Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät der Universität Zürich
Professur Mathematik für Ökonomen

# Prüfung zur Vorlesung Mathematik II Frühlingssemester 2013
# Musterlösungen

28. Mai 2013

**AUFGABE 1**
**Aufgabe 1.1**

**1.1 (i)** $\boxed{\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C}$

Durch die Substitution $y = 1+x^2$, $dy = 2x\,dx$ lässt sich das Integral einfach lösen.

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{2y}\,dy = \frac{1}{2}\ln(y) + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

**1.1 (ii)** $\boxed{\int f(x)\,dx = (g(x))^2 - g'(x)}$

$$\int f(x)\,dx = \underbrace{\int 2\,g'(x)g(x)\,dx}_{I_1} - \underbrace{\int g''(x)\,dx}_{I_2}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= 2g(x)g(x) - \int 2\,g(x)g'(x)\,dx + C_1 = 2(g(x))^2 - I_1 + C_1 \Rightarrow I_1 = (g(x))^2 + \tilde{C}_1 \\ I_2 &= g'(x) + C_2 \end{aligned}$$

**Aufgabe 1.2**

(a) Bestimmung der Grenzen :

$$-1-x = 1-x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow -1 \le x \le 2$$

Integral :

$$\begin{aligned} F &= \int_{-1}^{2} ((1-x^2)-(-1-x))\,dx = \int_{-1}^{2}(2+x-x^2)\,dx \\ &= \left[2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = \left(4+2-\frac{8}{3}\right) - \left(-2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = 8-3-\frac{1}{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

(b) Inneres Integral (nach $x$) :

$$\int_{-1}^{1}(2x+y)\,dx = \left[x^2+yx\right]_{-1}^{1} = (1+y)-(1-y) = 2y$$

Doppelintegral :

$$\int_0^1 \left(\int_{-1}^{1}(2x+y)\,dx\right)\,dy = \int_0^1 2y\,dy = \left[y^2\right]_0^1 = 1$$

## AUFGABE 2

### Aufgabe 2.1

**2.1 (i)** $\boxed{\underline{p}^T Q \underline{q} = -21}$

$\underline{v} = Q\underline{q} = (-8, 5)^T$ und somit $\underline{p}^T Q \underline{q} = \underline{p}^T \underline{v} = -21$

**2.1 (ii)** $\boxed{B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$

Folgt aus der Formel zum Invertieren für $2 \times 2$ Matrizen.

### Aufgabe 2.2

(a)

$$\begin{array}{rrr|r:r l}
1 & 4 & 5 & 4 & 4 & \\
-2 & 1 & 8 & 1 & 1 & +2 \cdot \text{Zeile } 1 \\
0 & 1 & 2 & 1 & -2 & \\
\hline
1 & 4 & 5 & 4 & 4 & -4 \cdot \text{Zeile } 3 \\
0 & 9 & 18 & 9 & 9 & : 9 \\
0 & 1 & 2 & 1 & -2 & -\frac{1}{9} \cdot \text{Zeile } 2 \\
\hline
1 & 0 & -3 & 0 & 12 & \\
0 & 1 & 2 & 1 & 1 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & -3 &
\end{array}$$

Somit sehen wir sofort anhand der letzen Zeile ($0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -3$), dass für $\underline{b}^2$ das System unlösbar ist. Ausserdem können wir nun aus dem letzten Tableau die allgemeine Lösung für $\underline{b}^1$ ablesen. Wir setzen $t = x_3$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Wegen den Vorraussetzungen gilt $C^{-1} = C^T$ und $D^{-1} = D^T$. Damit folgt sofort

$$(CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1} = D^T C^T = (CD)^T.$$

Also ist $CD$ orthogonal.

## AUFGABE 3
### Aufgabe 3.1

**3.1 (i)** $\boxed{\det C = \text{-30}}$

Variante 1: Mit dem Laplace-Entwicklungssatz. Es bietet sich hier an, nach der 2-ten Spalte zu entwickeln, da diese nur ein von Null verschiedenes Element enthält.

$$\det C = (-2) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Die verbleibende Determinante berechnen wir durch Entwicklen nach der letzten Spalte:

$$2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 0 + (-3) \cdot 5 = -15.$$

Also ist $\det C = (-2) \cdot (-1) \cdot (-15) = -30$.

Variante 2: Wir bringen $C$ mit Gauss auf Dreiecks-Form.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & -2 & 0 & \\ 2 & 0 & 1 & 2 & -2Z_1 \\ 7 & -2 & 4 & 3 & -7Z_1 \\ -1 & 0 & 2 & -3 & +Z_1 \\ \hline 1 & 0 & -2 & 0 & \\ 0 & 0 & 5 & 2 & \to Z_3 \\ 0 & -2 & 18 & 3 & \to Z_2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & \\ \hline 1 & 0 & -2 & 0 & \\ 0 & -2 & 18 & 3 & \\ 0 & 0 & 5 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & -3 & \\ \hline \end{array}$$

Der Zeilentausch im letzten Schritt führt zu einem zusätzlichen Faktor $(-1)$.

$$\det C = (-1) \cdot 1 \cdot (-2) \cdot 5 \cdot (-3) = -30 \text{ (Produkt der Diagonalelemente und } (-1))$$

**3.1 (ii)** $\boxed{\det \widetilde{Q} = 15}$

Wir benutzen, dass die Determinante linear in jedem Spaltenvektor ist und wenden diese Eigenschaft zuerst auf den 2. Spaltenvektor an:

$$\det \widetilde{Q} = \det[\, \underline{q}^1 \,,\, (2\underline{q}^1 + 3\underline{q}^3) \,,\, (\underline{q}^2 + \underline{q}^3) \,] = \det[\, \underline{q}^1 \,,\, 2\underline{q}^1 \,,\, (\underline{q}^2 + \underline{q}^3) \,] + \det[\, \underline{q}^1 \,,\, 3\underline{q}^3 \,,\, (\underline{q}^2 + \underline{q}^3) \,]$$

Die erste Determinante ist gleich 0, weil die Spalten $\underline{q}^1$ und $2\underline{q}^1$ linear abhängig sind. Übrig bleibt

$$\det[\, \underline{q}^1,\ 3\underline{q}^3,\ (\underline{q}^2 + \underline{q}^3) \,] = \det[\, \underline{q}^1,\ 3\underline{q}^3,\ \underline{q}^2 \,] \ + \ \det[\, \underline{q}^1,\ 3\underline{q}^3,\ \underline{q}^3 \,].$$

Wiederum ist die letzte Determinante gleich 0, weil $3\underline{q}^3$ und $\underline{q}^3$ linear abhängig sind. Weil die Determinante bei einem Spaltentausch das Vorzeichen wechselt, erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \det \widetilde{Q} &= \det[\, \underline{q}^1 \,,\, 3\underline{q}^3 \,,\, \underline{q}^2 \,] = 3 \cdot \det[\, \underline{q}^1 \,,\, \underline{q}^3 \,,\, \underline{q}^2 \,] = (-1) \cdot 3 \cdot \det[\, \underline{q}^1 \,,\, \underline{q}^2 \,,\, \underline{q}^3 \,] \\ &= -3 \cdot \det Q = -3 \cdot (-5) = 15. \end{aligned}$$

**Aufgabe 3.2**

(a) Wir schreiben das LGS (1) als Gauss-Schema:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|
| $-1$ | $1$ | $2$ | $0$ |
| $0$ | $t+1$ | $1$ | $0$ |
| $0$ | $0$ | $t-1$ | $0$ |

Das Schema ist bereits in (oberer) Dreiecks-Form. Wir können sofort die Determinante der Koeffizienten-Matrix (=: $A$) als Produkt der Haupdiagonal-Elemente ablesen:

$$\det A = (-1) \cdot (t+1) \cdot (t-1) \qquad (= 1 - t^2).$$

(i) $A$ ist eine $3 \times 3$-Matrix, deshalb gilt:

$$\begin{aligned} \text{Das LGS (1) hat eine eindeutige Lösung} &\Leftrightarrow \text{Rang } r(A) = 3 \\ &\Leftrightarrow \det A \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (t+1) \cdot (t-1) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow t \neq 1 \wedge t \neq -1 \Leftrightarrow t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die eindeutige Lösung ist in diesem Fall der Null-Vektor: $\underline{x} = \underline{o}$ , die Dimension der Lösungsmenge ist 0.

(ii) Für die Dimension der Lösungsmenge $L$ von (1) gilt: $\dim L = n - r(A) = 3 - r(A)$. Für $\dim L = 1$, ist $r(A) = 2$. Da in diesem Fall $A$ singulär ist und somit $\det A = -(t+1) \cdot (t-1) = 0$ gilt, kommt nur $t = 1$ bzw. $t = -1$ in Frage.

$t = 1$: Die Koeffizientenmatrix $A$ sieht wie folgt aus:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall ist offensichtlich $r(A) = 2$. Die letzte Zeile ist eine Null-Zeile und die ersten zwei Zeilen sind linear unabhängig voneinander.

$t = -1$: Wir können die Koeffizientenmatrix $A$ wie folgt umformen:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underbrace{\Rightarrow}_{Z_3' = Z_3 + 2Z_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist auch hier $r(A) = 2$.

Somit lautet die Antwort: $t = 1 \vee t = -1 \Leftrightarrow t \in \{-1, 1\}$.

(iii) In diesem Fall ist aufgrund von $\dim L = 3 - r(A)$ der Rang $r(A) = 1$ und die $\det A = 1 - t^2 = 0$. Wie in (ii) gezeigt wurde, erzeugt $t = \pm 1$ den Rang $r(A) = 2$. Antwort: Für kein $t$ ist die Dimension der Lösungsmenge 2.

(iv) Einsetzen von $\underline{x} = \underline{x}^* = (1, 3, -1)^T$ in (1) ergibt:
Zeile 1: $(-1) \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = -1 + 3 - 2 = 0$ ist erfüllt.
Zeile 2: $(t + 1) \cdot 3 + 1 \cdot (-1) = 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -2/3$.
Zeile 3: $(t - 1) \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
$\underline{x}^*$ könnte also nur dann Lösung von (1) sein, wenn $t = -2/3 \wedge t = 1$, was nicht möglich ist: $\underline{x}^*$ ist keine Lösung von (1).
Antwort: Für kein $t$ ist $\underline{x}^*$ eine Lösung von (1).

(b) Das dyadische Produkt $P$ ist nichts anderes als das Matrix-Produkt des $2\times 1$-Spaltenvektors $\underline{u}$ mit dem $1 \times 2$-Zeilenvektor $\underline{v}^T$. $P$ ist also eine $2 \times 2$-Matrix und berechnet sich wie folgt:

$$P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}^T \right) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}.$$

$P$ hat nicht vollen Rang, denn

$$\det P = ac \cdot bd - ad \cdot bc = abcd - abcd = 0.$$

Es gilt also Rang $r(P) < 2$ (Alternativ kann dies über einen Gauss-Schritt und dem Pivot-Element $ac \neq 0$ gezeigt werden). Weil $a \neq 0$ und $c \neq 0$, ist auch $ac \neq 0$. $P$ hat also mindestens ein von Null verschiedenes Element. Somit muss auch $r(P) > 0$ gelten.
Aus $0 < r(P) < 2$ folgt schliesslich $r(P) = 1$. □

## AUFGABE 4

### Aufgabe 4.1

$$\boxed{\text{grad } f(\underline{x}) = 2C\underline{x} + Q\underline{q}}$$

$$\boxed{H(\underline{x}) = 2C}$$

$$H(\underline{x}) = (\text{grad } f(\underline{x}))' = \big(2C\underline{x} + Q\underline{q}\big)' = 2C$$

**4.2**

$$\boxed{\underline{x}^* = B^{-1}A^{-1}B\underline{b}}$$

$$\begin{aligned} AB\underline{x}^* &= B\underline{b} \\ \underbrace{A^{-1}A}_{=I} B\underline{x}^* &= A^{-1}B\underline{b} \\ \underbrace{B^{-1}B}_{=I} \underline{x}^* &= B^{-1}A^{-1}B\underline{b} \\ \underline{x}^* &= B^{-1}A^{-1}B\underline{b} \end{aligned}$$

**4.3**

☒ Nur (i) ist falsch.

☐ Nur (ii) ist falsch.

☐ Nur (iii) ist falsch.

☐ (i), (ii) und (iii) sind wahr.

☐ Keine der Antworten 1-4 ist richtig.

(i) Diese Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel: Für $\underline{u} = (1,0,0)^T$, $\underline{v} = (0,1,0)^T$ gilt $\|\underline{u} - \underline{v}\| = \sqrt{2} \geq 0 = |\ \|\underline{u}\| - \|\underline{v}\|\ |$.

(ii) Diese Aussage ist richtig. $\|\underline{u}+\underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2+2\underline{u}^T\underline{v}+\|\underline{v}\|^2$. Dementsprechend ist $\|\underline{u}+\underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2+\|\underline{v}\|^2$ genau dann, wenn $\underline{u}^T\underline{v} = 0$.

(iii) Diese Aussage ist richtig. Die Länge des Vektors $(\underline{u}-\underline{v})$ kann nur genau dann Null sein, wenn $\underline{u}-\underline{v} = \underline{o}$ bzw. $\underline{u} = \underline{v}$.

**4.4**

| w | f |
|---|---|
| × | |
| × | |
| × | |
| | × |
| × | |

Die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems kann abgelesen werden und lautet bei $x_1 = p$ und $x_4 = q$:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = p \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\underline{u}} + q \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\underline{v}},\ p, q \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zudem ist $\underline{w} = \underline{u} - \underline{v}$ und damit ist $\underline{w} \in L$.

- Wahr, da die Anzahl Vektoren von $X$ gleich der $\dim L = 2$ ist, die beiden Vektoren $\underline{u}, \underline{v}$ linear unabhängig sind und $\underline{u}, \underline{v} \in L$.
- Wahr, da $\underline{w} \in L$ und $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ eine Basis von $L$ ist.
- Wahr. Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems ist immer auch ein Vektorraum. Zudem ist $U$ eine Teilmenge von $L$ mit $t = p = q$ und die drei Unterraumkriterien sind erfüllt.
- Falsch, der Nullvektor liegt nicht in $V$.
- Wahr, denn der Rang der Koeffizientenmatrix ist gleich der Anzahl Zeilen dieses linearen Gleichungssystems und damit gleich dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix mit beliebigem $\underline{b}$.