Es werden die Aufgaben 1, 4(f), 5(c) und 9 in den Tutorien besprochen.

Aufgabe 1 (Vektoren des $\mathbb{R}^2$)

Gegeben seien $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Wie lang sind die Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$?

(b) Wie weit ist der Punkt $\mathbf{x}$ vom Punkt $\mathbf{y}$ entfernt?

(c) Berechnen Sie den Vektor $\alpha_i \mathbf{x}$ für $i = 1,2,3$ mit $\alpha_1 = -2, \alpha_2 = 0.5, \alpha_3 = 3$. Zeichnen Sie die Menge aller Vielfachen $\left\{\alpha \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

(d) Wie lautet das Skalarprodukt von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$?

(e) Sind $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ orthogonal?

(f) Bestimmen Sie einen Vektor $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, der orthogonal zu $\mathbf{x}$ ist. Bestimmen Sie zudem einen Vektor $\tilde{\mathbf{z}}$, der orthogonal zu $\mathbf{x}$ steht und zudem die Länge 1 hat.
Zur Kontrolle: Ein möglicher Vektor ist $\mathbf{z} = (2, -3)^T$.

(g) Sei $\mathbf{z} = (2, -3)^T$. Berechnen Sie die Linearkombination von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{z}$, $\alpha_1 \mathbf{x} + \alpha_2 \mathbf{z}$ mit
- $\alpha_1 = 0.5$ und $\alpha_2 = 1$.
- $\alpha_1 = -0.5$ und $\alpha_2 = -1$.
- $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = 1$.
- $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = -1$.

(h) Sei weiterhin $\mathbf{z} = (2, -3)^T$. Kann man $\mathbf{y}$ als Linearkombination von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{z}$ darstellen?

(i) Sei weiterhin $\mathbf{z} = (2, -3)^T$. Beschreiben Sie die Menge $\left\{\alpha_1 \mathbf{x} + \alpha_2 \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 | \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\}$.

Aufgabe 2 (Orthogonalität)

(a) Welche der folgenden Vektoren sind orthogonal?

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -19 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Parameter s und t so, dass die folgenden Vektoren jeweils orthogonal sind.

(i)

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ s \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} t \\ -2 \\ -2t \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (Vektoren, Skalarprodukt, Norm)

(a) Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{x} = (1,\ 2,\ -5)^T$ und $\mathbf{y} = (8,\ 0,\ 7)^T$. Berechnen Sie:

$\|\mathbf{y}\|^2$, $\|\mathbf{x}\|$, $3\|\mathbf{x}+2\mathbf{y}\|^2$, $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$.

(b) Sind **x** und **y** aus Teilaufgabe (a) orthogonal?

(c) Bestimmen Sie einen Vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ mit den folgenden zwei Eigenschaften:
- **u** ist orthogonal zu den Vektoren **a** und **b**, wobei:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix};$$

- $\|\mathbf{u}\| = 1$.

(d) (#) Bestimmen Sie den Winkel φ, den **x** und **y** einschliessen.

(e) (#) Gegeben sei nun zusätzlich $\mathbf{z} = (5,\ 0,\ 1)^T$. Welchen Winkel schliessen **x** und **z** ein?

Aufgabe 4 (Rechnen mit Vektoren)

Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(1) **x** ist ein Einheitsvektor.	☐ wahr	☐ falsch
(2) $(\mathbf{x}^T)^T = (x_1, x_2, x_3)^T$.	☐ wahr	☐ falsch
(3) $\mathbf{y} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.	☐ wahr	☐ falsch
(4) Die Richtung von **x** ist $\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.	☐ wahr	☐ falsch

(b) Berechnen Sie folgende Vektoren
- 2**x**,
- -2**y**,
- 2**x**+**y**,

- $\mathbf{x}$ - $2\mathbf{y}$.

(c) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(1) $\mathbf{x}$ ist orthogonal zu $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. ☐ wahr ☐ falsch

(2) $\mathbf{x}$ ist orthogonal zu $\mathbf{0}$. ☐ wahr ☐ falsch

(3) $\mathbf{x}$ ist orthogonal zu $\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$. ☐ wahr ☐ falsch

(4) $\mathbf{x}$ ist orthogonal zu $\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$. ☐ wahr ☐ falsch

(d) Mit welcher Zahl $\alpha > 0$ muss man den Vektor $\mathbf{x}$ multiplizieren, damit $||\alpha\mathbf{x}|| = 1$ gilt?

(e) Mit welcher Zahl $\alpha > 0$ muss man den Vektor $\mathbf{y}$ multiplizieren, damit $||\alpha\mathbf{y}|| = 1$ gilt?

(f) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(1) $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ zeigen in dieselbe Richtung. ☐ wahr ☐ falsch

(2) $\mathbf{x}$ und $2\mathbf{x}$ zeigen in dieselbe Richtung. ☐ wahr ☐ falsch

(3) $\mathbf{x}$ und $-3\mathbf{x}$ zeigen in dieselbe Richtung. ☐ wahr ☐ falsch

(4) $\mathbf{y}$ und $-\pi\mathbf{y}$ zeigen in die entgegengesetzte Richtung. ☐ wahr ☐ falsch

(g) Beantworten Sie die Fragen (a)-(f) im Falle $\mathbf{x} = (-7, 0, -8)^T$ und $\mathbf{y} = (0, 1, 0)^T$.

Aufgabe 5 (Anschauung von Linearkombinationen im $\mathbb{R}^2$)

Gegeben sind die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Ist $\mathbf{d}$ eine Linearkombination von $\mathbf{a}$? Zeichnen Sie alle Linearkombinationen von $\mathbf{a}$ in ein Koordinatensystem.

(b) Ist $\mathbf{d}$ eine Linearkombination von $\mathbf{b}$? Zeichnen Sie alle Linearkombinationen von $\mathbf{b}$ in ein Koordinatensystem.

(c) Ist $\mathbf{a}$ eine Linearkombination von $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$? Zeichnen Sie alle Linearkombinationen von $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ in ein Koordinatensystem.

(d) Ist $\mathbf{a}$ eine Linearkombination von $\mathbf{b}$ und $\mathbf{d}$? Zeichnen Sie alle Linearkombinationen von $\mathbf{b}$ und $\mathbf{d}$ in ein Koordinatensystem.

(e) Ist **a** eine Linearkombination von **c** und **d**? Zeichnen Sie alle Linearkombinationen von **c** und **d** in ein Koordinatensystem.
(f) Ist **a** eine Linearkombination von **b**, **c** und **d**? Zeichnen Sie alle Linearkombinationen von **b**, **c** und **d** in ein Koordinatensystem.

Aufgabe 6 (Linearkombinationen im $\mathbb{R}^4$)

Schreiben Sie, falls möglich, den Vektor $(-1,3,1,5)^T$ als Linearkombination von Vektoren aus folgenden Mengen:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ (b) $\left\{ \begin{pmatrix}-5\\15\\5\\25\end{pmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\0\\-\frac{3}{4}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-9\\0\\-15\end{pmatrix} \right\}$ (d) $\left\{ \begin{pmatrix}-5\\0\\0\\25\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\0\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}.$

Aufgabe 7 (Linearkombinationen im $\mathbb{R}^5$)

Schreiben Sie den Vektor $(2,-1,-2,1,5)^T$ als Linearkombination von Vektoren aus folgenden Mengen, falls möglich:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix}-4\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\19\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-40\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\8\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\-1/99\end{pmatrix} \right\}$ (b) $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\-2\\-4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\2\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\}$

Aufgabe 8 (Linearkombinationen im $\mathbb{R}^3$)

Gegeben sind folgende Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}.$$

(a) Ist der Vektor **x**
  (i) eine Linearkombination von **a**?
  (ii) eine Linearkombination von **a** und **b** ?
  (iii) eine Linearkombination von **a** und **c** ?
  (iv) eine Linearkombination von **a**, **b** und **c** ?

(b) Sei nun $\mathbf{y}^1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{y}^2 = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ und $\mathbf{y}^3 = \begin{pmatrix}4\\1\\8\end{pmatrix}$.

(i) Welche dieser Vektoren lassen sich als Linearkombination von $\mathbf{a}$ darstellen?

(ii) Welche dieser Vektoren lassen sich als Linearkombination von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ darstellen?

(iii) Welche dieser Vektoren lassen sich als Linearkombination von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{c}$ darstellen?

(iv) Welche dieser Vektoren lassen sich als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ darstellen?

(c) Sind folgende Mengen von Vektoren linear unabhängig?

(i) $\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$

(ii) $\{\mathbf{a},\mathbf{c}\}$

(iii) $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$

Aufgabe 9 (Linear unabhängige Vektoren)

Beurteilen Sie jeweils die Aussage: „ Die Vektoren der folgenden Menge sind linear unabhängig. “

(1) $\left\{ \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} -2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(2) $\left\{ \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\7\\-4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-9\\1\\-1\\2\end{pmatrix} \right\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(3) $\left\{ \begin{pmatrix}1\\4\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\12\\-6\\0\end{pmatrix} \right\}$ ☐ wahr ☐ falsch

(4) $\left\{ \begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\6\end{pmatrix} \right\}$ ☐ wahr ☐ falsch