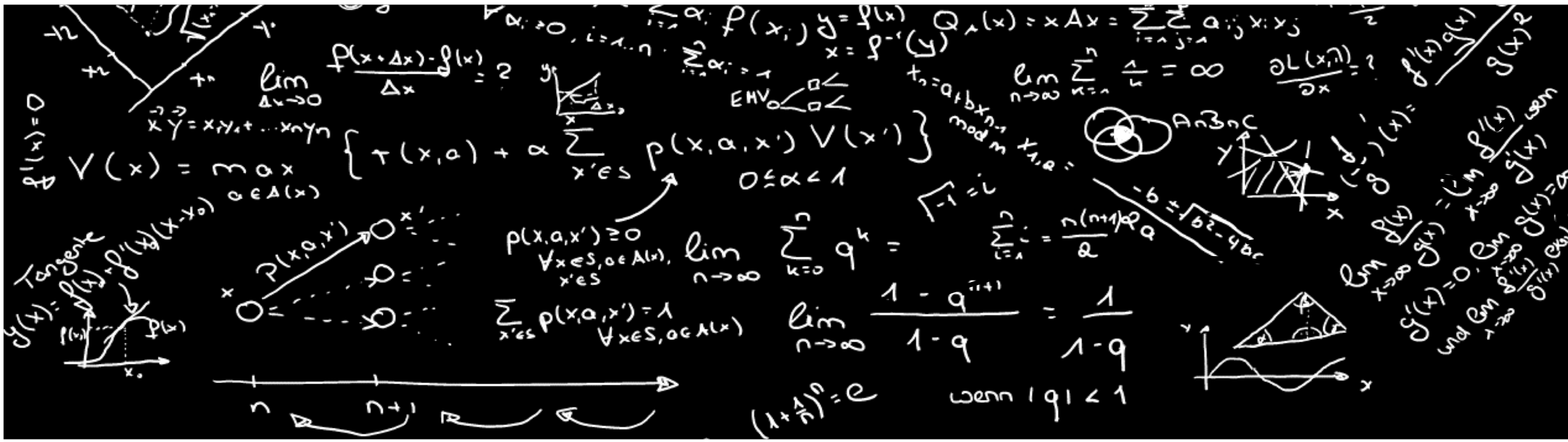
Mathematik II

Linearkombinationen

FS 2019



Universität Zürich[UZH]

Prof. Dr. Christiane Barz
Lehrstuhl Mathematik für Wirtschaftswissenschaften (Chair of Mathematics for Business and Economics)

Organisatorisches

- Sprechstunden
  - Lina: Mittwochs 13-15 Uhr 1.OG
  - Prof. Barz: Dienstags 16-17 Uhr 2.OG Moussonstr. 15

- Vorlesungsmaterialien wieder auf Moodle
  - Einschreibeschlüssel 91sf2kitamehtam
  - Wöchentliches Online Quiz startet Montags nach Vorlesung 14 Uhr, endet vor Vorlesung 9 Uhr
  - Folien, Skript, Übungsblätter, Musterlösungen, Videos, ~~Folien~~, Forum und ggf. Errata

- Übungsgruppen Jonas / Eugen
  - Namen der Tutoren, Zeiten und Räume auf Moodle
  - Anmeldung für Übungsgruppen ab heute 12 Uhr auf Moodle
  - Übungen behandeln stets den Stoff der Vorwoche

\# nicht klausurrelevant
* schwierig, aber klausurrelevant

Agenda

Mathematik 2

10: Optimierungsprobleme mit Nebenbedingungen

9: Reelle Funktionen in n Variablen

8: Lineare Abbildungen

7: Lin. Gleichungssysteme

6: Linearkombinationen

Mathematik 1

5: Reelle Funktionen

4: Folgen

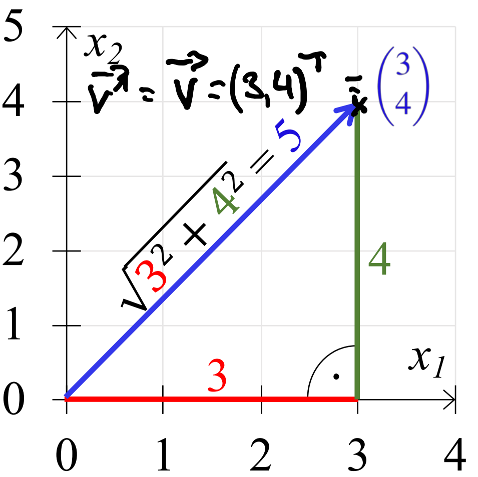
3: Relationen und Funktionen

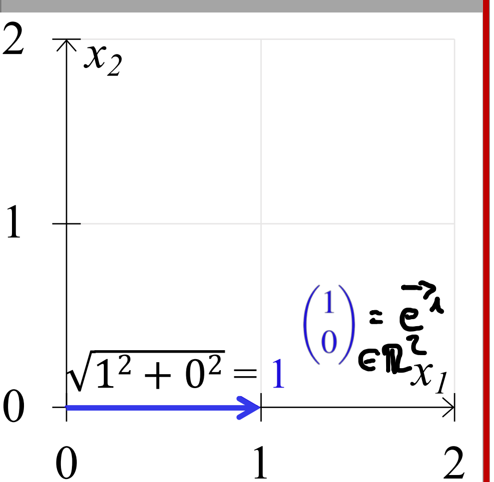
2: Mengen

1: Mathematik als

6.1 Richtungen von Vektoren
6.2 Die Linearkombination
6.3 Lineare Unabhängigkeit
6.5 Lineare Hülle, linearer Raum und Dimension
6.6 Matrizen und Matrizenmultiplikation

Norm, Null-, und Einheitsvektoren





Länge oder Norm von **v**

Definition 2.2.5: Die Länge oder Norm eines Vektors

$$||\mathbf{v}|| = ||\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}|| = \sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2+\cdots+(v_m)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(v_i)^2}, \ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$$

Beispiele: vgl. Kapitel 2

- $||\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}|| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$
- $||\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}|| = \sqrt{1^2+0^2} = 1$

Definition 6.1.2: Nullvektoren, Einheitsvektoren

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}^k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nullvektor

k-ter (kanonischer) Einheitsvektor

Die Richtung eines Vektors

Definition 6.1.3: Richtung eines Vektors

Richtung von $\mathbf{v}$: $\dfrac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

Richtungen haben immer eine Länge von 1

Beispiele:

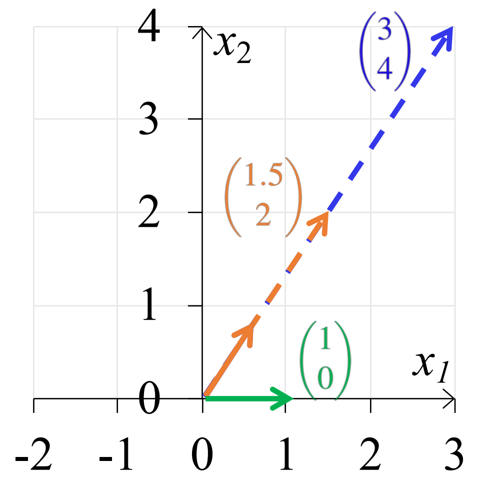
- $$\frac{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}}{\left|\left|\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right|\right|} = \frac{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}}{\underbrace{\sqrt{3^2+4^2}}_{=5}} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

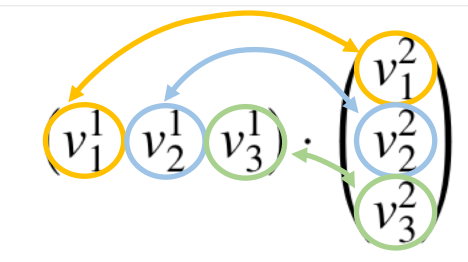
- $$\frac{\begin{pmatrix}1.5\\2\end{pmatrix}}{\left|\left|\begin{pmatrix}1.5\\2\end{pmatrix}\right|\right|} = \frac{\begin{pmatrix}1.5\\2\end{pmatrix}}{\underbrace{\sqrt{1.5^2+2^2}}_{2.5}} = \begin{pmatrix}\frac{1.5}{2.5}\\\frac{2}{2.5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

Die Vektoren $(3,4)^T$ und $(1.5,2)^T$ haben die gleiche Richtung.

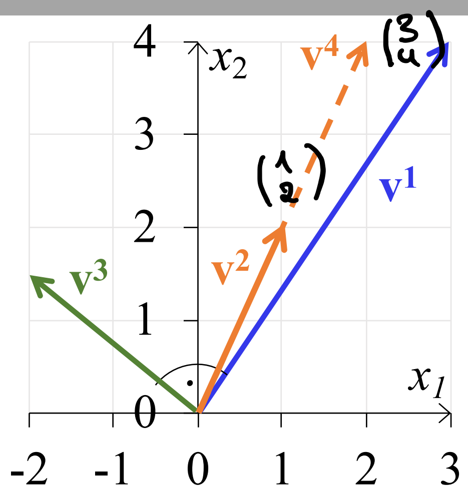
- $$\frac{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}{\left|\left|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|\right|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{1^2+0^2}} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$\mathbf{e}^1$ hat eine andere Richtung als $(3,4)^T$.





$3\cdot 1 + 4\cdot 2$



Das Skalarprodukt

Definition 6.1.4: (Euklidisches) Skalarprodukt

$$\underbrace{(\mathbf{v}^1)^T\mathbf{v}^2 = \langle \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2\rangle}_{\text{Schreibweisen}} = \boxed{\sum_{i=1}^{m} v_i^1 \cdot v_i^2}$$

Skalarprodukt von $\mathbf{v}^1$ und $\mathbf{v}^2$

Beispiele:

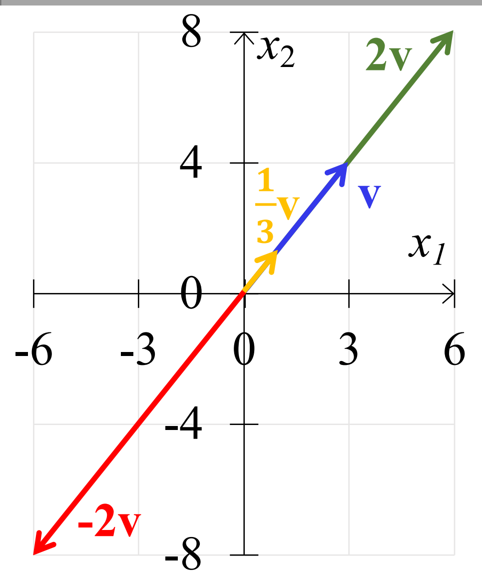
- $(\mathbf{v}^1)^T\mathbf{v}^2 = (3,4)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 3\cdot 1 + 4\cdot 2 = 11 = (\mathbf{v}^2)^T\mathbf{v}^1$
- $(\mathbf{v}^1)^T\mathbf{v}^3 = (3,4)\begin{pmatrix}-2\\1.5\end{pmatrix} = 3\cdot(-2) + 4\cdot 1.5 = 0$
- $(\mathbf{v}^1)^T\mathbf{v}^1 = (3,4)\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = 3\cdot 3 + 4\cdot 4 = 25 \;= ||\mathbf{v}^1||^2$

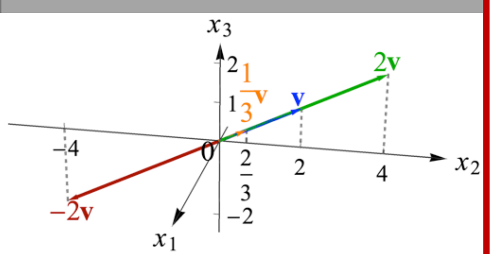
  $2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$
- $(\mathbf{v}^1)^T\mathbf{v}^4 = (3,4)\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = 3\cdot 2 + 4\cdot 4 = 22 \;= 2(\mathbf{v}^1)^T\mathbf{v}^2$

Definition 6.1.5: Orthogonale Vektoren

Haben zwei Vektoren ein Skalarprodukt von 0, heissen sie orthogonal.

Vielfache eines Vektors





Definition 2.2.4: Die skalare Multiplikation

$$\alpha \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \vdots \\ \alpha v_m \end{pmatrix}, \ \underbrace{\mathbf{v}}_{\text{Vektor}} \in \mathbb{R}^m, \ \overbrace{\alpha}^{\text{Skalar}} \in \mathbb{R}$$

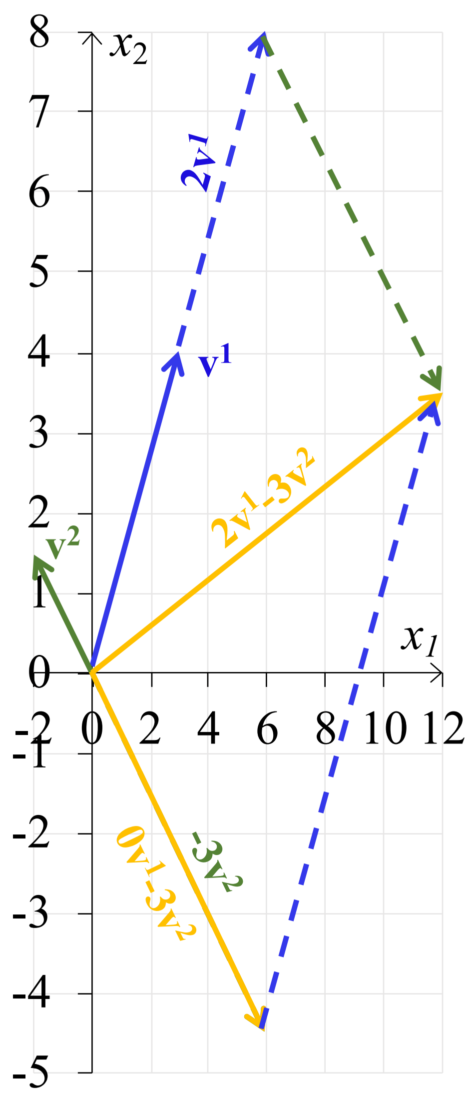
Beispiele:

- $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
  - $2\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$
  - $-2\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}$
  - $\frac{1}{3}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

$\alpha \vec{v}$ zeigt
- in die gleiche Richtung wie $\vec{v}$, wenn $\alpha > 0$
- in die entgegengesetzte Richtung wie $\vec{v}$, wenn $\alpha < 0$

- $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - $2\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
  - $-2\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$
  - $\frac{1}{3}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Linearkombinationen



Definition 6.2.1: Linearkombinationen

Für $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^m$:

Linearkombination der Vektoren $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, .., \mathbf{v}^n$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}^i = \alpha_1 \mathbf{v}^1 + \alpha_2 \mathbf{v}^2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}^n \quad \in \mathbb{R}^m$$

Beispiele:

Für $n = 2$ und $m = 2$ mit $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$:

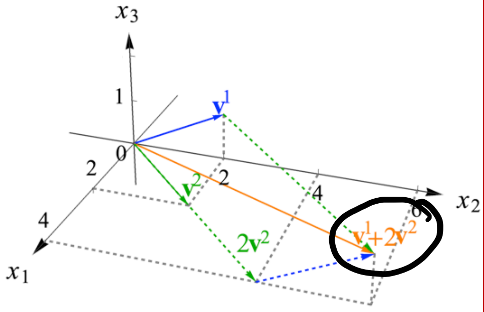
- $\alpha_1 = 2$ und $\alpha_2 = -3$: $\quad 2\mathbf{v}^1 - 3\mathbf{v}^2 = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -2 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3.5 \end{pmatrix}$

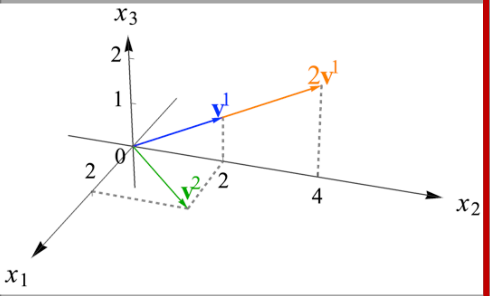
  $2 \cdot \vec{v}^1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad -3 \cdot \vec{v}^2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4.5 \end{pmatrix}$

- $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = -3$: $\quad 0\mathbf{v}^1 - 3\mathbf{v}^2 = -3\begin{pmatrix} -2 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4.5 \end{pmatrix}$

- $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = 0$: $\quad 0\mathbf{v}^1 + 0\mathbf{v}^2 = 0\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} -2 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$

$\vec{0}$ kann immer als Linearkombination dargestellt werden.





Linearkombinationen

Definition 6.2.1: Linearkombinationen

Für $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^m$:

Linearkombination der Vektoren $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, .., \mathbf{v}^n$

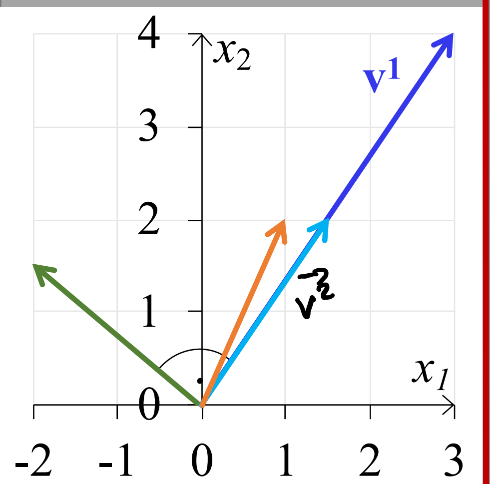
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}^i = \alpha_1 \mathbf{v}^1 + \alpha_2 \mathbf{v}^2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}^n \quad \in \mathbb{R}^m$$

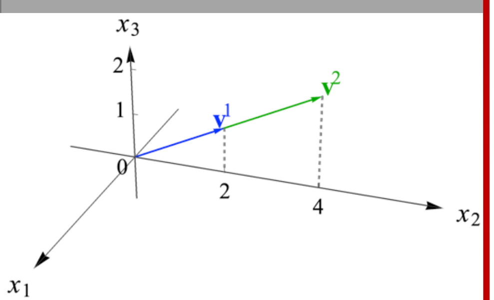
Beispiele:

Für $n = 2$ und $m = 3$ mit $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$:

- $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = 2$: $\quad 1\mathbf{v}^1 + 2\mathbf{v}^2 = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}}$
- $\alpha_1 = 2$ und $\alpha_2 = 0$: $\quad 2\mathbf{v}^1 + 0\mathbf{v}^2 = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lineare Unabhängigkeit





Definition 6.3.1: Lineare Abhängigkeit

$\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^m, n \geq 2$, heissen linear abhängig, wenn mindestens einer der Vektoren als Linearkombination der anderen darstellbar ist.

Beispiele:

- $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \end{pmatrix}$

  $\vec{v}^2 = \frac{1}{2}\vec{v}^1$ oder $\vec{v}^1 = 2\vec{v}^2$
  $\Rightarrow$ linear abhängig

- $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

  linear unabhängig bzw nicht linear abhängig

- $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$

  $(\vec{v}^1)^T \vec{v}^2 = 0$
  linear unabhängig

- $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\vec{v}^2 = 0 \cdot \vec{v}^1$
  linear abhängig

- $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

  linear unabhängig

- $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

  linear abhängig

Sätze 6.3.1 – 6.3.2: Lineare Unabhängigkeit zweier Vektoren

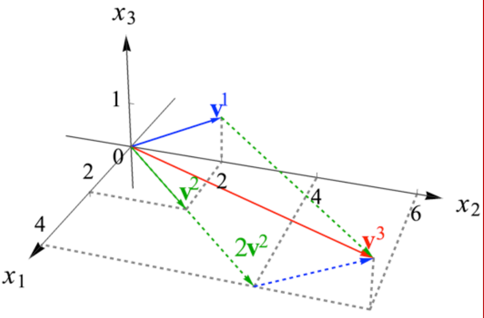
$\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2 \neq \mathbf{0}$ linear abhängig $\Leftrightarrow$ es existiert $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\mathbf{v}^1 = \alpha \mathbf{v}^2$

$\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2 \neq \mathbf{0}$ orthogonal $\Rightarrow \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2$ linear unabhängig

Lineare Unabhängigkeit

Definition 6.3.1: Lineare Abhängigkeit

$\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^m, n \geq 2$, heissen linear abhängig, wenn mindestens einer der Vektoren als Linearkombination der anderen darstellbar ist.



Beispiele:

$$\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3$: $\quad \mathbf{v}^3 = \mathbf{v}^1 + 2\mathbf{v}^2 \Rightarrow \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3$ linear abhängig

$$\vec{v}^1 + 2\vec{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2\cdot 2 \\ 2+2\cdot 2 \\ 1+2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{v}^3$$

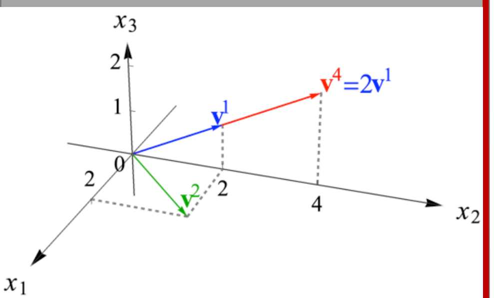
bzw.

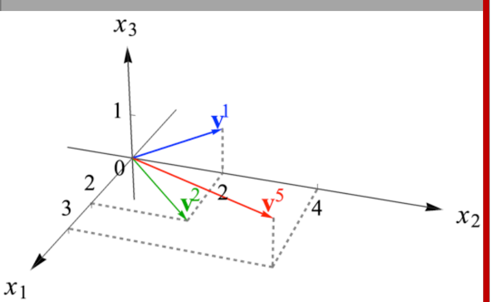
$$\vec{v}^3 - 2\vec{v}^2 = \vec{v}^1$$

$$0.5\vec{v}^3 - 0.5\vec{v}^1 = \vec{v}^2$$

$$\boxed{\vec{v}^1 + 2\vec{v}^2 - \vec{v}^3 = \vec{0}}$$

Lineare Unabhängigkeit





I $2\alpha_2 = -3\alpha_5$

III $\alpha_1 = -\alpha_5$

in II $2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_5$

$= 2(-\alpha_5) + (-3\alpha_5) + 4\alpha_5$

$= -\alpha_5 = 0$

Satz 6.3.3: Lineare Unabhängigkeit

$\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^m$ linear unabhängig $\Leftrightarrow$

$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ einzige Lösung von $\alpha_1 \mathbf{v}^1 + \alpha_2 \mathbf{v}^2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}^n = \mathbf{0}$

Beispiele:

$$\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \cancel{\mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}}, \mathbf{v}^4 = \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}, \mathbf{v}^5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$-2\vec{v}^1 + \vec{v}^4 = \vec{0}$

- $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^4$: $\mathbf{v}^4 = 2\mathbf{v}^1 \Rightarrow \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^4$ linear abhängig

$\cancel{\vec{v}^2 = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_4 \vec{v}_4 \ ?}$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_4 \\ \alpha_1 + 2\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_2 = 0, \ \alpha_1 = -2\alpha_4$$

z.B. $\alpha_4 = 1$ und $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 0$

- $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^5$: $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^5$ linear unabhängig

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{I} \quad 2\alpha_2 + 3\alpha_5 \\ \text{II} \quad 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_5 \\ \text{III} \quad \alpha_1 + \alpha_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = 0, \alpha_5 = 0$$

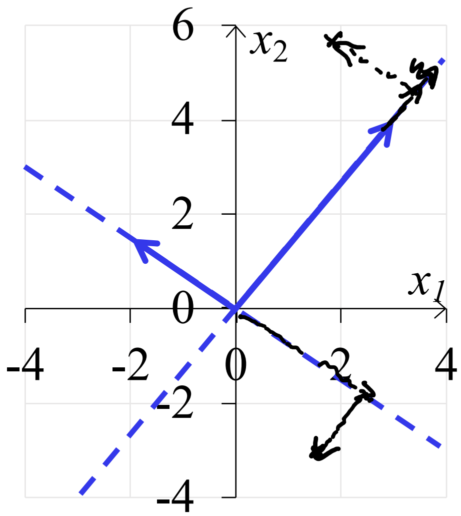
Lineare Hülle

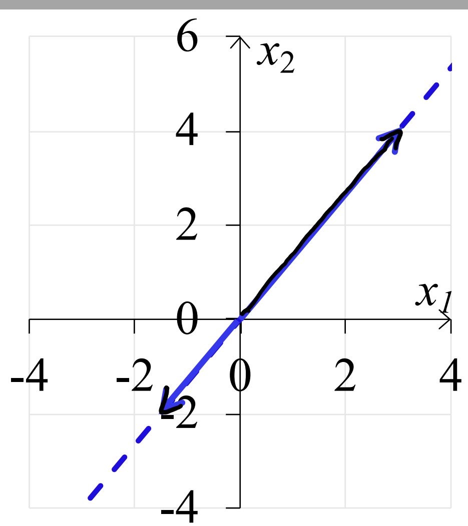
Menge aller Linearkombinationen

Definition 6.4.1: Die lineare Hülle

$$\operatorname{lin}\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}^i \;\middle|\; \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^m, \quad \boxed{\operatorname{lin}\{\} = \{\mathbf{0}\}}$$

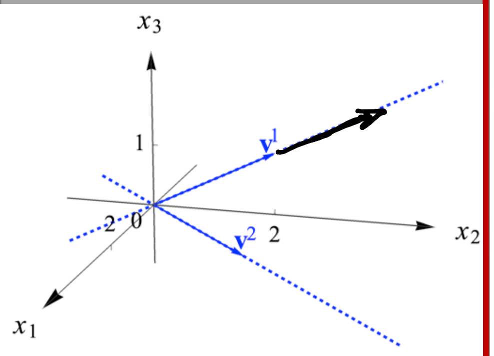
Beispiele:

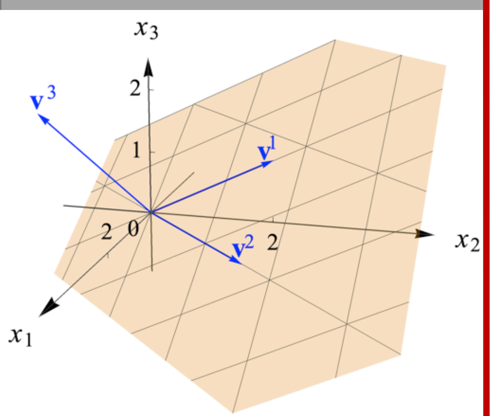




- $\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$ ist eine Gerade im $\mathbb{R}^2$. Alle Vielfachen eines Vektors $\neq \vec{0}$ bilden eine Gerade
- $\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1.5 \end{pmatrix}\right\}$ ist eine Gerade im $\mathbb{R}^2$.
- $\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1.5 \end{pmatrix}\right\}$ ist der $\mathbb{R}^2$. Alle Linearkombinationen zweier linear unabhängiger Vektoren bilden eine Ebene.
- $\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.5 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$ ist eine Gerade im $\mathbb{R}^2$. Alle Linearkombinationen zweier linear abhängiger Vektoren bilden eine Gerade.

Lineare Hülle





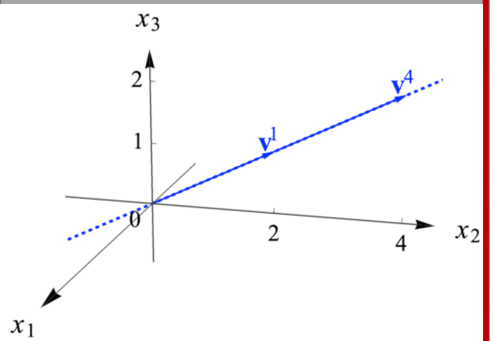
Definition 6.4.1: Die lineare Hülle

$$\text{lin}\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}^i \;\middle|\; \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^m, \quad \text{lin}\{\} = \{\mathbf{0}\}$$

Beispiele:

- $\text{lin}\left\{ \overset{=\vec{v}^1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$ ist eine Gerade im $\mathbb{R}^3$.
- $\text{lin}\left\{ \overset{=\vec{v}^2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}$ ist eine Gerade im $\mathbb{R}^3$.
- $\text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.
- $\text{lin}\left\{ \overset{=\vec{v}^1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{=2\vec{v}^1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\}$ ist eine Gerade im $\mathbb{R}^3$. $= \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- $\text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ ist der $\mathbb{R}^3$.

Eigenschaften der linearen Hülle



$\vec{v} \in V \Rightarrow \alpha_v \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \vec{v}$

$\vec{w} \in V \Rightarrow \alpha_w \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \vec{w}$

$\Rightarrow \alpha \cdot \vec{v} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha_v}_{\in \mathbb{R}} \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \in V$ ✓

$\Rightarrow \vec{v} + \vec{w} = \alpha_v \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + \alpha_w \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \underbrace{(\alpha_v + \alpha_w)}_{\in \mathbb{R}} \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \in V$

Definition 6.4.2, Sätze 6.4.1 – 6.4.2: Linearer Raum und lineare Hülle

$V \subseteq \mathbb{R}^m, V \neq \{\}$ heisst linearer Raum oder Vektorraum, wenn:

- $\mathbf{v} \in V \Rightarrow \alpha \mathbf{v} \in V$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\overset{\alpha=0}{\Rightarrow}$ $\mathbf{0} \in V$).
- $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in V$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

$V = \text{lin}\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n\}$ ist ein linearer Raum.

Definition 6.4.3: Erzeugendensystem

Die Menge $\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n\}$ heisst Erzeugendensystem von V, wenn $V = \text{lin}\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n\}$.

Beispiel:

- $V = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ ist ein linearer Raum.

Lineare Räume haben i.d.R. mehr als ein Erzeugendensystem

Erzeugendensysteme von V sind u.a.

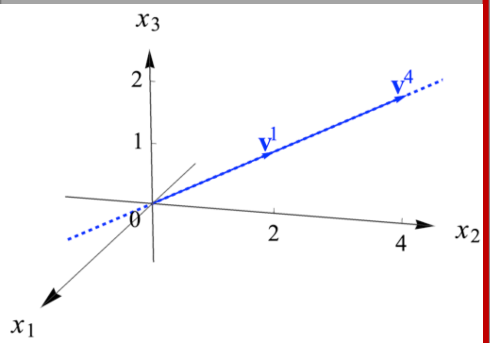
- $\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$
- $\left\{\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}\right\}$
- $\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}\right\}$

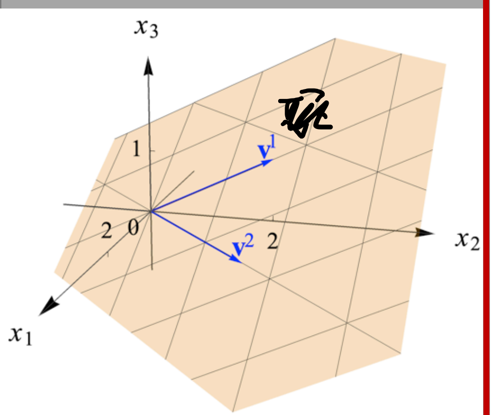
Basis und Dimension

$n = \dim(V)$
Dimension

Definition 6.4.4: Basis und Dimension

$B = \{\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n\}$ heisst Basis von V, wenn $\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n$ linear unabhängig sind und $\operatorname{lin}\{\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n\} = V$.



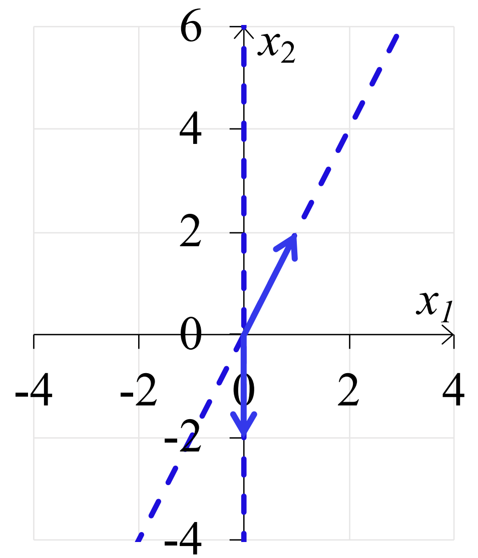


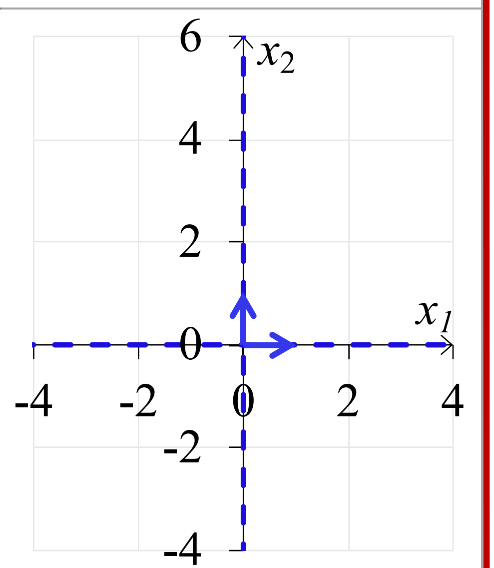
Beispiele:

- $U = \operatorname{lin}\left\{ \overset{\vec{v}^1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{\vec{v}^2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}$ ist ein linearer Raum, $\dim(U) = 2$.
- $W = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \underline{\underline{= \operatorname{lin}\{\}}}$ ist ein linearer Raum, $\dim(W) = 0$.
- $V = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist ein linearer Raum, $\dim(V) = 1$.

Basis von V	Basis von V	Keine Basis von V
$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$	$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$	$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Basis und Dimension





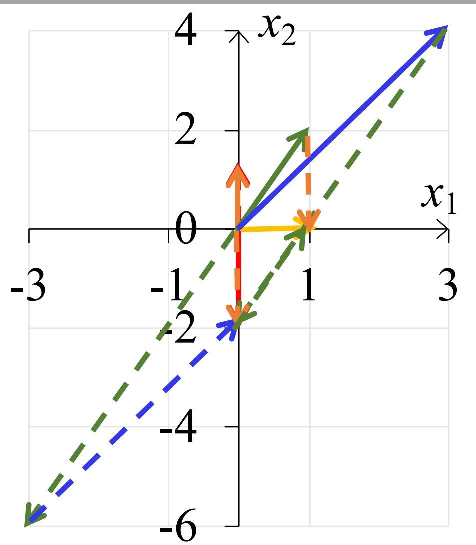
Definition 6.4.5: Geraden, Ebenen und Hyperebenen

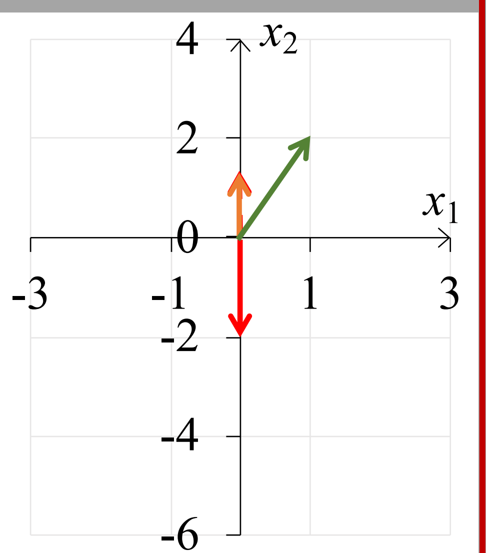
Der lineare Raum $V \subseteq \mathbb{R}^m$ heisst Punkt, wenn $\dim(V) = 0$, Gerade, wenn $\dim(V) = 1$, Ebene, wenn $\dim(V) = 2$ und Hyperebene, wenn $\dim(V) = m-1$.

Beispiele:

- $\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\}$ ist ein linearer Raum mit Dimension 1. $\subseteq \mathbb{R}^2$
  Eine Gerade, eine Hyperebene des $\mathbb{R}^2$
- $\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ ist ein linearer Raum mit Dimension 2. $\subseteq \mathbb{R}^2$
  Eine Ebene, des $\mathbb{R}^2$
- $\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ ist ein linearer Raum mit Dimension 2.
  Eine Ebene, des $\mathbb{R}^2$
- $\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ ist ein linearer Raum mit Dimension 2.
  Eine Ebene, des $\mathbb{R}^2$
- $\operatorname{lin}\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$ ist ein linearer Raum mit Dimension 2.

Der Basistausch





Sätze 6.4.9, 6.4.5: Erzeugendensysteme und Basistausch

Sei $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{v}^1 + \dots + \alpha_i \mathbf{v}^i + \dots + \alpha_n \mathbf{v}^n$ mit $\alpha_i \neq 0$. Dann gilt

$$V = \mathrm{lin}\{\mathbf{v}^1, \dots, \cancel{\mathbf{v}^i}, \dots, \mathbf{v}^n\} = \mathrm{lin}\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{v}^n\}.$$

Ist $\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^i, \dots, \mathbf{v}^n\}$ eine Basis von V, dann ist auch $\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{v}^n\}$ eine Basis von V.

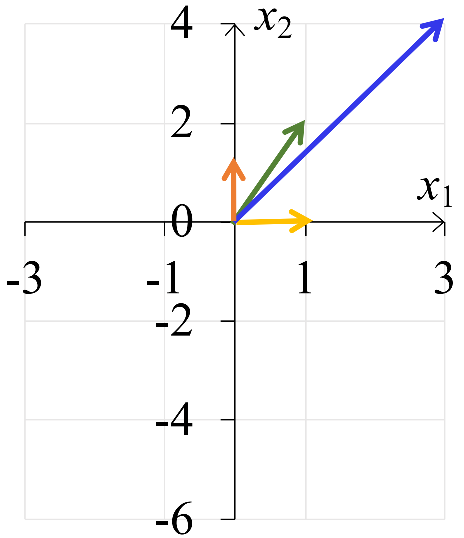
Beispiel: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \underbrace{\overset{\alpha_1}{1} \cdot \overset{\vec{v}^1}{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}} + (-3) \overset{\vec{v}^2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$ $\qquad \vec{e}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-\tfrac{1}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

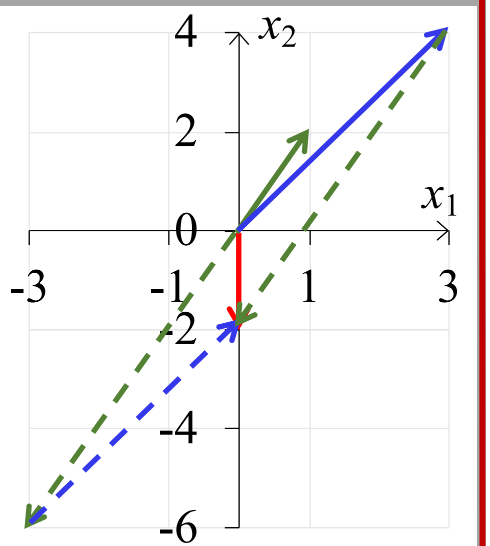
$\vec{e}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\mathrm{lin}\left\{ \cancel{\overset{\vec{v}^1}{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}}, \overset{\vec{v}^2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\} = \mathrm{lin}\left\{ \overset{\vec{u}}{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}}, \overset{\vec{e}^1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\}$

$$\begin{cases} = \boxed{\mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\}} = \mathrm{lin}\left\{ \overset{\vec{e}^2 =}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{\vec{e}^1 =}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} = \mathrm{lin}\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\} \\ \neq \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{lin}\{\mathbf{e}^2\} \end{cases}$$

Die Basis der Einheitsvektoren





Definition 6.4.6: Kanonische Basis

Die Basis $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^m\}$ des $\mathbb{R}^m$ heisst kanonische Basis des $\mathbb{R}^m$.

Satz 6.4.7: Basis des euklidischen Raums

$\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^m \in \mathbb{R}^m$ linear unabhängig $\Rightarrow \operatorname{lin}\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^m\} = \mathbb{R}^m$.

Satz 6.4.8: Maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren

Für $n > m$ sind $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^m$ stets linear abhängig.

Beispiele:

- $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$ ist die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$
- $\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$
- $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ sind linear abhängig

Die Matrix

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ \mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2 \quad \mathbf{a}^3 \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{array}$$

Typ	P_1	P_2	P_3
S_1	0 g	10 g	4 g
S_2	5 g	10 g	14 g
S_3	15 g	0 g	2 g

Typ	S_1	S_2	S_3
K_1	0.04 g	0.18 g	0.28 g
K_2	0.48 g	0.12 g	0 g

Definition 6.5.1: m x n Matrix

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und $a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2 \quad\quad\quad \mathbf{a}^n \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{a}_1 \\ \\ \\ \mathbf{a}_m \end{array} = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n} = [\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n]$$

Matrix vom Typ $m \times n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Beispiele:

- Verbrauchs- und Rohstoffmatrizen

$$R = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.18 & 0.28 \\ 0.48 & 0.12 & 0.00 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times3} \qquad Z = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 4 \\ 5 & 10 & 14 \\ 15 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$$

2×3 Matrix, Typ 2×3

3×3 Matrix

$\vec{r}_1 = (0.04, 0.18, 0.28)$

$\vec{r}^1 = \begin{pmatrix} 0.04 \\ 0.48 \end{pmatrix}$

- Distanzmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 & 12 \\ 5 & 0 & 6 & 10 \\ 8 & 6 & 0 & 7 \\ 12 & 10 & 7 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4}$$

Die Matrix

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 & \mathbf{a}^3 \end{array} & \end{array} \\ \downarrow \\ \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} (\mathbf{a}^1)^T \\ (\mathbf{a}^2)^T \\ (\mathbf{a}^3)^T \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \mathbf{a}_1^T & \mathbf{a}_2^T & \mathbf{a}_3^T \end{array} & \end{array} \end{array}$$

Definition 6.5.3: Die Transponierte

Transponierte von A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiele:

- Verbrauchs- und Rohstoffmatrizen

$$R = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.18 & 0.28 \\ 0.48 & 0.12 & 0.00 \end{pmatrix} \qquad R^T = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.48 \\ 0.18 & 0.12 \\ 0.28 & 0.00 \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 4 \\ 5 & 10 & 14 \\ 15 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad Z^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 15 \\ 10 & 10 & 0 \\ 4 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

- Distanzmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 & 12 \\ 5 & 0 & 6 & 10 \\ 8 & 6 & 0 & 7 \\ 12 & 10 & 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad D^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 & 12 \\ 5 & 0 & 6 & 10 \\ 8 & 6 & 0 & 7 \\ 12 & 10 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definitionen 6.5.5 – 6.5.7: Quadratische Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,n}$$

Quadratische Matrix der Ordnung n

Hauptdiagonale

- symmetrisch, wenn $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j = 1, \dots, n$;
- Diagonalmatrix, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$;
- Einheitsmatrix wenn $a_{ii} = 1$ für alle i, $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$.

Beispiele:

- Verbrauchs- und Rohstoffmatrizen

$$R = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.18 & 0.28 \\ 0.48 & 0.12 & 0.00 \end{pmatrix}$$

nicht quadratisch

quadratische Matrix der Ordnung 3

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 4 \\ 5 & 10 & 14 \\ 15 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

nicht symmetrisch

- Distanzmatrix

symmetrisch

quadratische Matrix der Ordnung 4

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 & 12 \\ 5 & 0 & 6 & 10 \\ 8 & 6 & 0 & 7 \\ 12 & 10 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

- Einheitsmatrix der Ordnung 4

Diagonal-matrix

symmetrisch

$$I_4 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quadratische Matrix $\in \mathbb{R}^{4\times 4}$ der Ordnung 4

Matrizenmultiplikation

Typ	P_1	P_2	P_3
S_1	0 g	10 g	4 g
S_2	5 g	10 g	14 g
S_3	15 g	0 g	2 g

Typ	S_1	S_2	S_3
K_1	0.04 g	0.18 g	0.28 g
K_2	0.48 g	0.12 g	0 g

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

Linearkombinaton der Spalten mit Gewichten x_i

Beispiel:

$$R = \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 0.04 \\ 0.48 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.12 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.28 \\ 0.00 \end{pmatrix} \\ \mathbf{r}^1 & \mathbf{r}^2 & \mathbf{r}^3 \end{array}, \mathbf{z}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}, \mathbf{z}^2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{z}^3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $R \cdot \mathbf{z}^1 = \mathbf{r}^1 \cdot 0 + \mathbf{r}^2 \cdot 5 + \mathbf{r}^3 \cdot 15$

  $= \begin{pmatrix} 0.04 \\ 0.48 \end{pmatrix} \cdot 0 + \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.12 \end{pmatrix} \cdot 5 + \begin{pmatrix} 0.28 \\ 0.00 \end{pmatrix} \cdot 15 = \begin{pmatrix} 5.10 \\ 0.60 \end{pmatrix}$

  Rohstoffe zur Herstellung von 1 P_1 bzw. 0 S_1, 5 S_2, 15 S_3

- $R \cdot \mathbf{z}^2 = \begin{pmatrix} 0.04 \\ 0.48 \end{pmatrix} 10 + \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.12 \end{pmatrix} 10 + \begin{pmatrix} 0.28 \\ 0.00 \end{pmatrix} 0 = \begin{pmatrix} 2.20 \\ 6.00 \end{pmatrix}$

- $R \cdot \mathbf{z}^3 = \begin{pmatrix} 0.04 \\ 0.48 \end{pmatrix} 4 + \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.12 \end{pmatrix} 14 + \begin{pmatrix} 0.28 \\ 0.00 \end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix} 3.24 \\ 3.60 \end{pmatrix}$

Definition 6.5.8: Matrix-Vektor-Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}x_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

A

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \mathbf{b}^1 & \mathbf{b}^2 & \mathbf{b}^3 \end{array} \end{array}$$

$$= \left(A\mathbf{b}^1, A\mathbf{b}^2, A\mathbf{b}^3 \right)$$

Matrizenmultiplikation

Beispiel (fortgesetzt):

$$R \cdot \mathbf{z}^1 = \begin{pmatrix} 5.10 \\ 0.60 \end{pmatrix}, R \cdot \mathbf{z}^2 = \begin{pmatrix} 2.20 \\ 6.00 \end{pmatrix}, R \cdot \mathbf{z}^3 = \begin{pmatrix} 3.24 \\ 3.60 \end{pmatrix}, Z = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 10 & 4 \\ 5 & 10 & 14 \\ 15 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \mathbf{z}^1 & \mathbf{z}^2 & \mathbf{z}^3 \end{array} \end{array}$$

Zusammenfassend: $R \cdot Z = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.18 & 0.28 \\ 0.48 & 0.12 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 10 & 4 \\ 5 & 10 & 14 \\ 15 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

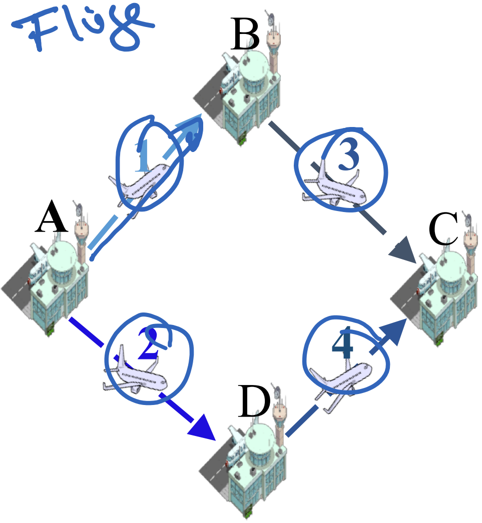
$$= \begin{pmatrix} 5.10 & 2.20 & 3.24 \\ 0.60 & 6.00 & 3.60 \end{pmatrix}$$

Definition 6.5.9: Matrizenmultiplikation

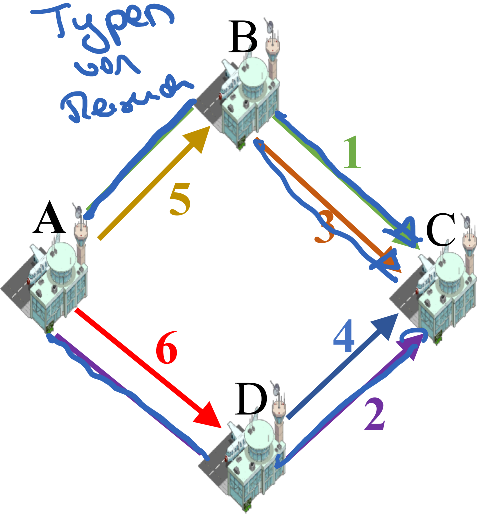
$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{m \times n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}}_{n \times p} = \overbrace{\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{kp} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk} b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk} b_{kp} \end{pmatrix}}^{m \times p}$$

Weiteres Beispiel

Flüge



Typen von Reisende



$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Typ } j \text{ Flug } i \text{ nutzt,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Typ 1

Flug

\# Sitze verkauft

$$A \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 50 \\ 75 \\ 25 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 50 \\ 75 \\ 25 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100+25 \\ 150+25 \\ 100+50 \\ 150+75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 \\ 175 \\ 150 \\ 225 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 100 \\ 30 \\ 50 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 100 \\ 30 \\ 50 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80+20 \\ 100+10 \\ 80+30 \\ 100+50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \\ 110 \\ 150 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 100 & 80 \\ 150 & 100 \\ 50 & 30 \\ 75 & 50 \\ 25 & 20 \\ 25 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 & 80 \\ 150 & 100 \\ 50 & 30 \\ 75 & 50 \\ 25 & 20 \\ 25 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 & 100 \\ 175 & 110 \\ 150 & 110 \\ 225 & 150 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc} & & 0 & 1 \\ & & 2 & \boxed{3} \\ \hline 4 & 5 & 10 & 19 \\ 6 & 7 & 14 & 27 \end{array}$$

Vorsicht beim Rechnen mit Matrizen

- Das Produkt zweier Matrizen kann eine Nullmatrix ergeben, selbst wenn beide Matrizen keine Nullmatrizen sind.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1.5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1.5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 3 + 1.5\cdot 4 & 4\cdot 3 + (-3)\cdot 4 \\ -2(1.5) + 1.5\cdot 2 & 4\cdot 1.5 + (-3)\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ, d.h. in der Regel ist $A \cdot B \neq B \cdot A$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+6 & 0+7 \\ 8+18 & 10+21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 26 & 31 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+10 & 4+15 \\ 0+14 & 6+21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 19 \\ 14 & 27 \end{pmatrix}$$

Definition 6.5.4: Nullzeilen,- spalten und die Nullmatrix

Man spricht von einer

- Nullzeile, wenn alle Elemente der Zeile Null sind;
- Nullspalte, wenn alle Elemente der Spalte Null sind;
- Nullmatrix, wenn alle Spalten Nullspalten sind.

Rechenregeln

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{pmatrix}$$

Definition 6.5.10: Produkt einer Konstanten mit einer Matrix

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \alpha A = \alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Satz 6.5.2: Regeln der Matrizenmultiplikation

Sei A eine $m \times n$-Matrix, B eine $n \times p$-Matrix, C eine $p \times q$-Matrix, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $\boxed{(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T;}$
- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C;$
- $\boxed{A \cdot \alpha \cdot B} = \boxed{\alpha \cdot A \cdot B;}$ $\neq B \cdot \alpha \cdot A$
- Ist I die Einheitsmatrix passender Ordnung, so gilt $A \cdot I = A$, bzw. $I \cdot A = A$.

Zeilenvektoren und Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} f_1 & & & & & \\ 0 & f_2 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Erstes Element ungleich 0

Definition 6.5.12: Zeilenstufenform

Die Matrix liegt in Zeilenstufenform vor, wenn

- Nullzeilen unterhalb aller Zeilen stehen, die keine Nullzeilen sind und
- in jedem Paar von zwei Zeilen, die keine Nullzeilen sind, das führende Element der oberen Zeile links von dem führenden Element der unteren Zeile steht.

Satz 6.5.3 Lineare Unabhängigkeit von Zeilenvektoren

Alle Zeilenvektoren einer Matrix in Zeilenstufenform, die keine Nullzeilen sind, sind linear unabhängig.

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

keine Zeilenstufenform — Zeilenstufenform — keine Zeilenstufenform

$\mathbf{a}_1 = (1,2,3,4,0,5)$, $\mathbf{a}_2 = (0,9,8,0,0,0)$, $\mathbf{a}_3 = (0,0,7,8,0,9)$, und $\mathbf{a}_4 = (0,0,0,6,0,7)$ sind linear unabhängig

Ein (unvollständiger) Rückblick

- Eine gewichtete Summe von Vektoren nennt man Linearkombination der Vektoren.
- Eine Menge von Vektoren heisst linear abhängig, wenn sich mindestens einer der Vektoren als Linearkombination der anderen Vektoren darstellen lässt.
- Die Menge aller Linearkombinationen, die sich aus einer Menge von Vektoren bilden lassen, heisst lineare Hülle (dieser Vektoren). Sie stellt einen linearen Raum dar.
- Ein linearer Raum kann als lineare Hülle verschiedener Erzeugendensysteme dargestellt werden.
- Die lineare Hülle von n unabhängigen Vektoren hat die Dimension n.
- Die Multiplikation einer Matrix A mit einem Vektor $\mathbf{v}$ entspricht einer Linearkombination der Spalten(-vektoren) von A mit Gewichten v_i.
- Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ.
- Bei einer Matrix in Zeilenstufenform ist die Menge aller Zeilenvektoren, welche ungleich Nullvektoren sind, linear unabhängig.