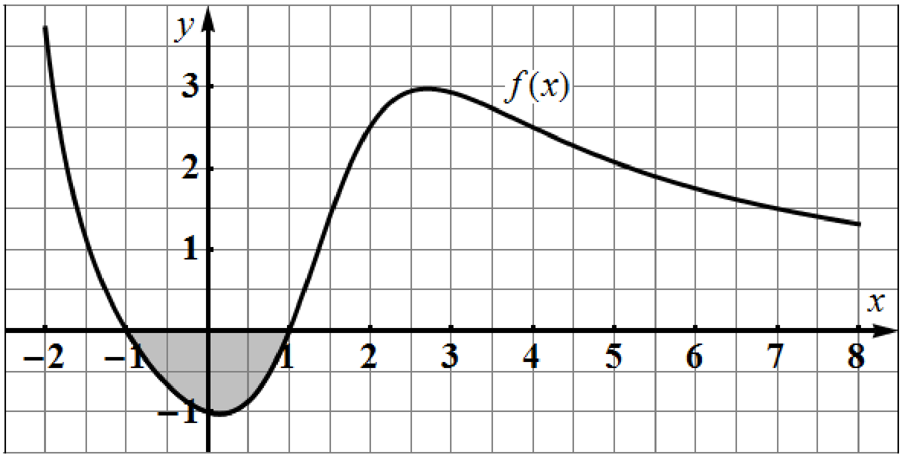
Aufgabe 1.1 - Mehrfachauswahl (8 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : [-2, 8] \to \mathbb{R}$. Ihr Graph ist durch folgende Abbildung gegeben.



a) Betrachten Sie den Flächeninhalt a der in obiger Abbildung grau schattierten Fläche, die durch die x-Achse und den Graphen von f zwischen -1 und +1 eingegrenzt wird.
Welche der folgenden Aussagen treffen für a zu?

☐ $a \leq 0$.	☒ $a > 0$.
☐ $a \leq \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.	☒ $a \geq \int_{-1}^{1} \lvert f(x)\rvert\, dx$.
☐ $a \geq 2.5$.	☒ $a \geq 0.5$.
☒ Es gibt ein $\xi \in [-1, 1]$ mit $2\lvert f(\xi)\rvert = a$.	☒ $a = \lvert \int_{-1}^{1} f(x)\, dx\rvert$.

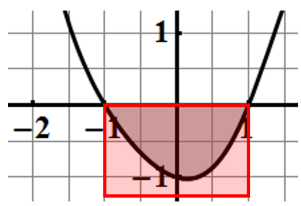
– '$a \leq 0$' ist falsch.
Erklärung: Ein Flächeninhalt kann nicht negativ sein. Da der schraffierte Flächeninhalt a auch nicht Null ist, stimmt diese Aussage nicht.

– '$a > 0$' ist richtig.
Erklärung: Der Flächeninhalt der schraffierten Fläche ist grösser als Null.

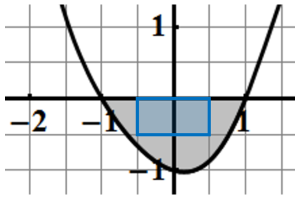
– '$a \leq \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$' ist falsch.
Erklärung: Für $x \in [-1, 1]$ ist die Funktion $f(x) \leq 0$ und folglich auch das Integral negativ. Der Flächeninhalt a ist jedoch positiv.

– '$a \geq \int_{-1}^{1} \lvert f(x)\rvert\, dx$' ist richtig.
Erklärung: Es gilt nämlich $a = \int_{-1}^{1} \lvert f(x)\rvert\, dx$.

– '$a \geq 2.5$' ist falsch.
Erklärung: Die folgende Abbildung ist ein Ausschnitt der gesamten Abbildung. Das eingezeichnete rot markierte Rechteck hat eine Länge von 2, eine Höhe von 1.25 und den Flächeninhalt $2 \cdot 1.25 = 2.5$. Die grau schattierte Fläche liegt vollständig innerhalb des roten Rechtecks. Folglich gilt $a \leq 2.5$.

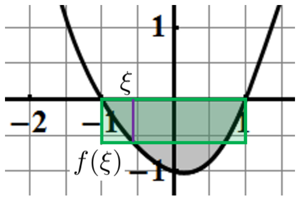


- '$a \geq 0.5$' ist richtig.
  Erklärung: Die folgende Abbildung ist ein Ausschnitt der gesamten Abbildung. Das eingezeichnete blau markierte Rechteck hat folglich eine Länge von 1, eine Höhe von 0.5 und den Flächeninhalt $1 \cdot 0.5 = 0.5$. Die grau schattierte Fläche umschliesst das blaue Rechteck vollständig. Folglich gilt $a \geq 0.5$.



- 'Es gibt ein $\xi \in [-1, 1]$ mit $2|f(\xi)| = a$' ist richtig.
  Erklärung: Der Mittelwertsatz der Interalrechnung besagt, dass für jede auf $[a, b]$ stetige, reelle Funktion g ein $\xi \in [a, b]$ existiert, so dass $\int_a^b g(x)\,dx = (b-a)g(\xi)$.

  Angewendet auf $g(x) = |f(x)|$ heisst das, dass ein $\xi \in [-1, 1]$ existiert, so dass $\int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx = 2|f(\xi)|$, da $(b-a) = 1-(-1) = 2$. Mit $a = \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx$ stimmt dann die Aussage.



- '$a = |\int_{-1}^{1} f(x)\,dx|$' ist richtig.
  Erklärung: Diese Aussage ist nur dann richtig, wenn $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [-1, 1]$ oder $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [-1, 1]$. Hier gilt $f(x) < 0$ für alle $x \in [-1, 1]$. (Wenn die Funktion sowohl positive, als auch negative Werte annimmt, dann stimmt diese Aussage nicht.)

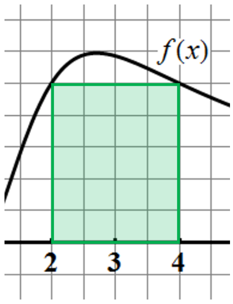
b) Sei $F : [-2, 8] \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \int_2^x f(t)\,dt$.
Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

☐ $F(2) \geq 2$.	☒ $F(2) < 2$.
☒ F ist auf $[1, 7]$ eine monoton steigende Funktion.	☐ F ist auf $[1, 7]$ eine konvexe Funktion.
☒ $F(4) > 5$.	☐ $F(4) = F(2)$.
☒ $F(1) < 0$.	☒ $F(2.5) < 1.5$.

- '$F(2) \geq 2$' ist falsch.
  (siehe unten)
- '$F(2) < 2$' ist wahr.
  Erklärung: Es gilt $F(2) = \int_2^2 f(t)\,dt = 0 < 2$.
- 'F ist auf $[1, 7]$ eine monoton steigende Funktion' ist wahr.
  Erklärung: $F(x)$ ist genau dann eine monoton steigende Funktion auf $[1, 7]$, wenn gilt $F'(x) \geq 0$ für alle $x \in [1, 7]$. Dies ist aus der Abbildung ersichtlich, da $F'(x) = f(x)$ ist.
- 'F ist auf $[1, 7]$ eine konvexe Funktion' ist falsch.
  Erklärung: F ist nur dann eine konvexe Funktion auf $[1, 7]$, wenn ihre Ableitung $F' = f$ auf diesem Intervall eine monoton steigende Funktion ist. Die Funktion f ist aber auf $[3, 7]$ monoton fallend, folglich ist F keine konvexe Funktion.

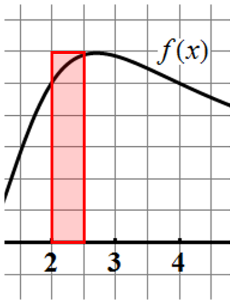
- '$F(4) > 5$' ist wahr.

  Erklärung: Es gilt $F(4) = \int_2^4 f(t)\, dt$. Das grün markierte Rechteck hat eine Länge von 2, eine Höhe von 2.5 und folglich den Flächeninhalt $2 \cdot 2.5 = 5$. Dieser Flächeninhalt ist kleiner als $\int_2^4 f(t)\, dt = F(4)$, deswegen stimmt die Aussage.



- '$F(4) = F(2)$' ist falsch.
  Erklärung: Es gilt $F(4) = \int_2^4 f(t)\, dt > 5$ (siehe vorherige Aufgabe), aber $F(2) = \int_2^2 f(t)\, dt = 0$.
- '$F(1) < 0$' ist wahr.
  Erklärung: Es gilt $F(1) = \int_2^1 f(t)\, dt = -\int_1^2 f(t)\, dt$. Da $f(x) \geq 0$ für $x \in [1, 2]$ folgt, dass $\int_1^2 f(t)\, dt > 0$. Also ist $F(1) = -\int_1^2 f(t)\, dt < 0$.
- '$F(2.5) < 1.5$' ist wahr.

  Erklärung: Es gilt $F(2.5) = \int_2^{2.5} f(t)\, dt$. Das rot markierte Rechteck hat eine Länge von 0.5 und eine Höhe von 3, seiner Flächeninhalt ist also $0.5 \cdot 3 = 1.5$ und ist grösser als $\int_2^{2.5} f(t)\, dt$.



Aufgabe 1.2 - Freitext (3 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{6x^2-2}{x^3-x+6}$.
Bestimmen Sie

$$\int f(x)\, dx.$$

Lösung
Da der Zähler von $f(x)$ ein Vielfaches der Ableitung des Nenners ist, bietet sich folgende Substitution als geeignet an:

$$u = g(x) = x^3 - x + 6 \Rightarrow du = g'(x)\, dx = (3x^2 - 1)\, dx$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = f(u) = \frac{2}{u}$$

Wir erhalten damit:

$$\int \underbrace{\frac{2}{(x^3 - x + 6)}}_{f(g(x))} \underbrace{(3x^2 - 1)}_{g'(x)}\, dx = \int \frac{2}{u}\, du = 2 \ln |u| + c = 2 \ln |x^3 - x + 6| + c.$$

Aufgabe 1.3 - Einfachauswahl (8 Punkte)

a) Die Funktion $H(x) = 2\sqrt{x-2}$ ist eine Stammfunktion von $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$.
Was ist der Wert des Integrals $\int_3^6 h(x)\, dx$?

○ $-\frac{1}{2}$ ○ 0 ○ $\frac{7}{16}$ ○ $\frac{1}{2}$
⊗ 2 ○ 6 ○ $\frac{28}{3}$ ○ Keiner davon.

Erklärung: Es gilt $\int_3^6 h(x)\, dx = H(x)|_3^6 = H(6) - H(3) = 2\sqrt{6-2} - 2\sqrt{3-2} = 4 - 2 = 2.$

b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{3x}$.
Welche der folgenden Funktionen ist eine Stammfunktion von f?

○ $\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x}$ ○ $e^{\frac{1}{3}x}$ ○ e^x ○ $3e^x$
⊗ $\frac{1}{3}e^{3x}$ ○ e^{3x} ○ $3e^{3x}$ ○ Keine davon.

Erklärung: Das Integral berechnet sich zu $\int e^{3x}\, dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c$, womit $\frac{1}{3}e^{3x}$ eine Stammfunktion für $f(x)$ ist.
Alternativ: Durch Ableiten der vorgeschlagenen Stammfunktionen kann die Aufgabe ebenfalls gelöst werden.

- $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x} = \frac{1}{9}e^{\frac{1}{3}x} \neq f(x)$
- $\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{1}{3}x}\right) = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x} \neq f(x)$
- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \neq f(x)$
- $\frac{d}{dx}(3e^x) = 3e^x \neq f(x)$
- $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right) = \frac{1}{3}\cdot 3e^{3x} = e^{3x} = f(x)$
- $\frac{d}{dx}(e^{3x}) = 3e^{3x} \neq f(x)$
- $\frac{d}{dx}(3e^{3x}) = 3\cdot 3e^{3x} = 9e^{3x} \neq f(x)$

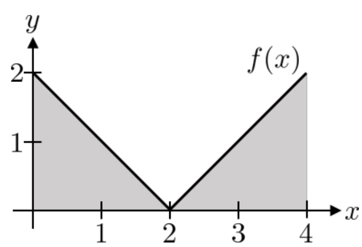
c) Was ist der Wert des Integrals $\int_0^4 |x-2|\, dx$?

○ -8 ○ -4 ○ -2 ○ 0
○ 2 ⊗ 4 ○ 8 ○ Keiner davon.

Erklärung: Es gilt $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{für } x \geq 2 \\ -(x-2) = -x+2 & \text{für } x < 2 \end{cases}$.
Das Integral der Funktion kann neu geschrieben werden als

$$\int_0^2 (-x+2)\, dx + \int_2^4 (x-2)\, dx = \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_2^4$$
$$= (-\frac{1}{2}4 + 2\cdot 2) + (\frac{1}{2}16 - 2\cdot 4) - (\frac{1}{2}4 - 2\cdot 2) = 4.$$

Alternative: Das Integral kann auch graphisch berechnet werden. Das Integral stimmt mit dem Flächeninhalt beider Dreiecke überein. Die beide Dreiecke sind gleich gross. Ihren Flächeninhalt beträgt $2\cdot(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2) = 4$.



d) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige, stetig differenzierbare Funktion und
$g(x) = (2x+1)f(x) + (x^2+x)f'(x)$.
Welche der folgenden Funktionen ist eine Stammfunktion von g?

- ◯ $(x^2+x)f(x) + (2x+1)f'(x)$
- ◯ $(x^2+x)f(x) + f(2x+1)$
- ⊗ $(x^2+x)f(x) + f(1)$
- ◯ $(2x+1)f'(x) + f(1)$
- ◯ $(x^2+x)f'(x) + f(2x+1)$
- ◯ $(2x+1)f(x) + f(x^2+x)$
- ◯ $(2x+1)f'(x) + f(x^2+x)$
- ◯ Keine davon.

Erklärung: Mit Hilfe der Rechenregeln und der partiellen Integration ($\int h'(x)f(x)\,dx = h(x)f(x) - \int h(x)f'(x)\,dx$) erhalten wir folgende Stammfunktionen

$$\begin{aligned}\int (2x+1)f(x) + (x^2+x)f'(x)\,dx &= \int \underbrace{(2x+1)}_{h'(x)} f(x)\,dx + \int (x^2+x)f'(x)\,dx\\ &= f(x)\underbrace{(x^2+x)}_{h(x)} - \int f'(x)\underbrace{(x^2+x)}_{h(x)}\,dx + \int (x^2+x)f'(x)\,dx\\ &= f(x)(x^2+x) + c.\end{aligned}$$

Die Lösung $f(x)(x^2+x)+f(1)$ mit der Konstante $c = f(1)$ ist folglich eine Stammfunktion von $g(x)$.

Alternative: Durch Ableiten der vorgeschlagenen Stammfunktionen kann die Aufgabe ebenfalls gelöst werden.

- $\frac{d}{dx}\left((x^2+x)f(x) + (2x+1)f'(x)\right) = (2x+1)f(x) + (x^2+x)f'(x) + 2f'(x) + (2x+1)f''(x) \neq g(x)$
- $\frac{d}{dx}\left((x^2+x)f(x) + f(2x+1)\right) = (2x+1)f(x) + (x^2+x)f'(x) + 2f'(2x+1) \neq g(x)$
- $\frac{d}{dx}\left((x^2+x)f(x) + f(1)\right) = (2x+1)f(x) + (x^2+x)f'(x) = g(x)$
- $\frac{d}{dx}\left((2x+1)f'(x) + f(1)\right) = 2f'(x) + (2x+1)f''(x) \neq g(x)$
- $\frac{d}{dx}\left((x^2+x)f'(x) + f(2x+1)\right) = (2x+1)f'(x) + (x^2+x)f''(x) + 2f'(2x+1) \neq g(x)$
- $\frac{d}{dx}\left((2x+1)f(x) + f(x^2+x)\right) = 2f(x) + (2x+1)f'(x) + f'(x^2+x)(2x+1) \neq g(x)$
- $\frac{d}{dx}\left((2x+1)f'(x) + f(x^2+x)\right) = 2f'(x) + (2x+1)f''(x) + f'(x^2+x)(2x+1) \neq g(x)$

Aufgabe 2.1 - Einfachauswahl (2 Punkte)

Gegeben seien die quadratische Matrix $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ der Ordnung 3 und die (3×4)-Matrix $B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

Sei $A \cdot B = C$ mit $C = (c_{ij})$.
Was ist der Wert des Elements c_{23} der Matrix C?

○ -5 ⊗ 1 ○ 15 ○ 21

○ 43 ○ 63 ○ 87 ○ Keiner davon.

Erklärung: Das Element c_{23} berechnet sich als

$$c_{23} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} b_{k3} = a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} + a_{23} b_{33} = 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 7 + 1 \cdot 8 = 1.$$

Aufgabe 2.2 - Freitext (2 Punkte)

Weiterhin gegeben seien die quadratische Matrix $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ der Ordnung 3 und ausserdem eine quadratische Matrix D der Ordnung 3 mit $A \cdot D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Inverse D^{-1} der Matrix D.

<u>Lösung</u>
Für die Inverse D^{-1} von D gilt $\quad D^{-1} D = I$.
Aus der Aufgabenstellung bekannt ist

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I \quad \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{4} A}_{D^{-1}} \cdot D = I \quad \Leftrightarrow D^{-1} = \frac{1}{4} A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Alternative I: Die Gleichung kann auf beiden Seiten von links mit A^{-1} multipliziert werden, um D zu bestimmen. Mit Hilfe von $(\lambda M)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot M^{-1}$ kann dann D invertiert werden.

$$\begin{aligned} A \cdot D &= 4I \\ \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{=I} \cdot D &= A^{-1} \cdot 4 \cdot I = 4 \cdot A^{-1} \cdot I = 4 \cdot A^{-1} \\ D &= 4A^{-1} \\ D^{-1} &= \left(4 \cdot A^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{4} \left(A^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{4} \cdot A. \end{aligned}$$

Alternative II: Mittels Gauss-Algorithmus (Simultanlösung) können zunächst die Matrix D aus der Gleichung $A \cdot D = 4I$ und danach die Inverse D^{-1} bestimmt werden.

Aufgabe 3 - Richtig oder Falsch (5 Punkte)

Gegeben seien die quadratische Matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ der Ordnung 2 und die linearen Unterräume des $\mathbb{R}^3$

$$U_1 = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad U_2 = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

a) Die Spaltenvektoren der Matrix B bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$. | ⊗richtig ○ falsch

Erklärung: Eine Basis des $\mathbb{R}^2$ besteht aus genau 2 linear unabhängigen Vektoren aus $\mathbb{R}^2$. Die beiden Spaltenvektoren von B, $\boldsymbol{b}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{b}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, sind Elemente des $\mathbb{R}^2$ und linear unabhängig, da z. B. $\boldsymbol{b}^1$ kein Vielfaches von $\boldsymbol{b}^2$ ist.

b) Die Zeilenvektoren der Matrix B bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$. | ⊗richtig ○ falsch

Erklärung: Die beiden Zeilenvektoren von B, $\tilde{\boldsymbol{b}}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $\tilde{\boldsymbol{b}}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$, sind Elemente des $\mathbb{R}^2$ und linear unabhängig, da z. B. $\tilde{\boldsymbol{b}}^1$ kein Vielfaches von $\tilde{\boldsymbol{b}}^2$ ist.

c) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. | ○ richtig ⊗falsch

Erklärung: Die drei Vektoren sind linear abhängig, da der dritte Vektor eine Linearkombination der ersten beiden Vektoren ist

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich bilden die drei gegebenen Vektoren keine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Alternative: Das Element $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ist nicht als Linearkombination der drei gegebenen Vektoren darstellbar, folglich bilden die drei Vektoren keine Basis des $\mathbb{R}^3$.

d) $\dim(U_2) = 3$. | ○ richtig ⊗falsch

Erklärung: Der lineare Unterraum U_2 ist definiert durch die lineare Hülle der zwei Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, folglich bilden diese zwei linear unabhängige Vektoren eine Basis von U_2. Es gilt also $\dim(U_2) =$ Anzahl Elemente der Basis $= 2$.

e) $U_1 = U_2$. | ⊗richtig ◯ falsch

Erklärung: Zwei Unterräume sind gleich, wenn beide eine gleiche Basis besitzen. Die Menge $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis, sowohl des U_2 (siehe d) als auch des U_1. Denn die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist ein Erzeugendensystem von U_1, nicht aber eine Basis, da sie linear abhängig ist (der dritte Vektor ist eine Linearkombination den anderen beiden Vektoren). Wird der dritte Vektor weggelassen, so bilden die verbliebenen Vektoren eine Basis des U_1.

Aufgabe 4.1 - Einfachauswahl (8 Punkte)

Gegeben sei nun die quadratische Matrix $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} b & c & d \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ der Ordnung 3.

a) Sei $b \neq 0$.
Was ist der Wert von $\operatorname{rang}(A)$?

○ -1 ○ 0 ○ 1 ○ 2

⊗ 3 ○ 4 ○ 9 ○ Keiner davon.

Erklärung: Wir bringen A in Trapezform:

	x_1	x_2	x_3	b	
1	b	c	d	0	
2	0	-2	1	0	
3	0	2	3	0	
4	b	c	d	0	
5	0	-2	1	0	
6	0	0	4	0	3 + 2

Da $b \neq 0$ hat A in der Trapeform 3 nicht-Nullzeilen, also ist $\operatorname{rang}(A) = 3$.

b) Sei $b \neq 0$.
Der erste Einheitsvektor $\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^3$ ist ein Eigenvektor von A.
Was ist der zugehörige Eigenwert?

○ $-6b$ ○ $\frac{b}{6}$ ○ $-12bcd$ ○ 0

○ 1 ⊗ b ○ $8b$ ○ Keiner davon.

Erklärung: Da $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist, gilt $A\mathbf{e}_1 = \lambda \mathbf{e}_1$.

Es gilt: $A\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} b & c & d \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und und $\lambda \mathbf{e}_1 = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Folglich ist $\mathbf{e}_1$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = b$.

c) Für welche der folgenden Werte von (b, c, d) gilt $\det(A) = 0$?

○ $(-6, 0, -6)$ ○ $(-1, 0, 0)$ ⊗ $(0, 1, 1)$ ○ $(1, 0, 1)$

○ $(1, 1, 0)$ ○ $(1, 1, 1)$ ○ $(6, 0, 6)$ ○ Für keine davon.

Erklärung: Die Determinante von A kann z.B. berechnet werden, in dem nach der ersten Spalte entwickelt wird:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} b & c & d \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot b \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot b \cdot ((-2) \cdot 3 - 1 \cdot 2) = b \cdot (-6 - 2) = -8b.$$

Die Determinante von A ist genau dann Null, wenn $b = 0$, d.h. $(b, c, d) = (0, 1, 1)$.

d) Für welche der folgenden Werte von (c, d) sind die beiden Spaltenvektoren $(a_{12}, a_{22}, a_{32})^T$ und $(a_{13}, a_{23}, a_{33})^T$ orthogonal zueinander?

○ $(0, 0)$ ○ $(0, 1)$ ○ $(0, 2)$ ○ $(1, 0)$

○ $(1, 1)$ ○ $(2, 0)$ ○ $(2, 2)$ ⊗ Für keine davon.

Erklärung: Zwei Vektoren sind genau dann orthogonal zueinander, wenn das Skalarprodukt der beiden Vektoren Null ergibt. Das Skalarprodukt der beiden Spaltenvektoren $(a_{12}, a_{22}, a_{32})^T = (c, -2, 2)^T$ und $(a_{13}, a_{23}, a_{33})^T = (d, 1, 3)^T$ ist

$$\begin{aligned}\langle (a_{12}, a_{22}, a_{32})^T, (a_{13}, a_{23}, a_{33})^T \rangle &= a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = c \cdot d + (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ &= c \cdot d + 4\end{aligned}$$

Folglich stehen die beiden Spaltenvektoren orthogonal zueinander, wenn $c \cdot d + 4 = 0 \Leftrightarrow c \cdot d = -4$. Keine der aufgeführten Werte erfüllt diese Gleichung.

Aufgabe 4.2 - Richtig oder Falsch (5 Punkte)

Weiterhin gegeben sei die quadratische Matrix $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} b & c & d \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ der Ordnung 3.

Seien $b, c, d \in \mathbb{R}$ nun so gewählt, dass $\det(A) = 2$.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

a) Die Inverse A^{-1} existiert. | ⊗ richtig ○ falsch

Erklärung: Aus $\det(A) = 2 \neq 0$ folgt, dass A regulär ist und somit A^{-1} existiert.

b) Die Matrix A ist positiv semidefinit. | ○ richtig ⊗ falsch

Erklärung: Um die Definitheitseigenschaften von A zu untersuchen wird zuerst b bestimmt. Aus $\det(A) = \begin{vmatrix} b & c & d \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -8b$ (vgl. 4.1c)) folgt $\det(A) = 2 = -8b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{4}$.
Um die Definitheit der Matrix A zu bestimmen werden die Hauptunterdeterminanten betrachtet.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & c & d \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} H_1 = -\frac{1}{4} \\ H_2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & c \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \\ H_3 = \det(A) = 2 \end{array}$$

Da die erste Hauptunterdeterminante negativ ist, kann die Matrix A nicht positiv semidefinit sein.

c) Das durch die Spaltenvektoren aufgespannte Parallelotop hat ein Volumen von 2. | ⊗ richtig ○ falsch

Erklärung: Es gilt $|\det(A)|$ = Volumen des durch die drei Spaltenvektoren aufgespannten Parallelotop.

d) $\det(5A) = 10$ | ○ richtig ⊗ falsch

Erklärung: Für eine $(n \times n)$-Matrix M und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\det(\lambda \cdot M) = \lambda^n \cdot \det(M)$. Es gilt also $\det(5A) = 5^3 \cdot \det(A) = 125 \cdot 2 = 250 \neq 10$.

e) Das LGS $A \cdot \boldsymbol{x} = (4, 37, 52)^T$ hat genau eine Lösung. | ⊗ richtig ○ falsch

Erklärung: Aus $\det(A) = 2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 3$ und $\operatorname{rang}(A, \boldsymbol{b}) \leq \min(3, 4) = 3$. Es gilt also $\operatorname{rang}(A, \boldsymbol{b}) = 3 = \operatorname{rang}(A)$. Das LGS besitzt folglich mindestens eine Lösung.
Für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ gilt

$$\dim(\mathbb{L}) = n - \operatorname{rang}(A) = 3 - 3 = 0.$$

Somit besitzt das gegebene LGS genau eine Lösung.

Aufgabe 5 - Mehrfachauswahl (4 Punkte)

Gegeben seien die quadratische Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ der Ordnung 3 und die (2×3)-Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(\boldsymbol{x}) = B \cdot A \cdot \boldsymbol{x}$ und $K = \{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}$ der Kern der Abbildung f. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

☒ f ist eine lineare Abbildung.

☐ f ist keine lineare Abbildung.

☐ f ist eine bijektive Abbildung.

☐ K ist die leere Menge, $K = \{\}$.

☐ $\dim(K) = 2$.

☒ K ist ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^3$.

☐ K ist eine Hyperebene.

☐ $\operatorname{rang}(B \cdot A) = 3$.

- 'f ist eine lineare Abbildung' ist wahr.
  Erklärung: Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann linear, wenn eine $(m\times n)$-Matrix C existiert mit $f(\boldsymbol{x}) = C\boldsymbol{x}$. Hier ist die (2×3)-Matrix $C = B \cdot A$.
- 'f ist keine lineare Abbildung' ist falsch.
- 'f ist eine bijektive Abbildung' ist falsch.
  Erklärung: Die Abbildung f ist genau dann bijektiv, wenn C eine quadratische reguläre Matrix ist. Da C aber keine quadratische Matrix ist, ist f keine bijektive Abbildung.
- ' K ist die leere Menge, $K = \{\}$' ist falsch.
  Erklärung: Es gilt offenbar $f(\mathbf{0}) = B \cdot A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Somit enthält der Kern K mindestens den Nullvektor.
- '$\dim(K) = 2$' ist falsch.
  Erklärung: Die Dimension des Kerns K der Abbildung f kann berechnet werden als
  $$\dim(K) = n - \dim(\operatorname{Bild}(f)) = n - \operatorname{rang}(C)$$
  Bestimmung von $\operatorname{rang}(C)$:
  $$C = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
  Die Matrix $C = B \cdot A$ besteht aus 2 linear unabhängigen Zeilen. Folglich ist $\operatorname{rang}(C) = 2$.
  Daraus folgt: $\dim(K) = n - \operatorname{rang}(C) = 3 - 2 = 1$.
- 'K ist ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^3$' ist wahr.
  Erklärung: K ist die Lösungsmenge des homogenen LGS $C\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, folglich stimmt die Aussage.

- 'K ist eine Hyperebene' ist falsch.
  Erklärung: Eine Hyperebene im n-dimensionalen Raum ist ein affiner Teilraum der Dimension $n-1$. Hier gilt $n=3$ und $\dim(K)=1\neq n-1$. K beschreibt also keine Hyperebene, sondern eine Gerade im $\mathbb{R}^3$.
- '$\text{rang}(B\cdot A)=3$' ist falsch.
  Erklärung: Die Matrix $C=B\cdot A$ ist eine (2×3)-Matrix. Der Rang von $C=B\cdot A$ kann also maximal 2 sein.

Aufgabe 6.1 - Einfachauswahl (2 Punkte)

Gegeben ist nun die (3×4)-Matrix $A=\begin{pmatrix}1&1&2&d+s\\4&3&3&3s\\5&4&6&d+4s\end{pmatrix}$, $d,s\in\mathbb{R}$.

Das Ergebnis der Multiplikation $\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}\cdot A$ mit $x,y,z\in\mathbb{R}$ ist ...

- ○ ein Element aus $\mathbb{R}$.
- ○ von der Form $\begin{pmatrix}a&b&c\end{pmatrix}$ mit $a,b,c\in\mathbb{R}$.
- ○ von der Form $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ mit $a,b,c\in\mathbb{R}$.
- ○ eine quadratische Matrix der Ordnung 3.
- ○ eine quadratische Matrix der Ordnung 4.
- ○ eine (3×4)-Matrix.
- ○ eine (4×3)-Matrix.
- ⊗ keine dieser Optionen.

Erklärung: Das Ergebnis der Multiplikation der (1×3)-Matrix $\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}$ mit der (3×4)-Matrix A ist eine (1×4)-Matrix (auch Zeilenvektor genannt).
Alternative: Die Matrixmultiplikation ergibt eine (1×4)-Matrix

$$\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&2&d+s\\4&3&3&3s\\5&4&6&d+4s\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}x+4y+5z & x+3y+4z & 2x+3y+6z & (d+s)x+3sy+(d+4s)z\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.2 - Freitext (2 Punkte)

Weiterhin gegeben ist die (3×4)-Matrix $A=\begin{pmatrix}1&1&2&d+s\\4&3&3&3s\\5&4&6&d+4s\end{pmatrix}$, $d,s\in\mathbb{R}$.
Berechnen Sie das Ergebnis der Multiplikation $A\cdot\boldsymbol{x}$ mit $\boldsymbol{x}=(1,2,-1,0)^T$.
Lösung
Das Produkt der (3×4)-Matrix A und des Vektors $\boldsymbol{x}$ mit 4 Komponenten ist ein Vektor mit 3

Komponenten.

$$\underbrace{A}_{(3\times4)} \cdot \underbrace{\boldsymbol{x}}_{(4\times1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & d+s \\ 4 & 3 & 3 & 3s \\ 5 & 4 & 6 & d+4s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) + (d+s)\cdot 0 \\ 4\cdot 1 + 3\cdot 2 + 3\cdot(-1) + 3s\cdot 0 \\ 5\cdot 1 + 4\cdot 2 + 6\cdot(-1) + (d+4s)\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2-2 \\ 4+6-3 \\ 5+8-6 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}}_{(3\times1)}$$

Aufgabe 6.3 - Einfachauswahl (3 Punkte)

Weiterhin gegeben ist die (3×4)-Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & d+s \\ 4 & 3 & 3 & 3s \\ 5 & 4 & 6 & d+4s \end{pmatrix}$, $d, s \in \mathbb{R}$ und ausserdem $\boldsymbol{b} = (2, 7, 9)^T$.

Gegeben sind die ersten Tableaus des Gauss-Algorithmus um das LGS $A \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ zu lösen:

y_1	y_2	y_3	y_4	$\boldsymbol{b}$	
1	1	2	$d+s$	2	
4	3	3	$3s$	7	1. Tableau
5	4	6	$d+4s$	9	
1	1	$\tilde{a}_{13}$	$\tilde{a}_{14}$	$\tilde{b}_1$	
0	-1	$\tilde{a}_{23}$	$\tilde{a}_{24}$	$\tilde{b}_2$	2. Tableau
0	-1	-4	$-4d-s$	-1	
		...			

a) Welchen Wert hat $\tilde{b}_1$?

○ -15 ○ -2 ○ -1 ○ 0
○ 1 ⊗ 2 ○ 15 ○ Keinen davon.

Erklärung: Die erste Zeile des Zweiten Tableaus ist unverändert, erkennbar an den ersten zwei Einträgen. Folglich sind auch die restlichen Einträge unverändert, $\tilde{b}_1 = 2$.

b) Welchen Wert hat $\tilde{a}_{24}$?

○ $d+s$ ○ $3s$ ○ $2s-d$ ○ $4d+s$
⊗ $-4d-s$ ○ $11s-d$ ○ $d-11s$ ○ Keinen davon.

Erklärung: Basierend auf den gegebenen Werten des 2. Tableaus wird das Tableau ergänzt.

y_1	y_2	y_3	y_4	$\boldsymbol{b}$			
1	1	1	2	$d+s$	2		1. Tableau
2	4	3	3	$3s$	7		
3	5	4	6	$d+4s$	9		
4	1	1	2	$d+s$	2		2. Tableau
5	0	-1	-5	$-4d-s$	-1	2 $-$ 4 1	
6	0	-1	-4	$-4d-s$	-1	3 $-$ 5 1	
		$\dots$					

Das Element $\tilde{a}_{24}$ hat den Wert $-4d-s$.

Aufgabe 7.1 - Freitext (3 Punkte)

Beim Lösen eines LGS $B \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{d}$ mit Hilfe des Gauss-Algorithmus wurde folgendes Tableau ermittelt:

y_1	y_2	y_3	y_4	$\boldsymbol{d}$
1	0	0	-3	1
0	1	0	7	1
0	0	1	0	0

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}_{\boldsymbol{d}}$ dieses LGS.

Lösung

Das gegebene Tableau ist bereits in Explizitform, wir können also die Lösung direkt ablesen:

$$\begin{array}{cccc|c} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \boldsymbol{d} \\ \hline 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 - 3y_4 &= 1 \\ y_2 + 7y_4 &= 1 \\ y_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= 1 + 3y_4 \\ y_2 &= 1 - 7y_4 \\ y_3 &= 0. \end{aligned}$$

Als freie Variable wird $y_4 = t$ gewählt. Daraus ergibt sich die Lösungsmenge

$$\mathbb{L}_{\boldsymbol{d}} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 7.2 - Richtig oder Falsch (5 Punkte)

Beim Lösen eines LGS $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit Hilfe des Gauss-Algorithmus trat folgendes Tableau auf. Dieses Tableau repräsentiert ein äquivalentes LGS $\tilde{A} \cdot \boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ mit Lösungsmenge $\mathbb{L}_{\boldsymbol{b}}$.

x_1	x_2	x_3	$\boldsymbol{b}$
1	0	1	2
0	1	3	1
0	0	c^2-1	$c-1$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

a) Für $c = -3$ hat das LGS genau eine Lösung. | ⊗ richtig ◯ falsch

Erklärung: Für $c = -3$ gilt $c^2 - 1 = 8 \neq 0$ und $\text{rang}(A) = 3 = n$.

x_1	x_2	x_3	$\boldsymbol{b}$
1	0	1	2
0	1	3	1
0	0	8	-4

Folglich gilt auch $\text{rang}(A) = \text{rang}(A, \boldsymbol{b})$ und das LGS ist lösbar.
Weil $\dim(\mathbb{L}) = n - \text{rang}(A) = 3 - 3 = 0$, hat die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ genau eine Lösung.
Alternative: Da $c^2 - 1 = 8 \neq 0$, können wir das Gauss-Tableau in die explizite Form bringen und erhalten

	x_1	x_2	x_3	$\boldsymbol{b}$	
1	1	0	1	2	
2	0	1	3	1	
3	0	0	8	-4	
4	1	0	1	2	
5	0	1	3	1	
6	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	3 : 8
7	1	0	0	$\frac{5}{2}$	4 − 6
8	0	1	0	$\frac{5}{2}$	5 − 3 6
9	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

Die Lösungsmenge enthält somit ein einziges Element.

b) Das LGS ist für $c = 2$ lösbar. | ⊗ richtig ◯ falsch

Erklärung: Für $c = 2$ gilt $c^2 - 1 = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(A, \boldsymbol{b})$, also ist das LGS lösbar.

c) Für $c = 1$ bildet die Lösungsmenge $\mathbb{L}_{\boldsymbol{b}}$ einen affinen Unterraum des $\mathbb{R}^3$. | ⊗ richtig ◯ falsch

Erklärung: Für $c = 1$ gilt $c^2 - 1 = 0 \neq 0$ und $c - 1 = 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(A, \boldsymbol{b})$, also ist das inhomogene LGS lösbar. Die Lösungsmenge eines inhomogenen LGS in $\mathbb{R}^3$ ist ein affiner Unterraum des $\mathbb{R}^3$.

Alternative: Der Wert $c = 1$ eingesetzt in das LGS, ergibt

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \boldsymbol{b} \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rl} x_1 + x_3 & = 2 \\ x_2 + 3x_3 & = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rl} x_1 & = 2 - x_3 \\ x_2 & = 1 - 3x_3 \end{array}$$

und mit $x_3 = t$ die Lösungsmenge

$$\mathbb{L}_{\boldsymbol{b}} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}^*} \right\} + \underbrace{\left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}}_{\mathbb{L}_0}$$

Diese Lösungsmenge beschreibt einen affinen Unterraum des $\mathbb{R}^3$, da sie aus einem einzelnen Element $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^3$ und einem linearen Unterraum ($\mathbb{L}_0$) des $\mathbb{R}^3$ besteht.

d) Für $c = -1$ bildet die Lösungsmenge $\mathbb{L}_{\boldsymbol{b}}$ einen linearen Unterraum des $\mathbb{R}^3$. | ○ richtig ⊗ falsch

Erklärung: Das LGS ist für alle $c \in \mathbb{R}$ inhomogen, die Lösungsmenge bildet also nie einen linearen Unterraum.
Alternativ: Für $c = -1$ gilt $\text{rang}(A) < \text{rang}(A, b)$ und folglich ist das LGS nicht lösbar. Die Lösungsmenge ist also die leere Menge $\mathbb{L}_{\boldsymbol{b}} = \{\}$. Ein linearer Unterraum darf aber per Definition nicht leer sein.

e) Für $c = -2$ gilt $\det(\tilde{A}) = 3$. | ⊗ richtig ○ falsch

Erklärung: Für $c = -2$ ist die Matrix $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\tilde{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3.$$