Es werden die Aufgaben 2,3,4,5a),8b) und 10a) in den Tutorien besprochen.

Aufgabe 1 (Lineare Abbildung, Eigenwerte, Eigenvektoren)

Gegeben sei die folgende 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 4 & 2 & 16 \end{pmatrix}.$$

(a) Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.
Bestimmen Sie $f\left(\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ und $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

(b) Sind $\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von A? Wenn ja, was sind die zugehörigen Eigenwerte?

(c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(d) Bestimmen Sie die zu den Eigenwerten gehörigen Eigenvektoren von A.

Aufgabe 2 (Graphische Interpretation von Eigenvektoren I)

Betrachten Sie erneut die Aufgabe 6 aus Serie 7. Die lineare Abbildung $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

entspricht einer Spiegelung des Vektors $\mathbf{x}$ an der x_1-Achse.

(a) Bestimmen Sie alle (reellen) Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren von A.
(b) Hätte man das Ergebnis aus (a) auch graphisch erschliessen können, ohne zu rechnen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (Graphische Interpretation von Eigenvektoren II)

Betrachten Sie erneut die Aufgabe 7 aus Serie 7. Die lineare Abbildung $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

entspricht einer Drehung des Vektors $\mathbf{x}$ um 90° gegen den Uhrzeigersinn.

(a) Bestimmen Sie alle (reellen) Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren von A.
(b) Hätte man das Ergebnis aus (a) auch graphisch erschliessen können, ohne zu rechnen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (Eigenwerte und Eigenvektoren I)

Betrachten Sie die 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Verifizieren Sie, dass $(-1,-2,1)^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 7 von A ist.

(b) Bestimmen Sie alle weiteren Eigenwerte von A und die dazugehörigen Eigenvektoren von A.

Aufgabe 5 (Eigenwerte und Eigenvektoren II)

(a) Gegeben sei die 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 3. ☐ wahr ☐ falsch

(2) A ist orthogonal. ☐ wahr ☐ falsch

(3) A hat 4 Eigenwerte. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Alle Spaltenvektoren von A sind Eigenvektoren von A. ☐ wahr ☐ falsch

(b) Sei A eine $n \times n$-Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ und dazugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n$. Beurteilen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Sei $\det(A) = 0$. Dann ist $\lambda_i = 0$ ein Eigenwert von A. ☐ wahr ☐ falsch

(2) $A(\mathbf{v}^i + 3\mathbf{v}^j) = \lambda_i \mathbf{v}^i + 3\lambda_j \mathbf{v}^j,\ i, j \in \{1, \dots, n\}$. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Sei $A\mathbf{v}^i = \mathbf{0}$ für ein $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
Dann gilt: $\lambda_i = 0$. ☐ wahr ☐ falsch

(4) $\operatorname{rang}(A) < n \iff \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = 0$. ☐ wahr ☐ falsch

Aufgabe 6 (($*$) Eigenwerte und Eigenvektoren III)

Sei A eine $n \times n$-Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ und dazugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n$. Zeigen Sie, dass wenn die Eigenvektoren $\mathbf{v}^i$ und $\mathbf{v}^j$ linear abhängig sind, dann $\lambda_i = \lambda_j$ gilt, also

$$\mathbf{v}^i, \mathbf{v}^j \text{ sind linear abhängig } \implies \lambda_i = \lambda_j.$$

Aufgabe 7 (Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierung der Matrix)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Wie viele reelle, linear unabhängige Eigenvektoren hat die Matrix A?

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A und die zugehörigen Eigenvektoren.

(c) Sei V eine Matrix, deren Spaltenvektoren den normierten Eigenvektoren entsprechen. Bestimmen Sie V.

(d) Verifizieren Sie, dass V eine orthogonale Matrix ist.

(e) Berechnen Sie $V^{-1}AV$.

(f) (#) Bestimmen Sie die Determinante von A mit Hilfe der Eigenwerte von A.

Aufgabe 8 (Eine Matrix mit Unbekannten)

Betrachen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & b & 1 \\ 2 & 1 & c \end{pmatrix}$$

mit reellen Parametern $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sei

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(a)

(1) Ist $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A,
dann muss $a = 5$ gelten. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Ist $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A,
dann muss $c = -2$ gelten. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Für alle $b \in \mathbb{R}$ ist $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert
$\lambda = 1$ von A mit $a = 5$ und $c = 2$. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Ist $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A,
dann ist auch $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A. ☐ wahr ☐ falsch

(b)

(1) Ist $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A,
dann ist 1 ein Eigenwert von A^{100}. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Ist $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A,
dann ist $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor von A^{39}. ☐ wahr ☐ falsch

(3) A hat 3, nicht notwendigerweise verschiedene,
reelle Eigenwerte für alle $b \in \mathbb{R}$. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Es existieren genau 3 linear unabhängige
Eigenvektoren von A für alle $b \in \mathbb{R}$. ☐ wahr ☐ falsch

Aufgabe 9 (Potenzbildung von Matrizen)

Gegeben sei die 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und die dazugehörigen Eigenvektoren.
(b) (#) Berechnen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus (a) die Matrixpotenz A^{10}.

Aufgabe 10 (Höhenlinien in 2 Variablen)

Betrachten Sie die folgenden reellen Funktionen in 2 Variablen.

(a) $f_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1 x_2$
 (i) Bestimmen Sie den natürlichen Definitionsbereich $D_{f_1} \subseteq \mathbb{R}^2$ von f_1 und die Höhenlinie $N_y = \{\mathbf{x} \in D_{f_1} \mid f_1(\mathbf{x}) = y\}$ für $y = -1, 0, 1$.
 (ii) Zeichnen Sie die Höhenlinien N_y für $y = -1, 0, 1$ in ein Koordinatensystem ein.
 (iii) Ist diese Funktion eine affin-lineare, quadratische, Cobb Douglas oder Leontief Funktion?

(b) $f_2(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{x_2 - 1}$

(i) Bestimmen Sie den natürlichen Definitionsbereich $D_{f_2} \subseteq \mathbb{R}^2$ von f_2 und die Höhenlinie $N_y = \{\mathbf{x} \in D_{f_2} \mid f_2(\mathbf{x}) = y\}$ für $y = 0, 1, 2, 3$.
(ii) Zeichnen Sie die Höhenlinien N_y für $y = 0, 1, 2, 3$ in ein Koordinatensystem ein.
(iii) Ist diese Funktion eine affin-lineare, quadratische, Cobb Douglas oder Leontief Funktion?

(c) $f_3(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2}$
(i) Bestimmen Sie den natürlichen Definitionsbereich $D_{f_3} \subseteq \mathbb{R}^2$ von f_3 und die Höhenlinie $N_y = \{\mathbf{x} \in D_{f_3} \mid f_3(\mathbf{x}) = y\}$ für $y = 0, 1, 2$.
(ii) Zeichnen Sie die Höhenlinien N_y für $y = 0, 1, 2$ in ein Koordinatensystem ein.
(iii) Ist diese Funktion eine affin-lineare, quadratische, Cobb Douglas oder Leontief Funktion?

(d) $f_4(\mathbf{x}) = \min\{\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}\}$
(i) Bestimmen Sie den natürlichen Definitionsbereich $D_{f_4} \subseteq \mathbb{R}^2$ von f_4 und die Höhenlinie $N_y = \{\mathbf{x} \in D_{f_4} \mid f_4(\mathbf{x}) = y\}$ für $y = -1, 0, 1$.
(ii) Zeichnen Sie die Höhenlinien N_y für $y = -1, 0, 1$ in ein Koordinatensystem ein.
(iii) Ist diese Funktion eine affin-lineare, quadratische, Cobb Douglas oder Leontief Funktion?

(e) $f_5(\mathbf{x}) = \max\{x_1, x_2\}$
(i) Bestimmen Sie den natürlichen Definitionsbereich $D_{f_5} \subseteq \mathbb{R}^2$ von f_5 und die Höhenlinie $N_y = \{\mathbf{x} \in D_{f_5} \mid f_5(\mathbf{x}) = y\}$ für $y = 1, 2$.
(ii) Zeichnen Sie die Höhenlinien N_y für $y = 1, 2$ in ein Koordinatensystem ein.
(iii) Ist diese Funktion eine affin-lineare, quadratische, Cobb Douglas oder Leontief Funktion?

(f) $f_6(\mathbf{x}) = 6 - 3x_1 - 2x_2$
(i) Bestimmen Sie den natürlichen Definitionsbereich $D_{f_6} \subseteq \mathbb{R}^2$ von f_6 und die Höhenlinie $N_y = \{\mathbf{x} \in D_{f_6} \mid f_6(\mathbf{x}) = y\}$ für $y = 4, 6, 8$.
(ii) Zeichnen Sie die Höhenlinien N_y für $y = 4, 6, 8$ in ein Koordinatensystem ein.
(iii) Ist diese Funktion eine affin-lineare, quadratische, Cobb Douglas oder Leontief Funktion?