Aufgabe 1 (Vektoren des $\mathbb{R}^2$)

Gegeben seien die beiden Spaltenvektoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie folgende Vektoren
- $2\mathbf{u}$,
- $-2\mathbf{v}$,
- $2\mathbf{u}+\mathbf{v}$,
- $\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

(b) Stellen Sie die berechneten Vektoren graphisch in der Ebene $\mathbb{R}^2$ dar und berechnen Sie jeweils deren Länge.

(c) Bestimmen Sie $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -15 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(d) Bestimmen Sie $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

(e) Bestimmen Sie jeweils die Geradengleichung der Geraden, welche die Punkte **u** bzw. **v** mit dem Ursprung **0** verbindet.

(f) Stellen Sie folgende Mengen graphisch dar:
- (i) $\left\{\alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \geq 0\right\}$,
- (ii) $\left\{\alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \leq 0\right\}$,
- (iii) $\left\{\alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha_1 = 0, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\}$,
- (iv) $\left\{\alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha_1 = 1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\}$,
- (v) $\left\{\alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \alpha_1 \leq 1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\}$,
- (vi) $\left\{\alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0\right\}$,
- (vii) $\left\{\alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha_1 = \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\}$.

(g) Beantworten Sie die Fragen (a)-(f) im Falle $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

(a)

$$2\mathbf{u} = 2\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot(-3)\\2\cdot 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\6\end{pmatrix};$$

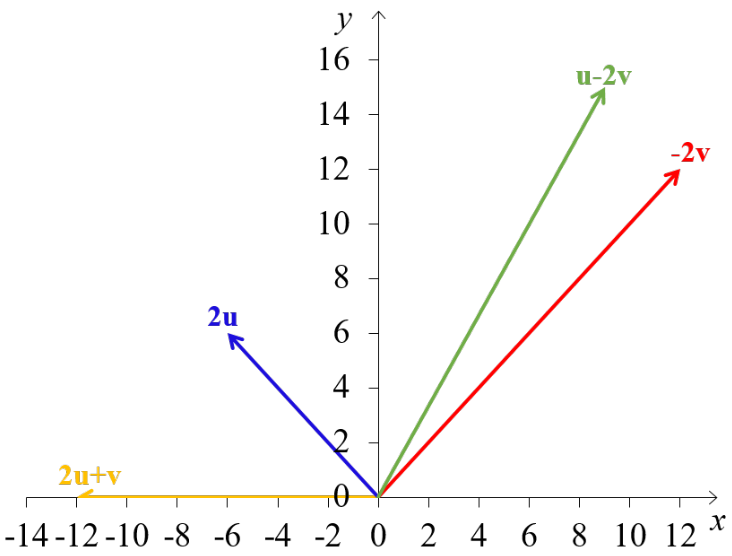
$$-2\mathbf{v} = -2\begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\cdot(-6)\\-2\cdot(-6)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix};$$

$$2\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix}-6\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6-6\\6-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\0\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{u}-2\mathbf{v} = \begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3+12\\3+12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\15\end{pmatrix}.$$

(b) Siehe Abbildung 1.1.

Abbildung 1.1: Die berechneten Vektoren in der Ebene $\mathbb{R}^2$



$$||2\mathbf{u}|| = \sqrt{(-6)^2+6^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{2\cdot 36} = 6\sqrt{2}$$

$$||-2\mathbf{v}|| = \sqrt{12^2+12^2} = \sqrt{2\cdot 144} = 12\sqrt{2}$$

$$||2\mathbf{u}+\mathbf{v}|| = \sqrt{(-12)^2+0^2} = \sqrt{144} = 12$$

$$||\mathbf{u}-2\mathbf{v}|| = \sqrt{9^2+15^2} = \sqrt{81+225} = \sqrt{306}$$

(c) Gesucht sind α_1 und α_2, sodass

$$\begin{pmatrix}-3\alpha_1-6\alpha_2\\3\alpha_1-6\alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\3\end{pmatrix}.$$

Wir suchen also α_1 und α_2, die folgende Gleichungen lösen:

$$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & -3\alpha_1 - 6\alpha_2 = & -15 \\ \text{(II)} & 3\alpha_1 - 6\alpha_2 = & 3. \end{array}$$

Eine Möglichkeit diese Werte α_1 und α_2 zu bestimmen ist die Substitutionsmethode.

> **Schema: Lösen von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten durch Substitution**
> (1) Löse eine der beiden Gleichungen nach einer der Variablen auf.
> (2) Setze das Ergebnis aus (1) in die andere Gleichung ein und löse nach der verbleibenden Variablen auf.
> (3) Setze das Ergebnis aus (2) wieder in die Gleichung aus (1) ein und bestimme so die Variable, nach der in (1) aufgelöst wurde.
> Sind Schritte (1) und (2) nicht möglich, so führt die Substitutionsmethode nicht zum Ziel. Erhält man in Schritt (2) keine Lösung, existieren keine Werte, welche eine Lösung zu beiden Gleichungen darstellen.

Wenden wir dieses Schema für die gegebenen Gleichungen (I) und (II) an.

(1) Wir lösen Gleichung (II) nach α_1 auf und erhalten $\alpha_1 = 2\alpha_2 + 1$.

(2) Setzt man diese Information in die Gleichung (I) ein, so suchen wir ein α_2 mit der folgenden Eigenschaft:

$$-3 \cdot (2\alpha_2 + 1) - 6 \cdot \alpha_2 = -15 \iff -12\alpha_2 = -12.$$

Somit erhalten wir $\alpha_2 = 1$.

(3) Aus $\alpha_2 = 1$ folgt, mit Hilfe der aufgelösten Gleichung aus (1), dass $\alpha_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$.

(d) Analog zu (c), suchen wir also α_1 und α_2, die folgende Gleichungen lösen:

$$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & -3\alpha_1 - 6\alpha_2 = & 6 \\ \text{(II)} & 3\alpha_1 - 6\alpha_2 = & -6. \end{array}$$

Wenden wir wieder das Schema für die gegebenen Gleichungen (I) und (II) an.

(1) Wir lösen Gleichung (I) nach α_1 auf und erhalten $\alpha_1 = -2\alpha_2 - 2$.

(2) Setzt man diese Information in die Gleichung (II) ein, so suchen wir ein α_2 mit der folgenden Eigenschaft:

$$3 \cdot (-2\alpha_2 - 2) - 6 \cdot \alpha_2 = -6 \iff -12\alpha_2 = 0$$

Somit erhalten wir $\alpha_2 = 0$.

(3) Aus $\alpha_2 = 0$ folgt, mit Hilfe der aufgelösten Gleichung aus (1), dass $\alpha_1 = -2 \cdot 0 - 2 = -2$.

(e) Wir führen folgende Begriffe ein:

> Eine Geradengleichung hat die Form $y = a_0 + a_1 x$ für a_0, $a_1 \in \mathbb{R}$. a_0 nennt man den $y-$*Achsenabschnitt* und a_1 die *Steigung* der Gerade.

Ein Punkt $(x, y)^T$ liegt genau dann auf dieser Gerade, wenn $y = a_0 + a_1 x$ erfüllt ist.

Schema: Geradengleichung durch zwei Punkte - im $\mathbb{R}^2$:
(1) Bestimmen Sie 2 Punkte auf der Geraden, $\mathbf{p}^1$ und $\mathbf{p}^2$.
(2) Bestimmen Sie die Werte a_0 und a_1, so dass

$$p_2^1 = a_0 + a_1 p_1^1$$
$$p_2^2 = a_0 + a_1 p_1^2$$

gilt, beispielsweise mit Hilfe der Substitutionsmethode.
(3) Die gesuchte Geradengleichung ist dann $y = a_0 + a_1 x$.

Zuerst bestimmen wir die Geradengleichung der Geraden, welche den Punkt $\mathbf{u}$ mit dem Ursprung $\mathbf{0}$ verbindet. Es sollen die Parameter a_0 und a_1 der Geradengleichung bestimmt werden, so dass die Punkte $\mathbf{0}$ und $\mathbf{u}$ auf der Gerade liegen. In Schritt (1) des obigen Schemas wählen wir also $\mathbf{p}^1 = \mathbf{0}$ und $\mathbf{p}^2 = \mathbf{u}$. In Schritt (2) lösen wir dann

$$0 = a_0 + a_1 0$$
$$3 = a_0 + a_1(-3).$$

Um dies zu lösen, wenden wir die Substitutionsmethode aus Aufgabe (c) an:
(1) Wir lösen die Gleichung (I) nach a_0 auf und erhalten $a_0 = 0$. (Liegt der Ursprung auf der Geraden, ist der y-Achsenabschnitt a_0 stets gleich 0).
(2) Setzt man $a_0 = 0$ in (II) ein, ergibt sich $3 = -3a_1$ bzw $a_1 = -1$. Die Steigung der gesuchten Gerade ist somit -1.
(3) Dieser Schritt ist hier nicht nötig. Die gesuchten Werte sind $a_0 = 0$, $a_1 = -1$.
In Schritt (3) ergibt sich somit die Geradengleichung $y = a_0 + a_1 x = 0 - 1x = -x$.

Jetzt bestimmen wir die Geradengleichung der Geraden, welche den Punkt $\mathbf{v}$ mit dem Ursprung $\mathbf{0}$ verbindet.Es sollen nun die Parameter a_0 und a_1 der Geradengleichung bestimmt werden, so dass die Punkte $\mathbf{0}$ und $\mathbf{v}$ auf der Gerade liegen. In Schritt (1) des obigen Schemas wählen wir also $\mathbf{p}^1 = \mathbf{0}$ und $\mathbf{p}^2 = \mathbf{v}$. In Schritt (2) lösen wir dann

$$0 = a_0 + a_1 0$$
$$-6 = a_0 + a_1(-6).$$

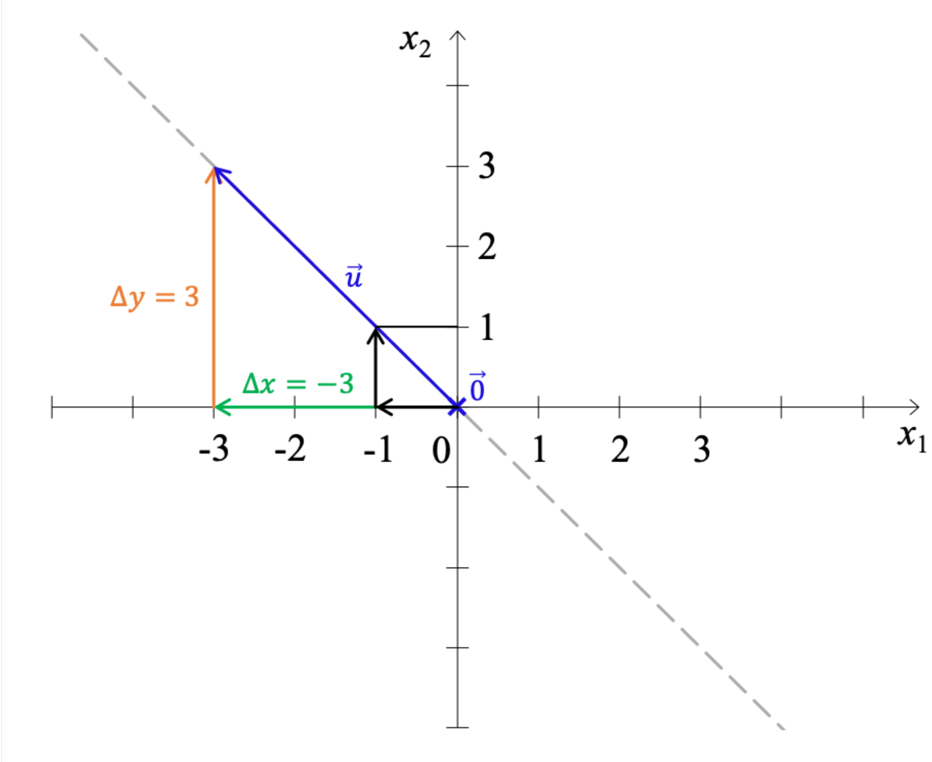
Um dies zu lösen, wenden wir die Substitutionsmethode aus Aufgabe (c) an:
(1) Wir lösen die Gleichung (I) nach a_0 auf und erhalten $a_0 = 0$. (Liegt der Ursprung auf der Geraden, ist der y-Achsenabschnitt a_0 stets gleich 0).
(2) Setzt man $a_0 = 0$ in (II) ein, ergibt sich $-6 = -6a_1$ bzw $a_1 = 1$. Die Steigung der gesuchten Gerade ist somit 1.
(3) Dieser Schritt ist hier nicht nötig. Die gesuchten Werte sind $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.
In Schritt 3 ergibt sich somit die Geradengleichung $y = a_0 + a_1 x = 0 + 1x = x$.

– –

Alternative Lösung:
Alternativ kann man auch anschaulich anhand von Abbildung 1.2 überlegen, dass für eine Gerade durch die Punkte $\mathbf{0}$ *und* $\mathbf{u}$ *bei einer Veränderung von x um* $\Delta x = u_1 - 0 = -3$*, die Veränderung von y genau* $\Delta y = u_2 - 0 = 3$ *beträgt. Die Steigung ist also* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -1 = a_1$*. Da die Gerade durch*

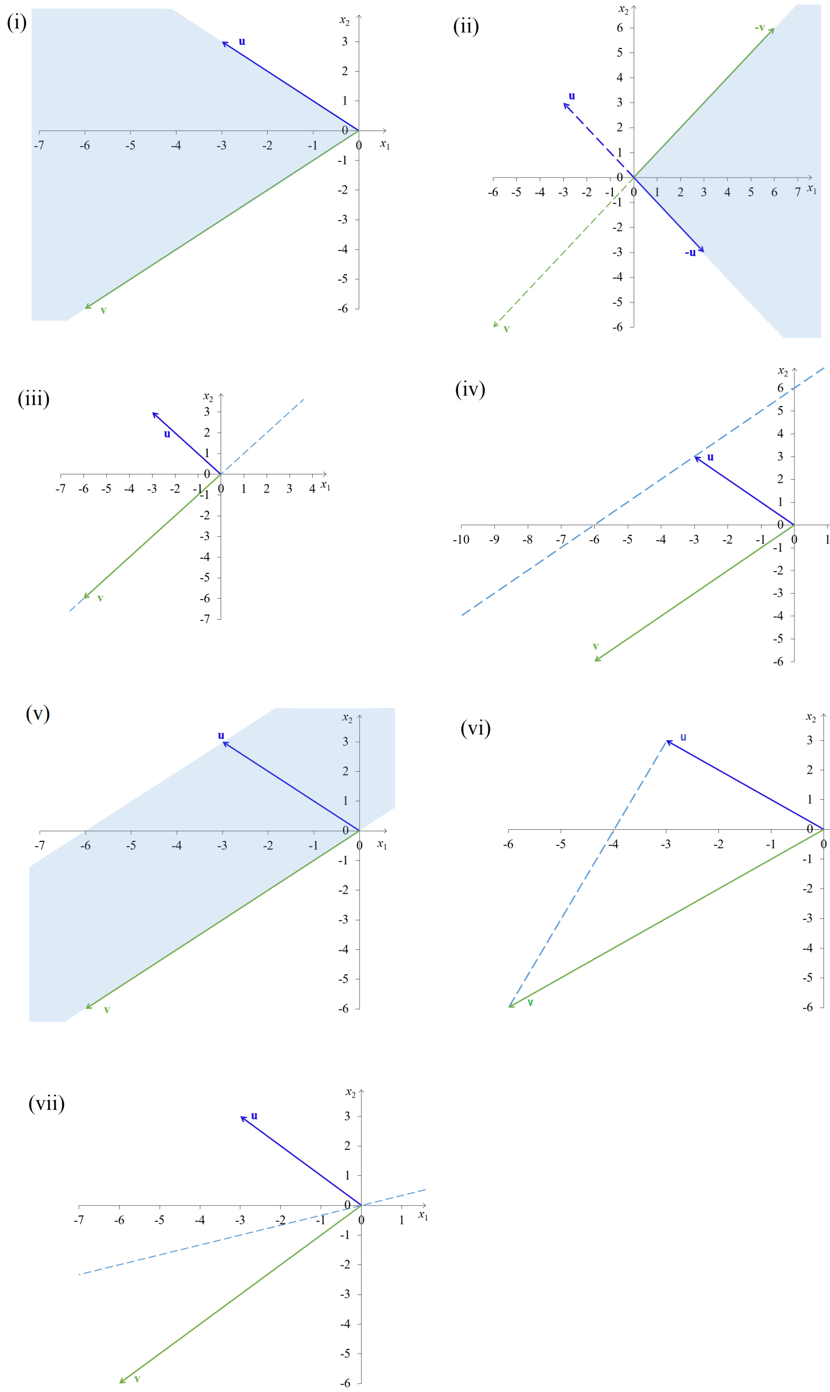
den Ursprung geht, muss $a_0 = 0$ *gelten. Dieselbe Überlegung gilt analog für eine Gerade durch* $\mathbf{0}$ *und* $\mathbf{v}$*, wobei hier die Steigung* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 = a_1$ *und* $a_0 = 0$ *gilt.*

Abbildung 1.2: Gerade, die **u** und den Ursprung **0** verbindet



(f) Siehe Abbildung 1.3. Die hellblaue Menge in (i), (ii) und (v) bzw. die hellblaue gestrichelte Linie in (iii), (iv), (vi) und (vii) stellt die gesuchte Menge graphisch dar.

Abbildung 1.3: Graphische Darstellung der Mengen (i)-(vii)

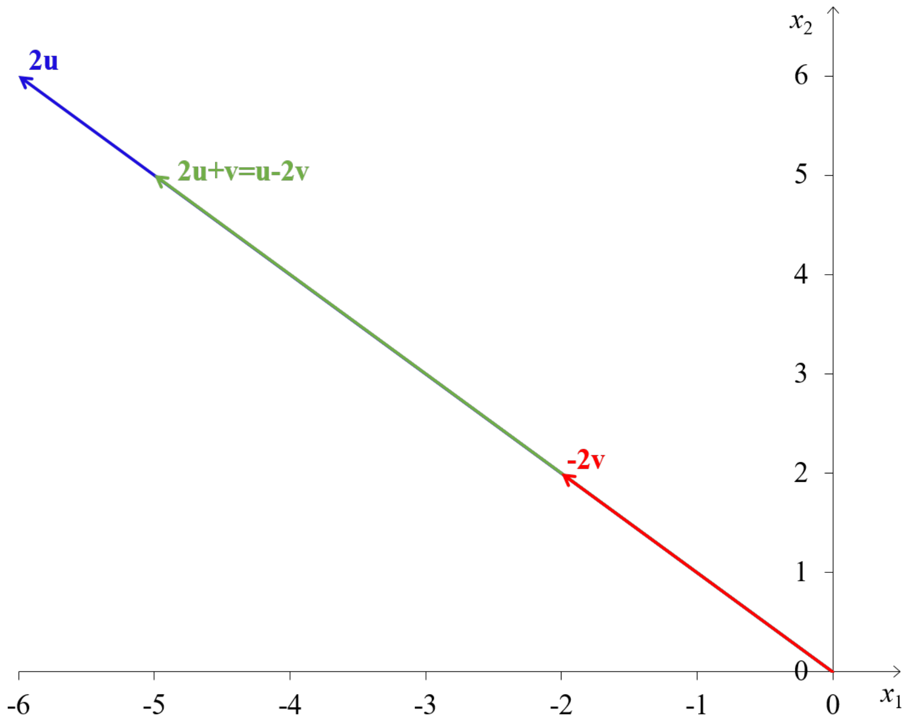


(g) (a)

$$
\begin{aligned}
2\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} 2\cdot(-3) \\ 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}; \\
-2\mathbf{v} &= \begin{pmatrix} -2\cdot 1 \\ -2\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
2\mathbf{u}+\mathbf{v} &= \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+1 \\ 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}; \\
\mathbf{u}-2\mathbf{v} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(b) Siehe Abbildung 1.4.

Abbildung 1.4: Die berechneten Vektoren in der Ebene $\mathbb{R}^2$



$$
\begin{aligned}
\|2\mathbf{u}\| &= \sqrt{(-6)^2+6^2} = \sqrt{2\cdot 36} = 6\sqrt{2}; \qquad \|-2\mathbf{v}\| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}; \\
\|2\mathbf{u}+\mathbf{v}\| &= \sqrt{(-5)^2+5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}; \qquad \|\mathbf{u}-2\mathbf{v}\| = \sqrt{(-5)^2+5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

(c) Gesucht sind α_1 und α_2, sodass

$$
\begin{pmatrix} -3\alpha_1 + 1\alpha_2 \\ 3\alpha_1 - 1\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 3 \end{pmatrix}.
$$

Wir suchen also α_1 und α_2, die folgende Gleichungen lösen:

$$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & -3\alpha_1 + \alpha_2 = & -15 \\ \text{(II)} & 3\alpha_1 - \alpha_2 = & 3. \end{array}$$

Wenden wir wieder die Substitutionsmethode für die gegebenen Gleichungen (I) und (II) an.

(1) Wir lösen die Gleichung (I) nach α_2 auf und erhalten $\alpha_2 = 3\alpha_1 - 15$.

(2) Setzt man diese Information in die Gleichung (II) ein, so suchen wir ein α_1 mit der folgenden Eigenschaft:

$$3 \cdot \alpha_1 - (3 \cdot \alpha_1 - 15) = 3 \iff 15 = 3.$$

Das ist für jede Wahl von α_1 ein Widerspruch da $15 \neq 3$; die Gleichung aufzulösen ist in dem Fall nicht möglich. Somit gibt es kein α_1 und α_2 mit der gewünschten Eigenschaft.

– –

Alternative Lösung:
*Solche α_1, α_2 können nicht existieren, da der Punkt $(-15, 3)^T$ nicht auf der Geraden $y = -x$ liegt. Ausführlicher: Die Geraden, die den Ursprung mit den Punkten $\boldsymbol{u} = (-3, 3)^T$ bzw. $\boldsymbol{v} = (1, -1)^T$ verbinden, sind gleich. Alle möglichen Kombinationen von neuen Vektoren durch Addition oder Multiplikation der Vektoren **u** und **v** befinden sich wiederum auf dieser Geraden. Folglich werden Punkte, die sich nicht auf der Gerade $y = -x$ befinden, nicht erreicht, wie beispielsweise der Punkt $(-15, 3)^T$.*

(d) Gesucht sind nun α_1 und α_2, sodass

$$\begin{pmatrix} -3\alpha_1 + \alpha_2 \\ 3\alpha_1 - 1\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen also α_1 und α_2, die folgende Gleichungen gleichzeitig lösen

$$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & -3\alpha_1 + \alpha_2 = & 6 \\ \text{(II)} & 3\alpha_1 - \alpha_2 = & -6. \end{array}$$

Wenden wir wieder die Substitutionsmethode für die gegebenen Gleichungen (I) und (II) an.

(1) Wir lösen die Gleichung (I) nach α_2 auf und erhalten $\alpha_2 = 3\alpha_1 + 6$.

(2) Setzt man diese Information in die Gleichung (II) ein, so suchen wir ein α_1 mit der folgenden Eigenschaft:

$$3 \cdot \alpha_1 - (3 \cdot \alpha_1 + 6) = -6 \iff -6 = -6.$$

Das ist für jede Wahl von α_1 eine wahre Aussage. Daher gibt es unendlich viele Lösungen, in Abhängigkeit von α_1.

(3) Setzt man α_1 fest, so muss man jedoch $\alpha_2 = 3\alpha_1 + 6$ setzen, damit die Gleichungen erfüllt sind. Hier zwei Beispiele von Lösungen:
$\alpha_1 = -2$ und $\alpha_2 = 0$ oder $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = 6$.

(e) Die Geradengleichung der Gerade durch den Ursprung und $\mathbf{u}$ wurde bereits in Aufgabe 1 (e) bestimmt.
Wir bestimmen nun die Geradengleichung der Geraden, welche den Punkt $\mathbf{v}$ mit dem Ursprung $\mathbf{0}$ verbindet. Es sollen nun die Parameter a_0 und a_1 der Geradengleichung bestimmt werden, so dass sowohl der Ursprung $\mathbf{0}$ als auch $\mathbf{v}$ auf der Gerade liegen. In Schritt (1) des in Aufgabe 1 (e) eingeführten Schemas wählen wir also $\mathbf{p}^1 = \mathbf{0}$ und $\mathbf{p}^2 = \mathbf{v}$. In Schritt (2) lösen wir dann

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 + a_1 0 \\ -1 &= a_0 + a_1 \cdot 1. \end{aligned}$$

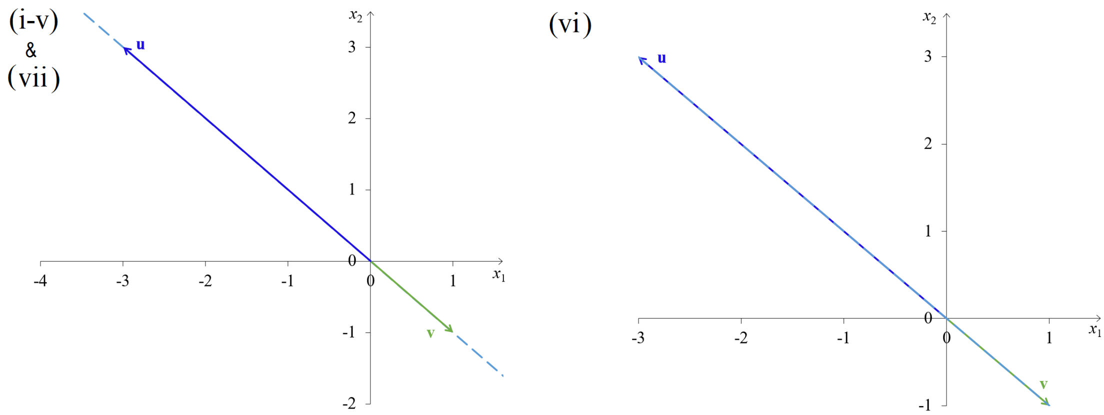
Um dies zu lösen, wenden wir die Substitutionsmethode aus Aufgabe (c) an:

(1) Wir lösen die Gleichung (I) nach a_0 auf und erhalten $a_0 = 0$. (Liegt der Ursprung auf der Geraden, ist der y-Achsenabschnitt a_0 stets gleich 0).
(2) Setzt man $a_0 = 0$ in (II) ein, ergibt sich direkt $a_1 = -1$. Die Steigung der gesuchten Gerade ist somit -1.
(3) Dieser Schritt ist hier nicht nötig. Die gesuchten Werte sind $a_0 = 0$, $a_1 = -1$.

In Schritt (3) ergibt sich somit die Geradengleichung $y = a_0 + a_1 x = 0 - 1x = -x$.

(f) Siehe Abbildung 1.5.

Abbildung 1.5: Graphische Darstellung der Mengen (i)-(vii)



Aufgabe 2 (Geradengleichung in Parameterform I)

Gegeben ist die Gerade

$$g_p : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}.$$

(a) Sei $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Stellen Sie die Gerade g_p graphisch im $\mathbb{R}^2$ dar.
(b) Sei $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Stellen Sie die Gerade g_p graphisch im $\mathbb{R}^2$ dar.

(c) Sei $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Stellen Sie die Gerade g_p graphisch im $\mathbb{R}^2$ dar.

(d) Wie muss v gewählt werden, damit die Gerade $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ der Geraden g_p mit $p_1 = p_2 = 0$ entspricht?

(e) Wie muss v gewählt werden, damit die Gerade $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ der Geraden g_p mit $p_1 = 0$, $p_2 = 2$ entspricht?

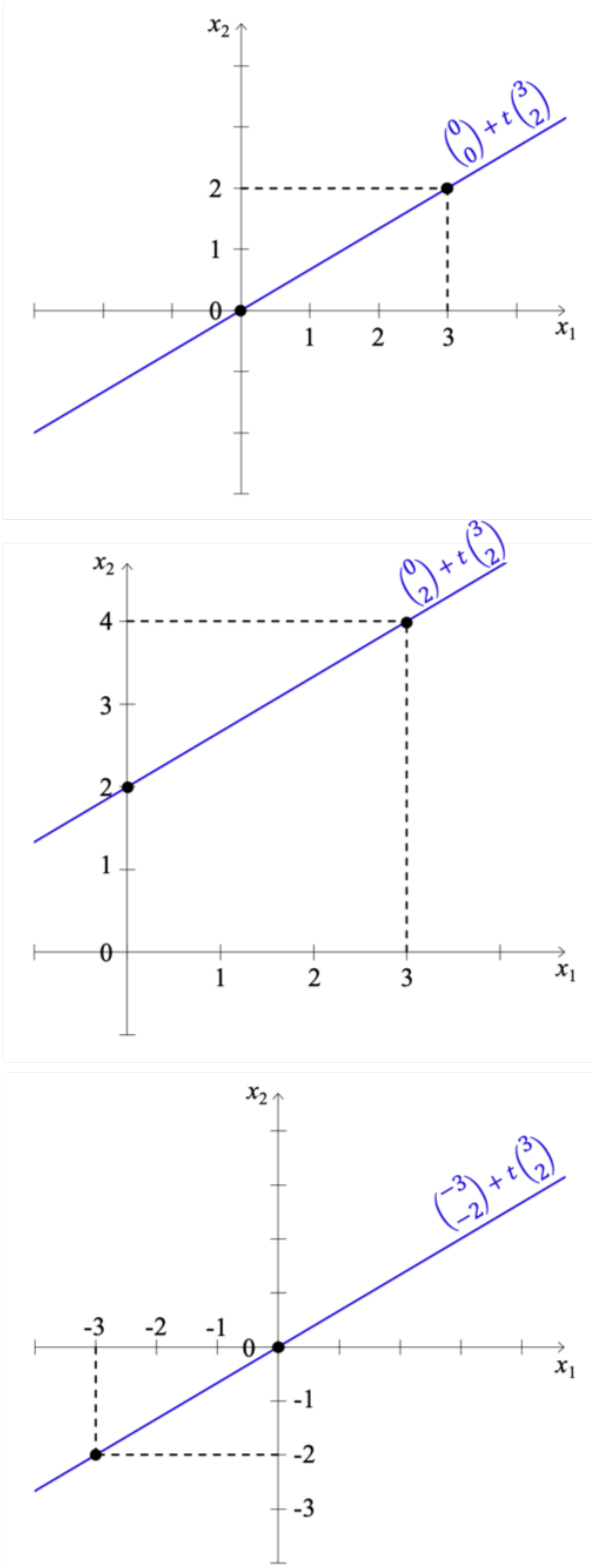
(f) Wie muss w gewählt werden, damit die Gerade $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ der Geraden g_p mit $p_1 = p_2 = 0$ entspricht?

(g) Wie muss w gewählt werden, damit die Gerade $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} w \\ -4 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ der Geraden g_p mit $p_1 = 0, p_2 = 2$ entspricht?

Lösung:

(a)-(c) Siehe Abbildung 2.1

Abbildung 2.1: Geraden (a)-(c)



(d) In Aufgaben a-c) haben wir gesehen, dass der Vektor, der in Parameterform mit einer Variablen multipliziert wird, die Steigung der Geraden bestimmt. Der Vektor $(p_1, p_2)^T$ bestimmt die Verschiebung dieser Geraden vom Nullpunkt. Daher sind folgende Bezeichnungen üblich:

> Ist eine Gerade oder Ebene in Parameterform gegeben, nennen wir die Vektoren, die mit Variablen multipliziert werden, *Steigungsvektoren* und den Vektor, der hierzu addiert (aber mit keiner Variable multipliziert) wird, *Verschiebungsvektor*.

Um zu überprüfen, ob zwei Geraden gleich sind, wenden wir folgendes Schema an:

> **Schema: Gleichheit zweier Geraden in Parameterform**
> Damit zwei Geraden in Parameterform gleich sind, müssen folgende Punkte erfüllt sein:
> (1) Die beiden Steigungsvektoren müssen Vielfache voneinander sein. Es muss also ein $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ geben, sodass α mal der Steigungsvektor der ersten Geraden den Steigungsvektor der zweiten Geraden ergibt.
> (2) Der Verschiebungsvektor der ersten Geraden muss auf der zweiten Geraden liegen (oder umgekehrt).

Die Gerade g_p mit $p_1 = p_2 = 0$ ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit die Gerade in (d) der Geraden g_p mit $p_1 = p_2 = 0$ entspricht, wenden wir das Schema an:

(1) Der Punkt (1) ist erfüllt, da die beiden Steigungsvektoren identisch sind und somit Vielfache voneinander sind.

(2) Damit Punkt (2) erfüllt ist, muss der Verschiebungsvektor der Geraden in (d) auf der Geraden g_p mit $p_1 = p_2 = 0$ liegen. Es muss also gelten:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & 1 = & 0 + 3t \\ \text{(II)} & v = & 0 + 2t \end{array}$$

Wir können die Substitutionsmethode anwenden:
(1) Wir lösen Gleichung (I) nach t auf und erhalten $t = \frac{1}{3}$.
(2) Setzt man diese Information in die Gleichung (II) ein, so erhalten wir $v = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
(3) Dieser Schritt ist hier nicht notwendig, da wir schon wissen, dass $t = \frac{1}{3}$.

Die Gerade in (d) entspricht also der Geraden g_p mit $p_1 = p_2 = 0$, wenn $v = \frac{2}{3}$.

(e) Die Gerade g_p mit $p_1 = 0, p_2 = 2$ ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit die Gerade in (e) der Geraden g_p mit $p_1 = 0, p_2 = 2$ entspricht, wenden wir das Schema von Aufgabe 2 (d) an:

(1) Der Punkt (1) ist erfüllt, da die beiden Steigungsvektoren identisch sind und somit Vielfache voneinander sind.

(2) Damit Punkt (2) erfüllt ist, muss der Verschiebungsvektor der Geraden in (e) auf der Geraden g_p mit $p_1 = 0, p_2 = 2$ liegen. Es muss also gelten:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & 1 = & 0 + 3t \\ \text{(II)} & v = & 2 + 2t \end{array}$$

Wir können die Substitutionsmethode anwenden:
(1) Wir lösen Gleichung (I) nach t auf und erhalten $t = \frac{1}{3}$.
(2) Setzt man diese Information in die Gleichung (II) ein, so erhalten wir $v = 2 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$.
(3) Dieser Schritt ist hier nicht notwendig, da wir schon wissen, dass $t = \frac{1}{3}$.

Die Gerade in (e) entspricht also der Geraden g_p mit $p_1 = 0, p_2 = 2$, wenn $v = \frac{8}{3}$.

(f) Die Gerade g_p mit $p_1 = p_2 = 0$ ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit die Gerade in (f) der Geraden g_p mit $p_1 = p_2 = 0$ entspricht, wenden wir das Schema von Aufgabe 2 (d) an:

(1) Damit der Punkt (1) erfüllt ist, müssen der Steigungsvektor der Geraden in (f) und der Steigungsvektors der Geraden g_p mit $p_1 = p_2 = 0$ Vielfache voneinander sein. Folglich muss gelten:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & 1 = & 3\alpha \\ \text{(II)} & w = & 2\alpha \end{array}$$

Wir können die Substitutionsmethode anwenden:
(1) Wir lösen Gleichung (I) nach α auf und erhalten $\alpha = \frac{1}{3}$.
(2) Setzt man diese Information in die Gleichung (II) ein, so erhalten wir $w = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
(3) Dieser Schritt ist hier nicht notwendig, da wir schon wissen, dass $\alpha = \frac{1}{3}$.

Der Steigungsvektor der Geraden in (f) und der Steigungsvektor der Geraden g_p mit $p_1 = p_2 = 0$ sind also Vielfache voneinander.

(2) Damit Punkt (2) erfüllt ist, muss der Verschiebungsvektor der Geraden in (f) auf der Geraden g_p mit $p_1 = p_2 = 0$ liegen. In diesem Fall kann man leicht erkennen, dass beide Geraden durch den Ursprung $(0,0)^T$ verlaufen. Somit ist auch Punkt (2) erfüllt.

Die Gerade in (f) entspricht also der Geraden g_p mit $p_1 = p_2 = 0$, wenn $w = \frac{2}{3}$.

(g) Die Gerade g_p mit $p_1 = 0, p_2 = 2$ ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit die Gerade in (g) der Geraden g_p mit $p_1 = 0, p_2 = 2$ entspricht, wenden wir das Schema von Aufgabe 2 (d) an:

(1) Damit der Punkt (1) erfüllt ist, müssen der Steigungsvektor der Geraden in (g) und der Steigungsvektors der Geraden g_p mit $p_1 = 0, p_2 = 2$ Vielfache voneinander sein. Folglich muss gelten:

$$\begin{pmatrix} w \\ -4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & w = & 3\alpha \\ \text{(II)} & -4 = & 2\alpha \end{array}$$

Wir können die Substitutionsmethode anwenden:
(1) Wir lösen Gleichung (II) nach α auf und erhalten $\alpha = -2$.
(2) Setzt man diese Information in die Gleichung (I) ein, so erhalten wir $w = 3 \cdot (-2) = -6$.
(3) Dieser Schritt ist hier nicht notwendig, da wir schon wissen, dass $\alpha = -2$.

Der Steigungsvektor der Geraden in (g) und der Steigungsvektor der Geraden g_p mit $p_1 = 0, p_2 = 2$ sind also Vielfache voneinander.

(2) Damit Punkt (2) erfüllt ist, muss der Verschiebungsvektor der Geraden in (g) auf der Geraden g_p mit $p_1 = 0, p_2 = 2$ liegen. In diesem Fall kann man erkennen, dass beide Geraden durch den Punkt $(0,2)^T$ verlaufen. Somit ist auch Punkt (2) erfüllt.

Die Gerade in (g) entspricht also der Geraden g_p mit $p_1 = 0, p_2 = 2$, wenn $w = -6$.

Aufgabe 3 (Geradengleichung in Parameterform II)

Gegeben ist die Gerade h_1 in Parameterform

$$h_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}.$$

(a) Welche der folgenden Geradengleichungen beschreibt h_1?

○ $y = \frac{2}{3}x - 4$ ○ $y = \frac{4}{3}x - 4$ ○ $y = \frac{2}{3}x - 1$ ○ $y = \frac{3}{2}x - 3$

○ $y = \frac{3}{2}x - 1$ ○ $y = \frac{2}{3}x - 3$ ○ $y = \frac{2}{3}x + 3$ ○ Keine davon

(b) Betrachten Sie folgende Gerade in Parameterform

$$h_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ -3 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

(i) Liegt der Punkt $(-1,1)^T$ auf der Geraden h_2?
(ii) Liegt der Punkt $(-1,1)^T$ auf der Geraden h_1?
(iii) Welche der folgenden Geradengleichungen beschreibt h_2?

○ $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$	○ $y = \frac{4}{3}x - 4$	○ $y = \frac{2}{3}x - 1$
○ $y = \frac{3}{2}x - 3$	○ $y = \frac{3}{2}x - 1$	○ $y = \frac{2}{3}x - 3$
○ $y = \frac{2}{3}x + 3$	○ Keine davon	

(iv) Stellen Sie die Geraden h_1 und h_2 graphisch im $\mathbb{R}^2$ dar.

Lösung:

(a) $y = \frac{2}{3}x - 3$ beschreibt h_1.
Um dies zu sehen, wenden wir folgendes Schema an:

Schema: Gerade in Parameterform zu Geradengleichung im $\mathbb{R}^2$:

(1) Bestimmen Sie zwei Punkte auf der Geraden, indem Sie beispielsweise $t = 0$ und $t = 1$ in die Parameterform einsetzt. Es ergeben sich so die Punkte $\mathbf{v}^1 = (v_1^1, v_2^1)^T$ und $\mathbf{v}^2 = (v_1^2, v_2^2)^T$.

(2) Bestimmen Sie die Werte a_0 und a_1, so dass

$$\begin{aligned} v_2^1 &= a_0 + a_1 v_1^1 \\ v_2^2 &= a_0 + a_1 v_1^2 \end{aligned}$$

gilt, beispielsweise mit Hilfe der Substitutionsmethode.

(3) Die gesuchte Geradengleichung ist dann $y = a_0 + a_1 x$.

Wenden wir das Schema an:

(1) Wir setzen $t = 0$ in die Parameterform ein und erhalten den Punkt $\mathbf{v}^1 = (3,-1)^T$. Wir setzen $t = 1$ in die Parameterform ein und erhalten den Punkt $\mathbf{v}^2 = (6,1)^T$.

(2) Wir müssen a_0 und a_1 bestimmen, so dass

$$\begin{aligned} -1 &= a_0 + 3a_1 \\ 1 &= a_0 + 6a_1 \end{aligned}$$

gilt. Dazu wenden wir die Substitutionsmethode an:

(1) Wir lösen Gleichung (II) nach a_0 auf und erhalten $a_0 = 1 - 6a_1$.

(2) Setzt man diese Information in die Gleichung (I) ein, so suchen wir ein a_1 mit der folgenden Eigenschaft:

$$-1 = 1 - 6a_1 + 3a_1.$$

Somit erhalten wir $a_1 = \frac{2}{3}$.

(3) Aus $a_1 = \frac{2}{3}$ folgt, mit Hilfe der aufgelösten Gleichung aus (1), dass $a_0 = 1 - 6 \cdot \frac{2}{3} = -3$.

(3) Die gesuchte Geradengleichung ist $y = -3 + \frac{2}{3}x$.

(b) (i) Der Punkt $\mathbf{v} = (-1,1)^T$ liegt auf der Geraden h_2, wenn es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -\frac{9}{2}t - 1 \\ -3t + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hier gilt offensichtlich $(-1,1)^T = (-1,1)^T + 0 \cdot (-\frac{9}{2}, -3)^T$, wobei $t = 0$. Der Punkt $(-1,1)^T$ liegt also auf der Geraden h_2.

(ii) Der Punkt $\mathbf{v} = (-1,1)^T$ liegt auf der Geraden h_1, wenn es ein $t \in \mathbb{R}$gibt, so dass

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{v} \iff \begin{pmatrix} 3t + 3 \\ 2t - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrl} \text{(I)} & 3t + 3 = & -1 \\ \text{(II)} & 2t - 1 = & 1. \end{array}$$

Wir können die Substitutionsmethode anwenden:

(1) Wir lösen Gleichung (I) nach t auf und erhalten $t = -\frac{4}{3}$.

(2) Setzen wir diese Information in Gleichung (II) ein, erhalten wir $-\frac{11}{3} = 1$. Das ist ein Widerspruch, da $-\frac{11}{3} \neq 1$.

Wir schliessen daraus, dass $(-1,1)^T$ nicht auf der Geraden h_1 liegt.

– –

Alternative Lösung:

Alternativ kann man den Punkt $(-1,1)^T$ in die Geradengleichung von h_1 einsetzen. Es gilt, dass $\frac{2}{3} \cdot (-1) - 3 = -\frac{11}{3} \neq 1$ und daher liegt $(-1,1)^T$ nicht auf der Geraden h_1.

(iii) $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.

Wenden wir das in Aufgabe 3 (a) eingeführte Schema an.

(1) Wir setzen $t = 0$ in die Parameterform ein und erhalten den Punkt $\mathbf{v}^1 = (-1,1)^T$. Wir setzen $t = 1$ in die Parameterform ein und erhalten den Punkt $\mathbf{v}^2 = (-\frac{11}{2}, -2)^T$.

(2) Wir müssen a_0 und a_1 bestimmen, so dass

$$\begin{aligned} 1 &= a_0 - 1 \cdot a_1 \\ -2 &= a_0 - \frac{11}{2} \cdot a_1 \end{aligned}$$

gilt. Dazu wenden wir die Substitutionsmethode an:

(1) Wir lösen Gleichung (I) nach a_0 auf und erhalten $a_0 = 1 + a_1$.

(2) Setzt man diese Information in die Gleichung (II) ein, so suchen wir ein a_1 mit der folgenden Eigenschaft:

$$-2 = 1 + a_1 - \frac{11}{2} \cdot a_1.$$

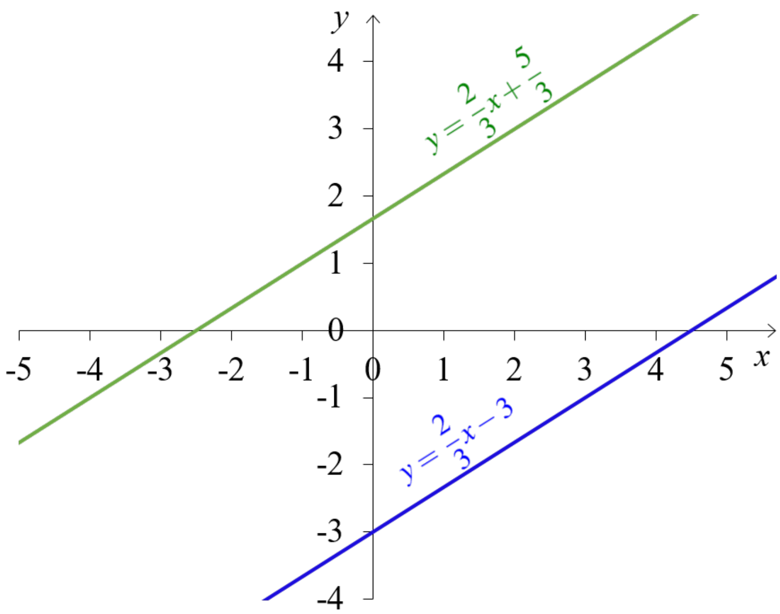
Somit erhalten wir $a_1 = \frac{2}{3}$.

(3) Aus $a_1 = \frac{2}{3}$ folgt, mit Hilfe der aufgelösten Gleichung aus (1), dass $a_0 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.

(3) Die gesuchte Geradengleichung ist somit $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.

(iv) Siehe Abbildung 3.1.

Abbildung 3.1: Die Geraden h_1 und h_2



Aufgabe 4 (Geradengleichung in Parameterform III)

Gegeben ist die Gerade h_3 in Parameterform

$$h_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}.$$

(a) Stellen Sie die Geradengleichung für h_3 auf.

(b) Betrachten Sie folgende Gerade in Parameterform

$$h_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -24 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}.$$

(i) Liegt der Punkt $(-1, -6)^T$ auf der Geraden h_4? Liegt er auf der Geraden h_3?

(ii) Stellen Sie die Geradengleichung für h_4 auf.

(iii) Stellen Sie die Geraden h_3 und h_4 graphisch im $\mathbb{R}^2$ dar.

(c) Betrachten Sie folgende Gerade in Parameterform

$$h_5 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}.$$

(i) Liegt der Punkt $(-\frac{9}{4}, 3)^T$ auf der Geraden h_5?

(ii) Liegt der Punkt $(-\frac{9}{4}, 3)^T$ auf der Geraden h_3?

(iii) Stellen Sie die Geradengleichung für h_5 auf.
(iv) Stellen Sie die Geraden h_3 und h_5 graphisch im $\mathbb{R}^2$ dar.

Lösung:

(a) Wenden wir das in Aufgabe 3 (a) eingeführte Schema an.

(1) Wir setzen $t = 0$ in die Parameterform ein und erhalten den Punkt $\mathbf{v}^1 = (-2,2)^T$. Wir setzen $t = 2$ in die Parameterform ein und erhalten den Punkt $\mathbf{v}^2 = (-1,-2)^T$.

(2) Wir müssen a_0 und a_1 bestimmen, so dass

$$\begin{aligned} 2 &= a_0 - 2 \cdot a_1 \\ -2 &= a_0 - 1 \cdot a_1 \end{aligned}$$

gilt. Dazu wenden wir die Substitutionsmethode an:

(1) Wir lösen Gleichung (I) nach a_0 auf und erhalten $a_0 = 2 + 2a_1$.
(2) Setzt man diese Information in die Gleichung (II) ein, so suchen wir ein a_1 mit der folgenden Eigenschaft:

$$-2 = 2 + 2a_1 - a_1.$$

Somit erhalten wir $a_1 = -4$.

(3) Aus $a_1 = -4$ folgt, mit Hilfe der aufgelösten Gleichung aus (1), dass $a_0 = 2 + 2 \cdot (-4) = -6$.

(3) Die gesuchte Geradengleichung ist somit $y = -4x - 6$.

(b) (i) Ein Punkt $\mathbf{v}$ liegt auf der Geraden h_4, wenn es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3t-1 \\ -24t-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Hier gilt offensichtlich $(-1,-6)^T = (-1,-6)^T + 0 \cdot (3,-24)^T$, wobei $t = 0$. Der Punkt $(-1,6)^T$ liegt also auf der Geraden h_4.

Liegt $(-1,-6)^T$ auf der Geraden h_3, so gibt es ein $t \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t-2 \\ -2t+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssytem:

$$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & \frac{1}{2}t - 2 = & -1 \\ \text{(II)} & -2t + 2 = & -6. \end{array}$$

Dazu wenden wir die Substitutionsmethode an:

(1) Wir lösen Gleichung (I) nach t auf und erhalten $t = 2$.
(2) Setzt man diese Information in die Gleichung (II) ein, erhalten wir $2 = 4$. Dies ist ein Widerspruch, da $2 \neq 4$.

$(-1,-6)^T$ liegt somit nicht auf der Geraden h_3.

(ii) Wenden wir das in Aufgabe 3 (a) eingeführte Schema an.

(1) Wir setzen $t = 0$ in die Parameterform ein und erhalten den Punkt $\mathbf{v}^1 = (-1,-6)^T$. Wir setzen $t = 1$ in die Parameterform ein und erhalten den Punkt $\mathbf{v}^2 = (2,-30)^T$.

(2) Wir müssen a_0 und a_1 bestimmen, so dass

$$\begin{aligned} -6 &= a_0 - 1 \cdot a_1 \\ -30 &= a_0 + 2a_1 \end{aligned}$$

gilt. Dazu wenden wir die Substitutionsmethode an:

(1) Wir lösen Gleichung (I) nach a_0 auf und erhalten $a_0 = -6 + a_1$.

(2) Setzt man diese Information in die Gleichung (II) ein, so suchen wir ein a_1 mit der folgenden Eigenschaft:

$$-30 = -6 + a_1 + 2a_1.$$

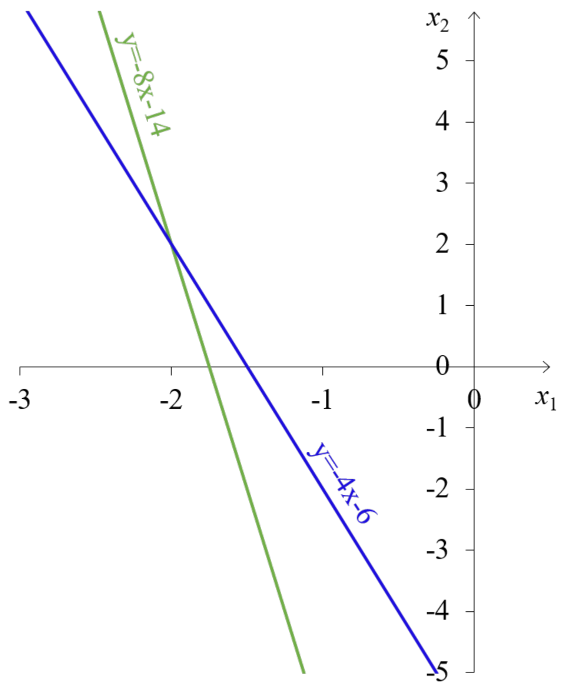
Somit erhalten wir $a_1 = -8$.

(3) Aus $a_1 = -8$ folgt, mit Hilfe der aufgelösten Gleichung aus (1), dass $a_0 = -8 - 6 = 14$.

(3) Die gesuchte Geradengleichung ist somit $y = -8x - 14$.

(iii) Siehe Abbildung 4.1.

Abbildung 4.1: Die Geraden h_3 und h_4



(c) (i) Liegt $(-\frac{9}{4}, 3)^T$ auf der Geraden h_5, so gibt es ein $t \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} t+2 \\ 0 \cdot t + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} &\text{(I)} & t+2 &= -\tfrac{9}{4} \\ &\text{(II)} & 0+3 &= 3. \end{aligned}$$

Gleichung (II) ist wahr für jede Wahl von $t \in \mathbb{R}$, da $3 = 3$ immer gilt. Gleichung (I) ist erfüllt für $t = -\frac{17}{4}$. Wir können daraus schliessen, dass $(-\frac{9}{4}, 3)^T$ auf der Geraden h_5 liegt.

(ii) Liegt $(-\frac{9}{4}, 3)^T$ auf der Geraden h_3, so gibt es ein $t \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t - 2 \\ -2t + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Zeilenweise gelesen, wird das $t \in \mathbb{R}$ gesucht, welches folgende zwei Gleichungen löst

$$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & \frac{1}{2}t - 2 = & -\frac{9}{4} \\ \text{(II)} & -2t + 2 = & 3. \end{array}$$

Gleichung (II) ist wahr für $t = -\frac{1}{2}$. Gleichung (I) ist erfüllt für $t = -\frac{1}{2}$. Die Lösungen stimmen überein. Somit gibt es ein $t \in \mathbb{R}$, welches beide Gleichungen erfüllt, nämlich $t = -\frac{1}{2}$, und wir können daraus schliessen, dass $(-\frac{9}{4}, 3)^T$ auf der Geraden h_3 liegt.

(iii) Wenden wir das in Aufgabe 3 (a) eingeführte Schema an.

(1) Wir setzen $t = 0$ in die Parameterform ein und erhalten den Punkt $\mathbf{v}^1 = (2, 3)^T$. Wir setzen $t = 1$ in die Parameterform ein und erhalten den Punkt $\mathbf{v}^2 = (3, 3)^T$.

(2) Wir müssen a_0 und a_1 bestimmen, so dass

$$\begin{aligned} 3 &= a_0 + 2a_1 \\ 3 &= a_0 + 3a_1 \end{aligned}$$

gilt. Dazu wenden wir die Substitutionsmethode an:

(1) Wir lösen Gleichung (II) nach a_0 auf und erhalten $a_0 = 3 - 3a_1$.

(2) Setzt man diese Information in die Gleichung (I) ein, so suchen wir ein a_1 mit der folgenden Eigenschaft:

$$3 = 3 - 3a_1 + 2a_1.$$

Somit erhalten wir $a_1 = 0$.

(3) Aus $a_1 = 0$ folgt, mit Hilfe der aufgelösten Gleichung aus (1), dass $a_0 = 3 - 3 \cdot 0 = 3$.

(3) Die gesuchte Geradengleichung ist somit $y = 0 \cdot x + 3 = 3$.

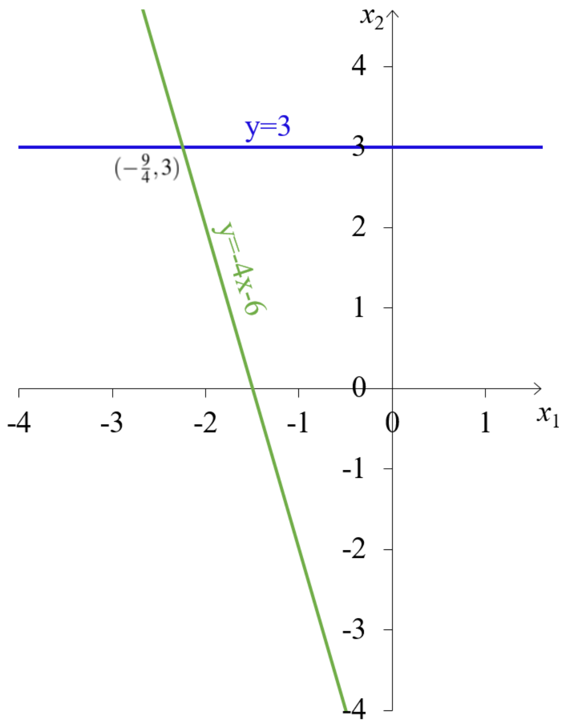
− −

Alternative Lösung:

Aufgrund der 0 in der y-Komponente des Steigungsvektors, ändert sich der y-Wert nie und entspricht dem y-Wert des Verschiebungsvektors. Das heisst nur $y = 3$ kann die Gerade beschreiben.

(iv) Siehe Abbildung 4.2.

Abbildung 4.2: Die Geraden h_3 und h_5



Aufgabe 5 (Geradengleichung in Parameterform IV)

Gegeben ist die Geradengleichung einer Geraden g,

$$y = 4 - \frac{1}{4}x.$$

Welche der folgenden Parameterformen beschreibt die gleiche Gerade wie g? Wählen Sie wahr, wenn die gleiche, und falsch, wenn eine andere Gerade beschrieben wird.

(1) $g_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $g_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $g_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 16 \\ -4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $g_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ ☐ wahr ☐ falsch

Lösung:

Um aus der Geradengleichung eine Parameterform zu bestimmen, halten wir schematisch fest:

Schema: Geradengleichung zu Gerade in Parameterform im $\mathbb{R}^2$
Um aus der Geradengleichung die Parameterform in Vektorenschreibweise zu erhalten, müssen wir folgende Schritte ausführen:

(1) Ersetze y in der Vektorenschreibweise durch die rechte Seite der nach y aufgelösten Gleichung.
(2) Schreibe den in (1) erhaltenen Vektor in der Form $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$.
(3) Ersetze den Parameter x durch $t \in \mathbb{R}$, um $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ zu erhalten.

Wenden wir dieses Schema an:

(1) Um g in Parameterform zu bringen, ersetzen wir zuerst y durch die rechte Seite der nach y aufgelösten Gleichung:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 4 - \frac{1}{4}x \end{pmatrix}.$$
(2) Nun schreiben wir den in (1) erhaltenen Vektor in der folgenden Form:
$$\begin{pmatrix} x \\ 4 - \frac{1}{4}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
(3) Nun wird x durch $t \in \mathbb{R}$ ersetzt und man erhält die Parameterform:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

Um nun die Gleichheit zweier Geraden zu bestimmen, muss man (wie in Aufgabe 2) in einem ersten Schritt überprüfen, ob die Steigungsvektoren Vielfache voneinander sind und in einem zweiten Schritt überprüfen, ob der Verschiebungsvektor der einen Gerade auf der anderen liegt.

- Zu (1): Um zu überprüfen, ob die Gerade g_1 der Geraden g entspricht, wende das Schema von Aufgabe 2 (d) an:

  (1) Damit der Punkt (1) erfüllt ist, müssen die Steigungsvektoren Vielfache voneinander sein. Folglich muss gelten:
  $$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$
  Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:
  $$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & 1 = & 1 \cdot \alpha \\ \text{(II)} & -\frac{1}{4} = & -4\alpha. \end{array}$$
  Aus Gleichung (I) folgt, dass $\alpha = 1$. Aus Gleichung (II) folgt $\alpha = \frac{1}{16}$. Dies ist einen Widerspruch, da $1 \neq \frac{1}{16}$. Punkt (1) ist nicht erfüllt.

  Die Gerade g_1 beschreibt nicht die Gerade g.

- Zu (2): Um zu überprüfen, ob die Gerade g_2 der Geraden g entspricht, wende das Schema von Aufgabe 2 (d) an:

  (1) Damit der Punkt (1) erfüllt ist, müssen die Steigungsvektoren Vielfache voneinander sein. Folglich muss gelten:

  $$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

  Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

  $$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & 1 = & 12\alpha \\ \text{(II)} & -\frac{1}{4} = & -3\alpha \end{array}$$

  Sowohl aus Gleichung (I), als auch aus Gleichung (II) folgt $\alpha = \frac{1}{12}$. Der Punkt (1) ist somit erfüllt.

  (2) Damit Punkt (2) erfüllt ist, müssen wir überprüfen, ob der Verschiebungsvektor der ersten Gerade in der zweiten Gerade enthalten ist. Es muss also gelten:

  $$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

  Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

  $$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & 0 = & 0 + 12t \\ \text{(II)} & 4 = & 16 - 3t \end{array}$$

  Aus Gleichung (I) folgt $t = 0$. Aus der Gleichung (II) folgt $t = 4$. Dies ist einen Widerspruch, da $0 \neq 4$. Punkt (2) ist nicht erfüllt.

  Die Gerade g_2 beschreibt nicht die Gerade g.

- Zu (3): Um zu überprüfen, ob die Gerade g_3 der Geraden g entspricht, wende das Schema von Aufgabe 2 (d) an:

  (1) Damit der Punkt (1) erfüllt ist, müssen die Steigungsvektoren Vielfache voneinander sein. Folglich muss gelten:

  $$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 16 \\ -4 \end{pmatrix}$$

  Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

  $$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & 1 = & 16\alpha \\ \text{(II)} & -\frac{1}{4} = & -4\alpha \end{array}$$

  Sowohl aus Gleichung (I), als auch aus Gleichung (II) folgt $\alpha = \frac{1}{16}$. Der Punkt (1) ist somit erfüllt.

(2) Damit Punkt (2) erfüllt ist, müssen wir überprüfen, ob der Verschiebungsvektor der ersten Gerade in der zweiten Gerade enthalten ist. Es muss also gelten:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 16 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & 0 = & 0 + 16t \\ \text{(II)} & 4 = & 4 - 4t \end{array}$$

Sowohl aus Gleichung (I), als auch aus Gleichung (II) folgt $t = 0$. Somit ist auch Punkt (2) erfüllt.

Die Gerade g_3 beschreibt die Gerade g.

- Zu (4): Um zu überprüfen, ob die Gerade g_4 der Geraden g entspricht, wende das Schema von Aufgabe 2 (d) an:

(1) Damit der Punkt (1) erfüllt ist, müssen die Steigungsvektoren Vielfache voneinander sein. Für die Vektoren $(1, -\frac{1}{4})^T$ und $(12, -3)^T$ haben wir das in Aufgabe 5 (2) bereits gezeigt. Punkt (1) ist somit erfüllt.

(2) Damit Punkt (2) erfüllt ist, müssen wir überprüfen, ob der Verschiebungsvektor der ersten Gerade in der zweiten Gerade enthalten ist. Es muss also gelten:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & 0 = & -12 + 12t \\ \text{(II)} & 4 = & 7 - 3t \end{array}$$

Sowohl aus Gleichung (I), als auch aus Gleichung (II) folgt $t = 1$. Damit ist auch Punkt (2) erfüllt.

Die Gerade g_4 beschreibt die Gerade g.

Aufgabe 6 (Ebenengleichung in Parameterform)

Folgende Gleichung beschreibt die Ebene E im $\mathbb{R}^3$:

$$z = 2 + x - 4y$$

Welche der folgenden Parameterformen beschreibt die gleiche Ebene? Wählen Sie wahr, wenn die gleiche, falsch, wenn eine andere Ebene beschrieben wird.

(1) $E_1 : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $E_2 : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $E_3 : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $E_4 : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$ ☐ wahr ☐ falsch

Lösung:

Um aus der Ebenengleichung eine Parameterform zu bestimmen, halten wir schematisch fest:

Schema: Ebenengleichung zu Ebene in Parameterform im $\mathbb{R}^3$

Um aus der Ebenengleichung die Parameterform in Vektorenschreibweise zu erhalten, müssen wir folgende Schritte ausführen:

(1) Ersetze z in der Vektorenschreibweise durch die rechte Seite der nach z aufgelösten Gleichung.

(2) Schreibe den in (1) erhaltenen Vektor in der Form $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$.

(3) Ersetze die Parameter x und y durch $t_1 \in \mathbb{R}$ bzw. $t_2 \in \mathbb{R}$, um $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ zu erhalten.

Wenden wir dieses Schema an:

(1) Um die Ebene in Parameterform zu bringen, ersetzen wir zuerst z durch die rechte Seite der nach z aufgelösten Gleichung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 + x - 4y \end{pmatrix} .$$

(2) Nun schreiben wir den in (1) erhaltenen Vektor in der folgenden Form:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 + x - 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(3) Nun wird x und y durch t_1 bzw. t_2 ersetzt und man erhält die Parameterform:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Wir müssen nun überprüfen, ob die Ebenen $E_1 - E_4$ der Ebene E entsprechen. Zwei Ebenen beschreiben dieselbe Ebene, wenn die Ebenengleichungen oder die Parameterformen dieselbe sind. Um von der Parameterform auf die Ebenengleichung zu kommen, kann man folgendes Schema anwenden:

Schema: Ebene in Parameterform zu Ebenengleichung im $\mathbb{R}^3$:

(1) Bestimmen Sie drei Punkte auf der Ebene, indem Sie
  1) $t_1 = 0$ und $t_2 = 0$
  2) $t_1 = 1$ und $t_2 = 0$
  3) $t_1 = 0$ und $t_2 = 1$

in die Parameterform einsetzt. Es ergeben sich so die Punkte $\mathbf{v}^1 = (v_1^1, v_2^1, v_3^1)^T$, $\mathbf{v}^2 = (v_1^2, v_2^2, v_3^2)^T$ und $\mathbf{v}^3 = (v_1^3, v_2^3, v_3^3)^T$.

(2) Bestimmen Sie die Werte a_0, a_1 und a_2, so dass

$$\begin{aligned} v_3^1 &= a_0 + a_1 v_1^1 + a_2 v_2^1 \\ v_3^2 &= a_0 + a_1 v_1^2 + a_2 v_2^2 \\ v_3^3 &= a_0 + a_1 v_1^3 + a_2 v_2^3 \end{aligned}$$

gilt, beispielsweise mit Hilfe der Substitutionsmethode.

(3) Die gesuchte Ebenengleichung ist dann $z = a_0 + a_1 x + a_2 y$.

- Zu (1): Wir könnten die Ebenengleichung der Ebene E_1 bestimmen, und würden sehen, dass wir $z = 2 + x - 4y$ erhalten. Wir sehen in diesem Beispiel aber leicht, dass die Parameterform der Ebene E_1 der Parameterform der Ebene E entspricht. Die Ebene E_1 beschreibt somit die Ebene E.
- Zu (2): Wir könnten die Ebenengleichung der Ebene E_2 bestimmen, und würden sehen, dass wir nicht $z = 2 + x - 4y$ erhalten. In diesem Beispiel kann man aber leicht sehen, dass der Verschiebungsvektor der Ebene E_2, $(0,0,4)^T$, nicht auf der Ebene E liegt, da $2 + 0 - 0 = 2 \neq 4$. Die Ebene E_2 beschreibt somit nicht die Ebene E.
- Zu (3): Wir könnten die Ebenengleichung der Ebene E_3 bestimmen, und würden sehen, dass wir $z = 2 + x - 4y$ erhalten. In diesem Beispiel sieht man aber, dass die beiden Steigungsvektoren ein Vielfaches der Steigungsvektoren der Ebene E sind und der Verschiebungsvektor der gleiche ist wie der Verschiebungsvektor der Ebene E. Ersetzt man t_1 durch $\frac{t_1}{2}$ erhalten wir,

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{t_1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \mid \frac{t_1}{2}, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

  Die Parameterform der Ebene E_3 entspricht der Parameterform der Ebene E. Die Ebene E_3 beschreibt somit die Ebene E.

- Zu (4): Bestimmen wir die Ebenengleichung der Ebene E_4
  (1) Durch einsetzen von $t_1 = 0$ und $t_2 = 0$ erhalten wir $\mathbf{v}^1 = (1,1,-1)^T$. Durch einsetzen von $t_1 = 1$ und $t_2 = 0$ erhalten wir $\mathbf{v}^2 = (2,2,-4)^T$. Durch einsetzen von $t_1 = 0$ und $t_2 = 1$ erhalten wir $\mathbf{v}^3 = (0,2,-6)^T$.
  (2) Wir erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad -1 &= a_0 + 1a_1 + 1a_2 \\ \text{(II)} \quad -4 &= a_0 + 2a_1 + 2a_2 \\ \text{(III)} \quad -6 &= a_0 + 0a_1 + 2a_2. \end{aligned}$$

  (2) Lösen wir Gleichung (III) nach $2a_2$ auf, erhalten wir $2a_2 = -6 - a_0$. Setzten wir diese Information in Gleichung (II) ein, erhalten wir $-4 = 2a_1 - 6$ und somit $a_1 = 1$. Setzten wir $a_1 = 1$ in Gleichung (I) ein, und lösen diese Gleichung nach a_0 auf, erhalten wir $a_0 = -2 - a_2$. Setzen wir diese Informationen in Gleichung (III) ein, erhalten wir, $-6 = -2 - a_2 + 2a_2 = -2 + a_2$ und somit $a_2 = -4$. Setzen wir $a_2 = -4$ in $a_0 = -2 - a_2$ ein, erhalten wir $a_0 = -2 + 4 = 2$.
  (3) Die gesuchte Ebenengleichung ist dann $z = 2 + x - 4y$.

  Die Ebenengleichung der Ebene E_4 entspricht der Ebenengleichung der Ebene E. Die Ebene E_4 beschreibt somit die Ebene E.