Prüfung zur Vorlesung Mathematik II Frühlingssemester 2015 Musterlösungen

27. Mai 2015

AUFGABE 1 Aufgabe 1.1

(i)
$$\int_0^1 \sqrt[3]{x} \, \mathrm{d}x = \frac{3}{4}$$

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x} \, dx = \int_0^1 x^{1/3} \, dx = \left[\frac{3}{4}x^{4/3}\right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

(ii)
$$\int h(x) \, \mathrm{d}x = 2\sqrt{g(x)}$$

Durch die Substitution u = g(x), du = g'(x)dx lässt sich das Integral wie folgt lösen:

$$\int \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \int u^{-1/2} du = 2u^{1/2} + C$$
$$= 2\sqrt{g(x)} + C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 1.2

(a) Auf $[-\infty, 1]$ ist die Funktion 1 - |x| wie folgt definiert:

$$1 - |x| = \begin{cases} 1 - x & \forall x \in [0, 1] \\ 1 - (-x) = 1 + x & \forall x \in [-\infty, 0). \end{cases}$$

Damit kann das uneigentliche Integral geteilt werden. Mit $-\infty < a < 0$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{1} e^{1-|x|} dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{1} e^{1-|x|} dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} e^{1+x} dx + \int_{0}^{1} e^{1-x} dx$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left[e^{1+x} \right]_{a}^{0} + \left[-e^{1-x} \right]_{0}^{1}$$

$$= e - \lim_{a \to -\infty} e^{1+a} - e^{0} + e = \underline{2e-1}.$$

(b) Das innere Integral wird zuerst bestimmt:

$$\int_0^1 (2x + \ln(y)) \, dx = \left[x^2 + x \ln(y) \right]_0^1 = 1 + \ln(y).$$

Das äussere Integral kann mit Hilfe einer partiellen Integration gelöst werden:

$$u = 1 + \ln(y) \qquad u' = \frac{1}{y}$$

$$v' = 1 \qquad v = y$$

$$\int_{1}^{2} 1 \cdot (1 + \ln(y)) \, dy = \left[y \cdot (1 + \ln(y)) \right]_{1}^{2} - \int_{1}^{2} y \cdot \frac{1}{y} \, dy = \left[y + y \ln(y) \right]_{1}^{2} - \left[y \right]_{1}^{2} = \left[y \ln(y) \right]_{1}^{2}$$

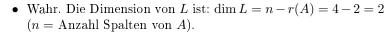
$$= 2 \ln(2) - \underbrace{\ln(1)}_{-0} = \underbrace{2 \ln(2)}_{-0}.$$

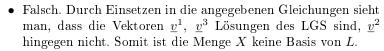
AUFGABE 2 Aufgabe 2.1

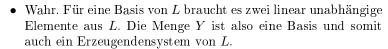
Die zum linearen Gleichungssystem zugehörige Koeffizienten-Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

hat den Rang r(A) = 2, wie man aus folgenden Rechnungen sieht:

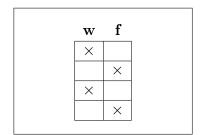
1	0	-2	1	
0	1	-1	-1	
2	-1	-3	3	$Z_3 - 2Z_1$
1	0	-2	1	
0	1	-1	-1	
0	-1	1	1	$Z_3 + Z_2$
1	0	-2	1	
0	1	-1	-1	
0	0	0	0	







ullet Falsch. Die Menge Z kann mit nur einem Vektor keine Basis von L sein. Für eine Basis von L braucht es zwei linear unabhängige Vektoren aus L.



Musterlösungen FS 2015

Aufgabe 2.2

• Die Determinante von

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

lässt sich z.B. durch die Regel von Sarrus berechnen:

$$\det A = 2 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1$$

= 0 + 0 + 0 - 0 - 2 - 1 = -3 \neq 0 \Rightarrow A ist invertierbar.

Wir können z.B. mit Hilfe des Eliminationsverfahrens von Gauss die Inverse berechnen:

2	1	0	1	0	0	$Z_1 - 2Z_2$
1	0	1	0	1	0	Z_1 mit Z_2 vertauschen
0	1	1	0	0	1	
1	0	1	0	1	0	
0	1	-2	1	-2	0	
0	1	1	0	0	1	$Z_3 - Z_2$
1	0	1	0	1	0	
0	1	-2	1	-2	0	
0	0	3	-1	2	1	$Z_3/3$
1	0	1	0	1	0	$\overline{Z_1 - Z_3}$
0	1	-2	1	-2	0	$Z_2 + 2Z_3$
0	0	1	-1/3	2/3	1/3	
1	0	0	1/3	1/3	-1/3	
0	1	0	1/3	-2/3	2/3	
0	0	1	-1/3	2/3	1/3	

$$\Rightarrow$$
 Die Inverse von A ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

• In der Matrix

$$B = \left(\begin{array}{rrr} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

ist die erste Spalte gleich wie die zweite Spalte multipliziert mit (-1). Die Matrix hat somit keinen vollen Rang und ist deshalb nicht invertierbar.

• Die Matrix $C = A^T$ hat die gleiche Determinante wie A, nämlich det $C = \det A^T = \det A = -3 \neq 0$, und ist somit auch invertierbar. Da die Matrix A symmetrisch ist $(A^T = A)$, ist

$$C^{-1} = (A^T)^{-1} = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann die Inverse ohne Kenntnis der Symmetrie berechnet werden, indem man die Transponierte zu A^{-1} bestimmt, ausgehend von der Regel $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Musterlösungen FS 2015

AUFGABE 3

Aufgabe 3.1

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.2

(a) Die Berechnung einer Determinante kann auf vielfältige Weise erfolgen. Hier geschieht dies mithilfe der Laplace-Entwicklung nach der letzten Zeile und anschliessend nach der letzten Spalte.

$$\mu = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 \\ 12 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

Das Vertauschen der ersten und letzten Zeile bei der Matrix von ν ergibt die Matrix der Determinante μ .

$$\nu = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{=u} = 8$$

(b) Die quadratische Matrix B ist regulär, da det $B \neq 0$. Dadurch kann die Inversenberechnung mittels der Adjungierten erfolgen:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{a^2 - b^2}}_{=-1} \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Das Gleichsetzen von B^{-1} und B,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = B,$$

liefert direkt a=0, da -a=a. Aus der Voraussetzung det $B=a^2-b^2=-1$ folgt nun $b=\pm 1$. Damit erfüllen die Matrizen

$$\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{array}\right) \text{ und } \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)$$

die geforderten Voraussetzungen.

AUFGABE 4

4.1
$$\lim_{x \to 0} \frac{4\sin(2x)}{3x} = \frac{8}{3}$$

Einsetzen von x = 0 ergibt den unbestimmten

Ausdruck $\frac{0}{0}$. Mit Hilfe der l'Hospitalschen Regel Nr. 1 und mit $\lim_{x\to 0}\cos(2x)=1$ erhalten wir:

$$\lim_{x \to 0} \frac{4\sin(2x)}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{4 \cdot 2\cos(2x)}{3} = \frac{8}{3} \cdot \lim_{x \to 0} \cos(2x) = \frac{8}{3}.$$

4.2
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Mit $x_2 = t_1$, sowie $x_3 = t_2$ erhalten wir die links angegebene Lösung: $x_1 = 4 + 2t_1 - 3t_2$, $x_4 = 1$.

Allgemein: In diesem linearen Gleichungssystem mit 2 linear unabhängigen Gleichungen und 4 Unbekannten müssen 2 Variablen als Parameter gewählt werden. Da $x_4 = 1$ fest ist, stehen hierzu x_1, x_2, x_3 zur Verfügung. Die allgemeine Lösung hat die Form:

 $\underline{x} = \underline{x}^0 + t_1 \cdot \underline{a} + t_2 \cdot \underline{b} \quad (\underline{x}^0, \underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^4)$. Dabei ist \underline{x}^0 eine beliebige Lösung des gegebenen LGS und $\underline{a}, \underline{b}$ sind zwei linear unabhängige Lösungen des dazugehörigen homogenen LGS $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

4.3
$$\det B = 48$$

Jede der 4 Zeilen (bzw. Spalten) von A^T wird mit dem Faktor 2 multipliziert. Es gilt also:

$$\det B = 2^4 \cdot \det A^T = 2^4 \cdot \det A = 16 \cdot 3 = 48.$$

Die Determinante ist linear bezüglich jeder Spalte. Es gilt somit:

$$\det C = \det[\underline{a}^1, (-5\underline{a}^2), \underline{a}^3, \underline{a}^4] + \det[\underline{a}^1, (3\underline{a}^3), \underline{a}^3, \underline{a}^4]$$

$$= -5 \cdot \det[\underline{a}^1, \underline{a}^2, \underline{a}^3, \underline{a}^4] + 3 \cdot \det[\underline{a}^1, \underline{a}^3, \underline{a}^3, \underline{a}^4]$$

$$= -5 \cdot \det A + 3 \cdot 0 = -15$$

 $(\det[\ \underline{a}^1,\ \underline{a}^3,\ \underline{a}^3,\ \underline{a}^4]=0$, da die Matrix zwei gleiche Spalten enthält und somit singulär ist).

$$\det C = -15$$

4.4

$$Q^{-1} = Q + I$$

 $Q^2+Q=I$

 ${\cal Q}$ auf linker Seite ausklammern:

$$\Leftrightarrow Q\underbrace{(Q+I)}_{\equiv Q^{-1}} = I$$

da wir wissen, dass $QQ^{-1}=I$ und Q^{-1} eindeutig definiert ist.

$$\Rightarrow (Q+I) = Q^{-1}$$

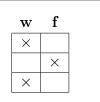
4.5

$$\alpha = 47$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} ||3\underline{a} - 2\underline{b}|| &= ||3\underline{a} + (-2\underline{b})|| &\leq & ||3\underline{a}|| + || - 2\underline{b}|| = 3||\underline{a}|| + 2|| - \underline{b}|| \\ &= 3||\underline{a}|| + 2||\underline{b}|| = 33 + 14 \\ &= 47 = \alpha \end{aligned}$$

4.6



- Wahr. Alle Eigenwerte von $C \geq 0 \Rightarrow C$ positiv semidefinit $\Rightarrow f$ konvex.
- Falsch. λ Eigenwert von $C \Rightarrow \det(C \lambda I) = 0$ $\Rightarrow (C - \lambda I)$ singulär $\Rightarrow r(C - \lambda I) < 3$.
- Wahr. C negativ definit \Rightarrow Alle Eigenwerte von $C<0\Rightarrow \det(C)<0$ (da Produkt aus 3 negativen Eigenwerten).