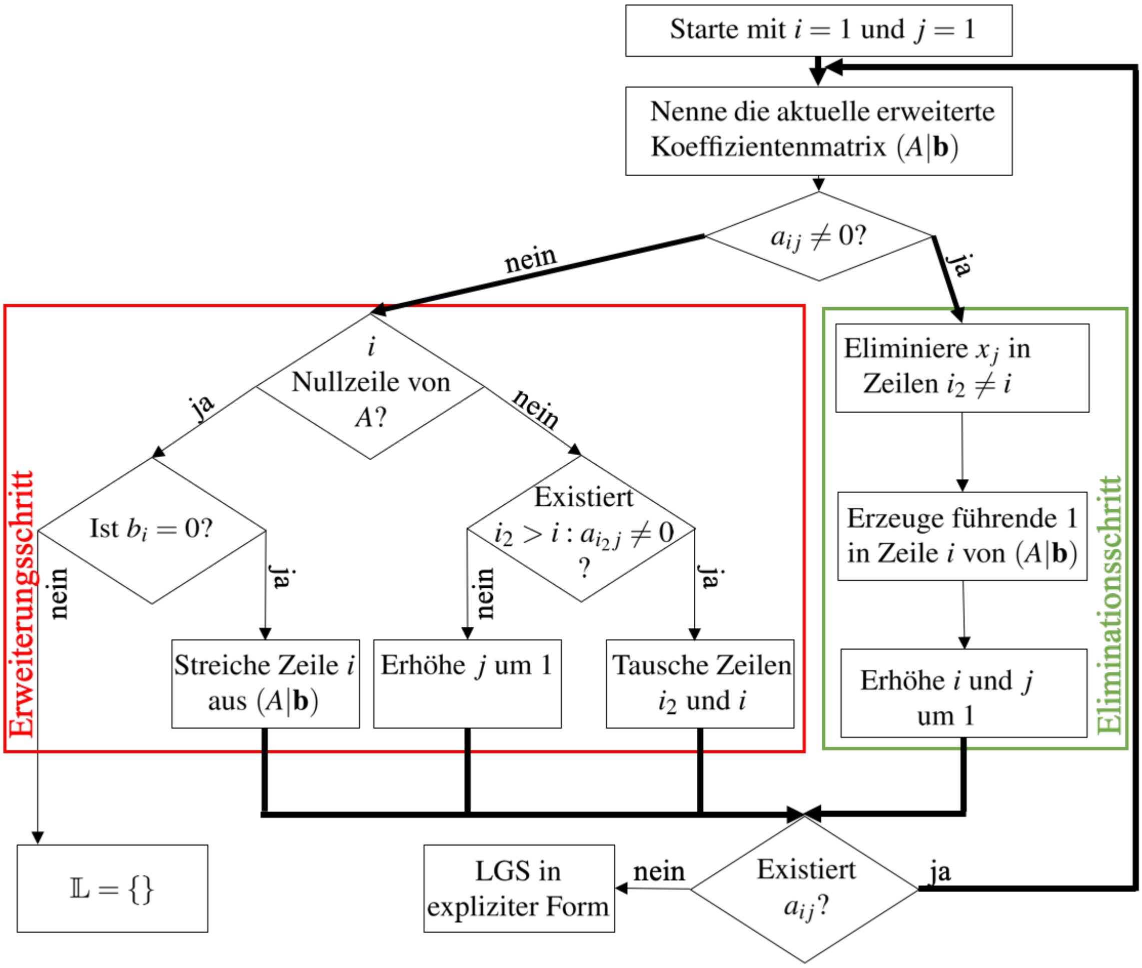

Abbildung 7.2: Illustration des Eliminationsverfahrens.

Obiges Eliminationsverfahren endet entweder mit der Aussage, dass die Lösungsmenge leer ist, oder mit einem äquivalenten linearen Gleichungssystem in expliziter Form, aus dem die Lösungen einfach abzulesen sind.

Satz 7.2.3 — Lösung eines LGS durch das Eliminationsverfahren.
Für ein beliebiges lineares Gleichungssystem liefert obiges Eliminationsverfahren entweder ein äquivalentes lineares Gleichungssystem in expliziter Form oder die Entscheidung, dass das lineare Gleichungssystem unlösbar ist.

Beweis. Einen Beweis findet man in Kall (1984) auf den Seiten 103 und 104. ■

Wir demonstrieren das Eliminationsverfahren an einigen Beispielen.

▪ Beispiel 7.2.9 — Ausführung des Eliminationsverfahrens.
Wir lösen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 1\\
x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 &= 2\\
2x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 9x_4 + 9x_5 &= 3\\
2x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 9x_4 + 9x_5 &= 3\\
2x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 9x_4 + 8x_5 &= 4
\end{aligned}$$

in Tableau-Form, wobei wir in diesem Beispiel alle Schritte des Eliminationsverfahrens, siehe Abbildung 7.2, ausführlich kennzeichnen:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**		
①	1	2	3	4	5	1		
②	1	2	4	5	6	2		
③	2	9	9	9	9	3		$a_{11} = 1 \neq 0$
④	2	9	9	9	9	3		$\rightarrow$ Elimination mit $i = 1$ und $j = 1$
⑤	2	9	9	9	8	4		
⑥	1	2	3	4	5	1	①$\cdot\frac{1}{1}$	
⑦	0	0	1	1	1	1	② - ①	
⑧	0	5	3	1	-1	1	③ - 2·①	$a_{22} = 0$
⑨	0	5	3	1	-1	1	④ - 2·①	$\rightarrow$ Erweiterung mit $i = 2$ und $j = 2$
⑩	0	5	3	1	-2	2	⑤ - 2·①	(Zeilentausch)
⑪	1	2	3	4	5	1	⑥	
⑫	0	5	3	1	-1	1	⑧	
⑬	0	0	1	1	1	1	⑦	$a_{22} = 5 \neq 0$
⑭	0	5	3	1	-1	1	⑨	$\rightarrow$ Elimination mit $i = 2$ und $j = 2$
⑮	0	5	3	1	-2	2	⑩	
⑯	1	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{27}{5}$	$\frac{3}{5}$	⑪ - $\frac{2}{5}$·⑫	
⑰	0	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	-$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	⑫$\cdot\frac{1}{5}$	
⑱	0	0	1	1	1	1	⑬	$a_{33} = 1 \neq 0$
⑲	0	0	0	0	0	0	⑭ - ⑫	$\rightarrow$ Elimination mit $i = 3$ und $j = 3$
⑳	0	0	0	0	-1	1	⑮ - ⑫	
㉑	1	0	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{18}{5}$	-$\frac{6}{5}$	⑯ - $\frac{9}{5}$·⑱	
㉒	0	1	0	-$\frac{2}{5}$	-$\frac{4}{5}$	-$\frac{2}{5}$	⑰ - $\frac{3}{5}$·⑱	
㉓	0	0	1	1	1	1	⑱	$a_{44} = 0$
㉔	0	0	0	0	0	0	⑲	$\rightarrow$ Erweiterung mit $i = 4$ und $j = 4$
㉕	0	0	0	0	-1	1	⑳	(Streichen der Nullzeile)
㉖	1	0	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{18}{5}$	-$\frac{6}{5}$	㉑	
㉗	0	1	0	-$\frac{2}{5}$	-$\frac{4}{5}$	-$\frac{2}{5}$	㉒	$a_{44} = 0$
㉘	0	0	1	1	1	1	㉓	$\rightarrow$ Erweiterung mit $i = 4$ und $j = 4$
㉙	0	0	0	0	-1	1	㉕	(Spalte überspringen)
㉚	1	0	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{18}{5}$	-$\frac{6}{5}$	㉖	
㉛	0	1	0	-$\frac{2}{5}$	-$\frac{4}{5}$	-$\frac{2}{5}$	㉗	$a_{45} =$ -1
㉜	0	0	1	1	1	1	㉘	$\rightarrow$ Elimination mit $i = 4$ und $j = 5$
㉝	0	0	0	0	-1	1	㉙	
㉞	1	0	0	$\frac{9}{5}$	0	$\frac{12}{5}$	㉚ + $\frac{18}{5}$·㉝	
㉟	0	1	0	-$\frac{2}{5}$	0	-$\frac{6}{5}$	㉛ - $\frac{4}{5}$·㉝	Es existiert kein a_{56}
㊱	0	0	1	1	0	2	㉜ + ㉝	$\rightarrow$ Eliminationsverfahren endet
㊲	0	0	0	0	1	-1	㉝$\cdot\frac{1}{-1}$	

Das lineare Gleichungssystem ㉞ bis ㊲ liegt in expliziter Form vor und lautet:

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{9}{5}x_4 &= \frac{12}{5} & \Leftrightarrow x_1 &= \frac{12}{5} - \frac{9}{5}x_4 \\ x_2 - \frac{2}{5}x_4 &= -\frac{6}{5} & \Leftrightarrow x_2 &= -\frac{6}{5} + \frac{2}{5}x_4 \\ x_3 + x_4 &= 2 & \Leftrightarrow x_3 &= 2 - x_4 \\ x_5 &= -1. \end{aligned}$$

Eine Lösung hat mit $x_4 \in \mathbb{R}$ also die folgende Form:

$$\begin{pmatrix} \frac{12}{5} - \frac{9}{5}x_4 \\ -\frac{6}{5} + \frac{2}{5}x_4 \\ 2 - x_4 \\ x_4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} \\ \frac{2}{5} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge ist

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} \\ \frac{2}{5} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

■

Üblicherweise werden weder die Schritte des Eliminationsverfahrens erwähnt noch das Element a_{ij} gekennzeichnet.[5] In den folgenden Beispielen wird daher wieder die übliche Notation verwendet, ohne explizit auf das Eliminationsverfahren aus Abbildung 7.2 zu referenzieren.

■ **Beispiel 7.2.10 — Ausführung des Eliminationsverfahrens.**
Wir lösen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -4x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 5x_2 &= 0 \end{aligned}$$

in Tableauform:

[5] Zudem werden der Erweiterungs- und der Eliminationsschritt häufig in nur einem Schritt durchgeführt. Wir werden diese Stufen zur besseren Übersichtlichkeit jedoch meist separat aufführen.

	x_1	x_2	x_3	**b**	
①	0	-4	-1	1	
②	1	1	-1	1	
③	1	5	0	0	
④	1	1	-1	1	②
⑤	0	-4	-1	1	①
⑥	1	5	0	0	③
⑦	1	1	-1	1	④
⑧	0	-4	-1	1	⑤
⑨	0	4	1	-1	⑥ - ④
⑩	1	0	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	⑦ + $\frac{1}{4}$·⑧
⑪	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$·⑧
⑫	0	0	0	0	⑨ + ⑧
⑬	1	0	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	⑩
⑭	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	⑪

Ausgehend vom Starttableau ① bis ③ wird wegen $a_{11} = 0$ erst ein Zeilentausch im Erweiterungsschritt vorgenommen. Dann wird in Zeile ④ das Element $a_{11} = 1$ genutzt, um den Eintrag $a_{31} = 1$ in Zeile ⑥ zu eliminieren. Das resultierende lineare Gleichungssystem ist in ⑦ bis ⑨ zusammengefasst. Die erste Spalte dieses linearen Gleichungssystems entspricht nun dem ersten Einheitsvektor. Ausgehend von ⑦ bis ⑨ wird dann das Element $a_{22} = -4$ genutzt, um in einem weiteren Eliminationsschritt den Eintrag $a_{32} = 4$ in der dritten Zeile und den Eintrag $a_{12} = 1$ in der ersten Zeile zu eliminieren. Zusätzlich wird Zeile ⑧ durch -4 geteilt um eine 1 im Eintrag a_{22} zu erzeugen. Die zweite Spalte des neu entstandenen linearen Gleichungssystems entspricht nun dem zweiten Einheitsvektor. Das Eliminationsverfahren überprüft dann $a_{33} = 0$. In Zeile ⑫ hat das neu entstandene lineare Gleichungssystem eine Nullzeile. Es wird daher Zeile ⑫ gelöscht. Daraufhin gibt es kein Element a_{33} mehr. Das Verfahren endet. Das lineare Gleichungssystem ⑬ bis ⑭ liegt in expliziter Form vor und lautet:

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{5}{4}x_3 &= \frac{5}{4} & &\Leftrightarrow x_1 = \frac{5}{4} + \frac{5}{4}x_3 \\ x_2 + \frac{1}{4}x_3 &= -\frac{1}{4} & &\Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_3. \end{aligned}$$

Eine Lösung hat mit $x_3 \in \mathbb{R}$ also die folgende Form:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{4} + \frac{5}{4}x_3 \\ -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge ist

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

■

Beispiel 7.2.11 — Weiteres Beispiel zur Ausführung des Eliminationsverfahrens. Suchen wir nach einer Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 13, \end{aligned}$$

führen wir folgende Schritte durch:

	x_1	x_2	x_3	**b**	
1	1	2	3	6	
2	2	5	2	4	
3	6	-3	1	2	
4	2	4	6	13	
5	1	2	3	6	1
6	0	1	-4	-8	2 - 2·1
7	0	-15	-17	-34	3 - 6·1
8	0	0	0	1	4 - 2·1
9	1	0	11	22	5 - 2·6
10	0	1	-4	-8	6
11	0	0	-77	-154	7 + 15·6
12	0	0	0	1	8
13	1	0	0	0	9 + $\frac{11}{77}$·11
14	0	1	0	0	10 - $\frac{4}{77}$·11
15	0	0	1	2	-$\frac{1}{77}$·11
16	0	0	0	1	12

Die Lösungsmenge ist leer, $\mathbb{L} = \{\}$, da Gleichung 16 keine Lösung hat.

Im obigen Beispiel folgten wir strikt dem vorgegebenen Eliminationsverfahren. Man hätte jedoch schon in Zeile 8 erkennen können, dass dieses lineare Gleichungssystem keine Lösung hat und dort abbrechen können. ■

Das oben vorgestellte Eliminationsverfahren liefert zwar stets ein Ergebnis, es existieren jedoch deutlich effizientere Alternativen.

Z Das in Abbildung 7.2 dargestellte Eliminationsverfahren führt zu einem äquivalenten LGS in expliziter Form oder entscheidet, dass die Lösungsmenge leer ist.

7.2.5 Variationen des Eliminationsverfahrens

Ziele dieses Unterkapitels

- Warum kann man im Fall einer Nullzeile in Zeile i von A und rechter Seite $b_i \neq 0$ das Eliminationsverfahren vorzeitig abbrechen?
- Wie kommt man einfach zu einer Lösung des LGS, wenn man das Eliminationsverfahren schon nach Erreichen der Zeilenstufenform von A abbricht?

- Wie können verschiedene lineare Gleichungssysteme mit gleicher Koeffizientenmatrix A aber unterschiedlichen rechten Seiten effizient gelöst werden?
- Wie kann man mit Hilfe des Eliminationsverfahrens Basislösungen erzeugen?

Es existieren verschiedene Variationen des Eliminationsverfahrens. Einige davon sind effizienter als obiges Eliminationsverfahren, die Grundideen sind jedoch die gleichen.

Vorzeitiges Abbrechen der Umformungen

Um unnötige Berechnungen zu vermeiden, fragen einige Variationen des Eliminationsverfahrens häufiger ab, ob eine Gleichung der Form $0x_1 + \cdots 0x_n = b_i$ mit $b_i \neq 0$ auftritt. In diesem Fall werden die Berechnungen direkt abgebrochen und die leere Menge als Lösungsmenge angegeben, vgl. Beispiel 7.2.11. Einige der Variationen beenden die Umformungen bevor sie eine explizite Form der Koeffizientenmatrix erhalten. Sie zielen lediglich auf eine Zeilenstufenform ab. Denn liegt eine Matrix in Zeilenstufenform vor, kann man durch rückwärts Einsetzen die Lösung erhalten, falls eine solche existiert.

■ Beispiel 7.2.12 — Ablesen einer Lösung aus der Zeilenstufenform.
Statt das lineare Gleichungssystem aus Beispiel 7.2.2 in eine explizite Form zu überführen, hätte man auch wie folgt rechnen können:

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}$	
①	1	2	3	6	
②	2	5	2	4	
③	6	-3	1	2	
④	1	2	3	6	①
⑤	0	1	-4	-8	② - 2·①
⑥	0	-15	-17	-34	③ - 6·①
⑦	1	2	3	6	④
⑧	0	1	-4	-8	⑤
⑨	0	0	-77	-154	⑥ + 15·⑤

Die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems ⑦ bis ⑨ liegt in Zeilenstufenform vor. Aus ⑨ folgt $-77x_3 = -154$ und damit $x_3 = 2$. Aus ⑧ folgt $x_2 - 4x_3 = -8$. Wegen $x_3 = 2$ gilt somit $x_2 - 4 \cdot 2 = -8$ und damit $x_2 = 0$. Aus ⑦ folgt mit $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$, dass $x_1 = 0$ ist. ■

Vermeidung von wiederholten Berechnungen

Eine andere Art der Effizienzsteigerung befasst sich mit der Vermeidung wiederholter Berechnungen. Müssen lineare Gleichungssysteme der Form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}^1$ und $A\mathbf{x} = \mathbf{b}^2$ gelöst werden, können beide Gleichungssysteme in einem Tableau der Form

	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\mathbf{b}^1$	$\mathbf{b}^2$
①	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	b_1^1	b_1^2
②	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	b_2^1	b_2^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
ⓜ	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	b_m^1	b_m^2

simultan gelöst werden.

■ Beispiel 7.2.13 — Simultanes Lösen linearer Gleichungssysteme.
Wir lösen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -4x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 5x_2 &= 0 \end{aligned}$$

aus Beispiel 7.2.10 und das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -4x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 5x_2 &= 0 \end{aligned}$$

simultan in Tableauform:

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}^1$	$\mathbf{b}^2$	
1	0	-4	-1	1	0	
2	1	1	-1	1	1	
3	1	5	0	0	0	
4	1	1	-1	1	1	2
5	0	-4	-1	1	0	1
6	1	5	0	0	0	3
7	1	1	-1	1	1	4
8	0	-4	-1	1	0	5
9	0	4	1	-1	-1	6 - 4
10	1	0	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	1	7 + $\frac{1}{4}\cdot$8
11	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}\cdot$8
12	0	0	0	0	-1	9 + 8

Betrachtet man nur die Spalten von x_1, x_2, x_3 und $\mathbf{b}^1$ sieht man, dass Zeile 12 die Gleichung $0 = 0$ liefert, welche für alle $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ wahr ist. Zeilen 10 und 11 können nach x_1 und x_2 aufgelöst werden, wobei x_3 frei gewählt werden kann. Das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}^1$ ist also lösbar.

Betrachtet man nur die Spalten von x_1, x_2, x_3 und $\mathbf{b}^2$, liefert Zeile 12 die Gleichung $0 = -1$. Diese Gleichung ist stets unwahr. Daher hat das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}^2$ keine Lösung, d.h. das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}^2$ ist unlösbar. ■

Eine andere Art, eine Wiederholung des Eliminationsverfahrens des linearen Gleichungssystems für verschiedene rechte Seiten zu vermeiden, ist es, das lineare Gleichungssystem einmalig mit einer allgemeinen rechten Seite $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$ zu lösen. Diesen Ansatz nennt man auch die parametrische Lösung des linearen Gleichungssystems. Wir demonstrieren das Vorgehen am Beispiel.

■ Beispiel 7.2.14 — Parametrische Lösung linearer Gleichungssysteme.

Wir lösen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -4x_2 - x_3 &= b_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= b_2 \\ x_1 + 5x_2 &= b_3 \end{aligned}$$

in Tableauform:

	x_1	x_2	x_3	**b**	
①	0	-4	-1	b_1	
②	1	1	-1	b_2	
③	1	5	0	b_3	
④	1	1	-1	b_2	②
⑤	0	-4	-1	b_1	①
⑥	1	5	0	b_3	③
⑦	1	1	-1	b_2	④
⑧	0	-4	-1	b_1	⑤
⑨	0	4	1	b_3 - b_2	⑥ - ④
⑩	1	0	$-\frac{5}{4}$	$b_2 + \frac{1}{4}b_1$	⑦ + $\frac{1}{4}\cdot$⑧
⑪	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}b_1$	$-\frac{1}{4}\cdot$⑧
⑫	0	0	0	b_3 - b_2 + b_1	⑨ + ⑧

Dieses lineare Gleichungssystem hat genau dann eine Lösung, wenn $b_3 - b_2 + b_1 = 0$. Das lineare Gleichungssystem in expliziter Form lautet

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{5}{4}x_3 &= b_2 + \frac{1}{4}b_1 \\ x_2 + \frac{1}{4}x_3 &= -\frac{1}{4}b_1 \\ 0 &= b_3 - b_2 + b_1. \end{aligned}$$

Damit ist im Fall $0 = b_3 - b_2 + b_1$ jeder Vektor der Form

$$\begin{pmatrix} b_2 + \frac{1}{4}b_1 + \frac{5}{4}x_3 \\ -\frac{1}{4}b_1 - \frac{1}{4}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

mit beliebigem $x_3 \in \mathbb{R}$ eine Lösung. Die Lösungsmenge ist im Fall $0 = b_3 - b_2 + b_1$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} b_2 + \frac{1}{4}b_1 \\ -\frac{1}{4}b_1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für $b_1 = 1, b_2 = 1$ und $b_3 = 0$ ist $b_3 - b_2 + b_1 = 0$. Also ist die Lösungsmenge nicht leer und es ergibt sich wie in Beispiel 7.2.10

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für $b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 0$ ist $b_3 - b_2 + b_1 = -1 \neq 0$. Daher ist die Lösungsmenge in diesem Fall leer, $\mathbb{L} = \{\}$, wie wir in Beispiel 7.2.13 bereits gesehen haben. ■

Ein Verfahren zur Generierung von Basislösungen

Wie bereits erwähnt, werden Basislösungen zur Lösung linearer Optimierungsprobleme eingesetzt. Das in diesem Bereich am meisten verbreitete Lösungsinstrument zählt dabei Basislösungen in einer geschickten Reihenfolge auf. Auch für eine solche Aufzählung kann das Eliminationsverfahren genutzt werden.

Im Endtableau des Elimininationsverfahrens hat man stets ein LGS in expliziter Form, welches zum urspünglichen LGS äquivalent ist. Man kann daher stets eine Basislösung direkt aus der rechten Seite des Endtableaus ablesen, indem man jeweils der Variable, in deren Spalte der i-te kanonische Einheitsvektor steht, die rechte Seite b_i zuweist und die anderen Variablen gleich 0 setzt.

■ **Beispiel 7.2.15 — Ablesen einer Basislösung aus dem Endtableau.**
Wir wenden nun das Eliminationsverfahren auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4 &= 8 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + 6x_4 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 12x_4 &= 14 \\ -2x_1 + 3x_3 + 7x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 &= 6 \end{aligned}$$

mit erweiterter Koeffizientenmatrix

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 & 8 \\ -1 & -1 & 3 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 12 & 14 \\ -2 & 0 & 3 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 6 \end{array}\right)$$

an:

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**	
①	1	2	1	8	8	
②	-1	-1	3	6	2	
③	4	1	2	12	14	
④	-2	0	3	7	2	
⑤	1	1	1	6	6	
⑥	1	2	1	8	8	①
⑦	0	1	4	14	10	② + ①
⑧	0	-7	-2	-20	-18	③ - 4·①
⑨	0	4	5	23	18	④ + 2·①
⑩	0	-1	0	-2	-2	⑤ - ①
⑪	1	0	-7	-20	-12	⑥ - 2·⑦
⑫	0	1	4	14	10	⑦
⑬	0	0	26	78	52	⑧ + 7·⑦
⑭	0	0	-11	-33	-22	⑨ - 4·⑦
⑮	0	0	4	12	8	⑩ + ⑦
⑯	1	0	0	1	2	⑪ + $\frac{7}{26}$·⑬
⑰	0	1	0	2	2	⑫ - $\frac{4}{26}$·⑬
⑱	0	0	1	3	2	$\frac{1}{26}$·⑬
⑲	0	0	0	0	0	⑭ + $\frac{11}{26}$·⑬
⑳	0	0	0	0	0	⑮ - $\frac{4}{26}$·⑬
㉑	1	0	0	1	2	⑯
㉒	0	1	0	2	2	⑰
㉓	0	0	1	3	2	⑱

Im Endtableau stehen die kanonischen Einheitsvektoren $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3 \in \mathbb{R}^3$ in den ersten drei Spalten. Nennen wir die Koeffizientenmatrix im Endtableau wieder $\tilde{A}$ und die rechte Seite $\tilde{\mathbf{b}}$, ergibt sich eine Lösung daher als $x_1 = \tilde{b}_1 = 2$, $x_2 = \tilde{b}_2 = 2$, $x_3 = \tilde{b}_3 = 2$ und $x_4 = 0$,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}.$$

Wie oben bereits erwähnt hat ein LGS in der Regel aber mehr als nur eine Basislösung. Weitere Basislösungen können generiert werden, indem man Einheitsvektoren in anderen Spalten der Koeffizientenmatrix erzeugt. Führt man beispielsweise einen Eliminationsschritt mit $i = 1$ und $j = 4$ durch, erhält man:

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**	
㉔	1	0	0	1	2	㉑
㉕	-2	1	0	0	-2	㉒ - 2·㉑
㉖	-3	0	1	0	-4	㉓ - 3·㉑

Die Einheitsvektoren stehen nun nicht mehr in den Spalten 1,2 und 3, sondern in Spalten 2, 3 und 4. Die zugehörige Basislösung ergibt sich als

- $x_1 = 0$, da kein Einheitsvektor in Spalte 1 steht,
- $x_2 = -2 = \tilde{b}_2$, da $\mathbf{e}^2$ unter x_2 steht,
- $x_3 = -4 = \tilde{b}_3$, da $\mathbf{e}^3$ unter x_3 steht,
- $x_4 = +2 = \tilde{b}_1$, da $\mathbf{e}^1$ unter x_4 steht.

Der Eliminationsschritt mit $i = 1$ und $j = 4$ führte dazu, dass nun nicht mehr $x_4 = 0$ sondern $x_1 = 0$ gefordert wird.[6]

Natürlich kommt man auf die gleiche Basislösung $\mathbf{x} = (0, -2, -4, 2)^T$, wenn man das lineare Gleichungssystem des Tableaus ㉔−㉖ ausformuliert zu

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 2 & &\Leftrightarrow x_4 = 2 - x_1 \\ -2x_1 + x_2 &= -2 & &\Leftrightarrow x_2 = -2 + 2x_1 \\ -3x_1 + x_3 &= -4 & &\Leftrightarrow x_3 = -4 + 3x_1 \end{aligned}$$

und die Variable $x_1 = 0$ setzt.

So haben wir also bisher zwei Basislösungen gefunden, eine mit $x_4 = 0$ und eine mit $x_1 = 0$. Durch geschicktes Umformen kann man auch Basislösungen finden, in denen $x_2 = 0$ oder $x_3 = 0$ gilt: Will man beispielsweise ausgehend von Tableau ㉔−㉖ mit einer Basislösung mit $x_1 = 0$ zu einer Basislösung mit $x_2 = 0$ kommen, müssen in den Spalten 1, 3 und 4 kanonische Einheitsvektoren stehen. Die Frage ist, durch welche Umformungen die erste Spalte zu einem kanonischen Einheitsvektor wird und die dritte und vierte Spalte unverändert bleiben. Da in der dritten und vierten Spalte $\mathbf{e}^3$ und $\mathbf{e}^1$ stehen, muss die erste Spalte zu $\mathbf{e}^2$ umgeform werden. Dies wird durch einen Eliminationsschritt mit $i = 2$ und $j = 1$ erzielt:

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{b}$	
㉗	0	$\frac{1}{2}$	0	1	1	㉔ + $\frac{1}{2}$㉕
㉘	1	-$\frac{1}{2}$	0	0	1	-$\frac{1}{2}$㉕
㉙	0	-$\frac{3}{2}$	1	0	-1	㉖ - $\frac{3}{2}$㉕

Die entsprechende Basislösung ist also $\mathbf{x} = (1, 0, -1, 1)^T$, wobei

- $x_1 = 1 = \tilde{b}_2$, da $\mathbf{e}^2$ unter x_1 steht,
- $x_2 = 0$, da in Spalte 2 kein Einheitsvektor steht,
- $x_3 = -1 = \tilde{b}_3$, da $\mathbf{e}^3$ unter x_3 steht,
- $x_4 = 1 = \tilde{b}_1$, da $\mathbf{e}^1$ unter x_4 steht.

Führt man nun einen Eliminationsschritt mit $i = 3$ und $j = 2$ aus, ergibt sich

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{b}$	
㉚	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	㉗ + $\frac{1}{3}$㉙
㉛	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	㉘ - $\frac{1}{3}$㉙
㉜	0	1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	㉙$\cdot(-\frac{2}{3})$

mit Basislösung $\mathbf{x} = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3})^T$.

In diesem Beispiel kann man durch Umformen in jeder Spalte von A die drei Einheitsvektoren erhalten. Es gibt also vier Möglichkeiten, diejenige Spalte auszuwählen, in der

[6] Aufgrund dieses Wechsels (englisch: pivot) der Basislösung, welcher sich durch den Eliminationsschritt ergibt, der $a_{14} = 1$ erzeugt, spricht man auch vom Pivotelement a_{14}.

kein Einheitsvektor stehen soll. So entstehen hier vier verschiedene Basislösungen. ■

Wir demonstrieren das Vorgehen in einem weiteren Beispiel und zeigen zudem, dass Basislösungen, welche sich aus verschiedenen Kombinationen von erzeugten Einheitsvektoren ergeben, nicht immer verschieden sein müssen.

■ Beispiel 7.2.16 — Basislösungen.
Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -4x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 5x_2 &= 0 \end{aligned}$$

haben wir in Beispiel 7.2.10 über das Eliminationsverfahren mit Hilfe der Tableaus

	x_1	x_2	x_3	**b**	
①	0	-4	-1	1	
②	1	1	-1	1	
③	1	5	0	0	
...	...	...	...	...	...
⑬	1	0	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	⑩
⑭	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	⑪

gelöst. Unser Eliminationsverfahren führte dabei zu einem lösbaren LGS in expliziter Form mit kanonischen Einheitsvektoren in der ersten und zweiten Spalte der Koeffizentenmatrix. Die rechte Seite des letzten Tableaus entspricht daher einer Basislösung, in welcher $x_3 = 0$ gilt und nur x_1 und x_2 von 0 verschiedene Werte haben. Die Basislösung lautet $\mathbf{x} = (\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, 0)^T$.

Wenn man wollte, könnte man statt eines Einheitsvektors in der zweiten Spalte auch einen Einheitsvektor in der dritten Spalte in einem weiteren Tableau erzeugen. Hierfür führen wir einen Eliminationsschritt mit $i = 2$ und $j = 3$ aus, um den zweiten kanonischen Einheitsvektor in Spalte 3 zu erzeugen:

	x_1	x_2	x_3	**b**	
⑮	1	5	0	0	⑬ + 5·⑭
⑯	0	4	1	-1	4·⑭

Die rechte Seite des letzten Tableaus entspricht hier also einer Lösung, in welcher $x_2 = 0$ gilt und wieder nur die zu den Spalten mit Einheitsvektoren gehörenden Variablen von 0 verschiedene Werte annehmen. Die entsprechende Basislösung ist $\mathbf{x} = (0, 0, -1)^T$.

Führt man einen weiteren Eliminationsschritt mit $i = 1$ und $j = 2$ aus, entsteht ein kanonischer Einheitsvektor in der zweiten statt in der ersten Spalte:

	x_1	x_2	x_3	**b**	
⑰	$\frac{1}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{5}$ ⑮
⑱	$-\frac{4}{5}$	0	1	-1	⑯ $-\frac{4}{5}$ ⑮

Nun fordern wir also nicht mehr $x_2 = 0$ sondern $x_1 = 0$. Die Basislösung $\mathbf{x} = (0,0,-1)^T$ hat sich bei diesem Austauschschritt nicht verändert, da $x_1 = x_2 = 0$ gilt. ■

Z Gilt $b_i \neq 0$ und ist Zeile i eine Nullzeile von A, gilt $\mathbb{L} = \{\}$. Das Eliminationsverfahren kann daher sofort abgebrochen werden.

Ausgehend von einem lösbaren LGS mit Variablen $x_1, \ldots, x_n$, bei welchem die Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in Zeilenstufenform ohne Nullzeilen vorliegt, kann eine erste Variable aus Gleichung m (ggf. in Abhängigkeit von freien Variablen) bestimmt werden. Durch Einsetzen dieser $k = 1$ Variablen in Gleichung $m - k$ kann dann gegebenenfalls eine weitere Variable bestimmt werden. Durch Wiederholung dieses Schrittes für $k = 2, \ldots, m-1$ werden so alle Lösungen gefunden.

Sucht man Lösungen verschiedener linearer Gleichungssysteme mit gleicher Koeffizientenmatrix aber unterschiedlichen rechten Seiten, so kann das Eliminationsverfahren entweder für mehrere rechte Seiten parallel oder mit einer parametrischen (allgemeinen) rechten Seite durchgeführt werden.

Aus dem Endtableau des Eliminationsverfahrens lässt sich eine Basislösung ablesen. Weitere Basislösungen erhält man durch zusätzliche Eliminationsschritte.

7.3 Geometrie linearer Gleichungssysteme

Um eine Intuition für lineare Gleichungssysteme zu entwickeln, beschäftigen wir uns zunächst mit nur einer linearen Gleichung ($m = 1$) mit n Variablen.

7.3.1 Lineare Gleichungen und affine Räume

Ziele dieses Unterkapitels

- Was ist ein affiner Raum? Was ist die Dimension eines affinen Raums?
- Unter welchen Bedingungen beschreibt die Lösungsmenge einer Gleichung einen affinen Raum? Unter welchen Bedingungen beschreibt die Lösungsmenge einer Gleichung einen linearen Raum?
- Wie kann man überprüfen, ob zwei affine Räume gleich sind?

Lineare Gleichungen, also Gleichungen der Form

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

mit $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, b_1 \in \mathbb{R}$, können Geraden, Ebenen und andere Punktmengen beschreiben. In diesem Abschnitt werden wir homogene Gleichungen, d.h. mit einer rechten Seite $b_1 = 0$, sowie inhomogene lineare Gleichungen, d.h. mit $b_1 \neq 0$, geometrisch veranschaulichen und eine Brücke zwischen deren Darstellungsform als Gleichung und der Vektorenschreibweise schlagen.

■ **Beispiel 7.3.1 — Darstellungsformen einer Geraden im $\mathbb{R}^2$.**
Die Menge aller Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ welche die Gleichung $x_1 - 2x_2 = 0$ bzw.

$$x_2 = \frac{1}{2}x_1$$

lösen, beschreibt eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung $\frac{1}{2}$. Für gegebenes x_1 findet man einen Punkt auf dieser Geraden, indem man $x_2 = \frac{1}{2}x_1$ wählt. Die Menge aller Punkte dieser Geraden ist also

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Diese nicht-leere Menge G ist eine lineare Hülle und damit ein linearer Raum, vgl. Satz 6.4.2. Da die Lösungsmenge G ein linearer Raum ist, wissen wir, dass $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eine Lösung ist. Zudem muss ausgehend von einer Lösung, wie z.B. $\mathbf{x}^1 = (2,1)^T$ oder $\mathbf{x}^2 = (4,2)^T$, auch jedes Vielfache von $\mathbf{x}^1$ oder $\mathbf{x}^2$ und jede Linearkombination der beiden Vektoren in der Lösungsmenge G sein.

Die Menge aller Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ welche die Gleichung $x_1 - 2x_2 = 1$ bzw.

$$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1$$

lösen, beschreibt eine Gerade mit y-Achsenabschnitt $-\frac{1}{2}$ und Steigung $\frac{1}{2}$. Für gegebenes x_1 findet man einen Punkt auf dieser Geraden, indem man $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1$ wählt. Die Menge aller Punkte dieser Geraden ist

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Elemente dieser Menge erhält man also durch Addition des Vektors $(0, -\frac{1}{2})^T$ mit einem beliebigen Vielfachen des Vektors $(1, \frac{1}{2})^T$, also einem Element aus dessen linearer Hülle, vgl. Abbildung 7.3. Diese nicht-leere Menge A ist kein linearer Raum, da $\mathbf{0} \notin A$, vgl. Satz 6.4.1. Hat man zwei beliebige Lösungen der Lösungsmenge A gefunden, z.B. $\mathbf{x}^1 = (1,0)^T \in A$ und $\mathbf{x}^2 = (3,1)^T \in A$, so ist nicht jedes Vielfache dieser Vektoren oder gar jede Linearkombination in der Lösungsmenge A. Beispielsweise ist $2\mathbf{x}^1 = (2,0)^T \notin A$ und $\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2 = (4,1)^T \notin A$. ■

Eine lineare Gleichung mit n Variablen der Form $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$ und $a_{1n} \neq 0$ kann stets als

$$x_n = \frac{b_1 - a_{11}x_1 - \cdots - a_{1n-1}x_{n-1}}{a_{1n}}$$

nach x_n aufgelöst werden. Für beliebige $x_1, \ldots, x_{n-1}$ stellt der Vektor $(x_1, \ldots, x_{n-1}, \frac{b_1 - a_{11}x_1 - \cdots - a_{1n-1}x_{n-1}}{a_{1n}})^T$ stets eine Lösung dar. Fasst man alle von $x_1, \ldots, x_n$ abhängigen Terme in separaten Spaltenvektoren zusammen, ergibt sich eine Lösungsmenge der Form

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b_1}{a_{1n}} \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{a_{11}}{a_{1n}} \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{a_{12}}{a_{1n}} \end{pmatrix} + \cdots + t_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -\frac{a_{1n-1}}{a_{1n}} \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ist die rechte Seite einer linearen Gleichung $b_1 = 0$, so ist $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ immer eine Lösung der Gleichung. In diesem Fall entspricht der erste Vektor in obiger Lösungsmenge dem

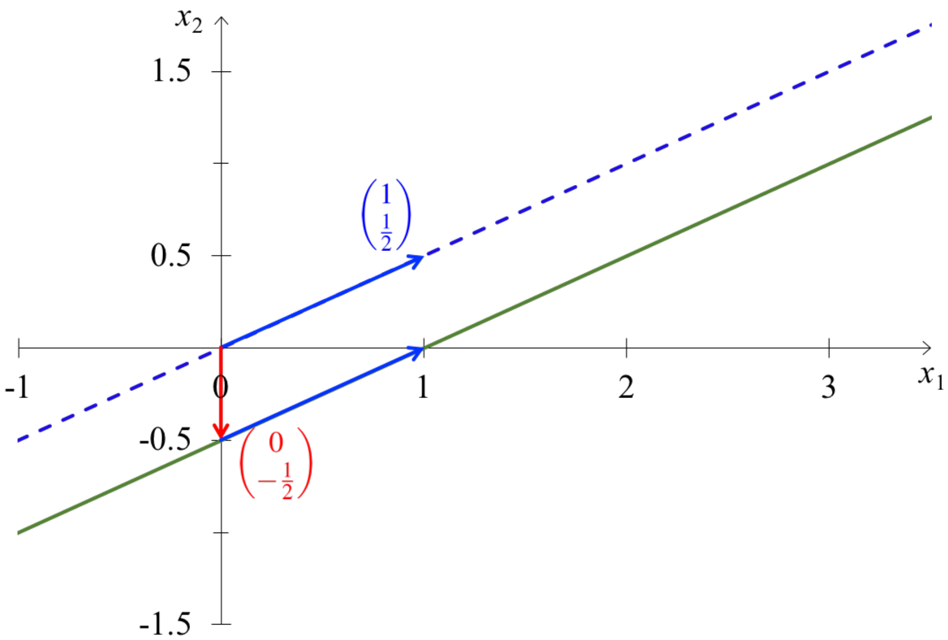

Abbildung 7.3: Die Geraden $x_2 = \frac{1}{2}x_1$ und $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1$.

Nullvektor. Die Lösungsmenge ist dann also die Menge aller Linearkombinationen der $n-1$ folgenden Vektoren und es gilt

$$\mathbb{L} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{a_{11}}{a_{1n}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{a_{12}}{a_{1n}} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -\frac{a_{1n-1}}{a_{1n}} \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit n Variablen und rechter Seite $b_1 = 0$ ist also eine lineare Hülle von $n-1$ linear unabhängigen Vektoren und damit ein linearer Raum der Dimension $n-1$. Die lineare Unabhängigkeit der $n-1$ Vektoren folgt aus Satz 6.3.3 indem man sich davon überzeugt, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$ gelten muss, falls

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{a_{11}}{a_{1n}} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{a_{12}}{a_{1n}} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -\frac{a_{1n-1}}{a_{1n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt.[7] Wie in Definition 6.4.2 erwähnt, nennt man lineare Räume auch Vektorräume. Ist die rechte Seite einer linearen Gleichung mit n Variablen nicht gleich Null, $b_1 \neq 0$, so ist $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ keine Lösung. Laut Satz 6.4.1 ist die Lösungsmenge dann kein linearer Raum,

[7] Eine andere Art, die lineare Unabhängigkeit einfach zu sehen, ist folgende: Würde man die Vektoren zu Zeilenvektoren transponieren und untereinanderschreiben, ergäbe sich eine Matrix in Zeilenstufenform. Somit sind die Zeilenvektoren linear unabhängig.

bzw. Vektorraum. Im $\mathbb{R}^2$ entspricht die Lösungsmenge dem Graphen einer affin-linearen Funktion. Eine Punktmenge dieser Form nennt man auch einen affinen Raum.

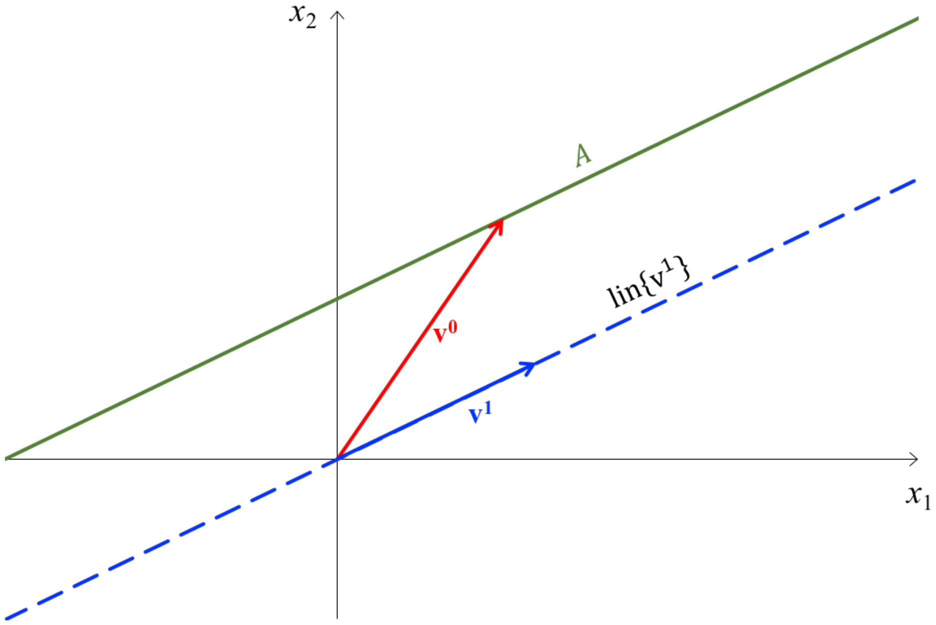

Abbildung 7.4: Ein affiner Raum A im $\mathbb{R}^2$.

Definition 7.3.1 — Affiner Raum.
Seien $\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^m \in \mathbb{R}^n$. Die Menge aller Punkte, die sich aus einer Addition des Vektors $\mathbf{v}^0$ und allen möglichen Linearkombinationen von $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^m$ ergeben, also

$$A = \left\{ \mathbf{v}^0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{v}^i \,\middle|\, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

heisst affiner Raum. Die Dimension des affinen Raums A, kurz $\dim(A)$, ist definiert als die Dimension des linearen Raums $\mathrm{lin}\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^m\}$.

Ein linearer Raum ist stets ein affiner Raum mit $\mathbf{v}^0 = \mathbf{0}$. Jedoch ist ein affiner Raum mit $\mathbf{v}^0 \notin \mathrm{lin}\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^m\}$ kein linearer Raum, vgl. Abbildung 7.4.

Analog zur graphischen Interpretation im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ bezeichnet man affine Räume $A \subseteq \mathbb{R}^n$ der Dimension 1 als Geraden. Affine Räume der Dimension 2 bezeichnet man als Ebenen. Allgemein bezeichnet man einen affinen Raum $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Dimension $n-1$ als Hyperebene im $\mathbb{R}^n$. Im $\mathbb{R}^3$ ist jede Ebene damit auch eine Hyperebene. Im $\mathbb{R}^{100}$ hat eine Hyperebene die Dimension 99, eine Ebene die Dimension 2. Ein affiner Raum der Dimension 0 entspricht der Addition des Vektors $\mathbf{v}^0$ mit dem Nullvektor, ist also gleich dem Punkt $\mathbf{v}^0$. Ein affiner Raum der Dimension 0 beschreibt daher einen Punkt.

Definition 7.3.2 — Punkte, Geraden, Ebenen und Hyperebenen.
Ein affiner Raum $A \subseteq \mathbb{R}^n$ der Dimension

- 0 heisst Punkt,
- 1 heisst Gerade,

- 2 heisst Ebene,
- $n-1$ heisst Hyperebene.

Eine lineare Gleichung mit $n \geq 1$ Variablen beschreibt stets eine Hyperebene des $\mathbb{R}^n$, da ihre Lösungsmenge ein affiner Raum mit Dimension $n-1$ ist, siehe oben. Im $\mathbb{R}^3$ ist dies eine Ebene. Im $\mathbb{R}^2$ beschreibt eine Gleichung eine Gerade, also einen affinen Raum der Dimension $n-1$, wobei $n=2$, vgl. Beispiel 7.3.1.

Es gilt also zusammenfassend:

Satz 7.3.1 — Struktur der Lösung einer Gleichung. Seien $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, b_1 \in \mathbb{R}$ und $a_{1j} \neq 0$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$. Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$ ist ein affiner Raum und beschreibt eine Hyperebene des $\mathbb{R}^n$. Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ist ein linearer Raum genau dann, wenn $b_1 = 0$.

Beweis. Im Fall $j = n$ folgt die Behauptung direkt aus der Darstellung der Lösungsmenge $\mathbb{L}$ oben, d.h.

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b_1}{a_{1n}} \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{a_{11}}{a_{1n}} \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{a_{12}}{a_{1n}} \end{pmatrix} + \cdots + t_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -\frac{a_{1n-1}}{a_{1n}} \end{pmatrix} \middle| \, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für $j = 1, \ldots n-1$ kann man die Lösungsmenge analog darstellen. ■

Beispiel 7.3.2 — Eine Ebene im $\mathbb{R}^3$. Eine Lösung der Gleichung $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ kann man für gegebene x_1 und x_2 mit $x_3 = -\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2$ als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad , \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

beschreiben. Die Menge

$$\mathbb{L} = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \middle| \, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\}$$

aller Lösungen dieser Gleichung beschreibt einen linearen Raum der Dimension 2, eine Ebene durch den Ursprung.

Eine Lösung der Gleichung $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$ kann man für gegebene x_1 und x_2 mit $x_3 = 2 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2$ als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad , \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

beschreiben. Die Menge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

ist ein affiner Raum der Dimension 2, also eine Ebene, vgl. Abbildung 7.5. Die rechte Seite $b_1 = 6$ führt zu einer Verschiebung der Ebene um den Vektor $(0,0,2)^T$. ■

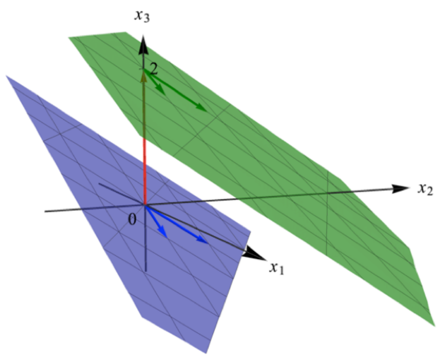

Abbildung 7.5: Die Ebenen $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ und $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$.

So wie die Darstellung eines linearen Raums nicht eindeutig ist, ist auch die Darstellung affiner Räume nicht eindeutig. Wir illustrieren dies am Beispiel:

■ **Beispiel 7.3.3 — Fortsetzung von Beispiel 7.3.1.**
Die Menge aller Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, welche die Gleichung $x_1 - 2x_2 = 1$ lösen, kann man auch als jene Punkte bestimmen, für welche $x_1 = 1 + 2x_2$ gilt, also

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ausgehend vom Ursprung $(0,0)^T$ erhält man Punkte in B durch Addition des Vektors $(1,0)^T$ und einem Vielfachen von $(2,1)^T$. Obwohl es aus Abbildung 7.6 klar ist, kann man anhand der formalen Darstellung nur schwer erkennen, dass dies der Menge

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

aus Beispiel 7.3.1 entspricht.

Man erkennt aber relativ einfach, dass die Menge aller Vielfachen von $(2,1)^T$ der Menge aller Vielfachen von $(1, \frac{1}{2})^T$ entspricht. Wegen

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

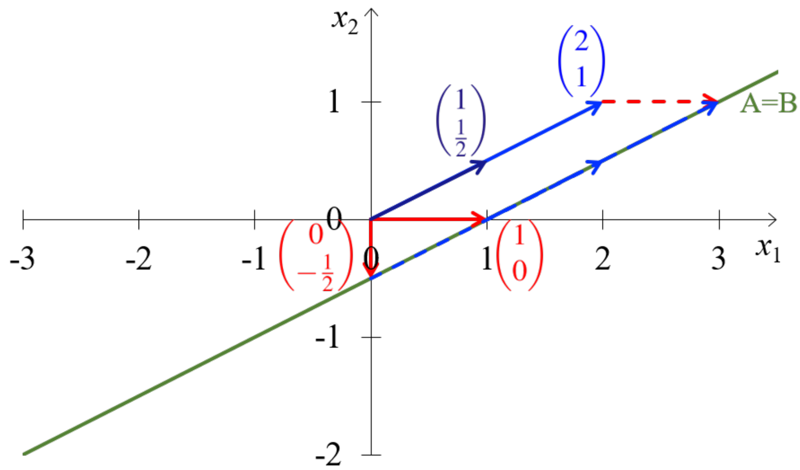

Abbildung 7.6: Die Gerade $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{x_1}{2}$.

Zudem ist der Punkt $(1,0)^T + (-\frac{1}{2}) \cdot (2,1)^T = (0,-\frac{1}{2})^T \in A$ für $s = -\frac{1}{2}$. Die Menge A entspricht also der Menge B, denn

$$
\begin{aligned}
A &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-\frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}, t \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\} = B.
\end{aligned}
$$

■

Allgemein kann man die Gleichheit zweier affiner Räume mit Hilfe des folgenden Satzes überprüfen:

Satz 7.3.2 — Gleichheit zweier (affiner) Räume. Seien $m,n,k \in \mathbb{N}$, die Vektoren $\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^m, \mathbf{w}^0, \mathbf{w}^1, \ldots, \mathbf{w}^k \in \mathbb{R}^n$ und die affinen Räume

$$
A = \left\{ \mathbf{v}^0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{v}^i \,\middle|\, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad B = \left\{ \mathbf{w}^0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbf{w}^i \,\middle|\, \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{R} \right\}
$$

gegeben. Es gilt $A = B$ genau dann, wenn $\mathbf{v}^0 \in B$ und

$$
\operatorname{lin}\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^m\} = \operatorname{lin}\{\mathbf{w}^1, \ldots, \mathbf{w}^k\}.
$$

Beweis. Sei zuerst $A = B$. Wegen $\mathbf{v}^0 \in A$ gilt auch $\mathbf{v}^0 \in B$. Insbesondere existiert also ein $\mathbf{w} \in \operatorname{lin}\{\mathbf{w}^1, \ldots, \mathbf{w}^k\}$ so dass $\mathbf{v}^0 = \mathbf{w}^0 + \mathbf{w}$. Somit gilt auch $\mathbf{w} = \mathbf{v}^0 - \mathbf{w}^0$, d.h. $\mathbf{v}^0 - \mathbf{w}^0$ liegt in $\operatorname{lin}\{\mathbf{w}^1, \ldots, \mathbf{w}^k\}$.

Nun wählt man $\mathbf{v}$ beliebig aus $\operatorname{lin}\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^m\}$. Da $A = B$ gilt, muss $\mathbf{v}^0 + \mathbf{v} = \mathbf{w}^0 + \mathbf{z}$ für ein $\mathbf{z}$ aus $\operatorname{lin}\{\mathbf{w}^1, \ldots, \mathbf{w}^k\}$ sein. Daraus folgt, dass $\mathbf{v} = \mathbf{w}^0 - \mathbf{v}^0 + \mathbf{z}$ ist. $\mathbf{v}$ ist also die Summe aus Elementen von $\operatorname{lin}\{\mathbf{w}^1, \ldots, \mathbf{w}^k\}$ und liegt deshalb in diesem linearen Raum.

Da $\mathbf{v}$ beliebig war, schliessen wir

$$\mathrm{lin}\{\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^m\} \subseteq \mathrm{lin}\{\mathbf{w}^1,\ldots,\mathbf{w}^k\}.$$

Analog kann man zeigen, dass auch

$$\mathrm{lin}\{\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^m\} \supseteq \mathrm{lin}\{\mathbf{w}^1,\ldots,\mathbf{w}^k\}$$

gilt. Damit sind die beiden linearen Hüllen gleich.

Setzen wir nun voraus, dass $\mathbf{v}^0 \in B$ und

$$\mathrm{lin}\{\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^m\} = \mathrm{lin}\{\mathbf{w}^1,\ldots,\mathbf{w}^k\}$$

gilt, dann kann man mit denselben Argumenten wie oben die Gleichheit von A und B folgern. ■

Sind die linearen Hüllen $\mathrm{lin}\{\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^m\}$ und $\mathrm{lin}\{\mathbf{w}^1,\ldots,\mathbf{w}^k\}$ gleich, muss eigentlich nur gezeigt werden, dass die beiden Mengen einen gemeinsamen Punkt haben. Beispielsweise kann also auch $\mathbf{w}^0 \in A$ überprüft werden, anstatt $\mathbf{v}^0 \in B$, um zu zeigen, dass die (affinen) Punktemengen gleich sind.
Wir illustrieren dies in einem weiteren Beispiel:

■ Beispiel 7.3.4 — Fortsetzung von Beispiel 7.3.2.
Für gegebene Werte von x_2 und x_3 kann man eine Lösung der Gleichung $x_1+2x_2+3x_3=6$ mit $x_1=6-2x_2-3x_3$ auch als

$$\begin{pmatrix} 6-2x_2-3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

beschreiben. Die Menge aller Punkte auf dieser Ebene

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

ist ein affiner Raum der Dimension 2. Jeder Punkt dieser Menge kann als Summe aus dem Vektor $\mathbf{v}^0 = (6,0,0)^T$ und einem Vektor

$$\mathbf{v} \in \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

dargestellt werden, vgl. auch Abbildung 7.7.

In Beispiel 7.3.2 hatten wir die Lösungemenge der Gleichung $x_1+2x_2+3x_3=6$ als

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

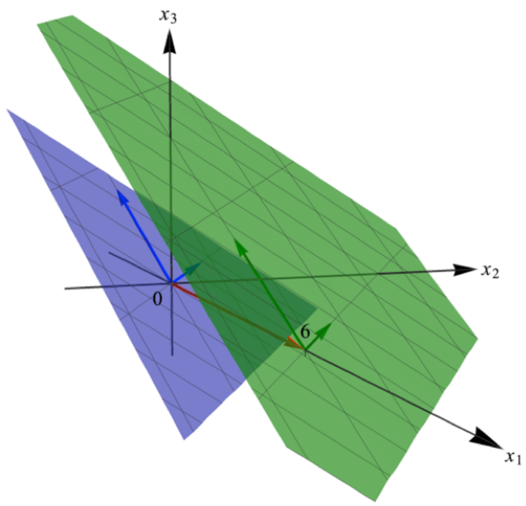

Abbildung 7.7: Die Ebene $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$.

beschrieben. Um die Gleichheit dieser Menge und der Menge A zu beweisen, muss gezeigt werden, dass $\mathbf{v}^0 = (6,0,0)^T \in \mathbb{L}$ und

$$\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\right\}.$$

Dass $(6,0,0)^T \in \mathbb{L}$ ist erkennt man durch Einsetzen von $t_1 = 6, t_2 = 0$ in der Definition von $\mathbb{L}$. Die Gleichheit der linearen Hüllen kann man durch wiederholten Basistausch zeigen (vgl. Satz 6.4.5): Ersetzt man den Vektor $(-3,0,1)^T$ durch $0 \cdot (-2,1,0)^T - \frac{1}{3}(-3,0,1)^T = (1,0,-\frac{1}{3})^T$, ergibt sich in einem ersten Schritt

$$\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\right\}.$$

Ersetzt man nun $(-2,1,0)^T$ durch $1 \cdot (-2,1,0)^T + 2 \cdot (1,0,-\frac{1}{3})^T = (0,1,-\frac{2}{3})^T$, bekommt man

$$\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\right\}.$$

Damit ist die Gleichheit der beiden affinen Räume gezeigt. ∎

Z Die Menge aller Punkte, die sich aus Additionen eines Vektors $\mathbf{v}^0 \in \mathbb{R}^n$ und allen möglichen Linearkombinationen von $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^m \in \mathbb{R}^n$ ergeben, heisst affiner Raum. Die Dimension des affinen Raums ist definiert als $\dim(\operatorname{lin}\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^m\})$.

Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit n Variablen beschreibt einen affinen Raum der Dimension $n-1$. Ist die rechte Seite der linearen Gleichung gleich 0, ist die Lösungsmenge ein linearer Raum.

Zwei affine Räume

$$A=\left\{\mathbf{v}^0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mathbf{v}^i \,\middle|\, \alpha_1,\ldots,\alpha_m\in\mathbb{R}\right\} \quad \text{und} \quad B=\left\{\mathbf{w}^0+\sum_{i=1}^{k}\beta_i\mathbf{w}^i \,\middle|\, \beta_1,\ldots,\beta_k\in\mathbb{R}\right\}$$

sind genau dann gleich, wenn sie (mindestens) ein gemeinsames Element haben und $\operatorname{lin}\{\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^m\}=\operatorname{lin}\{\mathbf{w}^1,\ldots,\mathbf{w}^k\}$ gilt.

7.3.2 Geometrie linearer Gleichungssysteme

Ziele dieses Unterkapitels

- Was versteht man unter dem Zeilenbild eines linearen Gleichungssystems?
- Was versteht man unter dem Spaltenbild eines linearen Gleichungssystems?

Nun betrachten wir Systeme mit $m>1$ linearen Gleichungen. Wir illustrieren Darstellungsformen linearer Gleichungssysteme an zwei Beispielen:

■ Beispiel 7.3.5 — Ein Beispiel mit zwei Variablen und zwei Gleichungen. Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1-2x_2&=1\\ 3x_1+2x_2&=11, \end{aligned}$$

bzw. $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ mit erweiterter Koeffizientenmatrix

$$(A|\mathbf{b})=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 11 \end{array}\right).$$

Eine Möglichkeit, diese Gleichungen geometrisch darzustellen, besteht darin, Zeile für Zeile vorzugehen. Die erste Zeile ist $x_1-2x_2=1$. Diese Gleichung hatten wir bereits im zweiten Teil von Beispiel 7.3.1 betrachtet. Sie entspricht einer Geraden im euklidischen Raum $\mathbb{R}^2$. In der Form

$$\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}=x_2$$

erkennt man, dass u.a. die Punkte $(0,-\frac{1}{2})^T$ und $(1,0)^T$ auf dieser Geraden liegen. Es handelt sich um eine Gerade mit y-Achsenabschnitt $-\frac{1}{2}$ und Steigung $\frac{1}{2}$. Die zweite Zeile $3x_1+2x_2=11$ entspricht ebenfalls einer Geraden im euklidischen Raum $\mathbb{R}^2$. In der Form

$$\frac{11}{2}-\frac{3}{2}x_1=x_2$$

erkennt man, dass u.a. die Punkte $(0,\frac{11}{2})^T$ und $(1,4)^T$ auf der Geraden liegen. Die Gerade hat einen y-Achsenabschnitt von $\frac{11}{2}$ und eine Steigung von $-\frac{3}{2}$. Abbildung 7.8 zeigt die beiden Geraden. Man sieht sofort, dass sich die beiden Geraden in einem Punkt schneiden. Der Punkt $(3,1)^T$ liegt auf beiden Geraden. Er löst beide Gleichungen und ist damit die Lösung des linearen Gleichungssystems,

$$\mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Da man das lineare Gleichungssystem zeilenweise gelesen hat, um auf Abbildung 7.8 zu kommen, nennt man Abbildung 7.8 auch das Zeilenbild des linearen Gleichungssystems.

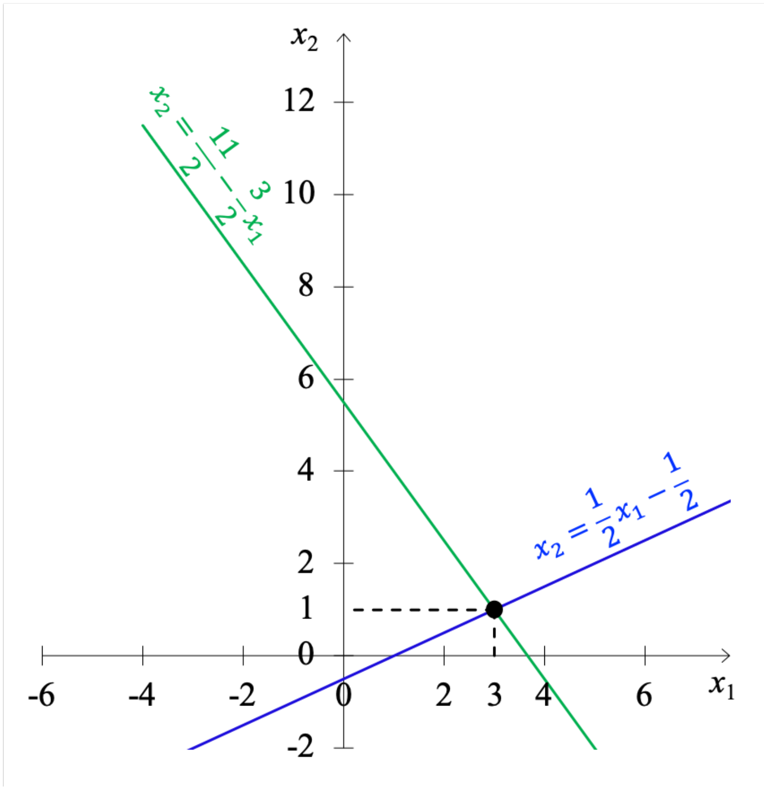

Abbildung 7.8: Das Zeilenbild eines LGS.

Man kann sich ein lineares Gleichungssystem auch als Spaltenbild vorstellen. Hierfür nutzen wir zunächst, dass man obiges lineares Gleichungssystem auch als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

schreiben kann.

In dieser Darstellungsform des linearen Gleichungssystems stehen also zwei Spaltenvektoren auf der linken Seite und einer auf der rechten. In dieser Form sind x_1 und x_2 die Gewichte, mithilfe derer der Vektor der rechten Seite als Linearkombination der zwei Vektoren der linken Seite dargestellt werden soll. Die richtige Wahl von x_1 und x_2, nämlich $x_1 = 3$ und $x_2 = 1$, führt zu einem Vektor mit den Komponenten 1 und 11. Man sucht also diejenige Linearkombination der Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix, die den Vektor **b** auf der rechten Seite ergibt. Abbildung 7.9 zeigt das sogenannte Spaltenbild der beiden Gleichungen mit zwei Unbekannten. Auf der linken Abbildung sind die beiden einzelnen Spaltenvektoren $(1,3)^T$ und $(-2,2)^T$ dargestellt. Die rechte Seite illustriert, dass die Linearkombination der beiden Vektoren mit Gewichten 3 und 1 die rechte Seite ergibt,

$$3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Im Zeilenbild betrachten wir die zwei Zeilen der erweiterten Koeffizientenmatrix, im Spaltenbild die zwei Spalten (und die rechte Seite). ■

Beide im vorherigen Beispiel dargestellten Arten, sich lineare Gleichungssysteme vorzustellen, sind gleichwertig. Je nach Kontext kann die eine oder die andere Art hilfreicher

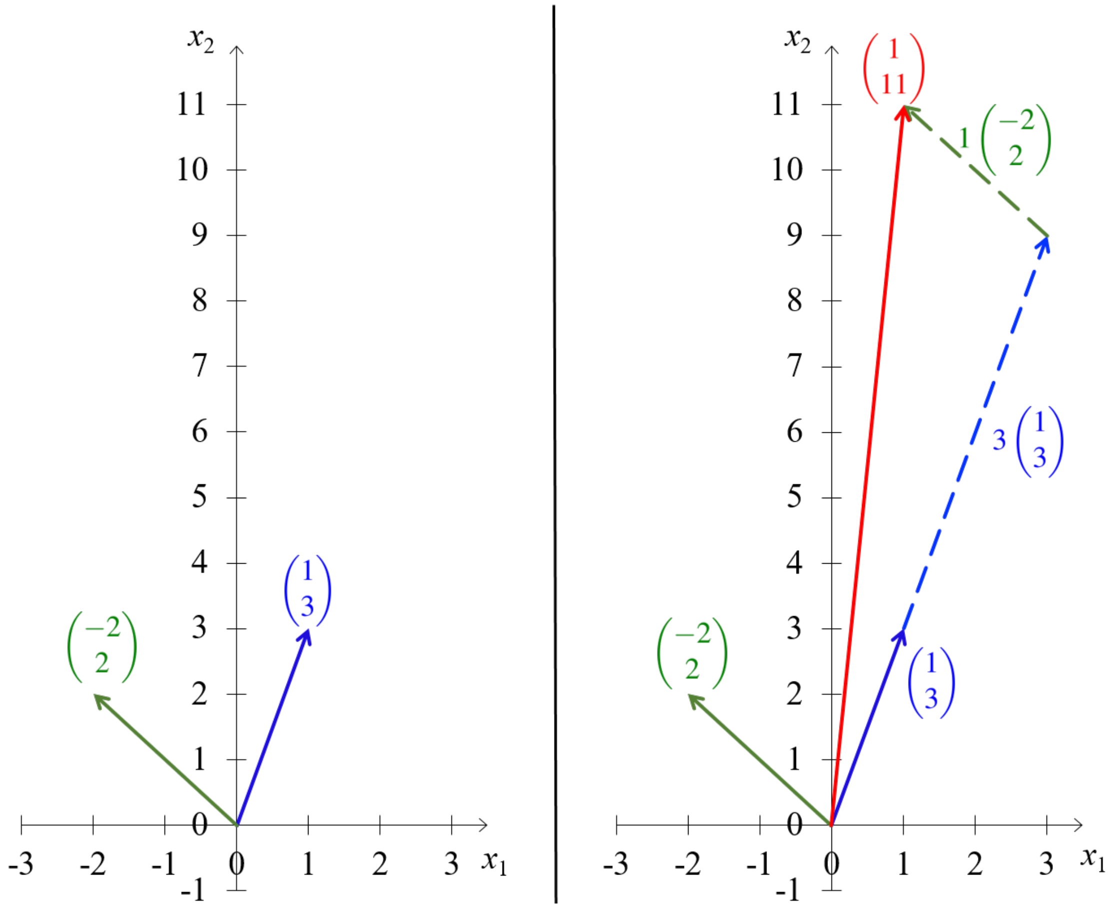

Abbildung 7.9: Das Spaltenbild eines LGS.

sein. Auch wenn die zeilenweise Interpretation zunächst vertrauter erscheint, ergeben sich aus der spaltenweisen Interpretation und der Verbindung zu Linearkombinationen direkt Verallgemeinerungen. Bevor wir diese besprechen, demonstrieren wir die spalten- und zeilenweise Betrachtungsweise eines linearen Gleichungssystems in weiteren Beispielen.

■ Beispiel 7.3.6 — Fortsetzung von Beispiel 7.3.5.
Wir ersetzen in Beispiel 7.3.5 die zweite Gleichung und betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ -2x_1 + 4x_2 &= -2, \end{aligned}$$

bzw. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit erweiterter Koeffizientenmatrix

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{array}\right).$$

Zeilenweise gelesen gilt für alle Lösungen der ersten Gleichung wieder

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2} = x_2.$$

Die Menge aller Lösungen beschreibt also eine Gerade im $\mathbb{R}^2$.

Auflösen der zweiten Gleichung nach x_2 zeigt, dass auch für alle Lösungen der zweiten Gleichung

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2} = x_2$$

gilt. Die zweite Gleichung beschreibt also die gleiche Gerade im $\mathbb{R}^2$, vgl. Abbildung 7.10. Der Schnitt dieser beiden Geraden ergibt also wieder die Gerade selbst. Das lineare Gleichungssystem hat eine Lösungsmenge, welche dieser Geraden entspricht:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Spaltenweise betrachtet werden hier Gewichte zu den Spaltenvektoren $\mathbf{a}^1 = (1, -2)^T$ und

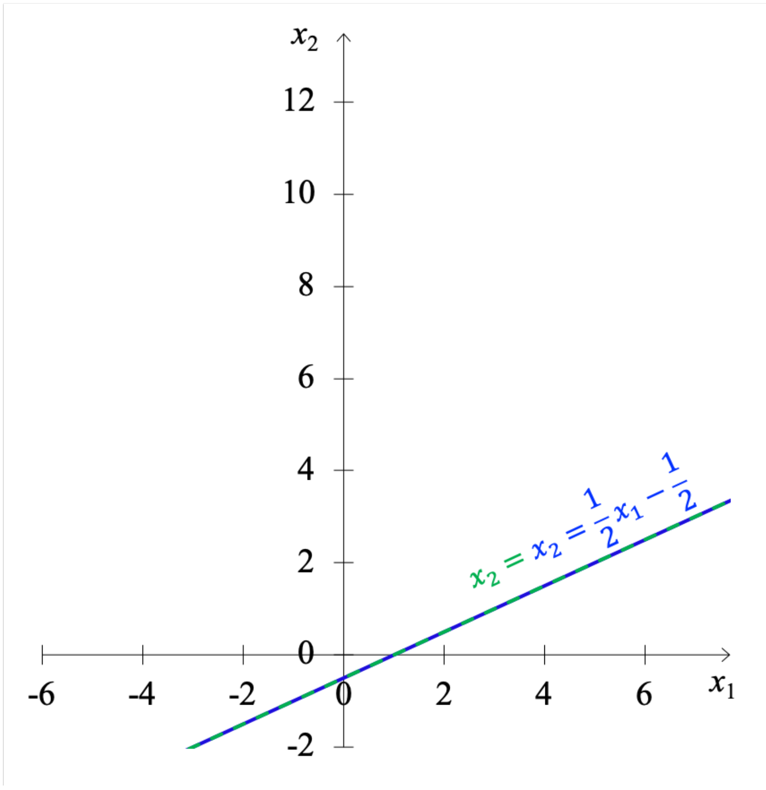

Abbildung 7.10: Das Zeilenbild eines LGS mit unendlich vielen Lösungen.

$\mathbf{a}^2 = (-2, 4)^T$ gesucht, so dass deren Linearkombination $(1, -2)^T$ ergibt. Da $\mathbf{a}^2 = -2\mathbf{a}^1$ gilt, gibt es keine eindeutigen Gewichte. Eine Lösung ist $\mathbf{x} = (1, 0)^T$. Aber da das 1-fache der zweiten Spalte gleich dem (-2)-fachen der ersten Spalte ist, ergeben sich als andere Lösungen u.a. $\mathbf{x} = (0, -\frac{1}{2})^T$ oder $\mathbf{x} = (3, 1)^T$, vgl. Abbildung 7.11. Jeder Vektor $\mathbf{x}$ mit $x_1 + (-2)x_2 = 1$ ist eine Lösung. ■

■ **Beispiel 7.3.7 — Ein weiteres lineares Gleichungssystem.**
Wir fügen dem linearen Gleichungssystem aus Beispiel 7.3.5 eine weitere Gleichung hinzu und betrachten das so entstandene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 11 \\ x_1 + x_2 &= 4. \end{aligned}$$

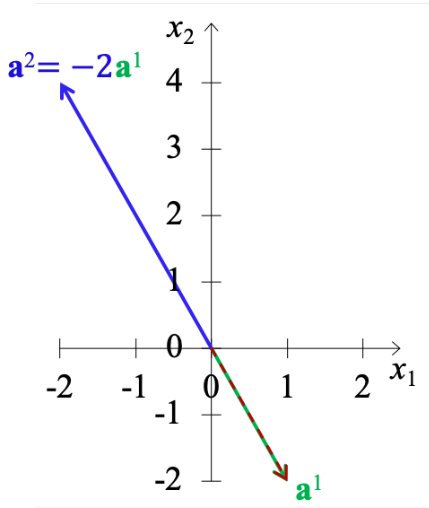

Abbildung 7.11: Das Spaltenbild eines LGS mit unendlich vielen Lösungen.

Zeilenweise ergeben sich aus den ersten beiden Zeilen die gleichen Geraden wie in Beispiel 7.3.5. Die Lösungen der dritten Gleichung erfüllen alle $x_2 = 4 - x_1$. Die entsprechende Gerade ist in Abbildung 7.12 dargestellt. Da diese Gerade die anderen beiden Geraden genau in deren Schnittpunkt schneidet, ist die Lösung des Gleichungssystems durch Hinzunahme der dritten Gleichung unverändert,

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Spaltenweise gelesen existieren also eindeutige Gewichte, um den Vektor $\mathbf{b} = (1, 11, 4)^T$ als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}^1 = (1, 3, 1)^T$ und $\mathbf{a}^2 = (-2, 2, 1)^T$ zu erhalten, nämlich 3 und 1, vgl. Abbildung 7.13. ■

■ **Beispiel 7.3.8 — Ein unlösbares lineares Gleichungssystem.**
Als weiteres lineares Gleichungssystem betrachten wir

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 11 \\ x_1 + x_2 &= 7. \end{aligned}$$

Zeilenweise ergeben sich aus den ersten beiden Zeilen wieder die gleichen Geraden wie in Beispiel 7.3.5. Alle Lösungen der dritten Gleichung erfüllen $x_2 = 7 - x_1$. Die entsprechende Gerade ist in Abbildung 7.14 eingezeichnet. Anhand der Abbildung erkennen wir, dass sich jeweils zwei Geraden in verschiedenen Punkten schneiden. Aber kein Punkt ist auf allen drei Geraden und damit gibt es keinen Punkt, der eine Lösung des Gleichungssystems ist. Die Lösungsmenge ist also leer,

$$\mathbb{L} = \{\}.$$

Spaltenweise gelesen ist der Vektor $\mathbf{b} = (1, 11, 7)^T$ also nicht als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}^1 = (1, 3, 1)^T$ und $\mathbf{a}^2 = (-2, 2, 1)^T$ darstellbar, vgl. Abbildung 7.15. ■

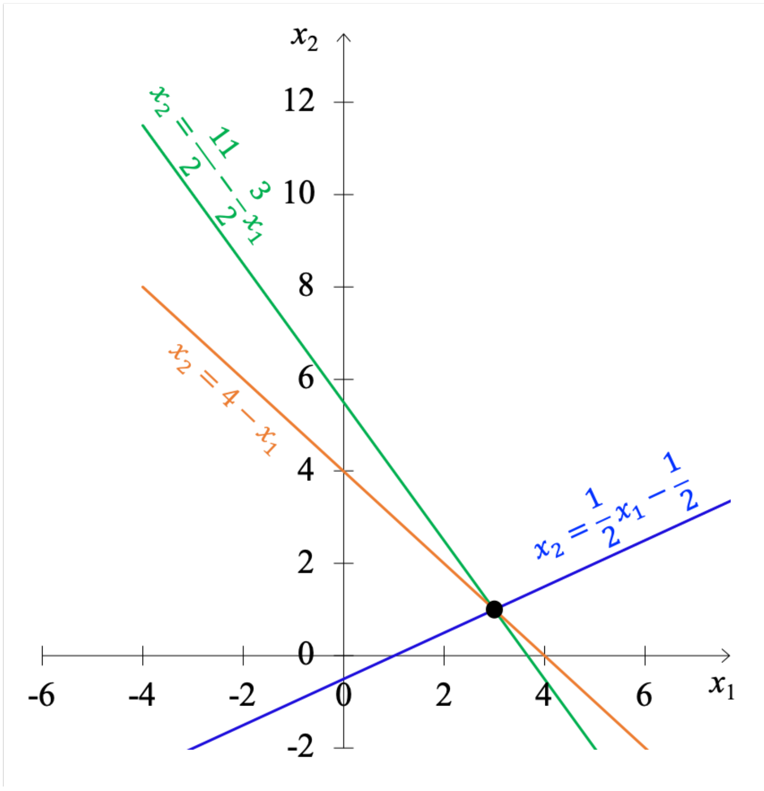

Abbildung 7.12: Das Zeilenbild eines linearen Gleichungssystems mit einer Lösung.

Alle bisherigen Beispiele behandelten lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen. In folgendem Beispiel wird ein lineares Gleichungssystem mit drei Variablen geometrisch veranschaulicht.

■ **Beispiel 7.3.9 — Ein Beispiel mit drei Variablen.**
Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Man kann jede einzelne Zeile als eine Ebene im dreidimensionalen Raum interpretieren: Setzen wir in der ersten Gleichung

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

$x_2 = x_3 = 0$, so ergibt sich $x_1 = 6$. Die Ebene schneidet die x_1-Achse im Punkt $(6,0,0)^T$. Setzt man $x_1 = x_3 = 0$, ergibt sich $x_2 = 3$. Die Ebene schneidet die x_2-Achse im Punkt $(0,3,0)^T$. Sie schneidet die x_3-Achse im Punkt $(0,0,2)^T$. Die Gleichung

$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4$$

definiert eine zweite Ebene. Sie schneidet die erste Ebene in einer Geraden, vgl. Abbildung 7.16. Alle Punkte auf dieser Geraden lösen die beiden ersten Gleichungen simultan. Die

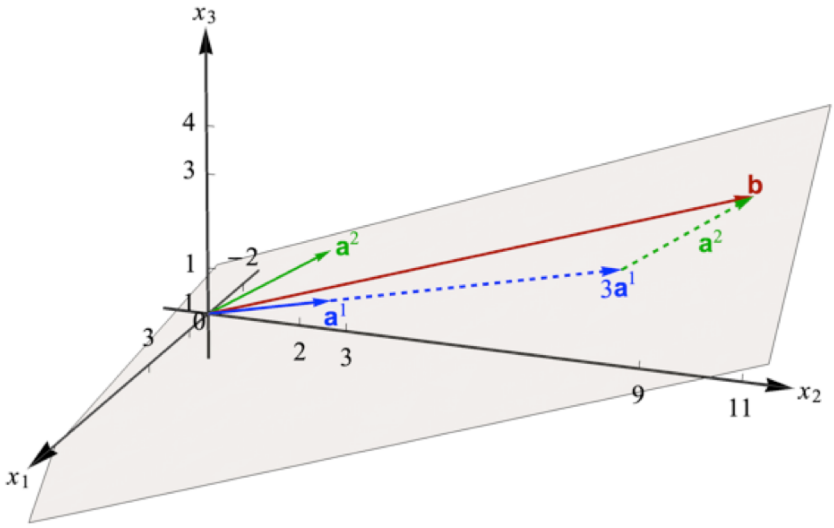

Abbildung 7.13: Das Spaltenbild eines LGS mit genau einer Lösung.

dritte Gleichung

$$6x_1 - 3x_2 + x_3 = 2$$

definiert eine dritte Ebene. Die Gerade, die durch den Schnitt der beiden ersten Ebenen definiert ist, schneidet diese Ebene in einem Punkt, vgl. Abbildung 7.17. Die drei Ebenen schneiden sich also in einem Punkt. Der Schnittpunkt ist die Lösung des linearen Gleichungssystems.

Um das Spaltenbild zu erhalten, betrachten wir die spaltenweise Schreibweise für die drei Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen die richtigen Gewichte x_1, x_2 und x_3, damit die Linearkombination der drei Vektoren auf der linken Seite $\mathbf{b} = (6,4,2)^T$ ergibt. Abbildung 7.18 zeigt das Spaltenbild. Da die drei Spalten linear unabhängig sind, können Linearkombinationen dieser Vektoren beliebige rechte Seiten $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ erzeugen. Die Linearkombination, die $\mathbf{b} = (6,4,2)^T$ ergibt, ist hier das zweifache des dritten Vektors. Anders gesagt: $x_1 = x_2 = 0$ und $x_3 = 2$. Die Lösung ist demnach $(0,0,2)^T$, denn

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} 0 + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} 0 + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

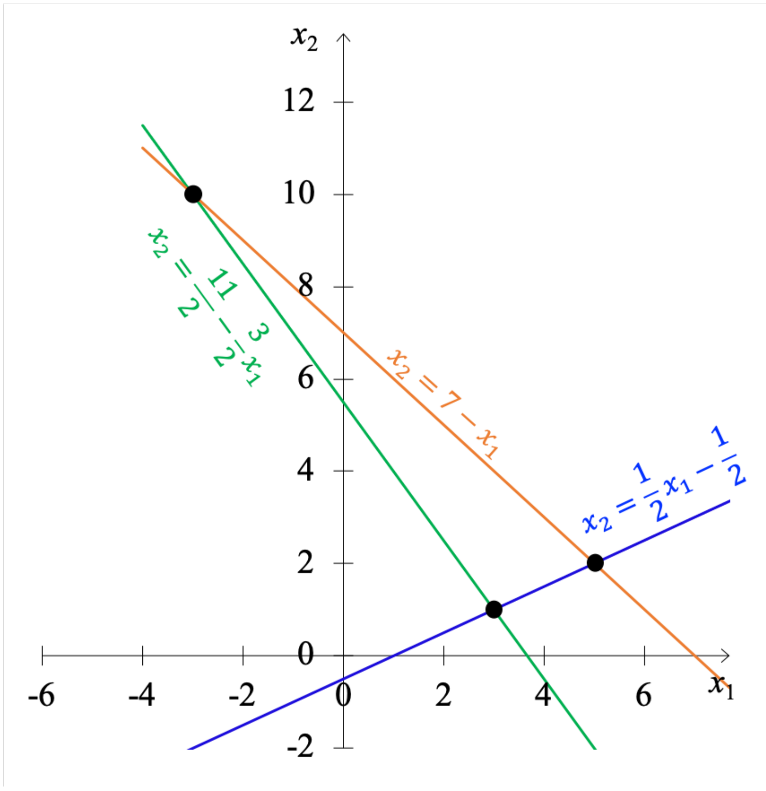

Abbildung 7.14: Das Zeilenbild eines LGS ohne Lösung.

Im Zeilenbild betrachten wir hier drei Zeilen, im Spaltenbild drei Spalten (und eine rechte Seite). ■

In den obigen Beispielen nutzen wir zwei verschiedene Arten, sich lineare Gleichungssysteme vorzustellen: einmal interpretieren wir die Zeilen als Geraden im $\mathbb{R}^2$ oder Ebenen im $\mathbb{R}^3$ und suchen den Schnittpunkt bzw. die Schnittmenge, einmal interpretierten wir die Spalten als Vektoren und suchen die Gewichte, so dass die Linearkombination der Spaltenvektoren dem Vektor $\mathbf{b}$ entspricht. Beide Interpretationen sind gleichwertig.

Abbildung 7.19 zeigt erneut das Zeilenbild des linearen Gleichungssystems aus Beispiel 7.2.10. Im Gegensatz zum oben genannten Beispiel ist die Lösungsmenge ein eindimensionaler affiner Raum, also eine Gerade.

Z Zeilenbild: Jede Zeile $i = 1, \ldots, m$ eines linearen Gleichungssystems mit n Variablen, in welcher mindestens ein $a_{ij} \neq 0$ ist, repräsentiert eine Hyperebene des $\mathbb{R}^n$. Die Lösungsmenge entspricht dem Schnitt aller Hyperebenen.

Spaltenbild: Liest man die linke Seite eines linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x}$ als Linearkombination der Spaltenvektoren $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n$ der Koeffizientenmatrix A mit Gewichten $x_1, \ldots, x_n$, so ist $\mathbf{x}$ genau dann eine Lösung von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wenn diese Linearkombination dem Vektor $\mathbf{b}$ entspricht.

7.4 Der Rang einer Matrix

Auch wenn die zeilenweise Interpretation zunächst vertrauter erscheint, ergeben sich aus der spaltenweisen Interpretation und der Verbindung zu Linearkombinationen direkt

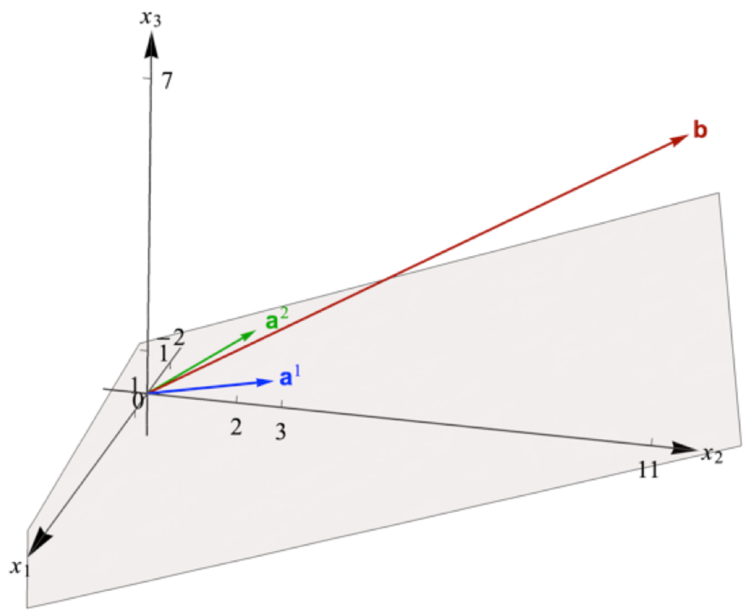

Abbildung 7.15: Das Spaltenbild eines LGS ohne Lösung.

Verallgemeinerungen: Ist die rechte Seite $\mathbf{b}$ keine Linearkombination der Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix A, so hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung. Ist die rechte Seite $\mathbf{b}$ eine Linearkombination der Spaltenvektoren $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n$ der Koeffizientenmatrix A, so hat das lineare Gleichungssystem mindestens eine Lösung.[8] Gilt also

$$\operatorname{lin}\left\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n\right\} = \operatorname{lin}\left\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n, \mathbf{b}\right\},$$

so ist das lineare Gleichungssystem lösbar, sonst nicht. Sind die linearen Hüllen gleich, ist auch die Dimension des durch die Spaltenvektoren von A aufgespannten linearen Raums gleich der Dimension des durch die Spaltenvektoren von $(A|\mathbf{b})$ aufgespannten linearen Raums. Ist $\mathbf{b}$ keine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n$, so ist die Dimension des durch die Spaltenvektoren von $(A|\mathbf{b})$ aufgespannten linearen Raums (um 1) grösser als die Dimension des durch die Spaltenvektoren von A aufgespannten linearen Raums.

Im Folgenden bezeichnen wir die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren einer Matrix als Rang und diskutieren dessen Eigenschaften sowie dessen Berechnung.

7.4.1 Definition des Rangs

Ziele dieses Unterkapitels

- Was sagt der Rang einer Matrix über die Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren einer Matrix aus?

[8] Eine Lösung entspricht den Gewichten dieser Linearkombination.

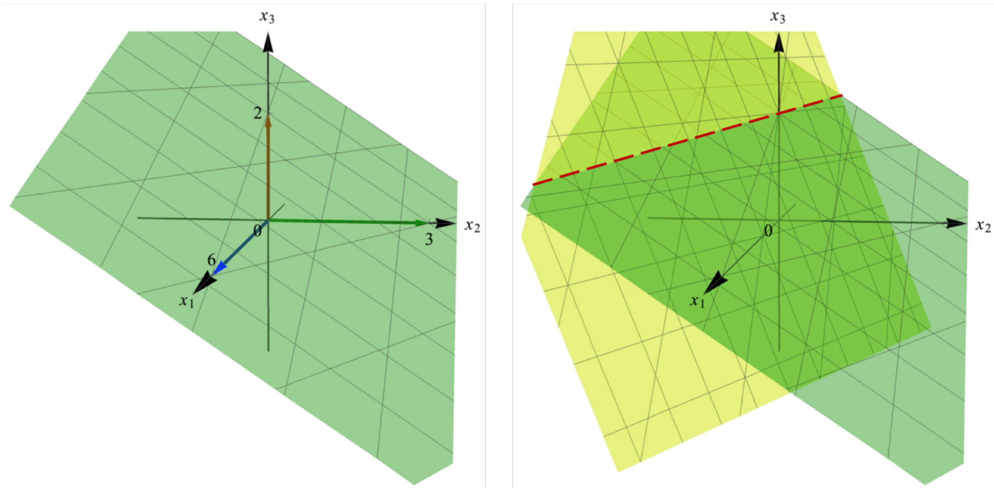

Abbildung 7.16: Die ersten zwei Gleichungen als Ebenen.

- Was sagt der Rang einer Matrix über die Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren einer Matrix aus?
- Was kann man aus dem Rang einer Matrix A über den Rang von A^T schliessen?
- Wann spricht man von einer Matrix von vollem Rang?
- Welche Bedingung muss für den Rang der Koeffizientenmatrix und den Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix gelten, damit ein lineares Gleichungssystem lösbar ist?

Ist A eine Matrix vom Typ $m \times n$ mit Spaltenvektoren $\mathbf{a}^j$, $j = 1, \ldots n$, so nennt man die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren, also die Dimension der linearen Hülle $\mathrm{lin}\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n\}$, den Rang der Matrix A.

Definition 7.4.1 — Der Rang einer Matrix.
Ist A eine $m \times n$-Matrix, dann nennt man die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren Rang der Matrix A bzw. $\mathrm{rang}(A)$.

Ergeben sich durch die Notation $\mathrm{rang}(A)$ doppelte Klammern, so verzichtet man in der Regel auf die zusätzlichen Klammern. Beispielsweise bezeichnet $\mathrm{rang}((A|\mathbf{b})) = \mathrm{rang}(A|\mathbf{b})$ den Rang der Matrix $(A|\mathbf{b})$.

Mithilfe dieses Begriffs können wir die Beobachtung, dass das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genau dann lösbar ist, wenn $\mathbf{b}$ eine Linearkombination der Spalten von A ist, neu beschreiben: Das lineare Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems gleich dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix ist.

Satz 7.4.1 — Lösbarkeit eines LGS.
Sei A eine $m \times n$-Matrix, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, dann gilt

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ lösbar} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A|\mathbf{b}).$$

Beweis. Einen Beweis findet man in Kall (1984, Satz 2.21). ■

■ **Beispiel 7.4.1 — Der Rang der Koeffizientenmatrix aus Beispiel 7.1.7.**

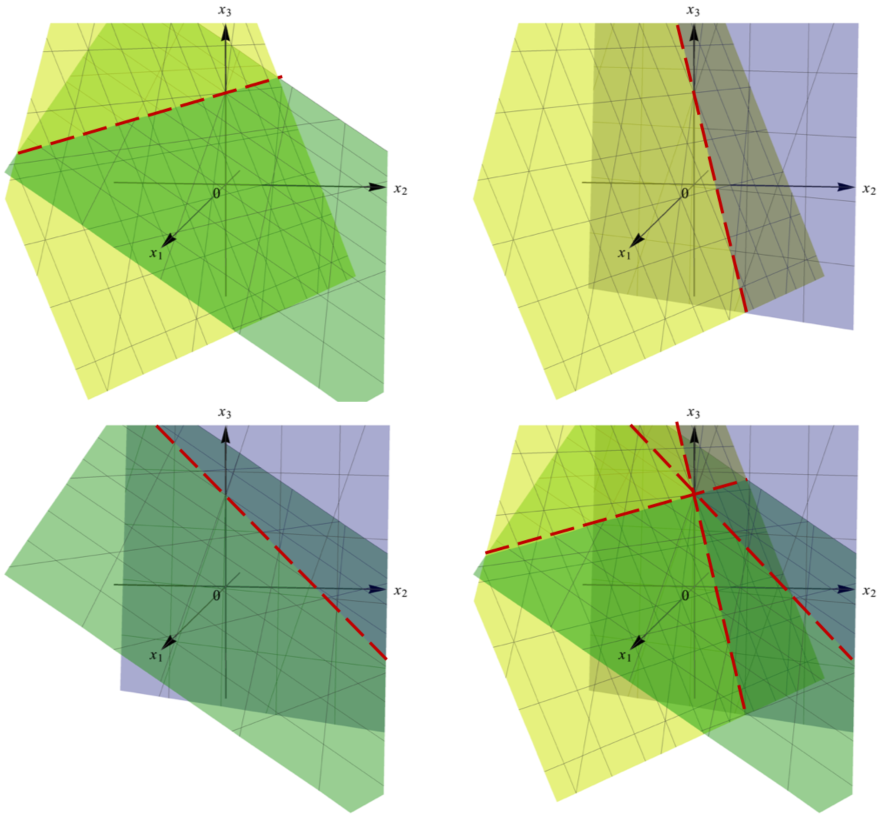

Abbildung 7.17: Die drei Ebenen und ihr Schnittpunkt.

Wir betrachten erneut die Koeffizientenmatrix aus Beispiel 7.1.7,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Der Rang der Koeffizientenmatrix A ist 3, $\operatorname{rang}(A) = 3$, da die drei Spaltenvektoren linear unabhängig sind und ihre lineare Hülle, $\operatorname{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$, damit die Dimension 3 hat.

Eine Möglichkeit, dies zu verifizieren, ist mittels Satz 6.3.3: Die drei Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig genau dann, wenn die einzige Lösung von

$$x_1\mathbf{a}^1 + x_2\mathbf{a}^2 + x_3\mathbf{a}^3 = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

gleich $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ist. In anderen Worten: die 3×3-Matrix A hat den Rang 3 genau dann, wenn das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit Variablen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{\mathbf{0}\}$ hat. Bestimmen wir die Lösungsmenge mithilfe des Eliminationsverfahrens, ergibt sich analog zu Beispiel 7.2.4:

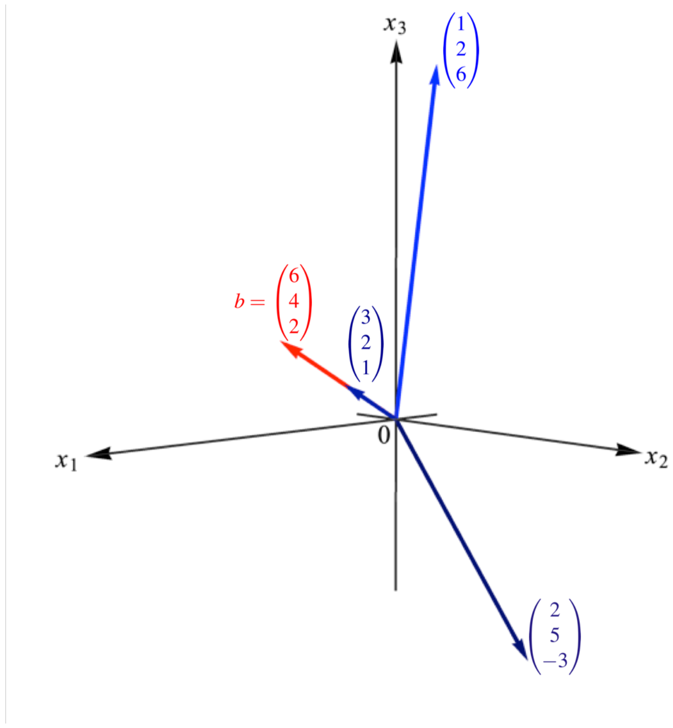

Abbildung 7.18: Das Spaltenbild des LGS.

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{0}$	
1	1	2	3	0	
2	2	5	2	0	
3	6	-3	1	0	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	1	0	0	0	7 + $\frac{11}{77} \cdot$ 9
11	0	1	0	0	8 - $\frac{4}{77} \cdot$ 9
12	0	0	1	0	-$\frac{1}{77} \cdot$ 9

Damit ist die einzige Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Es gilt $\mathbb{L} = \{\mathbf{0}\}$. Bei einem homogenen linearen Gleichungssystem wird dabei in Tableauform oft auf die Spalte verzichtet, welche die rechte Seite $\mathbf{0}$ repräsentiert. Denn diese verändert sich durch elementare Zeilenumformungen nicht. Verkürzt schreibt man

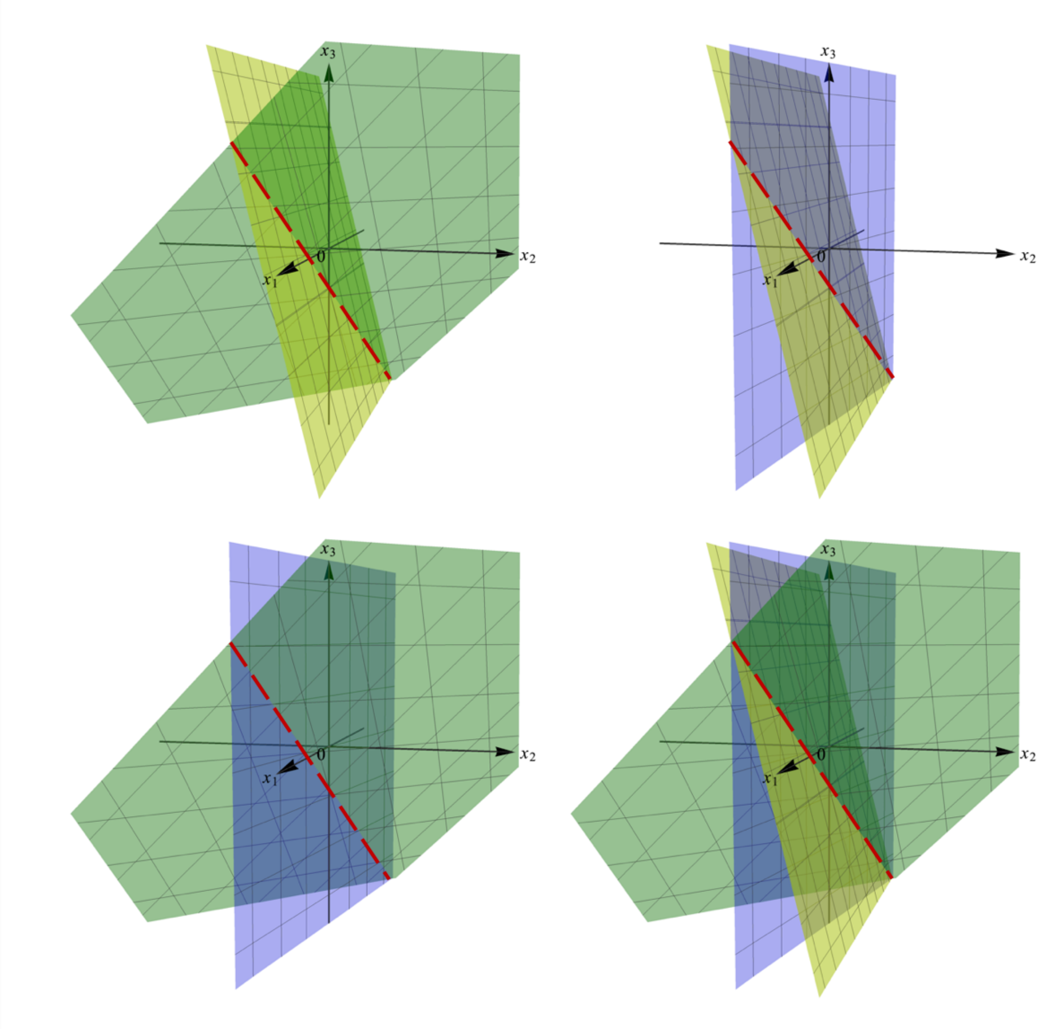

Abbildung 7.19: Die drei Ebenen und ihre Schnittgerade.

	x_1	x_2	x_3	
①	1	2	3	
②	2	5	2	
③	6	-3	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⑩	1	0	0	⑦ + $\frac{11}{77}$·⑨
⑪	0	1	0	⑧ - $\frac{4}{77}$·⑨
⑫	0	0	1	-$\frac{1}{77}$·⑨

Zusammenfassend sind die drei Spaltenvektoren also linear unabhängig. Der Rang der Matrix A ist 3. Da im $\mathbb{R}^3$ nicht mehr als drei linear unabhängige Spaltenvektoren existieren und $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2$ und $\mathbf{a}^3$ linear unabhängig sind, ist also auch die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von $(A|\mathbf{b})$ gleich 3. Es gilt somit $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|\mathbf{b}) = 3$. Das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist lösbar. ∎

Offensichtlich ist also der Rang einer $m \times n$-Matrix genau dann gleich der Anzahl der Spalten, d.h. $\text{rang}(A) = n$, wenn alle Spalten linear unabhängig sind. Ist die Menge aller n Spaltenvektoren nicht linear unabhängig, ist der Rang kleiner als n.

■ **Beispiel 7.4.2 — Der Rang der Koeffizientenmatrix aus Beispiel 7.2.11.**
Wir betrachten erneut das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ aus Beispiel 7.2.11 mit

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 13 \end{array}\right).$$

Die Koeffizientenmatrix hat 3 Spalten, ihr Rang ist somit maximal 3. Will man zeigen, dass der Rang von A wirklich gleich 3 ist, kann man wie im vorherigen Beispiel zeigen, dass die einzige Lösung von $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ der Nullvektor ist:

	x_1	x_2	x_3	
①	1	2	3	
②	2	5	2	
③	6	-3	1	
④	2	4	6	
⑤	1	2	3	①
⑥	0	1	-4	② - 2·①
⑦	0	-15	-17	③ - 6·①
⑧	0	0	0	④ - 2·①
⑨	1	0	11	⑤ - 2·⑥
⑩	0	1	-4	⑥
⑪	0	0	-77	⑦ + 15·⑥
⑫	0	0	0	⑧
⑬	1	0	0	⑨ + $\frac{11}{77}$· ⑪
⑭	0	1	0	⑩ - $\frac{4}{77}$·⑪
⑮	0	0	1	-$\frac{1}{77}$·⑪
⑯	0	0	0	⑫

Es gilt also: $\text{rang}(A) = 3$. Analog kann man zeigen, dass die 4 Vektoren $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3, \mathbf{b}$ linear unabhängig sind, indem man zeigt, dass die einzige Lösung von $[\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3, \mathbf{b}]\mathbf{x} = (A|\mathbf{b})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ der Nullvektor ist:

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}$	
①	1	2	3	6	
②	2	5	2	4	
③	6	-3	1	2	
④	2	4	6	13	
⑤	1	2	3	6	①
⑥	0	1	-4	-8	② - 2·①
⑦	0	-15	-17	-34	③ - 6·①
⑧	0	0	0	1	④ - 2·①
⑨	1	0	11	22	⑤ - 2·⑥
⑩	0	1	-4	-8	⑥
⑪	0	0	-77	-154	⑦ + 15·⑥
⑫	0	0	0	1	⑧
⑬	1	0	0	0	⑨ + $\frac{11}{77}$· ⑪
⑭	0	1	0	0	⑩ - $\frac{4}{77}$·⑪
⑮	0	0	1	2	-$\frac{1}{77}$·⑪
⑯	0	0	0	1	⑫

Es gilt also[9] $\operatorname{rang}(A|\mathbf{b}) = 4 \neq 3 = \operatorname{rang}(A)$. Der Vektor $\mathbf{b}$ ist also keine Linearkombination der Spaltenvektoren von A. Das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat keine Lösung, wie wir bereits in Beispiel 7.2.11 gesehen hatten. ■

■ **Beispiel 7.4.3 — Der Rang der Koeffizientenmatrix aus Beispiel 7.2.10.**
Natürlich besteht nicht jede Matrix aus linear unabhängigen Spalten. Betrachten wir die Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

aus Beispiel 7.2.10, so gilt z.B.

$$5\mathbf{a}^1 + 4\mathbf{a}^3 = \mathbf{a}^2.$$

Die drei Spaltenvektoren sind also nicht linear unabhängig. Der Rang ist nicht 3. Da man aber einfach erkennen kann, dass beispielsweise $\mathbf{a}^1$ kein Vielfaches von $\mathbf{a}^3$ und beide ungleich dem Nullvektor sind, wissen wir, dass $\mathbf{a}^1$ und $\mathbf{a}^3$ linear unabhängig sind. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren ist also 2. Es gilt $\operatorname{rang}(A) = 2$.

Die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

aus Beispiel 7.2.10 hat ebenfalls den Rang 2, da

$$5\mathbf{a}^1 + 4\mathbf{a}^3 = \mathbf{a}^2 \text{ und } -\mathbf{a}^3 = \mathbf{b}$$

[9] Für die Berechnung des Ranges genügt es, das LGS in Zeilenstufenform zu überführen, deshalb wurde hier nicht bis zur expliziten Form gerechnet.

und $\mathbf{a}^1$ und $\mathbf{a}^3$ linear unabhängig sind. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren aus $\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3, \mathbf{b}\}$ ist also 2, d.h. $\text{rang}(A|\mathbf{b}) = 2$.

Es gilt $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|\mathbf{b})$. Das lineare Gleichungssystem ist also gemäss Satz 7.4.1 lösbar. ▪

In den bisherigen Beispielen haben wir den Rang einer Matrix durch Raten und anschliessende Verifikation bestimmt. Was uns fehlt, ist ein verlässliches Rechenschema zur Bestimmung des Rangs.

Zur Motivation eines solchen Rechenschemas ist folgende Eigenschaft von Matrizen hilfreich: Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren von A entspricht der maximalen Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren, also dem Rang von A.

Satz 7.4.2 — Der Rang.
Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren von A entspricht dem Rang von A.

Beweis. Einen Beweis findet man in Kall (1984, Satz 2.16). ■

Eine Matrix mit m Zeilen kann also maximal einen Rang von m haben. Sind die Zeilenvektoren linear unabhängig, ist der Rang gleich m. Ist die Menge aller m Zeilenvektoren nicht linear unabhängig, ist der Rang kleiner als m.

Zusammen mit der Definition des Rangs als maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren ergibt sich daraus direkt folgender Satz:

Satz 7.4.3 — Eigenschaften des Rangs.
Sei A eine $m \times n$-Matrix. Dann gilt
- $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T) \leq \min\{m, n\}$;
- $\text{rang}(A) = n$ genau dann, wenn alle Spalten von A linear unabhängig sind;
- $\text{rang}(A) = m$ genau dann, wenn alle Zeilen von A linear unabhängig sind.

Beweis. Die Spaltenvektoren bzw. die Zeilenvektoren von A liegen im $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren bzw. Zeilenvektoren ist daher kleiner als m resp. n. Der Rang von A ist also nicht grösser als $\min\{m, n\}$.

Die anderen beiden Aussagen folgen daraus, dass A genau n Spaltenvektoren und m Zeilenvektoren besitzt. ■

Aufgrund der Eigenschaft, dass der Rang einer Matrix stets maximal gleich der Anzahl ihrer Spalten bzw. Zeilen ist, spricht man von einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit vollem Rang, wenn dieser maximale Wert erreicht wird, d.h. wenn $\text{rang}(A) = \min\{m, n\}$ gilt.

Definition 7.4.2 — Voller Rang.
Man sagt, eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hat vollen Rang, wenn $\text{rang}(A) = \min\{m, n\}$.

Z

Der Rang einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ entspricht der maximalen Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren einer Matrix. Es gilt also $\text{rang}(A) \leq n$. Er entspricht zudem der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren einer Matrix. Es gilt also $\text{rang}(A) \leq m$ und $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$.

Gilt $\text{rang}(A) = \min\{m, n\}$, dann sagt man, A hat vollen Rang.

Das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist genau dann lösbar, wenn $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|\mathbf{b})$ gilt.

7.4.2 Berechnung des Rangs mithilfe des Eliminationsverfahrens

Ziele dieses Unterkapitels

- Wie kann man aus dem Endtableau des Eliminationsverfahrens den Rang der Koeffizentenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix ablesen?

Im Eliminationsverfahren wird ein Zeilenvektor der Koeffizientenmatrix genau dann zu einer Nullzeile, wenn er eine Linearkombination der anderen Zeilenvektoren darstellt. Die Anzahl an Zeilen, welche sich nicht zu Nullzeilen umformen lassen, entspricht somit der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren und somit dem Rang der Koeffizientenmatrix. Da das letzte Tableau, das sogenannte Endtableau, stets in Zeilenstufenform vorliegt, ist diese Anzahl direkt aus dem Endtableau ablesbar.

Beispiel 7.4.4 — Wiederholung der Beispiele.
In Beispielen 7.4.1 und 7.4.2 zeigen wir, dass die betrachteten Matrizen den vollen Rang $\min\{n,m\}$ haben, indem wir durch das Eliminationsverfahren im Endtableau $\min\{n,m\}$ von Nullzeilen verschiedene Zeilen erhalten. ∎

Beispiel 7.4.5 — Alternative Berechnung von Beispiel 7.4.3.
Wir betrachten erneut die Koeffizientenmatrix aus Beispiel 7.4.3,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Bestimmung des Rangs von A ist die rechte Seite unerheblich, daher wählt man in der Regel die rechte Seite $\mathbf{0}$ und lässt die entsprechende Spalte weg. Es ergibt sich

	x_1	x_2	x_3	
1	0	-4	-1	
2	1	1	-1	
3	1	5	0	
4	1	1	-1	2
5	0	-4	-1	1
6	1	5	0	3
7	1	1	-1	4
8	0	-4	-1	5
9	0	4	1	6 - 4
10	1	0	$-\frac{5}{4}$	$7 + \frac{1}{4} \cdot 8$
11	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4} \cdot 8$
12	0	0	0	9 + 8
13	1	0	$-\frac{5}{4}$	10
14	0	1	$\frac{1}{4}$	11

Damit ergibt sich ein lineares Gleichungssystem mit $r = 2$ von Nullzeilen verschiedenen Zeilen. Der Rang der Matrix A ist 2. Man schreibt $\operatorname{rang}(A) = 2$. Die Matrix hat also zwei linear unabhängige Spaltenvektoren und zwei linear unabhängige Zeilenvektoren. Es gilt zum Beispiel $\mathbf{a}^3 = -\frac{5}{4}\mathbf{a}^1 + \frac{1}{4}\mathbf{a}^2$ für die Spaltenvektoren und $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ für die Zeilenvektoren. ■

Folgender Satz fasst die Idee der Berechnung des Rangs mittels des Eliminationsverfahrens zusammen:

Satz 7.4.4 — Berechnung des Rangs der erweiterten Koeffizientenmatrix.
Erhält man ausgehend von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mithilfe des Eliminationsverfahrens ein lineares Gleichungssystem $\tilde{A}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$ mit erweiterter Koeffizientenmatrix $(\tilde{A}|\tilde{\mathbf{b}})$ in Zeilenstufenform, wobei $\tilde{A}$ genau r Zeilen hat, die keine Nullzeilen sind, so gilt:

- $\operatorname{rang}(A) = r$;
- Ist jede Nullzeile von $\tilde{A}$ auch eine Nullzeile der erweiterten Koeffizientenmatrix $(\tilde{A}|\tilde{\mathbf{b}})$, also $\tilde{b}_i = 0$ für alle $i > r$, so gilt $\operatorname{rang}(A|\mathbf{b}) = r$, sonst $\operatorname{rang}(A|\mathbf{b}) = r + 1$.

Beweis. Einen Beweis findet man in Kall (1984) auf Seite 104. ■

■ **Beispiel 7.4.6 — Alternative Berechnung von Beispiel 7.4.3.**
Wir betrachten erneut die erweiterte Koeffizientenmatrix aus Beispiel 7.2.10 mit rechter Seite $\mathbf{b} = (1,1,0)^T$,

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die Ausführung des Eliminationsverfahrens ergibt

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}$	
①	0	-4	-1	1	
②	1	1	-1	1	
③	1	5	0	0	
④	1	1	-1	1	②
⑤	0	-4	-1	1	①
⑥	1	5	0	0	③
⑦	1	1	-1	1	④
⑧	0	-4	-1	1	⑤
⑨	0	4	1	-1	⑥ - ④
⑩	1	0	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	⑦ + $\frac{1}{4}\cdot$⑧
⑪	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}\cdot$⑧
⑫	0	0	0	0	⑨ + ⑧
⑬	1	0	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	⑩
⑭	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	⑪

Die Anzahl der verbleibenden, von Nullzeilen verschiedenen Zeilen der Koeffizientenmatrix ist $r = 2$. Diese Zahl ist gleich der Anzahl der verbleibenden, von Nullzeilen verschiedenen Zeilen der erweiterten Koeffizientenmatrix. Damit gilt $\operatorname{rang}(A) = r = 2 = \operatorname{rang}(A|\mathbf{b})$. Das lineare Gleichungssystem ist lösbar. ■

Z Bezeichnet man die erweiterte Koeffizientenmatrix im Endtableau des Eliminationsverfahrens als $(A|\mathbf{b})$ und ist das LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar, dann entspricht die Anzahl der von Nullzeilen verschiedenen Zeilen dem

- Rang der Koeffizientenmatrix A des Endtableaus, $\operatorname{rang}(A)$;
- Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ des Endtableaus, $\operatorname{rang}(A|\mathbf{b})$.

7.4.3 Eigenschaften der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Ziele dieses Unterkapitels

- Was kann man aus dem Rang der Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems bezüglich der Dimension des Lösungsraums schliessen?
- Was kann man aus dem Rang der Koeffizientenmatrix eines homogenen linearen Gleichungssystems bezüglich der Dimension des Lösungsraums schliessen?

Erhält man in einem linearen Gleichungssystem mit n Variablen nach Ausführung des Eliminationsverfahrens r von Nullzeilen verschiedene Zeilen der Koeffizientenmatrix A, dann ist das lineare Gleichungssystem entweder unlösbar oder es hat r führende und $n-r$ freie Variablen. Da r dem Rang der Matrix A entspricht und die Anzahl der freien Variablen die Dimension der Lösungsmenge bestimmt, gilt:

Satz 7.4.5 — Die Lösungsmenge eines LGS.
Sei A eine $m \times n$-Matrix, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Wenn das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar ist, dann ist die Lösungsmenge ein affiner Raum der Dimension $n - \operatorname{rang}(A)$.

Beweis. Einen Beweis findet man in Kall (1984, Satz 2.21). ■

Das lineare Gleichungssystem ist nur dann unlösbar, wenn die Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform in einer Zeile i eine Nullzeile hat und $b_i \neq 0$ gilt. Ist $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, so kann dieser Fall nicht auftreten. Ein homogenes lineares Gleichungssystem hat stets die Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Satz 7.4.6 — Die Lösungsmenge eines homogenen LGS.
Sei A eine $m \times n$-Matrix und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Das homogene lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist stets lösbar. Die Lösungsmenge ist ein linearer Raum der Dimension $n - \operatorname{rang}(A)$.

Beweis. Der Beweis folgt direkt aus Satz 7.4.5 und der Tatsache, dass die Lösungsmenge eines linearen, homogenen Gleichungssystems ein linearer Raum ist. ■

Die Ergebnisse aus Sätzen 7.4.1, 7.4.5 und 7.4.6 sind in Abbildung 7.20 zusammengefasst. Insbesondere erkennt man, dass ein lineares Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$) im Fall $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|\mathbf{b}) = n$ immer, also für alle $\mathbf{b}$, eine eindeutige Lösung hat.

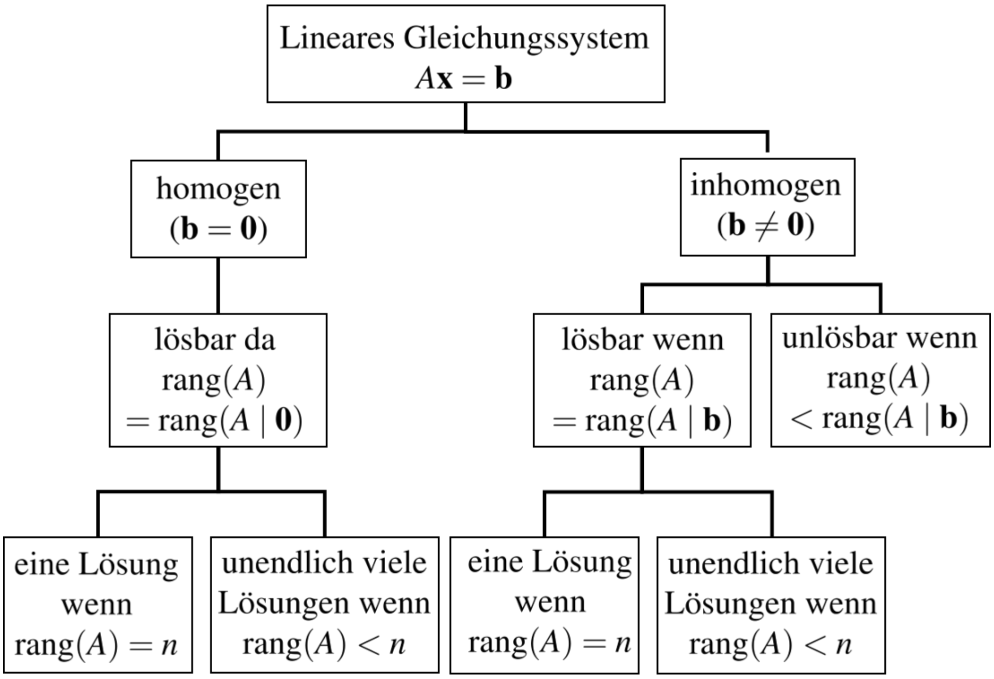

Abbildung 7.20: Übersicht: Lösbarkeit eines LGS.

■ **Beispiel 7.4.7 — Aussagen zur Lösungsmenge in Beispiel 7.2.10.**
Wir betrachten erneut die Koeffizientenmatrix aus Beispiel 7.2.10,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\operatorname{rang}(A) = 2$. Ohne das homogene lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit $n = 3$ Variablen zu lösen, kann man allein aus der rechten Seite $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ schliessen, dass dieses homogene lineare Gleichungssystem mindestens eine Lösung hat, nämlich $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Zudem weiss man wegen $n = 3$ und $\operatorname{rang}(A) = 2$, dass die Lösung nicht eindeutig ist. Das homogene lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Die Lösungsmenge ist ein linearer Raum der Dimension $n - \operatorname{rang}(A) = 3 - 2 = 1$, eine Gerade, vgl. Abbildung 7.21. Mit rechter Seite $\mathbf{b} = (1,1,0)^T$ ergibt sich ein inhomogenes lineares Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Wir wissen aus Beispiel 7.4.3, dass $\operatorname{rang}(A|\mathbf{b}) = 2$. Ohne dieses lineare Gleichungssystem zu lösen, können wir aus $\operatorname{rang}(A|\mathbf{b}) = 2 = \operatorname{rang}(A)$ schliessen, dass dieses inhomogene lineare Gleichungssystem eine Lösung hat. Zudem wissen wir wegen $n - \operatorname{rang}(A|\mathbf{b}) = 3 - 2 = 1$, dass die Lösung nicht eindeutig ist. Die Lösungsmenge ist ein affiner Raum der Dimension $n - \operatorname{rang}(A|\mathbf{b}) = 3 - 2 = 1$, eine Gerade, vgl. Abbildung 7.21. ■

■ **Beispiel 7.4.8 — Der Rang und die Lösungsmenge.**

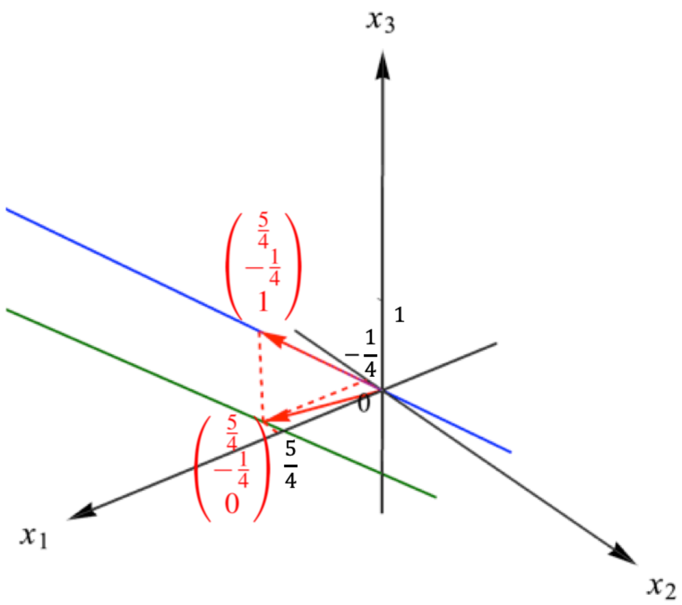

Abbildung 7.21: Lösungsmengen von Beispiel 7.4.7 .

Wir wenden nun das Eliminationsverfahren auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4 &= 8 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + 6x_4 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 12x_4 &= 14 \\ -2x_1 + 3x_3 + 7x_4 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 &= 6 \end{aligned}$$

mit erweiterter Koeffizientenmatrix

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 & 8 \\ -1 & -1 & 3 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 12 & 14 \\ -2 & 0 & 3 & 7 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 6 \end{array}\right)$$

an. Stoppen wir erst, wenn A in expliziter Form[10] vorliegt, ergibt sich:

[10]Eigentlich würde die Zeilenstufenform für Aussagen zum Rang und zur Lösbarkeit ausreichen.

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**	
①	1	2	1	8	8	
②	-1	-1	3	6	2	
③	4	1	2	12	14	
④	-2	0	3	7	4	
⑤	1	1	1	6	6	
⑥	1	2	1	8	8	①
⑦	0	1	4	14	10	② + ①
⑧	0	-7	-2	-20	-18	③ - 4·①
⑨	0	4	5	23	20	④ + 2·①
⑩	0	-1	0	-2	-2	⑤ - ①
⑪	1	0	-7	-20	-12	⑥ - 2·⑦
⑫	0	1	4	14	10	⑦
⑬	0	0	26	78	52	⑧ + 7·⑦
⑭	0	0	-11	-33	-20	⑨ - 4·⑦
⑮	0	0	4	12	8	⑩ + ⑦
⑯	1	0	0	1	2	⑪ + $\frac{7}{26}$·⑬
⑰	0	1	0	2	2	⑫ - $\frac{4}{26}$·⑬
⑱	0	0	1	3	2	$\frac{1}{26}$·⑬
⑲	0	0	0	0	2	⑭ + $\frac{11}{26}$·⑬
⑳	0	0	0	0	0	⑮ - $\frac{4}{26}$·⑬

Die Koeffizientenmatrix $\tilde{A}$ im Endtableau in expliziter Form hat also $r = 3$ Zeilen, die keine Nullzeilen sind. Es gilt $\operatorname{rang}(A) = 3$. Die erweiterte Koeffizientenmatrix hat $\operatorname{rang}(A|\mathbf{b}) = 4 \neq \operatorname{rang}(A)$. Das lineare Gleichungssystem ist nicht lösbar, was man leicht anhand von Gleichung ⑲, $0 = 2$, überprüfen kann.

Verändern wir die rechte Seite der vierten Gleichung von 4 zu 2 und betrachten das lineare Gleichungssystem mit erweiterter Koeffizientenmatrix

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 & 8 \\ -1 & -1 & 3 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 12 & 14 \\ -2 & 0 & 3 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 6 \end{array}\right),$$

entspricht dies dem in Beispiel 7.2.15 gelösen linearen Gleichungssystem mit Endtableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**	
㉑	1	0	0	1	2	⑯
㉒	0	1	0	2	2	⑰
㉓	0	0	1	3	2	⑱

Die Koeffizientenmatrix $\tilde{A}$ im Endtableau in expliziter Form hat also $r = 3$ Zeilen, die keine Nullzeilen sind. Es gilt $\operatorname{rang}(A) = 3$. Die erweiterte Koeffizientenmatrix hat $\text{rang}(A|\mathbf{b}) = 3 = \text{rang}(A)$. Das lineare Gleichungssystem ist lösbar. Ohne die Lösungsmenge dieses linearen Gleichungssystems in $n = 4$ Variablen zu bestimmen, können wir anhand des Rangs bereits sagen, dass die Lösungsmenge eine Dimension von $n - \text{rang}(A) = 4 - 3 = 1$ hat. In der Tat kann man hier leicht nachprüfen, dass die Lösungsmenge folgende Gerade beschreibt:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

■

Z Ist das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ lösbar, dann ist die Lösungsmenge ein affiner Raum der Dimension $n - \text{rang}(A)$. Homogene lineare Gleichungssysteme $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sind stets lösbar. Die Lösungsmenge ist ein linearer Raum der Dimension $n - \text{rang}(A)$.

Literaturverzeichnis

Dietz, H. M., *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, Springer Berlin Heidelberg, 5. Auflage, 2012

Ellenberg, J., *How not to be wrong - The power of mathematical thinking*, Penguin Books New York, 1. Auflage, 2014

Forster, O., *Lineare Algebra*, Friedrich Vieweg Sohn, Braunschweig, 10. Auflage, 1995

Forster, O., *Analysis 2, Differentialrechnung im* $\mathbb{R}^n$*, Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Friedrich Vieweg Sohn, Braunschweig, 5. Auflage, 1984

Forster, O., *Analysis 3, Integralrechnung im* $\mathbb{R}^n$ *mit Anwendungen*, Friedrich Vieweg Sohn, Braunschweig, 3. Auflage, 1984

Goll, C., Bentz, T., Röhrl, N., Akkar, Z., App, A., Beer, J., Dege, C., Deissler, J., Dirmeier, A., Feiler, S., Gulino, H, Haase, D., Hägele, C., Hankele, V., Hardy, E., Häussling, R., Heidbüchel, J., Helfrich-Schkarbanenko, A., Herlold, H., Hoffmann, H., Karl, I., Kempf, S., Kleb, J., Koss, R., Liedtke, J., Lilli, M., Merkt, D., Nese, C., Pintschovius, U., Pohl, T., Rapedius, K., Rutka, V., Schulz, M., Schüpp-Niewa, B., Sternal, O., Stroh, T., Vettin, L., Walliser, N., Weyreter, G., Ziebarth, E., *Onlinebrückenkurs Mathematik*, `https://www.math4refugees.tu-berlin.de/mfr/html/de/sectionx3.1.0.html`, zuletzt aufgerufen am 16.5.2018.

Heuser, H., *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*, Teubner, Stuttgart, 13. Auflage, 2000

Kall, P., *Analysis für Ökonomen*, Teubner Studienbücher Mathematik, Stuttgart, 1. Auflage, 1982

Kall, P., *Lineare Algebra für Ökonomen*, Teubner Studienbücher Mathematik, Stuttgart, 1. Auflage, 1984

Geiger, C., Kanzow, C., *Numerische Verfahren zur Lösung unrestringierter Optimierungsaufgaben*, Springer, 1. Auflage, 1999

Merz, M. und Wüthrich, M.V., *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Die Einführung mit vielen ökonomischen Beispielen*, Vahlen, 1. Auflage, 2013

Opitz, O., Etschberger, S., Burkart, W., und Klein, R., *Mathematik - Lehrbuch: für das Studium der Wirtschaftswissenschaften*, De Gruyter Studium, 12. Auflage, 2017

Pampel, T., *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, Springer, 1. Auflage, 2010

Rommelfanger, H., *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I*, Springer Berlin Heidelberg, 5. Auflage, 2008

Rommelfanger, H., *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler II*, Springer Berlin Heidelberg, 5. Auflage, 2009

Sanderson, G., *Youtube Channel 3blue1brown*, https://www.youtube.com/channel/UCYO_jab_esuFRV4b17AJtAw, 2017

Strang, G., *Lineare Algebra*, Springer Berlin Heidelberg, 1. Auflage, 2003

Legrand, M., *The Legrand Orange Book*, http://www.LaTeXTemplates.com, 2017