Es werden die Aufgaben 1,5,6,8 und 9a),b) in den Tutorien besprochen.

Aufgabe 1 (Lineare Abbildungen)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch?

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \cdot x_2 \end{pmatrix}$ ist eine lineare Abbildung. ☐ wahr ☐ falsch

(2) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine lineare Abbildung. ☐ wahr ☐ falsch

(3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_3 - x_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}$ ist eine lineare Abbildung. ☐ wahr ☐ falsch

(4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ mit $f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine lineare Abbildung. ☐ wahr ☐ falsch

Aufgabe 2 (Verknüpfungen linearer Abbildungen)

Betrachten Sie drei lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} f_A : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \quad \text{mit} \quad f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \\ f_B : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \quad \text{mit} \quad f_B(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}, \\ f_C : \mathbb{R}^q &\to \mathbb{R}^p \quad \text{mit} \quad f_C(\mathbf{x}) = C\mathbf{x}, \end{aligned}$$

mit $m \times n-$Matrizen A, B und einer $p \times q-$Matrix C.

(a) Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) Bestimmen Sie m und n, sowie p und q.

(ii) Bestimmen Sie, falls möglich, die Matrix D, welche die Verknüpfung $(f_A + f_B)(\mathbf{x}) = D\mathbf{x}$ beschreibt.

(iii) Bestimmen Sie, falls möglich, die Matrix E, welche die Verknüpfung $(f_A - f_C)(\mathbf{x}) = E\mathbf{x}$ beschreibt.

(iv) Bestimmen Sie, falls möglich, die Matrix F, welche die Verknüpfung $(f_A - f_C + f_B)(\mathbf{x}) = F\mathbf{x}$ beschreibt.

(v) Bestimmen Sie, falls möglich, die Matrix G, welche die Verknüpfung $(f_A \circ f_B)(\mathbf{x}) = G\mathbf{x}$ beschreibt.
(vi) Bestimmen Sie, falls möglich, die Matrix H, welche die Verknüpfung $(f_C \circ (f_A \circ f_B))(\mathbf{x}) = H\mathbf{x}$ beschreibt.

(b) Seien $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 9 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Bestimmen Sie m und n, sowie p und q.
(ii) Bestimmen Sie, falls möglich, die Matrix D, welche die Verknüpfung $(f_A + f_B + f_C)(\mathbf{x}) = D\mathbf{x}$ beschreibt.
(iii) Bestimmen Sie, falls möglich, die Matrix E, welche die Verknüpfung $(f_C \circ (f_A \circ f_B))(\mathbf{x}) = E\mathbf{x}$ beschreibt.
(iv) Bestimmen Sie, falls möglich, die Matrix F, welche die Verknüpfung $(f_B \circ f_C)(\mathbf{x}) = F\mathbf{x}$ beschreibt.

Aufgabe 3 (Lineare Abbildungen)

Betrachten Sie folgende lineare Abbildungen:

$$f_A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f_B(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Finden Sie Matrizen A und B, sodass $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ und $f_B(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$.
(b) Wie kann man sich anschaulich $f_A(\mathbb{R}^2) = \mathrm{Bild}(f_A) = \{\mathbf{y} \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,\ \text{sodass } A\mathbf{x} = \mathbf{y}\}$ vorstellen? Bestimmen Sie eine Basis sowie die Dimension von $f_A(\mathbb{R}^2)$. Ist die Abbildung surjektiv, injektiv oder bijektiv?
(c) Wie kann man sich anschaulich $f_B(\mathbb{R}^2) = \mathrm{Bild}(f_B) = \{\mathbf{y} \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,\ \text{sodass } B\mathbf{x} = \mathbf{y}\}$ vorstellen? Bestimmen Sie eine Basis sowie die Dimension von $f_B(\mathbb{R}^2)$. Ist die Abbildung surjektiv, injektiv oder bijektiv?
(d) Betrachten Sie nun die additive Verknüpfung dieser beiden Abbildungen:

$$f_C(\mathbf{x}) = (f_A + f_B)(\mathbf{x}).$$

Bestimmen Sie zunächst eine Matrix C, sodass $f_C(\mathbf{x}) = C\mathbf{x}$. Wie kann man sich anschaulich $f_C(\mathbb{R}^2) = \mathrm{Bild}(f_C) = \{\mathbf{y} \mid \exists\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,\ \text{sodass } C\mathbf{x} = \mathbf{y}\}$ vorstellen? Bestimmen Sie eine Basis sowie die Dimension von $f_C(\mathbb{R}^2)$. Ist die Abbildung surjektiv, injektiv oder bijektiv?

Aufgabe 4 (Lineare Abbildung, Bild und Urbild der Abbildung)

Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) (i) Bestimmen Sie das Bild $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ von $\mathbf{x}^1 = (1,1,0,0)^T$ und $\mathbf{x}^2 = (1,0,1,0)^T$.

(ii) Prüfen Sie rechnerisch für $\mathbf{x}^1 = (1,1,0,0)^T$ und $\mathbf{x}^2 = (1,0,1,0)^T$ nach, dass gilt:
$f(\mathbf{x}^1+\mathbf{x}^2) = f(\mathbf{x}^1)+f(\mathbf{x}^2)$
$f(\alpha\mathbf{x}^1) = \alpha f(\mathbf{x}^1),\ \alpha = 2.$

(b) Bestimmen Sie jeweils die Menge aller Urbilder $\mathbf{x}$ von $\mathbf{y}$, in folgenden Fällen:
(i) $\mathbf{y} = (3,4,5)^T$
(ii) $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis sowie die Dimension von $f(\mathbb{R}^4)$. Ist die Abbildung surjektiv, injektiv oder bijektiv?

Aufgabe 5 (Berechnung der Inversen mit einem simultanen LGS)

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Matrizen, falls möglich, die Inverse:

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(e) $F = A \cdot D$

Aufgabe 6 (Lineare Abbildung, Spiegelung)

Gegeben ist die folgende lineare Abbildung

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \quad \text{wobei } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

(a) Finden Sie eine Matrix A, so dass $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ wobei $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$.

(b) f ist eine Abbildung von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$. Bestimmen Sie m und n sowie die Dimension des Bildes von $\mathbb{R}^n$ unter f, sprich $\dim(f(\mathbb{R}^n))$. Ist die Abbildung surjektiv, injektiv oder bijektiv?

(c) Erläutern Sie die geometrische Bedeutung von $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix})$ und illustrieren Sie diese graphisch, indem Sie das Bild des Punktes $(3,4)^T$ bestimmen.

(d) Finden Sie die Umkehrabbildung zu f.

Aufgabe 7 (Lineare Abbildung, Drehung)

Gegeben ist die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, wobei A eine 2×2-Matrix ist.

(a) Skizzieren Sie das durch die Punkte $(0,0)^T, (1,0)^T$, und $(-1,2)^T$ definierte Dreieck.

(b) Bestimmen Sie die lineare Abbildung f mit $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $f(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(c) Skizzieren Sie das durch die Bildpunkte aus (b) definierte Dreieck.

(d) Interpretieren Sie die Abbildung f mit Hilfe von (a) und (c).

(e) Geben Sie - falls möglich - die inverse Abbildung f^{-1} an und interpretieren Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe von (d).

Aufgabe 8 (Lineare Abbildung, Ausnutzung der Linearität)

Sei $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, von der bekannt ist, dass

$$g(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad g(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $g(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ und $g(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix})$.

(b) Bestimmen Sie die Matrix A, sodass $g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis sowie die Dimension von $g(\mathbb{R}^3)$. Ist die Abbildung surjektiv, injektiv oder bijektiv?

(d) Existiert die Umkehrabbildung g^{-1}? Falls ja, beschreiben Sie g^{-1} durch eine geeignete Matrix.

Aufgabe 9 (Rechnen mit Inversen)

(a) Von einer regulären 4×4-Matrix A sei die Inverse bekannt:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & 9 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 8 & 3 & 15 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für den Vektor $\mathbf{b} = (4, -2, 0, 1)^T$.

(b) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie, falls möglich, die Matrizengleichung

(i) $AX + 3XB = 5C$ nach X auf,

(ii) $AY = 2BY + 10C$ nach Y auf,

(iii) $A^{-1}Z_1 = B$ nach Z_1 auf,

(iv) $Z_2A^{-1} = B$ nach Z_2 auf.

(c) Es sei die folgende Matrix gegeben

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $A^3 - 3A^2 + 4I$ entspricht der Nullmatrix, d.h.

$$A^3 - 3A^2 + 4I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie dieses Ergebnis, um die Inverse von A zu bestimmen.

(d) Es sei I die Einheitsmatrix der Ordnung 5, A, B, und C reguläre 5×5-Matrizen mit $AB = 5I$ sowie $CA = B$. Vereinfachen Sie folgenden Term so weit, dass möglichst wenig Summanden übrig bleiben und nur noch A^{-1} und die Einheitsmatrix I vorkommen:

$$A7B + 20B^{-1}A^{-1} + 2A^{-1}B + 3ACB^{-1} + 13A^{-1}C^{-1}B + B^{-1}CA.$$

(e) Sei $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ wobei

$A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$ und $B^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$.

Zudem sei $\mathbf{b} = (0,1)^T$. Lösen Sie das LGS $A \cdot B \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.