Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät der Universität Zürich
Institut für Operations Research und Mathematische Methoden

Prüfung zur Vorlesung Mathematik II Frühjahrssemester 2010
Musterlösungen

17. Juni 2010

AUFGABE 1

Aufgabe 1.1

Variante 1:

Mit der Substitution $f(x) = y$ und $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$ folgt

$$\int f'(x)\,(1 + 4f(x))\;\mathrm{d}x = \int (1 + 4y)\,\mathrm{d}y = y + 2y^2 + C = f(x) + 2(f(x))^2 + C, \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

Variante 2:

Mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))^2 = 2f'(x)f(x)$ folgt

$$\int f'(x)\,(1 + 4f(x))\;\mathrm{d}x = \int f'(x)\mathrm{d}x + 2\int 2f'(x)f(x)\mathrm{d}x = f(x) + 2(f(x))^2 + C, \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 1.2

Zuerst berechnen wir das innere Integral von

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left[\int_0^1 xye^{1-y^2}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y &= \int_0^1 ye^{1-y^2}\left[\int_0^1 x\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_0^1 ye^{1-y^2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}ye^{1-y^2}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Nun wird das äussere Integral mit Hilfe der Substitution $u = 1 - y^2$, $\mathrm{d}u = -2y\,\mathrm{d}y$ berechnet. Die neuen Grenzen sind $u(0) = 1$ und $u(1) = 0$.

$$\int_0^1 \frac{1}{2}ye^{1-y^2}\mathrm{d}y = \int_1^0 -\frac{1}{4}e^u\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int_0^1 e^u\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\left[e^u\right]_0^1 = \frac{1}{4}e - \frac{1}{4}$$

Aufgabe 1.3

Da $e^{x^2} \geq 1 + x^2 + \frac{x^4}{2}\ \forall x \in \mathbb{R}$ folgt nach der Monotonieeigenschaft, dass

$$\int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} > 1.43 > 1.4\,.$$

Da $e^{x^2} \leq e^x\ \forall x \in [0,1]$ gilt nach Monotonie, dass

$$\int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 e^x\mathrm{d}x.$$

Weiter gilt, dass

$$\int_0^1 e^x\mathrm{d}x = \left[e^x\right]_0^1 = e - 1 < 1.72 < 1.8\,.$$

Somit wurden alle drei Ungleichungen gezeigt.

AUFGABE 2

Aufgabe 2.1

x_1	x_2	x_3	x_4		
1	0	-2	1	1	
0	1	-1	-1	0	
4	-2	u	6	v	-4Z_1
1	0	-2	1	1	
0	1	-1	-1	0	
0	-2	$u+8$	2	$v-4$	$+2\text{Z}_2$
1	0	-2	1	1	
0	1	-1	-1	0	
0	0	$u+6$	0	$v-4$	

(i) Wenn $u+6=0$ und $v-4 \neq 0$, dann hat das LGS keine Lösung. Somit ist es unlösbar falls $u=-6$ und $v \neq 4$.

(ii) Dimension der Lösungsmenge $= 4 - r(\text{Koeffizientenmatrix})$.
Genau eine Lösung ist in diesem Fall nicht möglich, da der Rang der Koeffizientenmatrix A immer kleiner als die Anzahl der Unbekannten ist $r(A) \leq 3 < 4$.

(iii) Das LGS hat eine Lösungsmenge der Dimension 1 falls $r(A) = 3$, d.h. falls $u \neq -6$ und $v \in \mathbb{R}$.

(iv) Das LGS hat eine Lösungsmenge der Dimension 2 falls es lösbar ist und $r(A) = 2$, d.h. falls $u=-6$ und $v=4$.

Aufgabe 2.2

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	-4	0	1	0
0	3	1	-3	0

(i) Wir wählen $x_2 = t_1$ und $x_4 = t_2$ als freie Parameter. Daraus folgt

$$L = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(ii) Eine Basis B ist zum Beispiel gegeben durch

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{oder} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(iii) Durch Einsetzen der drei Vektoren von X in das LGS sieht man, dass diese das LGS erfüllen, d.h. $X \subseteq L$. Da aus (i) $\dim L = 2$ folgt und X zwei linear unabhängige Vektoren enthält, folgt dass X ein Erzeugendensystem von L ist. X ist keine Basis von L, da X mehr als $2 = \dim L$ Vektoren enthält bzw. X eine Menge von linear abhängigen Vektoren ist.

AUFGABE 3

Aufgabe 3.1

Zunächst teilen wir die erste Zeile durch 19 und dann führen wir Gauss'sche Zeilenoperationen durch, um die Berechnung der Determinante zu vereinfachen.

$$\begin{vmatrix} 19 & 38 & -19 & 57 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 19 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 19 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 19 \cdot 1 \cdot (-(-1)) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 19 \cdot (-2+8) = 114$$

Aufgabe 3.2

(i) Da es sich um eine Dreiecksmatrix handelt, erhält man die Determinante durch Multiplikation der Diagonalelemente:

$$\det(A) = (-2) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 = -6.$$

(ii) Bei jeder Spaltenvertauschung wird die Determinante mit (-1) multipliziert:

$$\det(\underline{a}^3 \ \underline{a}^2 \ \underline{a}^4 \ \underline{a}^1) = -\det(\underline{a}^3 \ \underline{a}^2 \ \underline{a}^1 \ \underline{a}^4) = -(-\det(\underline{a}^1 \ \underline{a}^2 \ \underline{a}^3 \ \underline{a}^4)) = -6.$$

(iii) Wird ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen addiert, so ändert sich die Determinante nicht:

$$\det((\underline{a}^1 - 2\underline{a}^2) \ \underline{a}^2 \ \underline{a}^3 \ \underline{a}^4) = \det(\underline{a}^1 \ \underline{a}^2 \ \underline{a}^3 \ \underline{a}^4) = -6.$$

(iv)

$$\det A + \det(-A) = \det A + (-1)^4 \det A = -12$$

Aufgabe 3.3

Die Lagrangefunktion ist gegeben durch

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + x_4^2 - \lambda(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4).$$

Die Bedingungen sind dann gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2x_1 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= x_2 - \lambda = 0 \\ &\text{usw.} \end{aligned}\right\}$$

Durch Einsetzen des fraglichen Punktes $\underline{x}^* = (1,1,1,1)^\mathsf{T}$ zeigt sich, dass $\underline{x}^*$ kein stationärer Punkt sein kann, da aus der ersten Gleichung $\lambda = 2$ folgt und aus der Zweiten $\lambda = 1$, was ein Widerspruch ist.

AUFGABE 4

Aufgabe 4.1

(i) A, C

$\det A = 2,\ \det B = 0,\ \det C = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -22.$

Eine Matrix M ist genau dann invertierbar, wenn $\det M \neq 0$ ist. Daher sind A und C invertierbar.

(ii) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Nach den Regeln der Matrizenmultiplikation.

Aufgabe 4.2

Matrix	PQ	QP	$P^\top Q^\top Q$	$(QQ^\top)^{-1}$
$m \times n$	nicht	2×4	4×3	2×2

Aufgabe 4.3

$$M^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$\det M = 7^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 49$

Mit der Formel für die Berechnung der Inversen einer (2×2)-Matrix folgt dann das Ergebnis.

Aufgabe 4.4

w	f
×	
×	
×	
×	
	×
×	

- Da die Matrix A 6 Spalten hat, ist der Vektor $\underline{x} \in \mathbb{R}^6$, d.h. es gibt 6 Unbekannten. Die Matrix A hat 4 Zeilen, daher gibt es 4 Gleichungen.
- Die Lösungsmenge eines homogenen LGS ist immer ein Vektorraum. Da $r(A) \leq 4$ folgt, dass $d = \dim L = 6 - r(A) \geq 2$.
- Die Spalten von A sind Vektoren in $\mathbb{R}^4$. 6 Vektoren in $\mathbb{R}^4$ sind stets linear abhängig.
- Sind die Zeilenvektoren von A linear unabhängig, so hat die Matrix A vollen Zeilenrang $(= 4)$. Daraus folgt (1) ist lösbar für alle $\underline{b} \in \mathbb{R}^4$.
- $A\underline{x} = \underline{b}$ ist gerade dann lösbar, wenn der Vektor $\underline{b}$ eine Linearkombination der Spalten von A ist. Die Koeffizienten der Linearkombination bilden einen Vektor $\underline{x}$, welcher Lösung des LGS ist.
- Falls (1) lösbar ist, so gilt $\dim L = 6 - r(A) \geq 2$. Daher hat das LGS stets unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 4.5

$F = \boxed{4/3}$

$t = \boxed{2/3}$

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\mathrm{d}x = \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Das Rechteck hat Flächeninhalt $2t \;\Rightarrow\; t = \frac{1}{2}F = \frac{2}{3}$.