Aufgabe 1 (LGS, simultane Lösung, parametrische Lösung)

Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & b_1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & b_2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & b_3 \end{array}$$

(a) Wie viele Elemente hat die Lösungsmenge im Fall $b_1 = 3, b_2 = 4$ und $b_3 = 0$?

(b) Wie viele Elemente hat die Lösungsmenge im Fall $b_1 = 1, b_2 = 2$ und $b_3 = 1$?

(c) Welche Bedingung muss an eine beliebige rechte Seite

$$\mathbf{b}^3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

gestellt werden, damit das LGS lösbar ist?

Lösung:

Wir lösen das LGS für die rechten Seiten $\mathbf{b}^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}^3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ simultan.

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}^1$	$\mathbf{b}^2$	$\mathbf{b}^3$		
1	1	1	1	3	1	b_1		eliminiere x_1
2	2	2	1	4	2	b_2		
3	1	1	-1	0	1	b_3		
4	1	1	1	3	1	b_1	1	
5	0	0	-1	-2	0	$b_2 - 2b_1$	$2 - 2 \cdot 1$	überspringe x_2, eliminiere x_3, erzeuge führende 1
6	0	0	-2	-3	0	$b_3 - b_1$	$3 - 1$	
7	1	1	0	1	1	$b_2 - b_1$	$4 + 5$	
8	0	0	1	2	0	$-b_2 + 2b_1$	$-1 \cdot 5$	
9	0	0	0	1	0	$b_3 - 2b_2 + 3b_1$	$6 - 2 \cdot 5$	

Nun müssen wir die 3 Fälle unterscheiden:

(a) Das LGS ist nicht lösbar, da die letzte Zeile 9 der unlösbaren Gleichung $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$ entspricht. Es existiert also keine Lösung.

(b)

Satz 7.2.2 - Streichen von Nullzeilen.
Lässt man in einem linearen Gleichungssystem der Form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, eine Gleichung der Form

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0,$$

also eine Zeile i_1 mit $a_{i_1 j} = 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$ und $b_{i_1} = 0$ weg oder fügt sie hinzu, so entsteht ein lineares Gleichungssystem, das zu dem ursprünglichen linearen Gleichungssystem äquivalent ist.

Die Zeile 9 ist eine Nullzeile und kann weggelassen werden, vgl. Satz 7.2.2.
Wir erhalten:

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}^2$	
10	1	1	0	1	7
11	0	0	1	0	8

Das LGS im Endtableau liegt in expliziter Form vor und wir folgern, dass $x_3 = 0$ und $x_1 = 1 - x_2$ sein muss, sprich

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Diese Lösungsmenge entspricht einer Geraden. Jeder Punkt auf dieser Gerade ist eine Lösung des LGS. Es gibt also unendlich viele Lösungen.

(c) Im Allgemeinen muss die Zeile 9 eine Nullzeile sein, damit das LGS lösbar ist. Damit dies gilt, muss die rechte Seite die folgende Bedingung erfüllen:

$$b_3 - 2b_2 + 3b_1 = 0.$$

Wir wissen bereits, dass u.a. der Vektor $\mathbf{b}^2 = (1, 2, 1)^T$ diese Bedingung erfüllt.

Alternative Lösung:
Anstatt $\boldsymbol{b}^1, \boldsymbol{b}^2$ und $\boldsymbol{b}^3$ alle einzeln zu betrachten, hätte man auch das LGS nur für $\boldsymbol{b}^3$ parametrisch lösen können. Die jeweiligen Rechten Seiten für $\boldsymbol{b}^1$ und $\boldsymbol{b}^2$ würde man dann erhalten, wenn man die konkreten Vektoren in die parametrische Lösung einsetzt. So ergeben sich zum Beispiel die rechten Seiten der Zeile 7, 8 und 9 des Tableaus für $\boldsymbol{b}^1 = (3, 4, 0)^T$, wenn man in der parametrischen Lösung $b_1 = 3, b_2 = 4$ und $b_3 = 0$ einsetzt.

Bemerkung Sucht man Lösungen verschiedener linearer Gleichungssysteme mit gleicher Koeffizientenmatrix aber unterschiedlichen rechten Seiten, so kann das Eliminationsverfahren entweder für mehrere rechte Seiten parallel oder mit einer parametrischen rechte Seite durchgeführt werden.

Aufgabe 2 (Lösung eines LGS in Zeilenstufenform)

Betrachten Sie das folgende LGS:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -9x_2 + 8x_3 &= 1 \\ 7x_3 &= 1. \end{aligned}$$

(a) Liegt das LGS in Zeilenstufenform vor?

(b) Liegt das LGS in expliziter Form vor?

(c) Wie kann man direkt x_3 bestimmen? Wie kann man daraus x_2 und dann x_1 bestimmen?

Lösung:

(a) Die Koeffizientenmatrix dieses LGS ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix liegt in Zeilenstufenform vor, vgl. Definition 6.5.12 aus Serie 5. Das LGS liegt somit in Zeilenstufenform vor.

(b) Die Koeffizientenmatrix A liegt nicht in expliziter Form vor, vgl. Definition 7.1.6 aus Serie 5. Das LGS liegt somit nicht in expliziter Form vor.

(c) Ausgehend von diesem LGS mit Variablen x_1, x_2 und x_3, bei welchem die Koeffizientenmatrix A in Zeilenstufenform vorliegt, kann eine erste Variable aus der letzten Gleichung (hier die 3. Gleichung) bestimmt werden (ggf. in Abhängigkeit von freien Variablen). Aus der 3. Gleichung folgt, dass $x_3 = \frac{1}{7}$.
Durch Einsetzen von $x_3 = \frac{1}{7}$ in die 2. Gleichung, kann dann gegebenenfalls eine weitere Variable bestimmt werden oder entschieden werden, dass das LGS keine Lösung hat. In unserem Fall haben wir dann,

$$-9x_2 + 8 \cdot \frac{1}{7} = 1.$$

Somit ist $x_2 = \frac{1-8\cdot\frac{1}{7}}{-9} = \frac{1}{63}$. Dann können wir x_3 und x_2 in die erste Gleichung einsetzen und erhalten,

$$x_1 + 2 \cdot \frac{1}{63} + 3 \cdot \frac{1}{7} = 1.$$

Daraus folgt, dass $x_1 = \frac{34}{63}$. Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems ist somit,

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{34}{63} \\ \frac{1}{63} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} \right\}.$$

Bemerkung Ausgehend von einem lösbaren LGS mit Variablen $x_1, \dots, x_n$, bei welchem die Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in Zeilenstufenform ohne Nullzeilen vorliegt, kann eine erste Variable aus Gleichung m (ggf. in Abhängigkeit von freien Variablen) bestimmt werden. Durch Einsetzen dieser $k = 1$ Variablen in Gleichung $m-k$ kann dann gegebenenfalls eine weitere Variable bestimmt werden. Durch Wiederholung dieses Schrittes für $k = 2, \dots, m-1$ werden so alle Lösungen gefunden.

Aufgabe 3 (Basislösung eines LGS)

Wir haben ein lineares Gleichungssystem mit Hilfe des Eliminationsverfahren gelöst und erhalten

	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
①	1	0	0	1	13
②	0	1	0	−3	9
③	0	0	1	8	18

(a) Lesen Sie aus dem Endtableau eine Basislösung des LGS ab. Wie viele Komponenten dieser Basislösung sind von 0 verschieden?

(b) Bestimmen Sie eine weitere Basislösung, in dem Sie $x_2 = 0$ setzen.

(c) Bestimmen Sie alle weiteren Basislösungen.

Lösung:

Definition 7.1.8 - Basislösungen
Ist das lösbare lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ äquivalent zu einem linearen Gleichungssystem in expliziter Form mit r führenden Variablen, dann heisst eine Lösung $\mathbf{x}$ von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ Basislösung, wenn höchstens r Komponenten von 0 verschieden sind.

(a) Setzen wir $x_4 = 0$, erhalten wir die Lösung $\mathbf{x} = (13, 9, 18, 0)^T$. Diese Lösung ist eine Basislösung, da nur 3 Komponenten von 0 verschieden sind. Nur die Komponente der freien Variable x_4 ist gleich 0.

(b) Eine weitere Basislösung erhalten wir, indem wir $x_2 = 0$ setzen und nach den verbleibenden Variablen auflösen. Man erhält so,

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 13 \\ -3x_4 &= 9 \\ x_3 + 8x_4 &= 18. \end{aligned}$$

Hier muss also $x_4 = -\frac{9}{3} = -3$, $x_1 = 13 - (-3) = 16$ und $x_3 = 18 - 8 \cdot (-3) = 42$ gelten. Eine weitere Basislösung ist damit $(16, 0, 42, -3)^T$.

– –

Alternative Lösung:

Wir hätten auch das lineare Gleichungssystem mit Hilfe linearer Zeilenumformungen so umformen können, dass in Spalten 1, 3 und 4 die ersten drei kanonischen Einheitsvektoren stehen. Die Basislösung kann man dann aus den Komponenten der rechten Seite ablesen, indem man die Komponente b_i der Variable zuweist, in deren Spalte der i-te kanonische Einheitsvektor steht, und die anderen Variablen gleich 0 setzt.

(c) Eine weitere Basislösung erhalten wir, indem wir $x_1 = 0$ setzen und nach den verbleibenden Variablen auflösen. Man erhält so,

$$\begin{aligned} x_4 &= 13 \\ x_2 - 3x_4 &= 9 \\ x_3 + 8x_4 &= 18. \end{aligned}$$

Hier muss also $x_4 = 13$, $x_2 = 9 + 3 \cdot (13) = 48$ und $x_3 = 18 - 8 \cdot (13) = -86$ gelten. Eine weitere Basislösung ist damit $(0, 48, -86, 13)^T$.
Eine weitere Basislösung erhalten wir, indem wir $x_3 = 0$ setzen und nach den verbleibenden Variablen auflösen. Man erhält so,

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 13 \\ x_2 - 3x_4 &= 9 \\ 8x_4 &= 18. \end{aligned}$$

Hier muss also $x_4 = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} = 2.25$, $x_2 = 9 + 3 \cdot (2.25) = 15.75$ und $x_1 = 13 - 2.25 = 10.75$ gelten. Eine weitere Basislösung ist damit $(10.75, 15.75, 0, 2.25)^T$.

– –

Alternative Lösung:
Auch hier hätten wir das lineare Gleichungssystem mit Hilfe linearer Zeilenumformungen so umformen können, dass in Spalten 2,3, und 4 (bzw. 1,2 und 4) die ersten drei kanonischen Einheitsvektoren stehen. Die Basislösung kann man dann aus den Komponenten der rechten Seite ablesen, indem man die Komponente b_i der Variable zuweist, in deren Spalte der i-te kanonische Einheitsvektor steht, und die anderen Variablen gleich 0 setzt.

Aufgabe 4 (Affine Lösungsmengen)

(a) Betrachten Sie

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(i) Ist diese Menge ein linearer Raum? Ist diese Menge ein affiner Raum?
(ii) Bestimmen Sie die Dimension der Menge.

(b) Betrachten Sie die Lösungsmenge des inhomogenen LGS aus Aufgabe 10(a) in Serie 5:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(i) Ist diese Menge ein linearer Raum? Ist diese Menge ein affiner Raum?
(ii) Bestimmen Sie die Dimension der Menge.

(c) Betrachten Sie die Lösungsmenge des inhomogenen LGS aus 10(c) in Serie 5:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{23}{2} \\ 8 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(i) Ist diese Lösungsmenge ein linearer Raum? Ist diese Lösungsmenge ein affiner Raum?
(ii) Bestimmen Sie die Dimension der Lösungsmenge.

(d) Betrachten Sie die Lösungsmenge des inhomogenen LGS aus 10(d) in Serie 5:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(i) Ist diese Lösungsmenge ein linearer Raum? Ist diese Lösungsmenge ein affiner Raum?
(ii) Bestimmen Sie die Dimension der Lösungsmenge.

(e) Betrachten Sie die Lösungsmenge des inhomogenen LGS aus 10(e) in Serie 5:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(i) Ist diese Lösungsmenge ein linearer Raum? Ist diese Lösungsmenge ein affiner Raum?
(ii) Bestimmen Sie die Dimension der Lösungsmenge.

Lösung:

In Serie 3 haben wir bereits die Definition von linearen Räumen wiederholt. Im Skript sind affine Räume wie folgt definiert:

Definition 7.3.1 - Affiner Raum
Seien $\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^m \in \mathbb{R}^n$. Die Menge aller Punkte, die sich aus einer Addition eines Vektors $\mathbf{v}^0$ und allen möglichen Linearkombinationen von $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^m$ ergeben, also

$$A = \left\{ \mathbf{v}^0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{v}^i \middle| \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

heisst affiner Raum. Die Dimension des linearen Raums $\operatorname{lin}\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^m\}$ heisst auch Dimension des affinen Raums A, kurz $\dim(A)$.

Ein linearer Raum ist stets ein affiner Raum mit $\mathbf{v}^0 = \mathbf{0}$. Jedoch ist ein affiner Raum mit $\mathbf{v}^0 \notin \operatorname{lin}\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^m\}$ kein linearer Raum.

(a) (i) Diese Lösungsmenge ist ein affiner Raum mit $\mathbf{v}^0 = (6, 4, -2)^T$ und $\mathbf{v}^1 = (-3, -2, 1)^T$. Da $(6, 4, -2)^T = -2 \cdot (-3, -2, 1)^T$ gilt $\mathbf{v}^0 \in \operatorname{lin}\{\mathbf{v}^1\}$. Somit ist $\mathbb{L} = \operatorname{lin}\{\mathbf{v}^1\}$ und daher die Lösungsmenge ein linearer Raum.
(ii) Die lineare Hülle $\operatorname{lin}\{(-3, -2, 1)^T\}$ besteht nur aus einem Vektor und dieser ist linear unabhängig, da es sich dabei nicht um den Nullvektor $\mathbf{0}$ handelt. Die Dimension des linearen Raums und somit auch des affinen Raums ist 1, vgl. Definition 7.3.1.

(b) (i) Diese Lösungsmenge ist ein affiner Raum mit $\mathbf{v}^0 = (-5, -1, 0)^T$ und $\mathbf{v}^1 = (-3, -2, 1)^T$. Da es kein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\alpha \cdot (-3, -2, 1)^T = (-5, -1, 0)^T$, ist $\mathbf{v}^0 \notin \operatorname{lin}\{\mathbf{v}^1\}$. Somit ist diese Lösungsmenge kein linearer Raum.
(ii) Die lineare Hülle $\operatorname{lin}\{(-3, -2, 1)^T\}$ besteht nur aus einem Vektor und dieser ist linear unabhängig, da es sich dabei nicht um den Nullvektor $\mathbf{0}$ handelt. Die Dimension des linearen Raums und somit auch des affinen Raums ist 1, vgl. Definition 7.3.1.

(c) (i) Diese Lösungsmenge ist ein affiner Raum mit $\mathbf{v}^0 = (5,3,0,0)^T$ und $\mathbf{v}^1 = (\frac{23}{5}, 8, -1, 1)^T$. Da es kein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\alpha \cdot (\frac{23}{5}, 8, -1, 1)^T = (5,3,0,0)^T$, ist $\mathbf{v}^0 \notin \operatorname{lin}\{\mathbf{v}^1\}$. Somit ist diese Lösungsmenge kein linearer Raum.

(ii) Die lineare Hülle $\operatorname{lin}\{(\frac{23}{5}, 8, -1, 1)^T\}$ besteht nur aus einem Vektor und dieser ist linear unabhängig, da es sich dabei nicht um den Nullvektor $\mathbf{0}$ handelt. Die Dimension des linearen Raums und somit auch des affinen Raums ist 1, vgl. Definition 7.3.1.

(d) (i) Diese Lösungsmenge ist ein affiner Raum mit $\mathbf{v}^0 = (2,-5,0,0)^T$, $\mathbf{v}^1 = (-2,3,1,0)^T$ und $\mathbf{v}^2 = (-1,-2,0,1)^T$. Da es kein $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $(2,-5,0,0)^T = \alpha_1 \cdot (-2,3,1,0)^T + \alpha_2 \cdot (-1,-2,0,1)^T$, ist $\mathbf{v}^0 \notin \operatorname{lin}\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2\}$. Somit ist diese Lösungsmenge kein linearer Raum.

(ii) Die Dimension des linearen Raums, $\operatorname{lin}\{(-2,3,1,0)^T, (-1,-2,0,1)^T\}$, ist 2. Die lineare Hülle $\operatorname{lin}\{(-2,3,1,0)^T, (-1,-2,0,1)^T\}$ besteht aus 2 linear unabhängigen Vektoren; es gibt nämlich kein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Dimension des linearen Raums und somit auch des affinen Raums ist 2, vgl. Definition 7.3.1.

(e) (i) Diese Lösungsmenge ist ein affiner Raum mit $\mathbf{v}^0 = (2,0,1,0)^T$, $\mathbf{v}^1 = (-2,1,0,0)^T$ und $\mathbf{v}^2 = (5,0,-3,1)^T$. Da es kein $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $(2,0,1,0)^T = \alpha_1 \cdot (-2,1,0,0)^T + \alpha_2 \cdot (5,0,-3,1)^T$, ist $\mathbf{v}^0 \notin \operatorname{lin}\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2\}$. Somit ist diese Lösungsmenge kein linearer Raum.

(ii) Die lineare Hülle $\operatorname{lin}\{(-2,1,0,0)^T, (5,0,-3,1)^T\}$ besteht aus 2 linear unabhängigen Vektoren; es gibt nämlich kein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Dimension des linearen Raums und somit auch des affinen Raums ist 2, vgl. Definition 7.3.1.

Aufgabe 5 (Gleichheit affiner Lösungsmengen)

Studentin A hat die Lösungsmenge eines LGS als Menge

$$\mathbb{L}_A = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

bestimmt. Student B hat die Lösungsmenge eines LGS als Menge

$$\mathbb{L}_B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

bestimmt. In der Musterlösung wird behauptet, die Lösungsmenge sei

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Welcher der Studenten hat die gleiche Lösungsmenge erhalten wie in der Musterlösung beschrieben ist?

Lösung:

Die Lösungsmengen $\mathbb{L}, \mathbb{L}_A$ und $\mathbb{L}_B$ sind affine Räume, vgl. Aufgabe 4. Es ist bekannt:

Satz 7.3.2 - Gleichheit zweier (affiner) Räume
Seien $m, n, k \in \mathbb{N}$, die Vektoren $\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^m, \mathbf{w}^0, \mathbf{w}^1, \ldots, \mathbf{w}^k \in \mathbb{R}^n$ und die affinen Räume

$$A = \left\{ \mathbf{v}^0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{v}^i \middle| \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad B = \left\{ \mathbf{w}^0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbf{w}^i \middle| \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben. Es gilt $A = B$ genau dann, wenn $\mathbf{v}^0 \in B$ und

$$\operatorname{lin}\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^m\} = \operatorname{lin}\{\mathbf{w}^1, \ldots, \mathbf{w}^k\}.$$

Wir überprüfen zuerst, ob die Studentin A die Lösungsmenge erhalten hat, welche in der Musterlösung beschrieben wird. Wir wollen überprüfen, ob $\mathbb{L} = \mathbb{L}_A$, also ob

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir wenden Satz 7.3.2 an und müssen somit zwei Eigenschaften überprüfen:

1. $\operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$

2. $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}.$

Überprüfen wir zuerst die 2. Bedingung. Wir müssen also überprüfen, ob es $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da $(2,-5,0,0)^T$ in der 3. und 4. Komponente eine Null hat, müssen $t_1 = t_2 = 1$ gesetzt werden. Aber

$$\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}2\\-5\\0\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

und daher ist

$$\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\1\end{pmatrix} \notin \mathbb{L}.$$

Die affinen Räume können nicht gleich sein, da die 2. Bedingung nicht erfüllt ist. Studentin A hat nicht die gleiche Lösungsmenge erhalten, wie in der Musterlösung beschrieben ist.

Wir überprüfen nun, ob Student B die Lösungsmenge erhalten hat, welche in der Musterlösung beschrieben wird. Wir wollen überprüfen, ob $\mathbb{L} = \mathbb{L}_B$, also ob

$$\left\{ \begin{pmatrix}2\\-5\\0\\0\end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\0\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix}-5\\-3\\1\\3\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\1\end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir wenden Satz 7.3.2 an und müssen somit zwei Eigenschaften überprüfen:

1. $\text{lin}\left\{ \begin{pmatrix}-2\\3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix} \right\} = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix}-5\\-3\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$,

2. $\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{L}.$

Es gilt

$$\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-5\\0\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix},$$

daher ist die 2. Bedingung erfüllt, wenn man $t_1 = 1$ und $t_2 = 0$ setzt.
Die beiden Vektoren $(-2,3,1,0)^T$ und $(-1,-2,0,1)^T$ sind linear unabhängig, da es kein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $(-2,3,1,0)^T = \alpha(-1,-2,0,1)^T$. Die Vektoren $(-2,3,1,0)^T$ und $(-1,-2,0,1)^T$ bilden daher eine Basis von

$$\mathbb{L}_0 = \left\{ t_1\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\0\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

vgl. Definition 6.4.4 in Serie 3. Wir können Satz 6.4.5, den Basistauschsatz, aus Serie 3 anwenden, um zu überprüfen, ob die vorgeschlagenen Vektoren $(-5,-3,1,3)^T$ und $(-3,1,1,1)^T$ eingetauscht werden können. Ist dies der Fall, so sind die Mengen gleich.
Es gilt

$$\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Daher folgt aus dem Basistauschsatz, dass

$$\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Nun gilt wiederum, dass

$$\begin{pmatrix}-5\\-3\\1\\3\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Daher folgt aus dem Basisaustauschsatz, dass

$$\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\-3\\1\\3\end{pmatrix}\right\}.$$

Es gilt also, dass

$$\mathbb{L}_0 = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\-3\\1\\3\end{pmatrix}\right\},$$

was zu überprüfen war. Es folgt somit die Gleichheit der beiden affinen Räume. Student B hat die gleiche Lösungsmenge erhalten wie in der Musterlösung beschrieben ist.

Aufgabe 6 (Zeilenbild und Spaltenbild)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $A = \begin{pmatrix}2 & -3\\2 & 2\end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix}$.

(a) Stellen Sie jede Zeile bzw. Gleichung des LGS als Hyperebene des $\mathbb{R}^2$ dar und bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS als Schnittmenge dieser Hyperebenen.

(b) Stellen Sie jede Spalte der Koeffizientenmatrix sowie die rechte Seite als Vektor im $\mathbb{R}^2$ dar. Bestimmen Sie dann die Lösungsmenge des LGS als Gewichte der Linearkombination der Spaltenvektoren von A, welche den Vektor $\mathbf{b}$ ergibt.

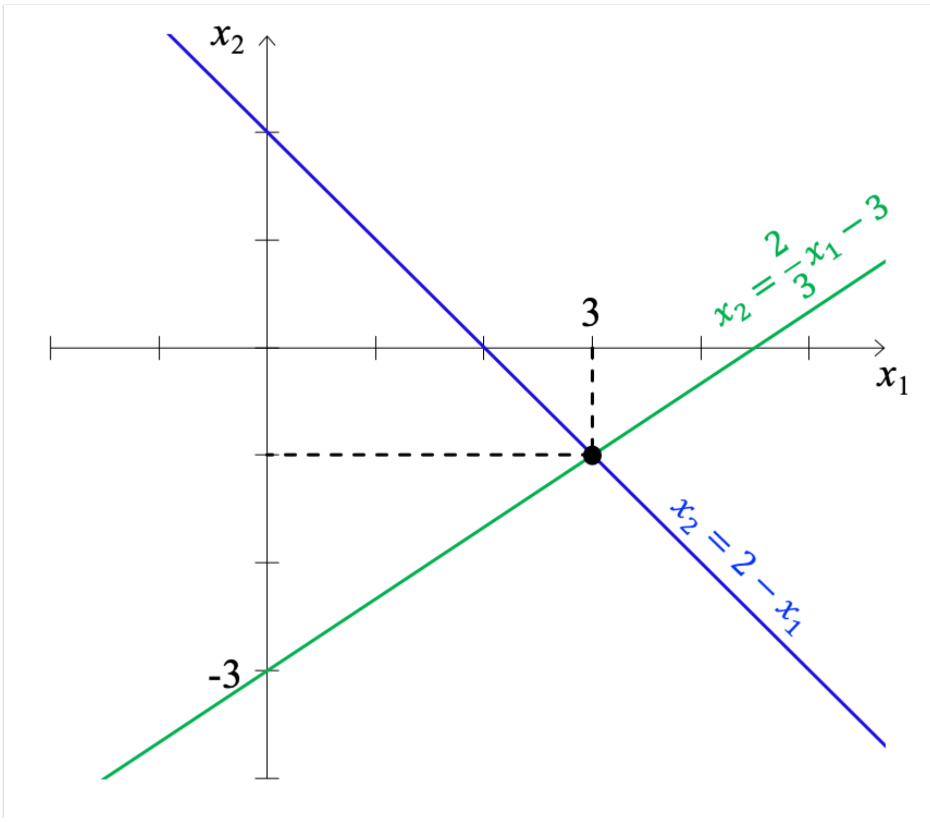
Lösung:

Aus der Vorlesung wissen wir:

Zeilenbild: Jede Zeile $i = 1, \ldots, m$ eines linearen Gleichungssystems mit n Variablen, in welcher mindestens ein $a_{ij} \neq 0$ ist, repräsentiert eine Hyperebene des $\mathbb{R}^n$. Die Lösungsmenge entspricht dem Schnitt aller Hyperebenen.

(a) Die erste Gleichung des LGS ist $2x_1 - 3x_2 = 9$ und die zweite Gleichung ist $2x_1 + 2x_2 = 4$. Wir bestimmen nun für jede Zeile die Hyperebene des $\mathbb{R}^2$, welche alle Lösungen dieser Gleichung beschreibt.
Die erste Gleichung kann dabei umgestellt werden zu $x_2 = \frac{2}{3}x_1 - 3$. Man erkennt, dass die Lösungen dieser Gleichung eine Gerade mit y-Achsenabschnitt -3 und Steigung $\frac{2}{3}$ repräsentiert.
Die zweite Gleichung kann umgestellt werden zu $x_2 = 2 - x_1$. Man erkennt, dass die Lösungen dieser Gleichung eine Gerade mit y-Achsenabschnitt 2 und Steigung -1 repräsentiert.
Da die Lösungsmenge dem Schnitt aller Hyperebenen (hier Geraden) entspricht, müssen wir nun nur noch den Schnittpunkt der beiden Geraden bestimmen, welcher graphisch bestimmt werden kann.

Abbildung 6.1: Zeilenbild des LGS



In Abbildung 6.1 sieht man, dass sich die beiden Geraden im Punkt $(3, -1)^T$ schneiden. Der Schnittpunkt dieser zwei Geraden ist $(3, -1)^T$. Die Lösungsmenge ist somit $\mathbb{L} = \{(3, -1)^T\}$.

(b) Aus der Vorlesung wissen wir:

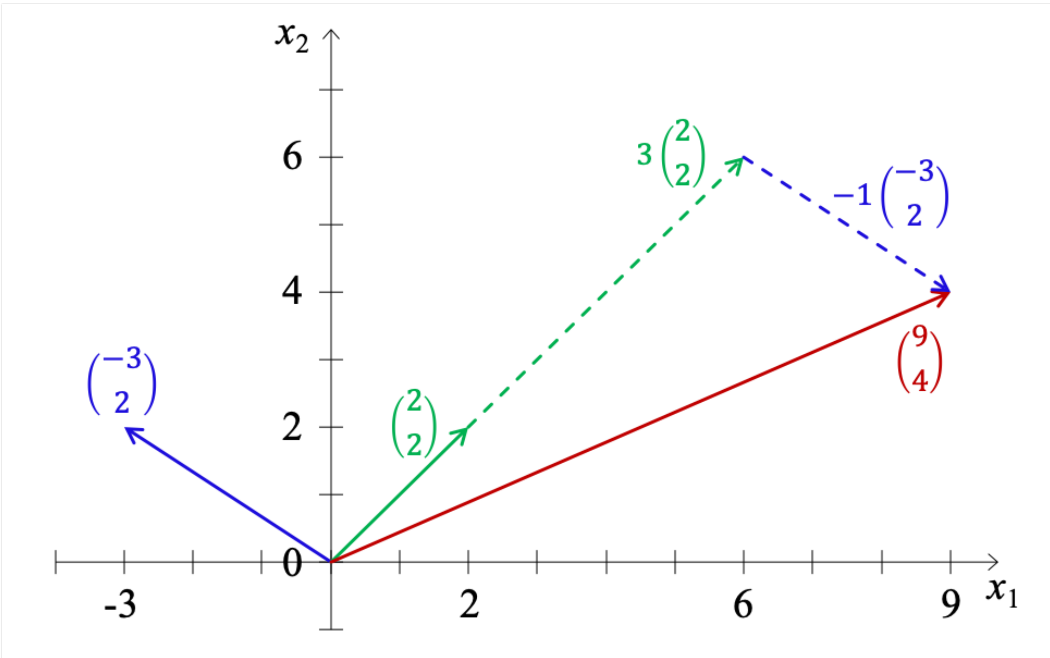
> **Spaltenbild:** Liest man die linke Seite eines linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x}$ als Linearkombination der Spaltenvektoren $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n$ der Koeffizientenmatrix A mit Gewichten $x_1, \ldots, x_n$, so ist $\mathbf{x}$ genau dann eine Lösung von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wenn diese Linearkombination dem Vektor $\mathbf{b}$ entspricht.

Das lineare Gleichungssystem kann auch geschrieben werden als,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

In dieser Form wird also $(9,4)^T$ als Linearkombination von $(2,2)^T$ und $(-3,2)^T$ mit Gewichten x_1 und x_2 dargestellt. Wir suchen also diejenige Linearkombination der Vektoren auf der linken Seite des linearen Gleichungssystems, die den Vektor auf der rechten Seite des linearen Gleichungssystems ergibt. Die richtige Wahl von x_1 und x_2, nämlich $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$, ergibt die gewünschte rechte Seite.

Abbildung 6.2: Spaltenbild des LGS



Die Lösungsmenge ist somit $\mathbb{L} = \{(3,-1)^T\}$.

Aufgabe 7 (Rang einer Matrix und lineare Unabhängigkeit)

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen. Was können Sie daraus über die lineare Abhängigkeit der Zeilenvektoren und Spaltenvektoren folgern?

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 7 & 4 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Lösung:

Definition 7.4.1 - Der Rang einer Matrix
Ist A eine $m \times n$-Matrix, dann nennt man die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren Rang der Matrix A bzw. $\operatorname{rang}(A)$.

Satz 7.4.2 - Der Rang
Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren von A entspricht dem Rang von A.

Satz 7.4.4 - Berechnung des Rangs der erweiterten Koeffizientenmatrix
Erhält man ausgehend von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit Hilfe des Eliminationsverfahrens ein lineares Gleichungssystem $\tilde{A}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$ mit erweiterter Koeffizientenmatrix $(\tilde{A}|\tilde{\mathbf{b}})$ in Zeilenstufenform, wobei $\tilde{A}$ genau r Zeilen hat, die keine Nullzeilen sind, so gilt:

- $\operatorname{rang}(A) = r$
- Ist jede Nullzeile von $\tilde{A}$ auch eine Nullzeile der erweiterten Koeffizientenmatrix $(\tilde{A}|\tilde{\mathbf{b}})$, also $b_i = 0$ für alle $i > r$, so gilt $\operatorname{rang}(A|\mathbf{b}) = r$, sonst $\operatorname{rang}(A|\mathbf{b}) = r + 1$.

Um den Rang einer Matrix A zu bestimmen, reicht es also, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit Hilfe des Eliminationsverfahrens zu lösen. Dann entspricht die Anzahl der von Nullzeilen verschiedenen Zeilen der Koeffizientenmatrix des Endtableaus dem Rang der Matrix A, vgl. Satz 7.4.4.

(a) Wir lösen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit Hilfe des Eliminationsverfahrens:

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{b}$		
①	1	2	2	1	0		eliminiere x_1
②	0	1	1	1	0		
③	1	2	-1	-1	0		
④	-1	2	2	0	0		
⑤	1	2	2	1	0	①	
⑥	0	1	1	1	0	②	eliminiere x_2
⑦	0	0	-3	-2	0	③ $-$ ①	
⑧	0	4	4	1	0	④ $+$ ①	
⑨	1	0	0	-1	0	⑤ $-2$⑥	
⑩	0	1	1	1	0	⑥	
⑪	0	0	-3	-2	0	⑦	eliminiere x_3 und erzeuge führende 1
⑫	0	0	0	-3	0	⑧ $-4$⑥	
⑬	1	0	0	-1	0	⑨	
⑭	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	⑩ $+\frac{1}{3}$⑪	
⑮	0	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$⑪	
⑯	0	0	0	-3	0	⑫	eliminiere x_4 und erzeuge führende 1
⑰	1	0	0	0	0	⑬ $-\frac{1}{3}$⑯	
⑱	0	1	0	0	0	⑭ $+\frac{1}{9}$⑯	
⑳	0	0	1	0	0	⑮ $+\frac{2}{9}$⑯	
㉑	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$⑯	

Das LGS im Endtableau liegt in expliziter Form vor. Die Anzahl der verbleibenden von Nullzeilen verschiedenen Zeilen der Koeffizientenmatrix ist 4. Somit ist $\text{rang}(A) = 4$. Der Rang einer Matrix entspricht der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren/Spaltenvektoren, vgl. Definition 7.4.1 und Satz 7.4.2. Die 4 Zeilenvektoren

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

sind somit linear unabhängig. Auch die 4 Spaltenvektoren

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

sind damit linear unabhängig.

(b) Wir lösen $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit Hilfe des Eliminationsverfahrens:

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{b}$		
①	1	1	0	3	0		eliminiere x_1
②	0	1	1	5	0		
③	1	1	0	-2	0		
④	7	4	-3	-4	0		
⑤	1	1	0	3	0	①	
⑥	0	1	1	5	0	②	eliminiere x_2
⑦	0	0	0	-5	0	③ $-$ ①	
⑧	0	-3	-3	-25	0	④ $-7$①	
⑨	1	0	-1	-2	0	⑤ $-$ ⑥	
⑩	0	1	1	5	0	⑥	
⑪	0	0	0	-5	0	⑦	überspringe x_3, eliminiere x_4 und erzeuge führende 1
⑫	0	0	0	-10	0	⑧ $+3$⑥	
⑬	1	0	-1	0	0	⑨ $-\frac{2}{5}$⑪	
⑭	0	1	1	0	0	⑩ $+$ ⑪	
⑮	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{5}$⑪	
⑯	0	0	0	0	0	⑫ -2⑪	

Das LGS im Endtableau liegt in expliziter Form vor. Die Anzahl der verbleibenden von Nullzeilen verschiedenen Zeilen der Koeffizientenmatrix ist 3. Somit ist $\operatorname{rang}(B) = 3$. Die 4 Zeilenvektoren

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

sind somit linear abhängig, vgl. Satz 7.4.2. Auch die 4 Spaltenvektoren

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

sind damit linear abhängig, vgl. Definition 7.4.1.

(c) Wir lösen $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit Hilfe des Eliminationsverfahrens:

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{b}$		
①	1	0	1	-1	0		eliminiere x_1
②	1	1	0	1	0		
③	2	3	-1	4	0		
④	1	0	1	-1	0	①	
⑤	0	1	-1	2	0	② $-$ ①	eliminiere x_2
⑥	0	3	-3	6	0	③ $-2$①	
⑦	1	0	1	-1	0	④	
⑧	0	1	-1	2	0	⑤	
⑨	0	0	0	0	0	⑥ $-3$⑤	

Das LGS im Endtableau liegt in expliziter Form vor. Die Anzahl der verbleibenden von Nullzeilen verschiedenen Zeilen der Koeffizientenmatrix ist 2. Somit ist $\operatorname{rang}(C) = 2$. Die 3 Zeilenvektoren

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

sind somit linear abhängig, vgl. Satz 7.4.2. Auch die 4 Spaltenvektoren

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

sind damit linear abhängig, vgl. Definition 7.4.1 (was wir bereits vorher wussten, da 4 Vektoren des $\mathbb{R}^3$ stets linear abhängig sind).

Aufgabe 8 (Rang einer Matrix und Lösungsmenge des zugehörigen LGS)

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

und das daraus gebildete homogene LGS

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

mit dem Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \in \mathbb{R}^5$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch?

(a)

(1) A liegt in Zeilenstufenform vor. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Das LGS ist nicht lösbar. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Die Lösungsmenge ist ein affiner Raum. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Die Lösungsmenge ist ein linearer Raum. ☐ wahr ☐ falsch

(b)

(1) $\operatorname{rang}(A) = 4$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Die Matrix A hat vollen Rang. ☐ wahr ☐ falsch

(3) $\operatorname{rang}(A^T) = 4$. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Die Dimension der Lösungsmenge ist 2. ☐ wahr ☐ falsch

Lösung:

Um den Rang einer Matrix A zu bestimmen, reicht es , $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit Hilfe des Eliminationsverfahrens zu lösen. Dann entspricht die Anzahl der von Nullzeilen verschiedenen Zeilen der Koeffizientenmatrix des Endtableaus dem Rang der Matrix A, vgl. Satz 7.4.4 aus Aufgabe 7. Es folgt mit Hilfe des Eliminationsverfahrens:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\mathbf{b}$		
1	1	0	0	−1	1	0		eliminiere x_1
2	0	1	0	1	1	0		
3	0	0	1	2	−2	0		
4	1	1	1	2	0	0		
5	1	0	0	−1	1	0	1	
6	0	1	0	1	1	0	2	eliminiere x_2
7	0	0	1	2	−2	0	3	
8	0	1	1	3	−1	0	4 − 1	
9	1	0	0	−1	1	0	5	
10	0	1	0	1	1	0	6	
11	0	0	1	2	−2	0	7	eliminiere x_3
12	0	0	1	2	−2	0	8 − 6	
13	1	0	0	−1	1	0	9	
14	0	1	0	1	1	0	10	
15	0	0	1	2	−2	0	11	
16	0	0	0	0	0	0	12 − 11	

Das LGS im Endtableau liegt in expliziter Form vor. Die Lösungsmenge ist gegeben durch

$$\mathbb{L}_0 = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a)
- Zu (1): Beispielsweise ist der letzte Eintrag der ersten Spalte, $a_{41} \neq 0$, aber $a_{11} = 1$ ist das führende Element der ersten Zeile. Somit liegt die Matrix nicht in Zeilenstufenform vor. Die Aussage (1) ist falsch.
- Zu (2): Der Nullvektor $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist stets eine Lösung eines homogenen LGS. Die Aussage (2) ist falsch.
- Zu (3): Die Lösungsmenge ist ein affiner Raum mit $\mathbf{v}^0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}^1 = (1, -1, -2, 1, 0)^T$ und $\mathbf{v}^2 = (-1, -1, 2, 0, 1)^T$, vgl Definition 7.3.1 in Aufgabe 4. Die Aussage (3) ist wahr.
- Zu (4): Wie in Teilaufgabe (3) gesehen, ist die Lösungsmenge ein affiner Raum mit $\mathbf{v}^0 = \mathbf{0}$. Die Lösungsmenge ist also gegeben durch die lineare Hülle und ist somit ein linearer Raum. Die Aussage (4) ist wahr.

(b) Es folgt aus unseren Vorüberlegungen:
- Zu (1): Falsch. Das Endtableau hat 3 von Nullzeilen verschiedene Zeilen. Somit ist $\operatorname{rang}(A) = 3 \neq 4$. Die Aussage (1) ist falsch.
- Zu (2):

> **Definition 7.4.2 - Voller Rang**
> Man sagt, eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hat vollen Rang, wenn $\operatorname{rang}(A) = \min\{m,n\}$.

Da $\min\{m,n\} = 4 \neq \operatorname{rang}(A)$, hat A nicht vollen Rang. Die Aussage (2) ist falsch.

- Zu (3): Aus der Vorlesung kennen wir folgende Eigenschaften des Rangs:

> **Satz 7.4.3 - Eigenschaften des Rangs**
> Sei A eine $m \times n$-Matrix. Dann gilt
> – $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^T) \leq \min\{m,n\}$
> – $\operatorname{rang}(A) = n$ genau dann, wenn alle Spalten von A linear unabhängig sind;
> – $\operatorname{rang}(A) = m$ genau dann, wenn alle Zeilen von A linear unabhängig sind.

Wir haben schon in Teilaufgabe (1) gesehen, dass $\operatorname{rang}(A) = 3$. Es gilt also $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^T) = 3 \neq 4$. Die Aussage (3) ist falsch.

- Zu (4): Die Dimension der linearen Hülle von $(1,-1,-2,1,0)^T$ und $(-1,-1,2,0,1)^T$ ist 2. Die beiden Vektoren sind nämlich linear unabhängig; es gibt kein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass $(1,-1,-2,1,0)^T = \alpha(-1,-1,2,0,1)^T$. Die Aussage (4) ist wahr.

Aufgabe 9 (Rang einer Matrix und Lösbarkeit des LGS)

Sei A die Koeffizientenmatrix und $\mathbf{b}$ die rechte Seite des LGS

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & = & 13 \\ -\frac{4}{5}x_1 & + & \frac{3}{5}x_2 & + & \frac{13}{5}x_3 & - & 3x_4 & = & -\frac{11}{5} \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 13x_3 & + & 8x_4 & = & 18 \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{rang}(A)$, $\operatorname{rang}(A|\mathbf{b})$ und die Dimension der Lösungsmenge $\mathbb{L}$.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}_0$ für $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, die Dimension der Lösungsmenge $\mathbb{L}_0$ und geben Sie eine Basis für $\mathbb{L}_0$ an.

(c) Geben Sie eine neue rechte Seite $\mathbf{b}$ an, so dass $\operatorname{rang}(A) < \operatorname{rang}(A|\mathbf{b})$ und somit das Gleichungssystem unlösbar wird.

Lösung:

(a) Um den Rang der Koeffizientenmatrix A, sowie der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ zu bestimmen, lösen wir $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit Hilfe des Eliminationsverfahrens:

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{b}$		
①	2	1	11	5	13		eliminiere x_1 und erzeuge führende 1
②	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{13}{5}$	-3	$-\frac{11}{5}$		
③	3	1	13	8	18		
④	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{1}{2}$①	
⑤	0	1	7	-1	3	② $+\frac{2}{5}$①	eliminiere x_2
⑥	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	③ $-\frac{3}{2}$①	
⑦	1	0	2	3	5	④ $-\frac{1}{2}$⑤	
⑧	0	1	7	-1	3	⑤	
⑨	0	0	0	0	0	⑥ $+\frac{1}{2}$⑤	

Das LGS im Endtableau liegt in expliziter Form vor. Die Anzahl der verbleibenden von Nullzeilen verschiedenen Zeilen der Koeffizientenmatrix ist 2. Diese Zahl ist gleich der Anzahl der verbleibenden von Nullzeilen verschiedenen Zeilen der erweiterten Koeffizientenmatrix. Also ist $\text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(A|\mathbf{b})$. Aus der Vorlesung wissen wir:

Satz 7.4.1 - Lösbarkeit eines LGS
Sei A eine $m \times n$-Matrix, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, dann gilt

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ lösbar} \quad \Leftrightarrow \quad \text{rang}(A) = \text{rang}(A|\mathbf{b}).$$

Satz 7.4.5 - Die Lösungsmenge eines LGS
Sei A eine $m \times n$-Matrix, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Wenn das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar ist, dann ist die Lösungsmenge ein affiner Raum der Dimension $n - \text{rang}(A)$.

Aus Satz 7.4.1 und Satz 7.4.5 wissen wir also, dass das LGS lösbar ist und die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ Dimension $n - \text{rang}(A) = 4 - 2 = 2$ hat.

(b) Homogene lineare Gleichungssysteme $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sind stets lösbar. Aus Aufgabe (a) wissen wir, dass $\text{rang}(A) = 2$ und somit die Lösungsmenge $\mathbb{L}_0$ Dimension $n - \text{rang}(A) = 4 - 2 = 2$ hat. Streichen wir im Endtableau die Nullzeile ⑨, siehe Teilaufgabe (a), und setzen die rechte Seite $\mathbf{0}$, so erhalten wir das homogene LGS,

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{b}$
⑦	1	0	2	3	0
⑧	0	1	7	-1	0

Somit erhalten wir die Lösungsmenge

$$\mathbb{L}_0 = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Da die beiden Vektoren linear unabhängig sind, ist eine Basis von $\mathbb{L}_0$ also $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(c) Ein lineares Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist genau dann lösbar, wenn rang(A)=rang$(A|\mathbf{b})$ gilt, vgl. Satz 7.4.1 aus Teilaufgabe (a). Wir müssen eine rechte Seite finden, so dass rang$(A) <$ rang$(A|\mathbf{b})$. Das ist genau dann der Fall, wenn die letzte Zeile 9 keiner Nullzeile entspricht, weil dann rang$(A|\mathbf{b}) = 3 > 2$ =rang(A) Wie verändert sich die 3. Komponente nach Ausführung der Zeilenumformungen?
Die rechte Seite der Zeilen 4,5,6 entspricht

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}b_1 \\ b_2 + \frac{2}{5}b_1 \\ b_3 - \frac{3}{2}b_1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist rechte Seite der Zeilen 7,8,9 gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}(b_2 + \frac{2}{5}b_1) \\ b_2 + \frac{2}{5}b_1 \\ b_3 - \frac{3}{2}b_1 + \frac{1}{2}(b_2 + \frac{2}{5}b_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10}b_1 - \frac{1}{2}b_2 \\ b_2 + \frac{2}{5}b_1 \\ b_3 + \frac{1}{2}b_2 - \frac{13}{10}b_1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also, dass rang$(A) < (A|\mathbf{b})$ genau dann, wenn der letzte Eintrag ungleich null ist, $b_3 + \frac{1}{2}b_2 - \frac{13}{10}b_1 \neq 0$. Dann ist das zugehörige LGS nicht lösbar. Zum Beispiel ist das LGS mit einer rechten Seite von $\mathbf{b} = (1,0,0)^T$ oder $\mathbf{b} = (1,1,1)^T$ nicht lösbar, da $0 + \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{13}{10} \cdot 1 = -\frac{13}{10} \neq 0$ bzw. $1 + \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{13}{10} \cdot 1 = \frac{2}{10} \neq 0$.

Aufgabe 10 (Rechenregeln für Matrizen)

(a) Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck soweit wie möglich:

$$\begin{pmatrix} 27 & 6 \\ 123 & 12 \\ 24 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 54 & 12 \\ 246 & 24 \\ 48 & 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Gegeben sind folgende Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zudem ist X eine unbekannte 3×3-Matrix, Y eine unbekannte 2×2-Matrix und Z eine unbekannte 3×2-Matrix. Lösen Sie – falls möglich – die folgenden Matrizengleichungen nach X, Y bzw. Z auf:

(i) $A_1 \cdot A_2 + X = A_3$,

(ii) $B_1 \cdot B_2 - 2 \cdot I \cdot Y = B_3$,

(iii) $C_1 + C_2 \cdot Z = C_3$.

Lösung:

(a) Wir berechnen zunächst

$$\begin{pmatrix} 27 & 6 \\ 123 & 12 \\ 24 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 6 & 54 \\ 123 & 12 & 246 \\ 24 & 9 & 48 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 54 & 12 \\ 246 & 24 \\ 48 & 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108 & 78 & 78 \\ 492 & 294 & 294 \\ 96 & 84 & 84 \end{pmatrix}.$$

Somit vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\begin{pmatrix} 27 & 6 & 54 \\ 123 & 12 & 246 \\ 24 & 9 & 48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 108 & 78 & 78 \\ 492 & 294 & 294 \\ 96 & 84 & 84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 135 & 84 & 132 \\ 615 & 306 & 540 \\ 120 & 93 & 132 \end{pmatrix}.$$

– –

Alternative Lösung:

Der Rechenaufwand lässt sich hier reduzieren, wenn man das Assoziativität- und Distributivgesetz benutzt.

Satz 8.1.4 - Rechenregeln der Matrizenaddition

Seien A, B und C $m \times n$-Matrizen, D eine $n \times p$-Matrix und E eine $p \times m$-Matrix. Dann gilt:

- $A + B = B + A$;
- $(A + B) + C = A + (B + C)$;

- $(A+B)\cdot D = (A\cdot D)+(B\cdot D)$;
- $E\cdot(B+C) = (E\cdot B)+(E\cdot C)$.

Da nämlich

$$2\cdot\begin{pmatrix}27 & 6\\ 123 & 12\\ 24 & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}54 & 12\\ 246 & 24\\ 48 & 18\end{pmatrix}$$

ist, kann man den Audruck wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}27 & 6\\ 123 & 12\\ 24 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}54 & 12\\ 246 & 24\\ 48 & 18\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}27 & 6\\ 123 & 12\\ 24 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}27 & 6\\ 123 & 12\\ 24 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}27 & 6\\ 123 & 12\\ 24 & 9\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\right)\\
&= \begin{pmatrix}27 & 6\\ 123 & 12\\ 24 & 9\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 0 & 4 & 4\end{pmatrix}\right)\\
&= \begin{pmatrix}27 & 6\\ 123 & 12\\ 24 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 2 & 4\\ 0 & 5 & 4\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}135 & 84 & 132\\ 615 & 306 & 540\\ 120 & 93 & 132\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(b) Addiert man zu einer $m\times n$-Matrix A die selbe Matrix mit umgekehrten Vorzeichen, so erhält man die Nullmatrix, $A-A=0$, wobei 0 in dem Fall eine $m\times n$-Matrix ist, bei der alle Einträge 0 sind. Offensichtlich verändert sich jede $m\times n$-Matrix B nicht, wenn man die Nullmatrix hinzu addiert, $B+0=B$. Ist $A=B$, so ist auch $\alpha A = \alpha B$ für alle $\alpha\in\mathbb{R}$.

(i) $A_1\cdot A_2 + X = A_3 \iff X = A_3 - A_1\cdot A_2$

$$A_1\cdot A_2 = \begin{pmatrix}-2 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 0 & -2\end{pmatrix} \implies X = A_3 - A_1\cdot A_2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

(ii) $B_1\cdot B_2 - 2\cdot I\cdot Y = B_3 \iff -2\cdot I\cdot Y = B_3 - B_1\cdot B_2 \iff 2\cdot I\cdot Y = B_1\cdot B_2 - B_3$

$\Rightarrow I\cdot Y = Y = \frac{1}{2}(B_1\cdot B_2 - B_3)$

$$B_1\cdot B_2 = \begin{pmatrix}-4 & 5\\ -5 & 7\end{pmatrix},\qquad \tfrac{1}{2}(B_1\cdot B_2 - B_3) = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = Y.$$

(iii) Da Z unbekannt ist, berechnen wir die linke Seite für ein allgemeines Z und vergleichen das Resultat mit der rechten Seite. Da zwei Matrizen genau dann gleich sind, wenn alle Einträge gleich sind, vgl. Definition 6.5.2 aus dem Skript, können wir die Einträge von Z direkt aus diesem Vergleich ablesen.

$$C_1 + C_2 \cdot Z = C_3 \iff C_2 \cdot Z = C_3 - C_1$$

$$C_2 \cdot \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \\ z_{31} & z_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ 2z_{21} & 2z_{22} \\ \frac{1}{2}z_{31} & \frac{1}{2}z_{32} \end{pmatrix}, \qquad C_3 - C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \qquad Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir hätten die Aufgabe auch mit der Inversen lösen können, diese werden wir aber erst noch kennenlernen.