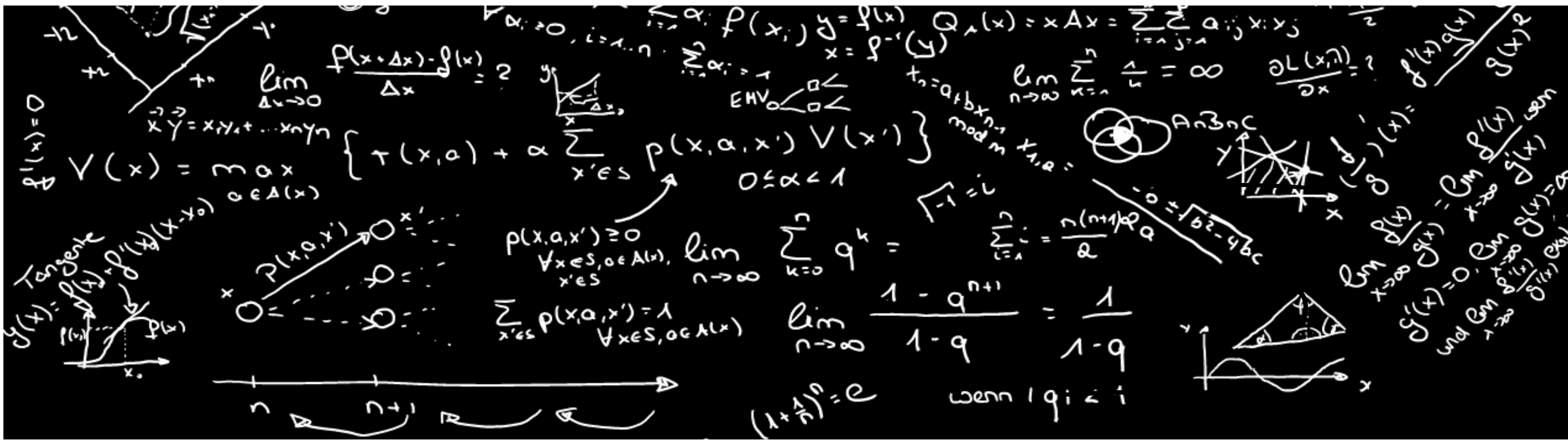
Mathematik II

Reelle Funktionen in mehreren Variablen

FS 2019



Universität Zürich[UZH]

Prof. Dr. Christiane Barz
Lehrstuhl Mathematik für Wirtschaftswissenschaften (Chair of Mathematics for Business and Economics)

Agenda

Mathematik 2

10: Optimierungsprobleme mit Nebenbedingungen

9: Reelle Funktionen in n Variablen

8: Lineare Abbildungen

7: Lin. Gleichungssysteme

6: Linearkombinationen

Mathematik 1

5: Reelle Funktionen

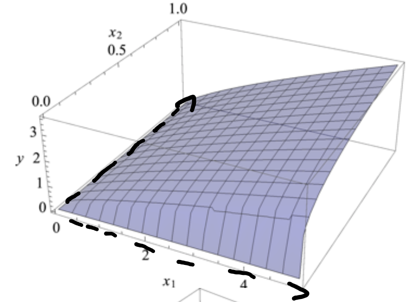
4: Folgen

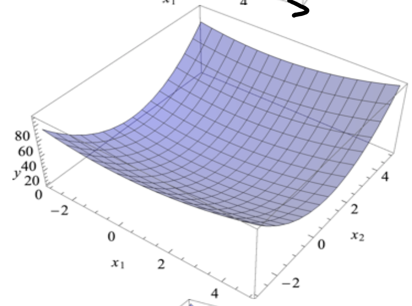
3: Relationen und Funktionen

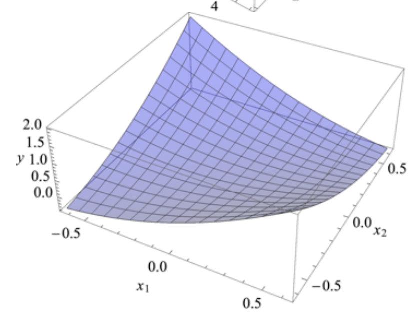
2: Mengen

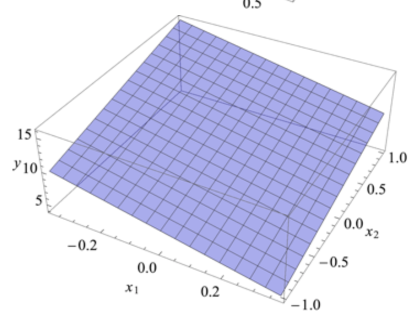
1: Mathematik als

9.1 Grundlagen
9.2 Differenzierbarkeit
9.3 Eigenschaften reeller Funktionen in n Variablen
9.4 Extremwertbestimmung
9.5 Mehrfachintegrale









Reelle Funktionen in n Variablen

Definition 9.1.1: Reelle Funktion in n Variablen

Reelle Funktion in n Variablen

$$f : D \to Z \ \text{ mit } \ \mathbf{x} \mapsto y = f(\mathbf{x}), \quad D \subseteq \mathbb{R}^n, Z \subseteq \mathbb{R}$$

Beispiele:

- $u : (0, +\infty)^2 \to \mathbb{R}$ mit $u(\mathbf{x}) = x_1^{0.8} x_2^{0.2}$

$\vec{x}^T A \vec{x} + \vec{b}^T \vec{x} + c$

quadratische Funktion

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 3 = x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_2 + 7$

quadratische Funktion $= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (0, -8) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 7$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ 4x_2 \end{pmatrix}$ $\quad -8x_2$

- $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $p(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$

$= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -1.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

affin-lineare Funktion

- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(\mathbf{x}) = -8x_1 + 3x_2 + 10$

$= (-8, 3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 10$

Definition 9.1.2: Besondere Funktionen

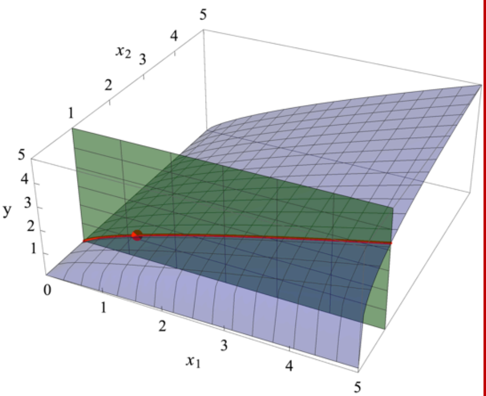
- $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$
  für $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$

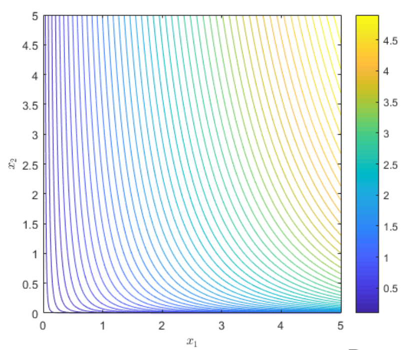
Affin-lineare Funktion in n Variablen

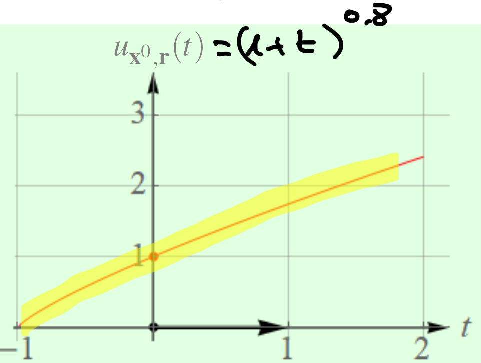
- $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$
  für $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, A \neq$ Nullmatrix

Quadratische Funktion in n Variablen

Höhenlinien und Vertikalschnitte







Definition 9.1.3: Höhenlinien

$N_y = \{\mathbf{x}\in D \mid f(\mathbf{x}) = y\}$ heisst Höhenlinie (von $f: D\to Z$) zum Niveau y. Höhe

Definition 9.1.4: Vertikalschnitte

$f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}} : \{t\in\mathbb{R} \mid \mathbf{x}^0 + t\mathbf{r} \in D\} \to \mathbb{R}$ mit $f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{r})$
heisst Vertikalschnitt (von $f: D\to Z$) durch $\mathbf{x}^0 \in D$ in Richtung $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^n$.

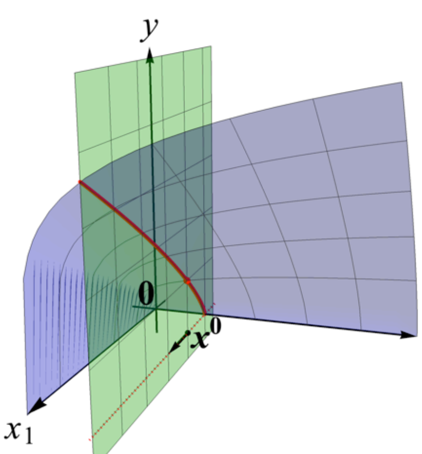
Beispiel:

- $u : (0,+\infty)^2 \to \mathbb{R}$ mit $u(\mathbf{x}) = x_1^{0.8}x_2^{0.2} = u\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}\right) = u(x_1,x_2)$

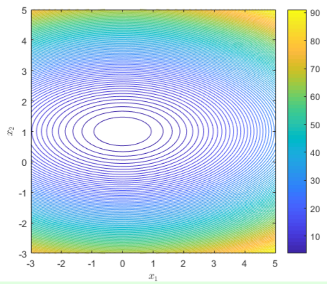
  Höhenlinie zum Niveau 1: $N_1 = \{\mathbf{x}\in(0,+\infty)^2 \mid x_1^{0.8}x_2^{0.2} = 1\}$

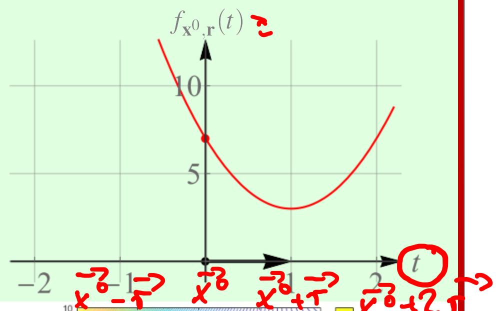
  Vertikalschnitt durch $\mathbf{x}^0 = (1,1)^T$ in Richtung $\mathbf{r} = \mathbf{e}^1$:

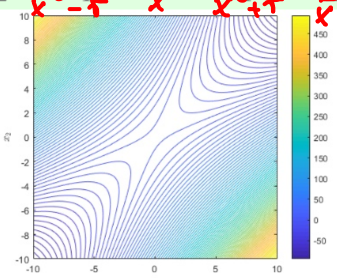
$$u_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t) = u\left(\overset{\mathbf{x}^0}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} + t\cdot \overset{\mathbf{r}}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}\right)$$
$$= u(\underbrace{1+t\cdot 1}_{x_1}, \underbrace{1+t\cdot 0}_{x_2})$$
$$= (1+t\cdot 1)^{0.8}(1+t\cdot 0)^{0.2}$$
$$= (1+t)^{0.8}$$

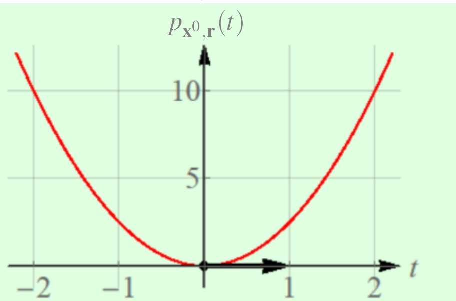


Höhenlinien und Vertikalschnitte









Beispiele:

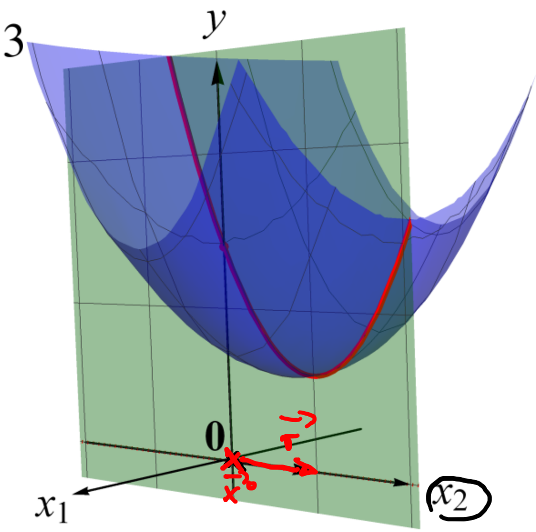
- $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x})=x_1^2+4(x_2-1)^2+3$

  Vertikalschnitt durch $\mathbf{x}^0=\mathbf{0}$
  in Richtung $\mathbf{r}=\mathbf{e}^2$:

  $\vec{x}^0$ $\vec{e}^2$

  $$f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t)=f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

  $$=f(\overset{x_1}{0},\overset{x_2}{t})\;=4(t-1)^2+3$$

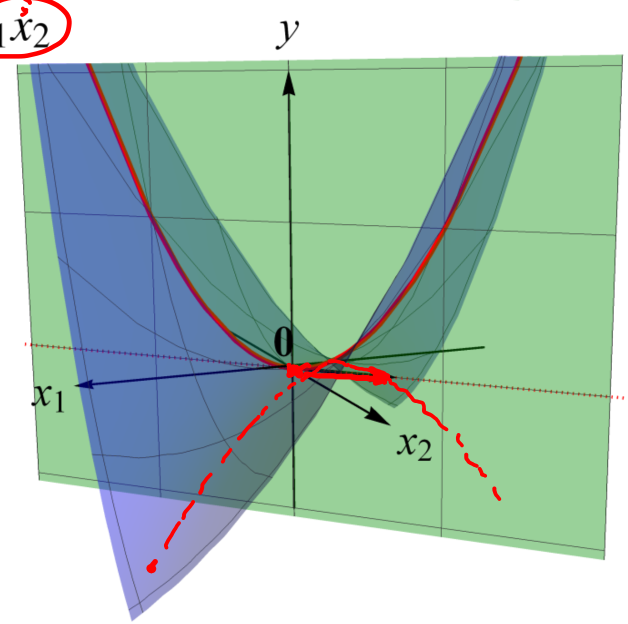


- $p:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $p(\mathbf{x})=x_1^2+x_2^2-3x_1x_2$

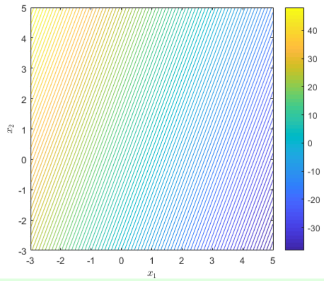
  Vertikalschnitt durch $\mathbf{x}^0=\mathbf{0}$
  in Richtung $\mathbf{r}=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$:

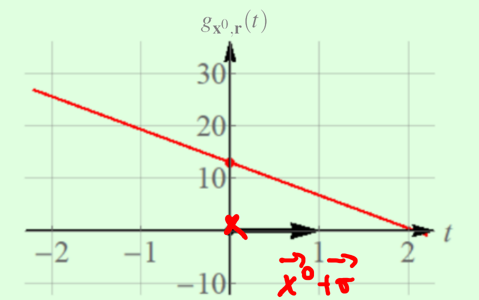
  $$p_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t)=p\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right)$$

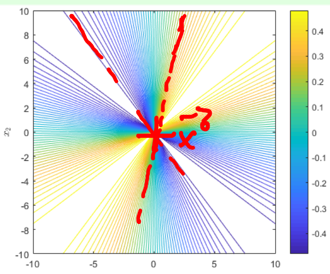
  $$=p(-\tfrac{t}{\sqrt{2}},\tfrac{t}{\sqrt{2}})\;=\tfrac{5}{2}t^2$$

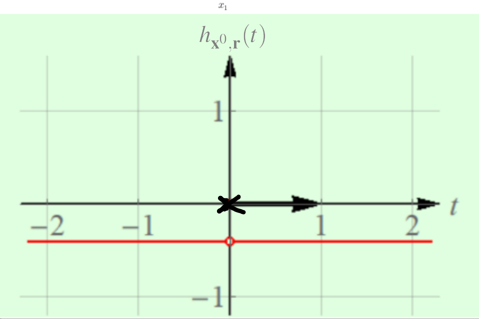


Höhenlinien und Vertikalschnitte







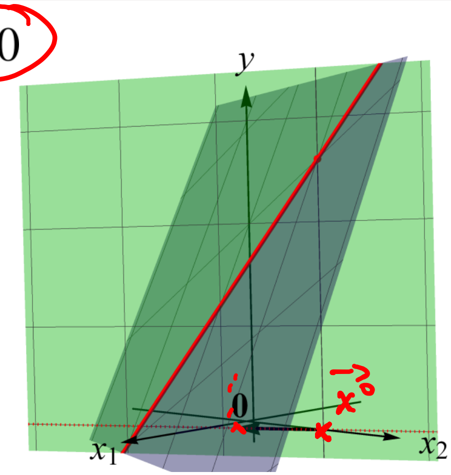


Beispiele:

- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(\mathbf{x}) = -8x_1 + 3x_2 + 10$

  Vertikalschnitt durch $\mathbf{x}^0 = (0,1)^T$ in Richtung $\mathbf{r} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}})^T$:

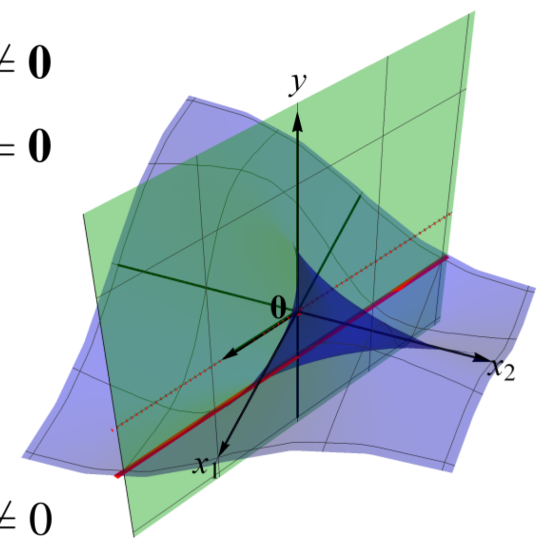
$$g_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t) = g\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{-2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\right)$$
$$= g(\tfrac{t}{\sqrt{5}}, 1 - \tfrac{2t}{\sqrt{5}}) = -\tfrac{14}{\sqrt{5}}t + 13$$



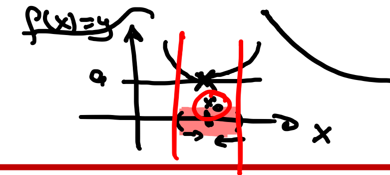
- $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2} & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}$

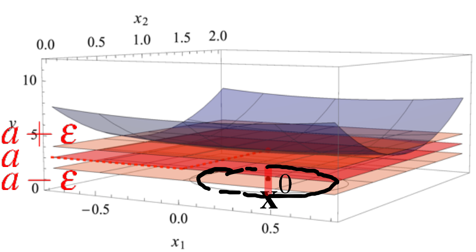
  Vertikalschnitt durch $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ in Richtung $\mathbf{r} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}})^T$:

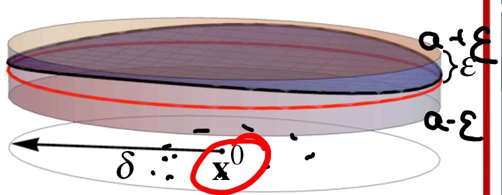
$$h_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t) = h\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{-1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\right)$$
$$= h(\tfrac{2t}{\sqrt{5}}, -\tfrac{t}{\sqrt{5}}) = \begin{cases} -\frac{2}{5} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

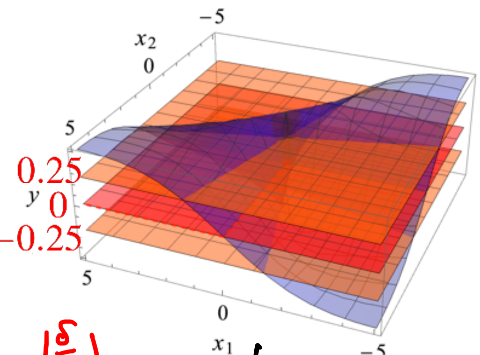


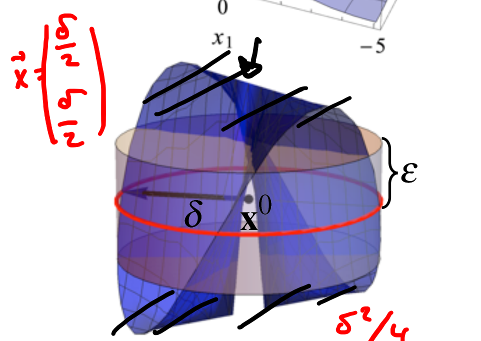
Grenzwert und Stetigkeit











Definition 9.1.5: Grenzwert

Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $U(\mathbf{x}^0, \tilde{\delta}) \cap D \neq \{\} \forall \tilde{\delta} \leq \delta$, so dass für alle $\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}^0, \delta) \cap D, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$: $|f(\mathbf{x}) - a| < \varepsilon$, dann $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = a$.

Grenzwert

Definition 9.1.6: Stetigkeit

Gilt $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0)$, heisst $f: D \to Z$ an der Stelle $\mathbf{x}^0 \in D$ stetig.

Ist f an jeder Stelle $\mathbf{x}^0 \in D$ stetig, so heisst f stetig.

Sätze 9.1.1 – 9.1.2: Verknüpfungen stetiger Funktionen

Alle Funktionen aus Definition 9.1.2 sind stetig. Sind $f, g: D \to Z_1$, $h: g(D) \to Z_2$ stetig, dann sind $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ und $h \circ g$ stetig. Zudem ist f/g stetig auf $\{\mathbf{x} \in D \mid g(\mathbf{x}) \neq 0\}$.

Beispiele:

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 3$ ist stetig.

  $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = \underset{=a}{3} = f(\mathbf{x}^0) \Rightarrow f$ stetig an der Stelle $\mathbf{x}^0$.

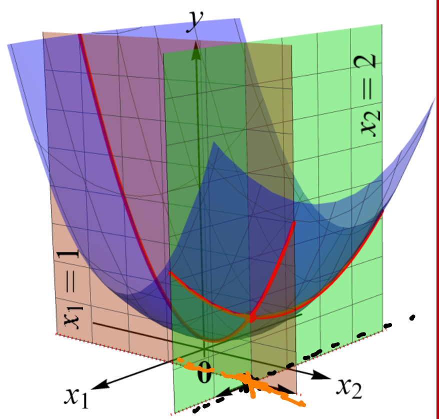
- $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}$ ist stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

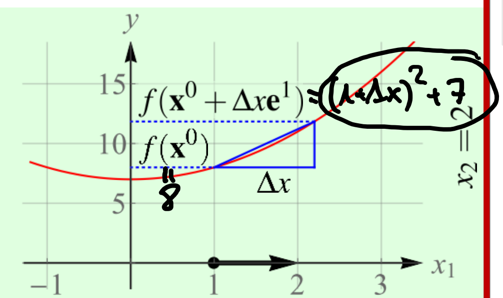
  $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}} h(\mathbf{x})$ existiert nicht $\Rightarrow h$ nicht stetig an der Stelle $\mathbf{0}$.

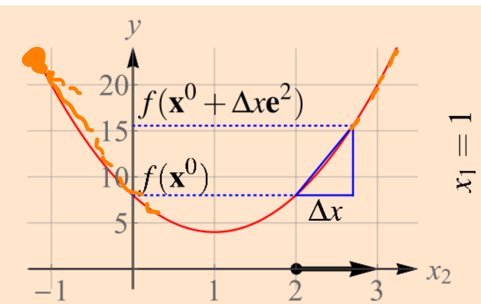
$h\begin{pmatrix} \delta/2 \\ \delta/2 \end{pmatrix} = \frac{\delta^2/4}{\frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^2}{4}} = \frac{1}{2}$

Partielle Ableitung

$\vec{x}^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_i^0 \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{x}^0 + \Delta x \vec{e}^i = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_i^0 + \Delta x \\ x_n^0 \end{pmatrix}$







Definition 9.2.1: Partielle Ableitung (Teil 1)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f: D \to Z$ heisst an der Stelle $\mathbf{x}^0 \in D$ partiell nach x_i differenzierbar, wenn folgender Grenzwert existiert:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad \boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + \Delta x\, \mathbf{e}^i) - f(\mathbf{x}^0)}{\Delta x}.}$$

Partielle Ableitung $\dfrac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_i}$ bzw. $f_{x_i}(\mathbf{x}^0)$

Die Funktion mit $\mathbf{x} \mapsto f_{x_i}(\mathbf{x})$ heisst partielle Ableitung von f nach x_i.

Beispiel:

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 3$, $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{x}^0 + \Delta x \vec{e}^1 = \begin{pmatrix} 1+\Delta x \\ 2 \end{pmatrix}$

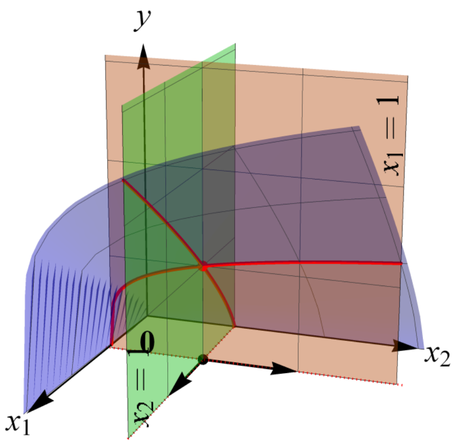
$$f_{x_1}(\mathbf{x}^0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{(1+\Delta x)^2 + 7}^{f(x^0+\Delta x e^1)} - \overbrace{8}^{f(x^0)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{1} + 2\cancel{\Delta x} + \Delta x^{\cancel{2}} - \cancel{1}}{\cancel{\Delta x}} = 2$$

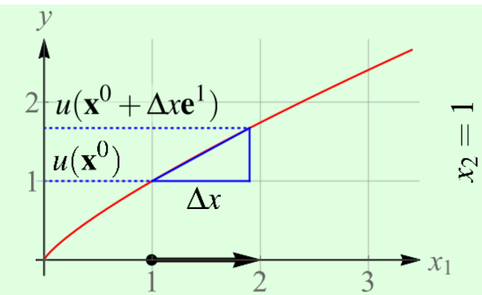
$$f_{x_1}(\mathbf{x}) = 2x_1$$

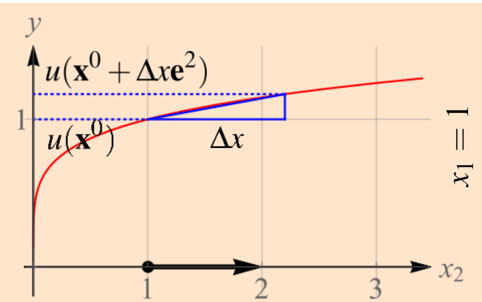
$$f_{x_2}(\mathbf{x}^0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4(1+\Delta x)^2 - 8}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8\Delta x + 4\Delta x^2}{\Delta x} = 8$$

$$f_{x_2}(\mathbf{x}) = 8(x_2 - 1)$$

Partielle Differenzierbarkeit







Definition 9.2.1: Partielle Ableitung (Teil 2)

f heisst partiell differenzierbar nach x_i, $i = 1, \ldots, n$, wenn f an jeder Stelle $\mathbf{x}^0 \in D$ partiell nach x_i differenzierbar ist. Ist f nach allen Variablen partiell differenzierbar, heisst f partiell differenzierbar.

Beispiel:

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 3$ partiell differenzierbare Funktion
- $u : (0, +\infty)^2 \to \mathbb{R}$ mit $u(\mathbf{x}) = \boxed{x_1^{0.8}} \underline{x_2^{0.2}}$, $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ partiell differenzierbare Funktion

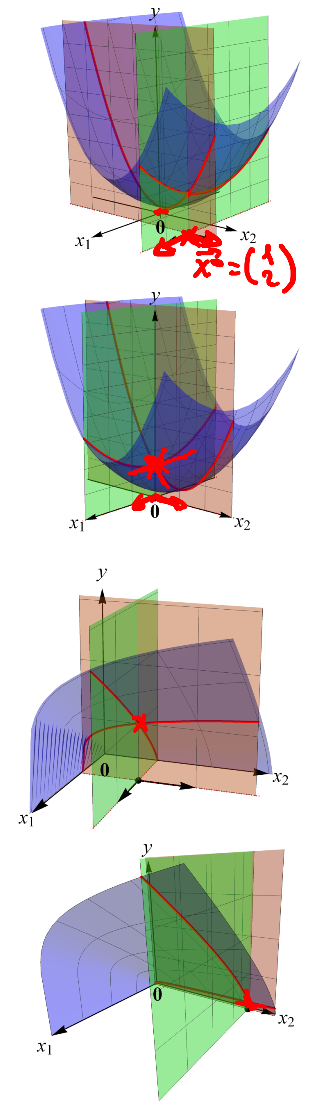
$\vec{x} \in (0, +\infty)^2$

$$u_{x_1}(\mathbf{x}) = 0.8 x_1^{-0.2} \underline{x_2^{0.2}} = 0.8 \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{0.2}, \qquad u_{x_1}(1,1) = 0.8$$

$$u_{x_2}(\mathbf{x}) = 0.2 x_1^{0.8} x_2^{-0.8} = 0.2 \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{0.8}, \qquad u_{x_2}(1,1) = 0.2$$

Der Gradient

Vektor mit allen partiellen Ableitungen



Definition 9.2.2: Der Gradient

nabla

$$\underline{\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0)} = \boxed{\nabla} f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\mathbf{x}^0) \\ \vdots \\ f_{x_n}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Δ

Gradient von f an der Stelle $\mathbf{x}^0$

Beispiele:

$f_{x_1}(\vec{x}^0) = 2x_1^0$

$f_{x_2}(\vec{x}^0) = 8(x_2^0 - 1)$

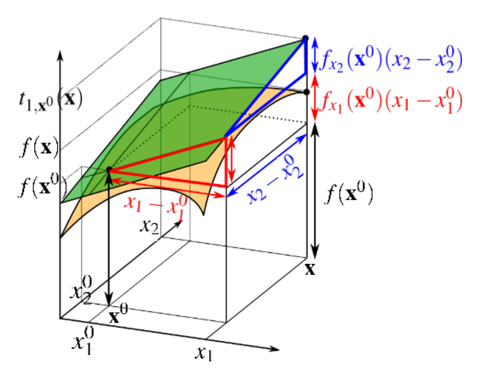
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 3$

  $\nabla f\left(\binom{1}{2}\right)$

  $$\nabla f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \boxed{2x_1^0} \\ 8(x_2^0 - 1) \end{pmatrix}, \quad = \nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

- $u : (0, +\infty)^2 \to \mathbb{R}$ mit $u(\mathbf{x}) = x_1^{0.8} x_2^{0.2}$

  $$\nabla u(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 0.8 \left(\frac{x_2^0}{x_1^0}\right)^{0.2} \\ 0.2 \left(\frac{x_1^0}{x_2^0}\right)^{0.8} \end{pmatrix}, \quad \nabla u(1,1) = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \quad \nabla u(1,32) = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{1}{80} \end{pmatrix}$$



Für n = 1 : Tangente

$t_{1,x_0}(x)$

$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

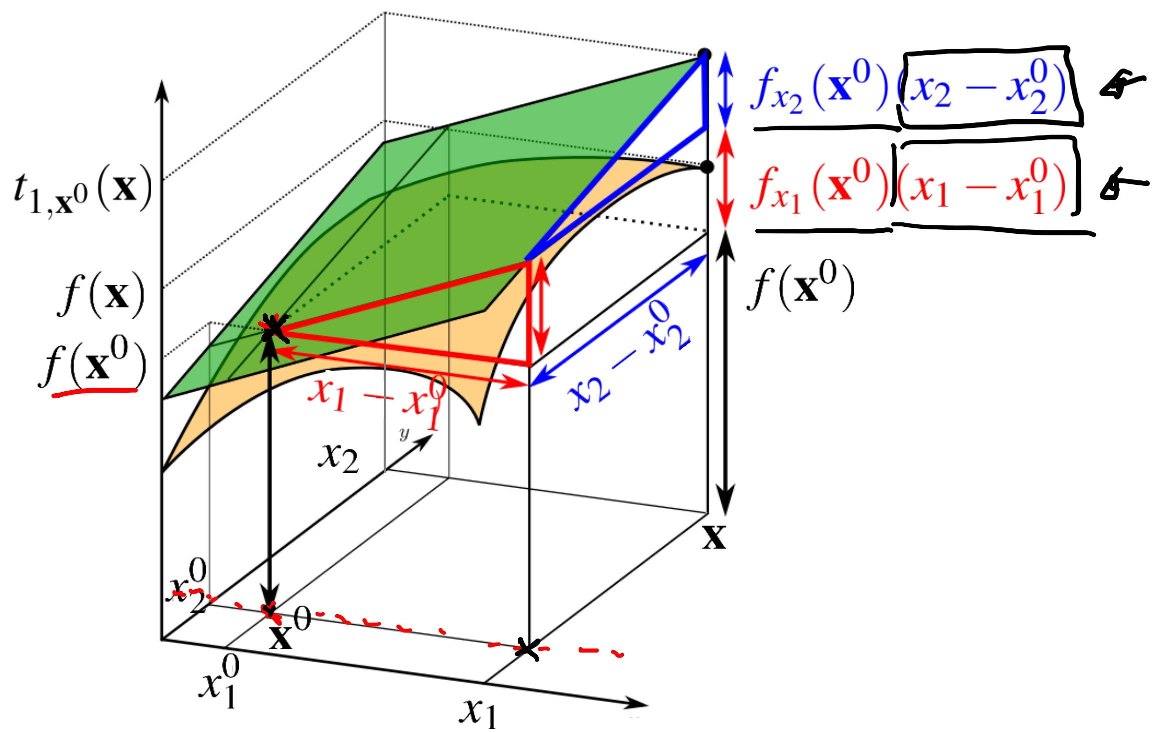
Die Tangential(hyper)ebene

Definition 9.2.3: Tangential(hyper)ebenen

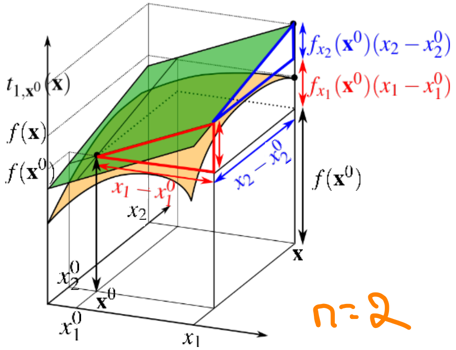
Ist $f : D \to Z$ an der Stelle $\mathbf{x}^0 \in D$ partiell differenzierbar:

$$t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = \boxed{f(\mathbf{x}^0) +} \boxed{\nabla f(\mathbf{x}^0)^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)} = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}^0) \overbrace{(x_i - x_i^0)}^{\text{Veränderung von } x_i}$$

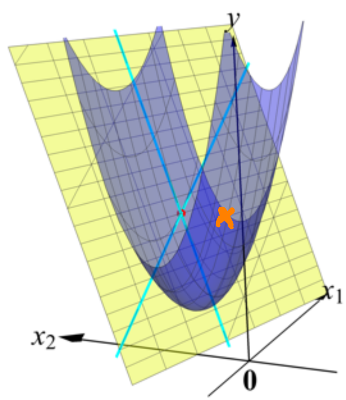
Tangente, Tangentialebene, Tangentialhyperebene

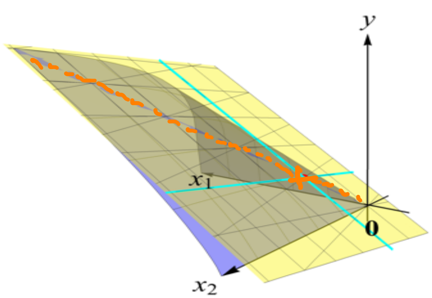


Die Tangential(hyper)ebene



n=2





Definition 9.2.3: Tangential(hyper)ebenen

Ist $f: D \to Z$ an der Stelle $\mathbf{x}^0 \in D$ partiell differenzierbar:

$$t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \nabla f(\mathbf{x}^0)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)$$

Beispiele:

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3$, $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

  $$f(\mathbf{x}^0) = 8, \nabla f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

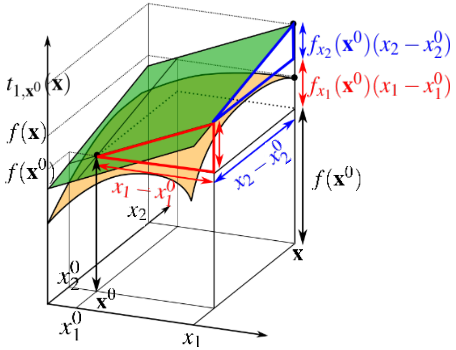
  $$t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = 8 + (2,8)\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{pmatrix} = 8 + 2(x_1-1) + 8(x_2-2)$$

- $u: (0,+\infty)^2 \to \mathbb{R}$ mit $u(\mathbf{x}) = x_1^{0.8}x_2^{0.2}$, $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

  $$u(\mathbf{x}^0) = 1, \nabla u(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

  $$t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = 1 + (0.8, 0.2)\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} = 1 + 0.8(x_1 - \overset{x_1^0}{1}) + 0.2(x_2 - \overset{x_2^0}{1})$$

Partielle Differenzierbarkeit und Stetigkeit

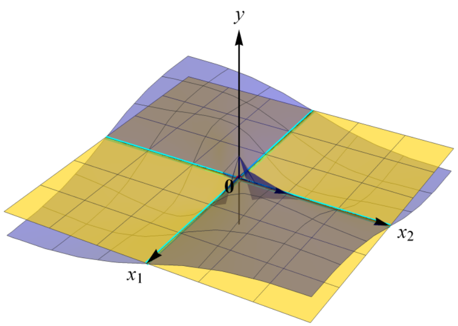


Definitionen 9.2.4, 9.2.8: Stetig partielle Differenzierbarkeit

Ist $f: D \to Z$ partiell differenzierbar und f_{x_i} für $i=1,\ldots,n$ stetig auf D, heisst f stetig partiell differenzierbar und total differenzierbar.

Satz 9.2.1: Stetigkeit stetig partiell differenzierbarer Funktionen

Ist f stetig partiell differenzierbar, dann ist f stetig.



Beispiel: $h(x_1,0) = \frac{x_1 \cdot 0}{x_1^2+0} = 0 \quad \forall x_1 \neq 0$

- $h(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2+x_2^2} & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}$

Quotientenregel

$\hookrightarrow \frac{x_2(x_1^2+x_2^2) - x_1x_2 \cdot 2x_1}{(x_1^2+x_2^2)^2}$

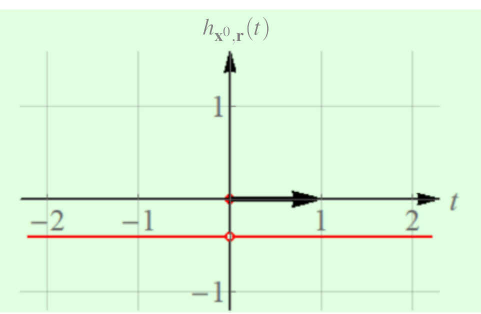
$= \frac{x_2(x_1^2+x_2^2-2x_1^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}$

$$h_{x_1}(\mathbf{x}) = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_1} = \begin{cases} x_2 \frac{x_2^2-x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}$$

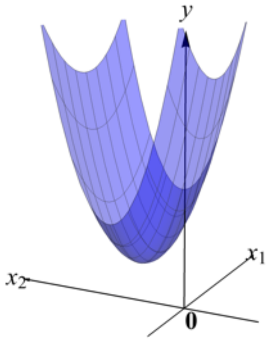
partiell differenzierbar!

Aber h nicht stetig

$$h_{x_2}(\mathbf{x}) = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_2} = \begin{cases} x_1 \frac{x_1^2-x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}$$



$$t_{1,\mathbf{0}}(\mathbf{x}) = 0 + (0,0)\begin{pmatrix} x_1-0 \\ x_2-0 \end{pmatrix} = 0$$



Die Hesse-Matrix

Partielle Ableitung 2. Ordnung

Definition 9.2.5 und Satz 9.2.2: Die Hesse-Matrix

Ist $f_{x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ partiell differenzierbar, ist $\frac{\partial f_{x_i}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i} = f_{x_i x_j}(\mathbf{x})$

f erst partiell nach x_1, dann nach x_2 abgeleitet

und

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}^0) = H_f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{x}^0) & f_{x_1x_2}(\mathbf{x}^0) & \cdots & f_{x_1x_n}(\mathbf{x}^0) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{x}^0) & f_{x_2x_2}(\mathbf{x}^0) & \cdots & f_{x_2x_n}(\mathbf{x}^0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\mathbf{x}^0) & f_{x_nx_2}(\mathbf{x}^0) & \cdots & f_{x_nx_n}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix von f an der Stelle $\mathbf{x}^0$

f zweimal stetig partiell differenzierbar

Ist $f_{x_ix_j}(\mathbf{x})$ stetig für alle $i, j = 1 \ldots, n$, ist $H_f(\mathbf{x}^0)$ symmetrisch.

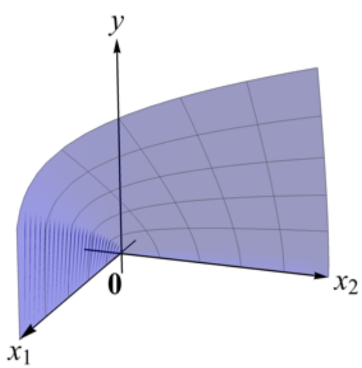
Beispiele:

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 3$

$$f_{x_1}(\mathbf{x}) = 2x_1 : \qquad f_{x_1x_1}(\mathbf{x}) = 2, \qquad f_{x_1x_2}(\mathbf{x}) = 0$$

$$f_{x_2}(\mathbf{x}) = 8(x_2 - 1) : \qquad f_{x_2x_1}(\mathbf{x}) = 0, \qquad f_{x_2x_2}(\mathbf{x}) = 8$$

$$\nabla f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 2x_1^0 \\ 8(x_2^0 - 1) \end{pmatrix}, \quad H_f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$



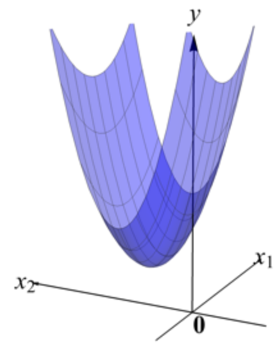
- $u : (0, +\infty)^2 \to \mathbb{R}$ mit $u(\mathbf{x}) = x_1^{0.8} x_2^{0.2}$

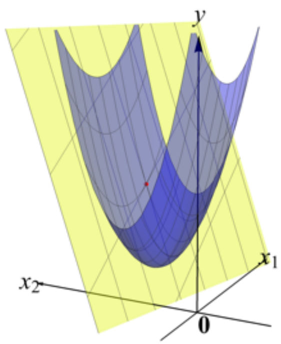
$$\nabla u(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 0.8\left(\frac{x_2^0}{x_1^0}\right)^{0.2} \\ 0.2\left(\frac{x_1^0}{x_2^0}\right)^{0.8} \end{pmatrix}, \quad H_u(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{-0.16(x_2^0)^{0.2}}{(x_1^0)^{1.2}} & \frac{0.16}{(x_1^0)^{0.2}(x_2^0)^{0.8}} \\ \frac{0.16}{(x_1^0)^{0.2}(x_2^0)^{0.8}} & \frac{-0.16(x_1^0)^{0.8}}{(x_2^0)^{1.8}} \end{pmatrix}$$

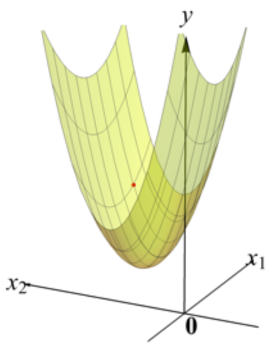
Taylorpolynome

$n = 1$

$t_{2,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$







Definition 9.2.7: Taylorpolynome

Ist f an der Stelle $\mathbf{x}^0 \in D$ partiell differenzierbar:

$$t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \nabla f(\mathbf{x}^0)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0).$$

Taylorpolynom 1. Ordnung von f an $\mathbf{x}^0$

Existieren $f_{x_i x_j}$ an der Stelle $\mathbf{x}^0 \in D$ für $i,j = 1,\dots,n$:

$$t_{2,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = \boxed{\underbrace{f(\mathbf{x}^0) + \nabla f(\mathbf{x}^0)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)}_{t_{1,\vec{x}^0}(\vec{x})}} + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^T H_f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0).$$

Taylorpolynom 2. Ordnung von f an $\mathbf{x}^0$

Beispiel:

- $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3$

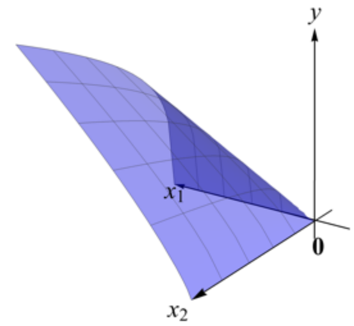
$$\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}: \; f(\mathbf{x}^0) = 8 \quad \nabla f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix} \quad H_f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}$$

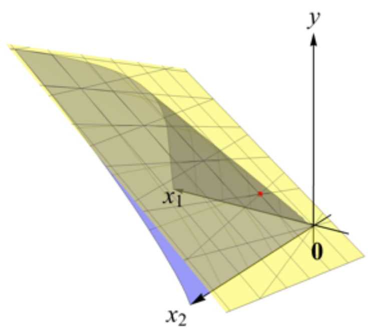
$$t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \nabla f(\mathbf{x}^0)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) = 8 + 2(x_1-1) + 8(x_2-2)$$

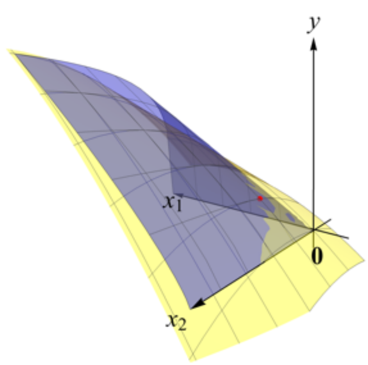
$$\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)^T$$

$$\begin{aligned} t_{2,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}^0) + \nabla f(\mathbf{x}^0)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^T H_f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) \\ &= 8 + (2,8)\begin{pmatrix}x_1-1\\x_2-2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x_1-1, x_2-2)\boxed{\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x_1-1\\x_2-2\end{pmatrix} \\ &= 8 + 2(x_1-1) + 8(x_2-2) + (x_1-1)^2 + 4(x_2-2)^2 \\ &= x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3 \end{aligned}$$

Taylorpolynome







Definition 9.2.7: Taylorpolynome

Ist f an der Stelle $\mathbf{x}^0 \in D$ partiell differenzierbar:

$t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \nabla f(\mathbf{x}^0)^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$.

Existieren $f_{x_i x_j}$ an der Stelle $\mathbf{x}^0 \in D$ für $i, j = 1, \ldots, n$:

$$t_{2,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \nabla f(\mathbf{x}^0)^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^T H_f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0).$$

Beispiel:

- $u(\mathbf{x}) = x_1^{0.8} x_2^{0.2}$

$$\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}: u(\mathbf{x}^0) = 1 \quad \nabla u(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix} \quad H_u(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} -0.16 & 0.16 \\ 0.16 & -0.16 \end{pmatrix}$$

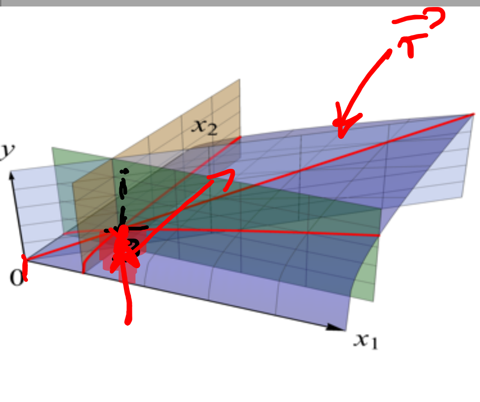
$$t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}^0) + \nabla u(\mathbf{x}^0)^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = 1 + 0.8(x_1 - 1) + 0.2(x_2 - 1)$$

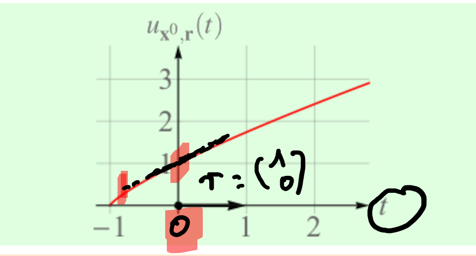
$$t_{2,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}^0) + \nabla u(\mathbf{x}^0)^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^T H_u(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$$

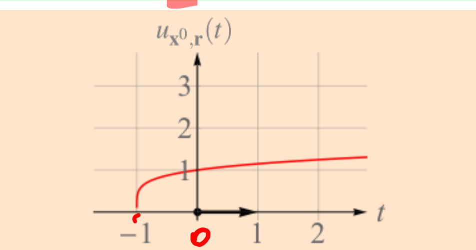
$$= 1 + \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -0.16 & 0.16 \\ 0.16 & -0.16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$$

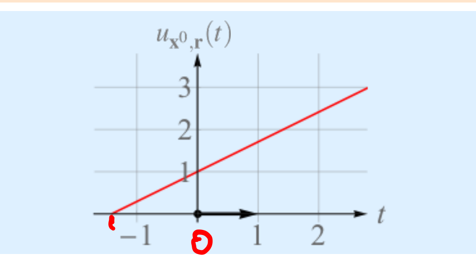
$$= 0.8x_1 + 0.2x_2 - 0.08x_1^2 - 0.08x_2^2 + 0.16x_1 x_2$$

Ableitungen des Vertikalschnitts









Beispiele:

$u(\mathbf{x}) = x_1^{0.8} x_2^{0.2}$, $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\nabla u(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}$, $H_u(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} -0.16 & 0.16 \\ 0.16 & -0.16 \end{pmatrix}$

- $\mathbf{r} = \vec{e}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: $u_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t) = (1 + 1t)^{0.8}(1 + 0t)^{0.2} = (1+t)^{0.8}$

  $\frac{du_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt}(t) = 0.8(1+t)^{-0.2}$, $\quad \frac{du_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt}(0) = 0.8$

  $\frac{d^2u_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt^2}(t) = -0.16(1+t)^{-1.2}$, $\quad \frac{d^2u_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt^2}(0) = -0.16$

- $\mathbf{r} = \vec{e}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $u_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t) = (\underbrace{1 + 0t}_{x_1 = 1})^{0.8}(\underbrace{1 + 1t}_{x_2 = 1+t})^{0.2} = (1+t)^{0.2}$

  $\frac{du_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt}(t) = 0.2(1+t)^{-0.8}$, $\quad \frac{du_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt}(0) = 0.2$

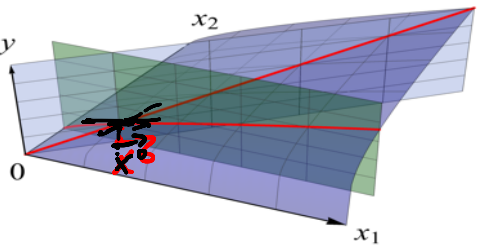
  $\frac{d^2u_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt^2}(t) = -0.16(1+t)^{-1.8}$, $\quad \frac{d^2u_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt^2}(0) = -0.16$

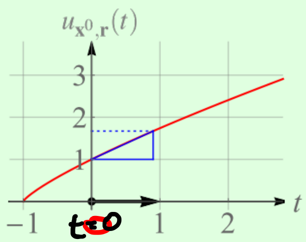
- $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$: $u_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t) = (\underbrace{1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}t}_{x_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}t})^{0.8}(\underbrace{1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}t}_{x_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}t})^{0.2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}t$

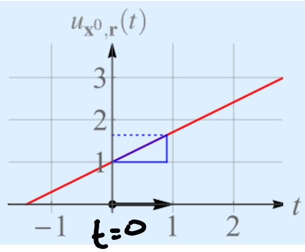
  $\frac{du_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\quad \frac{du_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

  $\frac{d^2u_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt^2}(t) = 0$, $\quad \frac{d^2u_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt^2}(0) = 0$

Die erste Richtungsableitung







Beispiele:

$$u(\mathbf{x}) = x_1^{0.8} x_2^{0.2},\ \mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \boxed{\nabla u(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}},\ H_u(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} -0.16 & 0.16 \\ 0.16 & -0.16 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: $u_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t) = (1+1t)^{0.8}(1+0t)^{0.2} = (1+t)^{0.8}$

  $$\frac{du_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt}(t) = 0.8(1+t)^{-0.2}, \qquad \frac{du_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt}(0) = \boxed{0.8} = \underbrace{(0.8, 0.2)}_{\nabla u(\mathbf{x}^0)^T} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  1. partielle Ableitung nach x_1 an der Stelle x^0

  1. Richtungs-Ableitung von u an der Stelle x^0 in Richtung $\vec{r}$

- $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$: $u_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t) = (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}t)^{0.8}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}t)^{0.2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}t$

  $$\frac{du_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{du_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt}(0) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}} = (0.8, 0.2) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

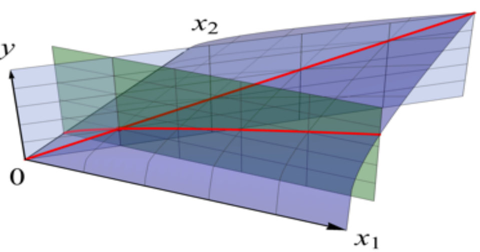
Definition 9.2.9 und Satz 9.2.5: Die erste Richtungsableitung

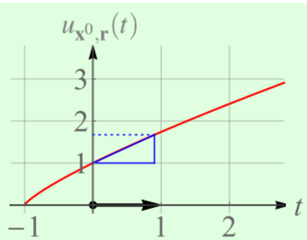
Ist f stetig partiell differenzierbar, $\mathbf{x}^0 \in D$ und $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung, dann

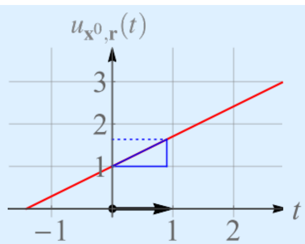
$$f'_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0) = \frac{df_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt}(0) = \boxed{\nabla f(\mathbf{x}^0)^T \mathbf{r}}.$$

1. Richtungsableitung von f an der Stelle $\mathbf{x}^0$ in Richtung $\mathbf{r}$

Die zweite Richtungsableitung







Beispiele:

$$u(\mathbf{x}) = x_1^{0.8}x_2^{0.2},\ \mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}: \nabla u(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix}0.8\\0.2\end{pmatrix},\ H_u(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix}-0.16 & 0.16\\ 0.16 & -0.16\end{pmatrix}$$

- $\mathbf{r} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$: $u_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t) = (1+1t)^{0.8}(1+0t)^{0.2} = (1+t)^{0.8}$

  $$\frac{du_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt}(t) = 0.8(1+t)^{-0.2},\quad \frac{d^2u_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt^2}(t) = -0.16(1+t)^{-1.2}$$

  $\mathbf{r}^T$ $\quad H_u(\mathbf{x}^0)$ $\quad \mathbf{r}$

  $$\frac{d^2u_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt^2}(0) = -0.16 = (1,0)\begin{pmatrix}-0.16 & 0.16\\ 0.16 & -0.16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

- $\mathbf{r} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$: $u_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t) = (1+\frac{1}{\sqrt{2}}t)^{0.8}(1+\frac{1}{\sqrt{2}}t)^{0.2} = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}t$

  $$\frac{du_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{d^2u_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt^2}(t) = 0$$

  $$\frac{d^2u_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt^2}(0) = 0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix}-0.16 & 0.16\\ 0.16 & -0.16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

Definition 9.2.10 und Satz 9.2.7: Die zweite Richtungsableitung

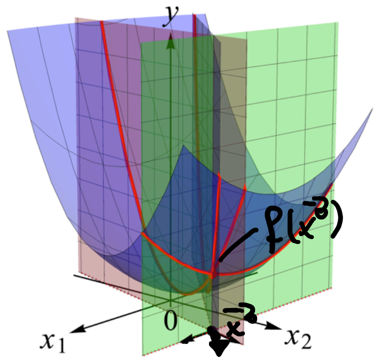
Ist f zweimal stetig partiell differenzierbar, $\mathbf{x}^0 \in D$ und $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung, dann

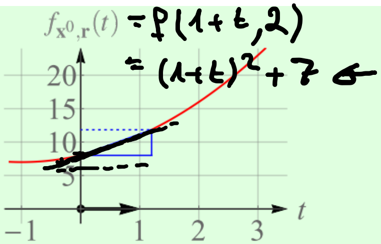
$$f''_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0) = \frac{d^2 f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt^2}(0) = \boxed{\mathbf{r}^T H_f(\mathbf{x}^0)\mathbf{r}}.$$

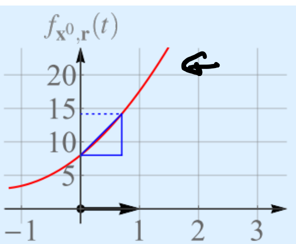
2. Richtungsableitung von f an der Stelle $\mathbf{x}^0$ in Richtung $\mathbf{r}$

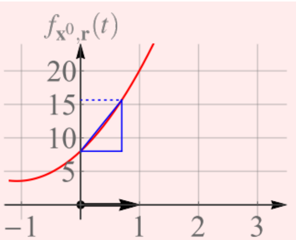
Richtungsableitungen

$\|\nabla f(\vec{x}^0)\| = \sqrt{2^2+8^2} = \sqrt{68}$









Beispiele:

$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3$, $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$: $\boxed{\nabla f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}}$ $\boxed{H_f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}}$

- $\mathbf{r} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$: $f'_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0) = (2,8)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 2\cdot 1 + 8\cdot 0 = 2$

  $f''_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0) = (1,0)\overbrace{\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}^{\binom{2}{0}} = 2$

- $\mathbf{r} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$: $f'_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0) = (2,8)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} \approx 7.07$

  $f''_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\underbrace{\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}} = 5$

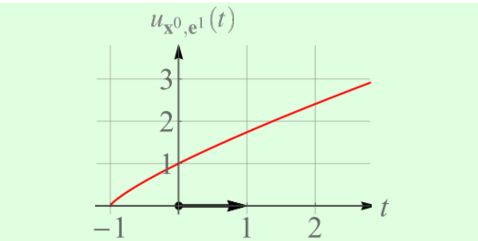
- $\mathbf{r} = \begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{68}}\\\frac{8}{\sqrt{68}}\end{pmatrix}$: $f'_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0) = (2,8)\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{68}}\\\frac{8}{\sqrt{68}}\end{pmatrix} = \frac{4}{\sqrt{68}} + \frac{64}{\sqrt{68}} = \sqrt{68} \approx 8.25$

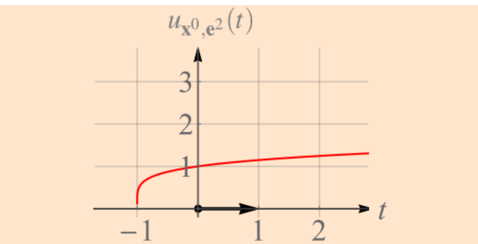
  $f''_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0) = (\frac{2}{\sqrt{68}}, \frac{8}{\sqrt{68}})\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{68}}\\\frac{8}{\sqrt{68}}\end{pmatrix} = \frac{520}{68}$

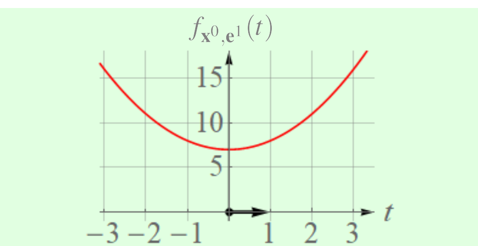
Satz 9.2.6: Richtung des steilsten Anstiegs

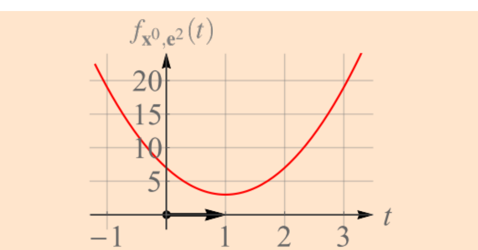
→ Der Gradient zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs.

Monotonie









Definition 9.3.1 : Monotonie

$f : D \to Z$ heisst (streng) monoton steigend bzw. fallend in Richtung $\mathbf{r}$, wenn $f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t)$ für alle $\mathbf{x}^0 \in D$ (streng) monoton steigend bzw. fallend ist.

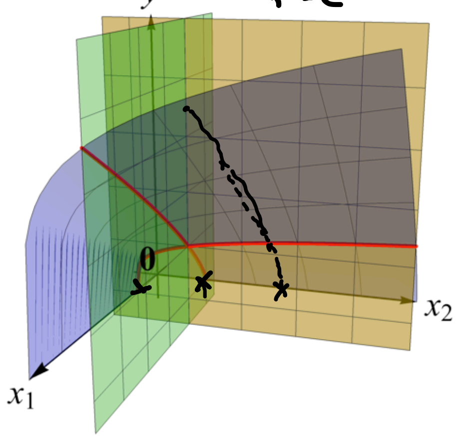
Beispiele:

- $u(\mathbf{x}) = x_1^{0.8} x_2^{0.2}$

  $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

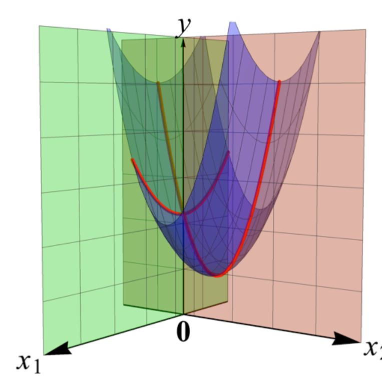
  $\vec{r} = \vec{e}^2$

  u ist monoton steigend in Richtung $\mathbf{e}^1$.
  u ist monoton steigend in Richtung $\mathbf{e}^2$.

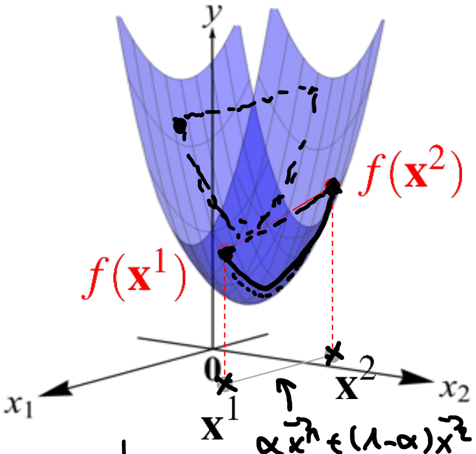


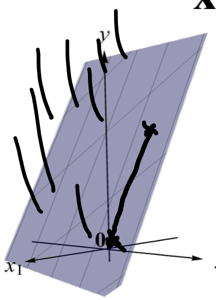
- $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 3$

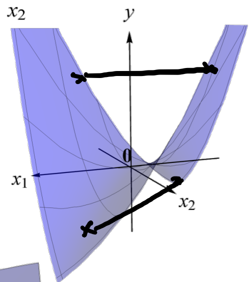
  f ist nicht monoton steigend in Richtung $\mathbf{e}^1$.
  f ist nicht monoton steigend in Richtung $\mathbf{e}^2$.

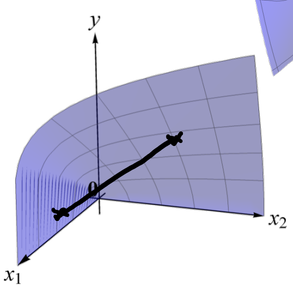


Konvexität









f (streng) konvex $\Leftrightarrow$
$f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}$ für alle $\mathbf{x}^0, \mathbf{r}$ (streng) konvex

Definition 9.3.2: Konvexität

Sei D konvex. $f : D \to Z$ heisst konvex bzw. streng konvex, falls

Funktionswerte der Verbindungslinie — Verbindungslinie der Funktionswerte

$$f(\alpha\mathbf{x}^1 + (1-\alpha)\mathbf{x}^2) \le \alpha f(\mathbf{x}^1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}^2) \text{ bzw.}$$

$$f(\alpha\mathbf{x}^1 + (1-\alpha)\mathbf{x}^2) < \alpha f(\mathbf{x}^1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}^2) \; \forall \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in D, \alpha \in (0,1).$$

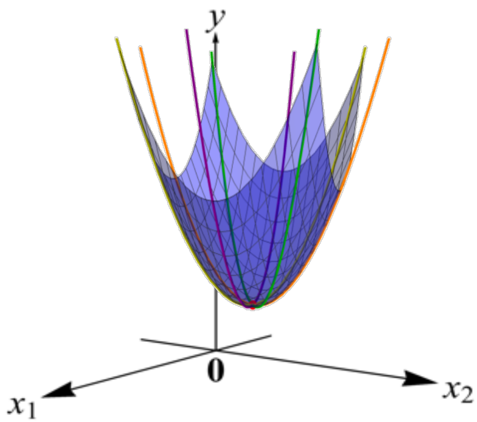
f heisst (streng) konkav in D, falls $-f$ (streng) konvex in D ist.

bzw. wenn Ungleichungen umgekehrt gelten

Beispiele:

- $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3$
  f ist streng konvex. f ist nicht konkav.
- $g(\mathbf{x}) = -8x_1 + 3x_2 + 10$
  g ist konvex. g ist konkav.
- $p(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$
  p ist nicht konvex. p ist nicht konkav.
- $u(\mathbf{x}) = x_1^{0.8} x_2^{0.2}$
  u ist nicht konvex. u ist konkav.

Kriterien

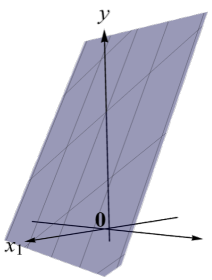


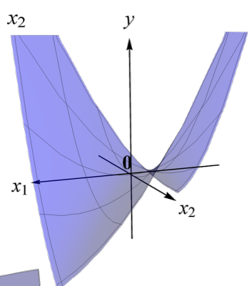
f (streng) konvex $\Leftrightarrow$
$f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}$ für alle $\mathbf{x}^0, \mathbf{r}$ (streng) konvex

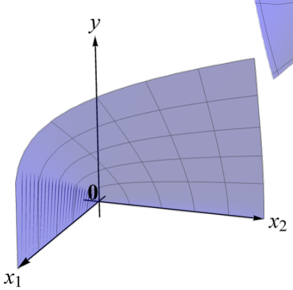
Sätze 9.3.3 – 9.3.4: Konvexitätskriterien

D offen und konvex, $f : D \to Z$ zweimal stetig partiell differenzierbar:

- $\mathbf{r}^T H_f(\mathbf{x}^0)\mathbf{r} > 0 \quad \forall \mathbf{x}^0 \in D,\ \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \Rightarrow f$ ist streng konvex in D.
- $\mathbf{r}^T H_f(\mathbf{x}^0)\mathbf{r} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x}^0 \in D,\ \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow f$ ist konvex in D.
- $\mathbf{r}^T H_f(\mathbf{x}^0)\mathbf{r} < 0 \quad \forall \mathbf{x}^0 \in D,\ \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \Rightarrow f$ ist streng konkav in D.
- $\mathbf{r}^T H_f(\mathbf{x}^0)\mathbf{r} \leq 0 \quad \forall \mathbf{x}^0 \in D,\ \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow f$ ist konkav in D.







Beispiele:

$H_f(\vec{x}^0)$

- $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 3 \quad f''_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{r}^T \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \mathbf{r} = 2r_1^2 + 8r_2^2 > 0$ für alle Richtungen!
  f ist streng konvex. f ist nicht konkav.
- $g(\mathbf{x}) = -8x_1 + 3x_2 + 10 \quad g''_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{r}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{r} = 0$ ≤ 0 / ≥ 0 für alle Richtungen
  g ist konvex. g ist konkav.
- $p(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 \quad p''_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0) = \boxed{\mathbf{r}^T \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}} \mathbf{r} = 2r_1^2 + 2r_2^2 - 6r_1r_2$?
  p ist nicht konvex. p ist nicht konkav.
- $u(\mathbf{x}) = x_1^{0.8}x_2^{0.2} \quad u''_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0) = \boxed{\mathbf{r}^T \begin{pmatrix} \frac{-0.16(x_2^0)^{0.2}}{(x_1^0)^{1.2}} & \frac{0.16}{(x_1^0)^{0.2}(x_2^0)^{0.8}} \\ \frac{0.16}{(x_1^0)^{0.2}(x_2^0)^{0.8}} & \frac{-0.16(x_1^0)^{0.8}}{(x_2^0)^{1.8}} \end{pmatrix} \mathbf{r}}$
  u ist nicht konvex. u ist konkav.

Positiv definite Matrizen

Positiv semi-definite Matrizen

Indefinite Matrizen

Negativ semi-definite Matrizen

Negativ definite Matrizen

Definitheit von Matrizen

Definition 9.3.3: Definitheit von Matrizen

Eine symmetrische $n \times n$-Matrix A heisst

- **positiv definit**, $A \succ 0$, wenn $\mathbf{r}^T A\mathbf{r} > 0$ für alle $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$;
- **positiv semidefinit**, $A \succeq 0$, wenn $\mathbf{r}^T A\mathbf{r} \geq 0$ für alle $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$;
- **negativ definit**, $A \prec 0$, wenn $\mathbf{r}^T A\mathbf{r} < 0$ für alle $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$;
- **negativ semidefinit**, $A \preceq 0$, wenn $\mathbf{r}^T A\mathbf{r} \leq 0$ für alle $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$;
- **indefinit**, wenn A weder positiv definit, positiv semidefinit, negativ definit, noch negativ semidefinit ist.

Beispiele:

- $H_f(\vec{x}^0) = A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \succ 0$ positiv definit $\qquad \mathbf{r}^T A\,\mathbf{r} = 2r_1^2 + 8r_2^2 > 0 \quad \forall \vec{r} \neq \vec{0}$
- $H_g(\vec{x}^0) = B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \succeq 0,\ \preceq 0 \qquad \mathbf{r}^T B\,\mathbf{r} = 0 = 0 \quad \forall \vec{r} \neq \vec{0}$
- $H_p(\vec{x}^0) = C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ indefinit $\qquad \mathbf{r}^T C\,\mathbf{r} = 2r_1^2 + 2r_2^2 - 6r_1 r_2$
  $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2$
  $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow -1$
- $H_u(1,1) = D = \begin{pmatrix} -0.16 & 0.16 \\ 0.16 & -0.16 \end{pmatrix}$ negativ semidefinit $\qquad \mathbf{r}^T D\,\mathbf{r} = -0.16r_1^2 - 0.16r_2^2 + 0.32r_1 r_2$
  $= -0.16(r_1 - r_2)^2 \leq 0 \quad \forall \vec{r} \neq 0$

Eigenwerte und Definitheit

Eigenvektorbestimmung

1. Berechne $\det(A-\lambda I)$

2. Finde alle $\lambda \in \mathbb{R}$: $\det(A-\lambda I)=0$

3. Zu jedem λ: Löse $(A-\lambda I)\mathbf{v}=\mathbf{0}$. $\Rightarrow \mathbf{v} \in \mathbb{L}\setminus\{\mathbf{0}\}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ

$1.\ A-\lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 8-\lambda \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0-\lambda \end{pmatrix}$

Satz 9.3.5: Eigenwerte und Definitheit

Eine symmetrische $n \times n$-Matrix A mit Eigenwerten $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ ist

- positiv definit $\Leftrightarrow \lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n > 0$;
- positiv semidefinit $\Leftrightarrow \lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n \geq 0$;
- negativ definit $\Leftrightarrow \lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n < 0$;
- negativ semidefinit $\Leftrightarrow \lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n \leq 0$;
- indefinit $\Leftrightarrow$ mindestens ein Eigenwert positiv und einer negativ.

Beispiele:

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A-\lambda I) = (2-\lambda)(8-\lambda)$ $\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 8$ $>0 \Rightarrow A \succ 0$
- $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \det(B-\lambda I) = \lambda^2$ $\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ $\geq 0 \Rightarrow B \succeq 0$; $\leq 0 \Rightarrow B \preceq 0$
- $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \det(C-\lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$ $\Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$ indefinit
- $D = \begin{pmatrix} -0.16 & 0.16 \\ 0.16 & -0.16 \end{pmatrix}$ $\quad \det(D-\lambda I) = \lambda(\lambda+0.32)$ $\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -0.32$ $\leq 0 \Rightarrow D \preceq 0$

Determinanten und Definitheit

$U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

i grade $\Rightarrow \det(U_i) \geq 0$

Definition 9.3.4 und Satz 9.3.6: Hauptunterdeterminanten

Ist A eine symmetrische $n \times n$-Matrix, dann: $\det(U_1) = a_{11}$ und

$$\det(U_i) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}, \quad i = 2, \dots, n.$$

i-te Hauptunterdeterminante

- A ist positiv definit $\Leftrightarrow \det(U_i) > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$;
- A ist negativ definit $\Leftrightarrow (-1)^i \det(U_i) > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$;
- A positiv semidefinit $\Rightarrow \det(U_i) \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$;
- A negativ semidefinit $\Rightarrow \det(U_i)(-1)^i \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Beispiele:

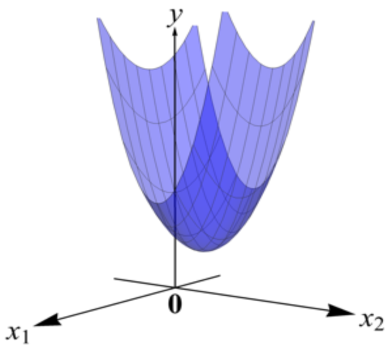
- $A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ $U_1 = 2$, $U_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ $\det(U_1) = 2,$ $\det(U_2) = 16 - 0 = 16$ positiv definit
- $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ $\det(U_1) = 2,$ > 0 für $i = 1$ $\det(U_2) = 4 - 9 = -5$ < 0 für $i = 2$ indefinit
- $D = \begin{pmatrix} -0.16 & 0.16 \\ 0.16 & -0.16 \end{pmatrix}$ $\det(U_1) = -0.16,$ < 0 negativ semidefinit oder indefinit $\det(U_2) = (-0.16)^2 - 0.16^2 = 0$ ≥ 0 bzw ≤ 0

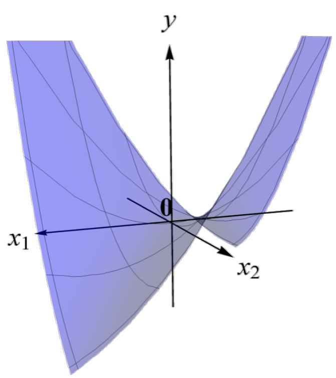
$-A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$

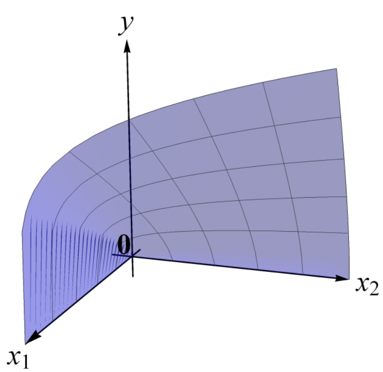
$U_1 = -2$ $\det(U_1) = -2$

$U_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ $\det(U_2) = +16$

Definitheit und zweite Richtungsableitungen







Satz 9.3.7: Definitheit und Konvexität

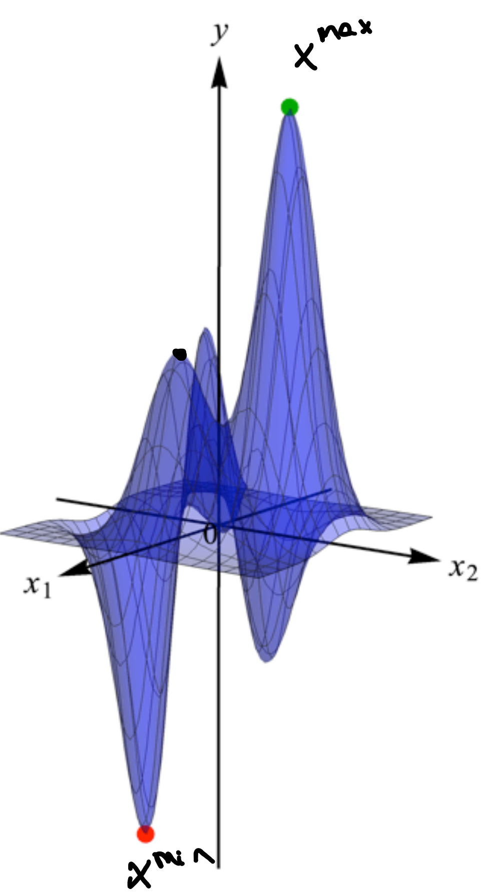
Ist $f : D \to Z$ an der Stelle $\mathbf{x}^0 \in D$ zweimal stetig partiell differenzierbar:

- $H_f(\mathbf{x}^0)$ positiv definit (>0) für alle $\mathbf{x}^0 \in D \Rightarrow f$ streng konvex;
- $H_f(\mathbf{x}^0)$ positiv semidefinit (≥ 0) für alle $\mathbf{x}^0 \in D \Leftrightarrow f$ konvex;
- $H_f(\mathbf{x}^0)$ negativ definit (<0) für alle $\mathbf{x}^0 \in D \Rightarrow f$ streng konkav;
- $H_f(\mathbf{x}^0)$ negativ semidefinit (≤ 0) für alle $\mathbf{x}^0 \in D \Leftrightarrow f$ konkav.

Beispiele:

- $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3$ mit $H_f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ für alle $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^2$
  positiv definit $\Rightarrow f$ streng konvex.
- $p(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$ mit $H_p(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ für alle $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^2$
  indefinit $\Rightarrow p$ weder konvex noch konkav.
- $u(\mathbf{x}) = x_1^{0.8}x_2^{0.2}$ mit $H_u(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} -0.16 & 0.16 \\ 0.16 & -0.16 \end{pmatrix}$ für $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
  negativ semidefinit $\Rightarrow u$ konkav.
  für alle $x^0 \in D$

Globale Extrema



Definition 9.4.1: Supremum, Infimum und globale Extrema

Sei $f : D \to Z$. Ist $f(D)$ beschränkt

- nach oben, ist $\sup_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x}) = \sup f(D)$, sonst $\sup_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x}) = +\infty$

Supremum

Infimum

- nach unten, ist $\inf_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x}) = \inf f(D)$, sonst $\inf_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x}) = -\infty$.

Gibt es ein

Globale Maximal-/ Extremalstelle

Globales Maximum/ Extremum

- $\mathbf{x}^{\max} \in D$ mit $f(\mathbf{x}^{\max}) \geq f(\mathbf{x})\ \forall \mathbf{x} \in D$, dann ist $\max_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{\max})$;
- $\mathbf{x}^{\min} \in D$ mit $f(\mathbf{x}^{\min}) \leq f(\mathbf{x})\ \forall \mathbf{x} \in D$, dann ist $\min_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{\min})$.

Globale Minimal-/ Extremalstelle

Globales Minimum/ Extremum

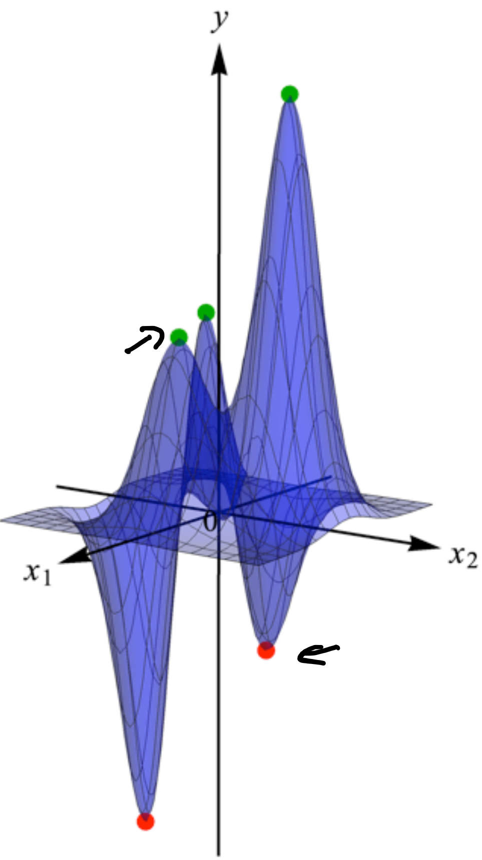
Die Menge aller globalen Maximal- bzw. Minimalstellen ist
$\arg\max_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$ bzw. $\arg\min_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$.

Satz 9.4.3: Min-Max Dualität

Existiert das globale Maximum bzw. Minimum von f, so gilt

$$\min_{\mathbf{x}\in D}(-f(\mathbf{x})) = -\max_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x}) \quad \text{bzw.} \quad \max_{\mathbf{x}\in D}(-f(\mathbf{x})) = -\min_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x}).$$

Lokale Extrema



Definition 9.4.2: Lokale Extrema und Extremalstellen

Lokale Maximalstelle

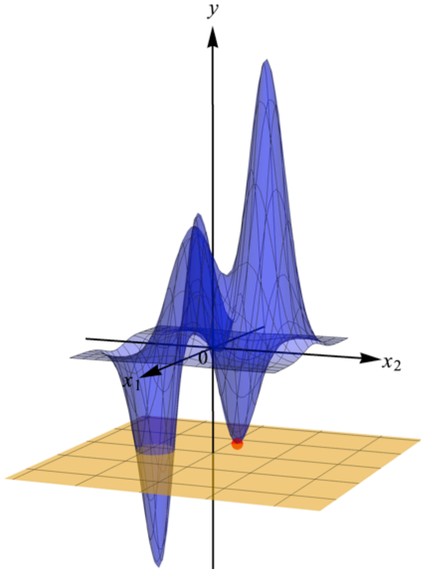
$f : D \to Z$ hat in $\mathbf{x}^0 \in D$ ein lokales Maximum $f(\mathbf{x}^0)$, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $f(\mathbf{x}^0) \geq f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}^0, \varepsilon) \cap D$.

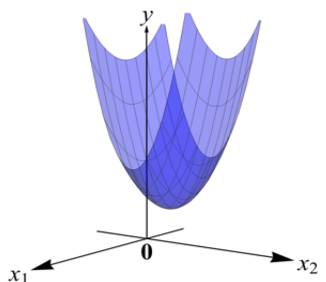
Lokale Minimalstelle

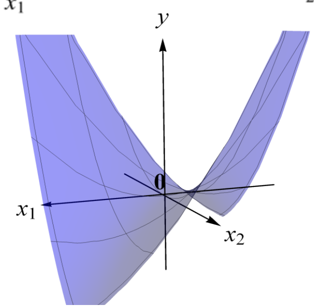
$f : D \to Z$ hat in $\mathbf{x}^0 \in D$ ein lokales Minimum $f(\mathbf{x}^0)$, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $f(\mathbf{x}^0) \leq f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}^0, \varepsilon) \cap D$.

Ein lokales Extremum ist ein lokales Maximum oder Minimum, eine lokale Extremalstelle ist eine lokale Minimal- oder Maximalstelle.

Notwendiges Kriterium 1. Ordnung







Satz 9.4.1: Notwendiges Kriterium erster Ordnung (Fermat)

Ist D offen und $f: D \to Z$ stetig partiell differenzierbar, dann gilt:
$\mathbf{x}^0 \in D$ lokale Extremalstelle $\Rightarrow \nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$.

Definition 9.4.3: Stationäre Stelle

Gilt $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$, nennt man $\mathbf{x}^0$ eine stationäre Stelle.

Beispiele:

- $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 3$

  $f_{x_1}(\vec{x}) = 2x_1$
  $f_{x_2}(\vec{x}) = 8(x_2 - 1)$

  $$\nabla f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 2x_1^0 \\ 8(x_2^0 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

  $2x_1^0 = 0 \Rightarrow x_1^0 = 0$
  $8(x_2^0 - 1) = 0 \Rightarrow x_2^0 = 1$

  $\Rightarrow$ Stationäre Stelle $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

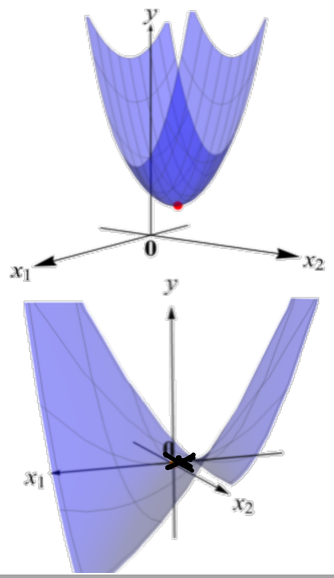
- $p(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$

  $$\nabla p(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 2x_1^0 - 3x_2^0 \\ 2x_2^0 - 3x_1^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  $\Rightarrow$ Stationäre Stelle $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$

Hinreichende Kriterien 2. Ordnung

Positiv definit ➔ Min
Positiv semi-definite Matrizen
Indefinit ➔ Sattelpunkt
Negativ semi-definite Matrizen
Negativ definit ➔ Max



Definition 9.4.4: Sattelpunkt

Ist $\mathbf{x}^0$ eine stationäre Stelle, an der kein lokales Extremum vorliegt, dann spricht man von einem Sattelpunkt an der Stelle $\mathbf{x}^0$.

Satz 9.4.2: Hinreichende Kriterien 2. Ordnung

Ist D offen, $f : D \to Z$ zweimal stetig partiell differenzierbar, $\mathbf{x}^0 \in D$ und $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$, dann gilt:

- $H(\mathbf{x}^0)$ positiv definit $\Rightarrow$ f hat in $\mathbf{x}^0$ ein lokales Minimum;
- $H(\mathbf{x}^0)$ negativ definit $\Rightarrow$ f hat in $\mathbf{x}^0$ ein lokales Maximum;
- $H(\mathbf{x}^0)$ ist indefinit $\Rightarrow$ f hat in $\mathbf{x}^0$ einen Sattelpunkt.

Beispiele:

- $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3, \quad \nabla f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \mathbf{0}$

  $H_f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}$ positiv definit $\Rightarrow$ lokales Minimum ✓
- $p(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2, \quad \nabla p\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \mathbf{0}$

  $H_p\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -3\\-3 & 2\end{pmatrix}$ indefinit $\Rightarrow$ Sattelpunkt ✓

Notwendige Kriterien 2. Ordnung

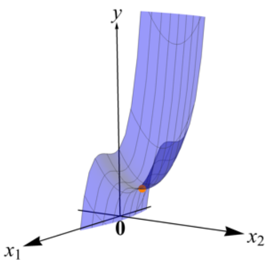
Positiv definit → Min

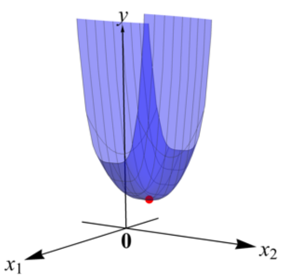
Positiv semi-definit → Min oder Sattelpunkt*

Indefinit → Sattelpunkt

Negativ semi-definit → Max oder Sattelpunkt*

Negativ definit → Max





Satz 9.4.5: Notwendige Kriterien 2. Ordnung

Ist D offen, $f : D \to Z$ zweimal stetig partiell differenzierbar, $\mathbf{x}^0 \in D$ und $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$, dann gilt:

- $\mathbf{x}^0$ lokale Minimalstelle $\Rightarrow H_f(\mathbf{x}^0)$ positiv semidefinit.
- $\mathbf{x}^0$ lokale Maximalstelle $\Rightarrow H_f(\mathbf{x}^0)$ negativ semidefinit.

Beispiele:

- $\tilde{f}(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2-1)^3 + 3$

$$\nabla \tilde{f}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 2x_1^0 \\ 12(x_2^0-1)^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \text{Stationäre Stelle } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H_{\tilde{f}}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 24(x_2^0-1) \end{pmatrix}, \quad H_{\tilde{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ positiv semidefinit } \Rightarrow ?$$

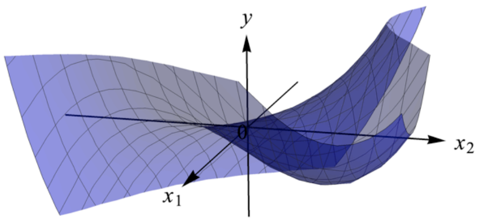
- $\hat{f}(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2-1)^4 + 3$

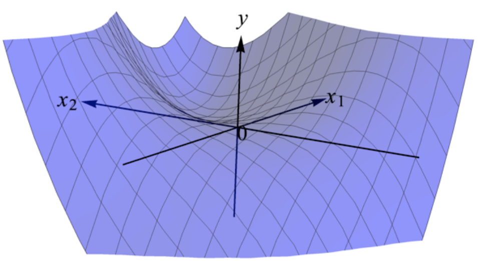
$$\nabla \hat{f}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 2x_1^0 \\ 16(x_2^0-1)^3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \text{Stationäre Stelle } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

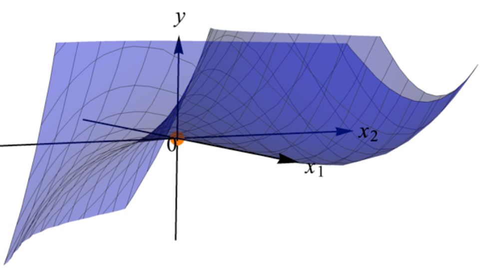
$$H_{\hat{f}}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 48(x_2^0-1)^2 \end{pmatrix}, H_{\hat{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ positiv semidefinit } \Rightarrow ?$$

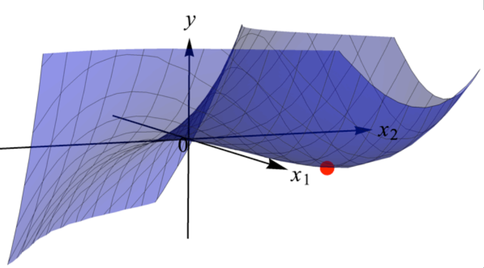
* Ist $H_f(\mathbf{x}^0)$=Nullmatrix, kann max, min oder Sattelpunkt vorliegen

Beispiel einer Funktion mit zwei stationären Stellen









Beispiel:

- $q(\mathbf{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$

$$\nabla q(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 3(x_1^0)^2 - 3x_2^0 \\ 3(x_2^0)^2 - 3x_1^0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Stationäre Stellen } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H_q(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 6x_1^0 & -3 \\ -3 & 6x_2^0 \end{pmatrix}$$

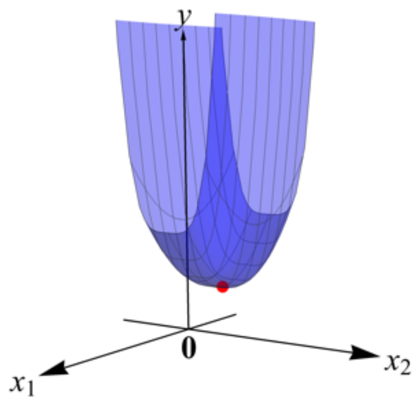
An der Stelle $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $H_q\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

indefinit $\Rightarrow$ Sattelpunkt an der Stelle $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

An der Stelle $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $H_q\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

positiv definit $\Rightarrow$ Minimum an der Stelle $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Globale Extrema konvexer Funktionen



Satz 9.4.6: Globale Extrema konvexer und konkaver Funktionen

Ist D offen, konvex und $f : D \to Z$ stetig partiell differenzierbar:

- Ist f konvex, gilt: $\mathbf{x}^0 \in D$ globale Minimalstelle $\Leftrightarrow \nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$;
- Ist f konkav, gilt: $\mathbf{x}^0 \in D$ globale Maximalstelle $\Leftrightarrow \nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$.

Beispiel:

- $\hat{f}(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2 - 1)^4 + 3$

$$\nabla \hat{f}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 2x_1^0 \\ 16(x_2^0 - 1)^3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \text{Stationäre Stelle } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H_{\hat{f}}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 48(x_2^0 - 1)^2 \end{pmatrix}$$

Für alle $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\det(H_{\hat{f}}(\mathbf{x}^0) - \lambda I) = (2 - \lambda)(48(x_2^0 - 1)^2 - \lambda)$

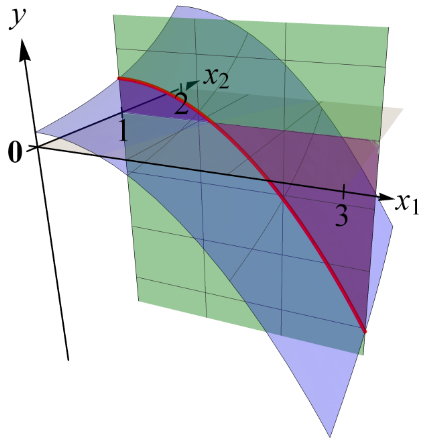
$$\Rightarrow \lambda_1 = 2 > 0,\ \lambda_2 = 48(x_2^0 - 1)^2 \geq 0$$

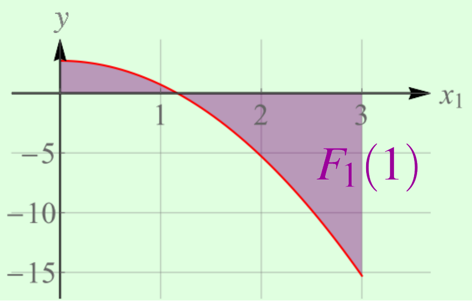
$\Rightarrow$ Hesse-Matrix positiv semidefinit, $\mathbf{r}^T H_{\hat{f}}(\mathbf{x}^0)\mathbf{r} \geq 0$, für alle $\mathbf{x}^0$

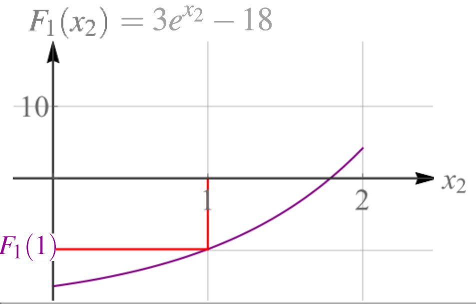
$\Rightarrow \hat{f}$ konvex

$\Rightarrow$ Stationäre Stelle ist globale Minimalstelle

Doppelintegrale







Definition 9.5.1: Parameterintegrale

Sei $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ stetig,

$$F_1(x_2) = \int_{a_1}^{b_1} f(\mathbf{x})dx_1, \qquad F_2(x_1) = \int_{a_2}^{b_2} f(\mathbf{x})dx_2.$$

(Parameter-)Integral von f über x_1 (für festes x_2)

(Parameter-)Integral von f über x_2 (für festes x_1)

Beispiel:

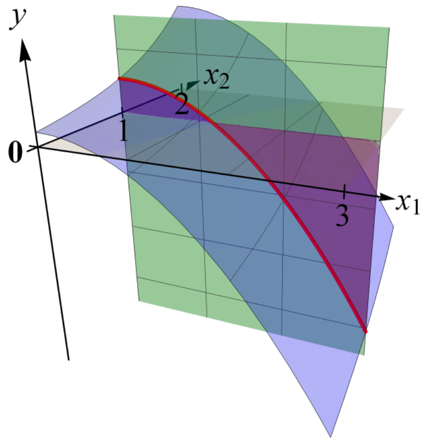
- $f : [0,3] \times [0,2] \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = -2x_1^2 + e^{x_2}$

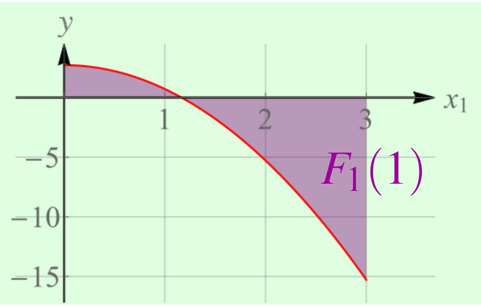
$$F_1(x_2) = \int_0^3 -2x_1^2 + e^{x_2} dx_1$$

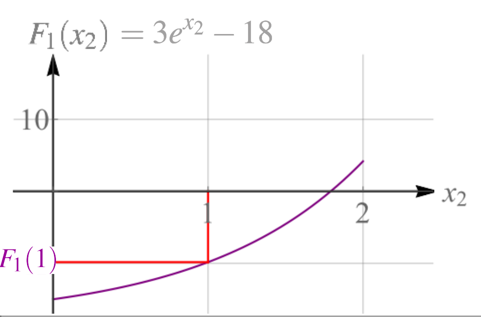
$$= \left[\frac{-2}{3}x_1^3 + x_1 e^{x_2}\right]_0^3$$

$$= -18 + 3e^{x_2} - 0 = 3e^{x_2} - 18.$$

Doppelintegrale







Definition 9.5.2 und Satz 9.5.1: Doppelintegrale

Sei $f : [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \to \mathbb{R}$ stetig,

$$\int_{a_2}^{b_2} F_1(x_2)dx_2 = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(\mathbf{x})dx_1 \right) dx_2 =$$

$$\int_{a_1}^{b_1} F_2(x_1)dx_1 = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(\mathbf{x})dx_2 \right) dx_1$$

Doppelintegral der Funktion f über $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$

Beispiel:

- $f : [0,3] \times [0,2] \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = -2x_1^2 + e^{x_2}$

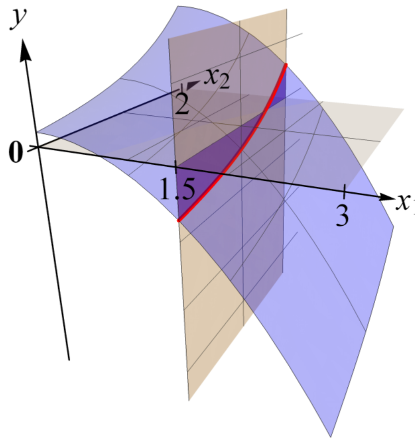
$$\int_0^2 \underbrace{\int_0^3 (-2x_1^2 + e^{x_2})dx_1}_{F_1(x_2)} \, dx_2$$

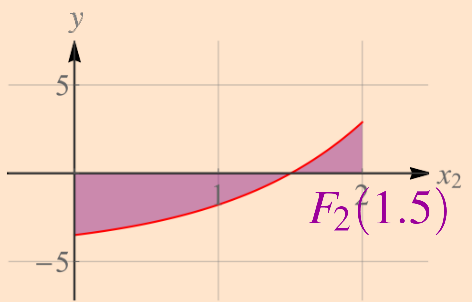
$$= \int_0^2 (3e^{x_2} - 18)dx_2$$

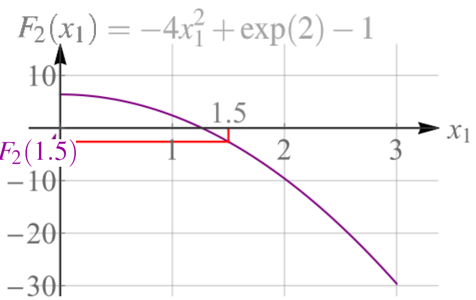
$$= [3e^{x_2} - 18x_2]_0^2$$

$$= 3e^2 - 18 \cdot 2 - 3e^0 + 0 = 3e^2 - 39$$

Doppelintegrale







Beispiel:

- $f : [0,3] \times [0,2] \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = -2x_1^2 + e^{x_2}$

$$F_2(x_1) = \int_0^2 -2x_1^2 + e^{x_2} dx_2 \qquad = \left[-2x_1^2 x_2 + e^{x_2}\right]_0^2$$

$$= -2x_1^2 \cdot 2 + e^2 - 1 = -4x_1^2 + e^2 - 1$$

$$\int_0^3 \int_0^2 (-2x_1^2 + e^{x_2}) dx_2 \; dx_1$$

$$= \int_0^3 (-4x_1^2 + e^2 - 1) dx_1 = \left[-4\frac{x_1^3}{3} + x_1 e^2 - x_1\right]_0^3$$

$$= -4\frac{3^3}{3} + 3e^2 - 3 + 4\frac{0^3}{3} - 0e^2 + 0$$

$$= 3e^2 - 39$$

$$= \int_0^2 \int_0^3 (-2x_1^2 + e^{x_2}) dx_1 \; dx_2$$

Ein (unvollständiger) Rückblick

- Eine reelle Funktion $f : D \to Z$ in n Variablen bildet $D \subseteq \mathbb{R}^n$ auf $f(D) \subseteq Z \subseteq \mathbb{R}$ ab.
- Der Gradient einer partiell differenzierbaren Funktion f an der Stelle $\mathbf{x}^0$ ist ein Spaltenvektor, welcher alle partiellen Ableitungen an der Stelle enthält. Ist f zweimal partiell differenzierbar, ist die Hesse-Matrix an der Stelle $\mathbf{x}^0$ die Matrix aller zweiten partiellen Ableitungen.
- Ob eine symmetrische Matrix A positiv oder negativ (semi-)definit ist, kann mithilfe des Vorzeichens von $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, mithilfe der Eigenwerte von A und ggf. mithilfe der Hauptunterdeterminanten entschieden werden.
- Ist die Hesse-Matrix an allen Stellen des Definitionsbereichs positiv bzw. negativ semidefinit, ist die Funktion f konvex bzw. konkav.
- An einer stationäre Stelle $\mathbf{x}^0$ gilt $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$. Ist $f : D \to Z$ stetig partiell differenzierbar mit $D \subseteq R^n$ offen, dann ist jedes lokale Extremum eine stationäre Stelle.
- Ist f zweimal stetig partiell differenzierbar auf einem offenen Definitionsbereich D, und ist die Hesse-Matrix an einer stationären Stelle positiv bzw. negativ definit, so befindet sich an der stationären Stelle ein lokales Minimum bzw. Maximum.