Es werden die Aufgaben 3, 6(a), 6(b), 6(e), 9, 11 und 12 in den Tutorien besprochen.

Aufgabe 1 (lokale Extrema)

Sei f eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion in n Variablen mit offenem und konvexem Definitionsbereich D. Die Hesse-Matrix der Funktion f an der Stelle $\mathbf{x}^0$ ist $H_f(\mathbf{x}^0)$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) Die Funktion f hat an der Stelle $\mathbf{x}^0$ genau dann ein lokales Minimum, wenn die Funktion $(-f)$ an der Stelle $\mathbf{x}^0$ ein lokales Maximum hat. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Ist $\mathbf{x}^0$ eine lokale Minimalstelle von f, so ist $H_f(\mathbf{x}^0)$ positiv semidefinit. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Ist $H_f(\mathbf{x}^0)$ negativ semidefinit und $\nabla f(\mathbf{x}^0) = 0$, dann liegt an der Stelle $\mathbf{x}^0$ ein globales Extremum vor. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Ist $H_f(\mathbf{x}^0)$ negativ semidefinit für alle $\mathbf{x}^0 \in D$ und gilt $\nabla f(\mathbf{x}^0) = 0$, dann liegt an der Stelle $\mathbf{x}^0$ ein globales Extremum vor. ☐ wahr ☐ falsch

Aufgabe 2 (Extremalstellen für zwei Funktionen in 3 Variablen)

Gegeben seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}x_1^3 - 3x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 - x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4 \text{ und}$$
$$g(\mathbf{x}) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 5x_1.$$

(a) Finden Sie die stationären Stellen von f und klassifizieren Sie diese: Liegt ein lokales Minimum, lokales Maximum oder ein Sattelpunkt vor?

(b) Finden Sie die stationären Stellen von g und klassifizieren Sie diese: Liegt ein lokales Minimum, lokales Maximum oder ein Sattelpunkt vor?

Aufgabe 3 (Optimierung, Anwendung)

Eine Firma stellt drei Produkte P_1, P_2 und P_3 her. Werden x_1, x_2 und x_3 Mengeneinheiten der jeweiligen Produkte hergestellt, entstehen Kosten von

$$k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + 5, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T,$$

wobei Q durch

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Die Produkte können zu Marktpreisen

$$p_1 = 80 \text{ CHF/Stück}, \; p_2 = 100 \text{ CHF/Stück}, \; p_3 = 160 \text{ CHF/Stück}$$

abgesetzt werden. Mit $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)^T$ kann die Gewinnfunktion als $g(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T\mathbf{x} - k(\mathbf{x})$ bestimmt werden, welche den zu erwartenden Gewinn bei Produktion der Mengen x_1, x_2 und x_3 beschreibt.

(a) Bestimmen Sie den zu erwartenden Gewinn, wenn Mengen $x_1 = 5$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 10$ hergestellt werden.

(b) Bestimmen Sie das globale Maximum der Gewinnfunktion.

Aufgabe 4 (Monopolgewinn, Optimierung für $n = 2$)

Ein Monopolist plant die Herstellung zweier Substitutionsgüter. Seine Produktionsentscheidung besteht in der Wahl von $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, wobei x_1 die produzierte Menge des ersten Gutes und x_2 die produzierte Menge des zweiten Gutes darstellt. Die Kostenfunktion ist gegeben durch

$$k(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2.$$

Zudem hat eine Marktanalyse ergeben, dass die Gesamtproduktion $\mathbf{x}$ zu den Stückpreisen

$$\begin{aligned} p_1(\mathbf{x}) &= 80 - x_1 - x_2 \quad \text{für das Gut 1 und} \\ p_2(\mathbf{x}) &= 90 - x_1 - 2x_2 \text{ für das Gut 2} \end{aligned}$$

abgesetzt werden kann. Die Gewinnfunktion kann daher als $g(\mathbf{x}) = p_1(\mathbf{x})x_1 + p_2(\mathbf{x})x_2 - k(\mathbf{x})$ bestimmt werden, welche den zu erwartenden Gewinn bei Produktion der Mengen x_1 und x_2 beschreibt.

(a) Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen konvex oder konkav sind:
   (i) $k(\mathbf{x})$
   (ii) $p(\mathbf{x}) = p_1(\mathbf{x})x_1 + p_2(\mathbf{x})x_2$
   (iii) $g(\mathbf{x})$

(b) Bestimmen Sie eine globale Maximalstelle der Gewinnfunktion g.

Aufgabe 5 (Parameterintegral)

Sei $f(\mathbf{x}) = 5x_1^2 - x_2^3$ mit $x_1, x_2 \in [0,2]$. Bestimmen Sie

(a)
$$\int_0^2 f(x)\, dx_1$$

(b)
$$\int_0^2 f(x)\, dx_2$$

Aufgabe 6 (Doppelintegrale)

Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale:

(a)
$$\int_1^2 \int_{-1}^2 (x_1 + \frac{1}{x_2})\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

(b)
$$\int_0^1 \int_0^1 x_1\, e^{x_2}\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2$$

(c)
$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2\right)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2$$

(d)
$$\int_0^e \int_0^\pi x_1\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2$$

(e)
$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x_1 x_2 + e^{x_1})\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2$$

Aufgabe 7 (Doppelintegrale)

Integrieren Sie die Cobb-Douglas Funktion $u(\mathbf{x}) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ für $\alpha = \frac{1}{3}$

(a) über dem Rechteck $R := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in [0,1],\ x_2 \in [0,4]\}$ und
$(b)^*$ über dem Dreieck $D := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in [0,1],\ x_2 \in [0,4x_1]\}$.

Aufgabe 8 (Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen)

Sei
$$B = \left\{\mathbf{x} \in (0,+\infty)^2 \mid g_1(\mathbf{x}) \le 0, g_2(\mathbf{x}) = 0\right\},$$
mit
$$g_1 : (0,+\infty)^2 \to \mathbb{R},\ g_1(\mathbf{x}) = 9x_1 + x_2 - 100,$$
$$g_2 : (0,+\infty)^2 \to \mathbb{R},\ g_2(\mathbf{x}) = x_1 + x_2.$$

Zudem sei $f : (0,+\infty)^2 \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = x_1^{0.6} x_2^{0.4}$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) Der Vektor $\mathbf{x} = (0,0)^T$ ist eine zulässige Lösung von $\min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Das Optimierungsproblem $\max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ unter Nebenbedingungen ist lösbar. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Für die optimale Lösung $\mathbf{x}^*$ von $\max_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ gilt $f(\mathbf{x}^*) \ge f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in (0,+\infty)^2$. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Ist $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)^T$ eine optimale Lösung von $\min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$, dann glit $x_1^* = -x_2^*$. ☐ wahr ☐ falsch

Aufgabe 9 (Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen)

(a) Betrachten Sie das Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 + x_2^2 - 7 \\ \text{u.d.N. } & x_1^4 = 16, \\ & x_1 + x_2 = 5. \end{aligned}$$

(i) Bestimmen Sie $\min_{x \in \mathbb{R}^2} x_1^2 + x_2^2 - 7$ und zeigen Sie, dass der so entstandene Wert eine untere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert ist.

(ii) Bestimmen Sie die optimale Lösung sowie den optimalen Zielfunktionswert dieses Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen.

(b) Sei eine zusätzliche Nebenbedingung gegeben durch $x_2 \geq 5$. Wir betrachten also folgendes Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 + x_2^2 - 7 \\ \text{u.d.N. } & x_1^4 = 16, \\ & x_1 + x_2 = 5, \\ & x_2 \geq 5. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die optimale Lösung sowie den optimalen Zielfunktionswert dieses neuen Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen.

(c) Sind die Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen aus Teilaufgaben (a) und (b) äquivalent?

(d) Formulieren Sie das Minimierungsproblem unter Nebenbedingungen aus Teilaufgabe (a) als ein äquivalentes Maximierungsproblem unter Nebenbedingungen.

Aufgabe 10 (Graphische Darstellung eines Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen)

(a) Betrachten Sie das Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \max\ & x^2 + 4 \\ \text{u.d.N. } & x \geq -1, \\ & x \leq 4. \end{aligned}$$

(i) Stellen Sie die den Graphen der Zielfunktion sowie den zulässigen Bereich in einem Koordinatensystem dar.

(ii) Bestimmen Sie anhand der Skizze aus Teilaufgabe (i) die optimale Lösung sowie den optimalen Zielfunktionswert.

(b) Betrachten Sie das Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + x_2 \\ \text{u.d.N. } & x_1 + x_2 \leq 3, \\ & 6x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

(i) Stellen Sie den zulässigen Bereich in einem zweidimensionalen Koordinatensystem mit einer x_1- und einer x_2-Achse dar.
(ii) Zeichnen Sie im Koordinatensystem aus Teilaufgabe (i) zusätzlich Höhenlinien der Zielfunktion zu Niveaus $0, 1, \frac{4}{3}, 2$ und 3 ein.
(iii) Bestimmen Sie anhand ihrer Graphik die optimale Lösung sowie den optimalen Zielfunktionswert des obigen Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen.

Aufgabe 11 (Tangenten, implizite Funktion)

Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ mit } f(\mathbf{x}) = e^{1-x_1^2+2x_2}.$$

Die Gleichung $f(\mathbf{x}) = e^2$ definiert in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0 = (1,1)^T$ eine implizite Funktion $x_2 = \tilde{g}(x_1)$.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von f an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (1,1)^T$.
(b) Berechnen Sie $\tilde{g}'(1)$, indem Sie den Satz über implizite Funktionen anwenden.
(c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente $t_{1,x_1^0}(x_1) = \tilde{g}(x_1^0) + \tilde{g}'(1)(x_1 - x_1^0)$ an den Graphen der Funktion $x_2 = \tilde{g}(x_1)$ im Punkt $x_1^0 = 1$.
(d) Bestimmen Sie nun die implizite Funktion $x_2 = \tilde{g}(x_1)$ aus (b) direkt und berechnen Sie $\tilde{g}'(1)$.

Aufgabe 12 (Satz von der impliziten Funktion)

Berechnen Sie, falls möglich, den Wert der partiellen Ableitung(en) an der Stelle $\mathbf{x}^0$ der durch

(a) $g(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ implizit definierten Funktion $\tilde{g}(x_1)$ mit $\mathbf{x}^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$.
(b) $h(x_1,x_2,x_3) = x_3 + x_1 \ln(x_3) + x_2 = 0$ implizit definierten Funktion $\tilde{h}(x_1,x_2)$ mit $\mathbf{x}^0 = (5,-1,1)^T$.

Aufgabe 13 (Optimierung - Verständnis)

Gegeben ist folgendes Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} &\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \\ &\text{u.d.N. } g_i(\mathbf{x}) = 0, \ (i = 1,\dots,m) \end{aligned}$$

mit $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g_i(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, m$. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

(1) Bei Anwendung der Substitutionsmethode löst man statt des ursprünglichen Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen ein äquivalentes Optimierungsproblem mit mehr Variablen. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Bei Anwendung der Lagrangemethode zur Lösung eines Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen sucht man stationäre Stellen einer Funktion, welche mehr Variablen hat als die ursprüngliche Zielfunktion. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Sind alle g_i affin-lineare Funktionen, so ist die zulässige Menge ein affiner Raum oder die leere Menge. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Ist das Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen lösbar, so existiert genau eine optimale Lösung. ☐ wahr ☐ falsch

Aufgabe 14 (Substitutionsmethode und Lagrangesche Multiplikatorenregel)

Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2 + 2x_1x_2 \\ &\text{u.d.N.} \ -\frac{3}{2}x_1 + 3x_2 + 6 = 0. \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Funktion die Kandidaten für die optimale Lösung des Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Verfahrens der Substitution die optimale Lösung des Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen.