Matrikelnummer: ______________________ Prüfungsnummer: ________________

Name: ________________________ Vorname: ________________________

Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät der Universität Zürich
Professur Mathematik für Ökonomen
Prof. Dr. Diethard Klatte

PRÜFUNG IN MATHEMATIK II (BACHELORSTUDIUM)

16. Juni 2011

Zulässige Hilfsmittel: Schreibzeug (keine Taschenrechner)

Prüfungsdauer: 90 Minuten

Es können maximal 80 Punkte erzielt werden, und zwar 20 Punkte pro Aufgabe.

In den Aufgaben 1 und 3 müssen die angewandte Lösungsmethode bzw. die Begründungen und Argumente deutlich erkennbar sein, die Lösungen sind unmittelbar unter "Platz für Lösung" einzutragen. Die Aufgabenstellung ist genau zu beachten.

In den Aufgaben 2 und 4 wird nur nach der Lösung gefragt. Dort wird der Lösungsweg nicht angeschaut, es zählen nur die in die Kästchen eingetragenen Antworten!

Hinweis zu den Teilaufgaben, bei denen die Antworten **anzukreuzen** sind: Die Angabe "je 1 Punkt" (bzw. "je 2 Punkte") bedeutet, dass es pro Frage 1 Punkt (2 Punkte) bei richtiger Antwort, -1 Punkt (-2 Punkte) bei falscher Antwort sowie 0 Punkte bei fehlender Antwort gibt; die Gesamtpunktzahl der Teilaufgabe kann nicht negativ sein.

Falls der Platz nicht ausreicht, kann die Bearbeitung der Aufgaben auf Zusatzblättern fortgesetzt werden. Ungültige Lösungsversuche sind in jedem Fall durchzustreichen!

(leer lassen)

Aufgabe	1	2	3	4	Summe
Punkte					

AUFGABE 1 (20 Punkte)

Für jede Teilaufgabe ist der Lösungsweg bzw. die Begründung ausführlich anzugeben.

Aufgabe 1.1 (6 Punkte)

Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^1 x\, e^{2x^2-1}\, \mathrm{d}x\,.$

Aufgabe 1.2 (8 Punkte)

Berechnen Sie das Doppelintegral $\int_{-1}^{1} \left(\int_0^1 (\sqrt{x} + e^y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\,.$

Aufgabe 1.3 (6 Punkte)

Sei $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ eine stetig differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft

$$\frac{x f'(x)}{f(x)} \equiv c \quad \forall x \in (0, +\infty)\,,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ gegeben ist. Berechnen Sie für beliebige $a, b > 0$ das Integral $\int_a^b (\ln f(x))\, \mathrm{d}x\,.$

Tipp: $\int\limits_a^b \ln f(x)\, \mathrm{d}x = \int\limits_a^b (1 \cdot \ln f(x))\, \mathrm{d}x\,.$

PLATZ FÜR LÖSUNG:

PLATZ FÜR LÖSUNG:

AUFGABE 2 (20 Punkte)

Bei allen Teilaufgaben wird der Lösungsweg nicht angeschaut. Es zählen nur die in die Kästchen eingetragenen Ergebnisse!

Aufgabe 2.1 (6 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Lösen Sie die folgenden Aufgaben für die Taylorpolynome $P_2(x)$ und $P_1(x)$ von f an der Stelle $a = 0$:

a. Bestimmen Sie das Taylorpolynom $P_2(x)$.

(3 Punkte) $P_2(x) =$

b. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie die richtige Antwort an.

(je 1 Punkt, vgl. Deckblatt)

	wahr	falsch
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^{-x} \geq P_1(x)$.		
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^{-x} \geq P_2(x)$.		
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^{-x} \leq P_2(x)$.		

Hinweise:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \quad \text{(Taylorpolynom von } f \text{ an der Stelle } a\text{)},$$

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \text{ an einer Stelle } \xi \text{ zwischen } a \text{ und } x \quad \text{(Lagrange-Restglied)}.$$

Aufgabe 2.2 (6 Punkte)

Betrachten Sie das homogene lineare Gleichungssystem (LGS) $A\underline{x} = \underline{0}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie, ob gewisse Mengen von Vektoren eine Basis bzw. ein Erzeugendensystem der Lösungsmenge L des homogenen LGS $A\underline{x} = \underline{0}$ sind. Gegeben sind

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad Y = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Kreuzen Sie an, ob die betreffende Aussage wahr oder falsch ist.

(je 2 Punkte, vgl. Deckblatt)

	wahr	falsch
X ist eine Basis von L.		
Y ist ein Erzeugendensystem von L.		
$Y \setminus X$ ist eine Basis von L.		

Hinweis: $Y \setminus X = \{\underline{y} \mid \underline{y} \in Y \text{ und } \underline{y} \notin X\}$.

Aufgabe 2.3 (8 Punkte)

Berechnen Sie, soweit möglich *), für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

das Produkt AB, die Inverse A^{-1} von A und die Summennorm $\|B^{\mathsf{T}}\underline{x}\|_1$ von $B^{\mathsf{T}}\underline{x}$:

(2 Punkte) $AB =$

(3 Punkte) $A^{-1} =$

(3 Punkte) $\|B^{\mathsf{T}}\underline{x}\|_1 =$

Tipps: $\|\underline{z}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |z_j|$ für $\underline{z} = (z_1, \ldots, z_n)^{\mathsf{T}}$,
B^{T} ist die Transponierte von B.

*) andernfalls schreiben Sie "existiert nicht".

AUFGABE 3 (20 Punkte)

Für jede Teilaufgabe ist der Lösungsweg bzw. die Begründung ausführlich anzugeben.

Aufgabe 3.1 (8 Punkte) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 & 1 \\ 14 & -2 & 1 & 1 \\ -28 & 8 & 6 & 1 \\ 21 & -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie die Determinante $\det A$.

(ii) Berechnen Sie die Determinante $\det(\frac{1}{2}A)$.

Aufgabe 3.2 (12 Punkte) Betrachten Sie für gegebene $a, b, c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Matrix A bzw. das lineare Gleichungssystem $(*)$,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad (*) \quad \begin{array}{rcrcl} ax_1 & + & bx_2 & = & \alpha \\ bx_1 & + & cx_2 & = & \beta \end{array}.$$

(i) Bestimmen Sie alle Tripel $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, für die die Matrix A regulär ist.

(ii) Berechnen Sie für alle unter (i) bestimmten Tripel die Inverse A^{-1} von A.

(iii) Bestimmen Sie alle $(a, b, c, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^5$, für die das lineare Gleichungssystem $(*)$ genau eine Lösung hat.

(iv) Berechnen Sie für die unter (iii) bestimmten (a, b, c, α, β) die betreffende eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems $(*)$.

(v) Bestimmen Sie irgendein 5-Tupel $(a, b, c, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^5$ mit $a \neq b$, für das das lineare Gleichungssystem $(*)$ unendlich viele Lösungen hat.

Tipp: Bei den Aufgaben (ii) und (iv) ist die Verwendung der adjungierten Matrix $A_{ad} = \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$ bzw. der Cramerschen Regel besser geeignet als der Algorithmus von Gauss.

PLATZ FÜR LÖSUNG:

PLATZ FÜR LÖSUNG:

AUFGABE 4 (20 Punkte)

Bei allen Teilaufgaben wird der Lösungsweg nicht angeschaut. Es zählen nur die in die Kästchen eingetragenen Ergebnisse!

Aufgabe 4.1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & 2 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 2 \\ & & & & & & x_4 & + & x_5 & = & 2\ . \end{array}$$

$\underline{x} =$

Aufgabe 4.2 (8 Punkte)

Gegeben ist das inhomogene lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{array}{cccccccc} 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 = & 3 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 = & 4 \\ & & x_2 & + & ux_3 & - & ux_4 = & 2v \end{array}$$

wobei u und v reelle Parameter sind. Bestimmen Sie alle Parameterpaare (u, v) *), für die dieses lineare Gleichungssystem

		(u, v) mit
	unlösbar ist	
(je 2 Punkte)	eine Lösungsmenge der Dimension 1 hat	
	eine Lösungsmenge der Dimension 2 hat	
	eine Lösungsmenge der Dimension 3 hat	

*) Falls kein (u, v) die betreffende Eigenschaft hat, schreiben Sie "kein".

Aufgabe 4.3 (8 Punkte)

Betrachten Sie eine 4×4-Matrix

$$A = [\, \underline{a}^1 \;\; \underline{a}^2 \;\; \underline{a}^3 \;\; \underline{a}^4 \,] \text{ mit der Determinante } \det A = -3,$$

wobei A spaltenweise aufgeschrieben ist, also $\underline{a}^j \in \mathbb{R}^4$ die Spaltenvektoren von A sind.

Lösen Sie die folgenden 4 Aufgaben. Je Antwort gibt es 2 Punkte.

1. Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A^\top A$. $\quad \det(A^\top A) \; = \; \boxed{}$

2. Welchen Rang $r(A)$ hat A? $\quad r(A) \; = \; \boxed{}$

3. Betrachten Sie nun den Vektor
$$\underline{b} = \sum_{j=1}^{4} \underline{a}^j$$
und bestimmen Sie alle Lösungen $\underline{x}$ des linearen Gleichungssystems
$$A\underline{x} = \underline{b}\,.$$
$$\underline{x} \; = \; \boxed{}$$

4. Betrachten Sie die lineare Hülle L der Menge von Vektoren
$$X = \{\underline{a}^1 + \underline{a}^2 \;,\; \underline{a}^3 - \underline{a}^2 \;,\; \underline{a}^4 - \underline{a}^3 - \underline{a}^1 \;,\; \underline{a}^4\}\,,$$
d.h., L ist die Menge aller Linearkombinationen der Vektoren aus X. Bestimmen Sie eine Basis von L.
$$\text{Basis von } L \; = \; \boxed{}$$