Es werden die Aufgaben 1(a)-(f), 5 und 6 in den Tutorien besprochen.

Aufgabe 1 (Vektoren des $\mathbb{R}^2$)

Gegeben seien die beiden Spaltenvektoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie folgende Vektoren
- $2\mathbf{u}$,
- $-2\mathbf{v}$,
- $2\mathbf{u}+\mathbf{v}$,
- $\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

(b) Stellen Sie die berechneten Vektoren graphisch in der Ebene $\mathbb{R}^2$ dar und berechnen Sie jeweils deren Länge.

(c) Bestimmen Sie $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -15 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(d) Bestimmen Sie $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

(e) Bestimmen Sie jeweils die Geradengleichung der Geraden, welche die Punkte **u** bzw. **v** mit dem Ursprung **0** verbindet.

(f) Stellen Sie folgende Mengen graphisch dar:
  (i) $\{\alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \geq 0\}$,
  (ii) $\{\alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \leq 0\}$,
  (iii) $\{\alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha_1 = 0, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$,
  (iv) $\{\alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha_1 = 1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$,
  (v) $\{\alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \alpha_1 \leq 1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$,
  (vi) $\{\alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0\}$,
  (vii) $\{\alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha_1 = \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$.

(g) Beantworten Sie die Fragen (a)-(f) im Falle $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2 (Geradengleichung in Parameterform I)

Gegeben ist die Gerade

$$g_p : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

(a) Sei $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Stellen Sie die Gerade g_p graphisch im $\mathbb{R}^2$ dar.

(b) Sei $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Stellen Sie die Gerade g_p graphisch im $\mathbb{R}^2$ dar.

(c) Sei $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Stellen Sie die Gerade g_p graphisch im $\mathbb{R}^2$ dar.

(d) Wie muss v gewählt werden, damit die Gerade $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ der Geraden g_p mit $p_1 = p_2 = 0$ entspricht?

(e) Wie muss v gewählt werden, damit die Gerade $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ der Geraden g_p mit $p_1 = 0$, $p_2 = 2$ entspricht?

(f) Wie muss w gewählt werden, damit die Gerade $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ der Geraden g_p mit $p_1 = p_2 = 0$ entspricht?

(g) Wie muss w gewählt werden, damit die Gerade $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} w \\ -4 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ der Geraden g_p mit $p_1 = 0, p_2 = 2$ entspricht?

Aufgabe 3 (Geradengleichung in Parameterform II)

Gegeben ist die Gerade h_1 in Parameterform

$$h_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

(a) Welche der folgenden Geradengleichungen beschreibt h_1?

○ $y = \frac{2}{3}x - 4$ ○ $y = \frac{4}{3}x - 4$ ○ $y = \frac{2}{3}x - 1$ ○ $y = \frac{3}{2}x - 3$

○ $y = \frac{3}{2}x - 1$ ○ $y = \frac{2}{3}x - 3$ ○ $y = \frac{2}{3}x + 3$ ○ Keine davon

(b) Betrachten Sie folgende Gerade in Parameterform

$$h_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ -3 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

(i) Liegt der Punkt $(-1, 1)^T$ auf der Geraden h_2?

(ii) Liegt der Punkt $(-1, 1)^T$ auf der Geraden h_1?

(iii) Welche der folgenden Geradengleichungen beschreibt h_2?

○ $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ ○ $y = \frac{4}{3}x - 4$ ○ $y = \frac{2}{3}x - 1$

○ $y = \frac{3}{2}x - 3$ ○ $y = \frac{3}{2}x - 1$ ○ $y = \frac{2}{3}x - 3$

○ $y = \frac{2}{3}x + 3$ ○ Keine davon

(iv) Stellen Sie die Geraden h_1 und h_2 graphisch im $\mathbb{R}^2$ dar.

Aufgabe 4 (Geradengleichung in Parameterform III)

Gegeben ist die Gerade h_3 in Parameterform

$$h_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

(a) Stellen Sie die Geradengleichung für h_3 auf.

(b) Betrachten Sie folgende Gerade in Parameterform

$$h_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -24 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

(i) Liegt der Punkt $(-1,-6)^T$ auf der Geraden h_4? Liegt er auf der Geraden h_3?

(ii) Stellen Sie die Geradengleichung für h_4 auf.

(iii) Stellen Sie die Geraden h_3 und h_4 graphisch im $\mathbb{R}^2$ dar.

(c) Betrachten Sie folgende Gerade in Parameterform

$$h_5 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

(i) Liegt der Punkt $(-\frac{9}{4}, 3)^T$ auf der Geraden h_5?

(ii) Liegt der Punkt $(-\frac{9}{4}, 3)^T$ auf der Geraden h_3?

(iii) Stellen Sie die Geradengleichung für h_5 auf.

(iv) Stellen Sie die Geraden h_3 und h_5 graphisch im $\mathbb{R}^2$ dar.

Aufgabe 5 (Geradengleichung in Parameterform IV)

Gegeben ist die Geradengleichung einer Geraden g,

$$y = 4 - \tfrac{1}{4}x.$$

Welche der folgenden Parameterformen beschreibt die gleiche Gerade wie g? Wählen Sie wahr, wenn die gleiche, und falsch, wenn eine andere Gerade beschrieben wird.

(1) $g_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $g_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $g_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 16 \\ -4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $g_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ ☐ wahr ☐ falsch

Aufgabe 6 (Ebenengleichung in Parameterform)

Folgende Gleichung beschreibt die Ebene E im $\mathbb{R}^3$:

$$z = 2 + x - 4y$$

Welche der folgenden Parameterformen beschreibt die gleiche Ebene? Wählen Sie wahr, wenn die gleiche, falsch, wenn eine andere Ebene beschrieben wird.

(1) $E_1 : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $E_2 : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $E_3 : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $E_4 : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$ ☐ wahr ☐ falsch