Es werden die Aufgaben 2(a)-(d),4(a)-(b) und 6 in den Tutorien besprochen.

Aufgabe 1 (Lineare Hüllen)

Sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, von dem Sie wissen, dass $\mathbf{a} = 3\mathbf{b} + 4\mathbf{c} + 0\mathbf{d}$, wobei $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$.
Dann gilt:

(1) $\mathbf{a} \in \operatorname{lin}\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $\mathbf{a} \in \operatorname{lin}\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $\mathbf{c} \in \operatorname{lin}\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{d}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sind linear unabhängig. ☐ wahr ☐ falsch

Aufgabe 2 (Erzeugendensysteme und lineare Hüllen im $\mathbb{R}^2$)

Gegeben sind die vier folgenden Vektoren:

$$\mathbf{a}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -17 \\ 17 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie die unten stehenden Mengen. Welche dieser Mengen ist ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie mit Hilfe Ihrer Zeichnungen.

(i) $\operatorname{lin}\{\mathbf{a}^1\}$ (ii) $\operatorname{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2\}$ (iii) $\operatorname{lin}\{\mathbf{b}\}$ (iv) $\operatorname{lin}\{\mathbf{a}^2, \mathbf{b}\}$ (v) $\operatorname{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{b}\}$ (vi) $\operatorname{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{c}\}$ (vii) $\operatorname{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

(b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) $\mathbf{b} = 0\mathbf{a}^1 + 17\mathbf{a}^2 + 0\mathbf{c}$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $\mathbf{c} = 3\mathbf{a}^1 + \mathbf{a}^2 + 0\mathbf{b}$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \operatorname{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $\mathbf{a}^2 \in \operatorname{lin}\{\mathbf{c}, \mathbf{a}^1\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(c) Betrachten Sie folgende Menge:

$$V^1 = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}.$$

Finden Sie einen Vektor $\mathbf{v}^1 \in \mathbb{R}^2$, sodass $\operatorname{lin}\{\mathbf{v}^1\} = V^1$.

(d) Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) V^1 ist ein linearer Raum. ☐ wahr ☐ falsch

(2) $\{\mathbf{a}^1\}$ ist ein Erzeugendensystem von V^1. ☐ wahr ☐ falsch

(3) $\{\mathbf{b}\}$ ist ein Erzeugendensystem von V^1. ☐ wahr ☐ falsch

(4) $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}^1\}$ ist ein Erzeugendensystem von V^1. ☐ wahr ☐ falsch

(e) Betrachten Sie folgende Menge:

$$V^2 = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\}.$$

Finden Sie einen Vektor $\mathbf{v}^2 \in \mathbb{R}^2$, sodass $\operatorname{lin}\{\mathbf{v}^2\} = V^2$.

(f) Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) V^2 ist ein linearer Raum. ☐ wahr ☐ falsch

(2) $\{\mathbf{a}^2\}$ ist ein Erzeugendensystem von V^2. ☐ wahr ☐ falsch

(3) $\{\mathbf{b}\}$ ist ein Erzeugendensystem von V^2. ☐ wahr ☐ falsch

(4) $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}^2\}$ ist ein Erzeugendensystem von V^2. ☐ wahr ☐ falsch

Aufgabe 3 (Lineare Räume als lineare Hüllen, Dimension)

(a) Beurteilen Sie jeweils die Aussage: „Die folgende Menge ist ein linearer Raum."

(1) $W_1 = \operatorname{lin}\left\{(1,3,5,-4,-\frac{3}{2},0,1)^T, (3,-4,7,1,26,\frac{12}{13},13)^T\right\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $W_2 = \{\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid \mathbf{x} = t\cdot(1,1,1,1)^T,\ t \in \mathbb{R}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $W_3 = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $W_4 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(b) Bestimmen Sie ggf. die Dimension der linearen Räume aus Teilaufgabe (a).

Aufgabe 4 (Erzeugendensystem, Basis - im $\mathbb{R}^3$)

Gegeben seien die Vektoren:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Beurteilen Sie jeweils die Aussage: „Die folgende Menge ist ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$.“

(1) $C_1 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $C_2 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $C_3 = \{\mathbf{d}, \mathbf{e}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $C_4 = \{\mathbf{d}, \mathbf{e}, 2\mathbf{d} - \mathbf{e}, \mathbf{d} + \mathbf{e}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(b) Beurteilen Sie jeweils die Aussage: „Die folgende Menge ist Basis des $\mathbb{R}^3$.“

(1) $C_1 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $C_2 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $C_3 = \{\mathbf{d}, \mathbf{e}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $C_4 = \{\mathbf{d}, \mathbf{e}, 2\mathbf{d} - \mathbf{e}, \mathbf{d} + \mathbf{e}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(c) Skizzieren Sie die unten stehenden Mengen. Welche dieser Mengen sind der $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie anhand Ihrer Skizze.
(i) $\operatorname{lin}\{\mathbf{b}\}$ (ii) $\operatorname{lin}\{\mathbf{c}\}$ (iii) $\operatorname{lin}\{\mathbf{c}, \mathbf{e}\}$ (iv) $\operatorname{lin}\{\mathbf{b}, \mathbf{d}\}$ (v) $\operatorname{lin}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ (vi) $\operatorname{lin}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$
(vii) $\operatorname{lin}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$.

Aufgabe 5 (Erzeugendensystem, Basis - $\mathbb{R}^4$)

Gegeben seien die Vektoren:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Beurteilen Sie jeweils die Aussage: „Die folgende Menge ist ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^4$.“

(1) $C_1 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $C_2 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $C_3 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $C_4 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(b) Beurteilen Sie jeweils die Aussage: „Die folgende Menge ist Basis des $\mathbb{R}^4$."

(1) $C_1 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $C_2 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $C_3 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $C_4 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

Aufgabe 6 (Geraden, Ebenen und Hyperebenen als lineare Räume I)

(a) Die Menge an Punkten, die auf der Geraden $y = 3x$ liegen, lässt sich wie folgt beschreiben

$$G = \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) G ist die lineare Hülle des Vektors $(1,3)^T$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Die Menge $\{(1,3)^T\}$ ist ein Erzeugendensystem von G. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Der lineare Raum $\text{lin}\{(0,0)^T\}$ hat die Dimension 0. ☐ wahr ☐ falsch

(4) G ist eine Hyperebene des $\mathbb{R}^2$. ☐ wahr ☐ falsch

(b) Gegeben sei die Ebene:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix},\ t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) $E = \text{lin}\{(1,0,1)^T, (0,1,-4)^T\}$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) E ist eine Hyperebene des $\mathbb{R}^3$. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Die Vektoren $(1,0,1)^T, (0,1,-4)^T, (4,1,0)^T$
bilden ein Erzeugendensystem von E. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Die Vektoren $(1,0,1)^T$ und $(0,1,-4)^T$ bilden eine Basis von E. ☐ wahr ☐ falsch

(c) Betrachten Sie folgende Menge von Punkten

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix},\ t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) E ist eine Ebene im $\mathbb{R}^3$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) $E = \text{lin}\{(1,-1,1)^T\}$. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Jeder Vektor $\mathbf{x} = \alpha(1,-1,1)^T$,
bildet für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Basis von E. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Die Vektoren $(1,-1,1)^T$ und $(-4,4,-4)^T$ bilden eine Basis von E. ☐ wahr ☐ falsch

Aufgabe 7 (Geraden, Ebenen und Hyperebenen als lineare Räume II)

(a) Betrachten Sie folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^5$:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^5.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) E ist eine Hyperebene des $\mathbb{R}^5$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) $E \subseteq \mathbb{R}^5$ ist eine Gerade. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Die Menge $\{(1,1,-3,0,0)^T\}$ist ein Erzeugendensystem von E. ☐ wahr ☐ falsch

(4) $E \subseteq \mathbb{R}^5$ ist eine Ebene. ☐ wahr ☐ falsch

(b) Betrachten Sie folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^5$:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^5.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) E ist eine Hyperebene des $\mathbb{R}^5$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) $E \subseteq \mathbb{R}^5$ ist eine Gerade. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Die Vektoren $(1,1,-3,0,0)^T, (0,0,1,1,1)^T$
bilden ein Erzeugendensystem von E. ☐ wahr ☐ falsch

(4) $E \subseteq \mathbb{R}^5$ ist eine Ebene. ☐ wahr ☐ falsch

(c) Betrachten Sie folgende lineare Hülle:

$$E = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^5.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) Die lineare Hülle E ist eine Hyperebene des $\mathbb{R}^5$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Die Vektoren $(1,0,1,0,0)^T, (0,1,-4,0,0)^T, (0,0,0,1,1)^T, (0,1,0,0,1)^T$
bilden ein Erzeugendensystem von E. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Die Vektoren $(1,0,1,0,0)^T, (0,1,-4,0,0)^T, (0,0,0,1,1)^T, (0,1,0,0,1)^T$
bilden eine Basis von E. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Die Vektoren $(1,0,1,1,1)^T, (0,1,-4,0,0)^T, (0,0,0,1,1)^T, (0,1,0,0,1)^T$
bilden eine Basis von E. ☐ wahr ☐ falsch

Aufgabe 8 (Basen des $\mathbb{R}^3$)

Gegeben sind die fünf Vektoren:

$$\mathbf{a}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 17 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Verifizieren Sie, dass die drei Vektoren $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2$ und $\mathbf{a}^3$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ darstellen.

(b) Lässt sich der Vektor $\mathbf{b}$ als folgende Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2$ und $\mathbf{a}^3$ darstellen:

$$\mathbf{b} = -\mathbf{a}^1 + 14\mathbf{a}^2 + 3\mathbf{a}^3?$$

Lässt sich der Vektor $\mathbf{c}$ als folgende Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2$ und $\mathbf{a}^3$ darstellen:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}^3?$$

(c) Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?
Hinweis: Nutzen Sie den Basistauschsatz und die Ergebnisse aus Teilaufgaben (a) und (b).

(1) Die Menge $\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{c}\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Die Menge $\{\mathbf{c}, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Die Menge $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}^3\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Die Menge $\{\mathbf{a}^1, \mathbf{b}, \mathbf{a}^3\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$. ☐ wahr ☐ falsch

(d) Welche der folgenden Aussagen ist wahr und welche falsch?

(1) $\mathrm{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{b}, \mathbf{a}^3\} \subseteq \mathrm{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) $\mathrm{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2\} \subseteq \mathrm{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$. ☐ wahr ☐ falsch

(3) $\mathrm{lin}\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} \subseteq \mathrm{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$. ☐ wahr ☐ falsch

(4) $\mathbb{R}^3 \subseteq \mathrm{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$. ☐ wahr ☐ falsch

Aufgabe 9 (Festgeld und Aktien)

Von drei Geldanlagen (Festgeld, Aktie I, Aktie II) wird angenommen, dass sie nach einem Jahr folgenden Wert haben (jeweils in CHF):

	Festgeld	Aktie I	Aktie II
schlechte Konjunktur	1050	500	0
mittlere Konjunktur	1050	1200	2000
gute Konjunktur	1050	3000	6000
	$(\mathbf{a}^1)$	$(\mathbf{a}^2)$	$(\mathbf{a}^3)$

Das heisst, investiert man beispielsweise $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, wobei α_2 in 1000 CHF angegeben ist, in Aktie I, so hat man nach einem Jahr $\alpha_2 \cdot 1200$ CHF bei mittlerer Konjunktur. Bei guter Konjunktur wären es $\alpha_2 \cdot 3000$ CHF. Ist $\alpha_2 < 0$, so nennt man Investitionen Leerverkäufe anstatt Käufe.
Investiert man also α_1 in Festgeld, α_2 in Aktie I und α_3 in Aktie II, wobei α_1, α_2 und α_3 in 1000 CHF angegeben sind, hat man nach einem Jahr

$$\begin{aligned}\alpha_1 \cdot \mathbf{a}^1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{a}^2 + \alpha_3 \cdot \mathbf{a}^3 &= \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1050 \\ 1050 \\ 1050 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 1200 \\ 3000 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2000 \\ 6000 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 1050 + \alpha_2 500 \\ \alpha_1 1050 + \alpha_2 1200 + \alpha_3 2000 \\ \alpha_1 1050 + \alpha_2 3000 + \alpha_3 6000 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

wobei die erste Komponente des so enstehenden Auszahlungsschemas dem Wert bei schlechter Konjunktur entspricht, die zweite dem Wert bei mittlerer Konjunktur und die dritte dem Wert bei guter Konjunktur.

(a) Welches Auszahlungschema ergibt sich, wenn $\alpha_1 = -10$ in Festgeld, $\alpha_2 = 7$ in Aktie I und $\alpha_3 = 8$ in Aktie II investiert wird?
(b) Kann man jedes mögliche Auszahlungsschema mit diesen 3 Investitionen erhalten? Bzw. gibt es ein Auszahlungsschema, das nicht durch eine Kombination dieser drei Geldanlagen erzeugt werden kann? Falls nein, begründen Sie Ihre Antwort. Falls ja, geben Sie ein Beispiel.

Aufgabe 10 (Das Satellitenproblem)

Die Firma SpaceX ist mit ihrer neu entwickelten Trägerrakete *Millenium Falcon* ins Satellitengeschäft eingestiegen. Der erste prestigeträchtige Auftrag lautet, zwei Satelliten an den Positionen

$$\mathbf{w}^1 = \begin{pmatrix} 60 \\ -10 \\ 30 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{w}^2 = \begin{pmatrix} -50 \\ -20 \\ 25 \end{pmatrix}$$

auszusetzen. Eine technische Störung während des Starts führt nun dazu, dass sich die drei Steuerdüsen des *Millenium Falcons* nicht mehr neu orientieren lassen. Die letzte bekannte Orientierung der Steuerdüsen ist durch die drei Vektoren

$$\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Mit Orientierung ist dabei die Fortbewegungsmöglichkeit der Rakete im dreidimensionalen Raum gemeint, sprich:

$$\begin{pmatrix} \text{vorwärts/rückwarts} \\ \text{rechts/links bzw. seitwärts} \\ \text{aufwärts/ abwärts} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{1.Dimension} \\ \text{2.Dimension} \\ \text{3.Dimension} \end{pmatrix}.$$

Die Ingenieure im Kontrollzentrum sollen nun berechnen, wie die Schubintensitäten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ zu wählen sind, um entlang der Zielrichtung $\alpha_1\mathbf{v}^1 + \alpha_2\mathbf{v}^2 + \alpha_3\mathbf{v}^3$ die gewünschten Positionen zu erreichen. Dabei herrscht Uneinigkeit: Die eine Hälfte der Ingenieure behauptete, $\mathbf{w}^1$ und $\mathbf{w}^2$ seien durchaus mit den Orientierungen $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3$ erreichbar. Die andere Hälfte hingegen erklärt die Mission für fehlgeschlagen, denn nur, wenn Steuerdüse $\mathbf{v}^2$ umorientiert wird, bspw. zu $\mathbf{u}^2 = (2,3,-1)^T$, können beide Positionen erreicht werden.
In der Zwischenzeit meldet sich MacGyver, der sich vor dem Start an Bord des *Millenium Falcon* schmuggeln konnte, über Funk. Ausgerüstet mit einem Kaugummi, einer Büroklammer und seinem altbewährten Schweizer Taschenmesser erklärt er sich dazu bereit, falls nötig, die Steuerdüse neu zu orientieren.
Es liegt nun an Ihnen, den Ingenieuren bei ihrer Entscheidung zu helfen!

(a) Bestimmen Sie zuerst, wer Recht hat. Welche der Positionen $\mathbf{w}^1$ oder $\mathbf{w}^2$ kann mit den ursprünglichen Orientierungen $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3$ erreicht bzw. nicht erreicht werden?
(b) Was hat eine Orientierungsänderung von $\mathbf{v}^2$ zu $\mathbf{u}^2 = (2,3,-1)^T$ zur Konsequenz? Welche Positionen können nun erreicht werden? Muss sich MacGyver also einschalten, um die Mission zu retten?
(c) Mit welcher Steuerdüsenkonfiguration, $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3\}$ oder $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{u}^2, \mathbf{v}^3\}$, lässt sich jede beliebige Position erreichen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Rechnen Sie sorgfältig und begründen Sie alle Ergebnisse. Elon Musk wird es Ihnen danken.