Aufgabe 1 (Lineare Hüllen)

Sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, von dem Sie wissen, dass $\mathbf{a} = 3\mathbf{b} + 4\mathbf{c} + 0\mathbf{d}$, wobei $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$.
Dann gilt:

(1) $\mathbf{a} \in \text{lin}\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$	☐ wahr	☐ falsch
(2) $\mathbf{a} \in \text{lin}\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$	☐ wahr	☐ falsch
(3) $\mathbf{c} \in \text{lin}\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{d}\}$	☐ wahr	☐ falsch
(4) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sind linear unabhängig.	☐ wahr	☐ falsch

Lösung:

Im Skript ist die lineare Hülle von Vektoren definiert:

Definition 6.4.1 - Lineare Hülle
Seien $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^m$. Die Menge aller Linearkombinationen

$$\text{lin}\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}^i \,\middle|\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

heisst lineare Hülle von $\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n\}$. Die lineare Hülle der leeren Menge $\{\} \subseteq \mathbb{R}^m$ ist der Nullvektor, $\text{lin}\{\} = \{\mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^m$.

- Zu (1): $\mathbf{a}$ ist eine Linearkombination von $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ und $\mathbf{d}$ und somit Element derer linearen Hülle. Die Aussage (1) ist wahr.

- Zu (2): $\mathbf{a}$ ist eine Linearkombination von $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ und somit Element derer linearen Hülle. Die Aussage (2) ist wahr.

- Zu (3): $\mathbf{c}$ ist eine Linearkombination von $\mathbf{b}, \mathbf{a}$ und $\mathbf{d}$, es gilt nämlich, dass $\mathbf{c} = \frac{1}{4}\mathbf{a} - \frac{3}{4}\mathbf{b} - 0\mathbf{d}$ ist. $\mathbf{c}$ ist somit ein Element derer linearen Hülle. Die Aussage (3) ist wahr.

- Zu (4): Der Nullvektor $\mathbf{0}$ lässt sich darstellen als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ ohne alle Gewichte 0 setzen zu müssen, $\mathbf{a} - 3\mathbf{b} - 4\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Sie sind somit linear abhängig. Alternativ ist $\mathbf{a}$ eine Linearkombination von $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$. Diese Vektoren können daher nicht linear unabhängig sein. Die Aussage (4) ist falsch.

Aufgabe 2 (Erzeugendensysteme und lineare Hüllen im $\mathbb{R}^2$)

Gegeben sind die vier folgenden Vektoren:

$$\mathbf{a}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -17 \\ 17 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie die unten stehenden Mengen. Welche dieser Mengen ist ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie mit Hilfe Ihrer Zeichnungen.

(i) $\operatorname{lin}\{\mathbf{a}^1\}$ (ii) $\operatorname{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2\}$ (iii) $\operatorname{lin}\{\mathbf{b}\}$ (iv) $\operatorname{lin}\{\mathbf{a}^2, \mathbf{b}\}$ (v) $\operatorname{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{b}\}$ (vi) $\operatorname{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{c}\}$ (vii) $\operatorname{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

(b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) $\mathbf{b} = 0\mathbf{a}^1 + 17\mathbf{a}^2 + 0\mathbf{c}$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $\mathbf{c} = 3\mathbf{a}^1 + \mathbf{a}^2 + 0\mathbf{b}$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \operatorname{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $\mathbf{a}^2 \in \operatorname{lin}\{\mathbf{c}, \mathbf{a}^1\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(c) Betrachten Sie folgende Menge:

$$V^1 = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}.$$

Finden Sie einen Vektor $\mathbf{v}^1 \in \mathbb{R}^2$, sodass $\operatorname{lin}\{\mathbf{v}^1\} = V^1$.

(d) Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) V^1 ist ein linearer Raum. ☐ wahr ☐ falsch

(2) $\{\mathbf{a}^1\}$ ist ein Erzeugendensystem von V^1. ☐ wahr ☐ falsch

(3) $\{\mathbf{b}\}$ ist ein Erzeugendensystem von V^1. ☐ wahr ☐ falsch

(4) $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}^1\}$ ist ein Erzeugendensystem von V^1. ☐ wahr ☐ falsch

(e) Betrachten Sie folgende Menge:

$$V^2 = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\}.$$

Finden Sie einen Vektor $\mathbf{v}^2 \in \mathbb{R}^2$, sodass $\operatorname{lin}\{\mathbf{v}^2\} = V^2$.

(f) Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) V^2 ist ein linearer Raum. ☐ wahr ☐ falsch

(2) $\{\mathbf{a}^2\}$ ist ein Erzeugendensystem von V^2. ☐ wahr ☐ falsch

(3) $\{\mathbf{b}\}$ ist ein Erzeugendensystem von V^2. ☐ wahr ☐ falsch

(4) $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}^2\}$ ist ein Erzeugendensystem von V^2. ☐ wahr ☐ falsch

Lösung:

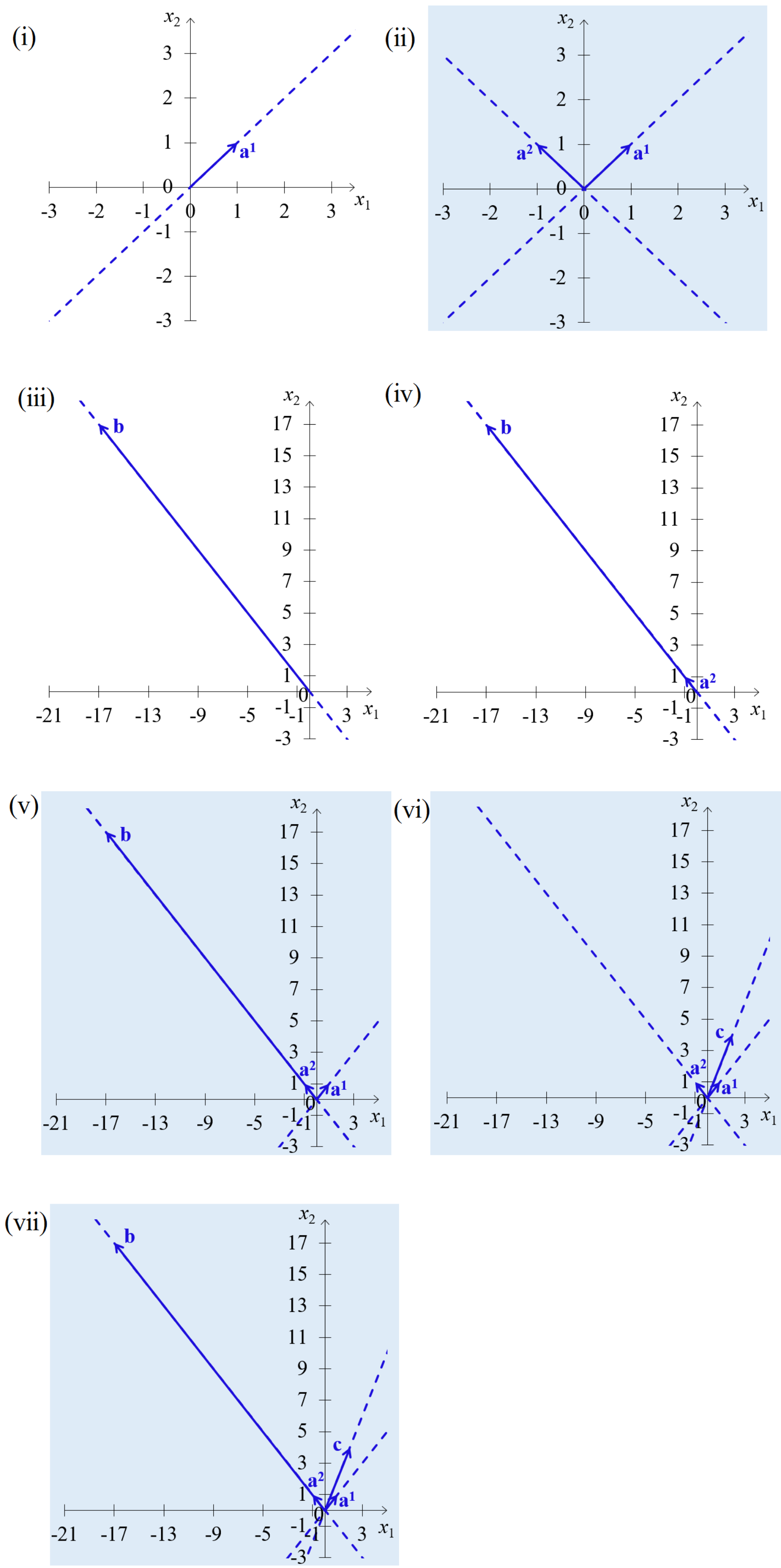
(a) Aus dem Skript kennen wir folgende Definitionen:

> **Definition 6.4.2 - Linearer Raum**
> Eine nichtleere Menge V heisst linearer Raum oder Vektorraum, wenn für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$, gilt:
> - $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in V$ und
> - $\alpha \mathbf{v} \in V$.

> **Definition 6.4.3 - Erzeugendensystem**
> Die Menge $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n\}$ von Vektoren heisst Erzeugendensystem des linearen Raums V, wenn $\mathrm{lin}\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n\} = V$.

Jeder Punkt des $\mathbb{R}^2$ kann erreicht werden durch eine Linearkombination der Vektoren aus der Menge (ii),(v),(vi) und (vii). Alle erreichbaren Punkte sind dort hellblau makiert. Diese Mengen sind also ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^2$.
Siehe Abbildung 2.1.

Abbildung 2.1: Die linearen Hüllen (i)-(vii)



(b)
- Zu (1): $\begin{pmatrix} -17 \\ 17 \end{pmatrix} = 17 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Aussage (1) ist wahr.

- Zu (2): $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Aussage (2) ist wahr.

- Zu (3): Die lineare Hülle von $\mathbf{a}^1$ und $\mathbf{a}^2$ ist die Menge aller Linearkombinationen dieser beiden Vektoren
$$\text{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2\} = \{\alpha_1 \mathbf{a}^1 + \alpha_2 \mathbf{a}^2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}.$$
Aus (1) wissen wir, dass sich $\mathbf{b}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}^1$ und $\mathbf{a}^2$ mit Gewichten $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = 17$ darstellen lässt. $\mathbf{b}$ ist daher in der linearen Hülle von $\mathbf{a}^1$ und $\mathbf{a}^2$. Aus (2) wissen wir, dass sich $\mathbf{c}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}^1$ und $\mathbf{a}^2$ mit Gewichten $\alpha_1 = 3$ und $\alpha_2 = 1$ darstellen lässt. $\mathbf{c}$ ist daher in der linearen Hülle von $\mathbf{a}^1$ und $\mathbf{a}^2$. Die Aussage (3) ist wahr. [1]

- -

Alternative Lösung:
Auch graphisch folgt sofort, dass dies gelten muss. Denn aus Abbildung 2.1 (ii) wissen wir, dass sich jeder Vektor des $\mathbb{R}^2$ in der linearen Hülle von $\boldsymbol{a}^1$ und $\boldsymbol{a}^2$ befindet.

- Zu (4): Aus (2) wissen wir, nach Umstellung der Gleichung, dass
$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{c} - 3\mathbf{a}^1.$$
Somit ist $\mathbf{a}^2$ eine Linearkombination von $\mathbf{c}$ und $\mathbf{a}^1$ mit Gewichten 1 und -3 und daher ist $\mathbf{a}^2 \in \text{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{c}\}$. Die Aussage (4) ist wahr.

(c) Jeder Punkt $(x, y)^T \in V^1$ hat die Form
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; x \in \mathbb{R}.$$

Somit gilt
$$V^1 = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\} = \{(x,x)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Die Menge lässt sich also als lineare Hülle schreiben. Für $\mathbf{v}_1 = (1,1)^T$ gilt also $\text{lin}\{\mathbf{v}_1\} = V^1$. Siehe Abbildung 2.1 (i).

(d)
- Zu (1): Aus der Vorlesung wissen wir, dass jede lineare Hülle ein linearer Raum ist.

> **Satz 6.4.2 - Die lineare Hülle als linearer Raum**
> Für $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^m$ ist die lineare Hülle $\text{lin}\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n\}$ ein linearer Raum.

Eine lineare Hülle ist also stets ein linearer Raum. Man kann es auch direkt zeigen, mit Hilfe der Definition eines linearen Raumes. Siehe hierfür Aufgabe 3. Die Aussage (1) ist wahr.

[1] Es gilt auch $\mathbf{b} \in \text{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{c}\}$ und $\mathbf{c} \in \text{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{b}\}$.

- Zu (2): $\mathbf{a}^1 = (1,1)^T$ und somit $V^1 = \text{lin}\{\mathbf{a}^1\}$. Alle Vielfachen von $\mathbf{a}^1$ erzeugen die Menge V^1. $\{\mathbf{a}^1\}$ ist ein Erzeugendensystem von V^1. Die Aussage (2) ist wahr.

- Zu (3): $\mathbf{b}$ erzeugt V^1 genau dann, wenn $V^1 = \text{lin}\{\mathbf{b}\}$. Die lineare Hülle von $\mathbf{b}$ ist

$$\text{lin}\{\mathbf{b}\} = \{\alpha \begin{pmatrix} -17 \\ 17 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Da z. B. $(1,1)^T \in V^1$ ist, aber kein α existiert mit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -17 \\ 17 \end{pmatrix},$$

erzeugt $\mathbf{b}$ nicht V^1. Die Aussage (3) ist falsch.

Alternative Lösung:
Auch graphisch kann man sich überlegen, dass die Vielfachen von $\boldsymbol{b}$, lin$\{\boldsymbol{b}\}$, eine Gerade beschreiben mit Steigungsvektor $\boldsymbol{b}$, siehe Abbildung 2.1 (iii). Auch $V^1 = lin\{\boldsymbol{a}^1\}$ beschreibt eine Gerade mit Steigungsvektor $\boldsymbol{a}^1$. Diese beiden Geraden sind aber offensichtlich nicht gleich. $\boldsymbol{b}$ ist kein Vielfaches von $\boldsymbol{a}^1$. Der Vektor $\boldsymbol{b}$ kann $V^1 = lin\{\boldsymbol{a}^1\}$ nicht erzeugen.

- Zu (4): Wir wissen, dass $\mathbf{a}^1$ ein Erzeugendensystem von V^1 ist. Die Menge aller Linearkombinationen von $\mathbf{b}$ und $\mathbf{a}^1$ ist

$$\text{lin}\{\mathbf{b}, \mathbf{a}^1\} = \{\alpha_1 \begin{pmatrix} -17 \\ 17 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Die Vektoren $\mathbf{b}$ und $\mathbf{a}^1$ sind ein Erzeugendensystem von V^1 genau dann, wenn $V^1 = \text{lin}\{\mathbf{b}, \mathbf{a}^1\}$. Also genau dann, wenn

$$V^1 = \text{lin}\{\mathbf{a}^1\} = \text{lin}\{\mathbf{b}, \mathbf{a}^1\}.$$

Der Vektor $\mathbf{b}$ ist beispielsweise eine Linearkombination von $\mathbf{b}$ und $\mathbf{a}^1$ mit $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = 0$. Daher ist $\mathbf{b} \in \text{lin}\{\mathbf{b}, \mathbf{a}^1\}$. Allerdings ist $\mathbf{b}$ kein Vielfaches von $\mathbf{a}^1$, und daher ist $\mathbf{b} \notin \text{lin}\{\mathbf{a}^1\}$. Der Vektor $\mathbf{b}$ ist in $\text{lin}\{\mathbf{b}, \mathbf{a}^1\}$ enthalten, aber nicht in $\text{lin}\{\mathbf{a}^1\}$. Die beiden Mengen sind somit nicht gleich. Die Aussage (4) ist falsch.

Alternative Lösung:
Auch graphisch kann man sich überlegen, dass man mit den Linearkombinationen von $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{a}^1$ jeden Punkt des $\mathbb{R}^2$ erreichen kann. Der Grund ist, dass sie nicht linear voneinander abhängen, also nicht auf einer Geraden liegen. Die Linearkombinationen von $\boldsymbol{a}^1$, lin$\{\boldsymbol{a}^1\}$, jedoch, beschreiben eine Gerade. Nur Punkte auf dieser Geraden werden erreicht. Die Mengen können somit nicht gleich sein.

(e) Jeder Punkt $(x,y)^T$ in V^2 hat die Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; x \in \mathbb{R}.$$

Somit gilt

$$V^2 = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\} = \{(x,-x)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Die Menge lässt sich also als lineare Hülle schreiben. Für $\mathbf{v}_2 = (1,-1)^T$ gilt also $\text{lin}\{\mathbf{v}_2\} = V^2$.

(f)
- Zu (1): Aus Satz 6.4.2 wissen wir, dass eine lineare Hülle stets ein linearer Raum ist. Die Aussage (1) ist wahr.

- Zu (2): $\mathbf{a}^2 = (-1,1)^T$, das heisst $\mathbf{a}^2 = -(1,-1)^T$. Da $(1,-1)^T$ die Menge V^2 erzeugt, tut dies auch jedes Vielfache $\alpha(1,-1)^T$, falls $\alpha \neq 0$. Somit ist $V^2 = \text{lin}\{\mathbf{a}^2\}$ und $\{\mathbf{a}^2\}$ ist daher ein Erzeugendensystem von V^2. Die Aussage (2) ist wahr.

- Zu (3) Die Vielfachen von $\mathbf{b}$ sind die lineare Hülle von $\mathbf{b}$,

  $$\text{lin}\{\mathbf{b}\} = \text{lin}\{\alpha \begin{pmatrix} -17 \\ 17 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

  Jeder Vektor in V^2 hat die Form $(x,-x)^T$ mit $x \in \mathbb{R}$. $\mathbf{b}$ erzeugt somit V^2, genau dann, wenn für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

  $$x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -17 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

  Also genau dann, wenn $x = -17\alpha$ und $-x = 17\alpha$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ wird das erfüllt, wenn man $\alpha = -x/17$ setzt. Der Vektor $\mathbf{b}$ erzeugt daher V^2. Die Aussage (3) ist wahr.

  Alternative Lösung:
  Auch graphisch kann man sich überlegen, dass $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{a}^2$ linear abhängig sind, sprich auf einer Geraden liegen, siehe Abbildung 2.1 (iv). Vielfache der jeweiligen Vektoren, werden niemals diese Gerade verlassen. Deren lineare Hüllen sind also gleich. Da $\boldsymbol{a}^2$ bereits V^2 erzeugt, tut dies auch $\boldsymbol{b}$.
- Zu (4): $\mathbf{b} = 17\mathbf{a}^2$, die Vektoren sind also linear abhängig und liegen somit auf einer Geraden. Daher gilt

  $$\text{lin}\{\mathbf{b},\mathbf{a}^2\} = \text{lin}\{\mathbf{b}\} = \text{lin}\{\mathbf{a}^2\} = V^2.$$

  $\{\mathbf{b},\mathbf{a}^2\}$ ist somit auch ein Erzeugendensystem von V^2. Die Aussage (4) ist wahr.

– –

Alternative Lösung:
Formaler kann man die Gleicheit der linearen Hüllen wie folgt zeigen: Jeder Vektor aus lin$\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}^2\}$ hat die Form

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -17 \\ 17 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 17\alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (17\alpha_1 + \alpha_2) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Definiert man nun $\tilde{\alpha} = 17\alpha_1 + \alpha_2$, so werden alle reellen Zahlen durchlaufen, sprich $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$. Daher hat jeder Vektor aus lin$\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}^2\}$ die Form

$$\tilde{\alpha} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}.$$

Das ist die lineare Hülle von $\boldsymbol{a}^2$. Mit anderen Worten: lin$\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}^2\}$ = lin$\{\boldsymbol{a}^2\} = V^2$.

Aufgabe 3 (Lineare Räume als lineare Hüllen, Dimension)

(a) Beurteilen Sie jeweils die Aussage: „Die folgende Menge ist ein linearer Raum."

(1) $W_1 = \text{lin}\left\{(1,3,5,-4,-\frac{3}{2},0,1)^T, (3,-4,7,1,26,\frac{12}{13},13)^T\right\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $W_2 = \{\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid \mathbf{x} = t \cdot (1,1,1,1)^T, \ t \in \mathbb{R}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $W_3 = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $W_4 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(b) Bestimmen Sie ggf. die Dimension der linearen Räume aus Teilaufgabe (a).

Lösung:

(a) In Aufgabe 2 haben wir lineare Räume definiert. Wie in Definition 6.4.2 gefordert, muss eine nichtleere Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^m$ zwei Eigenschaften haben, damit man sie einen linearen Raum nennt: 1) Für alle Elemente $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ muss auch deren Summe ein Element von V sein. 2) Für jedes Element $\mathbf{v} \in V$ ist auch jedes Vielfache von $\mathbf{v}$ in V.

- Zu (1): Wie wir in Satz 6.4.2 in Aufgabe 2 gesehen haben, ist eine lineare Hülle stets ein linearer Raum. Die Aussage (1) ist wahr.

- Zu (2): W_2 beschreibt alle Vielfachen des Vektors $(1,1,1,1)^T$ und daher die lineare Hülle des Vektors $(1,1,1,1)^T$, das heisst $W_2 = \text{lin}\{(1,1,1,1)^T\}$. W_2 lässt sich als lineare Hülle eines Vektors darstellen und ist daher ein linearer Raum. Die Aussage (2) ist wahr.

- Zu (3): Damit $x \cdot y = 0$ ist, muss entweder x oder y null sein. Es gilt unter anderem $(1,0)^T \in W_3$ und $(0,1)^T \in W_3$. Jedoch ergibt $(1,0)^T + (0,1)^T = (1,1)^T$ und $(1,1)^T$ ist nicht in W_3, da $1 \cdot 1 \neq 0$ gilt. Somit gilt hier für $\mathbf{v} = (1,0)^T \in W_3$ und $\mathbf{w} = (0,1)^T \in W_3$ nicht, dass $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W_3$. W_3 kann daher kein linearer Raum sein. Die Aussage (3) ist falsch.

- Zu (4): Es gilt aufgrund der Eigenschaften der Vektoraddition

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und somit folgt, da $x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$,

$$W_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| x_1 = x_2,\ x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{lin}\left\{(1,1,0,0)^T, (0,0,1,0)^T, (0,0,0,1)^T\right\}.$$

W_4 lässt sich als lineare Hülle von Vektoren darstellen und ist daher ein linearer Raum. Die Aussage (4) ist wahr.

Alternative Lösung:

Wir zeigen, der Vollständigkeit halber die Aussage direkt mit Hilfe der Definition eines linearen Raumes. Die Summe zweier Vektoren aus W_4 ergibt stets einen Vektor aus W_4. Auch jedes skalare Vielfache eines Vektors aus W_4 ändert nichts an der Gleichheit der ersten beiden Komponenten dieses Vektors. Formal zeigt man das wie folgt:

Sei $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W_4$, das heisst,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

mit $x_1, x_3, x_4, y_1, y_3, y_4 \in \mathbb{R}$.[2] Um zu sehen, dass W_4 ein linearer Raum ist, muss man nun zwei Bedingungen prüfen:

(1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W_4$,

(2) $\alpha \boldsymbol{x} \in W_4$, für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zu (1): Es gilt,

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_1 + y_1 \\ x_3 + y_3 \\ x_4 + y_4 \end{pmatrix}.$$

Die Summe der beiden Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ergibt also einen Vektor $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T$, mit $z_1 = x_1 + y_1 = z_2$. Die letzen beiden Komponenten können jeden beliebigen Wert annehmen. Dieser Vektor hat also stets folgende Form

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_1 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix},\ z_1, z_3, z_4 \in \mathbb{R}.$$

Er liegt somit in W_4 und daher ist die erste Eigenschaft erfüllt.

Zu (2): Es gilt,

$$\alpha \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \alpha \cdot x_1 \\ \alpha \cdot x_3 \\ \alpha \cdot x_4 \end{pmatrix}.$$

[2] Wir hätten genauso gut $\mathbf{x} = (x_2, x_2, x_3, x_4)^T$ wählen können. Hauptsache die ersten beiden Komponenten sind gleich.

Die ersten beiden Komponenten bleiben somit stets gleich, $\alpha\mathbf{x}$ liegt daher auch in W_4. Beide Eigenschaften sind erfüllt und W_4 ist daher ein linearer Raum.

(b)

> **Definition 6.4.4 - Basis und Dimension**
> Eine Menge $B = \{\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^n\}$ linear unabhängiger Vektoren $\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^n \in V$ eines linearen Raums $V \subseteq \mathbb{R}^m$, heisst Basis von V, wenn $\mathrm{lin}\{\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^n\} = V$. Die Vektoren $\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \dots, \mathbf{b}^n$ heissen Basisvektoren. Man nennt n die Dimension von V und schreibt auch $\dim(V) = n$.

Die Anzahl der linear unabhängigen Vektoren einer linearen Hülle $\mathrm{lin}\{\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^n\} = V$ nennt man also die Dimension von V.
Die Dimension von W_1 ist 2, da die Vektoren dort linear unabhängig sind (sie sind ungleich dem Nullvektor und kein Vielfaches voneinander).
Da gilt, dass $W_2 = \mathrm{lin}\{(1,1,1,1)\}$, ist 1 die Dimension von W_2.
Um die Dimension von W_4 zu bestimmen, überprüfen wir ob die Vektoren $(1,1,0,0)^T, (0,0,1,0)^T$ und $(0,0,0,1)^T$ linear unabhängig sind. Aus Satz 6.3.3 aus Aufgabe 9 in Serie 2 wissen wir, dass $(1,1,0,0)^T, (0,0,1,0)^T$ und $(0,0,0,1)^T$ genau dann linear unabhängig sind, wenn

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ erfüllt ist. Es ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{(I) } \alpha_1 &= 0 \\ \text{(II) } \alpha_1 &= 0 \\ \text{(III) } \alpha_2 &= 0 \\ \text{(IV) } \alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass der Nullvektor nur erzeugt werden kann, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ gesetzt wird. Die Vektoren $(1,1,0,0)^T, (0,0,1,0)^T$ und $(0,0,0,1)^T$ sind somit linear unabhängig. Die Dimension von $W_4 = \mathrm{lin}\left\{(1,1,0,0)^T, (0,0,1,0)^T, (0,0,0,1)^T\right\}$ beträgt 3, da die 3 Vektoren linear unabhängig sind.

Aufgabe 4 (Erzeugendensystem, Basis - im $\mathbb{R}^3$)

Gegeben seien die Vektoren:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Beurteilen Sie jeweils die Aussage: „Die folgende Menge ist ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$."

(1) $C_1 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $C_2 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $C_3 = \{\mathbf{d}, \mathbf{e}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $C_4 = \{\mathbf{d}, \mathbf{e}, 2\mathbf{d} - \mathbf{e}, \mathbf{d} + \mathbf{e}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(b) Beurteilen Sie jeweils die Aussage: „Die folgende Menge ist Basis des $\mathbb{R}^3$."

(1) $C_1 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $C_2 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $C_3 = \{\mathbf{d}, \mathbf{e}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $C_4 = \{\mathbf{d}, \mathbf{e}, 2\mathbf{d} - \mathbf{e}, \mathbf{d} + \mathbf{e}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(c) Skizzieren Sie die unten stehenden Mengen. Welche dieser Mengen sind der $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie anhand Ihrer Skizze.
(i) $\text{lin}\{\mathbf{b}\}$ (ii) $\text{lin}\{\mathbf{c}\}$ (iii) $\text{lin}\{\mathbf{c}, \mathbf{e}\}$ (iv) $\text{lin}\{\mathbf{b}, \mathbf{d}\}$ (v) $\text{lin}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ (vi) $\text{lin}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$
(vii) $\text{lin}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$.

Lösung:

(a) In der Lösung von Aufgabe 2 haben wir die Definition von Erzeugendensysteme von linearen Räumen wiederholt. In der Lösung von Aufgabe 3 haben wir die Definitionen von einer Basis und der Dimension eines linearen Raumes wiederholt.

- Zu (1): C_1 besteht aus 3 Vektoren. Die Dimension des $\mathbb{R}^3$ ist ebenfalls 3.[3] Vom Skript kennen wir folgenden Satz:

  > **Satz 6.4.7 - Basis des $\mathbb{R}^n$**
  > Sind $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig, dann ist $\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

  Wir haben daher zwei Möglichkeiten zu zeigen, dass C_1 ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ ist. Entweder wir zeigen, dass sich jeder beliebige Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ in der linearen Hülle befindet oder wir testen die Vektoren auf lineare Unabhängigkeit. Ersteres machen wir in der

[3] Da gilt, dass $\mathbb{R}^3 = \text{lin}\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$, mit den linear unabhängigen Einheitsvektoren $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$, siehe Skript.

alternativen Lösung. Letzteres ist in der Regel viel einfacher zu testen.
Die Vektoren sind linear unabhängig, genau dann, wenn

$$\alpha_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

nur durch $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ gelöst wird. Es muss $\alpha_2 = 0$ gesetzt werden, um in der 2. Komponente eine 0 zu erzeugen. Um in der 1. Komponente eine 0 zu erzeugen, muss $\alpha_1 = \alpha_3$ sein. Um in der 3. Komponente eine 0 zu erzeugen, muss $\alpha_1 = -\alpha_3$ sein. Somit muss $\alpha_3 = \alpha_1 = -\alpha_3$ gelten und daher $\alpha_3 = 0$. Ebenfalls gilt daher $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$. Also wird der Nullvektor $\mathbf{0}$ erzeugt, genau dann, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Die 3 Vektoren sind linear unabhängig und somit folgt aus Satz 6.4.7, dass C_1 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. Die Aussage (1) ist wahr.

– –

Alternative Lösung:

Die lineare Hülle, die von C_1 beschrieben wird, ist

$$lin\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\} = \left\{ \alpha_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ein beliebiger Vektor des $\mathbb{R}^3$ hat die Form $(x_1,x_2,x_3)^T$, mit $x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{R}$. Es ist $lin\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\} = \mathbb{R}^3$ genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in lin\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}.$$

Das ist genau dann der Fall, wenn es $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\alpha_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

für alle $x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{R}$. Aus der 2. Komponente folgt unmittelbar, dass wir $\alpha_2 = -\frac{1}{2}x_2$ setzen müssen. Zudem muss gelten, dass

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_3 &= x_1 \\ \alpha_1 + \alpha_3 &= x_3. \end{aligned}$$

Mit der Substitutionsmethode aus Serie 1 erhalten wir $\alpha_3 = \frac{1}{2}(x_3 - x_1)$ und $\alpha_1 = \frac{1}{2}(x_3 + x_1)$. Setzt man also $\alpha_1 = \frac{1}{2}(x_3 + x_1), \alpha_2 = -\frac{1}{2}x_2$ und $\alpha_3 = \frac{1}{2}(x_3 - x_1)$ so lässt sich der Vektor $(x_1,x_2,x_3)^T$ als Linearkombination der Vektoren aus C_1 darstellen. Da x_1,x_2,x_3 beliebig waren, wird jeder Vektor erzeugt. C_1 ist ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$.
Um zum Beispiel den Vektor $(1,2,3)^T$ zu erzeugen, müssen wir

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(3+1) = 2,\ \alpha_2 = -\frac{1}{2}2 = -1,\ \alpha_3 = \frac{1}{2}(3-1) = 1$$

setzen.

- Zu (2):
  Die lineare Hülle, die von C_2 beschrieben wird, ist

$$\text{lin}\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\} = \left\{ \alpha_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

  Setzt man $\alpha_4 = 0$ so erkennt man schnell, dass $\text{lin}\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} \subseteq \text{lin}\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\}$. Da bereits $\mathbf{a},\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ den $\mathbb{R}^3$ erzeugen, müssen $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ und $\mathbf{d}$ den $\mathbb{R}^3$ ebenfalls erzeugen, sprich $\mathbb{R}^3 = \text{lin}\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\}$. [4] Alternativ, könnte man überprüfen, wie viele linear unabhängige Vektoren in C_2 enthalten sind. Sind es 3, so ist C_2 ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$. Wir wissen, dass $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ linear unabhängig sind und daher gibt es 3 linear unabhängige Vektoren in C_2 und daher wird der $\mathbb{R}^3$ erzeugt. Die Aussage (2) ist wahr.
- Zu (3): Die lineare Hülle, die von C_3 beschrieben wird, ist

$$\text{lin}\{\mathbf{d},\mathbf{e}\} = \left\{ \alpha_1 \begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

  Zwei Vektoren können nicht den ganzen $\mathbb{R}^3$ aufspannen. Der Vektor $(1,0,0)^T$ ist beispielsweise nicht in der linearen Hülle von $\mathbf{d}$ und $\mathbf{e}$. Dies kann man leicht überprüfen: Ist $(1,0,0)^T$ in der linearen Hülle von $\mathbf{d}$ und $\mathbf{e}$, so muss gelten

$$\alpha_1 \begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

  Daraus ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{(I) } 2\alpha_2 &= 1 \\ \text{(II) } -2\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0 \\ \text{(III) } 2\alpha_1 &= 0. \end{aligned}$$

  Aus Gleichung (I) folgt, dass $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ ist und aus Gleichung (III) folgt, dass $\alpha_1 = 0$ ist. Setzen wir diese Information in Gleichung (II) ein, so erhalten wir $1 = 0$. Dies ist ein Widerspruch. Der Vektor $(1,0,0)^T$ ist somit nicht in der linearen Hülle von $\mathbf{d}$ und $\mathbf{e}$. Somit ist auch C_3 kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$. Die Aussage (3) ist falsch.

  –

  Alternative Lösung:
  Auch graphisch kann man sich überlegen, dass lin$\{\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}\}$ eine Ebene aufspannt, welche durch den Ursprung verläuft. Eine Ebene entspricht nicht dem $\mathbb{R}^3$.

[4] Vorsicht! Diese Schlussfolgerung können wir nur machen, da es sich um den ganzen $\mathbb{R}^3$ handelt. Im Allgemeinen sind zwei Mengen A und B gleich, falls A Teilmenge von B und B Teilmenge von A ist,

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A.$$

Sprich wir haben nur gezeigt, dass $\text{lin}\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} = \mathbb{R}^3 \subseteq \text{lin}\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\}$. Da allerdings $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$, gilt offenbar auch $\text{lin}\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\} \subseteq \mathbb{R}^3$, da der $\mathbb{R}^3$ ein linearer Raum ist.

- Zu (4):

Satz 6.4.9 - Verschiedene Erzeugendensysteme linearer Hüllen
Sei $V = \text{lin}\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n\}$ ein linearer Raum, $i \in \{1, \ldots, n\}$ ein Index, und der Vektor

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{v}^1 + \cdots + \alpha_i \mathbf{v}^i + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^m$$

eine Linearkombination mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Es gilt stets

$$V = \text{lin}\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^{i-1}, \mathbf{v}^i, \mathbf{v}^{i+1}, \ldots, \mathbf{v}^n, \mathbf{u}\}.$$

Im Fall $\alpha_i \neq 0$ gilt zudem:

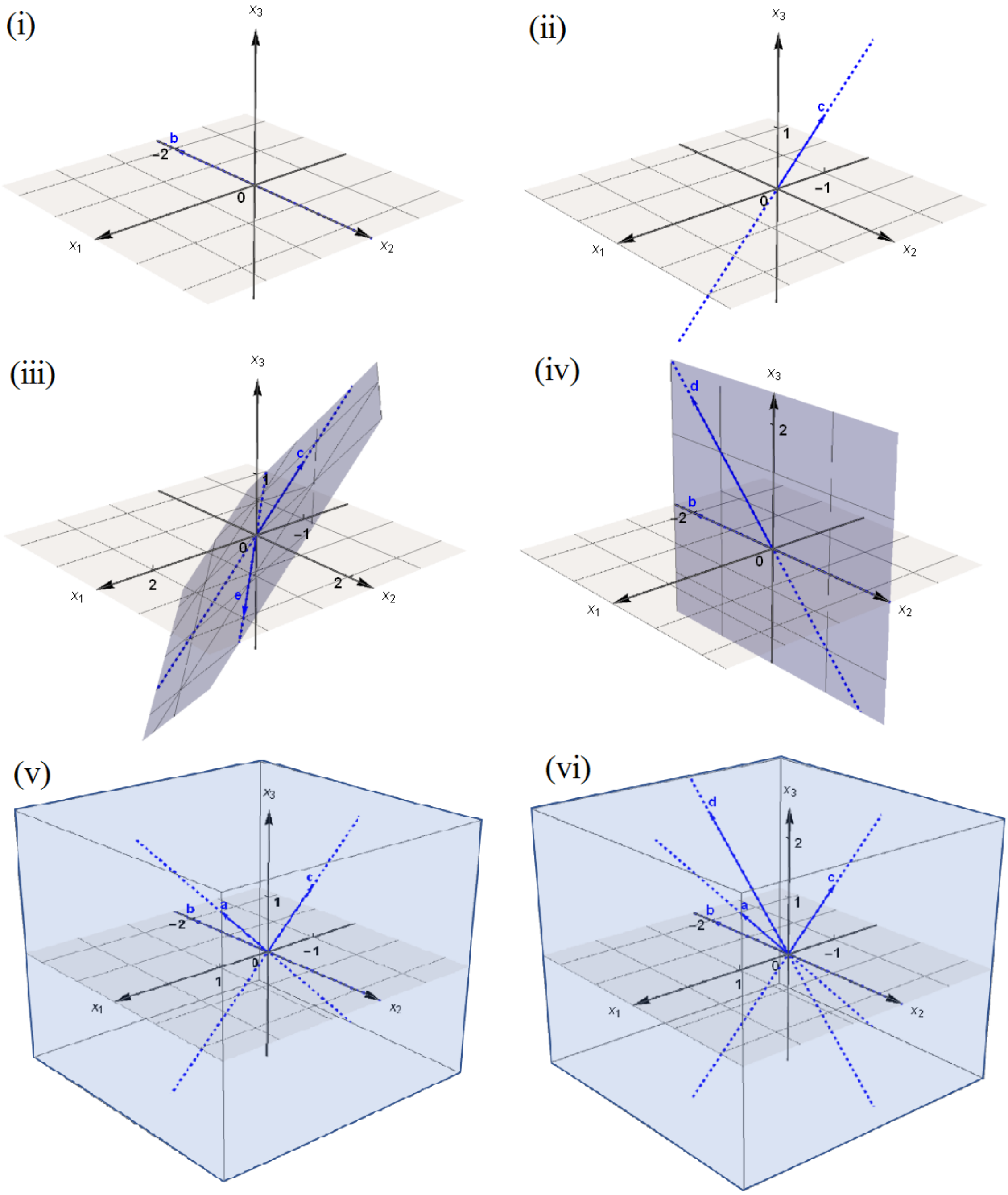
$$V = \text{lin}\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^{i-1}, \mathbf{u}, \mathbf{v}^{i+1}, \ldots, \mathbf{v}^n\}.$$

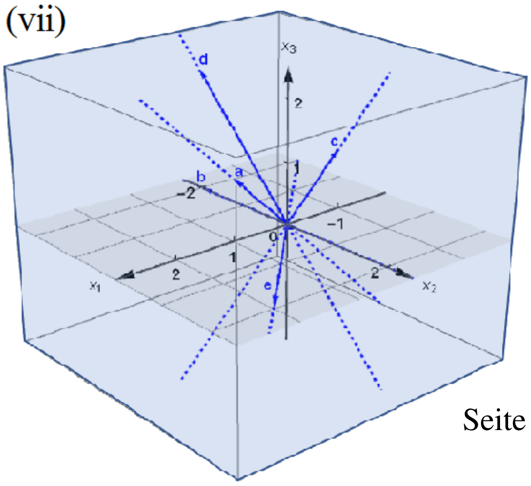
Da der dritte und vierte Vektor dieser Menge Linearkombinationen der ersten beiden sind, gilt: $\text{lin}\{\mathbf{d}, \mathbf{e}\} = \text{lin}\{\mathbf{d}, \mathbf{e}, 2\mathbf{d} - \mathbf{e}, \mathbf{d} + \mathbf{e}\}$, vgl. Satz 6.4.9. Aus (3) wissen wir, dass $\{\mathbf{d}, \mathbf{e}\}$ kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ ist. Somit ist auch C_4 kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$. Die Aussage (4) ist falsch.

(b) Eine Basis ist ein Erzeugendensystem, in welchem alle Vektoren linear unabhängig sind.
- Zu (1): C_1 ist ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$. Zudem haben wir in Teilaufgabe (a) gezeigt, dass die Vektoren linear unabhängig sind. C_1 ist damit eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Die Aussage (1) ist wahr.
- Zu (2): C_2 ist ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$. Da 4 Vektoren im $\mathbb{R}^3$ nicht linear unabhängig sein können, stellt C_2 keine Basis des $\mathbb{R}^3$ dar, vgl. Satz 6.4.7 aus Teilaufgabe (a). Die Aussage (2) ist falsch.
- Zu (3): C_3 ist kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ und kann daher keine Basis sein. Die Aussage (3) ist falsch.
- Zu (4):C_4 ist kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ und kann daher keine Basis sein. Die Aussage (4) ist falsch.

(c) Siehe Abbildung 4.1.

Abbildung 4.1: Lineare Hüllen im $\mathbb{R}^3$





Man erkennt, dass die Bilder unsere Berechnungen aus den Aufgaben (a) und (b) bestätigen. Jeder Vektor des $\mathbb{R}^3$ lässt sich als Linearkombination der Vektoren aus (v), (vi) und (vii) darstellen. Sie sind ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$. Jedoch ist nur (v) eine Basis. Wie wir bereits mehrfach gesehen haben, erzeugen einzelne Vektoren eine Gerade (siehe (i) und (ii)). Zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ bilden eine Ebene, sofern sie nicht linear abhängig sind (siehe (iii) und (iv)).

Aufgabe 5 (Erzeugendensystem, Basis - $\mathbb{R}^4$)

Gegeben seien die Vektoren:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Beurteilen Sie jeweils die Aussage: „Die folgende Menge ist ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^4$."

(1) $C_1 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $C_2 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $C_3 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $C_4 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(b) Beurteilen Sie jeweils die Aussage: „Die folgende Menge ist Basis des $\mathbb{R}^4$."

(1) $C_1 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $C_2 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $C_3 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $C_4 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$ ☐ wahr ☐ falsch

Lösung:

(a)
- Zu (1):
  $\mathbb{R}^4$ hat Dimension 4, die Menge $\text{lin}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ kann höchstens Dimension 3 haben. Also gilt $\text{lin}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \neq \mathbb{R}^4$. Die Menge ist kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^4$. Die Aussage (1) ist falsch.

  –

  Alternative Lösung:
  Man kann auch zeigen, dass beispielsweise $(0,0,0,1)^T$ keine Linearkombination dieser Vektoren ist. Da dieser Vektor aber im $\mathbb{R}^4$ liegt, kann lin$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ nicht gleich dem $\mathbb{R}^4$ sein. Somit ist $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^4$.
- Zu (2): C_2 ist ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^4$.

Die 4 Vektoren sind linear unabhängig, wovon man sich schnell überzeugen kann. Um

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen, muss nämlich $\alpha_4 = \alpha_3 = \alpha_2 = 0$ gesetzt werden. Somit folgt, dass auch $\alpha_1 = 0$ sein muss. Vier linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^4$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^4$, vgl. Satz 6.4.7 aus Aufgabe 4. Jeder beliebige Vektor $\mathbf{x}$ des $\mathbb{R}^4$, liegt also in der von C_2 erzeugten linearen Hülle, $\mathbf{x} \in \text{lin}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$, und C_2 ist somit ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^4$. Die Aussage (2) ist wahr.

- Zu (3): Die 4 Vektoren sind linear unabhängig, wovon man sich schnell überzeugen kann. Um

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen, muss nämlich $\alpha_4 = 0$ gesetzt werden. Somit folgt, dass $\alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1 = 0$. Vier linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^4$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^4$, vgl. Satz 6.4.7 aus Aufgabe 4. Jeder beliebige Vektor $\mathbf{x}$ des $\mathbb{R}^4$, liegt also in der von C_3 erzeugten linearen Hülle, $\mathbf{x} \in \text{lin}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}\}$, und C_3 ist somit ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^4$. Die Aussage (3) ist wahr.

- Zu (4): Die lineare Hülle, die von C_4 beschrieben wird, ist

$$\begin{aligned} &\text{lin}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\} \\ &= \left\{ \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Die vier Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ und $\mathbf{d}$ sind linear unabhängig. Vier linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^4$ spannen immer den $\mathbb{R}^4$ auf, vgl. Satz 6.4.7 aus Aufgabe 4. C_4 ist somit ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^4$. Die Aussage (4) ist wahr.

(b) Eine Basis ist ein Erzeugendensystem, in welchem alle Vektoren linear unabhängig sind.

- Zu (1): C_1 ist kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^4$ und kann daher keine Basis sein. Die Aussage (1) ist falsch.
- Zu (2): C_2 ist ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^4$. Zudem haben wir in Teilaufgabe (a) gezeigt, dass die Vektoren linear unabhängig sind. C_2 ist damit eine Basis des $\mathbb{R}^4$. Die Aussage (2) ist wahr.
- Zu (3): C_3 ist ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^4$. Zudem haben wir in Teilaufgabe (a) gezeigt, dass die Vektoren linear unabhängig sind. C_3 ist damit eine Basis des $\mathbb{R}^4$. Die Aussage (3) ist wahr.
- Zu (4): C_4 ist ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^4$. Da 5 Vektoren im $\mathbb{R}^4$ nicht linear unabhängig sein können, stellt C_4 keine Basis des $\mathbb{R}^4$ dar, vgl. Satz 6.4.7 aus Aufgabe 4. Die Aussage (4) ist falsch.

Aufgabe 6 (Geraden, Ebenen und Hyperebenen als lineare Räume I)

(a) Die Menge an Punkten, die auf der Geraden $y = 3x$ liegen, lässt sich wie folgt beschreiben

$$G = \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) G ist die lineare Hülle des Vektors $(1,3)^T$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Die Menge $\{(1,3)^T\}$ ist ein Erzeugendensystem von G. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Der lineare Raum $\text{lin}\{(0,0)^T\}$ hat die Dimension 0. ☐ wahr ☐ falsch

(4) G ist eine Hyperebene des $\mathbb{R}^2$. ☐ wahr ☐ falsch

(b) Gegeben sei die Ebene:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) $E = \text{lin}\{(1,0,1)^T, (0,1,-4)^T\}$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) E ist eine Hyperebene des $\mathbb{R}^3$. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Die Vektoren $(1,0,1)^T, (0,1,-4)^T, (4,1,0)^T$
bilden ein Erzeugendensystem von E. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Die Vektoren $(1,0,1)^T$ und $(0,1,-4)^T$ bilden eine Basis von E. ☐ wahr ☐ falsch

(c) Betrachten Sie folgende Menge von Punkten

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) E ist eine Ebene im $\mathbb{R}^3$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) $E = \text{lin}\{(1,-1,1)^T\}$. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Jeder Vektor $\mathbf{x} = \alpha(1,-1,1)^T$,
bildet für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Basis von E. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Die Vektoren $(1,-1,1)^T$ und $(-4,4,-4)^T$ bilden eine Basis von E. ☐ wahr ☐ falsch

Lösung:

Definition 6.4.5 - Geraden, Ebenen und Hyperebenen
Einen linearen Raum $V \subseteq \mathbb{R}^m$ der Dimension

- 0 nennt man Punkt,
- 1 nennt man Gerade,
- 2 nennt man Ebene,
- $m-1$ nennt man Hyperebene.

(a)

- Zu (1): Mit $y = 3x$ kann man die Punkte $(x,y)^T$ auf der Gerade beschreiben als

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Jeder Vektor aus G hat also die Form

$$\begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}.$$

Die lineare Hülle, die G beschreibt, ist somit $G = \text{lin}\{(1,3)^T\}$. Die Aussage (1) ist wahr.

- Zu (2): Wie bereits gezeigt gilt $G = \text{lin}\{(1,3)^T\}$, und somit ist $\{(1,3)^T\}$ ein Erzeugendensystem von G. Die Aussage (2) ist wahr.

- Zu (3): Die lineare Hülle des Nullvektors ist der Nullvektor,

$$\text{lin}\{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}.$$

Da die Menge $\{\mathbf{0}\}$ nicht linear unabhängig ist, aber $\text{lin}\{\} = \{\mathbf{0}\}$ gilt, ist seine Dimension 0. Die Aussage (3) ist wahr.

- Zu (4): Die Dimension von $G = \text{lin}\{(1,3)^T\}$ ist 1. Da für $n = 2$ eine Hyperebene die Dimension $n-1 = 1$ hat, ist die Gerade somit eine Hyperebene. Die Aussage (4) ist wahr.

(b)

- Zu (1): Die lineare Hülle von $(1,0,1)^T$ und $(0,1,-4)^T$ ist die Menge aller Linearkombinationen dieser Vektoren. Das ist genau die Menge E. Die Aussage (1) ist wahr.

- Zu (2): Wir wissen bereits, dass $E = \text{lin}\{(1,0,1)^T, (0,1,-4)^T\}$. Die beiden Vektoren sind zudem linear unabhängig, da es kein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

  Daher spannen die 2 Vektoren die Ebene E auf und bilden eine Basis von E. Somit ist die Dimension von E, nämlich 2, eine Dimension kleiner, als die des $\mathbb{R}^3$. Das ist genau die Definition einer Hyperebene. Die Aussage (2) ist wahr.

- Zu (3): Es muss für ein Erzeugendensystem gelten, dass $E = \text{lin}\left\{(1,0,1)^T, (0,1,-4)^T, (4,1,0)^T\right\}$. Es gilt bereits, dass $E = \text{lin}\left\{(1,0,1)^T, (0,1,-4)^T\right\}$. Um zu zeigen, dass

$$E = \text{lin}\left\{(1,0,1)^T, (0,1,-4)^T, (4,1,0)^T\right\}$$

  gilt, muss also

$$\text{lin}\left\{(1,0,1)^T, (0,1,-4)^T, (4,1,0)^T\right\} = \text{lin}\left\{(1,0,1)^T, (0,1,-4)^T\right\}$$

  gelten. Das ist genau dann der Fall, wenn $(4,1,0)^T$ linear von $(1,0,1)^T$ und $(0,1,-4)^T$ abhängt. Daher gilt $E = \text{lin}\left\{(1,0,1)^T, (0,1,-4)^T, (4,1,0)^T\right\}$, genau dann, wenn es $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  In der Tat gilt dies für $t_1 = 4$ und $t_2 = 1$. Die linearen Hüllen sind gleich und daher ist die Aussage (3) wahr.

- Zu (4): Dass die zwei Vektoren ein Erzeugendensystem bilden wissen wir bereits. Da eine Ebene Dimension 2 hat und E genau durch diese zwei linear unabhängigen Vektoren erzeugt wird, bilden sie eine Basis von E. Die Aussage (4) ist wahr.

(c)

- Zu (1): Eine Ebene hat Dimension 2. Da $(1,-1,1)^T$ und $(-4,4,-4)^T$ linear abhängig sind, gilt

$$E = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

  Die Dimension von E ist 1 und beschreibt eine Gerade. Die Aussage (1) ist falsch.

- Zu (2): Siehe Antwort zu (1). Die Aussage (2) ist wahr.

- Zu (3): Für $\alpha = 0$ gilt $0 \cdot (1,-1,1)^T = (0,0,0)^T = \mathbf{0}$. Die lineare Hülle des Nullvektors ist der Nullvektor, $\text{lin}\{\mathbf{0}\} = \mathbf{0}$. Die Aussage (3) ist falsch. Die Aussage ist allerdings wahr für alle $\alpha \neq 0$.

- Zu (4): Eine Basis ist ein Erzeugendensystem mit linear unabhängigen Vektoren. E hat Dimension 1 und wird erzeugt durch den Vektor $(1,-1,1)^T$. Wir benötigen keinen weiteren Vektor, um E zu erzeugen. Somit ist $(1,-1,1)^T$ eine Basis von E, aber nicht $\{(1,-1,1)^T,(-4,4,-4)^T\}$. Die Aussage (4) ist falsch. [5]

Aufgabe 7 (Geraden, Ebenen und Hyperebenen als lineare Räume II)

(a) Betrachten Sie folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^5$:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^5.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) E ist eine Hyperebene des $\mathbb{R}^5$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) $E \subseteq \mathbb{R}^5$ ist eine Gerade. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Die Menge $\{(1,1,-3,0,0)^T\}$ist ein Erzeugendensystem von E. ☐ wahr ☐ falsch

(4) $E \subseteq \mathbb{R}^5$ ist eine Ebene. ☐ wahr ☐ falsch

(b) Betrachten Sie folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^5$:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^5.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

[5] $\{(1,-1,1)^T,(-4,4,-4)^T\}$ ist aber ein Erzeugendensystem von E.

(1) E ist eine Hyperebene des $\mathbb{R}^5$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) $E \subseteq \mathbb{R}^5$ ist eine Gerade. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Die Vektoren $(1,1,-3,0,0)^T, (0,0,1,1,1)^T$
bilden ein Erzeugendensystem von E. ☐ wahr ☐ falsch

(4) $E \subseteq \mathbb{R}^5$ ist eine Ebene. ☐ wahr ☐ falsch

(c) Betrachten Sie folgende lineare Hülle:

$$E = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-4\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^5.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) Die lineare Hülle E ist eine Hyperebene des $\mathbb{R}^5$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Die Vektoren $(1,0,1,0,0)^T, (0,1,-4,0,0)^T, (0,0,0,1,1)^T, (0,1,0,0,1)^T$
bilden ein Erzeugendensystem von E. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Die Vektoren $(1,0,1,0,0)^T, (0,1,-4,0,0)^T, (0,0,0,1,1)^T, (0,1,0,0,1)^T$
bilden eine Basis von E. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Die Vektoren $(1,0,1,1,1)^T, (0,1,-4,0,0)^T, (0,0,0,1,1)^T, (0,1,0,0,1)^T$
bilden eine Basis von E. ☐ wahr ☐ falsch

Lösung:

(a) Die Teilmenge beschreibt eine Ebene und hat Dimension 2, da sie der linearen Hülle der linear unabhängigen Vektoren $(1,0,1,0,0)^T, (0,1,-4,0,0)^T$ entspricht,

$$E = \operatorname{lin}\left\{(1,0,1,0,0)^T, (0,1,-4,0,0)^T\right\}.$$

Dass die Vektoren $(1,0,1,0,0)^T$ und $(0,1,-4,0,0)^T$ linear unabhängig sind, könnte man wieder über ein Gleichungssystem zeigen.

- Zu (1): Für eine Hyperebene müsste die Menge Dimension 4 haben. Da aber E Dimension 2 hat, ist die Aussage (1) falsch.
- Zu (2): Da E die Dimension 2 und nicht 1 hat, wird keine Gerade aufgespannt. Die Aussage (2) ist falsch.
- Zu (3): Die lineare Hülle dieses Vektors hat die Dimension 1. Die Menge E hat die Dimension 2. Damit ist $\operatorname{lin}\{(1,1,-3,0,0)^T\} \neq E$ und die Menge kein Erzeugendensystem von E. Die Aussage (3) ist falsch.
- Zu (4): Da E die Dimension 2 hat, ist E eine Ebene. Die Aussage (4) ist wahr.

(b) Die Teilmenge beschreibt die lineare Hülle der linear unabhängigen Vektoren $(1,0,1,0,0)^T, (0,1,-4,0,0)^T, (0,0,0,1,1)^T$,

$$E = \operatorname{lin}\left\{(1,0,1,0,0)^T, (0,1,-4,0,0)^T, (0,0,0,1,1)^T\right\}.$$

Dass die Vektoren $(1,0,1,0,0)^T$, $(0,1,-4,0,0)^T$ und $(0,0,0,1,1)^T$ linear unabhängig sind, könnte man wieder über ein Gleichungssystem zeigen. Die Menge E hat also Dimension 3.

- Zu (1): Für eine Hyperebene müsste die Menge Dimension $5-1=4$ haben. Die Aussage (1) ist falsch.
- Zu (2): Die Menge E hat Dimension 3 und nicht 1. Damit ist E keine Gerade. Die Aussage (2) ist falsch.
- Zu (3): Die lineare Hülle dieser beiden Vektoren hat die Dimension 2. Die Menge E hat Dimension 3. Damit können die beiden Vektoren kein Erzeugendensystem von E darstellen. Die Aussage (3) ist falsch.
- Zu (4): Die Menge E hat Dimension 3 und nicht 2. Damit ist E keine Ebene. Die Aussage (4) ist falsch.

(c) Bevor wir losrechnen, lohnt sich ein Blick auf die Vektoren. Die ersten 3 sind die selben Vektoren wie in Teilaufgabe (b). Der letzte Vektor ist eine Linearkombination dieser 3 Vektoren, es gilt

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-4\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Für die lineare Hülle gilt also:

$$\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-4\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-4\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Diese 4 Vektoren sind linear unabhängig (man könnte dies wieder über ein Gleichungssystem zeigen). Damit hat die Menge E Dimension 4.

- Zu (1): Da E die Dimension $4=5-1$ hat, ist E eine Hyperebene im $\mathbb{R}^5$. Die Aussage (1) ist wahr.
- Zu (2): Das haben wir zu Beginn der Teilaufgabe (c) verifiziert. Die Aussage (2) ist wahr.
- Zu (3): Die vier Vektoren bilden ein Erzeugendensystem von E und sind linear unabhängig. Also ist die Menge eine Basis von E. Die Aussage (3) ist wahr.
- Zu (4): Wir können den Basistauschsatz aus dem Skript, Kapitel 6, benutzen. Dort heisst es:

Satz 6.4.5 - Basistausch
Sei $B = \{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{i-1}, \mathbf{v}^i, \mathbf{v}^{i+1}, \dots, \mathbf{v}^n\}$ eine Basis von $V \subseteq \mathbb{R}^m$ der Dimension n, $i \in \{1, \dots, n\}$ ein Index, und der Vektor

$$\mathbf{u}^i = \alpha_1\mathbf{v}^1 + \cdots + \alpha_i\mathbf{v}^i + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^m$$

> eine Linearkombination mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ und $\alpha_i \neq 0$. Dann ist auch
> $\tilde{B} = \{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^{i-1}, \mathbf{u}^i, \mathbf{v}^{i+1}, \dots, \mathbf{v}^n\}$ eine Basis von V.

Nach (3) bilden die Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-4\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

eine Basis von E. Zudem ist

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}0\\1\\-4\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Da $\alpha_1 = 1 \neq 0$ dürfen wir $(1,0,1,0,0)^T$ mit $(1,0,1,1,1)^T$ tauschen und die resultierende Menge bleibt eine Basis von E. Die Aussage (4) ist wahr.

Aufgabe 8 (Basen des $\mathbb{R}^3$)

Gegeben sind die fünf Vektoren:

$$\mathbf{a}^1 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{a}^3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix}1\\17\\3\end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}.$$

(a) Verifizieren Sie, dass die drei Vektoren $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2$ und $\mathbf{a}^3$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ darstellen.

(b) Lässt sich der Vektor $\mathbf{b}$ als folgende Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2$ und $\mathbf{a}^3$ darstellen:

$$\mathbf{b} = -\mathbf{a}^1 + 14\mathbf{a}^2 + 3\mathbf{a}^3?$$

Lässt sich der Vektor $\mathbf{c}$ als folgende Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2$ und $\mathbf{a}^3$ darstellen:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}^3?$$

(c) Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?
Hinweis: Nutzen Sie den Basistauschsatz und die Ergebnisse aus Teilaufgaben (a) und (b).

(1) Die Menge $\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{c}\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Die Menge $\{\mathbf{c}, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Die Menge $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}^3\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Die Menge $\{\mathbf{a}^1, \mathbf{b}, \mathbf{a}^3\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$. ☐ wahr ☐ falsch

(d) Welche der folgenden Aussagen ist wahr und welche falsch?

(1) $\text{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{b}, \mathbf{a}^3\} \subseteq \text{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) $\text{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2\} \subseteq \text{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$. ☐ wahr ☐ falsch

(3) $\text{lin}\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} \subseteq \text{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$. ☐ wahr ☐ falsch

(4) $\mathbb{R}^3 \subseteq \text{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$. ☐ wahr ☐ falsch

Lösung:

(a) Die Vektoren $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ sind linear unabhängig, genau dann wenn

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ erfüllt wird. Aus der dritten Komponente folgt, dass $\alpha_3 = 0$ sein muss. Aus der zweiten folgt somit $\alpha_2 = 0$ und schliesslich aus der ersten, dass $\alpha_1 = 0$ gilt. Die 3 Vektoren sind linear unabhängig. Drei unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$ bilden stets eine Basis des $\mathbb{R}^3$, vgl. Satz 6.4.7 aus Aufgabe 4.

(b) Der Vektor $\mathbf{b}$ lässt sich als $\mathbf{b} = -\mathbf{a}^1 + 14\mathbf{a}^2 + 3\mathbf{a}^3$ darstellen, da

$$-\mathbf{a}^1 + 14\mathbf{a}^2 + 3\mathbf{a}^3 = -\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 14 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 \\ 14+3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 17 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{b}.$$

Der Vektor $\mathbf{c}$ lässt sich als $\mathbf{c} = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}^3$ darstellen, da

$$\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{c}.$$

(c)
- Zu (1): Wir wissen bereits, dass sich $\mathbf{c}$ als lineare Kombination der Basis $B = \{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$ darstellen lässt (siehe (b)). Daher können wir den Basistauschsatz benutzen (siehe Aufgabe 7). Wichtig ist nun zu beachten, dass α_3 in der Darstellung des Vektors $\mathbf{c}$ durch die Basis B, nicht null ist,
$$\mathbf{c} = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}^3 = 0 \cdot \mathbf{a}^1 + \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}^3.$$
Somit können wir mit Hilfe des Basistauschsatzes $\mathbf{a}^3$ mit $\mathbf{c}$ tauschen und es ergibt sich folgende Basis:
$$\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{c}\}.$$
Die Aussage (1) ist wahr.
- Zu (2): Wir wissen bereits, dass sich $\mathbf{c}$ als lineare Kombination der Basis $B = \{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$ darstellen lässt (siehe (b)). Daher können wir den Basistauschsatz benutzen (siehe Aufgabe

7). Wichtig ist nun zu beachten, dass α_1 in der Darstellung des Vektors $\mathbf{c}$ durch die Basis B, null ist,

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}^3 = 0 \cdot \mathbf{a}^1 + \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}^3.$$

Daher können wir den Basistauschsatz nicht anwenden und $\mathbf{c}$ nicht mit $\mathbf{a}^1$ austauschen. Da $\mathbf{c} = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}^3$ gilt, sind die Vektoren $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}^2$ und $\mathbf{a}^3$ linear abhängig und können somit keine Basis darstellen. Die Aussage (2) ist falsch.

- Zu (3): Wir wissen bereits, dass sich $\mathbf{b}$ als Linearkombination der Basis $B = \{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$ darstellen lässt (siehe Teilaufgabe (b)). Es gilt

$$\mathbf{b} = -\mathbf{a}^1 + 14\mathbf{a}^2 + 3\mathbf{a}^3 \ .$$

Es ist in dem Fall $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 14$ und $\alpha_3 = 3$. Mit Hilfe des Basistauschsatzes können wir $\mathbf{a}^1$ mit $\mathbf{b}$ tauschen. Es ergibt sich somit die Basis $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$. Zudem gilt, dass $\mathbf{c} = 0\mathbf{b} + \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}^3$. Somit können wir wieder den Basistauschsatz anwenden, um $\mathbf{c}$ mit $\mathbf{a}^2$ zu tauschen, da $\alpha_2 \neq 0$. $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}^3\}$ ist also eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Die Aussage (3) ist wahr.

- Zu (4): Wir wissen bereits, dass sich $\mathbf{b}$ als lineare Kombination der Basis $B = \{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$ darstellen lässt (siehe Teilaufgabe (b)). Es gilt

$$\mathbf{b} = -\mathbf{a}^1 + 14\mathbf{a}^2 + 3\mathbf{a}^3 \ .$$

Es ist in dem Fall $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 14$ und $\alpha_3 = 3$. Wir können daher $\mathbf{a}^2$ mit $\mathbf{b}$ tauschen. Daher sagt uns der Basistauschsatz, dass $\{\mathbf{a}^1, \mathbf{b}, \mathbf{a}^3\}$ eine weitere Basis bildet. Die Aussage (4) ist wahr.

(d)
- Zu (1): Aus Teilaufgabe (c) wissen wir, dass sowohl $\text{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{b}, \mathbf{a}^3\}$ als auch $\text{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Es gilt daher

$$\text{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\} = \text{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{b}, \mathbf{a}^3\} = \mathbb{R}^3.$$

Die Aussage (1) ist wahr.

- Zu (2): Laut Definition gilt

$$\text{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2\} = \left\{\alpha_1\mathbf{a}^1 + \alpha_2\mathbf{a}^2 \,\middle|\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Das heisst, $\text{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2\}$ ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ und daher automatisch auch eine Teilmenge von $\text{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$. Die Aussage (2) ist wahr.

- Zu (3):Laut Definition gilt

$$\text{lin}\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} = \{\alpha_1\mathbf{b} + \alpha_2\mathbf{c} \,|\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Das heisst $\text{lin}\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ und daher automatisch auch eine Teilmenge von $\text{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$. Die Aussage (3) ist wahr.

- Zu (4): Aus Teilaufgabe (a) wissen wir, dass die drei Vektoren $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2$ und $\mathbf{a}^3$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ darstellen. Es gilt daher

$$\text{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\} = \mathbb{R}^3.$$

Die Aussage (4) ist wahr.

Aufgabe 9 (Festgeld und Aktien)

Von drei Geldanlagen (Festgeld, Aktie I, Aktie II) wird angenommen, dass sie nach einem Jahr folgenden Wert haben (jeweils in CHF):

	Festgeld	Aktie I	Aktie II
schlechte Konjunktur	1050	500	0
mittlere Konjunktur	1050	1200	2000
gute Konjunktur	1050	3000	6000
	$(\mathbf{a}^1)$	$(\mathbf{a}^2)$	$(\mathbf{a}^3)$

Das heisst, investiert man beispielsweise $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, wobei α_2 in 1000 CHF angegeben ist, in Aktie I, so hat man nach einem Jahr $\alpha_2 \cdot 1200$ CHF bei mittlerer Konjunktur. Bei guter Konjunktur wären es $\alpha_2 \cdot 3000$ CHF. Ist $\alpha_2 < 0$, so nennt man Investitionen Leerverkäufe anstatt Käufe.
Investiert man also α_1 in Festgeld, α_2 in Aktie I und α_3 in Aktie II, wobei α_1, α_2 und α_3 in 1000 CHF angegeben sind, hat man nach einem Jahr

$$\begin{aligned}\alpha_1 \cdot \mathbf{a}^1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{a}^2 + \alpha_3 \cdot \mathbf{a}^3 =& \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1050 \\ 1050 \\ 1050 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 1200 \\ 3000 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2000 \\ 6000 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} \alpha_1 1050 + \alpha_2 500 \\ \alpha_1 1050 + \alpha_2 1200 + \alpha_3 2000 \\ \alpha_1 1050 + \alpha_2 3000 + \alpha_3 6000 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

wobei die erste Komponente des so enstehenden Auszahlungsschemas dem Wert bei schlechter Konjunktur entspricht, die zweite dem Wert bei mittlerer Konjunktur und die dritte dem Wert bei guter Konjunktur.

(a) Welches Auszahlungschema ergibt sich, wenn $\alpha_1 = -10$ in Festgeld, $\alpha_2 = 7$ in Aktie I und $\alpha_3 = 8$ in Aktie II investiert wird?

(b) Kann man jedes mögliche Auszahlungsschema mit diesen 3 Investitionen erhalten? Bzw. gibt es ein Auszahlungsschema, das nicht durch eine Kombination dieser drei Geldanlagen erzeugt werden kann? Falls nein, begründen Sie Ihre Antwort. Falls ja, geben Sie ein Beispiel.

Lösung:

(a) Setzen wir $\alpha_1 = -10$, $\alpha_2 = 7$ und $\alpha_3 = 8$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
-10\begin{pmatrix}1050\\1050\\1050\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}500\\1200\\3000\end{pmatrix}+8\begin{pmatrix}0\\2000\\6000\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-10500\\-10500\\-10500\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3500\\8400\\21000\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\16000\\48000\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-10500+3500+0\\-10500+8400+16000\\-10500+21000+48000\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-7000\\13900\\58500\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(b) Jedes mögliche Auszahlungsschema entspricht anschaulich einem Vektor bzw. einem Punkt im $\mathbb{R}^3$. Bilden die Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$, dann kann jedes Auszahlungsschema erzielt werden. Wir prüfen daher, ob die drei Vektoren linear unabhängig sind. Damit die drei Vektoren linear unabhängig sind, muss gelten, dass

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1050\\1050\\1050\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}500\\1200\\3000\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0\\2000\\6000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ gelöst wird.
Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrl}
\text{(I)} & 1050\alpha_1+500\alpha_2+0\alpha_3 = & 0\\
\text{(II)} & 1050\alpha_1+1200\alpha_2+2000\alpha_3 = & 0\\
\text{(III)} & 1050\alpha_1+3000\alpha_2+6000\alpha_3 = & 0.
\end{array}$$

Gibt es eine Kombination $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ welche diese 3 Gleichungen löst und bei der $\alpha_1 \neq 0$ oder $\alpha_2 \neq 0$ oder $\alpha_3 \neq 0$, dann sind die Vektoren $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ linear abhängig.
Wenden wir die Substitutionsmethode für 3 Unbekannte und die 3 Gleichungen (I), (II) und (III) an.

(1) Wir lösen die Gleichung (I) nach α_1 auf und erhalten $\alpha_1 = -\frac{10}{21}\alpha_2$.

(2) Setzt man diese Information in die zweite und dritte Gleichung ein, so suchen wir ein α_2 und α_3 mit der folgenden Eigenschaft:

$$\begin{array}{lrl}
\text{(II)} & -500\alpha_2+1200\alpha_2+2000\alpha_3 = & 0\\
\text{(III)} & -500\alpha_2+3000\alpha_2+6000\alpha_3 & = 0
\end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{lrl}
\text{(II)} & 700\alpha_2+2000\alpha_3 = & 0\\
\text{(III)} & 2500\alpha_2+6000\alpha_3 = & 0.
\end{array}$$

(3) Wenden wir das Substitutionsschema für 2 Unbekannte und 2 Gleichungen an:

(3.1) Wir lösen Gleichung (III) nach α_2 auf und erhalten $\alpha_2 = -\frac{12}{5}\alpha_3$.

(3.2) Setzt man diese Information in Gleichung (II) ein, so suchen wir ein α_3 mit der folgenden Eigenschaft:

$$700(-\frac{12}{5}\alpha_3) + 2000\alpha_3 = 0 \iff 320\alpha_3 = 0.$$

Diese Gleichung gilt genau dann, wenn $\alpha_3 = 0$ ist.

(4) Aus (3) folgt, dass $\alpha_2 = 0$ und somit auch $\alpha_1 = 0$.

Die Gleichungen werden also nur von $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$ gelöst. Die drei Vektoren $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ sind linear unabhängig und bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Jeder Vektor im $\mathbb{R}^3$ lässt sich also als Linearkombination von $\mathbf{a}^1$, $\mathbf{a}^2$ und $\mathbf{a}^3$ darstellen, bzw. jedes Auszahlungsschema ist somit möglich mit den drei Investitionen.

Aufgabe 10 (Das Satellitenproblem)

Die Firma SpaceX ist mit ihrer neu entwickelten Trägerrakete *Millenium Falcon* ins Satellitengeschäft eingestiegen. Der erste prestigeträchtige Auftrag lautet, zwei Satelliten an den Positionen

$$\mathbf{w}^1 = \begin{pmatrix} 60 \\ -10 \\ 30 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{w}^2 = \begin{pmatrix} -50 \\ -20 \\ 25 \end{pmatrix}$$

auszusetzen. Eine technische Störung während des Starts führt nun dazu, dass sich die drei Steuerdüsen des *Millenium Falcons* nicht mehr neu orientieren lassen. Die letzte bekannte Orientierung der Steuerdüsen ist durch die drei Vektoren

$$\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Mit Orientierung ist dabei die Fortbewegungsmöglichkeit der Rakete im dreidimensionalen Raum gemeint, sprich:

$$\begin{pmatrix} \text{vorwärts/rückwarts} \\ \text{rechts/links bzw. seitwärts} \\ \text{aufwärts/ abwärts} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{1.Dimension} \\ \text{2.Dimension} \\ \text{3.Dimension} \end{pmatrix}.$$

Die Ingenieure im Kontrollzentrum sollen nun berechnen, wie die Schubintensitäten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ zu wählen sind, um entlang der Zielrichtung $\alpha_1\mathbf{v}^1 + \alpha_2\mathbf{v}^2 + \alpha_3\mathbf{v}^3$ die gewünschten Positionen zu erreichen. Dabei herrscht Uneinigkeit: Die eine Hälfte der Ingenieure behauptete, $\mathbf{w}^1$ und $\mathbf{w}^2$ seien durchaus mit den Orientierungen $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3$ erreichbar. Die andere Hälfte hingegen erklärt die Mission für fehlgeschlagen, denn nur, wenn Steuerdüse $\mathbf{v}^2$ umorientiert wird, bspw. zu $\mathbf{u}^2 = (2, 3, -1)^T$, können beide Positionen erreicht werden.

In der Zwischenzeit meldet sich MacGyver, der sich vor dem Start an Bord des *Millenium Falcon* schmuggeln konnte, über Funk. Ausgerüstet mit einem Kaugummi, einer Büroklammer und seinem altbewährten Schweizer Taschenmesser erklärt er sich dazu bereit, falls nötig, die Steuerdüse neu zu orientieren.

Es liegt nun an Ihnen, den Ingenieuren bei ihrer Entscheidung zu helfen!

(a) Bestimmen Sie zuerst, wer Recht hat. Welche der Positionen $\mathbf{w}^1$ oder $\mathbf{w}^2$ kann mit den ursprünglichen Orientierungen $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3$ erreicht bzw. nicht erreicht werden?

(b) Was hat eine Orientierungsänderung von $\mathbf{v}^2$ zu $\mathbf{u}^2 = (2,3,-1)^T$ zur Konsequenz? Welche Positionen können nun erreicht werden? Muss sich MacGyver also einschalten, um die Mission zu retten?

(c) Mit welcher Steuerdüsenkonfiguration, $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3\}$ oder $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{u}^2, \mathbf{v}^3\}$, lässt sich jede beliebige Position erreichen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Rechnen Sie sorgfältig und begründen Sie alle Ergebnisse. Elon Musk wird es Ihnen danken.

Lösung:

(a) $\mathbf{w}^1$ und $\mathbf{w}^2$ sind mithilfe von $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3$ erreichbar, wenn $\mathbf{w}^1$ und $\mathbf{w}^2$ Linearkombinationen von $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3$ sind. Wir prüfen zunächst $\mathbf{w}^1$:
$\mathbf{w}^1$ ist eine Linearkombinationen von $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{v}^2$ und $\mathbf{v}^3$. Es gibt also $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, sodass

$$\alpha_1 \mathbf{v}^1 + \alpha_2 \mathbf{v}^2 + \alpha_3 \mathbf{v}^3 = \mathbf{w}^1 \iff \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ -10 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Um die zu sehen, betrachten wir folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{rrl} \text{(I)} & 2\alpha_1 - 10\alpha_2 = & 60 \\ \text{(II)} & \alpha_2 + 2\alpha_3 = & -10 \\ \text{(III)} & \alpha_1 - 5\alpha_2 = & 30. \end{array}$$

Wenden wir die Substitutionsmethode für 3 Unbekannte und 3 Gleichungen an.

(1) Wir lösen Gleichung (I) nach α_1 auf und erhalten $\alpha_1 = 30 + 5\alpha_2$.

(2) Setzt man diese Information in die zweite und dritte Gleichung ein, so suchen wir ein α_2 und α_3 mit der folgenden Eigenschaft:

$$\begin{array}{rrl} \text{(II)} & \alpha_2 + 2\alpha_3 = & -10 \\ \text{(III)} & 30 + 5\alpha_2 - 5\alpha_2 = & 30 \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{rrl} \text{(II)} & \alpha_2 + 2\alpha_3 = & -10 \\ \text{(III)} & 30 = & 30. \end{array}$$

(3) Aus Gleichung (II) folgt sofort, dass $\alpha_2 = -10 - 2\alpha_3$.

(4) Mit (1) folgt aus (3), dass $\alpha_1 = 30 + 5(-10 - 2\alpha_3) = 30 - 50 - 10\alpha_3 = -20 - 10\alpha_3$.

Somit können die Satelliten die Position $\mathbf{w}^1$, mit den Steuerdüsen $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3$, erreichen, sofern man die Schubintensitäten wie folgt wählt

$$\alpha_1 = -20 - 10\alpha_3,\ \alpha_2 = -10 - 2\alpha_3,\ \alpha_3 \in \mathbb{R}.$$

Hier einige Beispiele von möglichen, konkreten Schubintensitäten

$$\begin{array}{llllll} \alpha_1 = & 30 & \alpha_2 = & 0 & \alpha_3 = & -5, \\ \alpha_1 = & -20 & \alpha_2 = & -10 & \alpha_3 = & 0, \\ \alpha_1 = & 0 & \alpha_2 = & -6 & \alpha_3 = & -2. \end{array}$$

Nun prüfen wir $\mathbf{w}^2$:
$\mathbf{w}^2$ ist keine Linearkombinationen von $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{v}^2$ und $\mathbf{v}^3$.Es gibt keine $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, sodass

$$\alpha_1 \mathbf{v}^1 + \alpha_2 \mathbf{v}^2 + \alpha_3 \mathbf{v}^3 = \mathbf{w}^2 \iff \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50 \\ -20 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Um dies zu verifizieren, betrachten wir wieder folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & 2\alpha_1 - 10\alpha_2 = & -50 \\ \text{(II)} & \alpha_2 + 2\alpha_3 = & -20 \\ \text{(III)} & \alpha_1 - 5\alpha_2 = & 25. \end{array}$$

Wenden wir die Substitutionsmethode für 3 Unbekannte und 3 Gleichungen an.

(1) Wir lösen Gleichung (I) nach α_1 auf und erhalten $\alpha_1 = -25 + 5\alpha_2$.
(2) Setzt man diese Information in die zweite und dritte Gleichung ein, so suchen wir ein α_2 und α_3 mit der folgenden Eigenschaft:

$$\begin{array}{lrl} \text{(II)} & \alpha_2 + 2\alpha_3 = & -20 \\ \text{(III)} & -25 + 5\alpha_2 - 5\alpha_2 = & 25 \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{lrl} \text{(II)} & \alpha_2 + 2\alpha_3 = & -20 \\ \text{(III)} & -25 = & 25. \end{array}$$

(3) Aus Gleichung (III) folgt sofort, dass es keine solche $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ gibt. Unabhängig von der Wahl von, α_1, α_2 und α_3 ist Gleichung (III) $-25 \neq 25$.

Somit können die Satelliten die Position $\mathbf{w}^2$, mit den Steuerdüsen $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3$, nicht erreichen.

(b) Die Position $\mathbf{w}^1$ kann immer noch mittels $30\mathbf{v}^1 + 0\mathbf{u}^2 - 5\,\mathbf{v}^3$ erreicht werden, da wir lediglich $\mathbf{v}^2$ durch $\mathbf{u}^2$ ersetzt haben. Position $\mathbf{w}^2$ kann nun auch erreicht werden. Betrachten wir die Auswirkung dieses Tausches.
Gesucht sind nun $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, sodass

$$\alpha_1 \mathbf{v}^1 + \alpha_2 \mathbf{u}^2 + \alpha_3 \mathbf{v}^3 = \mathbf{w}^2 \iff \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50 \\ -20 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Um dies zu verifizieren, betrachten wir nun folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = & -50 \\ \text{(II)} & 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = & -20 \\ \text{(III)} & \alpha_1 - \alpha_2 = & 25. \end{array}$$

Wenden wir unser Schema an.

(1) Wir lösen Gleichung (I) nach α_1 auf und erhalten $\alpha_1 = -25 - \alpha_2$.

(2) Setzt man diese Information in die zweite und dritte Gleichung ein, so suchen wir ein α_2 und α_3 mit der folgenden Eigenschaft:

$$\begin{array}{lrl} \text{(II)} & 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = & -20 \\ \text{(III)} & -25 - \alpha_2 - \alpha_2 = & 25 \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{lrl} \text{(II)} & 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = & -20 \\ \text{(III)} & -2\alpha_2 = & 50. \end{array}$$

(3) Im Gegensatz zu vorher, folgt nun aus Gleichung (III), dass $\alpha_2 = -25$. Eingesetzt in (II) folgt, dass $-75 + 2\alpha_3 = -20$ und somit $\alpha_3 = \frac{55}{2}$.

(4) Aus (1) und (3) folgt, dass $\alpha_1 = -25 + 25 = 0$.

Tauscht man die Düse $\mathbf{v}^2$ mit der Düse $\mathbf{u}^2$ aus, so lässt sich die Position $\mathbf{w}^2$ nun erreichen. Die folgenden Schubintensitäten müssen dabei verwendet werden:

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = -25,\ \alpha_3 = \frac{55}{2}.$$

MacGyver sollte also die Steuerdüse neu orientieren.

(c) Die Konfiguration $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3\}$ kommt nicht in Frage, da beispielsweise die Position $\mathbf{w}^2$ nicht erreicht werden kann, wie wir in (a) gesehen haben. Mit $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{u}^2, \mathbf{v}^3\}$ hingegen, lässt sich der gesamte $\mathbb{R}^3$ erreichen. Das heisst, die drei Vektoren sind linear unabhängig. Um dies zu sehen, müssen wir zeigen, dass

$$\alpha_1 \mathbf{v}^1 + \alpha_2 \mathbf{u}^2 + \alpha_3 \mathbf{v}^3 = 0 \iff \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ erfüllt ist. Wir betrachten zunächst die erste Komponente dieser Gleichung:

$$2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$$

Daraus schliessen wir, dass $\alpha_1 = -\alpha_2$ gelten muss. Aus der dritten Komponente der Gleichung,

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0,$$

schliessen wir, dass $\alpha_1 = \alpha_2$ gelten muss. Diese zwei Gleichungen können nur dann erfüllt sein, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Schliesslich folgt aus der zweiten Komponente der Gleichung,

$$3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0,$$

dass auch $\alpha_3 = 0$ gelten muss. Somit gilt $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Die drei Vektoren $\mathbf{v}^1, \mathbf{u}^2, \mathbf{v}^3$ sind linear unabhänging und spannen daher den ganzen $\mathbb{R}^3$ auf. Jede Position lässt sich mit den 3 Steuerdüsen $\mathbf{v}^1, \mathbf{u}^2, \mathbf{v}^3$ erreichen.