Aufgabe 1 (Vektoren des $\mathbb{R}^2$)

Gegeben seien $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Wie lang sind die Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$?

(b) Wie weit ist der Punkt $\mathbf{x}$ vom Punkt $\mathbf{y}$ entfernt?

(c) Berechnen Sie den Vektor $\alpha_i\mathbf{x}$ für $i = 1,2,3$ mit $\alpha_1 = -2, \alpha_2 = 0.5, \alpha_3 = 3$. Zeichnen Sie die Menge aller Vielfachen $\left\{\alpha\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

(d) Wie lautet das Skalarprodukt von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$?

(e) Sind $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ orthogonal?

(f) Bestimmen Sie einen Vektor $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, der orthogonal zu $\mathbf{x}$ ist. Bestimmen Sie zudem einen Vektor $\tilde{\mathbf{z}}$, der orthogonal zu $\mathbf{x}$ steht und zudem die Länge 1 hat.
Zur Kontrolle: Ein möglicher Vektor ist $\mathbf{z} = (2,-3)^T$.

(g) Sei $\mathbf{z} = (2,-3)^T$. Berechnen Sie die Linearkombination von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{z}$, $\alpha_1\mathbf{x} + \alpha_2\mathbf{z}$ mit
- $\alpha_1 = 0.5$ und $\alpha_2 = 1$.
- $\alpha_1 = -0.5$ und $\alpha_2 = -1$.
- $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = 1$.
- $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = -1$.

(h) Sei weiterhin $\mathbf{z} = (2,-3)^T$. Kann man $\mathbf{y}$ als Linearkombination von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{z}$ darstellen?

(i) Sei weiterhin $\mathbf{z} = (2,-3)^T$. Beschreiben Sie die Menge $\left\{\alpha_1\mathbf{x} + \alpha_2\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 | \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\}$.

Lösung:

(a) Der Vektor $\mathbf{x}$ hat die Länge $||\mathbf{x}|| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$ und der Vektor $\mathbf{y}$ hat die Länge $||\mathbf{y}|| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$.

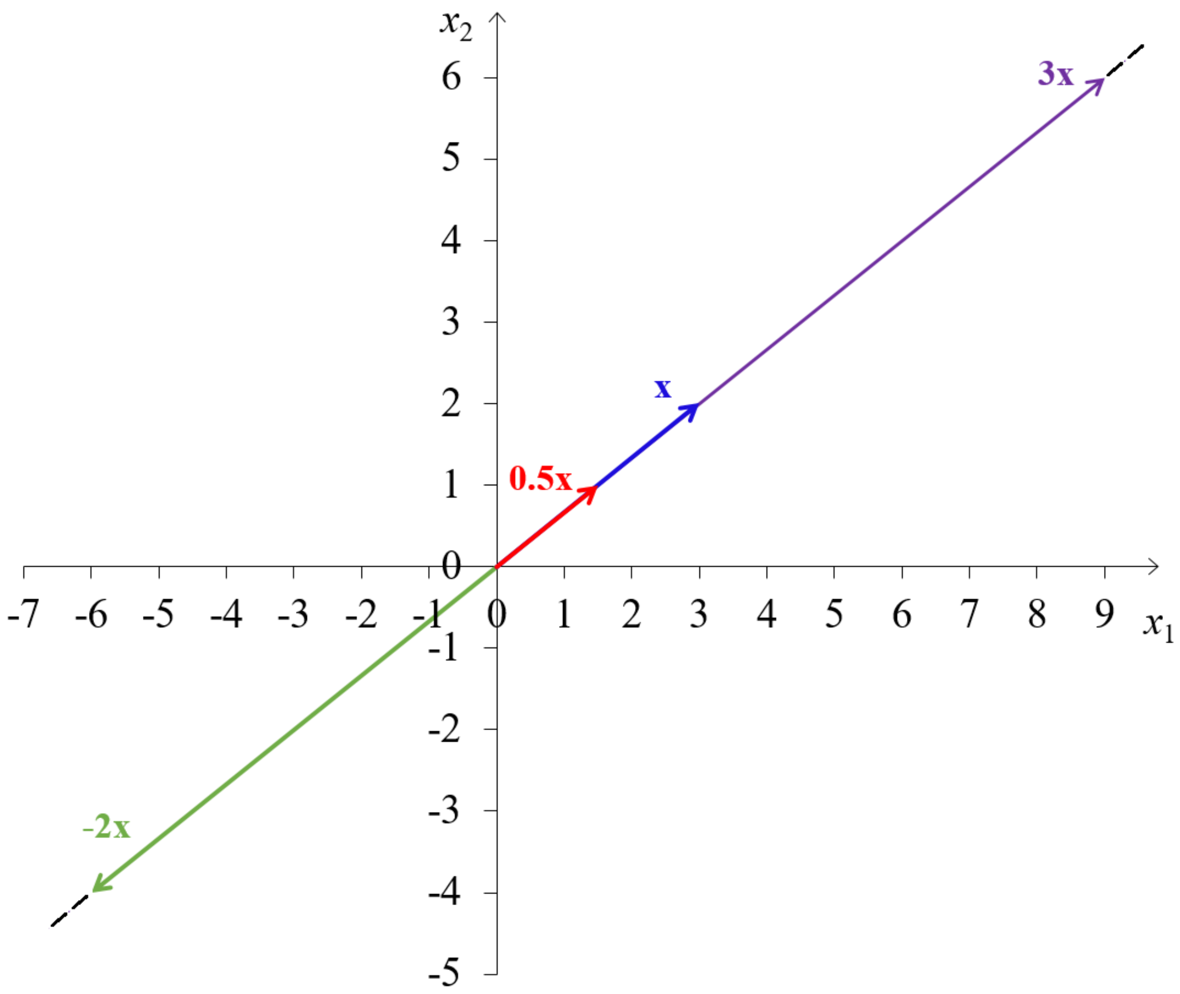
(b) Die Entfernung ist gegeben durch $||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| = \sqrt{(3-2)^2+(2-2)^2} = \sqrt{1} = 1$.

(c)

$$\begin{aligned}
\alpha_1\mathbf{x} &= -2\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2\cdot 3 \\ -2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}; \\
\alpha_2\mathbf{x} &= \tfrac{1}{2}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 3 \\ \frac{1}{2}\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}; \\
\alpha_3\mathbf{x} &= 3\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3\cdot 3 \\ 3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Siehe Abbildung 1.1.

Abbildung 1.1: Die Menge $\left\{\alpha\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | \alpha \in \mathbb{R}\right\}$



(d)

Definition 6.1.4 - Skalarprodukt
Für zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ heisst die reelle Zahl

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

(euklidisches) Skalarprodukt der Vektoren **x** und **y**.

Das Skalarprodukt von **x** und **y** ist,

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10.$$

(e)

Definition 6.1.5 - Orthogonale Vektoren
Zwei Vektoren $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ heissen orthogonal, wenn $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$.

Hier gilt $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 3\cdot 2 + 2\cdot 2 = 10$. Die beiden Vektoren sind somit nicht orthogonal.

(f) $\mathbf{x}$ und $\mathbf{z}$ sind orthogonal, wenn $\mathbf{x}^T\mathbf{z} = 0$, das heisst, wenn das Skalarprodukt null ist. Gesucht ist also ein Vektor $\mathbf{z} = (z_1, z_2)^T \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$, sodass $\mathbf{x}^T\mathbf{z} = 3z_1 + 2z_2 = 0$ ist.
Egal wie man z_1 wählt, man findet stets ein z_2, für welches die Gleichung erfüllt ist.
Lösen wir die Gleichung $3z_1 + 2z_2 = 0$ nach z_2 auf, ergibt sich: $z_2 = -\frac{3}{2}z_1$. Jeder Vektor der Form $(z_1, -\frac{3}{2}z_1)^T$ mit $z_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist nicht der Nullvektor und orthogonal zu $\mathbf{x}$.
Die Gleichung $3z_1 + 2z_2 = 0$ hätte man auch nach z_1 statt z_2 auflösen können. Man erhält dann $z_1 = -\frac{2}{3}z_2$. Als Antwort erhält man so: Jeder Vektor der Form $(-\frac{2}{3}z_2, z_2)^T$ mit $z_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist nicht der Nullvektor und orthogonal zu $\mathbf{x}$.
Beide Möglichkeiten führen zu den gleichen Ergebnissen. Setzt man beispielsweise $z_1 = 2$, so wissen wir aus unseren Vorüberlegungen, dass $\mathbf{z} = (2, -\frac{3}{2}\cdot 2)^T = (2,-3)^T$ orthogonal auf $\mathbf{x}$ steht. Dieselbe Lösung erhalten wir, wenn wir $z_2 = -3$ setzen, denn es gilt dann, dass $\mathbf{z} = (-\frac{2}{3}\cdot(-3), -3)^T = (2,-3)^T$.
Für jeden Vektor, der orthogonal zu $\mathbf{x}$ ist, muss es ein z_1 oder z_2 geben, sodass der Vektor genau die Form $(z_1, -\frac{3}{2}z_1)^T$ oder $(-\frac{2}{3}z_2, z_2)^T$ hat.
Teilt man einen Vektor durch seine Länge, so ist dieser normiert. Er hat dann eine Länge von 1. Die Länge von $\mathbf{z} = (2,(-3))^T$ ist $||\mathbf{z}|| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$. Der normierte Vektor $\tilde{\mathbf{z}}$ ist demnach

$$\tilde{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{z}}{||\mathbf{z}||} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(g)

Definition 6.2.1 - Linearkombination
Gegeben sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^m$. Dann heisst

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}^i = \alpha_1\mathbf{v}^1 + \alpha_2\mathbf{v}^2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}^n \quad \in \mathbb{R}^m$$

Linearkombination der Vektoren $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n$.

- $\frac{1}{2}\mathbf{x} + \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 3 \\ \frac{1}{2}\cdot 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$
- $-\frac{1}{2}\mathbf{x} - \mathbf{z} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cdot 3 \\ -\frac{1}{2}\cdot 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{x} + \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{x} - \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(h) Gefragt ist also ob $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ existieren, sodass

$$\alpha_1\mathbf{x} + \alpha_2\mathbf{z} = \mathbf{y} \iff \alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir suchen also α_1 und α_2, die folgende Gleichungen lösen

$$\begin{array}{rrl} \text{(I)} & 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = & 2 \\ \text{(II)} & 2\alpha_1 - 3\alpha_2 = & 2. \end{array}$$

Wir können die Substitutionsmethode aus Serie 1 anwenden:

(1) Wir lösen Gleichung (I) nach α_2 auf und erhalten $\alpha_2 = -\frac{3}{2}\alpha_1 + 1$.

(2) Setzt man diese Information in die Gleichung (II) ein, so suchen wir ein α_1 mit der folgenden Eigenschaft:

$$2\alpha_1 - 3 \cdot (-\frac{3}{2}\alpha_1 + 1) = 2 \iff \frac{13}{2}\alpha_1 = 5$$

Somit erhalten wir $\alpha_1 = \frac{10}{13}$.

(3) Aus $\alpha_1 = \frac{10}{13}$ folgt, mit Hilfe der aufgelösten Gleichung aus (1), dass $\alpha_2 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{10}{13} + 1 = -\frac{2}{13}$.

Man kann $\mathbf{y}$ also als Linearkombination von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{z}$ darstellen: $\mathbf{y} = \frac{10}{13}\mathbf{x} - \frac{2}{13}\mathbf{z}$.

(i) Die Menge beschreibt alle Vektoren $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$, welche sich als Linearkombination von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{z}$ darstellen lassen. Das heisst, alle Vektoren $\mathbf{v}$, für welche folgende Gleichungen gelöst werden können:

$$\begin{array}{rrl} \text{(I)} & 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = & v_1 \\ \text{(II)} & 2\alpha_1 - 3\alpha_2 = & v_2 \end{array}$$

Auch in diesem allgemeinen Fall können wir die Substitutionsmethode anwenden.

(1) Wir lösen Gleichung (I) nach α_2 auf und erhalten $\alpha_2 = -\frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{v_1}{2}$.

(2) Setzt man diese Information in die Gleichung (II) ein, so suchen wir ein α_1 mit der folgenden Eigenschaft:

$$2\alpha_1 - 3 \cdot (-\frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{v_1}{2}) = v_2 \iff \frac{13}{2}\alpha_1 = v_2 + \frac{3}{2} \cdot v_1.$$

Somit erhalten wir $\alpha_1 = \frac{2}{13} \cdot (v_2 + \frac{3}{2}v_1)$.

(3) Aus $\alpha_1 = \frac{2}{13} \cdot (v_2 + \frac{3}{2}v_1)$ folgt, mit Hilfe der aufgelösten Gleichung aus (1), dass

$$\alpha_2 = -\frac{3}{2} \cdot (\frac{2}{13} \cdot (v_2 + \frac{3}{2}v_1)) + \frac{v_1}{2} \iff \alpha_2 = \frac{2}{13}v_1 - \frac{3}{13}v_2.$$

v_1 und v_2 können beliebig gewählt und in die Gleichungen aus (2) für α_1 und (3) für α_2 eingesetzt werden. Man findet also immer α_1, α_2, sodass $\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{x} + \alpha_2 \cdot \mathbf{z}$. Daher kann man sagen, dass diese Menge dem gesamten $\mathbb{R}^2$ entspricht, da alle Punkte durch Linearkombinationen von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{z}$ dargestellt werden können. Hier einige Beispiele für Vektoren $\mathbf{v}$ und α_1, α_2:

$$\begin{array}{rc} \mathbf{v} = (1,1)^T \implies & \alpha_1 = \frac{5}{13},\ \alpha_2 = -\frac{1}{13} \\ \mathbf{v} = (-26,13)^T \implies & \alpha_1 = -4,\ \alpha_2 = -7 \\ \mathbf{v} = (0,0)^T \implies & \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0. \end{array}$$

Aufgabe 2 (Orthogonalität)

(a) Welche der folgenden Vektoren sind orthogonal?

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -19 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Parameter s und t so, dass die folgenden Vektoren jeweils orthogonal sind.

(i)

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ s \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} t \\ -2 \\ -2t \end{pmatrix}$$

Lösung:

(a) Zwei Vektoren des $\mathbb{R}^4$ sind orthogonal, wenn

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 + x_4 \cdot y_4 = 0.$$

Möchte man überprüfen, ob der Vektor **a** zum Vektor **b** orthogonal ist, so muss man also deren Skalarprodukt berechnen. Kommt 0 heraus, sind sie orthogonal, andernfalls nicht.
Es gilt für das Skalarprodukt von **a** und **b**:

$$\mathbf{a}^T\mathbf{b} = (a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = (2, 3, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-5) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-5) = -24.$$

Somit sind **a** und **b** nicht orthogonal.
Das Skalarprodukt von **a** und **c** entspricht:

$$\mathbf{a}^T\mathbf{c} = (a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = (2, 3, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -19 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-7) + 1 \cdot (-19) + 1 \cdot 4 = -38.$$

Somit sind **a** und **c** nicht orthogonal.
Und so müssen wir jede mögliche Kombination der vorgegebenen Vektoren überprüfen.
Man erhält folgende Ergebnisse:

- **a** ist nur zum Nullvektor **0** orthogonal,
- **b** ist nur zum Nullvektor **0** orthogonal,
- **c** ist nur zum Nullvektor **0** orthogonal,
- **d** ist orthogonal zum Nullvektor **0** und zu **e**,
- **e** ist orthogonal zum Nullvektor **0** und zu **d**,
- der Nullvektor **0** ist orthogonal zu jedem Vektor.

(b) (i) Damit **a** und **b** orthogonal sind, muss gelten, dass

$$\mathbf{a}^T\mathbf{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = (-1, 3, 2) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ s \end{pmatrix} = -1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) + 2 \cdot s = 0.$$

Dafür muss man folgende Gleichung nach s auflösen:

$$2 - 9 + 2s = 0.$$

Somit muss $s = \frac{7}{2}$ sein, sodass **a** orthogonal zu $\mathbf{b} = (-2, -3, s)^T$ ist.

(ii) Damit **c** und **d** orthogonal sind, muss also gelten, dass

$$\mathbf{c}^T\mathbf{d} = (c_1, c_2, c_3) \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = (-2, 5, 2) \cdot \begin{pmatrix} t \\ -2 \\ -2t \end{pmatrix} = -2 \cdot t + 5 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2t) = 0.$$

Dafür muss man folgende Gleichung nach t auflösen:

$$-2t - 10 - 4t = 0.$$

Somit muss $t = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$ sein, sodass **a** orthogonal zu $\mathbf{b} = (t, -2, -2t)^T$ ist.

Aufgabe 3 (Vektoren, Skalarprodukt, Norm)

(a) Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{x} = (1,\ 2,\ -5)^T$ und $\mathbf{y} = (8,\ 0,\ 7)^T$. Berechnen Sie:

$\|\mathbf{y}\|^2$, $\|\mathbf{x}\|$, $3\|\mathbf{x} + 2\mathbf{y}\|^2$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

(b) Sind **x** und **y** aus Teilaufgabe (a) orthogonal?

(c) Bestimmen Sie einen Vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ mit den folgenden zwei Eigenschaften:

- **u** ist orthogonal zu den Vektoren **a** und **b**, wobei:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix};$$

- $\|\mathbf{u}\| = 1$.

(d) (#) Bestimmen Sie den Winkel φ, den **x** und **y** einschliessen.

(e) (#) Gegeben sei nun zusätzlich $\mathbf{z} = (5,\ 0,\ 1)^T$. Welchen Winkel schliessen **x** und **z** ein?

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}\|^2 &= \mathbf{y}^T\mathbf{y} = 8^2+7^2 = 113 \\ \|\mathbf{x}\| &= \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \sqrt{1^2+2^2+(-5)^2} = \sqrt{1+4+25} = \sqrt{30} \\ 3\|\mathbf{x}+2\mathbf{y}\|^2 &= 3(\mathbf{x}+2\mathbf{y})^T(\mathbf{x}+2\mathbf{y}) = 3\left(17^2+2^2+9^2\right) = 1122 \\ \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| &= \sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^T(\mathbf{x}-\mathbf{y})} = \sqrt{49+4+144} = \sqrt{197} \end{aligned}$$

(b) Zwei Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ sind orthogonal, falls gilt, dass das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$ ist. Für zwei Vektoren des $\mathbb{R}^3$, muss also folgendes gelten:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = (x_1,x_2,x_3)\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2 + x_3\cdot y_3 = 0.$$

Es gilt für die Vektoren $\mathbf{x} = (1,2,-5)^T$ und $\mathbf{y} = (8,0,7)^T$, dass

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = (1,2,-5)\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = 1\cdot 8 + 2\cdot 0 + (-5)\cdot 7 = 8-35 = -27.$$

$\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ sind somit nicht orthogonal ($-27 \neq 0$).

(c) Zwei Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{a}$ sind orthogonal, falls gilt, dass das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\mathbf{u}^T\mathbf{a} = 0$ ist. Für zwei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ muss also folgendes gelten:

$$\mathbf{u}^T\mathbf{a} = (u_1,u_2,u_3)\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = u_1\cdot a_1 + u_2\cdot a_2 + u_3\cdot a_3 = 0.$$

Gesucht ist also ein Vektor $\mathbf{u} = (u_1,u_2,u_3)^T \in \mathbb{R}^3$, so dass einerseits

$$\mathbf{u}^T\mathbf{a} = (u_1,u_2,u_3)\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (u_1,u_2,u_3)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = u_1\cdot 1 + u_2\cdot 0 + u_3\cdot 3 = u_1 + 3u_3 = 0$$

und andererseits

$$\mathbf{u}^T\mathbf{b} = (u_1,u_2,u_3)\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = (u_1,u_2,u_3)\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = u_1\cdot 6 + u_2\cdot 3 + u_3\cdot 3 = 6u_1 + 3u_2 + 3u_3 = 0$$

gilt. Zusammenfassend ist jeder Vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, der folgende Gleichungen löst, orthogonal zu $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$:

$$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & u_1 + 3u_3 = & 0 \\ \text{(II)} & 6u_1 + 3u_2 + 3u_3 = & 0. \end{array}$$

Aus der ersten Gleichung folgt unmittelbar, dass $u_1 = -3u_3$.[1] Setzen wir diese Information in die zweite Gleichung ein, so folgt, dass

$$6\cdot(-3u_3) + 3u_2 + 3u_3 = -18u_3 + 3u_2 + 3u_3 = -15u_3 + 3u_2 = 0$$

[1] Ignoriert man die Bedingung, dass $\mathbf{u}$ auch orthogonal zu $\mathbf{b}$ sein soll, sagt uns die Gleichung (I), dass jeder Vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ der Form $(-3u_3,u_2,u_3)^T$ mit $u_2,u_3 \in \mathbb{R}$ orthogonal zu $\mathbf{a}$ ist.

sein muss. Also genau dann, wenn $u_3 = \frac{1}{5}u_2$. Wenn wir dieses u_3 nun wieder in die erste Gleichung einsetzen, so folgt unmittelbar, dass $u_1 = -\frac{3}{5}u_2$ ist. Jeder Vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ der Form

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}u_2 \\ u_2 \\ \frac{1}{5}u_2 \end{pmatrix} = u_2 \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ 1 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \; u_2 \in \mathbb{R},$$

ist somit orthogonal zu **a** und **b**. Hier einige Beispiele von konkreten Vektoren, die orthogonal zu **a** und **b** sind mit entsprechenden Wert für u_2:

$$u_2 = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = 5 \iff \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = -5 \iff \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{5\pi}{3} \implies \begin{pmatrix} -\pi \\ \frac{5\pi}{3} \\ \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}.$$

Die zweite Eigenschaft fordert nun, dass **u** eine Länge von 1 hat. Die Länge eines dreidimensionalen Vektors $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ ist

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{\mathbf{u}^T\mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Eine Länge von 1 bedeutet also, dass

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 1.$$

Unser gefundener, orthogonaler Vektor **u** hat somit eine Länge 1, falls

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{(-\frac{3}{5}u_2)^2 + u_2^2 + (\frac{1}{5}u_2)^2} = \sqrt{\frac{9}{25}u_2^2 + u_2^2 + \frac{1}{25}u_2^2} = \sqrt{(\frac{9}{25} + 1 + \frac{1}{25})u_2^2} = \sqrt{\frac{35}{25}}|u_2| = \sqrt{\frac{7}{5}}|u_2| = 1.$$

Dies ist der Fall, wenn $|u_2| = \sqrt{\frac{5}{7}}$. Somit kommen nur zwei Vektoren in Frage, die einerseits orthogonal zu **a** und **b** stehen, als auch eine Länge von 1 haben, nämlich

$$\sqrt{\frac{5}{7}} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ 1 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \text{ und } -\sqrt{\frac{5}{7}} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ 1 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

(d) (#)

Aus Satz 6.1.1 aus der Vorlesung wissen wir, dass wenn **x** und **y** den Winkel φ einschliessen, dann gilt

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \cos(\varphi).$$

Aus Aufgabe 3 (b) wissen wir, dass $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = -27$. Zudem ist $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{30}$ und $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{8^2 + 7^2} = \sqrt{113}$.

Daraus folgt, dass

$$\cos(\varphi) = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} = \frac{-27}{\sqrt{30}\sqrt{113}}.$$

Somit schliessen **x** und **y** einen Winkel $\varphi = \cos^{-1}(\frac{-27}{\sqrt{30}\sqrt{113}}) \approx 117.6^\circ$ ein.

(e) (#)
Das Skalarprodukt von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{z}$ ist $\mathbf{x}^T\mathbf{z} = 1\cdot 5 + 2\cdot 0 + (-5)\cdot 1 = 5-5 = 0$. Da $\mathbf{x},\mathbf{z} \neq 0$, stehen die beiden Vektoren somit senkrecht zueinander d.h. die beiden Vektoren schliessen einen Winkel von 90° ein.

Aufgabe 4 (Rechnen mit Vektoren)

Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(1) $\mathbf{x}$ ist ein Einheitsvektor. ☐ wahr ☐ falsch

(2) $(\mathbf{x}^T)^T = (x_1, x_2, x_3)^T$. ☐ wahr ☐ falsch

(3) $\mathbf{y} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Die Richtung von $\mathbf{x}$ ist $\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. ☐ wahr ☐ falsch

(b) Berechnen Sie folgende Vektoren
- 2$\mathbf{x}$,
- -2$\mathbf{y}$,
- 2$\mathbf{x}$+$\mathbf{y}$,
- $\mathbf{x}$ - 2$\mathbf{y}$.

(c) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(1) $\mathbf{x}$ ist orthogonal zu $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) $\mathbf{x}$ ist orthogonal zu $\mathbf{0}$. ☐ wahr ☐ falsch

(3) $\mathbf{x}$ ist orthogonal zu $\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$. ☐ wahr ☐ falsch

(4) $\mathbf{x}$ ist orthogonal zu $\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$. ☐ wahr ☐ falsch

(d) Mit welcher Zahl $\alpha > 0$ muss man den Vektor $\mathbf{x}$ multiplizieren, damit $||\alpha\mathbf{x}|| = 1$ gilt?

(e) Mit welcher Zahl $\alpha > 0$ muss man den Vektor $\mathbf{y}$ multiplizieren, damit $||\alpha\mathbf{y}|| = 1$ gilt?

(f) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(1) $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ zeigen in dieselbe Richtung.	☐ wahr	☐ falsch
(2) $\mathbf{x}$ und $2\mathbf{x}$ zeigen in dieselbe Richtung.	☐ wahr	☐ falsch
(3) $\mathbf{x}$ und $-3\mathbf{x}$ zeigen in dieselbe Richtung.	☐ wahr	☐ falsch
(4) $\mathbf{y}$ und $-\pi\mathbf{y}$ zeigen in die entgegengesetzte Richtung.	☐ wahr	☐ falsch

(g) Beantworten Sie die Fragen (a)-(f) im Falle $\mathbf{x} = (-7,0,-8)^T$ und $\mathbf{y} = (0,1,0)^T$.

Lösung:

(a)
- Zu (1):

  Definition 6.1.1 - Einheitsvektor
  Ein Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ heisst Einheitsvektor, wenn $||\mathbf{x}|| = 1$.

  Wir haben $||\mathbf{x}|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{30} \neq 1$. Der Vektor $\mathbf{x}$ ist somit kein Einheitsvektor. Die Aussage (1) ist falsch.

- Zu (2): Transponiert man den Spaltenvektor $\mathbf{x}$, erhält man einen Zeilenvektor. Transponiert man diesen Zeilenvektor, erhält man wieder einen Spaltenvektor,

$$(\mathbf{x}^T)^T = (x_1, x_2, x_3)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}.$$

  Die Aussage (2) ist somit wahr.

- Zu (3): Auch die Aussage (3) ist wahr, da

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot(-6) \\ \frac{1}{2}\cdot 0 \\ \frac{1}{2}\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{y}.$$

- Zu (4):

  Definition 6.1.3 - Die Richtung eines Vektors
  Ist $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, dann nennt man $\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}$ die Richtung von $\mathbf{x}$. Man sagt zwei Vektoren $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ zeigen in dieselbe Richtung, wenn

$$\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||} = \frac{\mathbf{y}}{||\mathbf{y}||}.$$

Sie zeigen in die entgegengesetzte Richtung, wenn

$$\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||} = -\frac{\mathbf{y}}{||\mathbf{y}||}.$$

Da $||\mathbf{x}|| = \sqrt{30}$, ist $\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Die Aussage (5) ist somit wahr.

(b)

$$2\mathbf{x} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 \\ 2\cdot 2 \\ 2\cdot(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix};$$

$$-2\mathbf{y} = -2\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot(-3) \\ -2\cdot 0 \\ -2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix};$$

$$2\mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ 4+0 \\ -10+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{x}-2\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 \\ 2+0 \\ -5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

(c) Zwei Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ sind orthogonal, falls das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$ ist.

- Zu (1): $\mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = (1,2,-5)\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 1\cdot 5 + 2\cdot 5 - 5\cdot 3 = 0.$

  $\mathbf{x}$ und $(5,5,3)^T$ sind somit orthogonal. Die Aussage (1) ist wahr.

- Zu (2): $\mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1,2,-5)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\cdot 0 + 2\cdot 0 - 5\cdot 0 = 0.$

  $\mathbf{x}$ und $(0,0,0)^T$ sind somit orthogonal. Die Aussage (2) ist wahr.

- Zu (3): $\mathbf{x}^T \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = (1,2,-5)\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = 1\cdot(-8) + 2\cdot 0 - 5\cdot 7 = -43.$

  $\mathbf{x}$ und $(8,0,7)^T$ sind somit nicht orthogonal. Die Aussage (3) ist falsch.

- Zu (4): $\mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} = (1,2,-5)\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} = 1\cdot 10 + 2\cdot 10 - 5\cdot 6 = 0.$

  $\mathbf{x}$ und $(10,10,6)^T$ sind somit orthogonal. Die Aussage (4) ist wahr.

(d) Es gilt

$$||\alpha\mathbf{x}|| = || \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ -5\alpha \end{pmatrix} || = \sqrt{\alpha^2 + (2\alpha)^2 + (-5\alpha)^2} = \sqrt{\alpha^2 \cdot (1^2 + 2^2 + (-5)^2)} = \sqrt{\alpha^2 30} = |\alpha|\sqrt{30}.$$

Da $\alpha > 0$, muss man also $\alpha = \frac{1}{\sqrt{30}} = \frac{1}{||\mathbf{x}||}$ wählen, damit $||\alpha\mathbf{x}|| = 1$.

(e) Es gilt

$$||\alpha\mathbf{y}|| = || \begin{pmatrix} -3\alpha \\ 0 \cdot \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} || = \sqrt{(-3\alpha)^2 + 0^2 + (2\alpha)^2} = \sqrt{\alpha^2 \cdot ((-3)^2 + 0^2 + 2^2)} = \sqrt{\alpha^2 13} = |\alpha| \cdot \sqrt{13}.$$

Da $\alpha > 0$, muss man also $\alpha = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{1}{||\mathbf{y}||}$ wählen, damit $||\alpha\mathbf{y}|| = 1$.

(f) In Aufgabe 4 (a) haben wir die Richtung eines Vektors definiert.

- Zu (1): Wir müssen überprüfen, ob

$$\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{y}}{||\mathbf{y}||}.$$

  Beispielweise ist die zweite Komponente von $\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}$ gleich $\frac{2}{\sqrt{30}}$. Die zweite Komponente von $\frac{\mathbf{y}}{||\mathbf{y}||}$ ist jedoch 0 . $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ zeigen nicht in dieselbe Richtung. Die Aussage (1) ist falsch.

- Zu (2): Es gilt,

$$\frac{2\mathbf{x}}{||2\mathbf{x}||} = \frac{2\mathbf{x}}{\sqrt{2^2x_1^2 + 2^2x_2^2 + 2^2x_3^2}} = \frac{2\mathbf{x}}{\sqrt{2^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}} = \frac{2\mathbf{x}}{2||\mathbf{x}||} = \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}.$$

  Somit zeigen $\mathbf{x}$ und $2\mathbf{x}$ in dieselbe Richtung. Die Aussage (2) ist wahr.

- Zu (3) Es gilt,

$$\frac{-3\mathbf{x}}{||-3\mathbf{x}||} = \frac{-3\mathbf{x}}{\sqrt{(-3)^2x_1^2 + (-3)^2x_2^2 + (-3)^2x_3^2}} = \frac{-3\mathbf{x}}{\sqrt{(-3)^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}} = \frac{-3\mathbf{x}}{3||\mathbf{x}||} = -\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}.$$

  Die Aussage (3) ist falsch.

- Zu (4): Es gilt,

$$\frac{-\pi\mathbf{y}}{||-\pi\mathbf{y}||} = \frac{-\pi\mathbf{y}}{\sqrt{(-\pi)^2y_1^2 + (-\pi)^2y_2^2 + (-\pi)^2y_3^2}} = \frac{-\pi\mathbf{y}}{\sqrt{(-\pi)^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)}} = \frac{-\pi\mathbf{y}}{\pi||\mathbf{y}||} = -\frac{\mathbf{y}}{||\mathbf{y}|}.$$

  Die Aussage (4) ist wahr.

(g) (a)
- Zu (1): Wir haben $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(-7)^2 + 0^2 + (-8)^2} = \sqrt{113} \neq 1$. Der Vektor $\mathbf{x}$ ist somit kein Einheitsvektor, vgl. Definition in Aufgabe 4 (a). Die Aussage (1) ist falsch.
- Zu (2): Wie schon in Aufgabe 4 (a) gezeigt: Transponiert man den Spaltenvektor $\mathbf{x}$, erhält man einen Zeilenvektor. Transponiert man diesen Zeilenvektor, erhält man wieder einen Spaltenvektor,

$$(\mathbf{x}^T)^T = (x_1, x_2, x_3)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}.$$

  Die Aussage (2) ist wahr.

- Zu (3): Auch die Aussage (3) ist falsch, da

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-6\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cdot(-6)\\ \frac{1}{2}\cdot 0\\ \frac{1}{2}\cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix} \neq \mathbf{y}.$$

- Zu (4): Da $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{-7^2+0^2+(-8)^2} = \sqrt{113}$ ist die Richtung von $\mathbf{x}$ gleich $\frac{1}{\sqrt{113}}\mathbf{x}$, vgl. Definition in Aufgabe 4 (a). Die Aussage (4) ist somit falsch.

(b)

$$2\mathbf{x} = 2\begin{pmatrix}-7\\0\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot(-7)\\2\cdot 0\\2\cdot(-8)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14\\0\\-16\end{pmatrix};$$

$$-2\mathbf{y} = -2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\cdot 0\\-2\cdot 1\\-2\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix};$$

$$2\mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{pmatrix}-14\\0\\-16\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14+0\\0+1\\-16+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14\\1\\-16\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{x}-2\mathbf{y} = \begin{pmatrix}-7\\0\\-8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7+0\\0-2\\-8+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\-2\\-8\end{pmatrix}.$$

(c) Zwei Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ sind orthogonal, falls gilt, dass $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$ ist. Es gilt

- Zu (1): $\mathbf{x}^T \begin{pmatrix}5\\5\\3\end{pmatrix} = (-7,0,-8)\begin{pmatrix}5\\5\\3\end{pmatrix} = -7\cdot 5+0\cdot 5-8\cdot 3 = -59.$

  $\mathbf{x}$ und $(5,5,3)^T$ sind somit nicht orthogonal. Die Aussage (1) ist falsch.

- Zu (2): $\mathbf{x}^T \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = (-7,0,-8)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = -7\cdot 0+0\cdot 0-8\cdot 0 = 0.$

  $\mathbf{x}$ und $(0,0,0)^T$ sind somit orthogonal. Die Aussage (2) ist wahr.

- Zu (3): $\mathbf{x}^T \begin{pmatrix}-8\\0\\7\end{pmatrix} = (-7,0,-8)\begin{pmatrix}-8\\0\\7\end{pmatrix} = -7\cdot(-8)+0\cdot 0-8\cdot 7 = 0.$

  $\mathbf{x}$ und $(-8,0,7)^T$ sind somit orthogonal. Die Aussage (3) ist wahr.

- Zu (4): $\mathbf{x}^T \begin{pmatrix}10\\10\\6\end{pmatrix} = (-7,0,-8)\begin{pmatrix}10\\10\\6\end{pmatrix} = (-7)\cdot 10+0\cdot 10+(-8)\cdot 6 = -118.$

  $\mathbf{x}$ und $(10,10,6)^T$ sind somit nicht orthogonal. Die Aussage (4) ist falsch.

(d) Es gilt

$$||\alpha\mathbf{x}|| = ||\begin{pmatrix} -7\alpha \\ 0\alpha \\ -8\alpha \end{pmatrix}|| \\ = \sqrt{(-7\alpha)^2+(0)^2+(-8\alpha)^2} = \sqrt{\alpha^2((-7)^2+(0)^2+(-8)^2)} \ = \sqrt{\alpha^2 113} = |\alpha| \cdot \sqrt{113}.$$

Da $\alpha > 0$, muss man also $\alpha = \frac{1}{\sqrt{113}} = \frac{1}{||\mathbf{x}||}$ wählen, damit $||\alpha\mathbf{x}|| = 1$.

(e) Es gilt

$$||\alpha\mathbf{y}|| = ||\begin{pmatrix} 0\alpha \\ 1\alpha \\ 0\alpha \end{pmatrix}|| = \sqrt{(0)^2+(1\alpha)^2+0^2} = \sqrt{\alpha^2 1^2} = |\alpha|.$$

Da $\alpha > 0$ muss man also $\alpha = 1 = \frac{1}{||\mathbf{y}||}$ wählen, damit $||\alpha\mathbf{y}|| = 1$. Der Vektor $\mathbf{y}$ ist bereits normiert und beschreibt somit auch seine Richtung.

(f) In Aufgabe 4 (a) haben wir die Richtung eines Vektors definiert.

- Zu (1): Wir müssen überprüfen:

$$\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||} = \frac{1}{\sqrt{113}}\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{y}}{||\mathbf{y}||}.$$

  Beispielweise ist die 2. Komponente von $\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}$ gleich 0. Die zweite Komponente von $\frac{\mathbf{y}}{||\mathbf{y}||}$ ist jedoch 1. $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ zeigen nicht in dieselbe Richtung. Die Aussage (1) ist somit falsch.
- Zu (2): Wir haben schon in Aufgabe 4 (f) gezeigt, dass

$$\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||} = \frac{2\mathbf{x}}{||2\mathbf{x}||}.$$

  Die Aussage (2) ist wahr.
- Zu (3): Wir haben schon in Aufgabe 4 (f) gezeigt, dass

$$-\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||} = \frac{-3\mathbf{x}}{||-3\mathbf{x}||}.$$

  Die Aussage (3) ist falsch.
- Zu (4): Wir haben schon in Aufgabe 4 (f) gezeigt, dass

$$-\frac{\mathbf{y}}{||\mathbf{y}||} = \frac{-\pi\mathbf{y}}{||-\pi\mathbf{y}||}.$$

  Die Aussage (4) ist wahr.

Allgemeine Folgerungen

- Der Nullvektor $\mathbf{0}$ ist orthogonal zu jedem Vektor.
- $\mathbf{x}$ und $\alpha\mathbf{x}$ zeigen genau dann in dieselbe Richtung, wenn $\alpha > 0$.
- $\mathbf{x}$ und $\alpha\mathbf{x}$ zeigen genau dann in entgegengesetzte Richtung, wenn $\alpha < 0$.
- Es gilt, $||\alpha\mathbf{x}|| = |\alpha|||\mathbf{x}||$.

Aufgabe 5 (Anschauung von Linearkombinationen im $\mathbb{R}^2$)

Gegeben sind die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Ist **d** eine Linearkombination von **a**? Zeichnen Sie alle Linearkombinationen von **a** in ein Koordinatensystem.

(b) Ist **d** eine Linearkombination von **b**? Zeichnen Sie alle Linearkombinationen von **b** in ein Koordinatensystem.

(c) Ist **a** eine Linearkombination von **b** und **c**? Zeichnen Sie alle Linearkombinationen von **b** und **c** in ein Koordinatensystem.

(d) Ist **a** eine Linearkombination von **b** und **d**? Zeichnen Sie alle Linearkombinationen von **b** und **d** in ein Koordinatensystem.

(e) Ist **a** eine Linearkombination von **c** und **d**? Zeichnen Sie alle Linearkombinationen von **c** und **d** in ein Koordinatensystem.

(f) Ist **a** eine Linearkombination von **b**, **c** und **d**? Zeichnen Sie alle Linearkombinationen von **b**, **c** und **d** in ein Koordinatensystem.

Lösung:

(a) Der Vektor **d** ist eine Linearkombination von **a**, wenn **d** ein Vielfaches von **a** ist, also wenn ein $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

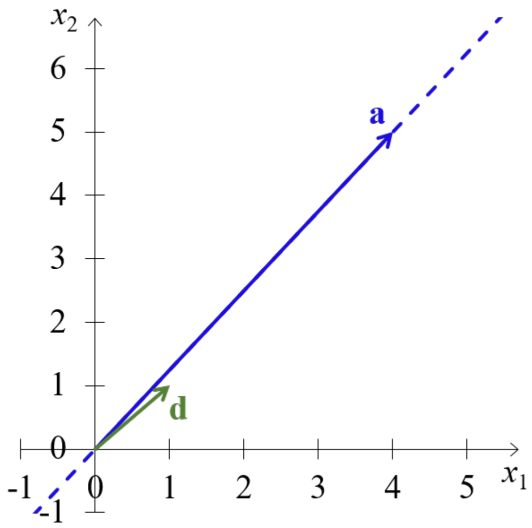
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Schreiben wir diese Forderung komponentenweise auf, ist **d** also eine Linearkombination von **a**, wenn folgende Gleichungen gelöst werden

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & d_1 = 1 = & \alpha 4 \\ \text{(II)} & d_2 = 1 = & \alpha 5. \end{array}$$

Aus (I) folgt, dass $\alpha = \frac{1}{4}$ und aus (II), dass $\alpha = \frac{1}{5}$. Es gibt also kein α, das beide Gleichungen löst. Der Vektor **d** ist keine Linearkombination von **a**. Auch geometrisch kann man sich überlegen, dass alle Vielfachen von **a** eine Gerade durch den Ursprung und den Punkt **a** aufspannen. Da **d** nicht auf dieser Geraden liegt, ist **d** kein Vielfaches und damit keine Linearkombination von **a**, siehe Abbildung 5.1.

Abbildung 5.1: Linearkombinationen von **a**



(b) Der Vektor **d** ist eine Linearkombination von **b**, wenn **d** ein Vielfaches von **b** ist, also wenn ein $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

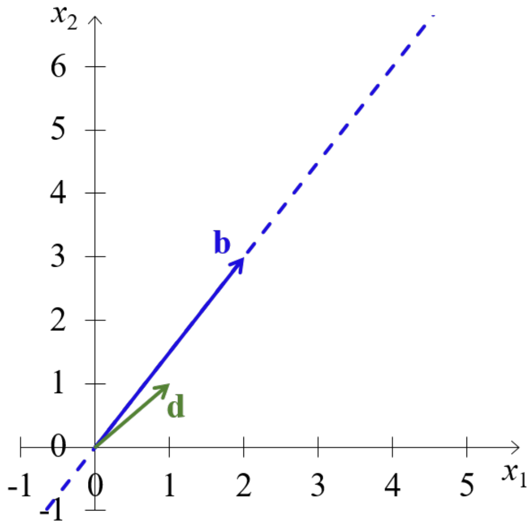
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{d} = \alpha \mathbf{b} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Schreiben wir diese Forderung komponentenweise auf, ist **d** also eine Linearkombination von **b**, wenn folgende Gleichungen gelöst werden

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & d_1 = 1 = & \alpha 2 \\ \text{(II)} & d_2 = 1 = & \alpha 3. \end{array}$$

Aus (I) folgt, dass $\alpha = \frac{1}{2}$ und aus (II), dass $\alpha = \frac{1}{3}$. Es gibt also kein α, das beide Gleichungen löst. Der Vektor **d** ist keine Linearkombination von **b**. Auch geometrisch kann man sich überlegen, dass alle Vielfachen von **b** eine Gerade durch den Ursprung und den Punkt **b** aufspannen, siehe Abbildung 5.2. Da **d** nicht auf dieser Geraden liegt, ist **d** kein Vielfaches und damit keine Linearkombination von **b**.

Abbildung 5.2: Linearkombinationen von **b**



(c) Der Vektor **a** ist eine Linearkombination von **b** und **c**, wenn man ihn als Summe von Vielfachen dieser Vektoren darstellen kann, also wenn es reelle Werte α_1 und α_2 gibt, so dass

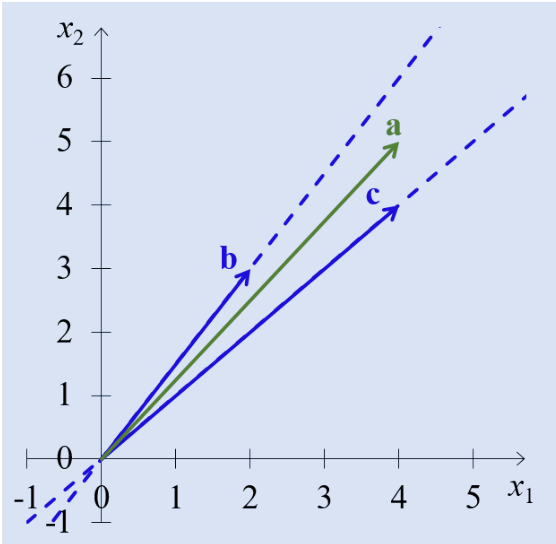
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{b} + \alpha_2 \mathbf{c} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Schreiben wir diese Forderung komponentenweise auf, ist **a** also eine Linearkombination von **b** und **c**, wenn es $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ gibt, welche folgende Gleichungen lösen

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad 4 &= \alpha_1 2 + \alpha_2 4 \\ \text{(II)} \quad 5 &= \alpha_1 3 + \alpha_2 4. \end{aligned}$$

Dies sind 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten. Löst man diese Gleichungen mit der Substitutionsmethode, erhält man $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = \frac{1}{2}$. Der Vektor **a** ist also eine Linearkombination von **b** und **c**. Auch geometrisch kann man sich überlegen, dass sich jeder beliebige Vektor des $\mathbb{R}^2$ als Linearkombination von **b** und **c** darstellen lässt. Alle Vielfachen von **b** beschreiben eine Gerade durch den Ursprung und den Punkt **b**. Alle Vielfachen von **c** beschreiben eine Gerade durch den Ursprung und den Punkt **c**. Diese beiden Geraden sind nicht gleich, siehe Abbildung 5.3.

Abbildung 5.3: Linearkombinationen von **b** und **c**



(d) Der Vektor **a** ist eine Linearkombination von **b** und **d**, wenn man ihn als Summe von Vielfachen dieser Vektoren darstellen kann, also wenn es Werte α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

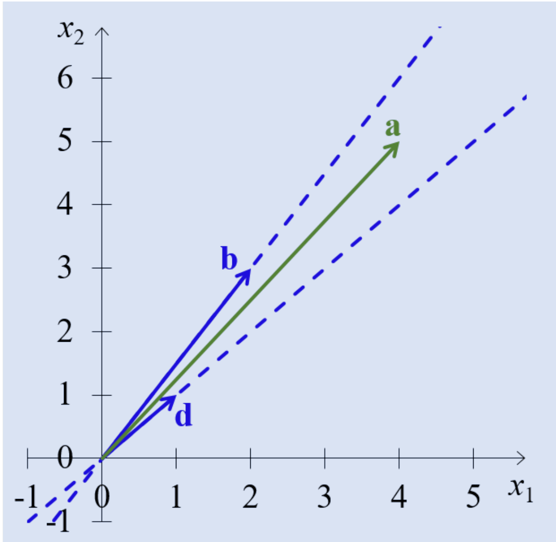
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{b} + \alpha_2 \mathbf{d} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Schreiben wir diese Forderung komponentenweise auf, ist **a** also eine Linearkombination von **b** und **d**, wenn es $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ gibt, welche folgende Gleichungen lösen

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & 4 = & \alpha_1 2 + \alpha_2 1 \\ \text{(II)} & 5 = & \alpha_1 3 + \alpha_2 1. \end{array}$$

Dies sind 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten. Löst man diese Gleichungen mit der Substitutionsmethode, erhält man $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = 2$. Der Vektor **a** ist also eine Linearkombination von **b** und **d**. Auch geometrisch kann man sich analog zu vorher überlegen, dass sich jeder beliebige Vektor des $\mathbb{R}^2$ als Linearkombination von **b** und **d** darstellen lässt. Alle Vielfachen von **b** beschreiben eine Gerade durch den Ursprung und den Punkt **b**. Alle Vielfachen von **d** beschreiben eine Gerade durch den Ursprung und den Punkt **d**. Diese beiden Geraden sind nicht gleich, siehe Abbildung 5.4.

Abbildung 5.4: Linearkombinationen von **b** und **d**



(e) Der Vektor **a** ist eine Linearkombination von **c** und **d**, wenn man ihn als Summe von Vielfachen dieser Vektoren darstellen kann, also wenn es reelle Werte α_1 und α_2 gibt, so dass

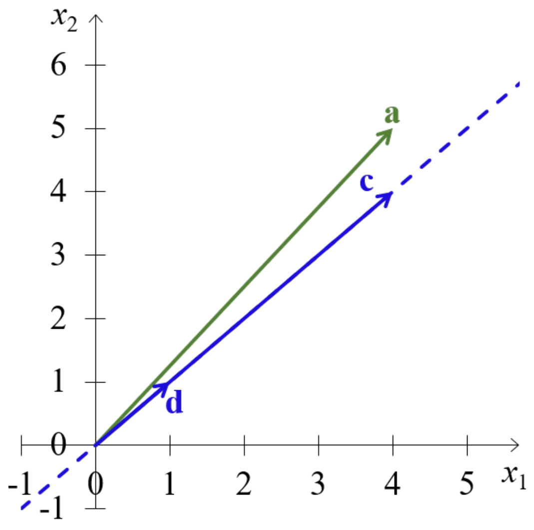
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{c} + \alpha_2 \mathbf{d} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Schreiben wir diese Forderung komponentenweise auf, ist **a** also eine Linearkombination von **c** und **d**, wenn es $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ gibt, welche folgende Gleichungen lösen

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & 4 = & \alpha_1 4 + \alpha_2 1 \\ \text{(II)} & 5 = & \alpha_1 4 + \alpha_2 1. \end{array}$$

Dies sind 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten. Löst man diese Gleichungen mit der Substitutionsmethode, erhält man $4 - 4\alpha_1 = 5 - 4\alpha_1$, sprich $4 = 5$. Es gibt somit keine $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, die beide Gleichungen lösen. Der Vektor **a** ist also keine Linearkombination von **c** und **d**. Auch geometrisch kann man sich überlegen, dass alle Vielfachen von **c** und alle Vielfachen von **d** auf der selben Geraden liegen. Diese Gerade ist diejenige, die den Ursprung und **c** bzw. **d** verbindet, siehe Abbildung 5.5. Da **a** nicht auf dieser Geraden liegt, ist **a** kein Vielfaches und damit keine Linearkombination von **c** und **d**.

Abbildung 5.5: Linearkombinationen von **c** und **d**

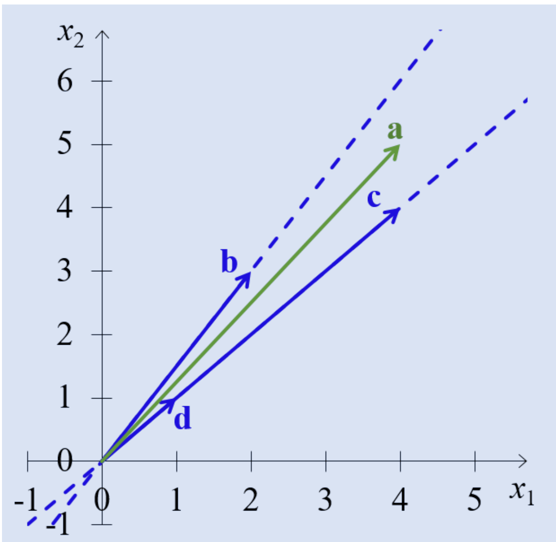


(f) Der Vektor **a** ist eine Linearkombination von **b**, **c** und **d**, wenn man ihn als Summe von Vielfachen dieser Vektoren darstellen kann, also wenn es Werte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{b} + \alpha_2 \mathbf{c} + \alpha_3 \mathbf{d} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wissen bereits, dass **a** eine Linearkombination von **b** und **c** ist. Setzen wir daher $\alpha_3 = 0$, können wir dieselben Werte für α_1 und α_2 wie in (c) benutzen, nämlich $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = \frac{1}{2}$. Der Vektor **a** ist also eine Linearkombination von **b**, **c** und **d**.

Abbildung 5.6: Linearkombinationen von **b**, **c** und **d**



Aufgabe 6 (Linearkombinationen im $\mathbb{R}^4$)

Schreiben Sie, falls möglich, den Vektor $(-1, 3, 1, 5)^T$ als Linearkombination von Vektoren aus folgenden Mengen:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\}$ (b) $\left\{ \begin{pmatrix} -5\\15\\5\\25 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\\0\\-\frac{3}{4}\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\-9\\0\\-15 \end{pmatrix} \right\}$ (d) $\left\{ \begin{pmatrix} -5\\0\\0\\25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\3\\0\\5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \right\}$.

Lösung:

(a) Der Vektor $(-1,3,1,5)^T$ lässt sich als Linearkombination von Vektoren aus der Menge in (a) darstellen, falls es $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ gibt, sodass folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\\3\\1\\5 \end{pmatrix}.$$

Dies ist äquivalent zu der Existenz von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$, welche folgende 4 Gleichungen lösen:

$$\begin{array}{rl} \text{(I)} & 1\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + 0\cdot\alpha_4 = \; -1 \\ \text{(II)} & 0\cdot\alpha_1 + 1\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + 0\cdot\alpha_4 = \; 3 \\ \text{(III)} & 0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 1\cdot\alpha_3 + 0\cdot\alpha_4 = \; 1 \\ \text{(IV)} & 0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + 1\cdot\alpha_4 = \; 5. \end{array}$$

Wir sehen sofort, dass die Gleichungen bereits in einer Form dastehen, aus der man die Lösung herauslesen kann. Es folgt nämlich unmittelbar aus (I), dass $\alpha_1 = -1$, aus (II), dass $\alpha_2 = 3$, aus (III), dass $\alpha_3 = 1$ und aus (IV), dass $\alpha_4 = 5$. Der Vektor $(-1,3,1,5)^T$ ist damit eine Linearkombination von Vektoren aus der Menge (a).

(b) Der Vektor $(-1,3,1,5)^T$ lässt sich als Linearkombination des Vektors aus der Menge in (b) darstellen, wenn es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, so dass folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\alpha \begin{pmatrix} -5\\15\\5\\25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\\3\\1\\5 \end{pmatrix}.$$

Dies ist äquivalent zu der Existenz eines $\alpha \in \mathbb{R}$, welcher folgende 4 Gleichungen löst:

$$\begin{array}{rrl} \text{(I)} & -5\cdot\alpha = & -1 \\ \text{(II)} & 15\cdot\alpha = & 3 \\ \text{(III)} & 5\cdot\alpha = & 1 \\ \text{(IV)} & 25\cdot\alpha = & 5. \end{array}$$

Aus jeder Gleichung folgt $\alpha = \frac{1}{5}$ und somit lässt sich $(-1,3,1,5)^T$ als Linearkombination des Vektors $(-5,15,5,25)^T$ schreiben. Anders formuliert: Die beiden Vektoren liegen auf einer Geraden und sind damit linear abhängig.

(c) Der Vektor $(-1,3,1,5)^T$ lässt sich als Linearkombination von Vektoren aus der Menge in (c) darstellen, wenn es $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 3/4 \\ 0 \\ -3/4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Der Nullvektor hat keinen Einfluss auf die Gleichung, α_3 kann beliebig gewählt werden. Die Gewichte $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ müssen folgende Gleichungen lösen:

$$\begin{array}{rrl} \text{(I)} & \frac{3}{4}\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 = & -1 \\ \text{(II)} & 0\cdot\alpha_1 - 9\cdot\alpha_2 = & 3 \\ \text{(III)} & -\frac{3}{4}\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 = & 1 \\ \text{(IV)} & 0\cdot\alpha_1 - 15\cdot\alpha_2 = & 5 \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{rrl} \text{(I)} & \frac{3}{4}\alpha_1 = & -1 \\ \text{(II)} & -9\alpha_2 = & 3 \\ \text{(III)} & -\frac{3}{4}\alpha_1 = & 1 \\ \text{(IV)} & -15\alpha_2 = & 5. \end{array}$$

Aus Gleichung (I) und (III) folgt jeweils, dass $\alpha_1 = -\frac{4}{3}$ und aus Gleichung (II) und (IV), dass $\alpha_2 = -\frac{1}{3}$. Der Vektor $(-1,3,1,5)^T$ ist daher eine Linearkombination der Vektoren aus (c).

(d) Der Vektor $(-1,3,1,5)^T$ lässt sich als Linearkombination von Vektoren aus der Menge in (d) darstellen, wenn es $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ gibt, sodass folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten folgende 4 Gleichungen mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rrl} \text{(I)} & -5\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 1\cdot\alpha_3 = & -1 \\ \text{(II)} & 0\cdot\alpha_1 + 3\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 = & 3 \\ \text{(III)} & 0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 = & 1 \\ \text{(IV)} & 25\cdot\alpha_1 + 5\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 = & 5 \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{rrl} \text{(I)} & -5\alpha_1 + \alpha_3 = & -1 \\ \text{(II)} & 3\alpha_2 = & 3 \\ \text{(III)} & 0 = & 1 \\ \text{(IV)} & 25\alpha_1 + 5\alpha_2 = & 5. \end{array}$$

Es gibt keine solche $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, da die dritte Gleichung keine Lösung hat. Der Vektor $(-1,3,1,5)^T$ ist keine Linearkombination der Vektoren aus (d).

Alternative Lösung:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Egal wie man α_1, α_2 und α_3 wählt, die 3. Komponente bleibt stets 0. Die erforderte 1 in der 3. Komponente kann nicht erzeugt werden.

Aufgabe 7 (Linearkombinationen im $\mathbb{R}^5$)

Schreiben Sie den Vektor $(2,-1,-2,1,5)^T$ als Linearkombination von Vektoren aus folgenden Mengen, falls möglich:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/99 \end{pmatrix} \right\}$ (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Lösung:

(a) Der Vektor $(2,-1,-2,1,5)^T$ lässt sich als Linearkombination von Vektoren aus der Menge in (a) darstellen, wenn es $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten folgende 5 Gleichungen mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{cr@{\;=\;}l} \text{(I)} & -4\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + 0\cdot\alpha_4 + 0\cdot\alpha_5 & 2 \\ \text{(II)} & 0\cdot\alpha_1 + 19\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + 0\cdot\alpha_4 + 0\cdot\alpha_5 & -1 \\ \text{(III)} & 0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 - 40\cdot\alpha_3 + 0\cdot\alpha_4 + 0\cdot\alpha_5 & -2 \\ \text{(IV)} & 0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + 8\cdot\alpha_4 + 0\cdot\alpha_5 & 1 \\ \text{(V)} & 0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + 0\cdot\alpha_4 - \frac{1}{99}\cdot\alpha_5 & 5 \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{cr@{\;=\;}l} \text{(I)} & -4\alpha_1 & 2 \\ \text{(II)} & 19\alpha_2 & -1 \\ \text{(III)} & -40\alpha_3 & -2 \\ \text{(IV)} & 8\alpha_4 & 1 \\ \text{(V)} & -\frac{1}{99}\alpha_5 & 5 \end{array}$$

In diesem Fall sehen wir sofort, dass die Gleichungen bereits in einer Form dastehen, aus der man die Lösung herauslesen kann. Es folgt nämlich unmittelbar aus (I), dass $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, aus (II), dass $\alpha_2 = -\frac{1}{19}$, aus (III), dass $\alpha_3 = \frac{1}{20}$, aus (IV), dass $\alpha_4 = \frac{1}{8}$ und aus (V), dass $\alpha_5 = 5\cdot(-99)$. Der Vektor $(2,-1,-2,1,5)^T$ lässt sich als Linearkombination von Vektoren aus der Menge in (a) darstellen, wobei

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 0 \\ 19 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + 5(-99)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/99 \end{pmatrix}.$$

(b) Der Vektor $(2,-1,-2,1,5)^T$ lässt sich als Linearkombination von Vektoren aus der Menge in (b) darstellen, wenn es $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten folgende 5 Gleichungen mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rrl} \text{(I)} & 1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 + 1 \cdot \alpha_4 + 0 \cdot \alpha_5 = & 2 \\ \text{(II)} & 0 \cdot \alpha_1 + 3 \cdot \alpha_2 + 5 \cdot \alpha_3 + 1 \cdot \alpha_4 - 1 \cdot \alpha_5 = & -1 \\ \text{(III)} & 0 \cdot \alpha_1 - 2 \cdot \alpha_2 + 2 \cdot \alpha_3 + 1 \cdot \alpha_4 - 1 \cdot \alpha_5 = & -2 \\ \text{(IV)} & 0 \cdot \alpha_1 - 4 \cdot \alpha_2 + 3 \cdot \alpha_3 + 1 \cdot \alpha_4 - 1 \cdot \alpha_5 = & 1 \\ \text{(V)} & 1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 + 1 \cdot \alpha_4 + 0 \cdot \alpha_5 = & 5 \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{crl} \text{(I)} & \alpha_1 + \alpha_4 = & 2 \\ \text{(II)} & 3\alpha_2 + 5\alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 = & -1 \\ \text{(III)} & -2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 = & -2 \\ \text{(IV)} & -4\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 = & 1 \\ \text{(V)} & \alpha_1 + \alpha_4 = & 5. \end{array}$$

Da alle Gleichungen erfüllt werden müssen, muss insbesondere die erste und fünfte Gleichung stets erfüllt sein. Das heisst, es muss stets gelten, dass

$$\begin{array}{crl} \text{(I)} & \alpha_1 + \alpha_4 = & 2 \\ \text{(V)} & \alpha_1 + \alpha_4 = & 5. \end{array}$$

Das ist ein Widerspruch. $\alpha_1 + \alpha_4$ kann entweder gleich 2 oder gleich 5 sein, nicht aber beides gleichzeitig. Formal können wir die Gleichung (I) nach α_1 auflösen, $\alpha_1 = 2 - \alpha_4$. Dies eingesetzt in die Gleichung (V), liefert

$$2 - \alpha_4 + \alpha_4 = 5 \iff 0 = 3,$$

und somit einen Widerspruch ($0 \neq 3$).
Der Vektor $(2,-1,-2,1,5)^T$ lässt sich nicht als Linearkombination von Vektoren aus der Menge in (b) darstellen.

– –

Alternative Lösung:

Nicht möglich, da die erste und fünfte Komponente des Vektors nur von den Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

generiert werden könnten. Egal wie man diese Vektoren linear kombiniert, die erste und fünfte Komponente werden gleich bleiben, sodass eine 2 als erste Komponente und gleichzeitig eine 5 als fünfte nicht erzeugt werden kann.

Aufgabe 8 (Linearkombinationen im $\mathbb{R}^3$)

Gegeben sind folgende Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}.$$

(a) Ist der Vektor $\mathbf{x}$
  (i) eine Linearkombination von $\mathbf{a}$?
  (ii) eine Linearkombination von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$?
  (iii) eine Linearkombination von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{c}$?
  (iv) eine Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$?

(b) Sei nun $\mathbf{y}^1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{y}^2 = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ und $\mathbf{y}^3 = \begin{pmatrix}4\\1\\8\end{pmatrix}$.
  (i) Welche dieser Vektoren lassen sich als Linearkombination von $\mathbf{a}$ darstellen?
  (ii) Welche dieser Vektoren lassen sich als Linearkombination von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ darstellen?
  (iii) Welche dieser Vektoren lassen sich als Linearkombination von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{c}$ darstellen?
  (iv) Welche dieser Vektoren lassen sich als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ darstellen?

(c) Sind folgende Mengen von Vektoren linear unabhängig?
  (i) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$
  (ii) $\{\mathbf{a}, \mathbf{c}\}$
  (iii) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$

Lösung:

(a) (i) $\mathbf{x}$ ist eine Linearkombination von $\mathbf{a}$, wenn $\mathbf{x}$ ein Vielfaches von $\mathbf{a}$ ist, also wenn ein $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} = \mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{a} = \alpha_1 \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

Schreiben wir diese Forderung komponentenweise auf, ist $\mathbf{x}$ also eine Linearkombination, wenn

$$\begin{aligned} &\text{(I)} & 2 &= \alpha_1 1 \\ &\text{(II)} & 1 &= \alpha_1 0 \\ &\text{(III)} & 4 &= \alpha_1 2. \end{aligned}$$

Da es kein α_1 gibt, das die zweite Gleichung erfüllt, kann **x** keine Linearkombination von **a** sein. Auch geometrisch kann man sich überlegen, dass alle Vielfachen von **a** eine Gerade durch den Ursprung und den Punkt **a** aufspannen. Da **x** nicht auf dieser Geraden liegt, ist **x** kein Vielfaches und damit keine Linearkombination von **a**.

(ii) Der Vektor **x** ist eine Linearkombination von **a** und **b**, wenn man ihn als Summe von Vielfachen dieser Vektoren darstellen kann, also wenn es reelle Werte α_1 und α_2 gibt, so dass

$$\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} = \mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{a} + \alpha_2\mathbf{b} = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix}.$$

Schreibt man diese Forderung komponentenweise auf, ergibt sich

$$\begin{aligned} &\text{(I)} & 2 &= 1\cdot\alpha_1 + 3\cdot\alpha_2 \\ &\text{(II)} & 1 &= 0\cdot\alpha_1 + 1\cdot\alpha_2 = \alpha_2 \\ &\text{(III)} & 4 &= 2\cdot\alpha_1 + 6\cdot\alpha_2. \end{aligned}$$

Setzt man Gleichung (II), $\alpha_2 = 1$, in die anderen beiden Gleichungen ein, vereinfachen sie sich zu

$$\begin{aligned} &\text{(I)} & \alpha_1 + 3 &= 2 \\ &\text{(III)} & 2\alpha_1 + 6 &= 4. \end{aligned}$$

Auflösen nach α_1 ergibt in beiden Fällen $\alpha_1 = -1$. Der Vektor **x** ist also eine Linearkombination von **a** und **b** mit Gewichten -1 und 1.

Alle Summen von Vielfachen der Vektoren **a** und **b** liegen auf der durch die Vektoren **a** und **b** aufgespannten Ebene. Da der Vektor **x** eine Linearkombination von **a** und **b** ist, liegt er in dieser Ebene.

(iii) Der Vektor **x** ist eine Linearkombination von **a** und **c**, wenn man ihn als Summe von Vielfachen dieser Vektoren darstellen kann, also wenn es reelle Werte α_1 und α_2 gibt, so dass

$$\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} = \mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{a} + \alpha_2\mathbf{c} = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix},$$

bzw.

$$\begin{aligned} &\text{(I)} & 2 &= 1\cdot\alpha_1 - 1\cdot\alpha_2 \\ &\text{(II)} & 1 &= 0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 = 0 \\ &\text{(III)} & 4 &= 2\cdot\alpha_1 - 2\cdot\alpha_2. \end{aligned}$$

Gleichung (II) vereinfacht sich zu $1 = 0$. Diese Gleichung hat keine Lösung. Damit ist **x** keine Linearkombination von **a** und **c**.

Auch anschaulich ist dieses Ergebnis klar: Aus (i) wissen wir bereits, dass **x** kein Vielfaches von **a** ist. **x** liegt nicht auf der von Vielfachen von **a** aufgespannten Gerade. Da $\mathbf{c} = -\mathbf{a}$ selbst ein Vielfaches von **a** ist, spannen die Vielfachen von **a** und **c** die gleiche Gerade auf. Da **x** keine Linearkombination von **a** ist, ist es damit auch keine Linearkombination von **a** und **c**.

(iv) Der Vektor $\mathbf{x}$ ist eine Linearkombination von $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, und $\mathbf{c}$, wenn man ihn als Summe von Vielfachen dieser drei Vektoren ausdrücken kann, also wenn es reelle $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ gibt, so dass

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{a} + \alpha_2 \mathbf{b} + \alpha_3 \mathbf{c}.$$

Aus (ii) wissen wir, dass $\mathbf{x} = -\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ist. Somit ist $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$ und $\alpha_3 = 0$ eine Lösung obiger Gleichung. $\mathbf{x}$ ist also eine Linearkombination von $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, und $\mathbf{c}$.
Interessant ist es hier, dass man $\mathbf{x}$ unter anderem auch mit Gewichten $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ und $\alpha_3 = 1$ als Linearkombination dieser Vektoren erhält, $\mathbf{x} = 0\mathbf{a} + 1\mathbf{b} + \mathbf{c}$. (In der Tat gibt es hier unendlich viele Gewichte, mit Hilfe derer man $\mathbf{x}$ als Linearkombination dieser drei Vektoren darstellen kann.) Die Darstellung von $\mathbf{x}$ als Linearkombination dieser Vektoren ist nicht eindeutig.

(b) (i) Ein Vektor $\mathbf{y}$ ist eine Linearkombination von $\mathbf{a}$, wenn er ein Vielfaches von $\mathbf{a}$ ist, also wenn ein $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{y} = \alpha_1 \mathbf{a} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Schreiben wir diese Forderung komponentenweise auf, ist $\mathbf{y}$ also eine Linearkombination von $\mathbf{a}$, wenn

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) && y_1 = \alpha_1 1 = \alpha_1 \\ &(\mathrm{II}) && y_2 = \alpha_1 0 = 0 \\ &(\mathrm{III}) && y_3 = \alpha_1 2 = 2\alpha_1. \end{aligned}$$

Da die jeweils zweite Komponente der Vektoren $\mathbf{y}^1$ und $\mathbf{y}^3$ nicht 0 ist, können diese beiden Vektoren keine Linearkombination von $\mathbf{a}$ sein. Für $\mathbf{y}^2$ ergibt sich aus der ersten Gleichung, dass $\alpha_1 = 2$ sein muss. In der Tat gilt $\mathbf{y}^2 = 2\mathbf{a}$. Somit ist dieser Vektor eine Linearkombination von $\mathbf{a}$ (mit $\alpha_1 = 2$).

(ii) Ein Vektor ist eine Linearkombination von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$, wenn man ihn als Summe von Vielfachen dieser Vektoren darstellen kann, also wenn es relle Werte α_1 und α_2 gibt, so dass

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{y} = \alpha_1 \mathbf{a} + \alpha_2 \mathbf{b} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Aus (i) wissen wir bereits, dass $\mathbf{y}^2$ ein Vielfaches von $\mathbf{a}$ ist: $\mathbf{y}^2 = 2\mathbf{a}$. Damit ist dieser Vektor auch eine Linearkombination von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ mit $\alpha_1 = 2$ und $\alpha_2 = 0$.
Um die anderen Vektoren zu überprüfen, können wir obige Forderung wieder komponentenweise aufschreiben. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) && y_1 = \alpha_1 + 3\alpha_2 \\ &(\mathrm{II}) && y_2 = \alpha_2 \\ &(\mathrm{III}) && y_3 = 2\alpha_1 + 6\alpha_2 \end{aligned}$$

Für $\mathbf{y}^1$ entspricht das

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) && 1 = \alpha_1 + 3\alpha_2 \\ &(\mathrm{II}) && 1 = \alpha_2 \\ &(\mathrm{III}) && 1 = 2\alpha_1 + 6\alpha_2 \end{aligned}$$

Aus Gleichung (II) folgt $\alpha_2 = 1$. Setzt man dies in (I) ein, erhält man $1 = \alpha_1 + 3$ bzw. $\alpha_1 = -2$. Nur mit Gewichten von -2 und 1 ergeben sich die Werte $y_1 = 1$ und $y_2 = 1$. Allerdings ergibt sich mit diesen Gewichten als dritte Komponente 2 und nicht 1. Diese Werte erfüllen also Gleichung (III) nicht. Der Vektor $\mathbf{y}^1$ ist keine Linearkombination von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$.
Für $\mathbf{y}^3$ entsprechen die Forderungen

$$\begin{array}{lcl} \text{(I)} & & 4 = \alpha_1 + 3\alpha_2 \\ \text{(II)} & & 1 = \alpha_2 \\ \text{(III)} & & 8 = 2\alpha_1 + 6\alpha_2 \end{array}$$

Aus Gleichung (II) folgt auch hier $\alpha_2 = 1$. Setzt man dies in (I) ein, erhält man $4 = \alpha_1 + 3$ bzw. $\alpha_1 = 1$. Nur mit Gewichten von 1 und 1 ergeben sich die Werte $y_1 = 4$ und $y_2 = 1$. In der Tat ist $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{y}^3$. Der Vektor ist also eine Linearkombination von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$.

(iii) Ein Vektor ist eine Linearkombination von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{c}$, wenn man ihn als Summe von Vielfachen dieser Vektoren darstellen kann, also wenn es reelle Werte α_1 und α_2 gibt, so dass

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{y} = \alpha_1 \mathbf{a} + \alpha_2 \mathbf{c} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

bzw.

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & y_1 & = \alpha_1 - \alpha_2 \\ \text{(II)} & y_2 & = 0 \\ \text{(III)} & y_3 & = 2\alpha_1 - 2\alpha_2. \end{array}$$

Wieder wissen wir, dass $\mathbf{y}^2$ eine Linearkombination von $\mathbf{a}$ und damit auch von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{c}$ ist. Da die zweite Komponente von $\mathbf{y}^1$ und $\mathbf{y}^3$ ungleich null ist, erfüllen diese beiden Vektoren obige Gleichung (II) nicht. Sie sind keine Linearkombination von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{c}$.
Erneut kann man sich dies auch anschaulich erklären: Da $\mathbf{c} = -\mathbf{a}$ selbst ein Vielfaches von $\mathbf{a}$ ist, spannen die Vielfachen von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{c}$ die gleiche Gerade auf. Da $\mathbf{y}^1$ und $\mathbf{y}^3$ keine Linearkombinationen von $\mathbf{a}$ sind, sind sie auch keine Linearkombination von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{c}$.

(iv) Ein Vektor ist eine Linearkombination von $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, und $\mathbf{c}$, wenn man ihn als Summe von Vielfachen dieser drei Vektoren ausdrücken kann, also wenn es reelle $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ gibt, so dass

$$\mathbf{y} = \alpha_1 \mathbf{a} + \alpha_2 \mathbf{b} + \alpha_3 \mathbf{c}.$$

Aus (ii) wissen wir, dass sowohl $\mathbf{y}^2$ als auch $\mathbf{y}^3$ Linearkombinationen von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ sind, $\mathbf{y}^2 = 2\mathbf{a}$ und $\mathbf{y}^3 = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Mit $\alpha_3 = 0$ sind sie damit auch Linearkombinationen von $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, und $\mathbf{c}$.
Will man überprüfen, ob $\mathbf{y}^1$ eine Linearkombination der drei Vektoren ist, kann man erneut $\mathbf{y} = \alpha_1 \mathbf{a} + \alpha_2 \mathbf{b} + \alpha_3 \mathbf{c}$ komponentenweise als

$$\begin{array}{lcl} \text{(I)} & & 1 = \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 \\ \text{(II)} & & 1 = \alpha_2 \\ \text{(III)} & & 1 = 2\alpha_1 + 6\alpha_2 - 2\alpha_3 \end{array}$$

schreiben. Setzt man Gleichung (II), $1 = \alpha_2$, in die anderen Gleichungen ein, erhält man:

$$\begin{array}{lcl} \text{(I)} & & 1 = \alpha_1 + 3 - \alpha_3 \\ \text{(III)} & & 1 = 2\alpha_1 + 6 - 2\alpha_3 \end{array}$$

bzw.

$$\begin{aligned} &\text{(I)} & -2 &= \alpha_1 - \alpha_3 \\ &\text{(III)} & -2.5 &= \alpha_1 - \alpha_3. \end{aligned}$$

Da man α_1 und α_3 nicht so wählen kann, dass die Differenz gleichzeitig -2 und -2.5 ist, gibt es also keine solchen Werte α_1 und α_3. Der Vektor $\mathbf{y}^1$ ist keine Linearkombination der drei Vektoren.
Anschaulich spannen die drei durch die Vektoren **a**, **b** und **c** beschriebenen Geraden eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ auf. Die Vektoren $\mathbf{y}^2$ und $\mathbf{y}^3$ liegen auf dieser Ebene, aber $\mathbf{y}^1$ nicht.

c)

Definition 6.3.1 - Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit
Die Menge von Vektoren $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n\}$ mit $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^m$ heisst linear abhängig, wenn sich mindestens einer der Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen lässt, also wenn für (mindestens) ein $1 \leq j \leq n$ Werte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$\mathbf{v}^j = \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \alpha_i \mathbf{v}^i = \alpha_1 \mathbf{v}^1 + \ldots + \alpha_{j-1}\mathbf{v}^{j-1} + \alpha_{j+1}\mathbf{v}^{j+1} + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}^n.$$

Man spricht in diesem Fall auch (vereinfachend) von linear abhängigen Vektoren $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^m$. Sind die Vektoren $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^m$ nicht linear abhängig, nennt man sie linear unabhängig.

Eine Menge von Vektoren ist also genau dann linear abhängig, wenn man einen der Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen kann. Ist das nicht der Fall, ist diese Menge linear unabhängig.
Aus Aufgabe 8 (a) wissen wir bereits $\mathbf{a} = -\mathbf{c}$.

(1) Alle Vielfache von **a** haben eine zweite Komponente von 0. **b** ist somit kein Vielfaches von **a** und $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Deshalb ist auch **a** kein Vielfaches von **b**. Die Menge $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ ist linear unabhängig.
(2) Da $\mathbf{c} = -\mathbf{a}$, ist **c** ein Vielfaches von **a**. Die Vektoren $\{\mathbf{a}, \mathbf{c}\}$ sind linear abhängig.
(3) Da $\mathbf{c} = -\mathbf{a}$, ist **c** eine Linearkombination von **a** und **b** mit $\alpha_1 = -1$ und $\alpha_2 = 0$. Somit sind die Vektoren $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ linear abhängig.

Aufgabe 9 (Linear unabhängige Vektoren)

Beurteilen Sie jeweils die Aussage: „ Die Vektoren der folgenden Menge sind linear unabhängig. “

(1) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ ☐ wahr ☐ falsch

Lösung:

Ob die Vektoren einer Menge linear unabhängig sind oder nicht, kann man über die Definition von linearer Unabhängigkeit, vgl. Aufgabe 8, oder mit Hilfe von folgendem Satz herausfinden:

Satz 6.3.3 - Lineare Unabhängigkeit

Die Vektoren $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^m$ sind genau dann linear unabhängig, wenn

$$\alpha_1 \mathbf{v}^1 + \alpha_2 \mathbf{v}^2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}^n = \mathbf{0}$$

nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ erfüllt ist.

- Zu (1): Die Vektoren aus der Menge in (1) sind linear unabhhängig genau dann, wenn

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ erfüllt ist. Der dritte Vektor ist eine Linearkombination der ersten beiden, daher können die Vektoren nicht linear unabhängig sein. Wählen wir nämlich $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$ und $\alpha_3 = 1$, so folgt

$$-1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es kann somit der Nullvektor erzeugt werden, ohne $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ setzen zu müssen. Die Menge der Vektoren in (1) ist nicht linear unabhängig. Die Aussage (1) ist falsch.

- Zu (2): Die Vektoren aus der Menge in (2) sind linear unabhhängig genau dann, wenn

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ erfüllt ist. Da der dritte Vektor der Nullvektor ist, spielt α_3 keine Rolle. Egal wie man α_3 wählt, sofern man $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0$ setzt, gilt stets

$$\alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daher kann der Nullvektor erzeugt werden, ohne $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ setzen zu müssen. Die Menge der Vektoren in (2) ist nicht linear unabhängig. Die Aussage (2) ist falsch.

Allgemeine Folgerung: Ist einer der Vektoren $\mathbf{v}^i, 1 \leq i \leq n$, $i \in \mathbb{N}$, der Nullvektor, $\mathbf{0}$, so sind die Vektoren $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n$ stets linear abhängig.

- Zu (3): $(1,4,-2,0)^T$ und $(3,12,-6,0)^T$ sind linear abhängig genau dann, wenn es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Schreiben wir diese Forderung komponentenweise auf, sind $(1,4,-2,0)^T$ und $(3,12,-6,0)^T$ also linear abhängig, wenn

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha 3 \\ 4 &= \alpha 12 \\ -2 &= \alpha(-6) \\ 0 &= \alpha 0. \end{aligned}$$

Alle 3 Gleichungen werden von $\alpha = \frac{1}{3}$ gelöst. Die beiden Vektoren liegen somit auf einer Gerade. Die Menge der Vektoren in (3) ist nicht linear unabhängig. Die Aussage (3) ist falsch.

- Zu (4): Die Vektoren aus der Menge in (4) sind genau dann linear unabhhängig, wenn

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ erfüllt wird.
Schreiben wir diese Forderung komponentenweise auf, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 + \alpha_2 0 + \alpha_3(-1) \\ 0 &= \alpha_1 4 + \alpha_2 1 + \alpha_3 0 \\ 0 &= \alpha_1(-2) + \alpha_2 5 + \alpha_3 6. \end{aligned}$$

Wir können die Substitutionsmethode anwenden. Aus Gleichung (I) folgt, dass $\alpha_1 = \alpha_3$ sein muss. Aus Gleichung (II) folgt, dass $\alpha_2 = -4\alpha_1$. Setzt man dies in Gleichung (III) ein, erhält man $0 = \alpha_1(-2) + (-4\alpha_1)5 + \alpha_1 6 = -16\alpha_1$. Dies wird nur von $\alpha_1 = 0$ erfüllt. Es folgt unmittelbar, dass auch $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Somit sind die drei Vektoren linear unabhängig. Die Aussage (4) ist wahr.