Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät der Universität Zürich
Institut für Operations Research und Mathematische Methoden

Prüfung zur Vorlesung Mathematik II Frühjahrssemester 2009
Musterlösungen

5. Juni 2009

AUFGABE 1

Teil 1

(i) a) $$\boxed{MN\underline{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

M ist eine (3×3)-Matrix, N ist eine (3×2)-Matrix und $\underline{u}$ ist ein Vektor $\in \mathbb{R}^2$, d.h. eine (2×1)-Matrix. Daher ist das Ergebnis eine (3×1)-Matrix, d.h. ein Vektor $\in \mathbb{R}^3$.

b) $$\boxed{N^\mathsf{T} N = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

Eine Matrix lässt sich immer mit ihrer Transponierten multiplizieren. N^T ist eine (2×3)-Matrix und $N^\mathsf{T} N$ ist somit eine (2×2)-Matrix.

(ii) $$\boxed{X = P^{-1}Q^{-1}RQ^{-1}}$$

$PXQ = Q^{-1}R \Leftrightarrow P^{-1}(PXQ)Q^{-1} = P^{-1}(Q^{-1}R)Q^{-1}$

$$\boxed{Y^{-1} = R^{-1}Q^{-1}P}$$

$PY = QR \Leftrightarrow P^{-1}PY = P^{-1}QR \Leftrightarrow Y = P^{-1}QR$
Da P, Q und R invertierbar sind, ist P^{-1} und damit auch Y invertierbar.
$\Rightarrow Y^{-1} = (P^{-1}QR)^{-1} = R^{-1}Q^{-1}P$

Teil 2

(i) Wir berechnen die Inverse von C mit dem Gauss-Algorithmus.

$$\begin{array}{ccc|ccc|l}
2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & :2 \\
0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & +4Z_3 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & \cdot(-1) \\
\hline
1 & -2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & +2Z_2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1/2 & 2 & 8 & \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 &
\end{array}
\qquad \Longrightarrow \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis kann nachgeprüft werden indem man zeigt, dass $CC^{-1} = I$.

(ii) a) A ist eine (3×5)-Matrix und B eine (3×3)-Matrix. Also ist die Matrix BA eine (3×5)-Matrix. Daraus folgt, dass das LGS $BA\underline{x} = \underline{0}$ $m = 3$ Gleichungen und $n = 5$ Unbekannte hat, d.h. $\underline{x} \in \mathbb{R}^5$.

b) Ausgehend von $\dim L = 2$ und der Gleichung $\dim L = n - r(BA)$ folgt, dass $2 = 5 - r(BA)$ und somit $r(BA) = 3$. Daher ist $BA\underline{x} = \underline{b}$ für jede rechte Seite lösbar, denn BA hat vollen Zeilenrang.

c) Da B regulär ist und $\underline{x}$ das LGS $BA\underline{x} = \underline{0}$ löst, löst $\underline{x}$ auch das LGS $B^{-1}BA\underline{x} = B^{-1}\underline{0}$, also $A\underline{x} = \underline{0}$. Daher gilt $r(A) = n - \dim L = 5 - 2 = 3$.

AUFGABE 2
Teil 1

(i) Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+s \end{pmatrix}$, $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ und $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$,

dann lässt sich das LGS schreiben als $A\underline{x} = \underline{b}$.

(a) $\boxed{s = -1}$

Für $s = -1$ hat das LGS keine Lösung, da für diesen Wert die dritte Gleichung $0 = -6$ ergibt, was ein Widerspruch ist.

(b) $\boxed{\text{nicht möglich}}$

Für $s \neq -1$ hat die Matrix A vollen Zeilenrang, d.h. $r(A) = 3$. Daraus folgt, dass die Lösungsmenge nicht die Dimension 2 haben kann, denn $\dim L = n - r(A) = 4 - 3 = 1$.

(c) $\boxed{s \neq -1}$

(ii) $$\boxed{\underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}}$$

Aus der dritten Gleichung folgt $x_4 = -2$.
Aus der zweiten Gleichung folgt $x_3 = t$ und $x_2 = 1 - 2t$ mit $t \in \mathbb{R}$.
Aus der erste Gleichung folgt $x_1 = 3 - 3t$.

Teil 2

Sei A die Matrix, deren Spalten die Vektoren von X sind. Dann ist A^T die Matrix, deren Zeilen die Vektoren von X sind.

(i) *Variante 1 (über $r(A)$):*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{cccc|l} 1 & -1 & 1 & 1 & \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -Z_1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -Z_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & +Z_1 - Z_3 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \end{array} \implies r(A) = 3$$

Die Basis B muss also aus drei linear unabhängigen Vektoren bestehen, zum Beispiel die ersten drei

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Variante 2 (über $r(A^\mathsf{T})$):

$$A^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & \\ -1 & -1 & 0 & 1 & +Z_1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -Z_1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -Z_1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & +Z_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -Z_2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \Longrightarrow r(A^\mathsf{T}) = 3$$

Die ersten 3 Zeilen sind linear unabhängig und die vierte ist überflüssig. Da die Operationen im obigen Gauss-Algorithmus nur Linearkombinationen von Zeilen bilden, bleiben alle Zeilen in L enthalten. Eine mögliche Basis ist somit

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(ii) $\underline{x} = \underline{u} + \underline{v}$ und $\underline{y} = \underline{u} - \underline{v}$ sind eine Basis von $\mathbb{R}^2$, wenn sie linear unabhängig sind. Dies ist erfüllt, wenn die Gleichung $\lambda\underline{x} + \mu\underline{y} = \underline{0}$ die einzige Lösung $\lambda = \mu = 0$ hat.

$$\underline{0} = \lambda\underline{x} + \mu\underline{y} = \lambda(\underline{u} + \underline{v}) + \mu(\underline{u} - \underline{v}) = (\lambda + \mu)\underline{u} + (\lambda - \mu)\underline{v}$$

Da $\underline{u}$ und $\underline{v}$ linear unabhängig sind, gilt

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Daraus folgt, dass $\underline{x}$ und $\underline{y}$ linear unabhängig sind und eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden.

AUFGABE 3

Teil 1

(i) a) $\boxed{4}$

Die Determinante der Matrix ist

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \lambda & \varrho & 1 \\ \beta & \mu & \phi & 1 \\ \gamma & \nu & \psi & 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \det(C^\mathsf{T}) = -1 \cdot \det C \neq 0.$$

Somit hat die Matrix den vollen Rang von 4.

b) $\boxed{-2}$

Wird ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen addiert, so ändert sich die Determinante nicht.

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - \alpha & \mu - \beta & \nu - \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \\ \varrho & \phi & \psi \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta & -\gamma \\ \lambda & \mu & \nu \\ \varrho & \phi & \psi \end{pmatrix}$$
$$= -1 \cdot \det(C) = -2$$

(ii)

w	f
×	
×	
	×
×	
	×

- Jede Linearkombination von Lösungen $\underline{x}_1$ und $\underline{x}_2$ eines homogenen LGS $A\underline{x} = \underline{0}$ ist wieder eine Lösung, da $A(\lambda_1\underline{x}_1+\lambda_2\underline{x}_2) = \lambda_1 A\underline{x}_1+\lambda_2 A\underline{x}_2 = \underline{0}$.
- Eine Matrix ist regulär, falls ihre Determinante ungleich null ist. Die Determinante einer Matrix und ihrer Transponierten sind gleich, daher ist A^{T} regulär genau dann wenn A regulär ist.
- Gegenbeispiel:
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sind reguläre Matrizen. Das LGS $(A+B)\underline{x} = \underline{b}$ mit $\underline{b} \neq \underline{0}$ hat jedoch keine Lösung, da $(A+B)\underline{x} = \underline{0}$.
- Eine Matrix ist symmetrisch wenn sie gleich ihrer Transponierten ist.
  $$(A^{\mathsf{T}}(-A))^{\mathsf{T}} = (-A)^{\mathsf{T}}(A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = -A^{\mathsf{T}}A = A^{\mathsf{T}}(-A)$$
- Gegenbeispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$
  Dises LGS hat keine Lösung für $b_4 \neq 0$.

Teil 2

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 0 & 16 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 32 & 4 & -4 \\ 0 & -16 & -4 & 3 \end{pmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 16 & 4 & -2 \\ 32 & 4 & -4 \\ -16 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 16\cdot 4\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 64\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -64$$

$$\det B = \det\begin{pmatrix} -1 & 12 & 14 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot 1\cdot(-1) = -1$$

$$\det\left(\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1} B\right) = \det(2A^{-1}B) = 2^4\frac{1}{\det(A)}\det(B) = 16\cdot\frac{1}{-64}\cdot(-1) = \frac{1}{4}$$

$$\det(B^{-1} - BB^{-1}) = \det((I-B)B^{-1}) = \det(I-B)\cdot\det\left(B^{-1}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} 2 & -12 & -14 & -6 \\ 0 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\det B} = 0\cdot(-1) = 0$$

AUFGABE 4
Teil 1

a) $\boxed{\dfrac{1}{4}\sin(2x-1)+C}$

Da $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(2x-1) = 2\cos(2x-1)$.

b) $\boxed{\dfrac{2}{9}(3x+2)^{\frac{3}{2}}+C}$

$\int\sqrt{3x+2}\mathrm{d}x = \int(3x+2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot(3x+2)^{\frac{3}{2}}+C$

c) $\boxed{-\dfrac{1}{4}e^{1-2x^2}+C}$

Mit der Substitution $u = 1-2x^2$ und $\mathrm{d}u = -4x\mathrm{d}x$ erhält man $\int x\, e^{1-2x^2}\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{4}e^u\mathrm{d}u = -\frac{e^u}{4}+C$. Durch Einsetzen von $u = 1-2x^2$ erhält man das Ergebnis.

d) $\boxed{\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+C}$

Mit der Substitution $u = \ln x$ und $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ erhält man $\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}u = \frac{u^2}{2}+C$. Durch Rücksubstitution ergibt sich das Ergebnis.

Teil 2

(i)

$$\int_1^4\int_1^4\left(1+\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_1^4\mathrm{d}y\right)\left(\int_1^4 1+\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right) = [y]_1^4\cdot\left([x]_1^4+\int_1^4\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right)$$
$$= 3\cdot\left(3+\int_1^4\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right)$$

Die Substitution $u = \sqrt{x}$ und $\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ ergibt

$$\int_1^4\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_{u(1)=1}^{u(4)=2}2e^u\mathrm{d}u = [2e^u]_1^2 = 2e^2-2e.$$

Daraus folgt das Ergebnis

$$\int_1^4\int_1^4\left(1+\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3(3+2e^2-2e).$$

(ii)

$$F(x) = \int_x^4 e^{(-t^2)}\mathrm{d}t = \int_4^x -e^{(-t^2)}\mathrm{d}t$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$F'(x) = -e^{(-x^2)}.$$

(iii)

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b(f(x)+g(x))\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right|\\ &\leq \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right|\\ &\leq \int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_a^b|g(x)|\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$