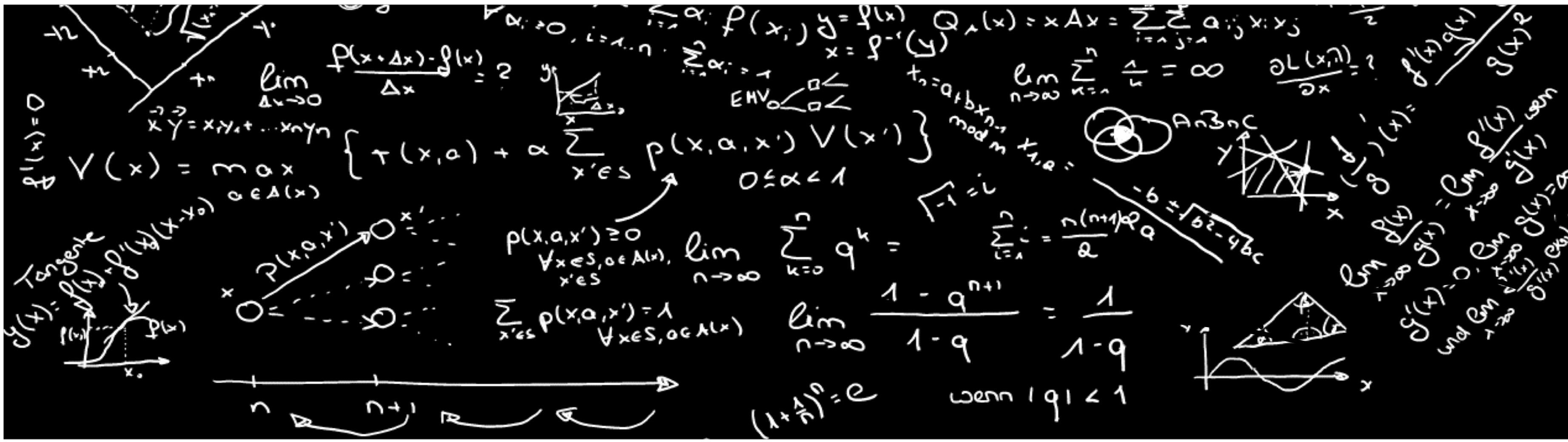
Mathematik II

Lineare Abbildungen

FS 2019



Universität Zürich[UZH]

Prof. Dr. Christiane Barz
Lehrstuhl Mathematik für Wirtschaftswissenschaften (Chair of Mathematics for Business and Economics)

Agenda

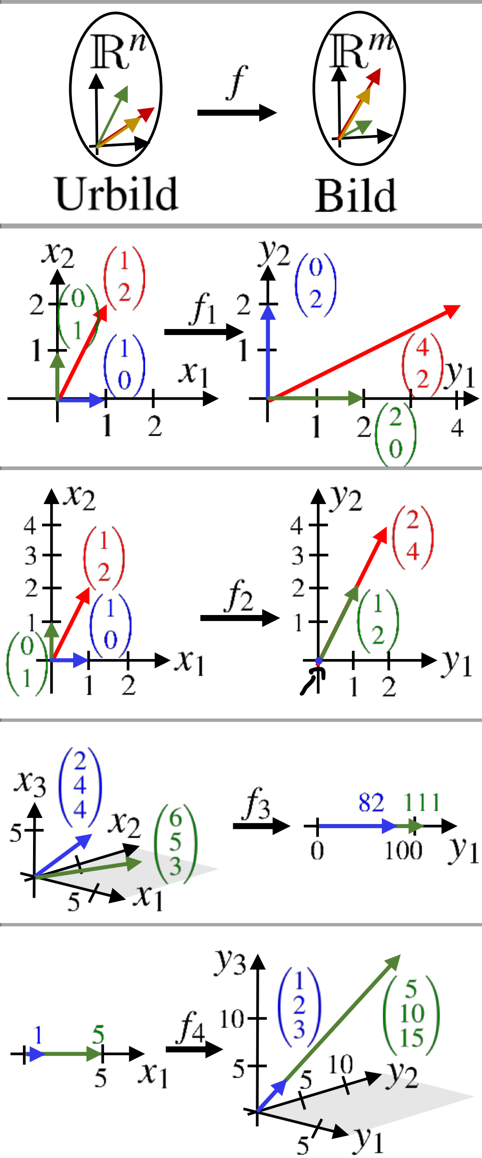
- 10: Optimierungsprobleme mit Nebenbedingungen
- 9: Reelle Funktionen in n Variablen
- 5: Reelle Funktionen
- 8: Lineare Abbildungen
- 4: Folgen
- 7: Lin. Gleichungssysteme
- 3: Relationen und Funktionen
- 6: Linearkombinationen
- 2: Mengen
- 1: Mathematik als

Mathematik 1

Mathematik 2

8.1 Definition und Eigenschaften
8.2 Die Umkehrabbildung und die Inverse
8.3 Determinanten
8.4 Eigenwerte und Eigenvektoren

Die lineare Abbildung



Definition 8.1.1: Die lineare Abbildung

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, die jedem $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ein $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ zuordnet, heisst **linear**, wenn eine $m \times n$-Matrix A existiert mit

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

Beschreibt f vollständig

Beispiele:

- $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f_1(\mathbf{x}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$ tauscht Komponenten und multipliziert mit 2

  $f_1(\vec{e}^1) = f_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{a}^1$, $f_1(\vec{e}^2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{a}^2$

- $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$ ignoriert x_1, ergibt x_2-faches von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

  $f_2(\vec{e}^1) = \vec{0} = \vec{a}^1$ $f_2(\vec{e}^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{a}^2$

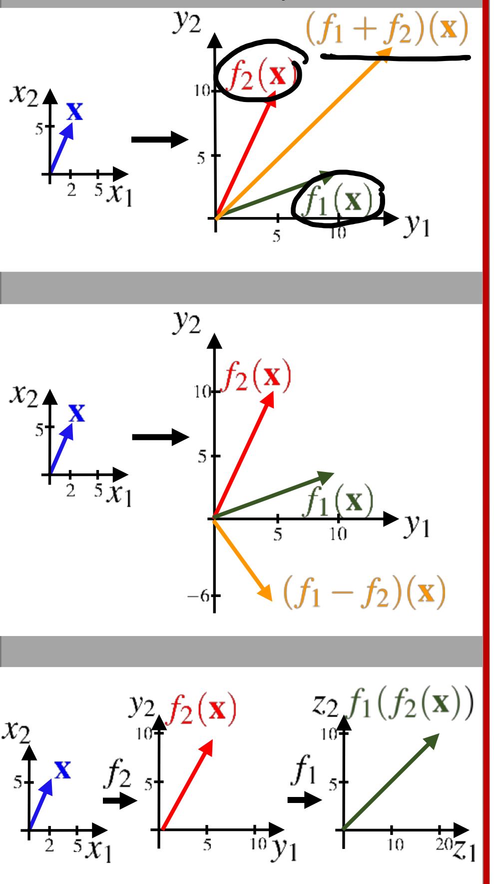
- $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f_3(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 7x_1 + 9x_2 + 8x_3$

  $f_3(\vec{e}^1) = 7$ $f_3(\vec{e}^2) = 9$ $f_3(\vec{e}^3) = 8$

- $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $f_4(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (x_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 3x_1 \end{pmatrix}$

  $f_4(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$



Verknüpfungen

Satz 8.1.3: Verknüpfung linearer Abbildungen

Gegeben sind $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $g(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ und $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$ mit $h(\mathbf{x}) = C\mathbf{x}$, dann gilt:

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$
$A - B = (a_{ij} - b_{ij})$

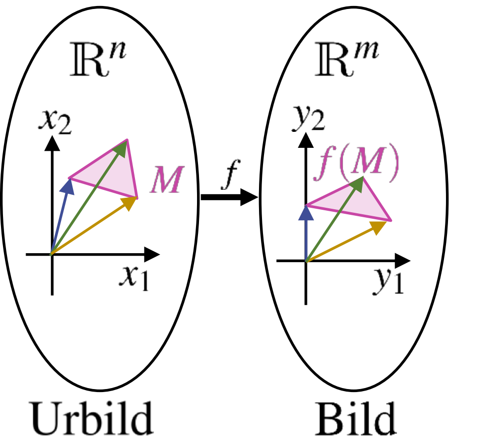
- $f = g \Leftrightarrow A = B$,
- $f + g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist linear mit $(f+g)(\mathbf{x}) = (A+B)\mathbf{x}$,
- $f - g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist linear mit $(f-g)(\mathbf{x}) = (A-B)\mathbf{x}$, und
- $h \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ ist linear mit $(h \circ g)(\mathbf{x}) = h(B\mathbf{x}) = CB\mathbf{x}$.

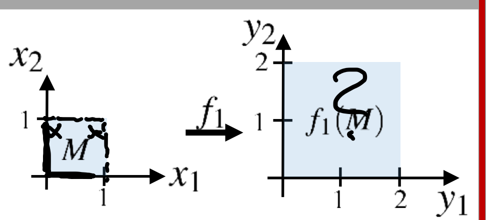
Beispiel:

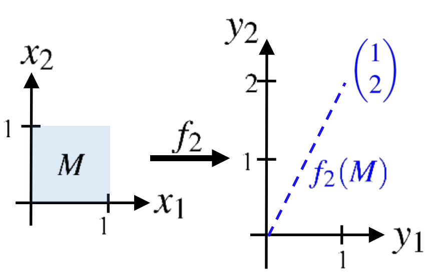
$$f_1(\mathbf{x}) = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix} \qquad f_2(\mathbf{x}) = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}^{B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

- $f_1 \neq f_2$
- $(f_1 + f_2)(\mathbf{x}) = A\vec{x} + B\vec{x} = (A+B)\vec{x} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)\vec{x} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}^{A+B}\vec{x}$
- $(f_1 - f_2)(\mathbf{x}) = A\vec{x} - B\vec{x} = (A-B)\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\vec{x}$
- $(f_1 \circ f_2)(\mathbf{x}) = f_1(\underline{f_2(\mathbf{x})}) = f_1\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\vec{x}\right) = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\vec{x}$

Das Bild







$f(\mathbb{R}^n)$: Bild von f

Definition 8.1.2: Das Bild einer linearen Abbildung

Das Bild von $M \subseteq \mathbb{R}^n$ unter $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist

$$f(M) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \text{ es existiert ein } \mathbf{x} \in M \text{ mit } f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}.$$

Beispiele:

$\underline{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1\}$

- $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}0 & 2\\2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x_2\\2x_1\end{pmatrix}$

$$f_1(M) = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \text{es existiert ein } \mathbf{x} \in M \text{ mit } f_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}2x_2\\2x_1\end{pmatrix} = \mathbf{y}\right\}$$

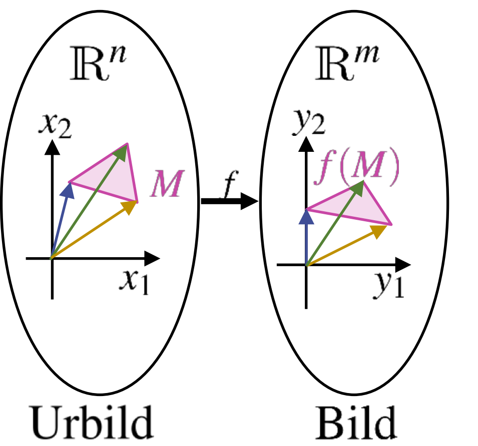
$$= \left\{\begin{pmatrix}2x_2\\2x_1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1\right\}$$

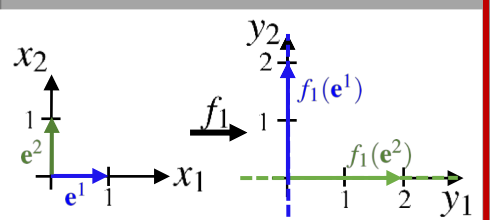
$y_1 = 2x_2$
$y_2 = 2x_1$

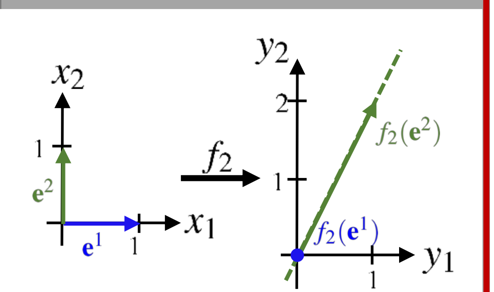
$$= \left\{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le y_1 \le 2, 0 \le y_2 \le 2\right\}$$

- $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2\\2x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x_2$

$$f_2(M) = \left\{\begin{pmatrix}x_2\\2x_2\end{pmatrix} \,\middle|\, 0 \le x_2 \le 1\right\} = \left\{x_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \,\middle|\, 0 \le x_2 \le 1\right\}$$







Das Bild

$f(\mathbb{R}^n)$: Bild von f

Satz 8.1.5: Charakterisierung des Bildes von f

Für $A = [\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n]$ mit $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n \in \mathbb{R}^m$ und $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ gilt:

- $f(\mathbb{R}^n) = \text{lin}\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n\}$;
- $\dim(f(\mathbb{R}^n)) = \text{rang}(A)$.

Beispiele:

- $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$

  $f_1(\mathbb{R}^2) = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$

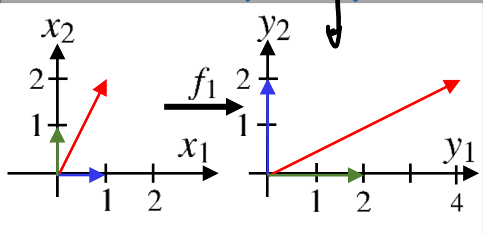
  $\dim(f_1(\mathbb{R}^2)) = 2$

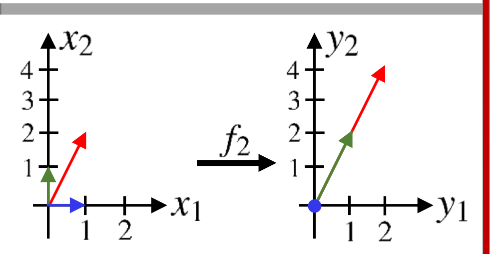
- $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$

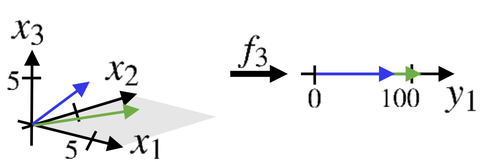
  $f_2(\mathbb{R}^2) = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad \dim(f_2(\mathbb{R}^2)) = 1$

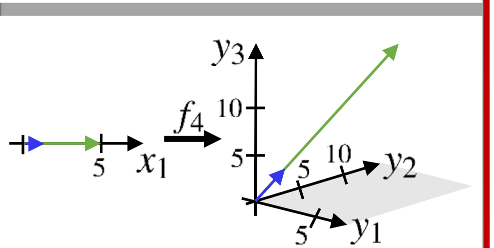
$f_1^{-1}(\vec{y}) = A^{-1}\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\vec{y}$

Existenz der Umkehrabbildung









Satz 8.1.6, Definitionen 8.2.1 – 8.2.2: Umkehrabbildung und Inverse

Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ gilt: A^{-1}

- f surjektiv $\Leftrightarrow$ rang$(A) = m$;
- f injektiv $\Leftrightarrow$ rang$(A) = n$;
- f bijektiv $\Leftrightarrow$ rang$(A) = m = n$.

A regulär

Inverse von A

$y = 5x$ $\quad 5^{-1}$ $\quad x = \frac{1}{5} y$

Dann existiert eine Matrix A^{-1} mit $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.
Die Umkehrabbildung ist $\mathbf{x} = f^{-1}(\mathbf{y}) = \boxed{A^{-1}}\mathbf{y}$.

Beispiele:

lin. unabhängig

- $f_1 : \mathbb{R}^{\boxed{2}} \to \boxed{\mathbb{R}^2}$ mit $f_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\quad$ surjektiv, injektiv $\Big\}$ bijektiv
  rang$(A) = 2$ $\Rightarrow$ $f_1(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$
- $f_2 : \mathbb{R}^{\boxed{2}} \to \mathbb{R}^{\boxed{2}}$ mit $f_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\quad$ nicht surjektiv, nicht injektiv
  rang$(A) = 1$
- $f_3 : \mathbb{R}^{\boxed{3}} \to \mathbb{R}^{\boxed{1}}$ mit $f_3(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad$ surjektiv, nicht injektiv
  rang$(A) = 1$
- $f_4 : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$ mit $f_4(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (x_1)$ $\quad$ nicht surjektiv, injektiv
  rang$(A) = 1$

Berechnung der Inversen

$AA^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

A

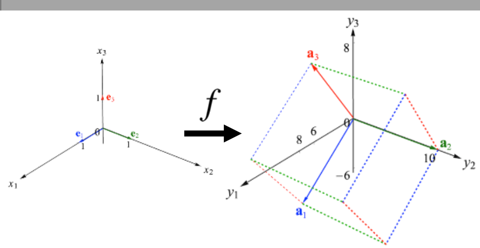
$$\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} \end{pmatrix}$$

A^{-1}

$$\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2 \quad \mathbf{a}^3$$
$$=$$
$$[\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3]$$

$\vec{b}$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



Beispiel:

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 0 \\ -6 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$A\vec{x} = \vec{e}^1$ $\quad A\vec{x} = \vec{e}^2$ $\quad A\vec{x} = \vec{e}^3$

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{e}^1$	$\mathbf{e}^2$	$\mathbf{e}^3$	
(1)	8	0	6	1	0	0	
(2)	0	10	0	0	1	0	
(3)	-6	0	8	0	0	1	
(4)	1	0	$\frac{6}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$ (1)
(5)	0	10	0	0	1	0	(2)
(6)	0	0	$\frac{100}{8}$	$\frac{6}{8}$	0	1	(3) $+\frac{6}{8}$ (1)
(7)	1	0	$\frac{6}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	(4)
(8)	0	1	0	0	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$ (5)
(9)	0	0	$\frac{100}{8}$	$\frac{6}{8}$	0	1	(6)
(10)	1	0	0	$\frac{8}{100}$	0	$-\frac{6}{100}$	(7) $-\frac{6}{100}$ (9)
(11)	0	1	0	0	$\frac{1}{10}$	0	(8)
(12)	0	0	1	$\frac{6}{100}$	0	$\frac{8}{100}$	$\frac{8}{100}$ (9)

A $\quad$ I

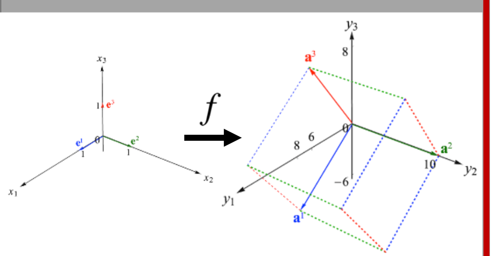
$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{100} & 0 & -\frac{6}{100} \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{6}{100} & 0 & \frac{8}{100} \end{pmatrix}$$

1. Spalte von A^{-1} $\quad$ 2. Spalte von A^{-1} $\quad$ 3. Spalte von A^{-1}

A^{-1}

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}$$



Berechnung der Inversen

$A^{-1}\,|\; A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$

$I\,\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$

$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y}$

Beispiel (fortgesetzt):

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 0 \\ -6 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $= \mathbf{y}$

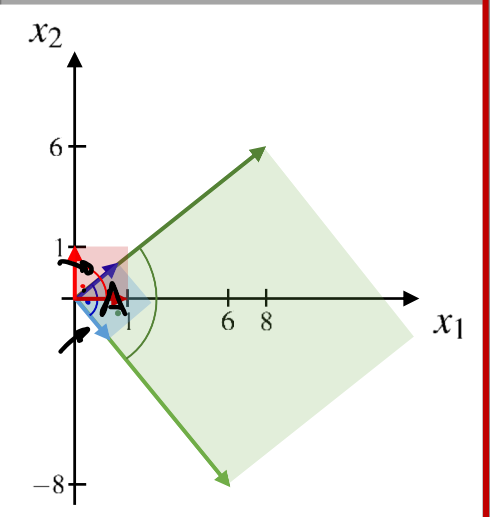
	x_1	x_2	x_3	$y = b$	
(1)	8	0	6	b_1	
(2)	0	10	0	b_2	
(3)	-6	0	8	b_3	
(4)	1	0	$\frac{6}{8}$	$\frac{1}{8}b_1$	$\frac{1}{8}$(1)
(5)	0	10	0	b_2	(2)
(6)	0	0	$\frac{100}{8}$	$\frac{6}{8}b_1 + b_3$	(3)$+\frac{6}{8}$(1)
(7)	1	0	$\frac{6}{8}$	$\frac{1}{8}b_1$	(4)
(8)	0	1	0	$\frac{1}{10}b_2$	$\frac{1}{10}$(5)
(9)	0	0	$\frac{100}{8}$	$\frac{6}{8}b_1 + b_3$	(6)
(10)	1	0	0	$\frac{8}{100}b_1 - \frac{6}{100}b_3$	(7)$-\frac{6}{100}$(9)
(11)	0	1	0	$\frac{1}{10}b_2$	(8)
(12)	0	0	1	$\frac{6}{100}b_1 + \frac{8}{100}b_3$	$\frac{8}{100}$(9)

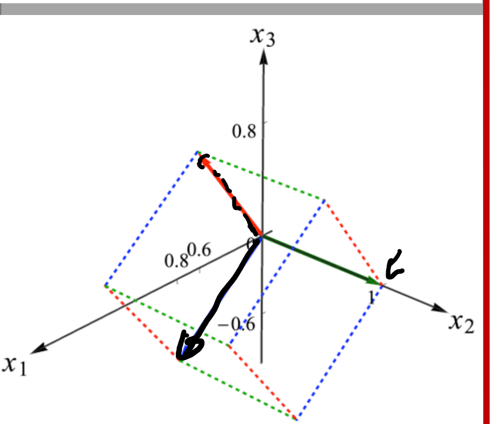
$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{100} & 0 & -\frac{6}{100} \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{6}{100} & 0 & \frac{8}{100} \end{pmatrix}$$

$A\vec{x} = \vec{b}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{8}{100}b_1 - \frac{6}{100}b_3 \\ \frac{1}{10}b_2 \\ \frac{6}{100}b_1 + \frac{8}{100}b_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{8}{100} \\ 0 \\ \frac{6}{100} \end{pmatrix}\underset{y_1}{b_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \\ 0 \end{pmatrix}\underset{y_2}{b_2} + \begin{pmatrix} -\frac{6}{100} \\ 0 \\ \frac{8}{100} \end{pmatrix}\underset{y_3}{b_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{8}{100} & 0 & -\frac{6}{100} \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{6}{100} & 0 & \frac{8}{100} \end{pmatrix}}_{A^{-1}}\mathbf{b} \;(= \vec{y})$$





Orthogonale Matrizen

Definition 8.2.3 und Satz 8.2.3: Orthogonale Matrizen

$A = [\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n]$ mit Zeilenvektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ ist orthogonal

$\Leftrightarrow$ $A^{-1} = A^T$, d.h. $AA^T = I$;

$\Leftrightarrow$ $\boxed{(\mathbf{a}^i)^T \mathbf{a}^i = 1}$ für alle i und $\boxed{(\mathbf{a}^i)^T \mathbf{a}^j = 0}$ für alle $i \neq j$;

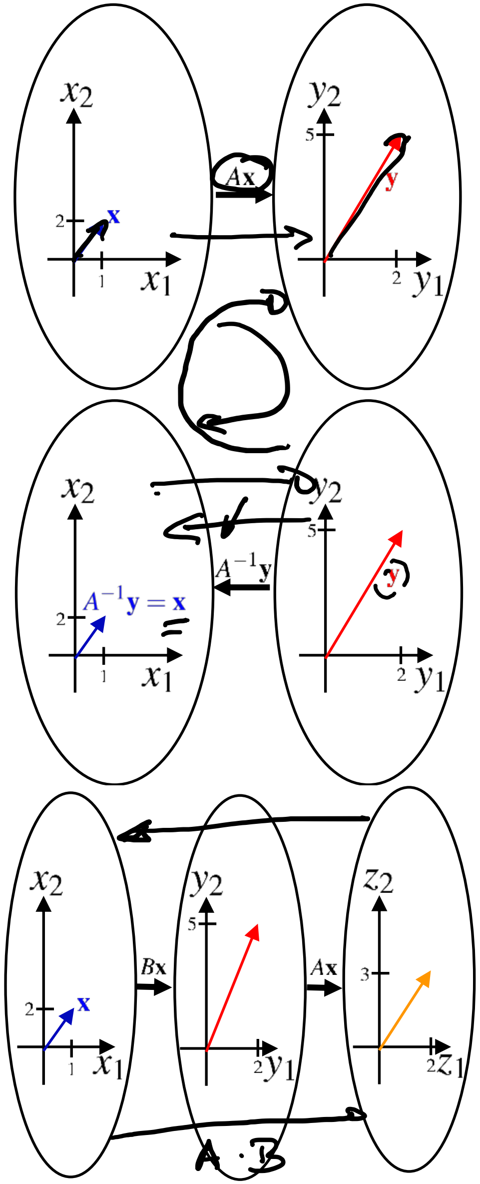
$\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T = 1$ für alle i und $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j^T = 0$ für alle $i \neq j$;

$\Leftrightarrow$ A^T ist orthogonal.

Beispiele:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix}} \cdot \underset{A^T}{\begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \checkmark \text{ orthogonal}$$

- $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$ nicht orthogonal
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ orthogonale Matrix
- $\begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.6 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$ orthogonale Matrix



Rechenregeln für inverse Matrizen

Satz 8.2.5: Rechenregeln invertierbarer Matrizen

Sind A und B reguläre Matrizen der Ordnung n, dann gilt: $\alpha \in \mathbb{R}$

- $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$;
- $(A^{-1})^{-1} = A$;
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
- $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$, falls $\alpha \neq 0$;
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Beispiel (fortgesetzt):

orthogonale Matrix

- $$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 0 \\ -6 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.6 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

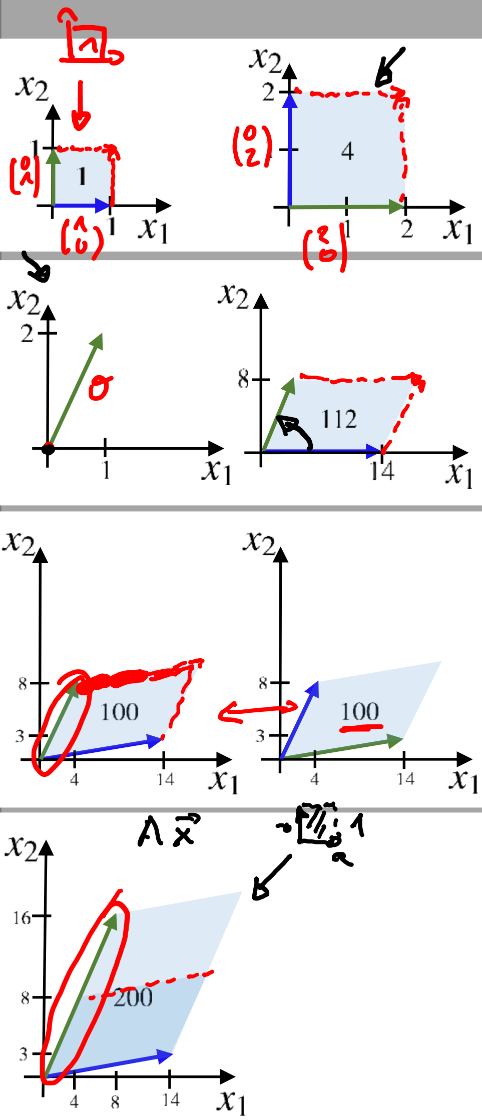
$$A^{-1} = \left(\underset{\alpha =}{10} \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.6 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.6 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.6 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}^{T} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & -0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.08 & 0 & -0.06 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0.06 & 0 & 0.08 \end{pmatrix}$$

Determinante *2 x 2*

Betragsmässig gleich der Fläche des durch $\mathbf{a}^1$ und $\mathbf{a}^2$ aufgespannten Parallelogramms



Definition 8.3.1: Determinante einer 2x2-Matrix

Die Determinante einer 2×2-Matrix A ist

$$\det A = \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Beispiele:

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$
- $\det \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = 14 \cdot 8 - 3 \cdot 4 = \underline{100}$
- $\det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 - 2 \cdot 2 = \underline{-4}$
- $\det \begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot 3 - 14 \cdot 8 = -100$
- $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot 2 - 1 \cdot 0 = \underline{0}$
- $\det \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 3 & \underline{16} \end{pmatrix} = 200$
- $\det \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 14 \cdot 8 - 0 \cdot 4 = 112.$

Satz 8.3.6: Flächenveränderung (Teil 1)

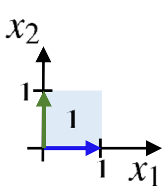
Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Fläche $\mathrm{Vol}(M)$, dann gilt $\mathrm{Vol}(f(M)) = |\det(A)| \cdot \mathrm{Vol}(M)$.

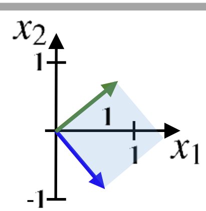
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

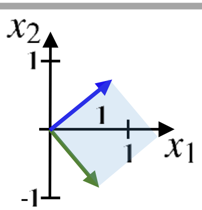
$$= -\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\det\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22}$$







Determinante *2 x 2*

Satz 8.3.1: Eigenschaften der Determinante einer 2x2-Matrix

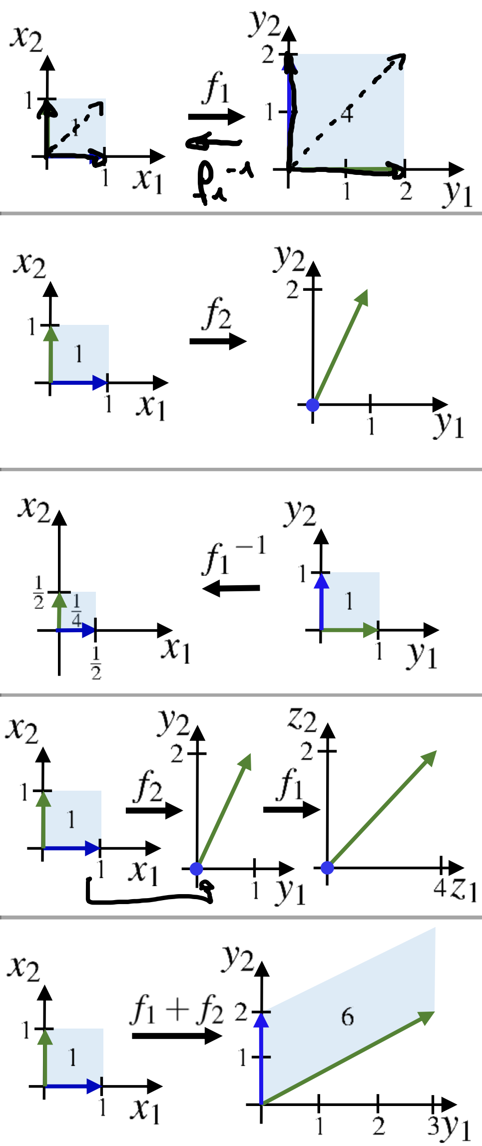
Für eine 2×2-Matrix A und $\alpha \neq 0$ gilt:

- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \underline{\mathrm{rang}(A) < 2}$;
- Vertauscht man zwei Spalten, so ändert sich das Vorzeichen, aber nicht der Betrag der Determinante;
- Ver-α-facht man eine Spalte, ver-α-facht sich die Determinante;
- Sind alle Elemente unter der Hauptdiagonalen von A gleich 0, dann gilt $\det(A) = a_{11}a_{22}$.
- Ist A orthogonal, dann ist $\underline{|\det(A)| = 1}$.

Beispiele: orthogonale Matrizen

- $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$
- $\det\begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix} = 0.6 \cdot 0.6 - (-0.8) \cdot 0.8 = 1$
- $\det\begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.6 & -0.8 \end{pmatrix} = 0.8 \cdot (-0.8) - 0.6 \cdot 0.6 = -1$

Determinante *2 x 2*



Beispiele:

$f_1(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \det(A) = -4$

$f_2(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ mit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \det(B) = 0$

- $f_1^{-1}(\mathbf{y}) = A^{-1}\mathbf{y}$ mit $\det(A^{-1}) = \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} = \frac{1}{\det(A)}$

  A·B

- $f_1(f_2(\mathbf{x})) = AB\mathbf{x}$ mit $\det(AB) = \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0$

- $(f_1 + f_2)(\mathbf{x}) = (A + B)\mathbf{x}$ mit $\det(A + B) = \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -6$

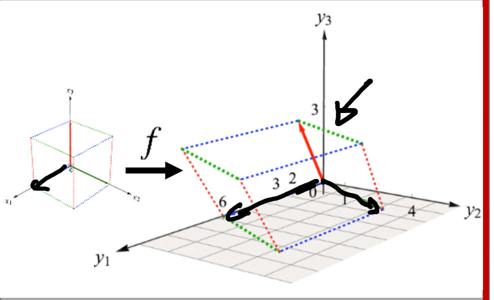
  $\neq \det(A) + \det(B) = -4$

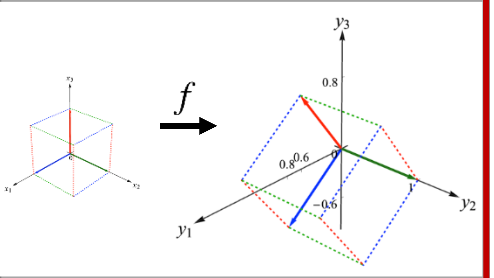
Satz 8.3.7: Weitere Eigenschaften von Determinanten

Sind A und B zwei 2×2-Matrizen, dann gilt:

- Ist $\det(A) \neq 0$, dann ist A invertierbar und $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$;
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Determinante *3 x 3*





Satz 8.3.6: Volumenveränderung (Teil 2)

Ist $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^3$ mit Volumen $\mathrm{Vol}(M)$, dann gilt $\mathrm{Vol}(f(M)) = |\det(A)| \cdot \mathrm{Vol}(M)$.

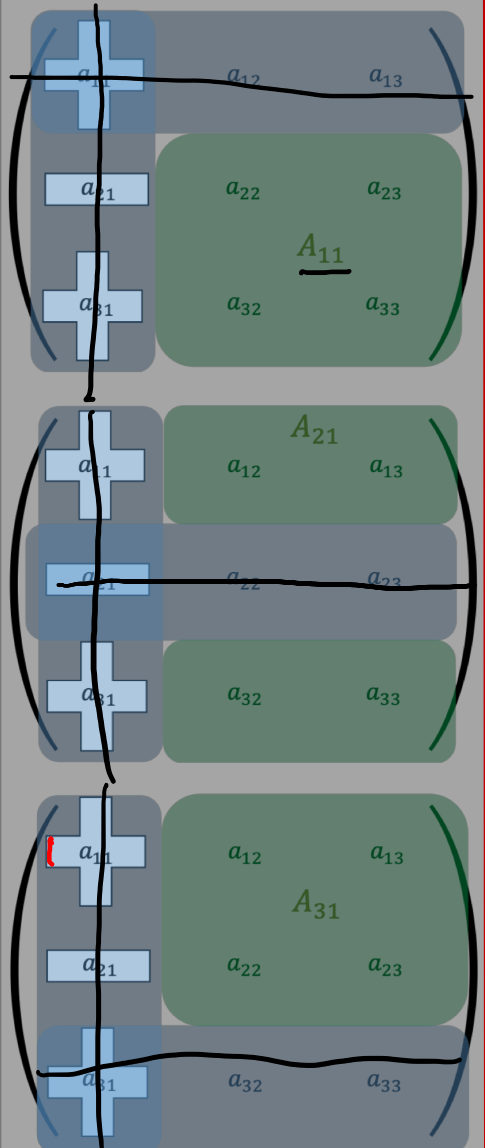
Beispiele:

- $\det\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 6 \cdot 4 \cdot 3 = 72$

"gefühlt"

orthogonale Matrix

- $\det\begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.6 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} = 1$



Determinante *n x n*

det $A = \det(A) = |A|$

Definition 8.3.2: Determinante

Die Determinante einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij})$ der Ordnung n ist induktiv wie folgt definiert:

- Für $n = 1$: $\det(A) = a_{11}$. ($A = (a_{11})$)
- Für $n = 2$: $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
- Für $n > 2$: Sei A_{ij} die Matrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A entsteht:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \boxed{(-1)^{i+1}} \det(A_{i1})$$

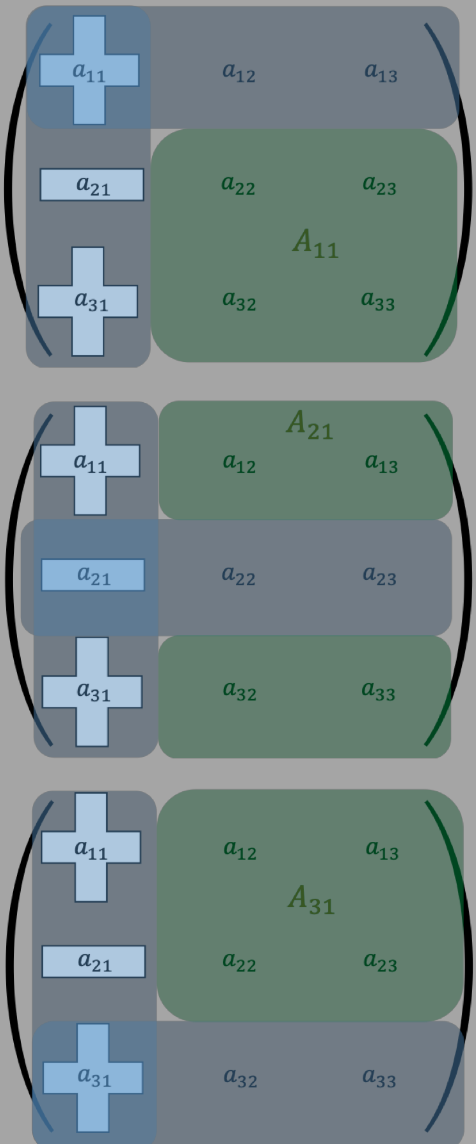
Beispiel: $j=1$

- $\det \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.6 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$

$= +0.8 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}}_{A_{11}} - 0 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0.6 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}}_{A_{21}} + (-0.6) \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0.6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{31}}$

$= 0.8 \cdot (1 \cdot 0.8 - 0) - 0 \cdot (0 \cdot 0.8 - 0 \cdot 0.6) - 0.6\,(0 \cdot 0 - 1 \cdot 0.6)$

$= 1$



Determinante *n x n*: Beispiel

$$\det\begin{pmatrix} 6 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 36 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 6\det\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A_{11}} - 0\det\overbrace{\begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^{A_{21}} + 36\det\overbrace{\begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^{A_{31}} - 0\det\overbrace{\begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A_{41}}$$

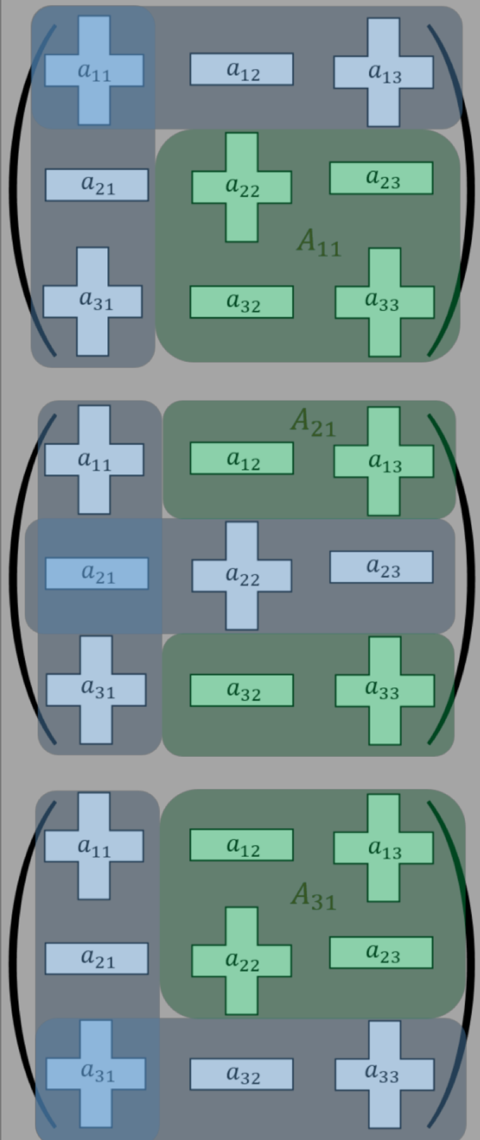
$$= 6\left(0\det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 0\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) - 0$$

$$+ 36\left((-5)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 0\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 0\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) - 0$$

$$= 6\,(0 - 2\cdot(1\cdot 1 - 2\cdot 1) + 0) + 36\,((-5)(1\cdot 1 - 2\cdot 1) - 0 + 0)$$

$$= 6\,(-2\cdot(-1)) + 36\,((-5)(-1))$$

$$= 12 + 180 = 192$$



Determinante *n x n*

Satz 8.3.2: Entwicklungssatz für Determinanten

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}), \qquad j \in \{1,\ldots,n\};$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}), \qquad i \in \{1,\ldots,n\}.$$

Beispiel:

$= -1 \cdot \det\begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \\ 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

$j=2$

- $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 9 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = 1(-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \\ 9 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{-\det\begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \\ 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}}$

$i=2$

$$= -8(-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \qquad = 8\det\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= 8\,(6\cdot 5 - 3\cdot 9) \qquad = 8\cdot 3 = 24$$

Determinante *n x n*

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha}\det\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}\right| = a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$$

Sätze 8.3.3, 8.3.7: Eigenschaften der Determinante

Seien A und B quadratische Matrizen der Ordnung n, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{rang}(A) < n$;
- Vertauscht man zwei Spalten, so ändert sich das Vorzeichen, aber nicht der Betrag der Determinante;
- Ver-α-facht man eine Spalte, ver-α-facht sich die Determinante;
- Sind alle Elemente unter der Hauptdiagonalen von A gleich 0, dann gilt $\det(A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$;
- Ist A orthogonal, dann ist $|\det(A)| = 1$;
- Ist $\det(A) \neq 0$, dann ist A invertierbar und $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$;
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Beispiele:

- $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 9 & \frac{9}{2} & 5 & 3 \end{pmatrix} = 0$; • $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2\cdot 9\cdot 5\cdot 3 = 270$

Die Determinante und die eindeutige Lösbarkeit eines LGS

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\boxed{\det(A) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) < n}$

LGS homogen

- $\vec{x} = \vec{0}$ einzige Lösung wenn $\det(A) \neq 0$
- Es gibt Lösungen $\vec{x} \neq \vec{0}$, wenn $\det(A) = 0$

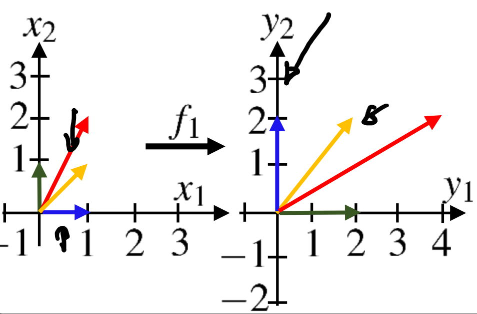
Lineares Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

- homogen ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$) $A\vec{x} = \vec{0}$
  - lösbar da $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A \mid \mathbf{0})$

    lineares Lösungsraum
    - eine Lösung wenn $\operatorname{rang}(A) = n$ bzw. wenn $\det(A) \neq 0$
    - unendlich viele Lösungen wenn $\operatorname{rang}(A) < n$ bzw. wenn $\det(A) = 0$
- inhomogen ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$)
  - lösbar wenn $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A \mid \mathbf{b})$

    Lösungsmenge ist ein affiner Raum
    - eine Lösung wenn $\operatorname{rang}(A) = n$ bzw. wenn $\det(A) \neq 0$
    - unendlich viele Lösungen wenn $\operatorname{rang}(A) < n$ bzw. wenn $\det(A) = 0$
  - unlösbar wenn $\operatorname{rang}(A) < \operatorname{rang}(A \mid \mathbf{b})$

wenn A quadratisch



Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 8.4.1: Eigenwert und Eigenvektor

Sei A eine $n \times n$-Matrix, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ mit

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}.$$

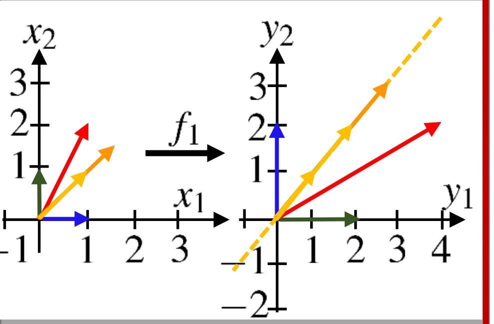
(reeller) Eigenwert von A

(reeller) Eigenvektor von A

Beispiel:

- $\mathbf{y} = f_1(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
  - für $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\mathbf{y} = A\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist kein Vielfaches von $\mathbf{x}^1$
  - für $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\mathbf{y} = A\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist kein Vielfaches von $\mathbf{x}^2$
  - für $\mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\mathbf{y} = A\mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist ein Vielfaches von $\mathbf{x}^3$ — $A\mathbf{x}^3 = 2\mathbf{x}^3$
  - für $\mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$: $\mathbf{y} = A\mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist kein Vielfaches von $\mathbf{x}^4$

Eigenschaften von Eigenvektoren



Satz 8.4.1: Eigenschaften von Eigenvektoren

Für jeden Eigenvektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ zum Eigenwert λ von A ist auch $\alpha\mathbf{v}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von A.

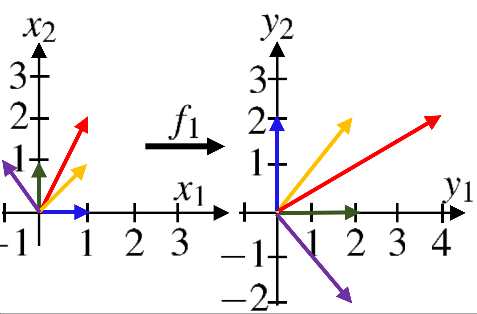
Beispiel:

- $\mathbf{y} = f_1(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

  $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$.

  $\Rightarrow$ auch $1.5\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$.

Bestimmung von Eigenvektoren



$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

$A\vec{v} - \lambda I\vec{v} = \vec{0}$

$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$

Eigenvektorbestimmung

1. Berechne $\det(A - \lambda I)$

2. Finde alle $\lambda \in \mathbb{R}$: $\det(A - \lambda I) = 0$

3. Zu jedem λ: Löse $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. $\Rightarrow \mathbf{v} \in \mathbb{L} \setminus \{\mathbf{0}\}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ

Satz 8.4.2: Bestimmung von Eigenwerten

Für Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ und Eigenvektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ gilt

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \qquad \text{bzw.} \qquad \boxed{(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}.}$$

Gegeben λ ist $\mathbf{v}$ Lösung eines homogenen LGS.

Dieses LGS hat Lösungen $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$.

λ und $\vec{v}$ unbekannt

Beispiel:

- $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$ bzw. $\underbrace{\begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix}}_{A-\lambda I}\boxed{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$

$$2v_2 = \lambda v_1 \qquad\qquad -\lambda v_1 + 2v_2 = 0$$
$$\text{bzw.}$$
$$2v_1 = \lambda v_2 \qquad\qquad 2v_1 - \lambda v_2 = 0$$

$A\cdot\vec{v}^2 = -2\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

1. $\det\begin{pmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 2 & 0-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$

2. $\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$

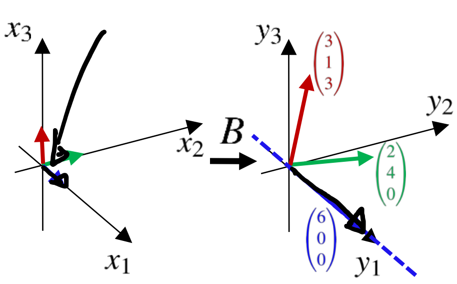
3. • $\lambda_1 = 2$: $A\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} -2v_1 + 2v_2 &= 0 \\ 2v_1 - 2v_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{mit } \mathbb{L} = \left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \quad \Rightarrow \text{z.B. } \mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• $\lambda_2 = -2$: $A\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} 2v_1 + 2v_2 &= 0 \\ 2v_1 + 2v_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{mit } \mathbb{L} = \left\{ t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \quad \Rightarrow \text{z.B. } \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmung von Eigenvektoren: Beispiel 1



- $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow B - \lambda I = \begin{pmatrix} 6-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

1. $\det \begin{pmatrix} 6-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \underbrace{(6-\lambda)}_{=0}\underbrace{(4-\lambda)}\underbrace{(3-\lambda)}$

2. $\Rightarrow \lambda_1 = 6, \lambda_2 = 4, \boxed{\lambda_3 = 3}$

3.
   - $\lambda_1 = 6$:

     $(B-6I)\mathbf{v}^1 = \mathbf{0}$ mit $\mathbb{L} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$ $\Rightarrow$ z.B. $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   - $\boxed{\lambda_2 = 4 :}$ $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $=$

     $\boxed{(B-4I)}\mathbf{v}^2 = \mathbf{0}$ mit $\mathbb{L} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$ $\Rightarrow$ z.B. $\mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   - $\lambda_3 = 3$:

     $\boxed{(B-3I)\mathbf{v}^3 = \mathbf{0}}$ mit $\mathbb{L} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$ $\Rightarrow$ z.B. $\mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

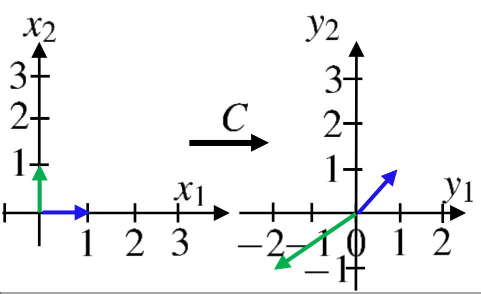
Eigenvektorbestimmung

1. Berechne $\det(A - \lambda I)$

2. Finde alle $\lambda \in \mathbb{R}$: $\det(A - \lambda I) = 0$

3. Zu jedem λ: Löse $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. $\Rightarrow \mathbf{v} \in \mathbb{L} \setminus \{\mathbf{0}\}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ

Bestimmung von Eigenvektoren: Beispiel 2



- $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$C - \lambda I$

1. $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$

2. Kein reeller Eigenwert.

Eigenvektorbestimmung

1. Berechne $\det(A - \lambda I)$

2. Finde alle $\lambda \in \mathbb{R}$: $\det(A - \lambda I) = 0$

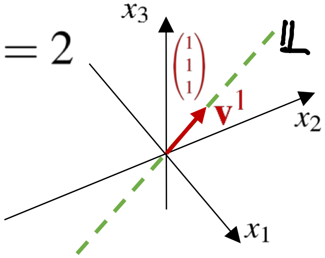
3. Zu jedem λ: Löse $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. $\Rightarrow \mathbf{v} \in \mathbb{L} \setminus \{\mathbf{0}\}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ

Satz 8.4.3: Eigenwerte und Eigenvektoren symmetischer Matrizen

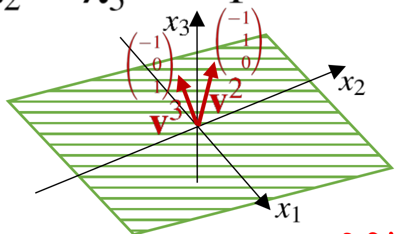
Eine (reelle) symmetrische $n \times n$-Matrix A hat n reelle, linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^n$ zu Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Bestimmung von Eigenvektoren: Beispiel 3

$\lambda_1 = 2$



$\lambda_2 = \lambda_3 = -1$



Eigenvektorbestimmung

1. Berechne $\det(A - \lambda I)$ $\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$

2. Finde alle $\lambda \in \mathbb{R}$: $\det(A - \lambda I) = 0$

3. Zu jedem λ: Löse $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. $\Rightarrow \mathbf{v} \in \mathbb{L} \setminus \{\mathbf{0}\}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ $\vec{v} \neq \vec{0}$

- $D = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ $D - \lambda I = \begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{pmatrix}$

1. $\det\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -\underbrace{(\lambda-2)}_{=0 \Leftrightarrow \lambda = 2}\overbrace{(\lambda+1)^2}^{=0 \Leftrightarrow \lambda = -1}$

2. $\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1$

3. • $\lambda_1 = 2$:

$(D - 2I)\mathbf{v}^1 = \mathbf{0}$ mit $\mathbb{L} = \left\{ t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$ $\vec{v} \in \mathbb{L}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ $\Rightarrow$ z.B. $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

• $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$: $D - \lambda I = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

$(D + I)\mathbf{v}^2 = \mathbf{0}$ mit $\mathbb{L} = \left\{ t_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$

$\Rightarrow$ z.B. $\mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

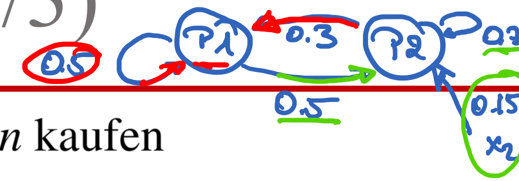
-1 ist doppelter Eigenwert von D

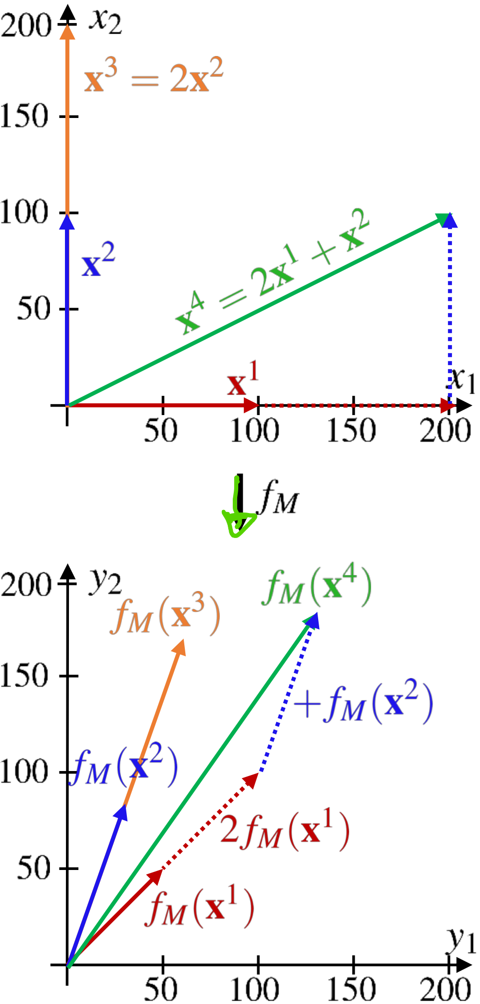
2 ist einfacher Eigenwert von D

Definition 8.4.3: ℓ**-facher Eigenwert**

Sei A eine $n \times n$-Matrix mit n linear unabhängigen Eigenvektoren. Einen Eigenwert λ von A, zu dem es $\ell \leq n$ linear unabhängige Eigenvektoren gibt, nennt man ℓ-fachen Eigenwert von A.

Beispiel: Marktanteil (1/3)





Markt mit 2 Produkten P1 und P2. In Periode n kaufen

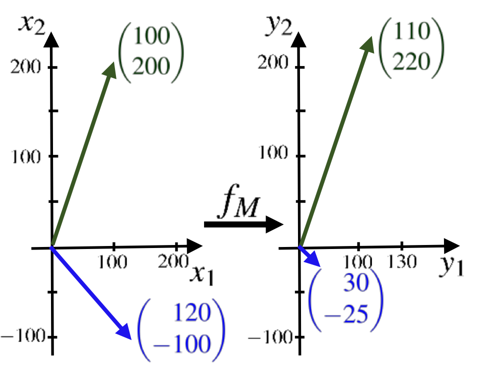
- x_1 Kunden P1. In Periode $n+1$ kaufen 50% von ihnen P1, 50% P2.
- x_2 Kunden P2. In Periode $n+1$ kaufen 30% von ihnen P1, 70% P2.
- Zusätzlich: $0.15x_2$ Neukunden für P2 in Periode $n+1$
- $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$: Anzahl an Kunden in Periode n
  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$: Anzahl an Kunden in Periode $n+1$

$$\Rightarrow \boxed{y_1} = 0.5x_1 + 0.3x_2, \quad \boxed{y_2} = 0.5x_1 + 0.7x_2 + 0.15x_2 = 0.5x_1 + 0.85x_2$$

$$f_M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } \mathbf{y} = f_M(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0.85 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

- für $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\quad f_M(\mathbf{x}^1) = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}$
- für $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix}$: $\quad f_M(\mathbf{x}^2) = \begin{pmatrix} 30 \\ 85 \end{pmatrix}$
- für $\mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 200 \end{pmatrix}$: $\quad f_M(\mathbf{x}^3) = \begin{pmatrix} 60 \\ 170 \end{pmatrix} = 2 \cdot f_M(\mathbf{x}^2)$
  $= 2\vec{x}^2$
- für $\mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$: $\quad f_M(\mathbf{x}^4) = \begin{pmatrix} 130 \\ 185 \end{pmatrix} = 2 \cdot f_M(\mathbf{x}^1) + f_M(\mathbf{x}^2)$
  $= 2\vec{x}^1 + \vec{x}^2$

Beispiel: Marktanteil (2/3)



- Eigenwerte und Eigenvektoren von $M = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.30 \\ 0.50 & 0.85 \end{pmatrix}$

1. $\det \overbrace{\begin{pmatrix} 0.50-\lambda & 0.30 \\ 0.50 & 0.85-\lambda \end{pmatrix}}^{M - I\lambda} = (0.50-\lambda)(0.85-\lambda) - 0.15$
   $= \lambda^2 - 1.35\lambda + 0.275$

2. $\lambda^2 - 1.35\lambda + 0.275 = 0$
   $\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1.35 \pm \sqrt{1.35^2 - 4(0.275)}}{2} = \frac{1.35 \pm 0.85}{2}$
   $\Leftrightarrow \lambda_1 = 0.25, \lambda_2 = 1.1$

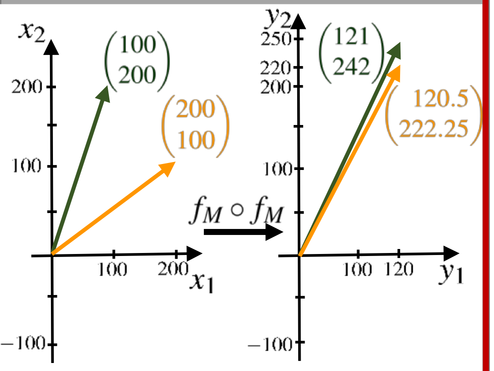
3. - $\lambda_1 = 0.25$:
     $\begin{pmatrix} 0.25 & 0.30 \\ 0.50 & 0.60 \end{pmatrix} \mathbf{v}^1 = \mathbf{0}$ mit $\mathbb{L} = \left\{ t \begin{pmatrix} -1.2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$
     $\Rightarrow$ z.B. $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 120 \\ -100 \end{pmatrix}$
   - $\lambda_2 = 1.1$:
     $\begin{pmatrix} -0.60 & 0.30 \\ 0.50 & -0.25 \end{pmatrix} \mathbf{v}^2 = \mathbf{0}$ mit $\mathbb{L} = \left\{ t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$
     $\Rightarrow$ z.B. $\mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$

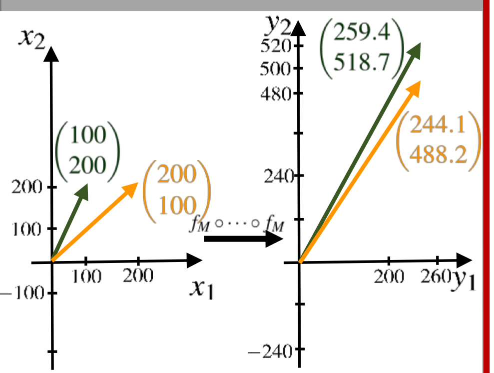
Eigenvektorbestimmung

1. Berechne $\det(A - \lambda I)$

2. Finde alle $\lambda \in \mathbb{R}$: $\det(A - \lambda I) = 0$

3. Zu jedem λ: Löse $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. $\Rightarrow \mathbf{v} \in \mathbb{L} \setminus \{\mathbf{0}\}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ





Beispiel: Marktanteil (3/3)

$\vec{y} = m\vec{x}$ $\quad m \cdot m\vec{x}$

- $f_M \circ f_M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{y} = M^2\mathbf{x}$, wobei $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.30 \\ 0.50 & 0.85 \end{pmatrix}}$

  $m \cdot (m \cdot \vec{x}^4)$ $\quad n+2$

  - für $\mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$: $M^2\mathbf{x}^4 = M \underbrace{\begin{pmatrix} 130 \\ 185 \end{pmatrix}}_{M\vec{v}^2} = \boxed{\begin{pmatrix} 120.5 \\ 222.25 \end{pmatrix}}$
  - für $\mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$: $M^2\mathbf{v}^2 = \boxed{(1.1)}\, (1.1) \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 121 \\ 242 \end{pmatrix}$

    $M\cdot$ $\quad$ EV

- $\underbrace{f_M \circ \cdots \circ f_M}_{10\times} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{y} = M^{10}\mathbf{x}$, wobei $M = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.30 \\ 0.50 & 0.85 \end{pmatrix}$
  - für $\mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$: $M^{10}\mathbf{x}^4 = M^9 \begin{pmatrix} 130 \\ 185 \end{pmatrix} = M^8 \begin{pmatrix} 120.5 \\ 222.25 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 244.1 \\ 488.2 \end{pmatrix}$
  - für $\mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$: $M^{10}\mathbf{v}^2 = \overbrace{M^9 (1.1) \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}}^{M\vec{v}^2} = \overbrace{M^8 (1.1)^2 \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}}^{M\cdot(1.1\vec{v}^2)}$

$$= (1.1)^{10} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 259.4 \\ 518.7 \end{pmatrix}$$

Ein (unvollständiger) Rückblick

- Eine quadratische Matrix hat genau dann eine Inverse, wenn sie vollen Rang hat.
- Die Umkehrabbildung einer linearen Abbildung mit Abbildungsmatrix A, also mit $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, ist (im Falle ihrer Existenz) durch $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$ gegeben, wobei A^{-1} die Inverse von A ist.
- Die Determinante ist eine Kennzahl einer quadratischen Matrix, welche man als einen verallgemeinerten Volumenbegriff verstehen kann. Sie kann durch eine sogenannte Entwicklung nach beliebigen Zeilen oder Spalten mithilfe der Formel der Determinante einer 2×2-Matrix berechnet werden.
- Die Determinante einer quadratischen Matrix ist genau dann ungleich 0, wenn sie vollen Rang hat.
- Ein Eigenvektor $\mathbf{v}^i$ einer quadratischen Matrix A wird durch die lineare Abbildung mit Abbildungsmatrix A stets auf ein Vielfaches $\lambda_i \mathbf{v}^i$ von sich selbst abgebildet. Den Faktor λ_i nennt man Eigenwert der Matrix.
- Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren $\mathbf{v}^i$ kann man wie folgt bestimmen: 1&2) Löse $\det(A - \lambda I) = 0$ nach λ auf, um λ_is zu finden. 3) Für gegebenes λ_i, finde $\mathbf{v}^i$ mit $A\mathbf{v}^i = \lambda_i \mathbf{v}^i$.
- Eine symmetrische $n \times n$ Matrix hat stets n reelle Eigenwerte.