WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT DER UNIVERSITÄT ZÜRICH
PROFESSUR FÜR MATHEMATIK DER WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN
ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG MATHEMATIK II

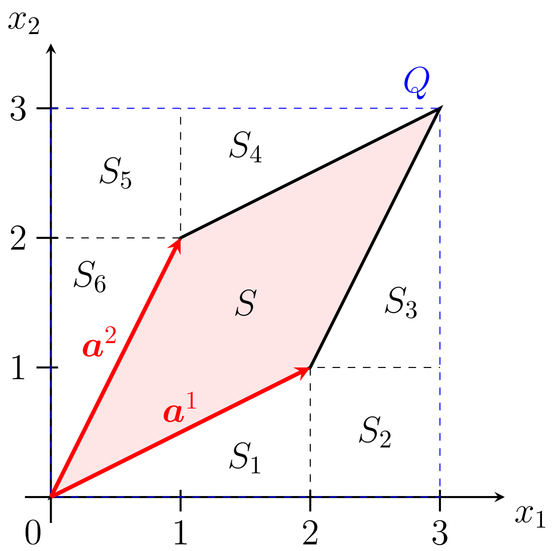
Serie 8 - Musterlösungen — ab 08.04.2019 — FS 2019

Aufgabe 1 (Determinante und Fläche eines Parallelogramms)

Die Vektoren $\mathbf{a}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ spannen ein Parallelogramm mit Flächeninhalt S auf.

(a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms S.
(b) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $A = [\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2]$.
(c) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $A = [\mathbf{a}^2, \mathbf{a}^1]$.

Lösung:



(a) Der Flächeninhalt S des durch $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2$ aufgespannten Parallelogramms entspricht dem Flächeninhalt des Quadrats $Q - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6)$.
Der Flächeninhalt des Quadrats ist

$$Q = (a_{11} + a_{12})(a_{21} + a_{22}) = (2+1)(1+2) = 9.$$

Der Flächeninhalt der (gleichgrossen) Dreiecke ist

$$S_1 = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1 = S_3 = S_4 = S_6.$$

Der Flächeninhalt der beiden (gleichgrossen) Quadrate beträgt

$$S_2 = 1 \cdot 1 = 1 = S_5.$$

Somit erhalten wir: $\quad S = 9 - (1+1+1+1+1+1) = 3.$

(b) Sei $A = [\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2]$. Aus der Vorlesung kennen wir die Determinante einer 2×2-Matrix:

> **Definition 8.3.1 - Die Determinante einer 2×2-Matrix.**
> Die Determinante einer 2×2-Matrix A ist
>
> $$\det A = \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Es gilt: $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3.$

(c) Sei $A = [\mathbf{a}^2, \mathbf{a}^1]$.

Es gilt: $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3.$

> **Bemerkung** Die Determinante einer 2×2-Matrix A entspricht betragsmässig der Fläche des Parallelogramms S das durch die Spaltenvektoren $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2$ bestimmt ist. Es gilt hier also $S = |\det(A)| = 3$.

Aufgabe 2 (Inverse einer 2×2-Matrix (*))

(a) Leiten Sie eine allgemeine Formel für die Inverse einer 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mit $\det(A) \neq 0$ her.

(b) Nutzen Sie Ihre Formel aus Teilaufgabe (a), um die Inverse der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ zu bestimmen.

Lösung:

(a) Wir berechnen A^{-1} durch simultane Lösung des LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \mathbf{e}^j, j = 1, 2$. In den Berechnungen nutzen wir, dass $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, wie wir in Definition 8.3.1 in Aufgabe 1 gesehen haben. Zudem benutzen wir, dass $\det(A) \neq 0$. Berechnung von A^{-1}:

	A		$\mathbf{e}^1$	$\mathbf{e}^2$	
①	a_{11}	a_{12}	1	0	
②	a_{21}	a_{22}	0	1	
③	1	$\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$\frac{1}{a_{11}}$	0	① $\cdot \frac{1}{a_{11}}$
④	0	$\frac{a_{22}a_{11}-a_{21}a_{12}}{a_{11}} = \frac{\det(A)}{a_{11}}$	$-\frac{a_{21}}{a_{11}}$	1	② $- \frac{a_{21}}{a_{11}}$ ①
⑤	1	0	$\frac{\det(A)+a_{12}a_{21}}{a_{11}\det(A)} = \frac{a_{22}}{\det(A)}$	$-\frac{a_{12}}{\det(A)}$	③ $- \frac{a_{12}}{\det(A)}$ ④
⑥	0	1	$-\frac{a_{21}}{\det(A)}$	$\frac{a_{11}}{\det(A)}$	④ $\cdot \frac{a_{11}}{\det(A)}$

Die Inverse von A mit $\det(A) \neq 0$ ist somit gegeben durch

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{\det(A)} & -\frac{a_{12}}{\det(A)} \\ -\frac{a_{21}}{\det(A)} & \frac{a_{11}}{\det(A)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung Vorsicht: Es existieren keine einfache Verallgemeinerungen dieser Regel für den Fall $n > 2$.

(b) Wir bestimmen nun die Inverse von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ mit der in Teilaufgabe (a) hergeleiteten Formel. Wir können die Formel anwenden da $\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0$. Es gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (2×2-Matrizen, Orthogonale Matrizen, Determinante)

(a) Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) Die Matrix A ist eine orthogonale Matrix und es gilt $A^{-1} = A^T$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Der Vektor $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})^T$ hat die Länge 1. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Die Zeilenvektoren von A sind paarweise orthogonal und die Spaltenvektoren von A sind paarweise orthogonal. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Die Determinante der Matrix A ist 5. ☐ wahr ☐ falsch

(b) Betrachten Sie die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) B ist genau dann singulär, wenn $\det(B) = 1$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Sei $b_{21} = 0$, dann ist $\det(B) = b_{11}b_{22}$. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Tauscht man die Spalten von B, bleibt der Betrag der Determinante gleich, aber das Vorzeichen verändert sich. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Multipliziert man eine Spalte von B mit 2, vervierfacht sich die Determinante. ☐ wahr ☐ falsch

Lösung:

Aus der Vorlesung kennen wir folgende Eigenschaften der Determinante einer 2×2-Matrix:

Satz 8.3.1 - Eigenschaften der Determinante einer 2×2-Matrix

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ eine Matrix mit Spalten $\mathbf{a}^1$, $\mathbf{a}^2$ und Zeilen $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. Dann gilt:

i. Vertauscht man zwei Spalten, so ändert die Determinante das Vorzeichen, bleibt aber betragsmässig gleich, d.h. $\det([\mathbf{a}^2, \mathbf{a}^1]) = -\det([\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2]) = -\det(A)$.
ii. Multipliziert man eine Spalte von A mit $\alpha \in \mathbb{R}$, so hat die sich so ergebende Matrix eine Determinante von $\alpha \det(A)$, d.h. $\det([\alpha \mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2]) = \det([\mathbf{a}^1, \alpha \mathbf{a}^2]) = \alpha \det(A)$.
iii. Sind alle Elemente unter der Hauptdiagonalen von A gleich 0, also $a_{21} = 0$, so gilt $\det(A) = a_{11}a_{22}$.
iv. $\det(A) = 0$ genau dann, wenn $\operatorname{rang}(A) < 2$.
v. Ist A orthogonal, dann ist $|\det(A)| = 1$, also $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = -1$;

Zudem haben wir in der Vorlesung definiert, was orthogonale Matrizen sind:

Definition 8.2.3 - Orthogonale Matrix

Eine quadratische Matrix A der Ordnung n heisst orthogonal, wenn $AA^T = I$.

Satz 8.2.3 - Eigenschaften orthogonaler Matrizen

A ist orthogonal.

$\Leftrightarrow$ Die Inverse von A existiert und $A^{-1} = A^T$.
$\Leftrightarrow$ Alle Zeilenvektoren von A sind paarweise orthogonal und haben Norm 1.
$\Leftrightarrow$ A^T ist orthogonal, also $AA^T = A^T A = I$.
$\Leftrightarrow$ Alle Spaltenvektoren von A sind paarweise orthogonal und haben Norm 1.

(a)

- Zu (1): Es gilt
$$AA^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$
Da A also orthogonal ist, gilt $A^{-1} = A^T$, vgl. Satz 8.2.3 . Die Aussage (1) ist wahr.
- Zu (2): Der Vektor $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})^T$ ist ein Spaltenvektor von A. Da A orthogonal ist, haben alle Zeilen- und Spaltenvektoren von A die Länge 1, vgl. Satz 8.2.3. Zur Überprüfung:
$$\left\| \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)^T \right\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1.$$
Die Aussage (2) ist wahr.
- Zu (3): Da A orthogonal ist, sind die Zeilenvektoren von A paarweise orthogonal. Da A orthogonal ist, sind auch die Spaltenvektoren von A paarweise orthogonal, vgl. Satz 8.2.3. Die Aussage (3) ist wahr.
- Zu (4): Da A orthogonal ist, ist $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = -1$, vgl. Satz 8.3.1. Für die Matrix A gilt $\det(A) = 1$. Die Aussage (4) ist falsch.

(b)

- Zu (1): Die Matrix B ist singulär wenn $\operatorname{rang}(B) < 2$. Die Matrix B ist also genau dann singulär, wenn $\det(B) = 0$, vgl. Satz 8.3.1. Die Aussage (1) ist falsch.

- Zu (2): Ist das Element unter der Hauptdiagonale gleich 0, $b_{21} = 0$, dann ist $\det(B) = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = b_{11}b_{22} - b_{12}0 = b_{11}b_{22}$. Die Aussage (2) ist wahr.
- Zu (3): Vgl. Satz 8.3.1. Die Aussage (4) ist wahr.
- Zu (4): Multipliziert man eine Spalte von B mit 2, verdoppelt sich die Determinante, vgl. Satz 8.3.1. Die Aussage (4) ist falsch.

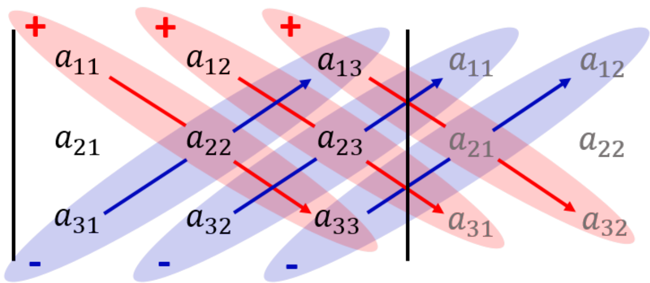
Aufgabe 4 (Volumen eines Parallelotops mit Sarrus)

(a) Nutzen Sie die Definition der Determinante einer $n \times n$-Matrix, um zu zeigen, dass man die Determinante einer 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

als Summe der in Abbildung 4.1 rot schraffierten Produkte abzüglich der blau schraffierten Produkte bestimmen kann. (Diese Rechenvorschrift bezeichnet man auch als Regel von Sarrus.)

Abbildung 4.1: Die Regel von Sarrus



(b) Betrachten Sie nun die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wie gross ist das Volumen des von diesen Vektoren aufgespannten Parallelotops? Benutzen Sie hierfür

(i) den Entwicklungssatz von Laplace,

(ii) die Regel von Sarrus.

(c) Betrachten Sie nun die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wie gross ist das Volumen des von diesen Vektoren aufgespannten Parallelotops?

(i) Berechnen Sie dieses mit Hilfe des Entwicklungssatzes von Laplace.
(ii) Kann man die Regel von Sarrus auf 4×4-Matrizen erweitern?

Lösung:

(a) Es gilt:

> **Definition 8.3.2 - Die Determinante einer $n \times n$-Matrix**
> Die Determinante einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij})$ der Ordnung n, $\det A$, $\det(A)$, $|A|$, oder $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ ist induktiv wie folgt definiert:
> - Für $n = 1$ gilt $\det(a_{11}) = a_{11}$.
> - Für $n = 2$ gilt $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
> - Für $n > 2$: Sei A_{i1} die quadratische Matrix der Ordnung $n-1$, die durch Streichen der i-ten Zeile und ersten Spalte von A entsteht. Dann gilt
>
> $$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}(-1)^{i+1}\det(A_{i1}).$$

Die in der Definition erklärte Berechnung nennt man Entwicklung der Determinante nach der ersten Spalte.
Entwickeln wir die Determinante von A nach der ersten Spalte, ergibt sich

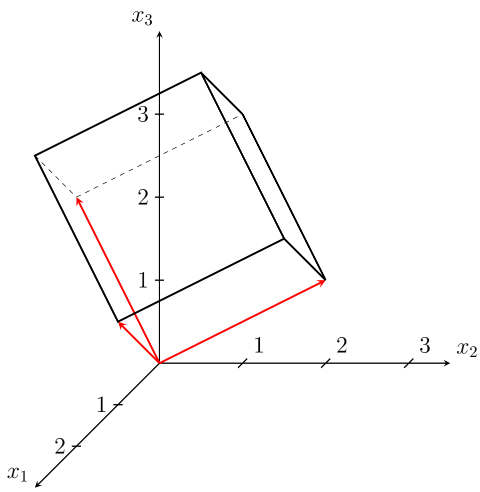
$$\begin{aligned}
\det(A) =& a_{11}\det(A_{11}) - a_{21}\det(A_{21}) + a_{31}\det(A_{31}) \\
=& a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\
=& a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \\
=& a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also genau die Regel von Sarrus.

(b) Sei A die Matrix mit den gegebenen Vektoren als Spaltenvektoren,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Betragsmässig entspricht die Determinante einer 3×3-Matrix A dem Volumen eines durch die Spaltenvektoren von A aufgespannten Parallelotops.



Wir berechnen

(i) mit Hilfe der Laplace Entwicklung nach der ersten Zeile:

> **Satz 8.3.2 - Entwicklungssatz von Laplace**
> Die Determinante kann nach einer beliebigen Spalte j oder nach einer beliebigen Zeile i entwickelt werden. Es gilt also
>
> $$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$
>
> bzw.
>
> $$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij}).$$

$$\begin{aligned}\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= 0 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1) \\ &= 5 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Volumen $= |\det(A)| = 5.$

(ii) mit Hilfe der Regel von Sarrus:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot 0 = 5$$

$\Longrightarrow$ Volumen $= |\det(A)| = 5,$

was genau dem Resultat aus (i) entspricht.

(c) (i) Sei A die Matrix mit den gegebenen Vektoren als Spaltenvektoren,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Der Absolutbetrag der Determinante dieser Matrix ist das Volumen des von den gegebenen Spaltenvektoren aufgespannten Parallelotops.
Wir berechnen die Determinante mit Hilfe des Entwicklungssatzes von Laplace. Entwickeln wir zuerst nach der 4. Zeile und anschliessend nach der 1. Zeile erhalten wir:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -0+0-0+2\cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 = 10.$$

(ii) Mit Hilfe der Regel von Sarrus zur Berechnung der Determinante einer 3×3-Matrix wäre die Erweiterung für die Berechnung der Determinante einer 4×4-Matrix:

$$\begin{aligned} \det(A) = & \color{red}{a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}} \\ & \color{blue}{-a_{41}a_{32}a_{23}a_{14} - a_{42}a_{33}a_{24}a_{11} - a_{43}a_{34}a_{21}a_{12} - a_{44}a_{31}a_{22}a_{13}}. \end{aligned}$$

Eingesetzt für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

erhalten wir

$$\det(A) = 0+0+0+0-0-0-0-2\cdot 1\cdot(-1)\cdot 1 = 2 \neq 10.$$

Man kann die Regel von Sarrus zur Berechnung einer Determinante nicht auf 4×4-Matrizen erweitern.

Aufgabe 5 (Determinante, Rechenregeln)

Wir betrachten die Matrix

$$A = \left[\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3, \mathbf{a}^4\right] = \begin{pmatrix} -2 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 3 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Werte:

(a) $\det(A)$,
(b) $\det(B)$ mit $B = \left[\mathbf{a}^3, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^4, \mathbf{a}^1\right]$,
(c) $\det(\alpha A)$ für $\alpha = 2$,
(d) $\det(A) + \det(D)$ und $\det(A+D)$ mit $D = \left[-\mathbf{a}^1, -\mathbf{a}^2, -\mathbf{a}^3, -\mathbf{a}^4\right]$.

Lösung:

Aus der Vorlesung kennen wir folgenden Satz:

Satz 8.3.3 - Eigenschaften der Determinante
Sei A eine quadratische Matrix der Ordnung n. Dann gilt:

i. Vertauscht man zwei Spalten, so ändert die Determinante das Vorzeichen, bleibt aber betragsmässig gleich.
ii. Multipliziert man eine Spalte von A mit $\alpha \in \mathbb{R}$, so ver-α-facht sich die Determinante.
iii. Sind alle Elemente unter der Hauptdiagonalen von A gleich 0, also $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$, so gilt $\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.
iv. $\det(A) \neq 0$ genau dann, wenn $\operatorname{rang}(A) = n$, also wenn A regulär ist.
v. Ist A orthogonal, dann ist $|\det(A)| = 1$, also $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = -1$.

(a) Da es sich um eine Matrix in Zeilenstufenform handelt, sprich alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen gleich null sind, erhält man die Determinante durch Multiplikation der Diagonalelemente, vgl. Satz 8.3.3. Daher ist

$$\det(A) = (-2)\cdot 1\cdot 3\cdot 1 = -6.$$

(b) Tauscht man zwei Spalten einer Matrix, so bleibt der Betrag der Determinante gleich, aber das Vorzeichen verändert sich, vgl. Satz 8.3.3. Daher ist

$$\det\left[\mathbf{a}^3,\mathbf{a}^2,\mathbf{a}^4,\mathbf{a}^1\right] = -\det\left[\mathbf{a}^3,\mathbf{a}^2,\mathbf{a}^1,\mathbf{a}^4\right] = -(-\det\left[\mathbf{a}^1,\mathbf{a}^2,\mathbf{a}^3,\mathbf{a}^4\right]) = -6.$$

(c) Die Matrix $2A$ lässt sich schreiben als

$$2A = \left[2\mathbf{a}^1, 2\mathbf{a}^2, 2\mathbf{a}^3, 2\mathbf{a}^4\right].$$

Multipliziert man eine Spalte von einer Determinante mit α, dann ver-α-facht sich die Determinante, vgl. Satz 8.3.3. Daher ist

$$\begin{aligned}\det(2A) = \det(\left[2\mathbf{a}^1, 2\mathbf{a}^2, 2\mathbf{a}^3, 2\mathbf{a}^4\right]) &= 2\det(\left[\mathbf{a}^1, 2\mathbf{a}^2, 2\mathbf{a}^3, 2\mathbf{a}^4\right])\\ &= 2\cdot 2\det(\left[\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, 2\mathbf{a}^3, 2\mathbf{a}^4\right])\\ &= 2\cdot 2\cdot 2\det(\left[\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3, 2\mathbf{a}^4\right])\\ &= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\det(\left[\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3, \mathbf{a}^4\right])\\ &= 2^4\det(A)\\ &= 16\cdot(-6) = -96.\end{aligned}$$

Alternative Lösung:
Einfacher wäre es gewesen, den Satz 8.3.4 anzuwenden. Dort heisst es:

Satz 8.3.4 - Folgerung aus Satz 8.3.3
Für jede quadratische Matrix A der Ordnung n, $\alpha \in \mathbb{R}$, gilt $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

Somit gilt nach Satz 8.3.4:

$$\det(2A) = 2^4\det(A) = 16\cdot(-6) = -96.$$

(d) Es gilt $D = \left[-\mathbf{a}^1, -\mathbf{a}^2, -\mathbf{a}^3, -\mathbf{a}^4\right] = -A$. Somit erhalten wir mit Hilfe von Satz 8.3.4:

$$\det(D) = (-1)^4 \det(A) = \det(A) = -6$$

und damit $\det(A) + \det(D) = -6 + (-6) = -12$.
Es gilt aber

$$A + D = A + (-A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\det(A + D) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Somit ist $\det(A + D) \neq \det(A) + \det(D)$.

Aufgabe 6 (Determinanten mit Parametern)

Betrachten Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 2-\lambda & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A invertierbar?

(b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A orthogonal?

(c) Berechnen Sie die Determinanten von B, B^T und $4 \cdot B$.

(d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist B regulär?

(e) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\det(C) = 0$?

Lösung:

(a) A ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$, vgl. Satz 8.3.3 aus Aufgabe 5. Entwickeln wir nach der zweiten Zeile (oder nutzen alternativ die Regel von Sarrus), erhalten wir:

$$\det(A) = a^2 + a^2 = 2a^2.$$

Somit is A invertierbar, genau dann, wenn $a \neq 0$.

(b) Für eine orthogonale Matrix gilt $AA^T = I$, vgl. Definition 8.2.3 aus Aufgabe 3. Da

$$AA^T = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix}$$

ist, muss also $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ oder $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ sein, damit $AA^T = I$. Somit ist A genau dann orthogonal, wenn $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ oder $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist.

(c) Entwickeln wir B nach der ersten Spalte (oder nutzen alternativ die Regel von Sarrus), folgt

$$\begin{aligned}
\det(B) =& (-1)^{3+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} t & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (7t - 0) = 7t, \\
\det(B^T) =& \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} t & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (7t - 0) = 7t, \\
\det(4 \cdot B) =& (4)^3 \cdot \det(B) = 64 \cdot 7t = 448t.
\end{aligned}$$

(d) B ist genau dann regulär, wenn $\det(B) \neq 0$, vgl. Satz 8.3.3 aus Aufgabe 5. Die Matrix B ist also genau dann regulär, wenn $t \neq 0$.

(e) C ist eine Matrix bei der alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen gleich null sind,

$$C = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 2-\lambda & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Die Determinante berechnet sich daher als Produkt der Elemente auf der Hauptdiagonalen, vgl Satz 8.3.3 aus Aufgabe 5,

$$\det(C) = (1-\lambda) \cdot (2-\lambda) \cdot (-1-\lambda)(-\lambda) = (1-\lambda) \cdot (2-\lambda) \cdot (1+\lambda)\lambda.$$

Somit ist $\det(C) = 0$ genau dann, wenn

$$\lambda = 1,\ \lambda = 2,\ \lambda = -1, \text{ oder } \lambda = 0.$$

Aufgabe 7 (Determinante und Rang einer Matrix)

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{R}, b_j \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ gegeben, und es sei bekannt, dass $\det(A) = -12$.
Berechnen Sie

(a) $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$ und

(b) rang $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$.

Lösung:

(a) Mit Hilfe von Satz 8.3.2 aus Aufgabe 4 entwickeln wir nach der ersten Zeile und erhalten:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\det(A) = 12.$$

(b) Wegen $\det(A) \neq 0$ gilt $\operatorname{rang}(A) = 3$, vgl. Satz 8.3.3 aus Aufgabe 5. Da $(A|\mathbf{b})$ die Spaltenvektoren von A und einen zusätzlichen Spaltenvektor hat, und der Rang einer Matrix der maximalen Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren entspricht, vgl. 7.4.1 aus Serie 6, muss gelten: $\operatorname{rang}(A|\mathbf{b}) \geq \operatorname{rang}(A)$ und somit $\operatorname{rang}(A|\mathbf{b}) \geq 3$. Zudem wissen wir aus Satz 7.4.3 aus Serie 6, dass $\operatorname{rang}(A) \leq \min\{m,n\} = \min\{3,4\} = 3$.
Folglich ist $\operatorname{rang}(A|\mathbf{b}) = 3$.

Aufgabe 8 (Determinante, Rang, Inverse, LGS)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinanten von A, B und $2A$.
(b) Welche der Matrizen aus (a) sind invertierbar?
(c) Bestimmen Sie $\operatorname{rang}(A)$ und $\operatorname{rang}(B)$.
(d) Wie viele Lösungen hat das LGS $A\mathbf{x} = (1,1,-2)^T$? Wie viele Lösungen hat das LGS $B\mathbf{x} = (1,1,-2)^T$?
(e) Wie viele Lösungen hat das LGS $A\mathbf{x} = (1,2,3)^T$? Wie viele Lösungen hat das LGS $B\mathbf{x} = (1,2,3)^T$?

Lösung:

(a) Wir berechnen $\det(A)$ mit der Regel von Sarrus:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 6 - 2 \cdot 7 \cdot 3 - 6 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8.$$

Der zweite Spaltenvektor von B ist gleich dem ersten multipliziert mit -1. Folglich sind die Spaltenvektoren linear abhängig. Somit ist $\operatorname{rang}(B) < 3$ und deshalb ist B singulär. Daraus folgt, dass $\det(B) = 0$, vgl. Satz 8.3.3 aus Aufgabe 5.
Aus Satz 8.3.4 aus Aufgabe 5 folgt: $\det(2 \cdot A) = (2)^3 \cdot \det(A) = -64$.

(b) A ist invertierbar da $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ Matrix A ist regulär $\Leftrightarrow$ Inverse von A existiert. Ebenso ist $2 \cdot A$ invertierbar, denn wir wissen aus Satz 8.3.4 aus Aufgabe 5, dass $\det(2A) = 2^3 \det(A) \neq 0$. Die Matrix B ist nicht invertierbar, da $\det(B) = 0$ und somit die Matrix B singulär ist, vgl. Satz 8.3.3 aus Aufgabe 5.

(c) Für die quadratischen Matrizen A und B der Ordnung $n = 3$ gilt nach Satz 8.3.3 aus Aufgabe 5: $\det(A) \neq 0 \iff \operatorname{rang}(A) = n = 3$;
$\det(B) = 0 \iff \operatorname{rang}(B) < n \Rightarrow \operatorname{rang}(B) \leq 2$. Da z. B. die letzten zwei Spaltenvektoren offensichtlich linear unabhängig sind, erhalten wir schlussendlich, dass $\operatorname{rang}(B) = 2$.

(d) Aus der Vorlesung kennen wir folgenden Satz:

Satz 8.3.5 - Die Determinante zur Bestimmung der Lösbarkeit eines LGS
Ist A eine quadratische Matrix der Ordnung n und $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, dann ist das LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det(A) \neq 0$.

Da $\det(A) \neq 0$ sagt Satz 8.3.5, dass das LGS $A\mathbf{x} = (1,1,-2)^T$ genau eine Lösung hat.
Da $\det(B) = 0$ kann das LGS $B\mathbf{x} = (1,1,-2)^T$ keine oder unendlich viele Lösungen besitzen.
Wir lösen $B\mathbf{x} = (1,1,-2)^T$ mit Hilfe des Eliminationsverfahrens:

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}$	
1	1	-1	2	1	
2	1	-1	3	1	
3	1	-1	4	-2	
4	1	-1	2	1	
5	0	0	1	0	2 $-$ 1
6	0	0	2	-3	3 $-$ 1
7	1	-1	0	4	4 $-$ 6
8	0	0	0	1.5	5 $-$ 0.5 6
9	0	0	1	-1.5	0.5 6

Da die Gleichung 8 nie erfüllt sein kann, hat das lineare Gleichungssystem $B\mathbf{x} = (1,1,-2)^T$ keine Lösung.

(e) Da $\det(A) \neq 0$ sagt Satz 8.3.5, dass das LGS $A\mathbf{x} = (1,2,3)^T$ genau eine Lösung hat.
Da $\det(B) = 0$ kann das LGS $B\mathbf{x} = (1,2,3)^T$ keine oder unendlich viele Lösungen besitzen. Wir lösen $B\mathbf{x} = (1,2,3)^T$ mit Hilfe des Eliminationsverfahrens:

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}$		
1	1	-1	2	1		
2	1	-1	3	2		
3	1	-1	4	3		
4	1	-1	2	1		
5	0	0	1	1	2 − 1	
6	0	0	2	2	3 − 1	
7	1	-1	0	-1	4 − 6	
8	0	0	0	0	5 − 0.5 6	
9	0	0	1	1	0.5 6	streiche die Nullzeile
10	1	-1	0	-1		
11	0	0	1	1		

Die Lösungsmenge ist gegeben durch

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 - 1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Das LGS $B\mathbf{x} = (1,2,3)^T$ hat also unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 9 (Determinanten und LGS)

Gegeben ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -8 \\ 1 & -3 & t \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante für allgemeine $t \in \mathbb{R}$.

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist A regulär?

(c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat das folgende Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 8x_3 & = & -1 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & tx_3 & = & -2 \end{array}$$

(i) genau eine Lösung

(ii) unendlich viele Lösungen

(iii) keine Lösung?

Lösung:

(a) Mit Hilfe der Regel von Sarrus (oder alternativ mit der Entwicklung nach der ersten Spalte) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \det(A) =& 1 \cdot 1 \cdot t + 2 \cdot (-8) \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) - 1 \cdot 1 \cdot (-1) - (-3) \cdot (-8) \cdot 1 - t \cdot (-2) \cdot 2 \\ =& t - 16 - 6 + 1 - 24 + 4t \\ =& 5t - 45. \end{aligned}$$

(b) A ist genau dann regulär, wenn $\det(A) \neq 0$, vgl. Satz 8.3.3. aus Aufgabe 5. Somit ist A genau dann regulär, wenn $5t - 45 \neq 0$, also genau dann, wenn $t \neq 9$.

(c) Die Koeffizientenmatrix dieses LGS ist A. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist $(A|\mathbf{b})$ mit $\mathbf{b} = (3, -1, -2)^T$. Aus Satz 7.4.1 und Satz 7.4.5 aus Serie 6 ist bekannt, dass für eine $m \times n$-Matrix, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ folgendes gilt:

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|\mathbf{b}) \iff A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ ist lösbar und es gilt } n = \operatorname{rang}(A) + \dim(\mathbb{L}).$$

(i) Ist $\det(A) \neq 0$, so existiert genau eine Lösung, vgl. Satz 8.3.5 aus Aufgabe 8. Für alle $t \neq 9$ ist $\det(A) \neq 0$. Für $t \neq 9$ hat das Gleichungssystem somit genau eine Lösung.

(ii) Wir müssen nur den Fall $t = 9$ untersuchen. Wir wissen, dass $\operatorname{rang}(A|\mathbf{b}) = \operatorname{rang}(A) < 3$ sein muss, damit unendlich viele Lösungen existieren. Um den Rang zu bestimmen, reicht es die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ in Zeilenstufenform zu bringen. Mit dem Eliminationsverfahren erhalten wir

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}$		
1	1	2	−1	3		eliminiere x_1
2	−2	1	−8	−1		
3	1	−3	9	−2		
4	1	2	−1	3	1	
5	0	5	−10	5	$2 - 2 \cdot 1$	eliminiere x_2
6	0	−5	10	−5	$3 - 1$	
7	1	2	−1	3	4	
8	0	1	−2	1	$\frac{1}{5} \cdot 5$	
9	0	0	0	0	$6 + 5$	

Die Anzahl der verbleibenden von Nullzeilen verschiedenen Zeilen der Koeffizientenmatrix ist 2. Diese Zahl ist gleich der Anzahl der verbleibenden von Nullzeilen verschiedenen Zeilen der erweiterten Koeffizientenmatrix. Somit ist $\operatorname{rang}(A|\mathbf{b}) = \operatorname{rang}(A) = 2 < 3$. Das LGS ist also lösbar und es ist $3 = \operatorname{rang}(A) + \dim(\mathbb{L}) \iff \dim(\mathbb{L}) = 3 - \operatorname{rang}(A) = 1$, vgl. Satz 7.4.1 und 7.4.5 aus Serie 6. Die Lösungsmenge ist eine Gerade und es gibt unendlich viele Lösungen.

– –

Alternative Lösung:

Wir müssen nur den Fall $t = 9$ untersuchen. Für $t = 9$ ist $\det(A) = 0$ und somit $\operatorname{rang}(A) < 3$, vgl. Satz 8.3.3 aus Aufgabe 5. Die rechte Seite ist eine Linearkombination der ersten beiden Spaltenvektoren von A,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

daher muss $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|\mathbf{b}) < 3$ sein, denn die Anzahl der linear unabhängigen Vektoren ändert sich nicht, wenn man $\mathbf{b}$ als zusätzlichen Spaltenvektor hinzufügt.

Das LGS ist also lösbar und es gilt $3 = \operatorname{rang}(A) + \dim(\mathbb{L})$. Da $\operatorname{rang}(A) < 3$ muss die Dimension des Lösungsraumes > 0 sein, sprich es müssen unendlich viele Lösungen existieren.

(iii) Wir haben in (i) gesehen, dass das LGS für $t \neq 9$ eindeutig lösbar ist. Für $t = 9$ hat es unendlich viele Lösungen. Es gibt daher kein $t \in \mathbb{R}$, sodass das LGS nicht lösbar ist.

Alternative Lösung:
Da $\boldsymbol{b}$ eine Linearkombination der ersten beiden Spaltenvektoren ist (siehe (ii)), ist $\boldsymbol{x} = (1,1,0)^T$ unabhängig von der Wahl von t, eine Lösung des LGS. Das LGS hat also stets eine Lösung und kann insbesondere nicht unlösbar sein.

Aufgabe 10 (Determinante von Inversen und Produkten)

Gegeben seien drei reguläre Matrizen A, B und C der Ordnung n.

(a) Stellen Sie die Inverse der Matrix $F = ABC$ mit Hilfe von A^{-1}, B^{-1} und C^{-1} dar.
(b) Sei nun $\det(A) = \alpha$, $\det(B) = \beta$ und $\det(C) = \gamma$. Berechnen Sie $\det(F^{-1})$, mit $F = ABC$ aus Teilaufgabe (a).
(c) $(*)$ Zeigen Sie mit Hilfe der Determinante, dass die Matrix $C = AB$ genau dann regulär ist, wenn A und B regulär sind.

Lösung:

(a) Die Inversen existieren, da A, B und C regulär sind. Mit Hilfe von Satz 8.2.5 aus Serie 7 folgt damit,
$$F^{-1} = (ABC)^{-1} = ((AB)C)^{-1} = C^{-1}(AB)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

(b) Aus der Vorlesung kennen wir folgenden Satz:

> **Satz 8.3.7 - Weitere Eigenschaften von Determinanten**
> Seien A und B quadratische Matrizen der Ordnung n. Dann gilt:
> - $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
> - Ist $\det(A) \neq 0$, dann ist A invertierbar und es gilt $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Somit gilt,

$$\begin{aligned}\det\left(F^{-1}\right) &= \det\left(C^{-1}B^{-1}A^{-1}\right) = \det\left(C^{-1}\right) \cdot \det\left(B^{-1}\right) \cdot \det\left(A^{-1}\right) \\ &= \frac{1}{\det(C)} \cdot \frac{1}{\det(B)} \cdot \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{\gamma\beta\alpha}.\end{aligned}$$

(c) $(*)$ Mit Hilfe von Satz 8.3.7 aus Aufgabe (b) gilt: A und B sind regulär $\iff$ $\det(A) \neq 0$ und $\det(B) \neq 0 \iff \det(C) = \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \neq 0 \iff C$ ist regulär.

Aufgabe 11 (Determinante als Flächenveränderung)

Betrachten Sie die lineare Abbildung f mit Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}.$$

Zudem sei $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2\}$. Was ist der Flächeninhalt des Bildes $f(M)$?

Lösung:

Aus der Vorlesung kennen wir folgenden Satz:

Satz 8.3.6 - Die Determinante als Flächen- bzw. Volumenveränderung
Sei $n = 2$ oder $n = 3$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, A eine $n \times n$-Matrix, und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Flächeninhalt bzw. Volumen $\mathrm{Vol}(M)$. Dann gilt

$$\mathrm{Vol}(f(M)) = |\det(A)| \cdot \mathrm{Vol}(M).$$

Für $M \in \mathbb{R}^2$ ist also der Flächeninhalt des Bildes $f(M)$ einer linearen Abbildung mit Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, das $|\det(A)|$-fache des Flächeninhalts von M. Die Determinante von M ist,

$$\det(M) = 12 \cdot 13 - 9 \cdot 6 = 102.$$

Da M ein Quadrat mit Flächeninhalt 4 ist, ist der Flächeninhalt von $f(M)$ gleich $102 \cdot 4 = 408$.

Aufgabe 12 ((#) Determinante, Zeilenumformungen, transponierter Matrix)
Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 4 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

mit $\det(A) = 92$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) $\det(A^T) = -92.$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $\det \begin{pmatrix} 4 & 9 & 10 \\ 4 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = -92.$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $\det \begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 4 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = -92.$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $\det \begin{pmatrix} 5 & -5 & 2 \\ 4 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 108.$ ☐ wahr ☐ falsch

Lösung:

Satz 8.3.8 - Weitere Eigenschaften der Determinante
Sei A eine quadratische Matrix der Ordnung n, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

i. $\det(A^T) = \det(A)$.
ii. Vertauscht man zwei Zeilen, so ändert die Determinante das Vorzeichen, bleibt aber betragsmässig gleich.

iii. Die Determinante ist linear bezüglich jeder Zeile, d.h. es gilt für alle $i = 1, \ldots, n$:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 a_{i1} + \alpha_2 b_1 & \ldots & \alpha_1 a_{in} + \alpha_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \alpha_1 \det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} + \alpha_2 \det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & \ldots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

iv. Für $\alpha \in \mathbb{R}$, $i_2 \in \{1, \ldots, m\}, i_2 \neq i$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + \alpha a_{i_2 1} & \ldots & a_{in} + \alpha a_{i_2 n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

v. Die Determinante ist linear bezüglich jeder Spalte, d.h. es gilt für alle $j = 1, \ldots, n$:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & \alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 b_1 & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & \alpha_1 a_{nj} + \alpha_2 b_n & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \alpha_1 \det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} + \alpha_2 \det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

vi. Für $\alpha \in \mathbb{R}$, $j_2 \in \{1, \ldots, m\}, j_2 \neq j$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} + \alpha a_{1j_2} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} + \alpha a_{nj_2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

- Zu (1): Aus Satz 8.3.8 wissen wir, dass $\det(A) = \det(A^T)$, also ist $\det(A^T) = 92$. Die Aussage (1) ist falsch.

- Zu (2): Tauscht man die erste und die zweite Zeile der Matrix A, so erhält man die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 10 \\ 4 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aus Satz 8.3.8 wissen wir, dass wenn man zwei Zeilen einer Matrix vertauscht, die Determinante betragsmässig gleich bleibt, das Vorzeichen sich aber verändert. Die Aussage (2) ist wahr.

- Zu (3): Addiert man einmal die zweite Zeile von A zur ersten Zeile von A, so erhält man die Matrix
$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 4 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$
Aus Satz 8.3.8 wissen wir, dass sich die Determinante einer Matrix nicht verändert, wenn man einen Zeilenvektor der Matrix zu einem anderen Zeilenvektor der Matrix addiert. Somit ist die Determinante der neuen Matrix immer noch 92. Die Aussage (3) ist falsch.

- Zu (4): Addiert man den Zeilenvektor $(1,0,0)$ zur ersten Zeile von A, erhält man die Matrix
$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & 2 \\ 4 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$
Die Determinante dieser Matrix ist die Summe der Determinante von A und der Determinante einer Matrix, welche den Vektor $(1,0,0)$ in der ersten Zeile, $\mathbf{a}_2$ in der zweiten Zeile und $\mathbf{a}_3$ in der dritten Zeile hat, vgl. Satz 8.3.8. Es gilt also,
$$\det\begin{pmatrix} 5 & -5 & 2 \\ 4 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 92 + \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 92 + 16 = 108.$$
Die Aussage (4) ist wahr.