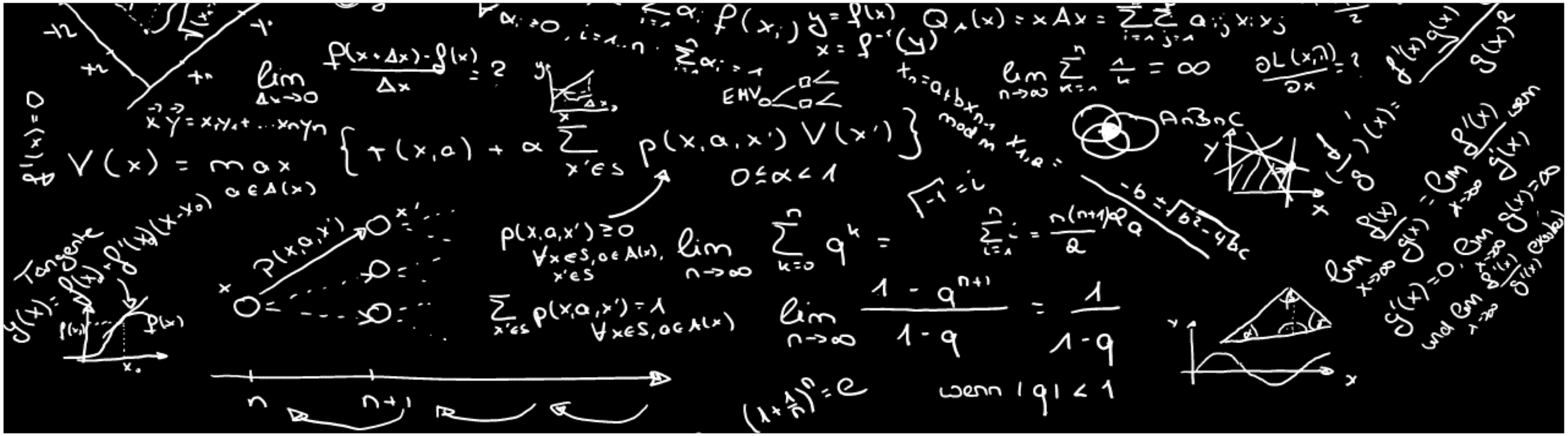
Mathematik II

Lineare Gleichungssysteme

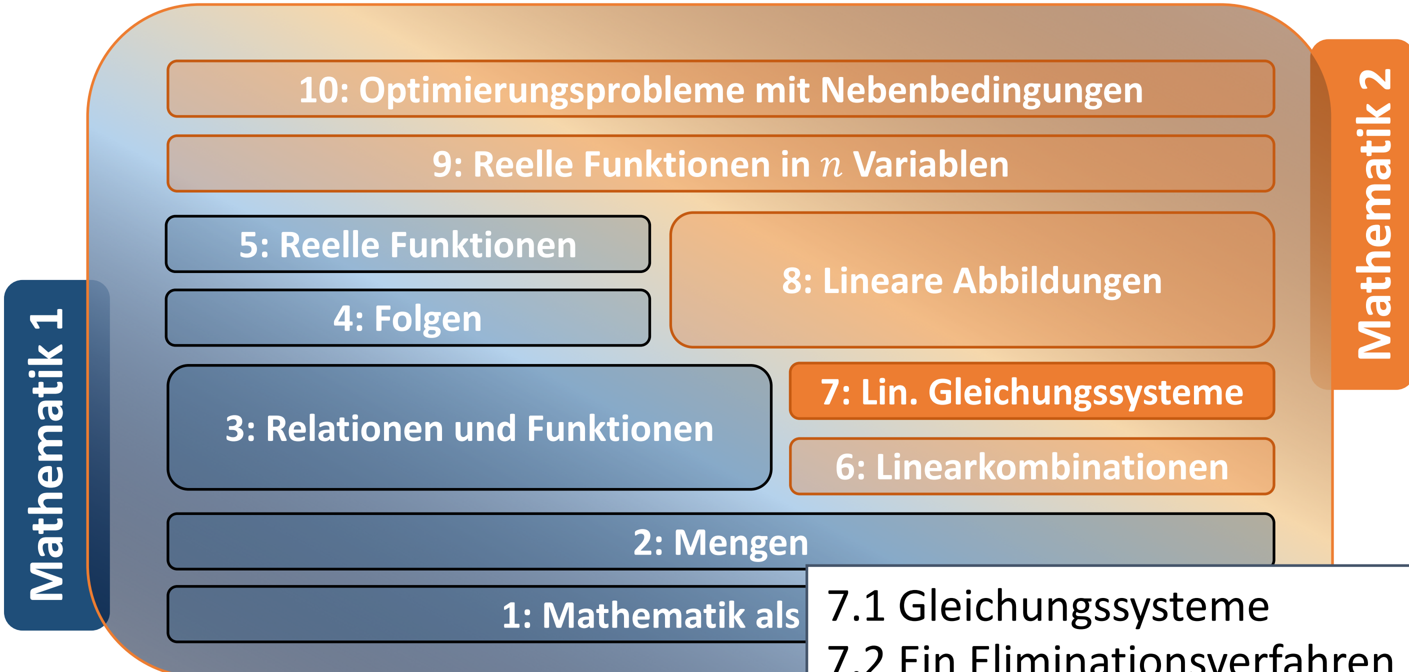
FS 2019



Universität Zürich[UZH]

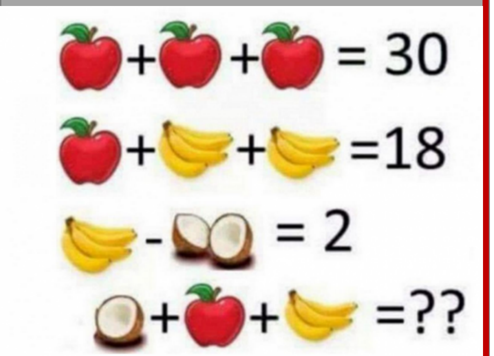
Prof. Dr. Christiane Barz
Lehrstuhl Mathematik für Wirtschaftswissenschaften (Chair of Mathematics for Business and Economics)

Agenda



7.1 Gleichungssysteme
7.2 Ein Eliminationsverfahren
7.3 Geometrie linearer Gleichungssysteme
7.4 Der Rang

Gleichungssysteme



Definitionen 7.1.1 – 7.1.3: Gleichungssystem und Lösbarkeit

Eine Menge von m Gleichungen mit n Variablen heisst Gleichungssystem. Ein Gleichungssystem heisst lösbar, wenn $\mathbb{L} \neq \{\}$. Gleichungssysteme mit gleicher Lösungsmenge heissen äquivalent.

Lösungsmenge

$$\underbrace{\text{Term 1}}_{\text{linke Seite}} = \underbrace{\text{Term 2}}_{\text{rechte Seite}}$$

Beispiele:

- $x_1 = 5$, $x_2 = 6$, $0 = 0$ — $m=3$, $n=2$, lösbar, $\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \}$
- $x_1 = 5$, $x_2 = 6$, $0 = 7$ — $m=3$, $n=2$, nicht lösbar, $\mathbb{L} = \{\}$
- $x_1 + x_3 = 2$, $x_2 + 2x_3 = 6$ — $m=2$, $n=\cancel{2}3$, lösbar, $\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \ldots \}$
- $x_1 - 2x_2 = 1$, $3x_1 + 2x_2 = 11$ — $m=2$, $n=2$, ?

$m=3$ $n=2$ lösbar

- $(x_1)^2 = 4 \Leftrightarrow x_1 = 2$ oder $x_1 = -2$, $(x_2)^2 = 9$ — $x_2 = 3$ oder $x_2 = -3$, $x_1x_2 = 6$ — $\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \}$
- $(x_1)^2 = 4$, $(x_2)^2 = 9$, $x_1x_2 = 0$ — $m=3$ $n=2$, $\mathbb{L} = \{\}$
- $(x_1)^{x_3} = 1$, $(x_1)^6 - \ln(x_2) + x_3 = 0$, $x_1x_2x_3 = -1$ — $m=n=3$, $\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$
- $x_1 + e^{x_1} = 0$ — $n=1$ $m=1$ lösbar

Bildquelle: http://recycleroughly.com/imgs/497003/the-fruit-math-problem-that-is-driving-everyone-crazy-flex-your.html

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$
$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{A} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \mathbf{x} \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \mathbf{b} \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme

Definitionen 7.1.4: Lineares Gleichungssystem (LGS)

LGS

rechte Seite

$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ bzw.

Koeffizienten-matrix

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Ist $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ heisst das LGS homogen, sonst inhomogen.

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n$$

Beispiele:

- $$\begin{aligned} x_1 &= 5 \\ x_2 &= 6 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓
  $A \quad \vec{x} = \vec{b}$
- $$\begin{aligned} (x_1)^2 &= 4 \\ (x_2)^2 &= 9 \\ x_1x_2 &= 6 \end{aligned}$$ kein LGS
- $$\begin{aligned} x_1 &= 5 \\ x_2 &= 6 \\ 0 &= 7 \end{aligned}$$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$
- $$\begin{aligned} (x_1)^2 &= 4 \\ (x_2)^2 &= 9 \\ x_1x_2 &= 0 \end{aligned}$$ kein LGS
- $$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$
- $$\begin{aligned} (x_1)^{x_3} &= 1 \\ (x_1)^6 - \ln(x_2) + x_3 &= 0 \\ x_1x_2x_3 &= -1 \end{aligned}$$ kein LGS
- $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 11 \end{aligned}$$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & +2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$
- $x_1 + e^{x_1} = 0$ kein LGS

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

A x b

Lineare Gleichungssysteme

Definitionen 7.1.5: Erweiterte Koeffizientenmatrix

$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ bzw.
$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix

Beispiele:

- $$\begin{aligned} x_1 &= 5 \\ x_2 &= 6 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$ $(A|\vec{b}) =$ $$\begin{array}{c} \quad A \qquad\qquad \vec{b} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$
- $$\begin{aligned} x_1 &= 5 \\ x_2 &= 6 \\ 0 &= 7 \end{aligned}$$ $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$
- $$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$ $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$
- $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 11 \end{aligned}$$ $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 11 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die explizite Form

x_j führend, wenn führendes Element in Spalte j

Definitionen 7.1.6 – 7.1.7: Matrix in expliziter Form

1 Eine Matrix in Zeilenstufenform liegt in expliziter Form vor, wenn

- 2 jedes führende Element eine 1 ist und
- 3 oberhalb führender Elemente alle Elemente gleich 0 sind.

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist in expliziter Form, wenn A in expliziter Form ist.

Beispiele:

Betrachten Sie folgendes Lineares Gleichungssystem (LGS) in expliziter Form

$$\begin{aligned} 1\cdot x_1 + 0x_2 + 3x_3 \quad + x_4 &= 1 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 2x_3 \quad - x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge dieses LGSs.

$$A = \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \end{array}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ in expliziter Form}$$

$\Rightarrow$ x_1 und x_2 sind führende Variablen.

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die explizite Form

Satz 7.1.1 und Definition 7.1.8 Lösbarkeit LGS in expliziter Form

Ist A in expliziter Form mit Nullzeilen in Zeilen $i > r$, dann

- ist das LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar $\Leftrightarrow b_i = 0$ für alle $i > r$;
- kann man die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ einfach bestimmen.
- heisst $\mathbf{x} \in \mathbb{L}$ Basislösung, wenn $x_j \neq 0$ für höchstens r Komponenten.

Auflösen nach führenden x_j

Beispiele:

Betrachten Sie folgendes Lineares Gleichungssystem (LGS) in expliziter Form

$$\begin{aligned} x_1 \quad + 3x_3 \quad + x_4 &= 1 \iff x_1 = 1 - 3x_3 - x_4 \\ x_2 + 2x_3 \quad - x_4 &= 2. \iff x_2 = 2 - 2x_3 + x_4 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge dieses LGSs.

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - 3x_3 - x_4 \\ 2 - 2x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cancel{x_3}\, t_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cancel{x_4}\, t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix} \middle| \, \cancel{x_3, x_4}\; t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\mathbf{b}$
①	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	b_1
②	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
ⓜ	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	b_m

Äquivalente Gleichungssysteme

Satz 7.2.1: Elementare Zeilenumformungen

Sei $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ein LGS mit m Gleichungen und n Variablen, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Vertauscht man zwei Zeilen von $(A|\mathbf{b})$, oder
- multipliziert man eine Zeile von $(A|\mathbf{b})$ mit $\alpha \neq 0$, oder
- addiert man das α-fache einer Zeile von $(A|\mathbf{b})$ zu einer anderen,

dann entsteht ein äquivalentes LGS.

Beispiel:

Addition des α-fachen einer anderen Zeile

Multiplikation einer Zeile mit $\alpha \neq 0$

Addition des α-fachen einer anderen Zeile

	x_1	x_2	$\mathbf{b}$	
①	1	-2	1	
②	3	2	11	
③	1	-2	1	①
④	0	8	8	② - 3 ①
⑤	1	-2	1	③
⑥	0	1	1	④ : 8
⑦	1	0	3	⑤ + 2 · ⑥
⑧	0	1	1	⑥

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 11 \end{array}\right) \qquad -3 \qquad \begin{array}{rl} x_1 - 2x_2 = 1 & \mathrm{I} \\ 3x_1 + 2x_2 = 11 & \mathrm{II} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 8 \end{array}\right) \qquad 8 : | \qquad \begin{array}{rl} x_1 - 2x_2 = 1 & \mathrm{I} \\ 8x_2 = 8 & \mathrm{II}-3\mathrm{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad +2 \qquad \begin{array}{r} x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_2 = 1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{r} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{array}$$

Grundidee am Beispiel

Eliminiere x_1 in allen Zeilen $i \neq 1$

Eliminiere x_2 in allen Zeilen $i \neq 2$

Eliminiere x_3 in allen Zeilen $i \neq 3$

Erzeuge führende 1

	x_1	x_2	x_3	**b**	
(1)	1	2	3	6	
(2)	2	5	2	4	
(3)	6	-3	1	2	
(4)	1	2	$\boxed{3}$	$\boxed{6}$	(1)
(5)	0	1	-4	$\boxed{-8}$	(2)-2·(1)
(6)	0	-15	-17	-34	(3)-6·(1)
(7)	1	0	$\boxed{11}$	$\boxed{22}$	(4)-2·(5)
(8)	0	1	-4	-8	(5)
(9)	0	0	-77	-154	(6)+15·(5)
(10)	1	0	0	0	(7)+$\frac{11}{77}$·(9)
(11)	0	1	0	0	(8)-$\frac{4}{77}$·(9)
(12)	0	0	-77	-154	(9)
(13)	1	0	0	0	(10)
(14)	0	1	0	0	(11)
(15)	0	0	1	2	$\frac{-1}{77}$·(12)

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$
$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4$$
$$6x_1 - 3x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$
$$x_2 - 4x_3 = -8$$
$$-15x_2 - 17x_3 = -34$$

$$x_1 + 11x_3 = 22$$
$$x_2 - 4x_3 = -8$$
$$-77x_3 = -154$$

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$-77x_3 = -154$$

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 2$$

$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Streichen von Nullzeilen

Eliminiere x_1 in allen Zeilen $i \neq 1$

Eliminiere x_2 in allen Zeilen $i \neq 2$

Streiche Null-zeile

Eliminiere x_2 in allen Zeilen $i \neq 2$

Erzeuge führende 1

in einem Schritt!

	x_1	x_2	$\mathbf{b}$	
1	1	−2	1	
2	2	−4	2	
3	3	2	11	
4	1	-2	1	1
~~5~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	2 - 2·1
6	0	8	8	3 - 3·1
7	1	$\boxed{-2}$	1	4
8	0	8	8	6
9	1	0	3	7 + $\frac{1}{4}$·8
10	0	1	1	$\frac{1}{8}$·8

$$x_1 - 2x_2 = 1$$
$$2x_1 - 4x_2 = 2$$
$$3x_1 + 2x_2 = 11$$

$$x_1 - 2x_2 = 1$$
$$\cancel{0x_1 + 0x_2 = 0}$$
$$8x_2 = 8$$

$$x_1 - 2x_2 = 1$$
$$8x_2 = 8$$

$$x_1 = 3$$
$$x_2 = 1$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Satz 7.2.2: Streichen von Nullzeilen

Streicht man Nullzeilen von $(A|\mathbf{b})$, entsteht ein äquivalentes LGS.

Tauschen von Zeilen

Satz 7.2.1

Eliminiere x_1 in allen Zeilen $i \neq 1$ 🤔

Tausche Zeilen 1 und 2 🙂

Eliminiere x_1 in allen Zeilen $i \neq 1$, erzeuge führende 1

	x_1	x_2	**b**	
①	0	−2	−2	
②	2	4	10	
③	2	4	10	②
④	0	−2	−2	①
⑤	1	2	5	$\frac{1}{2}\cdot$③
⑥	0	−2	−2	④
⑦	1	0	3	⑤ + ⑥
⑧	0	1	1	-$\frac{1}{2}\cdot$⑥

$-2x_2 = -2$ II

$2x_1 + 4x_2 = 10$ I

$2x_1 + 4x_2 = 10$

$-2x_2 = -2$

$x_1 + 2x_2 = 5$

$-2x_2 = -2$

$x_1 = 3$

$x_2 = 1$

$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Dieses LGS ist äquivalent zum LGS auf Folie 10.

Überspringen von Variablen

Eliminiere x_1 in allen Zeilen $i \neq 1$, erzeuge führende 1

Eliminiere x_2 in allen Zeilen $i \neq 2$, erzeuge führende 1

Überspringe die Variable x_2

Eliminiere x_3 in allen Zeilen $i \neq 2$, erzeuge führende 1

	x_1	x_2	x_3	**b**	
①	1	2	3	6	
②	1	2	2	4	
③	1	2	3	6	①
④	0	0	-1	-2	② - ①
⑤	1	2	0	0	③ + 3·④
⑥	0	0	1	2	-1·④

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$

$\rightarrow x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$

$\cdot\cdot \; -x_3 = -2$

$x_1 = -2x_2$

$x_3 = 2$

$\Longleftrightarrow$

$x_1 + 2x_2 = 0$

$x_3 = 2$

x_1 und x_3 sind führende Variablen!

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

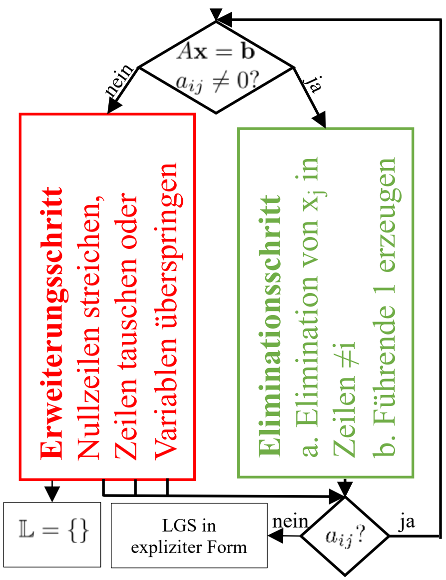
$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

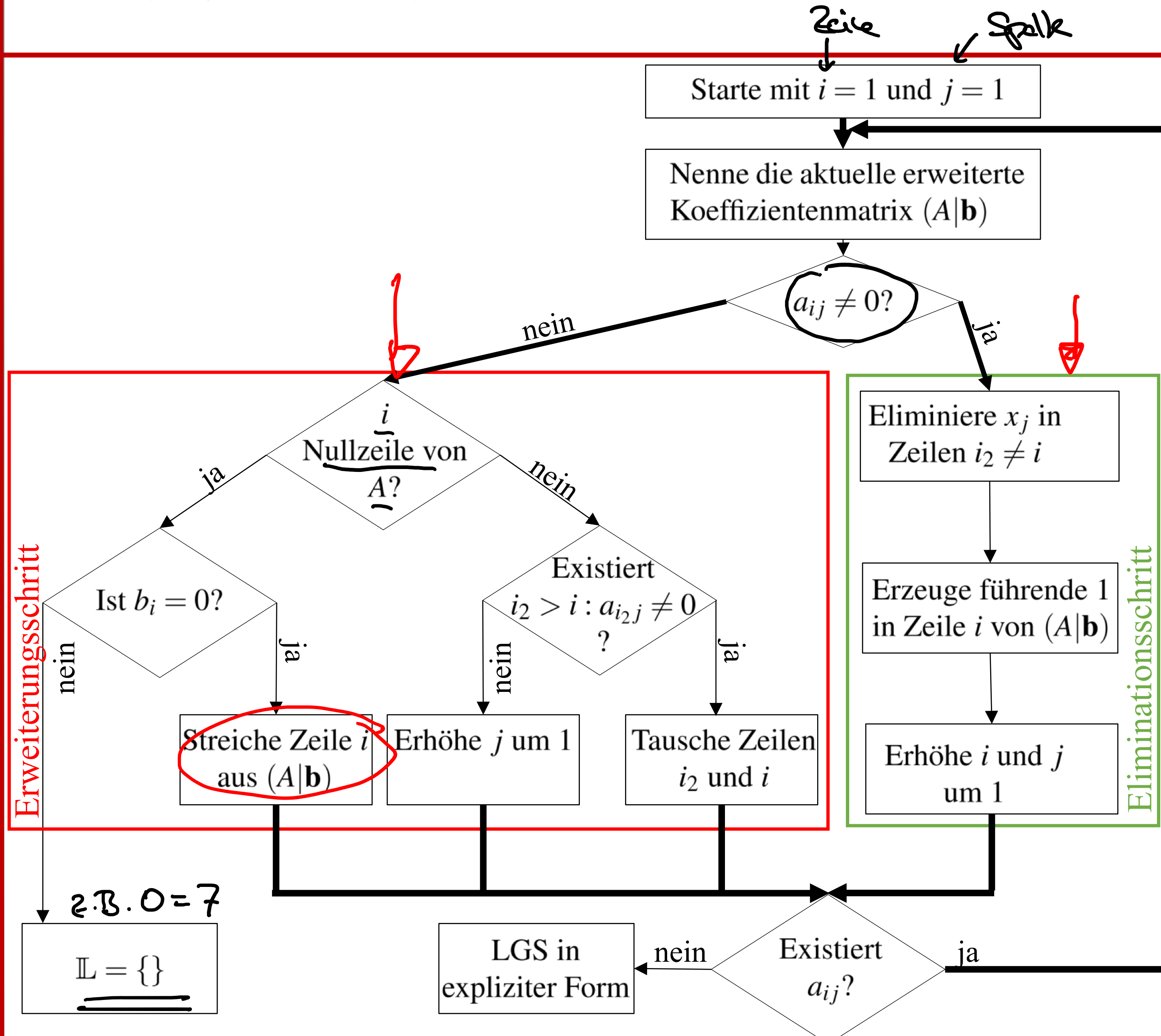
Basislösung

Hier $r = 2$ $\Rightarrow$ Lösungen mit höchstens 2 von 0 verschiedenen Komponenten heißen Basislösungen

Das Verfahren

	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\mathbf{b}$
①	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	b_1
②	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
ⓜ	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	b_m

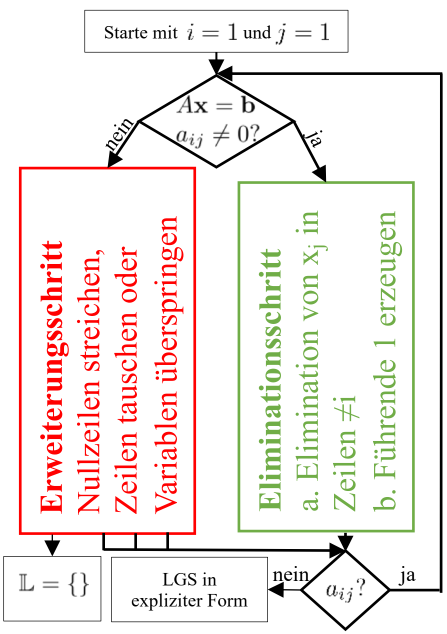




Ein Beispiel

LGS: $n = \cancel{6}5 \quad m = 5$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 2$$
$$2x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 9x_4 + 9x_5 = 3$$
$$2x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 9x_4 + 9x_5 = 3$$
$$2x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 9x_4 + 8x_5 = 4$$

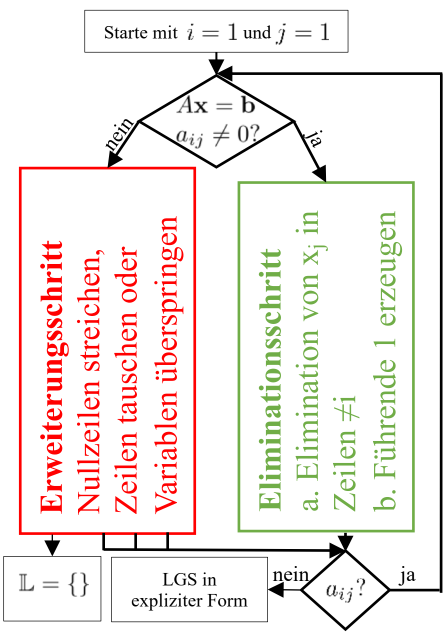


	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\mathbf{b}$		
(1)	1	2	3	4	5	1		
(2)	1	2	4	5	6	2		
(3)	2	9	9	9	9	3		$a_{11} = 1 \neq 0$
(4)	2	9	9	9	9	3		$\to$ Elimination mit $i = 1$ und $j = 1$
(5)	2	9	9	9	8	4		
(6)	1	2	3	4	5	1	(1) $\cdot \frac{1}{1}$	
(7)	0	0	1	1	1	1	(2) - (1)	
(8)	0	$\boxed{5}$	3	1	-1	1	(3) - 2$\cdot$(1)	$a_{22} = 0$
(9)	0	5	3	1	-1	1	(4) - 2$\cdot$(1)	$\to$ Erweiterung mit $i = 2$ und $j = 2$
(10)	0	5	3	1	-2	2	(5) - 2$\cdot$(1)	(Zeilentausch)
(11)	1	2	3	4	5	1	(6)	
(12)	0	5	3	1	-1	1	(8)	
(13)	0	0	1	1	1	1	(7)	$a_{22} = 5 \neq 0$
(14)	0	5	3	1	-1	1	(9)	$\to$ Elimination mit $i = 2$ und $j = 2$
(15)	0	5	3	1	-2	2	(10)	
(16)	1	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{27}{5}$	$\frac{3}{5}$	(11) - $\frac{2}{5}\cdot$(12)	
(17)	0	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	-$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	(12)$\cdot\frac{1}{5}$	
(18)	0	0	1	1	1	1	(13)	$a_{33} = 1 \neq 0$
(19)	0	0	0	0	0	0	(14) - (12)	$\to$ Elimination mit $i = 3$ und $j = 3$
(20)	0	0	0	0	-1	1	(15) - (12)	
(21)	1	0	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{18}{5}$	-$\frac{6}{5}$	(16) - $\frac{9}{5}\cdot$(18)	
(22)	0	1	0	-$\frac{2}{5}$	-$\frac{4}{5}$	-$\frac{2}{5}$	(17) - $\frac{3}{5}\cdot$(18)	
(23)	0	0	1	1	1	1	(18)	$a_{44} = 0$
(24)	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	(19)	$\to$ Erweiterung mit $i = 4$ und $j = 4$
(25)	0	0	0	0	-1	1	(20)	(Streichen der Nullzeile)

Ein Beispiel

Ausgehend von:

21	1	0	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{18}{5}$	$-\frac{6}{5}$
22	0	1	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{5}$
23	0	0	1	1	1	1
~~24~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
25	0	0	0	0	-1	1



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b		
26	1	0	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{18}{5}$	$-\frac{6}{5}$	21	
27	0	1	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{5}$	22	$a_{44} = 0$
28	0	0	1	1	1	1	23	$\to$ Erweiterung mit $i = 4$ und $j = 4$
29	0	0	0	0	-1	1	25	(Spalte überspringen)
30	1	0	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{18}{5}$	$-\frac{6}{5}$	26	
31	0	1	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{5}$	27	$a_{45} = -1$
32	0	0	1	1	1	1	28	$\to$ Elimination mit $i = 4$ und $j = 5$
33	0	0	0	0	-1	1	29	
34	1	0	0	$\frac{9}{5}$	0	$\frac{12}{5}$	30 + $\frac{18}{5}\cdot$ 33	
35	0	1	0	$-\frac{2}{5}$	0	$-\frac{6}{5}$	31 - $\frac{4}{5}\cdot$ 33	Es existiert kein a_{56}
36	0	0	1	1	0	2	32 + 33	$\to$ Eliminationsverfahren endet
37	0	0	0	0	1	-1	33 $\cdot\frac{1}{-1}$	

$\Rightarrow$ LGS in expliziter Form: $r = 4$

$$x_1 + \frac{9}{5}x_4 = \frac{12}{5} \qquad x_1 = \frac{12}{5} - \frac{9}{5}x_4$$

$$x_2 - \frac{2}{5}x_4 = -\frac{6}{5} \quad \text{bzw.} \quad x_2 = -\frac{6}{5} + \frac{2}{5}x_4$$

$$x_3 + x_4 = 2 \qquad x_3 = 2 - x_4$$

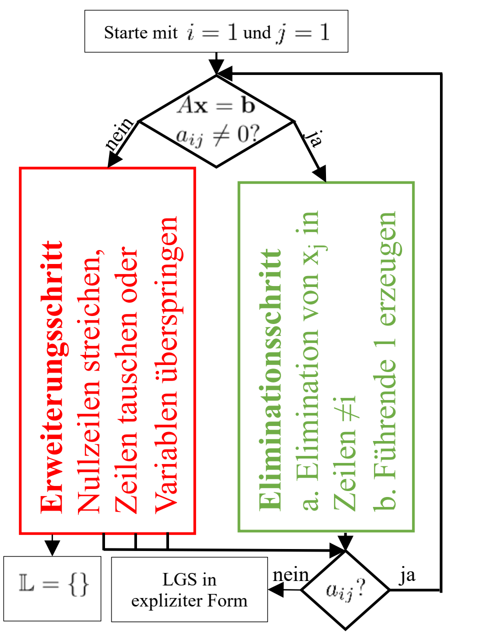
$$x_5 = -1 \qquad x_5 = -1$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} \\ \frac{2}{5} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{12}{5} - \frac{9}{5}x_4 \\ -\frac{6}{5} + \frac{2}{5}x_4 \\ 2 - x_4 \\ x_4 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} \\ \frac{2}{5} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

Simultanes Lösen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{A} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \mathbf{x} \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \mathbf{b} \\ b_3 \end{pmatrix}$$



$\vec{b}_1$ $\vec{b}_2$

$$\begin{aligned} -4x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 5x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -4x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 5x_2 &= 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}^1$	$\mathbf{b}^2$	
①	0	-4	-1	1	0	
②	1	1	-1	1	1	
③	1	5	0	0	0	
④	1	1	-1	1	1	②
⑤	0	-4	-1	1	0	①
⑥	1	5	0	0	0	③
⑦	1	1	-1	1	1	④
⑧	0	-4	-1	1	0	⑤
⑨	0	4	1	-1	-1	⑥ - ④
⑩	1	0	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	1	⑦ + $\frac{1}{4}$·⑧
⑪	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$·⑧
~~⑫~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	-1	⑨ + ⑧

Umformungen werden nur durch A, nicht durch $\vec{b}$ bestimmt
⇒ gleiche Zeilen

Durchführung des Verfahrens

$0 = -1$?

$$\mathbb{L}_{\vec{b}_1} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{5}{4} + \frac{5}{4}x_3 \\ -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 5/4 \\ -1/4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5/4 \\ -1/4 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbb{L}_{\vec{b}_2} = \{\}$$

Parametrische Lösung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\begin{aligned} -4x_2 - x_3 &= b_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= b_2 \\ x_1 + 5x_2 &= b_3 \end{aligned}$$

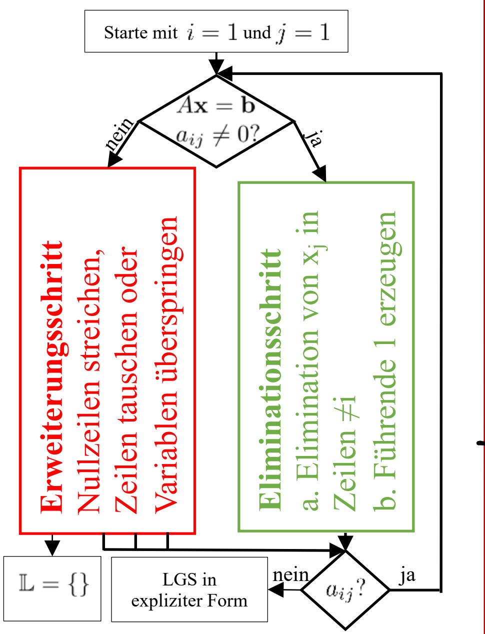
	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}$	
①	0	-4	-1	b_1	
②	1	1	-1	b_2	
③	1	5	0	b_3	
④	1	1	-1	b_2	②
⑤	0	-4	-1	b_1	①
⑥	1	5	0	b_3	③
⑦	1	1	-1	b_2	④
⑧	0	-4	-1	b_1	⑤
⑨	0	4	1	$b_3 - b_2$	⑥ - ④
⑩	1	0	$-\frac{5}{4}$	$b_2 + \frac{1}{4}b_1$	⑦ + $\frac{1}{4}\cdot$⑧
⑪	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}b_1$	$-\frac{1}{4}\cdot$⑧
⑫	0	0	0	$b_3 - b_2 + b_1$	⑨ + ⑧

analog zu Folie 16

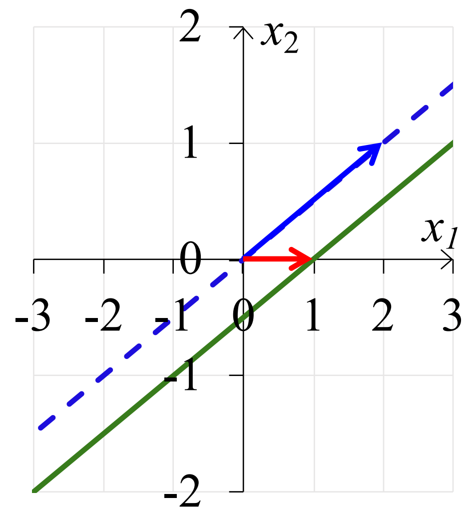
$$x_1 - \frac{5}{4}x_3 = b_2 + \frac{1}{4}b_1$$
$$x_2 + \frac{1}{4}x_3 = -1/4\, b_1$$
$$0 = b_3 - b_2 + b_1$$

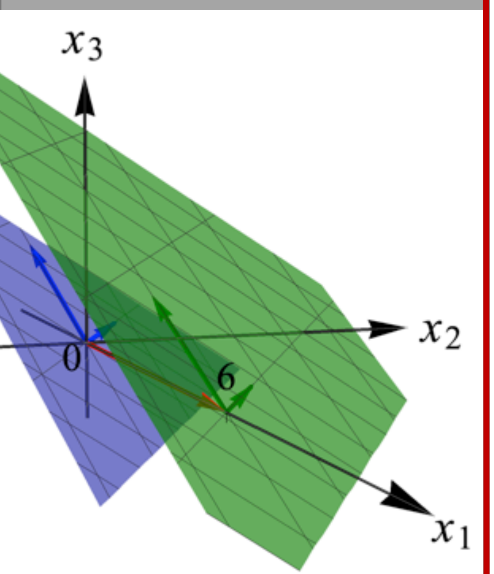
LGS genau dann lösbar, wenn $\boxed{0 = b_3 - b_2 + b_1}$. In diesem Fall

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} b_2 + \frac{1}{4}b_1 + \frac{5}{4}x_3 \\ -1/4\, b_1 - \frac{1}{4}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} b_2 + \frac{1}{4}b_1 \\ -1/4\, b_1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5/4 \\ -1/4 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$



Affine Räume





Beispiele:

- $x_1 - 2x_2 = 0$ 𝕃 ist ein linearer Raum der Dimension 1!

  $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ bzw. $\mathbb{L} = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$

- $x_1 - 2x_2 = 1$ „~~Verschobener~~ affiner“ linearer Raum der Dimension 1

  $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1+2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$

- $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ Linearer Raum der Dimension 2.

  $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$ $\mathbb{L} = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$

- $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$ Affiner Raum der Dimension 2

  $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 - 2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$ $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$

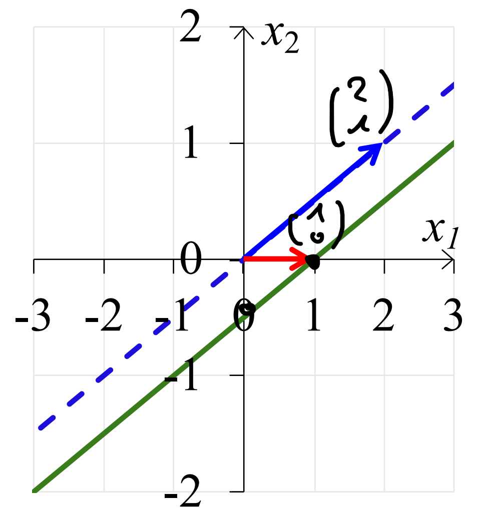
Definition 7.3.1: Affiner Raum

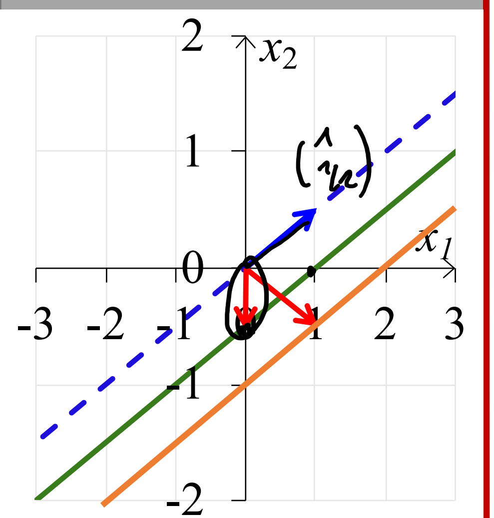
$$A = \left\{ \mathbf{v}^0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{v}^i \middle| \, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^n \text{ mit } \mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^m \in \mathbb{R}^n$$

$\dim(A) = \dim(\, \mathrm{lin}\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^m\})$

$\dim(A) = 0$: Punkt, 1: Gerade, 2: Ebene, n-1: Hyperebene

Gleichheit zweier affiner Räume





Beispiele:

- $x_1 - 2x_2 = 1$

$x_2 = -\frac{1}{2} + x_1 \cdot \frac{1}{2}$

$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -\frac{1}{2} + x_1 \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R} \right\}$

$$A = \mathbb{L} = \left\{ \underset{\vec{v}^0}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

① $\mathrm{lin}\left\{\binom{2}{1}\right\} = \mathrm{lin}\left\{\binom{1}{1/2}\right\}$ ✓

② $\binom{1}{0} = \binom{0}{-1/2} + t\binom{1}{1/2}$? für $t=1$ ✓ $\Rightarrow v^0 \in B$

$\Rightarrow A = B$

Gilt $A = C$?

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

① $\mathrm{lin}\left\{\binom{2}{1}\right\} = \mathrm{lin}\left\{\binom{1}{1/2}\right\}$

② $\binom{1}{0} \neq \binom{1}{-1/2} + t\binom{1}{1/2}$

Geht nicht

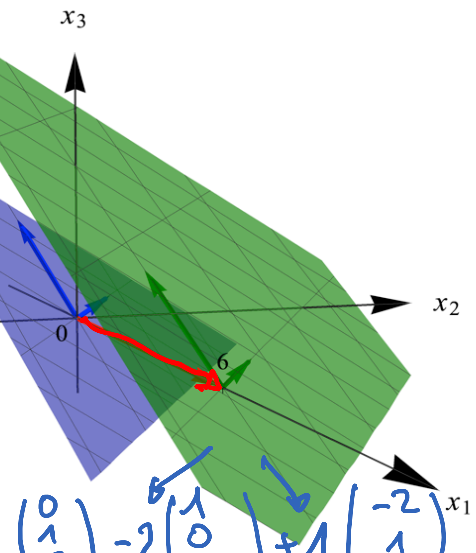
$\Rightarrow A \neq C$

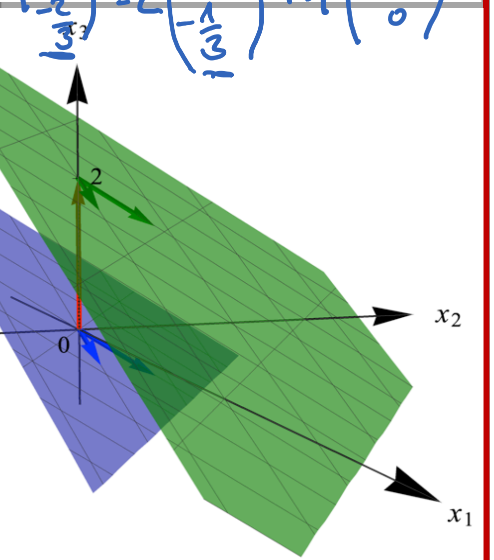
Satz 7.3.2: Gleichheit affiner Räume

$$\overbrace{\left\{ \mathbf{v}^0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{v}^i \middle| \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R} \right\}}^{A} = \overbrace{\left\{ \mathbf{w}^0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbf{w}^i \middle| \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{R} \right\}}^{B}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{lin}\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^m\} \overset{①}{=} \mathrm{lin}\{\mathbf{w}^1, \ldots, \mathbf{w}^k\} \text{ und } \mathbf{v}^0 \overset{②}{\in} B.$$

Gleichheit zweier affiner Räume





Beispiele:

- $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$

$$A = \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

1

$$\mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\} = \mathrm{lin}\left\{ \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}}, \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} \quad \cdot(-3)$$

$$\overset{2}{=} \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}} \right\} \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in B : \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \checkmark$$

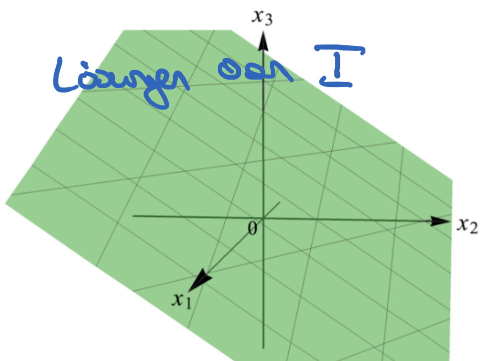
$$\Rightarrow A = B$$

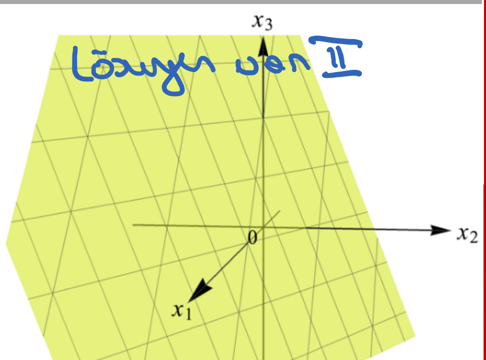
Satz 7.3.2: Gleichheit affiner Räume

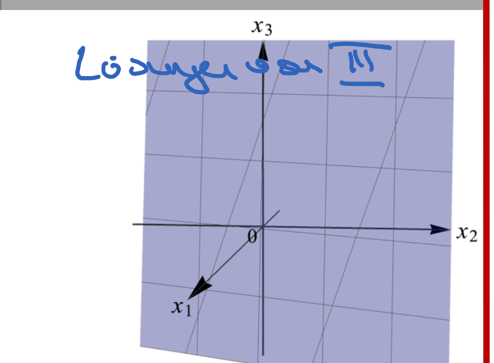
$$\overbrace{\left\{ \mathbf{v}^0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{v}^i \middle| \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R} \right\}}^{A} = \overbrace{\left\{ \mathbf{w}^0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbf{w}^i \middle| \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R} \right\}}^{B}$$

$\Leftrightarrow \mathrm{lin}\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^m\} \overset{1\,\checkmark}{=} \mathrm{lin}\{\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^k\}$ und $\mathbf{v}^0 \overset{2}{\in} B$.

Zeilenbetrachtung von Gleichungssystemen







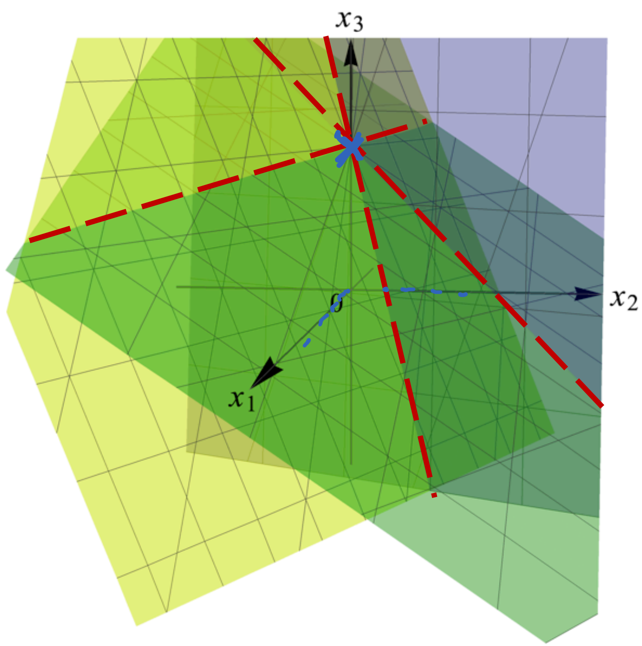
Beispiel:

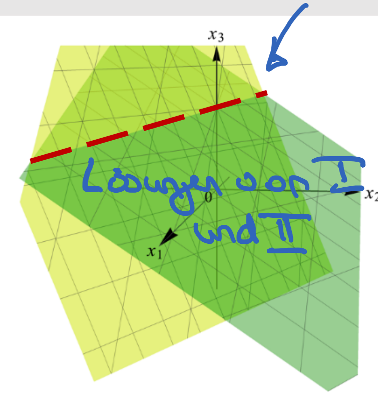
- $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$ I

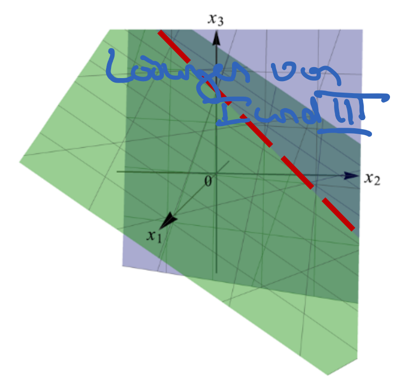
  $2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4$ II

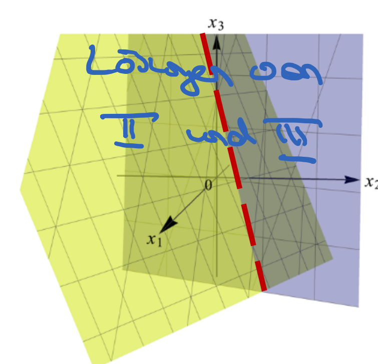
  $6x_1 - 3x_2 + x_3 = 2$ III

$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

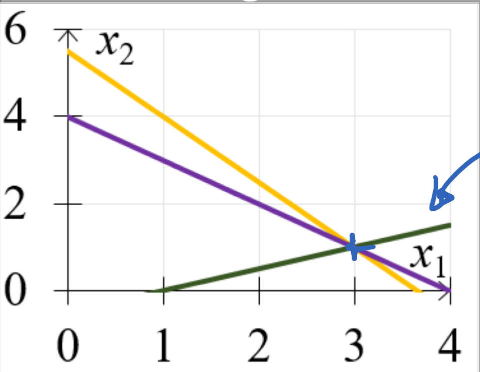


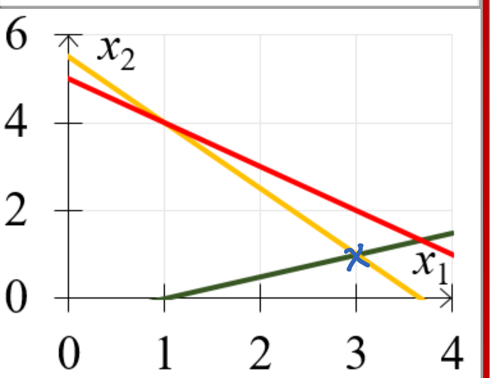


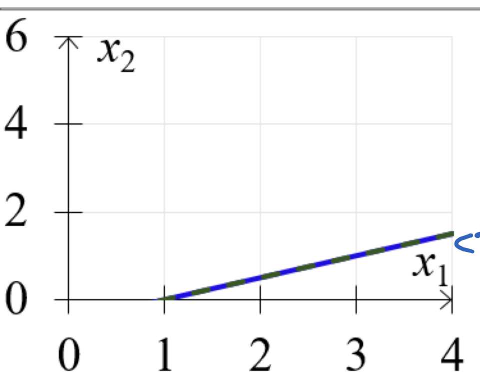




Zeilenbetrachtung von Gleichungssystemen







Beispiele:

- $x_1 - 2x_2 = 1$ $\Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1$
  $3x_1 + 2x_2 = 11$ $\Leftrightarrow x_2 = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}x_1$

  $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

- $x_1 - 2x_2 = 1$
  $3x_1 + 2x_2 = 11$
  $\underline{x_1 + x_2 = 4}$ ← eiPa

  $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

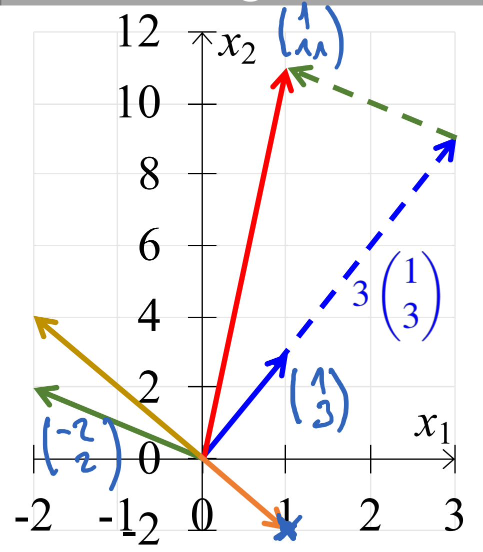
- $x_1 - 2x_2 = 1$
  $3x_1 + 2x_2 = 11$
  $\underline{x_1 + x_2 = 5}$

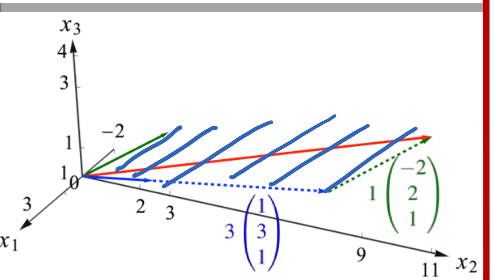
  $\mathbb{L} = \{\}$

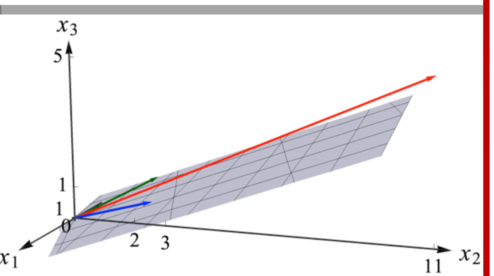
- $x_1 - 2x_2 = 1$
  $-2x_1 + 4x_2 = -2$

  $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$

Spaltenbetrachtung von Gleichungssystemen







Beispiele: $\left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 11\end{array}\right)$

- $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1\\ 3x_1 + 2x_2 = 11\end{cases}$ $\mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right\}$

blau

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\overset{3}{\overset{\shortparallel}{x_1}} + \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\overset{1}{\overset{\shortparallel}{x_2}}} = \boxed{\begin{pmatrix}1\\11\end{pmatrix}}$$

- $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1\\ 3x_1 + 2x_2 = 11\\ x_1 + x_2 = 4\end{cases}$ $\mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\overset{3}{\overset{\shortparallel}{x_1}} + \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}\overset{1}{\overset{\shortparallel}{x_2}} = \begin{pmatrix}1\\11\\4\end{pmatrix}$$

- $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1\\ 3x_1 + 2x_2 = 11\\ x_1 + x_2 = 5\end{cases}$ $\mathbb{L} = \{\ \}$

$$\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}x_2 = \begin{pmatrix}1\\11\\5\end{pmatrix}$$

$\left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & 1\\ -2 & 4 & -2\end{array}\right)$

- $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1\\ -2x_1 + 4x_2 = -2\end{cases}$ $\mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\}$

$$\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}x_2 = \boxed{\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}}$$

Satz 7.4.1: Lösbarkeit eines LGS – Version 1

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ lösbar} \Leftrightarrow \underline{\operatorname{lin}\{\mathbf{a}^1,\ldots,\mathbf{a}^n\}} = \underline{\operatorname{lin}\{\mathbf{a}^1,\ldots,\mathbf{a}^n,\mathbf{b}\}}$$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$\quad \mathbf{a}^1 \qquad \mathbf{a}^2 \qquad \mathbf{a}^3$$

Lösbarkeit eines LGS: Der Rang

Definition 7.4.1: Der Rang

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A heisst $\operatorname{rang}(A)$.

Beispiele:

- $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 11 \\ x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$
  rang(A) = 2 rang(A|b) = 2

- $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 11 \\ x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$
  rang(A) = 2 rang(A|b) = 3

- $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
  rang(A) = 2 ⇒ lösbar rang(A|b) = 2

Sätze 7.4.1, 7.4.6: Lösbarkeit eines LGS

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ lösbar} \Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|\mathbf{b}) \quad \Rightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ immer lösbar}$$

Eigenschaften des Rangs

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{array}\right)
\begin{array}{c}
\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3
\end{array} \\
\begin{array}{ccc}
\mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 & \mathbf{a}^3
\end{array}
\end{array}
$$

$$(1,-2)\cdot\left(-\frac{1}{8}\right) + (3,2)\cdot\left(\frac{3}{8}\right) = \left(\frac{8}{8}, \frac{8}{8}\right) = (1,1)$$

Definition 7.4.2 und Sätze 7.4.2 – 7.4.3: Eigenschaften des Rangs

Sei A eine $m \times n$-Matrix.

- $\operatorname{rang}(A) =$ max. Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A
- $\operatorname{rang}(A) =$ max. Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren von A
- $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^T) \leq \min\{m,n\}$

  A hat «vollen Rang», wenn $\operatorname{rang}(A)=\min\{m,n\}$
- $\operatorname{rang}(A) = n \Leftrightarrow$ alle Spalten von A linear unabhängig
- $\operatorname{rang}(A) = m \Leftrightarrow$ alle Zeilen von A linear unabhängig

Beispiele:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

  $\operatorname{rang}(A) = 2 \leq 2$

  $\operatorname{rang}(A) = 2 \leq 3$

  $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

  Die Matrix A hat "voller" Rang

- $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ $\operatorname{rang}(A) = 2$, da $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

Berechnung des Rangs

$$\begin{pmatrix} f_1 & & & & & \\ 0 & f_2 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

"nur A"

Sätze 7.4.4 - 7.4.6: Berechnung des Rangs und Lösbarkeit

Ist $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ äquivalent zu $\tilde{A}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$ und liegt $\tilde{A}$ in Zeilenstufenform vor mit genau r Zeilen, die keine Nullzeilen sind, dann gilt:

- $\operatorname{rang}(A) = r$;
- $\tilde{b}_i = 0$ für alle $i > r \Rightarrow$ LGS lösbar mit $n - r$ freien Variablen;
- $\tilde{b}_i \neq 0$ für ein $i > r \Rightarrow$ LGS unlösbar.

Beispiel:

- $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

mit rechter Seite $\vec{b}^1$:
lösbar mit $3-2=1$ freie Variable

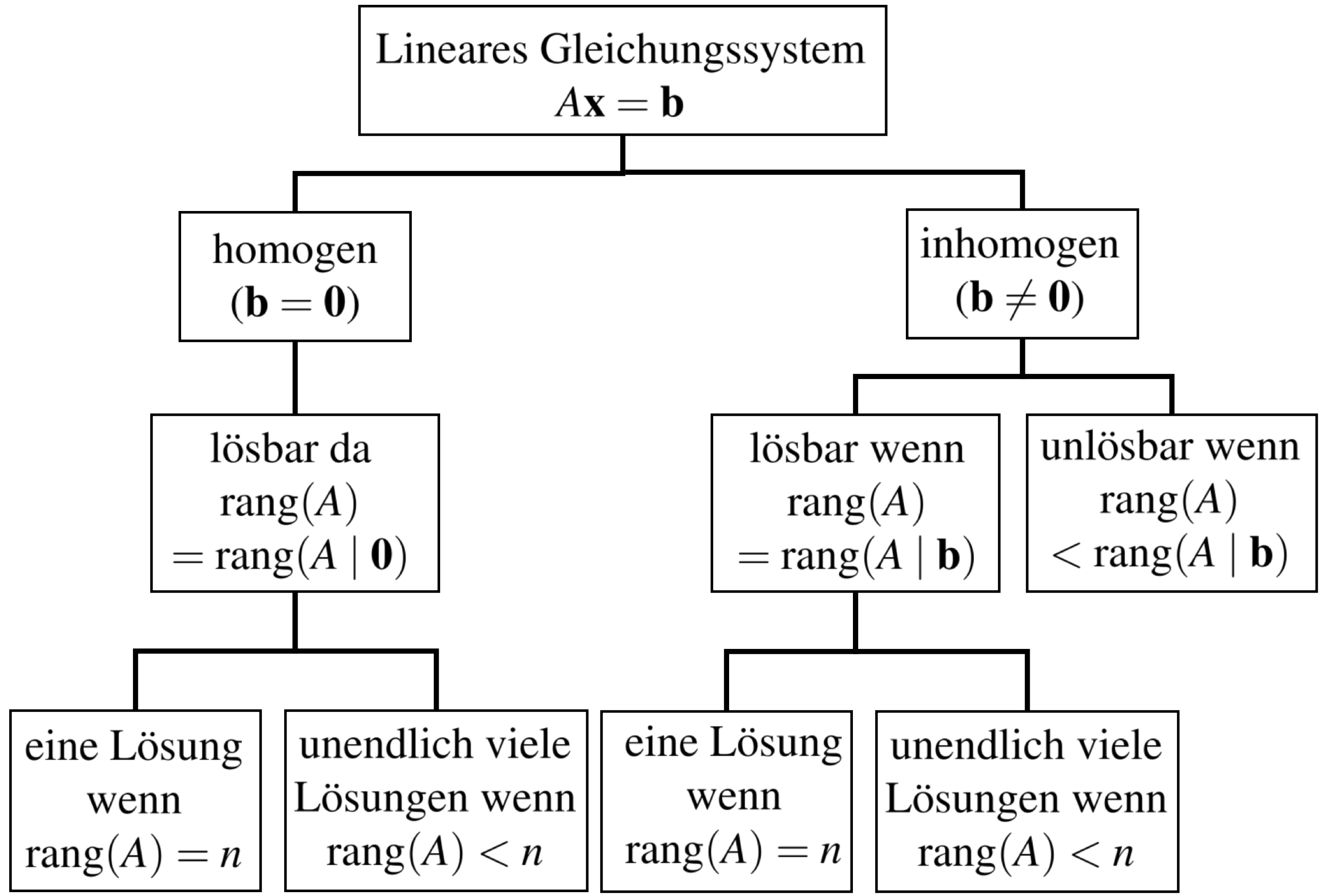
mit rechter Seite $\vec{b}^2$: unlösbar

$\vec{0} = (12) = (9) + (8)$
$= (6) - (4) + (5)$
$= (3) - (2) + (1)$
$= \vec{a}_3 - \vec{a}_2 + \vec{a}_1$
$\Rightarrow \vec{a}_2 = \vec{a}_3 + \vec{a}_1$

(von Folie 16)

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}^1$	$\mathbf{b}^2$	
(1)	0	-4	-1	1	0	
(2)	1	1	-1	1	1	
(3)	1	5	0	0	0	
(4)	1	1	-1	1	1	(2)
(5)	0	-4	-1	1	0	(1)
(6)	1	5	0	0	0	(3)
(7)	1	1	-1	1	1	(4)
(8)	0	-4	-1	1	0	(5)
(9)	0	4	1	-1	-1	(6) - (4)
(10)	1	0	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	1	(7) + $\frac{1}{4}\cdot$(8)
(11)	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}\cdot$(8)
(12)	0	0	0	0	-1	(9) + (8)

Übersicht Lösbarkeit eines LGS



Ein (unvollständiger) Rückblick

- Ein lineares Gleichungssystem kann einfach und zuverlässig mit Hilfe des Eliminationsverfahrens zu einem äquivalenten linearen Gleichungssystem in expliziter Form umgeformt werden. Aus dem linearen Gleichungssystem in expliziter Form ist die Lösungsmenge dann einfach bestimmbar.

- Die Menge aller Lösungen oder $\{\}$ einer linearen Gleichung mit n Variablen ist eine Hyperebene, also ein affiner Raum der Dimension $n-1$. Ist die rechte Seite der linearen Gleichung 0, so ist es ein linearer Raum.

- Geometrisch kann man Gleichungssysteme mit n Variablen und m Gleichungen entweder zeilenweise als Schnitt von m Hyperebenen oder spaltenweise als Gewichte einer Linearkombination von n Vektoren des $\mathbb{R}^m$ interpretieren.

- Der Rang einer $m \times n$-Matrix entspricht der Anzahl unabhängiger Spaltenvektoren bzw. Anzahl unabhängiger Zeilenvektoren. Gilt $\operatorname{rang}(A) = \min\{n, m\}$, hat die Matrix vollen Rang.