Es werden die Aufgaben 3,4(b),4(d),5,7 und 8 in den Tutorien besprochen.

Aufgabe 1 (LGS, simultane Lösung, parametrische Lösung)

Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & b_1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & b_2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & b_3 \end{array}$$

(a) Wie viele Elemente hat die Lösungsmenge im Fall $b_1 = 3, b_2 = 4$ und $b_3 = 0$?

(b) Wie viele Elemente hat die Lösungsmenge im Fall $b_1 = 1, b_2 = 2$ und $b_3 = 1$?

(c) Welche Bedingung muss an eine beliebige rechte Seite

$$\mathbf{b}^3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

gestellt werden, damit das LGS lösbar ist?

Aufgabe 2 (Lösung eines LGS in Zeilenstufenform)

Betrachten Sie das folgende LGS:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -9x_2 + 8x_3 &= 1 \\ 7x_3 &= 1. \end{aligned}$$

(a) Liegt das LGS in Zeilenstufenform vor?

(b) Liegt das LGS in expliziter Form vor?

(c) Wie kann man direkt x_3 bestimmen? Wie kann man daraus x_2 und dann x_1 bestimmen?

Aufgabe 3 (Basislösung eines LGS)

Wir haben ein lineares Gleichungssystem mit Hilfe des Eliminationsverfahren gelöst und erhalten

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{b}$
①	1	0	0	1	13
②	0	1	0	−3	9
③	0	0	1	8	18

(a) Lesen Sie aus dem Endtableau eine Basislösung des LGS ab. Wie viele Komponenten dieser Basislösung sind von 0 verschieden?
(b) Bestimmen Sie eine weitere Basislösung, in dem Sie $x_2 = 0$ setzen.
(c) Bestimmen Sie alle weiteren Basislösungen.

Aufgabe 4 (Affine Lösungsmengen)

(a) Betrachten Sie

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (i) Ist diese Menge ein linearer Raum? Ist diese Menge ein affiner Raum?
   (ii) Bestimmen Sie die Dimension der Menge.

(b) Betrachten Sie die Lösungsmenge des inhomogenen LGS aus Aufgabe 10(a) in Serie 5:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (i) Ist diese Menge ein linearer Raum? Ist diese Menge ein affiner Raum?
   (ii) Bestimmen Sie die Dimension der Menge.

(c) Betrachten Sie die Lösungsmenge des inhomogenen LGS aus 10(c) in Serie 5:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{23}{2} \\ 8 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (i) Ist diese Lösungsmenge ein linearer Raum? Ist diese Lösungsmenge ein affiner Raum?
   (ii) Bestimmen Sie die Dimension der Lösungsmenge.

(d) Betrachten Sie die Lösungsmenge des inhomogenen LGS aus 10(d) in Serie 5:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (i) Ist diese Lösungsmenge ein linearer Raum? Ist diese Lösungsmenge ein affiner Raum?
   (ii) Bestimmen Sie die Dimension der Lösungsmenge.

(e) Betrachten Sie die Lösungsmenge des inhomogenen LGS aus 10(e) in Serie 5:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (i) Ist diese Lösungsmenge ein linearer Raum? Ist diese Lösungsmenge ein affiner Raum?
   (ii) Bestimmen Sie die Dimension der Lösungsmenge.

Aufgabe 5 (Gleichheit affiner Lösungsmengen)

Studentin A hat die Lösungsmenge eines LGS als Menge

$$\mathbb{L}_A = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

bestimmt. Student B hat die Lösungsmenge eines LGS als Menge

$$\mathbb{L}_B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

bestimmt. In der Musterlösung wird behauptet, die Lösungsmenge sei

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Welcher der Studenten hat die gleiche Lösungsmenge erhalten wie in der Musterlösung beschrieben ist?

Aufgabe 6 (Zeilenbild und Spaltenbild)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(a) Stellen Sie jede Zeile bzw. Gleichung des LGS als Hyperebene des $\mathbb{R}^2$ dar und bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS als Schnittmenge dieser Hyperebenen.

(b) Stellen Sie jede Spalte der Koeffizientenmatrix sowie die rechte Seite als Vektor im $\mathbb{R}^2$ dar. Bestimmen Sie dann die Lösungsmenge des LGS als Gewichte der Linearkombination der Spaltenvektoren von A, welche den Vektor $\mathbf{b}$ ergibt.

Aufgabe 7 (Rang einer Matrix und lineare Unabhängigkeit)

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen. Was können Sie daraus über die lineare Abhängigkeit der Zeilenvektoren und Spaltenvektoren folgern?

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 7 & 4 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8 (Rang einer Matrix und Lösungsmenge des zugehörigen LGS)

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

und das daraus gebildete homogene LGS

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

mit dem Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \in \mathbb{R}^5$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch?

(a)

(1) A liegt in Zeilenstufenform vor. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Das LGS ist nicht lösbar. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Die Lösungsmenge ist ein affiner Raum. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Die Lösungsmenge ist ein linearer Raum. ☐ wahr ☐ falsch

(b)

(1) $\operatorname{rang}(A) = 4$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Die Matrix A hat vollen Rang. ☐ wahr ☐ falsch

(3) $\operatorname{rang}(A^T) = 4$. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Die Dimension der Lösungsmenge ist 2. ☐ wahr ☐ falsch

Aufgabe 9 (Rang einer Matrix und Lösbarkeit des LGS)

Sei A die Koeffizientenmatrix und $\mathbf{b}$ die rechte Seite des LGS

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & = & 13 \\ -\frac{4}{5}x_1 & + & \frac{3}{5}x_2 & + & \frac{13}{5}x_3 & - & 3x_4 & = & -\frac{11}{5} \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 13x_3 & + & 8x_4 & = & 18 \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{rang}(A)$, $\operatorname{rang}(A|\mathbf{b})$ und die Dimension der Lösungsmenge $\mathbb{L}$.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}_0$ für $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, die Dimension der Lösungsmenge $\mathbb{L}_0$ und geben Sie eine Basis für $\mathbb{L}_0$ an.

(c) Geben Sie eine neue rechte Seite $\mathbf{b}$ an, so dass $\operatorname{rang}(A) < \operatorname{rang}(A|\mathbf{b})$ und somit das Gleichungssystem unlösbar wird.

Aufgabe 10 (Rechenregeln für Matrizen)

(a) Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck soweit wie möglich:

$$\begin{pmatrix} 27 & 6 \\ 123 & 12 \\ 24 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 54 & 12 \\ 246 & 24 \\ 48 & 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Gegeben sind folgende Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zudem ist X eine unbekannte 3×3-Matrix, Y eine unbekannte 2×2-Matrix und Z eine unbekannte 3×2-Matrix. Lösen Sie – falls möglich – die folgenden Matrizengleichungen nach X, Y bzw. Z auf:

(i) $A_1 \cdot A_2 + X = A_3$,

(ii) $B_1 \cdot B_2 - 2 \cdot I \cdot Y = B_3$,

(iii) $C_1 + C_2 \cdot Z = C_3$.