Aufgabe 1 (Vertikalschnitt und Richtungsableitung)

Betrachten Sie die quadratische Funktion $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Sei zudem $\mathbf{x}^0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$ und $\mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^T$.

(a) Bestimmen Sie die Höhenlinien von f zu den Niveaus $y = 1, 2, 4$ und zeichnen Sie diese in ein 2-dimensionales Koordinatensystem ein.

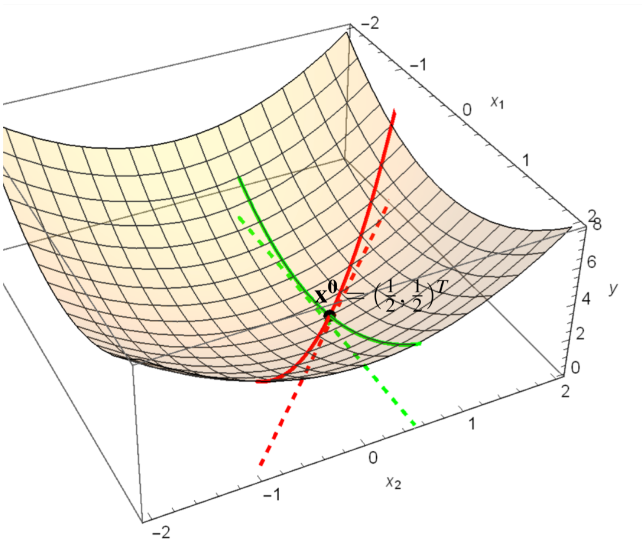
(b) Bestimmen Sie

(i) den Vertikalschnitt $f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{r})$ durch $\mathbf{x}^0$ in Richtung $\mathbf{r}$,

(ii) den Vertikalschnitt $f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{e}^1}(t) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}^1)$ durch $\mathbf{x}^0$ in Richtung $\mathbf{e}^1 = (1, 0)^T$.

(c) Veranschaulichen Sie sich die folgenden Ausdrücke in folgendem Schaubild und berechnen Sie Ihren Wert.

Abbildung 1.1



(i) Die Richtungsableitung $f'_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0)$.

(ii) Die Richtungsableitung $f'_{\mathbf{e}^1}(\mathbf{x}^0)$.

(iii) Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0)$.

(d) Berechnen Sie $\frac{\nabla f(\mathbf{x}^0)}{||\nabla f(\mathbf{x}^0)||}$.

(e) Sei nun $\tilde{\mathbf{r}} = \left(r_1, \sqrt{(1 - r_1^2)}\right)^T$ mit $-1 \leq r_1 \leq 1$.

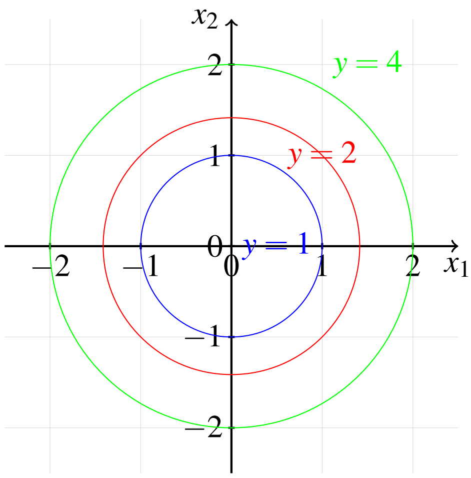
(i) Bestimmen Sie den Vertikalschnitt von f durch $\mathbf{x}^0$ in Richtung $\tilde{\mathbf{r}}$.

(ii) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $f'_{\tilde{\mathbf{r}}}(\mathbf{x}^0)$.

(iii) Bestimmen Sie r_1 so, dass die Richtungsableitung $f'_{\tilde{\mathbf{r}}}(\mathbf{x}^0)$ maximal wird. Vergleichen Sie die so erhaltene Richtung mit $\frac{\nabla f(\mathbf{x}^0)}{||\nabla f(\mathbf{x}^0)||}$.

Lösung:

(a) Die Höhenlinien haben die Form $x_1^2 + x_2^2 = y$, vgl. Definition 9.1.3 aus Serie 9. Es sind Kreise um den Nullpunkt mit Radius $\sqrt{y}$.



(b) Nach Definition 9.1.4 aus Serie 10 ist

(i)

$$f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{r}) = f\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} t, \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} t\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} t\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} t\right)^2,$$

(ii)

$$f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{e}^1}(t) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}^1) = f\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2} + t, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + t\right)^2 + \frac{1}{4}.$$

(c) (i)

Definition 9.2.9 - Die Richtungsableitung
Es sei $\mathbf{x}^0 \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung und $f : D \to Z$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion. Dann heisst

$$f'_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0) = f'_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(0) = \frac{d f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt}(0)$$

(erste) Richtungsableitung von f in Richtung $\mathbf{r}$ an der Stelle $\mathbf{x}^0$.

Es gilt

$$\frac{d f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt}(t) = \sqrt{2}\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) - \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{\sqrt{2}}\right) = 2t.$$

Die Richtungsableitung von f in Richtung $\mathbf{r}$ an der Stelle $\mathbf{x}^0$ ist also

$$f'_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0) = \frac{d f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt}(0) = 0.$$

Der Vertikalschnitt von f durch $\mathbf{x}^0$ in Richtung $\mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T$ ist rot eingezeichnet. Die Richtungsableitung $f'_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0)$ entspricht der Steigung der roten Kurve an der Stelle $\mathbf{x}^0$, also der Steigung des Vertikalschnittes von f durch $\mathbf{x}^0$ in Richtung $\mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T$ für $t = 0$.

(ii) Es gilt

$$\frac{df_{\mathbf{x}^0,\mathbf{e}^1}}{dt}(t) = 2\Big(\frac{1}{2}+t\Big)+0 = 1+2t.$$

Die Richtungsableitung von f in Richtung $\mathbf{e}^1$ an der Stelle $\mathbf{x}^0$ ist also

$$f'_{\mathbf{e}^1}(\mathbf{x}^0) = \frac{df_{\mathbf{x}^0,\mathbf{e}^1}}{dt}(0) = 1.$$

Der Vertikalschnitt von f durch $\mathbf{x}^0$ in Richtung $\mathbf{e}^1 = (1,0)^T$ ist grün eingezeichnet. Die Richtungsableitung $f'_{\mathbf{e}^1}(\mathbf{x}^0)$ entspricht der Steigung der grünen Kurve an der Stelle $\mathbf{x}^0$, also der Steigung des Vertikalschnittes von f durch $\mathbf{x}^0$ in Richtung $\mathbf{e}^1 = (1,0)^T$ für $t = 0$.

(iii) Die partielle Ableitung von f nach x_1 ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) = \frac{\partial(x_1^2+x_2^2)}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) = 2x_1^0 = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

Will man an der Stelle $\mathbf{x}^0$ eine Tangente an den Vertikalschnitt in Richtung der x_1-Achse, also in Richtung $\mathbf{e}^1$ durch $\mathbf{0}$, legen, hat diese Tangente eine Steigung, die der partiellen Ableitung nach x_1 an dieser Stelle entspricht. Die Steigung dieser Tangente ist somit $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0)$.

(d) Es gilt

$$\nabla f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1^0 \\ 2x_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und $||\nabla f(\mathbf{x}^0)|| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Somit ist

$$\frac{\nabla f(\mathbf{x}^0)}{||\nabla f(\mathbf{x}^0)||} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(e) (i) Nach Definition 9.1.4 aus Serie 10 ist

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{x}^0,\tilde{\mathbf{r}}}(t) = f(\mathbf{x}^0+t\tilde{\mathbf{r}}) = f\Big(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r_1 \\ \sqrt{1-r_1^2} \end{pmatrix}\Big) &= f\Big(\frac{1}{2}+tr_1, \frac{1}{2}+t\sqrt{1-r_1^2}\Big) \\ &= \Big(\frac{1}{2}+tr_1\Big)^2 + \Big(\frac{1}{2}+t\sqrt{1-r_1^2}\Big)^2. \end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$\frac{df_{\mathbf{x}^0,\tilde{\mathbf{r}}}}{dt}(t) = 2\Big(\frac{1}{2}+tr_1\Big)r_1 + 2\Big(\frac{1}{2}+t\sqrt{1-r_1^2}\Big)\sqrt{1-r_1^2}.$$

Nach Definition 9.2.9 ist also die Richtungsableitung von f in Richtung $\tilde{\mathbf{r}}$ an der Stelle $\mathbf{x}^0$ gegeben durch

$$f'_{\tilde{\mathbf{r}}}(\mathbf{x}^0) = \frac{df_{\mathbf{x}^0,\tilde{\mathbf{r}}}}{dt}(0) = \sqrt{1-r_1^2}+r_1.$$

(iii) Aus Teilaufgabe (ii) wissen wir bereits, dass $f'_{\tilde{\mathbf{r}}}(\mathbf{x}^0) = \sqrt{1-r_1^2}+r_1$. Bezeichnen wir $g(r_1) = \sqrt{1-r_1^2}+r_1$. Wir bestimmen also r_1 so, dass g maximal wird:
Es gilt
$$g'(r_1) = 1 - \frac{r_1}{(1-r_1^2)^{\frac{1}{2}}}.$$
Setzen wir die erste Ableitung gleich 0, so erhalten wir
$$g'(r_1) = 1 - \frac{r_1}{(1-r_1)^{\frac{1}{2}}} = 0 \iff \frac{r_1}{(1-r_1^2)^{\frac{1}{2}}} = 1 \iff r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$
Zudem gilt
$$g''(r_1) = -\frac{1}{(1-r_1^2)^{3/2}} < 0 \text{ für alle } r_1 \in (-1,1).$$
Wie wir aus Kapitel 5 wissen, ist g somit konkav und hat in $r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ein globales Maximum. Mit $r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist $\tilde{\mathbf{r}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$ und entspricht genau $\frac{\nabla f(\mathbf{x}^0)}{||\nabla f(\mathbf{x}^0)||}$.

Aufgabe 2 (Richtungsableitung und Tangentialebene)

Um den Zusammenhang zwischen dem Absatz eines Produkts und den für zwei Medien eingesetzten Werbebudgets x_1 und x_2 zu analysieren, ist der Absatz eines Produkts in Abhängigkeit des Werbebudgets $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ durch folgende Funktion gegeben:
$$f(x_1,x_2) = 10\sqrt{x_1} + 20\ln(x_2+1) + 50, \quad \mathbf{x} \in [0,\infty) \times [0,\infty).$$

(a) Aktuell ist das Werbebudget $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)^T = (100,100)^T$.
  (i) Welchen Wert hat der Absatz?
  (ii) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von f an der Stelle $\mathbf{x}^0$. Wie wirkt sich eine kleine Erhöhung von x_1^0 auf den Absatz aus? Wie wirkt sich eine kleine Erhöhung von x_2^0 auf den Absatz aus?

(b) Schätzen Sie die Veränderung der Absatzwirkung mit Hilfe der Tangentialebene von f ab, wenn die Werbebudgets von $x_1 = 100$ und $x_2 = 100$ jeweils um eine Einheit ansteigen. Schätzen Sie also
$$\Delta f(101,101) = f(101,101) - f(100,100)$$
ab und runden Sie Ihr Ergebnis auf vier Nachkommastellen. Vergleichen Sie diese Abschätzung mit der exakten Veränderung der Absatzwirkung.

(c) Bestimmen Sie die Richtungsableitungen von f im Punkt $\mathbf{x}^0 = (100,100)^T$ in Richtung $\mathbf{r}^1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)^T$ und $\mathbf{r}^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)^T$.

(d) Zeigen Sie, dass die Richtung $\mathbf{r}^2$ für die Absatzwirkung günstiger als die Richtung $\mathbf{r}^1$ ist.

Lösung:

(a) (i) Der Absatz zu diesem Werbebudget ist
$$f(100,100) = 10 \cdot \sqrt{100} + 20\ln(101) + 50 = 150 + 20\ln(101).$$

(ii) Die partiellen Ableitungen von f sind

$$f_{x_1}(\mathbf{x}) = \frac{10}{2\sqrt{x_1}},\ f_{x_2}(\mathbf{x}) = \frac{20}{x_2+1}.$$

Somit sind die partiellen Ableitungen von f an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (100,100)^T$ gegeben durch

$$f_{x_1}(100,100) = \frac{10}{2\cdot\sqrt{100}} = \frac{1}{2},\ f_{x_2}(100,100) = \frac{20}{100+1} = \frac{20}{101}.$$

Ändert sich nun x_1 marginal, so entspricht die partielle Ableitung $f_{x_1}(100,100)$ der Änderungsrate der Absatzwirkung. Es gilt

$$f_{x_1}(\mathbf{x}^0) \approx \frac{f(\mathbf{x}^0+\Delta x_1)-f(\mathbf{x}^0)}{\Delta x_1}$$

und somit

$$f(\mathbf{x}^0+\Delta x_1)-f(\mathbf{x}^0) \approx f_{x_1}(\mathbf{x}^0)\Delta x_1.$$

Nach einer marginalen Erhöhung Δx_1 des Werbebudgets x_1 ist die Absatzwirkung also um

$$f(100+\Delta x_1,100)-f(100,100) \approx f_{x_1}(100,100)\Delta x_1 = \frac{\Delta x_1}{2}$$

Einheiten gestiegen.
Ändert sich x_2 marginal, so entspricht die partielle Ableitung $f_{x_2}(100,100)$ der Änderungsrate der Absatzwirkung. Es gilt

$$f_{x_2}(\mathbf{x}^0) \approx \frac{f(\mathbf{x}^0+\Delta x_2)-f(\mathbf{x}^0)}{\Delta x_2}$$

und somit

$$f(\mathbf{x}^0+\Delta x_2)-f(\mathbf{x}^0) \approx f_{x_2}(\mathbf{x}^0)\Delta x_2.$$

Nach einer marginalen Erhöhung Δx_2 des Werbebudgets x_2 ist die Absatzwirkung also um

$$f(100,100+\Delta x_2)-f(100,100) \approx f_{x_2}(100,100)\Delta x_2 = \frac{\Delta x_2\cdot 20}{101}$$

Einheiten gestiegen.

(b) In Definition 9.2.3 in Serie 10 haben wir gesehen, dass die Tangentialebene für eine reelle partiell differenzierbare Funktion $f: D \to Z$ in 2 Variablen an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)^T$ beschrieben wird durch

$$t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \nabla f(\mathbf{x}^0)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) = f(\mathbf{x}^0) + f_{x_1}(\mathbf{x}^0)(x_1-x_1^0) + f_{x_2}(\mathbf{x}^0)(x_2-x_2^0).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) =& f(100,100) + (\frac{1}{2},\frac{20}{101})(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) = 150+20\ln(101)+\frac{1}{2}(x_1-100)+\frac{20}{101}(x_2-100) \\ \implies t_{1,\mathbf{x}^0}(101,101) =& 150+20\ln(101)+\frac{1}{2}(101-100)+\frac{20}{101}(101-100) \\ =& 150+20\ln(101)+\frac{1}{2}+\frac{20}{101} \approx 243.0004 \end{aligned}$$

Nutzt man die Tangentialebene als Näherung für die Funktion, ergibt sich folgende Näherung für den Anstieg des Absatzes:

$$\Delta f(101,101) = t_{1,\mathbf{x}^0}(101,101) - f(100,100) = 150 + 20\ln(101) + \frac{1}{2} + \frac{20}{101} - 150 - 20\ln(101) \approx 0.6980.$$

Der exakte Wert ist $f(101,101) = 10\sqrt{101} + 20\ln(102) + 50 \approx 242.9982$ und daher ist die exakte Veränderung

$$\Delta f(101,101) = f(101,101) - f(100,100) = 10\sqrt{101} + 20\ln(102) + 50 - 150 - 20\ln(101) \approx 0.6958.$$

Wir sehen, dass sich die Abschätzung mit Hilfe der Tangentialebene erst ab der 3. Nachkommastelle von der exakten Differenz unterscheidet.

(c) Wir können die Richtungsableitung über den Vertikalschnitt bestimmen oder den Satz 9.2.5 anwenden. Dort heisst es:

> **Satz 9.2.5 - Berechnung der Richtungsableitung**
> Ist $f : D \to Z$ eine stetig partiell differenzierbare reelle Funktion in n Variablen, $\mathbf{x}^0 \in D$ und $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung, dann gilt
> $$f'_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0) = f'_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(0) = \nabla f(\mathbf{x}^0)^T \mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}^0) r_i.$$

Da wir die partiellen Ableitungen bereits berechnet haben, bietet es sich an, die Richtungsableitung mit Hilfe des Gradienten zu bestimmen:

<u>Für $\mathbf{r}^1$</u> : $f'_{\mathbf{r}^1}(100,100) \quad = \nabla f(100,100)^T \mathbf{r}^1 = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{20}{101}) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = 0.4$

<u>Für $\mathbf{r}^2$</u> : $f'_{\mathbf{r}^2}(100,100) \quad = \nabla f(100,100)^T \mathbf{r}^2 = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{20}{101}) \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = 0.54$

(d) Bei $\mathbf{r}^1$ erhöhen wir also x_2 um zweimal so viele Einheiten wie x_1. Somit erhalten wir eine Approximation für die Veränderung des Budgets,

$$f(100 + \Delta x_1, 100 + 2 \cdot \Delta x_1) - f(100,100) \approx \Delta x_1 \cdot 0.4.$$

Bei $\mathbf{r}^2$ erhöhen wir x_1 um zweimal so viele Einheiten wie x_2. Somit erhalten wir eine Approximation für die Veränderung des Budgets,

$$f(100 + 2 \cdot \Delta x_1, 100 + \Delta x_1) - f(100,100) \approx \Delta x_1 \cdot 0.54.$$

Da die Änderungsrate des Absatzes bei Veränderung des Budgets in Richtung $\mathbf{r}^2$ grösser ist, als bei einer Veränderung des Budgets in Richtung $\mathbf{r}^1$, ist die Richtung $\mathbf{r}^2$ günstiger für die Absatzwirkung als die Richtung $\mathbf{r}^1$. Dies hätten wir auch mit dem Resultat aus (a) erwartet.

<u>**Aufgabe 3**</u> (Vertikalschnitte und Richtungsableitungen)

Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(\mathbf{x}) = (1 + x_2) x_1^2$.

(a) Bilden Sie die Vertikalschnitte von g durch die Stelle $\mathbf{x}^0 = (1,0)^T$ in Richtung der Einheitsvektoren $\mathbf{e}^1$ und $\mathbf{e}^2$ und in Richtung der Diagonalen $\mathbf{r}^d = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$.

(b) Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen an der Stelle $t = 0$ der in (a) gebildeten Vertikalschnitte.

(c) Berechnen Sie den Gradienten sowie die Hessenmatrix von g an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (1,0)^T$.

(d) Berechnen Sie die ersten beiden Richtungsableitungen an der Stelle $\mathbf{x}^0 = (1,0)^T$ in Richtung $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$ und $\mathbf{r}^d$ mit Hilfe der Hessematrix.

(e) Ist $g(\mathbf{x})$ in den Richtungen $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2$ und $\mathbf{r}^d$ monoton steigend?

Lösung:

(a) Nach Definition 9.1.4 aus Serie 10 ist

$$\begin{aligned}
g_{\mathbf{x}^0,\mathbf{e}^1}(t) =& g(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}^1) = g\Big(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\Big) = (1+t)^2,\\
g_{\mathbf{x}^0,\mathbf{e}^2}(t) =& g(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}^2) = g\Big(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\Big) = (1+t),\\
g_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}^d}(t) =& g\Big(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{r}^d\Big) = g(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{t}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Big) = (1+\frac{t}{\sqrt{2}})\Big(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\Big)^2 = \Big(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\Big)^3.
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{array}{rlcl}
\frac{dg_{\mathbf{x}^0,\mathbf{e}^1}}{dt}(t) = & 2(1+t) & \Longrightarrow & g'_{\mathbf{e}^1}(\mathbf{x}^0) = \frac{dg_{\mathbf{x}^0,\mathbf{e}^1}}{dt}(0) = 2,\\
\frac{dg_{\mathbf{x}^0,\mathbf{e}^2}}{dt}(t) = & 1 & \Longrightarrow & g'_{\mathbf{e}^2}(\mathbf{x}^0) = \frac{dg_{\mathbf{x}^0,\mathbf{e}^2}}{dt}(0) = 1,\\
\frac{dg_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}^d}}{dt}(t) = & \frac{3}{\sqrt{2}}(1+\frac{t}{\sqrt{2}})^2 & \Longrightarrow & g'_{\mathbf{r}^d}(\mathbf{x}^0) = \frac{dg_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}^d}}{dt}(0) = \frac{3}{\sqrt{2}},\\
\frac{d^2g_{\mathbf{x}^0,\mathbf{e}^1}}{dt^2}(t) = & 2 & \Longrightarrow & g''_{\mathbf{e}^1}(\mathbf{x}^0) = \frac{d^2g_{\mathbf{x}^0,\mathbf{e}^1}}{dt^2}(0) = 2,\\
\frac{d^2g_{\mathbf{x}^0,\mathbf{e}^2}}{dt^2}(t) = & 0 & \Longrightarrow & g''_{\mathbf{e}^1}(\mathbf{x}^0) = \frac{d^2g_{\mathbf{x}^0,\mathbf{e}^2}}{dt^2}(0) = 0,\\
\frac{d^2g_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}^d}}{dt^2}(t) = & 3(1+\frac{t}{\sqrt{2}}) & \Longrightarrow & g''_{\mathbf{r}^d}(\mathbf{x}^0) = \frac{d^2g_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}^d}}{dt^2}(0) = 3.
\end{array}$$

(c)

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_{x_1}(\mathbf{x}) \\ g_{x_2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1+x_2)x_1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \nabla g(1,0) = \begin{pmatrix} 2\\1 \end{pmatrix}$$

$$H_g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 g(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 g(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 g(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1+x_2) & 2x_1 \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow H_g(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Mit Hilfe von Satz 9.2.5 aus Aufgabe 2 können wir die ersten Richtungsableitungen berechnen:

$$\begin{aligned}
g'_{\mathbf{e}^1}(\mathbf{x}^0) =& \nabla g(\mathbf{x}^0)^T \mathbf{e}^1 = (2,1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 2,\\
g'_{\mathbf{e}^2}(\mathbf{x}^0) =& \nabla g(\mathbf{x}^0)^T \mathbf{e}^2 = (2,1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1,\\
g'_{\mathbf{r}^d}(\mathbf{x}^0) =& \nabla g(\mathbf{x}^0)^T \mathbf{r}^d = \frac{1}{\sqrt{2}}(2,1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(2+1) = \frac{3}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Definition 9.2.10 - Die zweite Richtungsableitung
Es sei $\mathbf{x}^0 \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Stelle und $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung. Ist $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so nennt man

$$f''_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0) = f''_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(0) = \frac{d^2 f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt^2}(0) = \mathbf{r}^T H_f(\mathbf{x}^0)\mathbf{r}$$

zweite Richtungsableitung von f (an der Stelle $\mathbf{x}^0$) in Richtung $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$.

Die zweiten Richtungsableitungen sind somit

$$\begin{aligned}
g''_{\mathbf{e}^1}(\mathbf{x}^0) =& (\mathbf{e}^1)^T H_g(\mathbf{x}^0)\mathbf{e}^1 = (1,0)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2, \\
g''_{\mathbf{e}^2}(\mathbf{x}^0) =& (\mathbf{e}^2)^T H_g(\mathbf{x}^0)\mathbf{e}^2 = (0,1)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \\
g''_{\mathbf{r}^d}(\mathbf{x}^0) =& (\mathbf{r}^d)^T H_g(\mathbf{x}^0)\mathbf{r}^d = \frac{1}{2}(1,1)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3.
\end{aligned}$$

(e) Es gilt:

Definition 9.3.1 - Monotonie
Eine reelle Funktion $f : D \to Z$ in n Variablen heisst (streng) monoton steigend in Richtung $\mathbf{r}$, wenn der Vertikalschnitt $f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t)$ von f durch $\mathbf{x}^0$ in Richtung $\mathbf{r}$ für alle $\mathbf{x}^0 \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ (streng) monoton steigend ist. Die Funktion f heisst (streng) monoton fallend in Richtung $\mathbf{r}$, wenn $f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t)$ für alle $\mathbf{x}^0 \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ (streng) monoton fallend ist.

Satz 9.3.1 - Monotoniekriterium
Ist die reelle Funktion $f : D \to Z$ in n Variablen stetig partiell differenzierbar und $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung, dann gilt:

- $f'_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0) \geq 0$ für alle $\mathbf{x}^0 \in D \Leftrightarrow f$ ist monoton steigend in Richtung $\mathbf{r}$.
- $f'_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0) > 0$ für alle $\mathbf{x}^0 \in D \Rightarrow f$ ist streng monoton steigend in Richtung $\mathbf{r}$.
- $f'_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0) \leq 0$ für alle $\mathbf{x}^0 \in D \Leftrightarrow f$ ist monoton fallend in Richtung $\mathbf{r}$.
- $f'_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0) < 0$ für alle $\mathbf{x}^0 \in D \Rightarrow f$ ist streng monoton fallend in Richtung $\mathbf{r}$.

Um zu überprüfen ob $g(\mathbf{x})$ in Richtung $\mathbf{e}^1$ monoton steigend ist, berechnen wir zuerst die Richtungsableitung in Richtung $\mathbf{e}^1$ an der Stelle $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ und überprüfen dann, ob diese Richtungableitung für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ grösser oder gleich 0 ist. Es gilt

$$g_{\mathbf{x},\mathbf{e}^1}(t) = g(x_1 + t, x_2) = (1 + x_2)(x_1 + t)^2.$$

Somit ist

$$\frac{dg_{\mathbf{x},\mathbf{e}^1}}{dt}(t) = 2(1 + x_2)(x_1 + t)$$

und deshalb

$$g'_{\mathbf{e}^1}(\mathbf{x}) = \frac{dg_{\mathbf{x},\mathbf{e}^1}}{dt}(0) = 2(1 + x_2)x_1.$$

Beispielsweise ist für $(-1,0)^T$ die Richtungsableitung $g'_{\mathbf{e}^1}(-1,0) = -2 < 0$. Somit ist $g(\mathbf{x})$ nicht monoton steigend in Richtung $\mathbf{e}^1$.
Um zu überprüfen ob $g(\mathbf{x})$ in Richtung $\mathbf{e}^2$ monoton steigend ist, berechnen wir zuerst Richtungsableitung in die Richtung $\mathbf{e}^2$ an der Stelle $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ und überprüfen dann, ob diese Richtungableitung für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ grösser oder gleich 0 ist. Es gilt

$$g_{\mathbf{x},\mathbf{e}^2}(t) = g(x_1, x_2 + t) = (1 + x_2 + t)x_1^2.$$

Somit ist

$$\frac{dg_{\mathbf{x},\mathbf{e}^2}}{dt}(t) = x_1^2$$

und deshalb

$$g'_{\mathbf{e}^2}(\mathbf{x}) = \frac{dg_{\mathbf{x},\mathbf{e}^2}}{dt}(0) = x_1^2.$$

Da $x_1^2 \geq 0$ für alle $x_1 \in \mathbb{R}$ ist $g'_{\mathbf{e}^2}(\mathbf{x}) \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ und somit $g(\mathbf{x})$ monoton steigend in Richtung $\mathbf{e}^2$.
Um zu überprüfen ob $g(\mathbf{x})$ in Richtung $\mathbf{r}^d$ monoton steigend ist, berechnen wir zuerst die Richtungsableitung in Richtung $\mathbf{r}^d$ an der Stelle $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ und überprüfen dann, ob diese Richtungableitung für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ grösser oder gleich 0 ist.
Es gilt

$$g_{\mathbf{x},\mathbf{r}^d}(t) = g\Big(x_1 + \frac{t}{\sqrt{2}},\, x_2 + \frac{t}{\sqrt{2}}\Big) = \Big(1 + x_2 + \frac{t}{\sqrt{2}}\Big)\Big(x_1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\Big)^2.$$

Somit ist

$$\frac{dg_{\mathbf{x},\mathbf{r}^d}}{dt}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(x_1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\Big)^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}\Big(1 + x_2 + \frac{t}{\sqrt{2}}\Big)\Big(x_1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\Big)$$

und deshalb

$$g'_{\mathbf{r}^d}(\mathbf{x}) = \frac{dg_{\mathbf{x},\mathbf{r}^d}}{dt}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}\Big(1 + x_2\Big)x_1.$$

Beispielsweise ist für $(-1,0)^T$ die Richtungsableitung $g'_{\mathbf{r}^d}(-1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} < 0$. Somit ist $g(\mathbf{x})$ nicht monoton steigend in Richtung $\mathbf{r}^d$.

Aufgabe 4 (Definitheit einer Matrix)

Untersuchen Sie folgende Matrizen auf ihre Definitheit.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Lösung:

Definition 9.3.3 - Definitheit von Matrizen
Sei A eine symmetrische $n \times n$-Matrix. A heisst

- **positiv semidefinit**, $A \succcurlyeq 0$, wenn $\mathbf{r}^T A\mathbf{r} \geq 0$ für alle $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$;
- **positiv definit**, $A \succ 0$, wenn $\mathbf{r}^T A\mathbf{r} > 0$ für alle $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$;
- **negativ semidefinit**, $A \preccurlyeq 0$, wenn $\mathbf{r}^T A\mathbf{r} \leq 0$ für alle $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$;
- **negativ definit**, $A \prec 0$, wenn $\mathbf{r}^T A\mathbf{r} < 0$ für alle $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$;
- **indefinit**, wenn A weder positiv definit, positiv semidefinit, negativ definit, noch negativ semidefinit ist.

Satz 9.3.5 - Eigenwerte positiv definiter Matrizen
Sei A eine symmetrische $n \times n$-Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Dann ist A

- positiv semidefinit genau dann, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$;
- positiv definit genau dann, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$;
- negativ semidefinit genau dann, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \leq 0$;
- negativ definit genau dann, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n < 0$;
- indefinit genau dann, wenn mindestens ein Eigenwert positiv und einer negativ ist.

Oft ist es sehr aufwendig alle Eigenwerte zu bestimmen. Man kann die Definitheit jedoch oft mit Hilfe der Hauptunterdeterminanten bestimmen.

Definition 9.3.4 - Hauptunterdeterminanten
Sei $A = (a_{ij})$ eine symmetrische $n \times n$-Matrix. Dann heisst $\det(U_1) = a_{11}$ erste Hauptunterdeterminante und für $i = 2, \dots, n$

$$\det(U_i) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}$$

die i-te Hauptunterdeterminante von A.

Satz 9.3.6 - Hauptunterdeterminantenkriterium
Sei A eine symmetrische $n \times n$-Matrix. Dann gilt:

- A ist positiv semidefinit $\Rightarrow \det(U_i) \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$;
- A ist positiv definit $\Leftrightarrow \det(U_i) > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$;
- A ist negativ semidefinit $\Rightarrow \det(U_i) \geq 0$ für alle geraden $i = 2, 4, \dots$ und $\det(U_i) \leq 0$ für alle ungeraden $i = 1, 3, \dots$, also $\det(U_i)(-1)^i \geq 0$;
- A ist negativ definit $\Leftrightarrow \det(U_i) > 0$ für alle geraden i, $i = 2, 4, \dots$ und $\det(U_i) < 0$ für alle ungeraden i, $i = 1, 3, \dots$, also $(-1)^i \det(U_i) > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$;

Oft ist die folgende Folgerung nützlich, um mit Hilfe der Hauptunterdeterminanten bestimmte Fälle ausschliessen zu können:

Folgerung: Sei A eine symmetrische $n \times n$-Matrix.

A ist **nicht** positiv definit	$\Leftarrow$	Es gibt eine $\det(U_i)$, die negativ oder Null ist.
A ist **nicht** positiv semidefinit	$\Leftarrow$	Es gibt eine $\det(U_i)$, die negativ ist.
A ist **nicht** negativ definit	$\Leftarrow$	Es gibt eine $\det(U_i)$, mit i gerade, die negativ oder Null ist; oder es gibt eine $\det(U_i)$, mit i ungerade, die positiv oder Null ist.
A ist **nicht** negativ semidefinit	$\Leftarrow$	Es gibt eine $\det(U_i)$, mit i gerade, die negativ ist, oder eine $\det(U_i)$, mit i ungerade, die positiv ist.

(a) Die Hauptunterdeterminanten der Matrix A sind

$$\det(U_1) = 1,\ \det(U_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -3,\ \det(U_3) = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 15.$$

Wir können folgende Fälle ausschliessen:
Da eine Hauptunterdeterminante negativ ist, kann A weder positiv definit noch positiv semidefinit sein. Darüber hinaus können wir wegen $\det(U_1) > 0$ (oder wegen $\det(U_2) < 0$) auch ausschliessen, dass A negativ definit oder negativ semidefinit ist. Somit ist A indefinit.

(b) Die Hauptunterdeterminanten der Matrix B sind

$$\det(U_1) = 1,\ \det(U_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,\ \det(U_3) = \det(B) = 0.$$

Wir können folgende Fälle ausschliessen:
Die Matrix B kann weder positiv noch negativ definit sein, da $\det(U_3) = 0$. Wegen $\det(U_1) > 0$, ist B nicht negativ semidefinit. Da die Hauptunterdeterminanten positiv oder Null sind, können wir mit Hilfe der Hauptunterdeterminanten nicht entscheiden, ob die Matrix positiv semidefinit oder indefinit ist, vgl. obige Folgerungen.

Wir berechnen die Eigenwerte der Matrix (z. B. mit dem Entwicklungssatz von Laplace oder mit der Regel von Sarrus):

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda) - 4(1-\lambda) - 1(1-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\left((1-\lambda)(5-\lambda) - 4 - 1\right) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5 - 5) = \lambda(1-\lambda)(\lambda - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 6.$$

Alle Eigenwerte von B sind grösser oder gleich Null, darum ist B positiv semidefinit.

(c) Die Hauptunterdeterminanten der Matrix C sind

$$\det(U_1) = 0,\ \det(U_2) = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0,\ \det(U_3) = \det(C) = -1.$$

Wir können folgende Fälle ausschliessen:
Da eine Hauptunterdeterminante negativ ist, ist C weder positiv definit noch positiv semidefinit.

Auch kann sie nicht negativ definit sein, da mindestens eine Hauptunterdeterminante Null ist. Ob sie negativ semidefinit oder indefinit ist, können wir mit Hilfe der Hauptunterdeterminanten nicht entscheiden, vgl. obige Folgerungen.

Wir berechnen die Eigenwerte der Matrix (z. B. mit dem Entwicklungssatz von Laplace oder mit der Regel von Sarrus):

$$\det(C-\lambda I)=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^4(1-\lambda)\left(-\lambda(-1-\lambda)-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-1)=0 \;\Leftrightarrow\; \left(1-\lambda=0 \;\text{ oder }\; \lambda^2+\lambda-1=0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda=1 \;\text{ oder }\; \lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1=1,\; \lambda_2=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})<0,\; \lambda_3=-\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})>0.$$

Die Matrix C hat sowohl positive, als auch negative Eigenwerte. Somit ist C indefinit.

Aufgabe 5 (Konvexität)

Bestimmen Sie jeweils die Hesse-Matrix der folgenden Funktionen an Stellen $\mathbf{x}^0$ ihres Definitionsbereichs und überprüfen Sie die Funktionen auf Konvexität.

(a) $f:(0,\infty)\times(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x})=-\sqrt{x_1x_2}+\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2$,

(b) $g:(0,\infty)\times(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ mit $g(\mathbf{x})=\ln(2x_1+x_2)$,

(c) $p:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ mit $p(\mathbf{x})=x_1^4+x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2-x_1-x_2$,

(d) $q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $q(\mathbf{x})=(1+x_2)x_1^2$.

Lösung:

Um die Funktionen auf Konvexität zu überprüfen, können wir den folgenden Satz anwenden:

Satz 9.3.7 - Definitheit und Konvexität
Sei $D\subseteq\mathbb{R}^n$ eine offene, konvexe Menge, $f:D\to Z$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion in n Variablen und $H_f(\mathbf{x}^0)$ die Hesse-Matrix von f an der Stelle $\mathbf{x}^0\in D$. Dann gilt:

- $H_f(\mathbf{x}^0)$ ist positiv semidefinit für alle $\mathbf{x}^0\in D \Leftrightarrow f$ ist konvex;
- $H_f(\mathbf{x}^0)$ ist positiv definit für alle $\mathbf{x}^0\in D \Rightarrow f$ ist streng konvex;
- $H_f(\mathbf{x}^0)$ ist negativ semidefinit für alle $\mathbf{x}^0\in D \Leftrightarrow f$ ist konkav;
- $H_f(\mathbf{x}^0)$ ist negativ definit für alle $\mathbf{x}^0\in D \Rightarrow f$ ist streng konkav.

(a) Hier ist $D_f=(0,\infty)\times(0,\infty)$. Die Hesse-Matrix dieser Funktion an einer beliebigen Stelle $\mathbf{x}^0\in D_f$

haben wir bereits in Aufgabe 9 in Serie 10 berechnet. Sie ist gegeben durch

$$H_f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{x}^0) & f_{x_1x_2}(\mathbf{x}^0) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{x}^0) & f_{x_2x_2}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x_2^0}{(x_1^0)^3}}+1 & -\frac{1}{4\sqrt{x_1^0x_2^0}} \\ -\frac{1}{4\sqrt{x_1^0x_2^0}} & \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x_1^0}{(x_2^0)^3}}+1 \end{pmatrix}.$$

Die Hauptunterdeterminanten der Matrix $H_f(\mathbf{x}^0)$ sind

$$\begin{aligned}
\det(U_1) = f_{x_1x_1}(\mathbf{x}^0) =& \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x_2^0}{(x_1^0)^3}}+1 > 0 \ \ \forall\, \mathbf{x}^0 \in D_f, \\
\det(U_2) = \det(H_f(\mathbf{x}^0)) =& \frac{1}{16}\left[\left(\sqrt{\frac{x_2^0}{(x_1^0)^3}}+4\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{x_1^0}{(x_2^0)^3}}+4\right) - \frac{1}{x_1^0x_2^0}\right] \\
=& \frac{1}{16}\left[\left(\frac{1}{x_1^0x_2^0}+4\sqrt{\frac{x_1^0}{(x_2^0)^3}}+4\sqrt{\frac{x_2^0}{(x_1^0)^3}}+16\right) - \frac{1}{x_1^0x_2^0}\right] \\
=& \frac{1}{16}\left[4\sqrt{\frac{x_1^0}{(x_2^0)^3}}+4\sqrt{\frac{x_2^0}{(x_1^0)^3}}+16\right] > 0 \ \ \forall\, \mathbf{x}^0 \in D_f.
\end{aligned}$$

Die beiden Hauptunterdeterminanten sind stets positiv für alle $\mathbf{x}^0 \in D_f$. Für kein $\mathbf{x}^0$ ist ihr Wert gleich 0. Somit ist $H_f(\mathbf{x}^0)$ positiv definit für alle $\mathbf{x}^0 \in D_f$, vgl. Satz 9.3.6 aus Aufgabe 4. Nach Satz 9.3.7 ist f streng konvex auf D_f.

(b) Der Definitionsbereich ist $D_g = (0,\infty)\times(0,\infty)$. Um die Hesse-Matrix zu bestimmen, berechnen wir zunächst die ersten und dann die zweiten partiellen Ableitungen,

$g_{x_1}(\mathbf{x}) = \frac{2}{2x_1+x_2} \implies g_{x_1x_1}(\mathbf{x}) = \frac{-4}{(2x_1+x_2)^2}, \qquad g_{x_1x_2}(\mathbf{x}) = g_{x_2x_1}(\mathbf{x}) = \frac{-2}{(2x_1+x_2)^2};$

$g_{x_2}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2x_1+x_2} \implies g_{x_2x_2}(\mathbf{x}) = \frac{-1}{(2x_1+x_2)^2};$

$$\implies H_g(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{-4}{(2x_1^0+x_2^0)^2} & \frac{-2}{(2x_1^0+x_2^0)^2} \\ \frac{-2}{(2x_1^0+x_2^0)^2} & \frac{-1}{(2x_1^0+x_2^0)^2} \end{pmatrix}.$$

Die Hauptunterdeterminanten der Matrix $H_g(\mathbf{x}^0)$ sind

$$\begin{aligned}
\det(U_1) = g_{x_1x_1}(\mathbf{x}^0) =& \frac{-4}{(2x_1^0+x_2^0)^2} < 0 \ \ \forall\, \mathbf{x}^0 \in D_g, \\
\det(U_2) = \det(H_g(\mathbf{x}^0)) =& \frac{4}{(2x_1^0+x_2^0)^4} - \frac{4}{(2x_1^0+x_2^0)^4} \\
=& 0 \ \ \forall\, \mathbf{x}^0 \in D_g.
\end{aligned}$$

Die erste Hauptunterdeterminante ist stets negativ, die Hesse-Matrix von g kann somit nicht positiv semidefinit sein und g ist nicht konvex. Da zusätzlich alle Hauptunterdeterminanten U_i für gerades i gleich 0 sind, $\det(U_2) = 0$ für alle $\mathbf{x}^0 \in D_g$, können wir mit Hilfe der Unterdeterminanten nicht schliessen, ob $H_g(\mathbf{x}^0)$ negativ semidefinit oder indefinit ist. Daher berechnen wir die Eigenwerte von $H_g(\mathbf{x}^0)$:

$$\begin{aligned}
\det(H_g(\mathbf{x}^0)-\lambda I) &= \frac{(-4-\lambda(2x_1^0+x_2^0)^2)(-1-\lambda(2x_1^0+x_2^0)^2)-4}{(2x_1^0+x_2^0)^4} = 0\\
&\iff (4+\lambda(2x_1^0+x_2^0)^2)(1+\lambda(2x_1^0+x_2^0)^2)-4=0\\
&\iff \lambda(2x_1^0+x_2^0)^2(5+\lambda(2x_1^0+x_2^0)^2)=0\\
&\implies \lambda_1=0,\ \lambda_2=\frac{-5}{(2x_1^0+x_2^0)^2},
\end{aligned}$$

damit ist $H_g(\mathbf{x}^0)$ negativ semidefinit, vgl. Satz 9.3.5 aus Aufgabe 4. Wir schliessen daraus, dass g konkav ist auf D_g.

(c) Der Definitionsbereich ist $D_p=\mathbb{R}^2$. Um die Hesse-Matrix zu bestimmen, berechnen wir zunächst die ersten und dann die zweiten partiellen Ableitungen,
$p_{x_1}(\mathbf{x})=4x_1^3+2x_1+2x_2-1 \implies p_{x_1x_1}(\mathbf{x})=12x_1^2+2, \qquad p_{x_1x_2}(\mathbf{x})=2=p_{x_2x_1}(\mathbf{x});$

$p_{x_2}(\mathbf{x})=2x_1+4x_2-1 \implies p_{x_2x_2}(\mathbf{x})=4;$

$$\implies H_p(\mathbf{x}^0)=\begin{pmatrix} 12(x_1^0)^2+2 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}.$$

Die Hauptunterdeterminanten der Matrix $H_p(\mathbf{x}^0)$ sind

$$\begin{aligned}
\det(U_1)=p_{x_1x_1}(\mathbf{x}^0) &= 12(x_1^0)^2+2>0 \ \ \forall\, \mathbf{x}^0\in D_p\\
\det(U_2)=\det(H_p(\mathbf{x}^0)) &= 48(x_1^0)^2+8-4\\
&= 48(x_1^0)^2+4>0 \ \ \forall\, \mathbf{x}^0\in D_p.
\end{aligned}$$

Beide Hauptunterdeterminanten sind stets positiv und nicht 0. Die Hesse-Matrix von p, $H_p(\mathbf{x}^0)$, ist positiv definit für alle $\mathbf{x}^0\in\mathbb{R}^2=D_p$, vgl. Satz 9.3.6 aus Aufgabe 4. Somit ist p streng konvex auf D_p.

(d) Der Definitionsbereich ist $D_q=\mathbb{R}^2$. Die Hesse-Matrix haben wir bereits in Aufgabe 3 berechnet,

$$H_q(\mathbf{x}^0)=\begin{pmatrix} 2(1+x_2^0) & 2x_1^0\\ 2x_1^0 & 0\end{pmatrix}.$$

Die Hauptunterdeterminanten der Matrix $H_q(\mathbf{x}^0)$ sind

$$\begin{aligned}
\det(U_1)=q_{x_1x_1}(\mathbf{x}^0) &= 2(1+x_2^0),\\
\det(U_2)=\det(H_q(\mathbf{x}^0)) &= -4(x_1^0)^2\le 0 \ \ \forall \mathbf{x}^0\in\mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Die zweite Hauptunterdeterminante ist für alle $x_1^0\neq 0$ stets negativ. Somit ist die Hesse-Matrix für $\mathbf{x}^0$ mit $x_1^0\neq 0$ nicht positiv semidefinit und $q(\mathbf{x})$ ist nicht konvex. Die Funktion q ist auch nicht konkav da beispielsweise $\det(U_1)$ sowohl positive, als auch negative Werte annehmen kann für verschiedene $\mathbf{x}^0\in D_q$.

Aufgabe 6 (Eigenwerte, konvexe Funktion)

Gegeben ist eine symmetrische 3×3-Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}, \; q_{ij} = q_{ji} \in \mathbb{R}, \;\; i,j = 1,2,3,$$

mit Eigenwerten $\lambda_1 = 0, \; \lambda_2 = 3, \; \lambda_3 = 7$.

(a) Bestimmen Sie die charakteristische Gleichung $\det(Q - \lambda I) = 0$ von Q.

(b) Berechnen Sie die Determinante von Q.

(c) Begründen Sie, warum die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q\mathbf{x} = q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + q_{33}x_3^2 + 2q_{12}x_1x_2 + 2q_{13}x_1x_3 + 2q_{23}x_2x_3,$$

konvex ist.

Lösung:

(a) Die charakteristische Gleichung ist gegeben durch:

$$\det(Q - \lambda I) = (0 - \lambda)(3 - \lambda)(7 - \lambda) = -\lambda(3 - \lambda)(7 - \lambda) = 0\,.$$

(b) Für $\lambda = 0$ gilt $\det(Q - \lambda I) = \det(Q)$ und somit folgt aus Teil (a): $\det(Q) = 0 \cdot 3 \cdot 7 = 0$.

(c) Wir berechnen die Hesse-Matrix $H_f(\mathbf{x})$.
Mit Hilfe von

$$\begin{aligned} f_{x_1}(\mathbf{x}) &= 2q_{11}x_1 + 2q_{12}x_2 + 2q_{13}x_3, \\ f_{x_2}(\mathbf{x}) &= 2q_{22}x_2 + 2q_{12}x_1 + 2q_{23}x_3, \\ f_{x_3}(\mathbf{x}) &= 2q_{33}x_3 + 2q_{13}x_1 + 2q_{23}x_2, \end{aligned}$$

erhalten wir:

$$H_f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{ij} = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{x}) & f_{x_1x_2}(\mathbf{x}) & f_{x_1x_3}(\mathbf{x}) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{x}) & f_{x_2x_2}(\mathbf{x}) & f_{x_2x_3}(\mathbf{x}) \\ f_{x_3x_1}(\mathbf{x}) & f_{x_3x_2}(\mathbf{x}) & f_{x_3x_3}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q_{11} & 2q_{12} & 2q_{13} \\ 2q_{12} & 2q_{22} & 2q_{23} \\ 2q_{13} & 2q_{23} & 2q_{33} \end{pmatrix}.$$

Für die gegebene Matrix Q gilt $q_{ij} = q_{ji}$. Wir können also schreiben: $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{pmatrix}$.

Es gilt folglich: $H_f(\mathbf{x}^0) = 2Q$ für alle $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^3$.
Da alle Eigenwerte von Q grösser oder gleich Null sind, ist Q positiv semidefinit, vgl. Satz 9.3.5 aus Aufgabe 4. Folglich ist auch $H_f(\mathbf{x}^0) = 2Q$ positiv semidefinit für alle $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^3$. Somit ist f eine konvexe Funktion.

Aufgabe 7 (Extremalstellen einer quadratischen Funktion, Anwendung der Definitheit)

Gegeben sind der Vektor $\mathbf{p} = (-1,-1,-2)^T$ und die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Untersuchen Sie die Matrix C auf Ihre Definitheit.

(b) Berechnen Sie alle stationären Punkte der quadratischen Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T C\mathbf{x} + \mathbf{p}^T\mathbf{x}.$$

(c) Klassifizieren Sie mithilfe der Erkenntnisse aus (a) die in (b) berechneten stationären Punkte: Liegt ein lokales Minimum, lokales Maximum oder ein Sattelpunkt vor?

Lösung:

(a) In Satz 9.3.5 in Aufgabe 4 haben wir gesehen, dass wir die Definitheit einer Matrix über deren Eigenwerte bestimmen können. Zur Berechnung der Eigenwerte lösen wir die charakteristische Gleichung $\det(C - \lambda I) = 0$ (z. B. mit dem Entwicklungssatz von Laplace oder mit der Regel Sarrus):

$$\begin{aligned} \det(C-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 2) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 1). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von C sind Lösungen von $\det(C - \lambda I) = 0$. Man erhält so

$$\lambda_1 = 1 > 0\,,\ \lambda_2 = 1-\sqrt{2} < 0\,,\ \lambda_3 = 1+\sqrt{2} > 0\,.$$

Da C sowohl negative, als auch positive Eigenwerte hat, ist C indefinit, vgl. Satz 9.3.5 in Aufgabe 4.

(b)

> **Definition 9.4.3 - Stationäre Stelle**
> Sei f eine reelle Funktion in n Variablen. Gilt $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$, so nennt man $\mathbf{x}^0$ eine stationäre Stelle.

Es gilt, $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T C\mathbf{x} + \mathbf{p}^T\mathbf{x} = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3) - x_1 - x_2 - 2x_3$.

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{lcl} f_{x_1}(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0 & \Longleftrightarrow & x_1 - x_2 + x_3 = 1 = -p_1 \\ f_{x_2}(\mathbf{x}) = x_2 - x_1 - 1 = 0 & \Longleftrightarrow & x_2 - x_1 = 1 = -p_2 \\ f_{x_3}(\mathbf{x}) = x_3 + x_1 - 2 = 0 & \Longleftrightarrow & x_3 + x_1 = 2 = -p_3. \end{array}$$

Das entspricht dem inhomogenen LGS $C\mathbf{x} = -\mathbf{p}$.

	x_1	x_2	x_3	$-\mathbf{p}$		
1	1	−1	1	1		eliminiere x_1
2	−1	1	0	1		
3	1	0	1	2		
4	1	−1	1	1	1	
5	0	0	1	2	2 + 1	tausche Zeile 5 und 6
6	0	1	0	1	3 − 1	
7	1	−1	1	1	4	
8	0	1	0	1	6	eliminiere x_2
9	0	0	1	2	5	
10	1	0	1	2	7 + 8	
11	0	1	0	1	8	
12	0	0	1	2	9	eliminiere x_3
13	1	0	0	0	10 − 12	
14	0	1	0	1	11	
15	0	0	1	2	12	

Damit gibt es genau einen stationären Punkt $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(c)

Satz 9.4.2 - Hinreichende Kriterien lokaler Extrema
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to Z$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion in n Variablen und $\mathbf{x}^0 \in D$ eine stationäre Stelle mit $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$ und Hesse-Matrix $H_f(\mathbf{x}^0)$. Dann gilt:

- $H_f(\mathbf{x}^0)$ positiv definit $\Rightarrow$ f hat in $\mathbf{x}^0$ ein lokales Minimum;
- $H_f(\mathbf{x}^0)$ negativ definit $\Rightarrow$ f hat in $\mathbf{x}^0$ ein lokales Maximum;
- $H_f(\mathbf{x}^0)$ ist indefinit $\Rightarrow$ f hat in $\mathbf{x}^0$ einen Sattelpunkt.

Es gilt,

$$H_f(\mathbf{x^0}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C.$$

Wir haben bereits in Teilaufgabe (a) gesehen, dass die Matrix C indefinit ist. Somit ist $H_f(\mathbf{x^0})$ indefinit und im (einzigen stationären) Punkt $\mathbf{x}^0 = (0,1,2)^T$ liegt ein Sattelpunkt vor.

Aufgabe 8 (Stationäre Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$ mit $\mathbf{x} \in [0,1] \times [0,1]$.

(a) Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial x_1}(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(1,1)$.

(b) Ist f monoton steigend oder fallend in Richtung
  (i) $\mathbf{e}^1 = (1,0)^T$?
  (ii) $\mathbf{e}^2 = (0,1)^T$?

(c) Bestimmen Sie alle stationären Stellen von f.

(d) Bestimmen Sie das globale Maximum von f.

(e) Was besagt das Kriterium von Fermat? Was kann man aus dem Kriterium von Fermat bezüglich lokaler Extrema von f schliessen?

Lösung:

(a)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = 1 \implies \frac{\partial f}{\partial x_1}(1,1) = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = 1 \implies \frac{\partial f}{\partial x_2}(1,1) = 1$$

(b) (i) Um dies beantworten zu können, wenden wir Satz 9.3.1 aus Aufabe 3 an. Es gilt

$$f_{\mathbf{x},\mathbf{e}^1}(t) = f(x_1 + t, x_2) = x_1 + x_2 + t.$$

Somit ist

$$\frac{df_{\mathbf{x},\mathbf{e}^1}}{dt}(t) = 1$$

und deshalb

$$f'_{\mathbf{e}^1}(\mathbf{x}) = \frac{df_{\mathbf{x},\mathbf{e}^1}}{dt}(0) = 1.$$

Es ist also $f'_{\mathbf{e}^1}(\mathbf{x}) \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in [0,1] \times [0,1]$ und somit $f(\mathbf{x})$ monoton steigend in Richtung $\mathbf{e}^1$. (Da $f'_{\mathbf{e}^1}(\mathbf{x}) > 0$ für alle $\mathbf{x} \in [0,1] \times [0,1]$ ist $f(\mathbf{x})$ sogar auch streng monoton steigend in Richtung $\mathbf{e}^1$.)

(ii) Um dies beantworten zu können, wenden wir Satz 9.3.1 aus Aufabe 3 an. Es gilt

$$f_{\mathbf{x},\mathbf{e}^2}(t) = f(x_1, x_2 + t) = x_1 + x_2 + t.$$

Somit ist

$$\frac{df_{\mathbf{x},\mathbf{e}^2}}{dt}(t) = 1$$

und deshalb

$$f'_{\mathbf{e}^2}(\mathbf{x}) = \frac{df_{\mathbf{x},\mathbf{e}^2}}{dt}(0) = 1.$$

Es ist also $f'_{\mathbf{e}^2}(\mathbf{x}) \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in [0,1] \times [0,1]$ und somit $f(\mathbf{x})$ monoton steigend in Richtung $\mathbf{e}^2$. (Da $f'_{\mathbf{e}^2}(\mathbf{x}) > 0$ für alle $\mathbf{x} \in [0,1] \times [0,1]$ ist $f(\mathbf{x})$ sogar auch streng monoton steigend in Richtung $\mathbf{e}^2$.)

(c) Der Gradient ist konstant und nicht der Nullvektor, $\nabla f(\mathbf{x}) = (1,1)^T$, und somit gibt es keine stationären Stellen, vgl. Definition 9.4.3 aus Aufgabe 7.

(d)

Definition 9.4.1 - Supremum, Infimum und globale Extrema
Sei $f : D \to Z$ eine reelle Funktion in n Variablen. Ist der Wertebereich $f(D)$ nach oben beschränkt, so nennt man die kleinste obere Schranke

$$\sup f(D) = \sup_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$$

das Supremum von f. Gibt es ein $\mathbf{x}^{\max} \in D$ mit $f(\mathbf{x}^{\max}) = \sup_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$, so heisst

$$\max f(D) = \max_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{\max})$$

globales Maximum von f und $\mathbf{x}^{\max}$ globale Maximalstelle. Die Menge aller globalen Maximalstellen wird durch $\arg\max_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$ symbolisiert. Ist $f(D)$ nicht nach oben beschränkt, schreibt man $\sup_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x}) = +\infty$.
Ist der Wertebereich $f(D)$ nach unten beschränkt, so nennt man die grösste untere Schranke

$$\inf f(D) = \inf_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$$

das Infimum von f. Gibt es ein $\mathbf{x}^{\min} \in D$ mit $f(\mathbf{x}^{\min}) = \inf_{\mathbf{x}\in D} f(x)$, so heisst

$$\min f(D) = \min_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{\min})$$

globales Minimum von f und $\mathbf{x}^{\min}$ globale Minimalstelle. Die Menge aller globalen Minimalstellen wird durch $\arg\min_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$ symbolisiert. Ist $f(D)$ nicht nach unten beschränkt, schreibt man $\inf_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x}) = -\infty$.
Ein globales Maximum oder globales Minimum wird auch als globales Extremum oder Extremwert bezeichnet, analog ist eine (globale) Extremalstelle eine (globale) Minimal- oder (globale) Maximalstelle.

Da f eine (affin) lineare Funktion ist und monoton steigt in Richtung $\mathbf{e}^1$, wird $f(\mathbf{x})$ nur dann maximal, wenn x_1 den grösstmöglichen Wert annimmt. Der grösstmögliche Wert, den $x_1 \in [0,1]$ annehmen kann, ist 1. Analog wird $f(\mathbf{x})$ nur dann maximal, wenn x_2 den grösstmöglichen Wert annimmt. Der grösstmögliche Wert, den $x_2 \in [0,1]$ annehmen kann, ist ebenfalls 1. Daher wird das Maximum von f an der Stelle $(1,1)^T$ angenommen,

$$f(1,1) = 1+1 = 2 \geq f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \quad \forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in [0,1]\times[0,1].$$

(e) Das Kriterium von Fermat besagt:

Satz 9.4.1 - Notwendiges Kriterium erster Ordnung (Kriterium von Fermat)
Sei f eine stetig partiell differenzierbare Funktion in n Variablen mit offenem Definitionsbe-

reich D. Ist $\mathbf{x}^0 \in D$ eine lokale Extremalstelle, dann gilt $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$.

Der Satz 9.4.1 gilt nur für offene Definitionsbereiche. Jedoch ist $[0,1] \times [0,1]$ abgeschlossen. Wie wir gesehen haben, wird das Maximum genau am Rand von $[0,1] \times [0,1]$ angenommen. Würden wir das Maximum auf dem offenen Bereich $(0,1) \times (0,1)$ suchen, so würde uns der Satz von Fermat die richtige Antwort liefern: auf $(0,1) \times (0,1)$ hat f kein Maximum, denn der Gradient ist konstant, $\nabla f(\mathbf{x}^0) = (1,1)^T \ \forall \mathbf{x^0} \in D$, und somit gibt es keine stationäre Stellen bzw. potentielle Extrema.

Aufgabe 9 (Vertikalschnitte und Extrema)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ mit } f(\mathbf{x}) = 2x_1^4 - 3x_1^2 x_2 + x_2^2.$$

(a) Ist die Stelle $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ eine stationäre Stelle von f?

(b) Zeigen Sie, dass $f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t)$ für beliebige Richtungen $\mathbf{r}$ an der Stelle $t = 0$ ein lokales Minimum hat.

(c) Betrachten Sie die drei Stellen $\mathbf{x}^1 = (0,0)^T, \mathbf{x}^2 = (1,1.5)^T$ und $\mathbf{x}^3 = (2,6)^T$.

  (i) Bestimmen Sie die Funktionswerte dieser Stellen.

  (ii) Zeigen Sie, dass diese Stellen Elemente der folgenden Menge sind:

$$K = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = \frac{3}{2} x_1^2 \right\} = \left\{ (t, \frac{3}{2} t^2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

(d) Bestimmen Sie die Funktion $h(t) = f(t, \frac{3}{2}t^2)$, welche die Funktionswerte von Stellen in K berechnet.

(e) Zeigen Sie, dass $h(t)$ an der Stelle $t = 0$ ein lokales Maximum hat.

(f) Können Sie aus den bisherigen Ergebnissen schliessen, ob f in $\mathbf{x}^0$ ein lokales Minimum, lokales Maximum oder einen Sattelpunkt hat?

(g) (*) Geben Sie zudem zu jeder hinreichend kleinen ε-Umgebung, $\varepsilon > 0$, von $\mathbf{0}$ eine Stelle an, die einen kleineren Funktionswert aufweist als $\mathbf{0}$. Nutzen Sie hierfür die obige Funktion $h(t)$.

Lösung:

(a) Wir berechnen die ersten partiellen Ableitungen:

$$f_{x_1}(\mathbf{x}) = 8{x_1}^3 - 6x_1 x_2, \quad f_{x_2}(\mathbf{x}) = -3{x_1}^2 + 2x_2 \ .$$

Es gilt also

$$\nabla f(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $\mathbf{0}$ eine stationäre Stelle, vgl. Definition 9.4.3 in Aufgabe 7.

(b) Der Vertikalschnitt durch $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ in Richtung $\mathbf{r}$ ist

$$f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t) = 2r_1^4 t^4 - 3r_1^2 r_2 t^3 + r_2^2 t^2.$$

Es gilt,

$$f'_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t) = 8r_1^4 t^3 - 9r_1^2 r_2 t^2 + 2r_2^2 t$$

und
$$f''_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t) = 24r_1^4t^2 - 18r_1^2r_2t + 2r_2^2.$$
Die erste Ableitung ist gleich 0 an der Stelle $t = 0$, $f'_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(0) = 0$, unabhängig von der Richtung. Die zweite Ableitung ist
$$f''_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(0) = 2r_2^2 > 0 \text{ für } r_2 \neq 0$$
und
$$f''_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(0) = 2r_2^2 = 0 \text{ für } r_2 = 0.$$
Wie wir aus Kapitel 5 wissen, liegt somit in der Tat ein lokales Minimum vor für alle Richtungen mit $r_2 \neq 0$. Wir betrachten nun den Fall $r_2 = 0$. Ist $r_2 = 0$, so muss $r_1 = 1$ oder $r_1 = -1$ gelten, da $\mathbf{r}$ eine Richtung ist und damit $r_1^2 + r_2^2 = 1$ erfüllt sein muss. Für den Fall $r_2 = 0$ müssen wir Ableitungen höherer Ordnungen überprüfen. Es gilt
$$f^{(3)}_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t) = 48r_1^4t - 18r_1^2r_2$$
und somit
$$f'_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(0) = f''_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(0) = f^{(3)}_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(0) = 0.$$
Die vierte Ableitung ist
$$f^{(4)}_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t) = 48r_1^4$$
und somit
$$f^{(4)}_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(0) = 48r_1^4 > 0 \text{ für } r_1 = 1 \text{ und } r_1 = -1.$$
Daher ist an der Stelle $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ ein lokales Minimum in jede Richtung $\mathbf{r}$.

(c) (i) Durch Einsetzen in die Funktion, erhalten wir:
$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}^1) &= 0, \\ f(\mathbf{x}^2) &= 2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}, \\ f(\mathbf{x}^3) &= 2^5 - 3 \cdot 4 \cdot 6 + 36 = -4. \end{aligned}$$

(ii) Die gegebenen Stellen sind in der Menge K enthalten, da:
$$\begin{aligned} \text{für } x_1^1 = 0,\ x_2^1 = 0 \text{ gilt } x_2^1 &= \frac{3}{2}(x_1^1)^2 \text{ da } 0 = \frac{3}{2}(0)^2, \\ \text{für } x_1^2 = 1,\ x_2^2 = \frac{3}{2} \text{ gilt } x_2^2 &= \frac{3}{2}(x_1^2)^2 \text{ da } \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(1)^2, \\ \text{für } x_1^3 = 2,\ x_2^3 = 6 \text{ gilt } x_2^3 &= \frac{3}{2}(x_1^3)^2 \text{ da } 6 = \frac{3}{2}(2)^2. \end{aligned}$$

(d) Durch Einsetzen von $x_1 = t$ und somit $x_2 = \frac{3}{2}t^2$ in f, erhalten wir
$$h(t) = f(t, \frac{3}{2}t^2) = 2t^4 - 3t^2 \cdot \frac{3}{2}t^2 + (\frac{3}{2}t^2)^2 = 2t^4 - \frac{9}{2}t^4 + \frac{9}{4}t^4 = -\frac{t^4}{4}.$$

(e) Es gilt
$$h'(t) = -t^3,\ h''(t) = -3t^2,\ h^{(3)}(t) = -6t,\ h^{(4)}(t) = -6$$
und somit ist $h'(0) = h''(0) = h^{(3)}(0) = 0$ und $h^{(4)}(0) = -6 < 0$. Daher hat h an der Stelle $t = 0$ ein lokales Maximum.
Im Punkt $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ hat f somit ein lokales Maximum, wenn wir uns in der in x_1, x_2-Ebene entlang der Kurve $x_2 = \frac{3}{2}x_1^2$ bewegen.

(f) Obwohl jeder Vertikalschnitt in alle Richtungen ein lokales Minimum an der Stelle $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ hat, befindet sich an der Stelle $\mathbf{x}^0$ kein Minimum. Nähert man sich der Stelle $\mathbf{0}$ entlang der Kurve $x_2 = \frac{3}{2}x_1^2$, ist $f(\mathbf{0}) \geq f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{3}{2}x_1^2 \end{pmatrix}$ mit $x_1 \in \mathbb{R}$, da wir in (e) verifiziert haben, dass $f(\mathbf{0})$ maximal ist entlang der Kurve $x_2 = \frac{3}{2}x_1^2$. Gleichheit gilt nur, wenn $x_1 = 0$ ist und daher gibt es in jeder Umgebung von $\mathbf{0}$ eine Stelle $\mathbf{x}$ auf dieser Kurve, sodass $f(\mathbf{0}) > f(\mathbf{x})$. Daher kann $\mathbf{x}^0$ kein Minimum sein. Da $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ eine stationäre Stelle ist, an welcher weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum vorliegt hat f in $\mathbf{x}^0$ einen Sattelpunkt.

(g) (*) Es gilt,

$$h(\varepsilon) = f\left(\varepsilon, \frac{3}{2}\varepsilon^2\right) = 2\cdot\varepsilon^4 - 3\cdot\varepsilon^2\cdot\frac{3}{2}\varepsilon^2 + \left(\frac{3}{2}\varepsilon^2\right)^2 = (2 - \frac{9}{2} + \frac{9}{4})\varepsilon^4 = -\frac{1}{4}\varepsilon^4 < 0 = f(\mathbf{0}).$$

Aufgabe 10 (Extremalstellen für zwei Funktionen in $n = 2$ Variablen)

Gegeben seien die Funktionen f und h mit

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ mit } f(\mathbf{x}) = x_1^3 + 3x_1x_2^2 - 60x_1 + 48x_2,$$
$$h : (-1,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } h(\mathbf{x}) = \left(1 - x_1^2\right)^{\frac{3}{2}} + x_1^2 + x_2^2.$$

(a) Finden Sie die stationären Punkte von f und klassifizieren Sie diese: Liegt ein lokales Minimum, lokales Maximum oder ein Sattelpunkt vor?
(b) Finden Sie die stationären Punkte von h und klassifizieren Sie diese: Liegt ein lokales Minimum, lokales Maximum oder ein Sattelpunkt vor?

Lösung:

(a) Wir berechnen die ersten und zweiten Ableitungen:

$$f_{x_1}(\mathbf{x}) = 3{x_1}^2 + 3{x_2}^2 - 60, \qquad f_{x_2}(\mathbf{x}) = 6x_1x_2 + 48,$$
$$f_{x_1x_1}(\mathbf{x}) = 6x_1, \qquad f_{x_2x_2}(\mathbf{x}) = 6x_1, \qquad f_{x_1x_2}(\mathbf{x}) = 6x_2 = f_{x_2x_1}(\mathbf{x}).$$

Notwendige Bedingungen 1. Ordnung:

$$\begin{matrix} f_{x_1}(\mathbf{x}) = 0 \\ f_{x_2}(\mathbf{x}) = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} 3{x_1}^2 + 3{x_2}^2 - 60 = 0 \\ 6x_1x_2 + 48 = 0. \end{matrix}$$

Wenden wir die Substitutionsmethode aus Serie 1 an, so erhalten wir die vier stationären Stellen von f: $(-4,2)^T$, $(-2,4)^T$, $(2,-4)^T$, $(4,-2)^T$. Um die stationären Stellen zu klassifizieren, können wir folgenden Satz anwenden:

Satz 9.4.4 - Hinreichende Kriterien lokaler Extrema im Fall $n = 2$
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge, $f : D \to Z$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion in 2 Variablen und $\mathbf{x}^0 \in D$ eine stationäre Stelle mit $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$ und Hesse-Matrix $H_f(\mathbf{x}^0)$. Dann gilt:

- Falls $\det(H_f(\mathbf{x}^0)) > 0$, hat f an der Stelle $\mathbf{x}^0$ ein lokales Extremum. Gilt ausserdem
  - $f_{x_1x_1}(\mathbf{x}^0) > 0$, so ist es ein lokales Minimum,
  - $f_{x_1x_1}(\mathbf{x}^0) < 0$, so ist es ein lokales Maximum.

- Gilt $\det(H_f(\mathbf{x}^0)) < 0$, dann hat f an der Stelle $\mathbf{x}^0$ kein lokales Extremum sondern einen Sattelpunkt.
- Gilt $\det(H_f(\mathbf{x}^0)) = 0$, dann kann anhand der ersten und zweiten partiellen Ableitungen im Punkt $\mathbf{x}^0$ nicht entschieden werden, ob an der Stelle $\mathbf{x}^0$ ein Extremum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

Es gilt,

$$\det(H_f(\mathbf{x}^0)) = f_{x_1x_1}(\mathbf{x}^0) \cdot f_{x_2x_2}(\mathbf{x}^0) - (f_{x_1x_2}(\mathbf{x}^0))^2 = 36\left(({x_1}^0)^2 - ({x_2}^0)^2\right).$$

$$\begin{aligned}
&\det(H_f(-4,2)) = 432 > 0,\ f_{x_1x_1}(-4,2) = -24 < 0 && \Longrightarrow && f \text{ hat in } (-4,2)^T \text{ ein lokales Maximum.}\\
&\det(H_f(-2,4)) = -432 < 0 && \Longrightarrow && f \text{ hat in } (-2,4)^T \text{ einen Sattelpunkt.}\\
&\det(H_f(2,-4)) = -432 < 0 && \Longrightarrow && f \text{ hat in } (2,-4)^T \text{ einen Sattelpunkt.}\\
&\det(H_f(4,-2)) = 432 > 0,\ f_{x_1x_1}(4,-2) = 24 > 0 && \Longrightarrow && f \text{ hat in } (4,-2)^T \text{ ein lokales Minimum.}
\end{aligned}$$

(b) Wir berechnen die ersten und zweiten Ableitungen:

$$\begin{aligned}
&h_{x_1}(\mathbf{x}) = x_1(2 - 3(1 - {x_1}^2)^{1/2}), && h_{x_2}(\mathbf{x}) = 2x_2,\\
&h_{x_1x_1}(\mathbf{x}) = 2 - 3(1 - {x_1}^2)^{1/2} + 3{x_1}^2(1 - {x_1}^2)^{-1/2}, && h_{x_2x_2}(\mathbf{x}) = 2,\\
&h_{x_1x_2}(\mathbf{x}) = 0 = h_{x_2x_1}(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Notwendige Bedingungen 1. Ordnung:

$$\begin{array}{rcl} h_{x_1}(\mathbf{x}) & = & 0 \\ h_{x_2}(\mathbf{x}) & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} x_1(2 - 3(1 - {x_1}^2)^{1/2}) & = & 0 \\ 2x_2 & = & 0. \end{array}$$

Wenden wir die Substitutionsmethode aus Serie 1 an, so erhalten wir die stationären Stellen von h: $(0,0)^T$, $(-\frac{\sqrt{5}}{3},0)^T$, $(\frac{\sqrt{5}}{3},0)^T$.

Um die stationären Stellen zu klassifizieren, können wir wieder Satz 9.4.4 anwenden. Es gilt,

$$\begin{aligned}
\det(H_h(\mathbf{x}^0)) = h_{x_1x_1}(\mathbf{x}^0) \cdot h_{x_2x_2}(\mathbf{x}^0) - \left(h_{x_1x_2}(\mathbf{x}^0)\right)^2 &= 2h_{x_1x_1}(\mathbf{x}^0)\\
&= 2\left(2 - 3(1 - (x_1^0)^2)^{1/2} + 3(x_1^0)^2(1 - (x_1^0)^2)^{-1/2}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\det(H_h(\mathbf{0})) = -2 < 0 && \Longrightarrow && h \text{ hat in } (0,0)^T \text{ einen Sattelpunkt.}\\
&\det\left(H_h\left(-\tfrac{\sqrt{5}}{3},0\right)\right) = 5 > 0,\ h_{x_1x_1}\left(-\tfrac{\sqrt{5}}{3},0\right) = \tfrac{5}{2} > 0 && \Longrightarrow && h \text{ hat in } (-\tfrac{\sqrt{5}}{3},0)^T \text{ ein lokales Minimum.}\\
&\det\left(H_h\left(\tfrac{\sqrt{5}}{3},0\right)\right) = 5 > 0,\ h_{x_1x_1}\left(\tfrac{\sqrt{5}}{3},0\right) = \tfrac{5}{2} > 0 && \Longrightarrow && h \text{ hat in } (\tfrac{\sqrt{5}}{3},0)^T \text{ ein lokales Minimum.}
\end{aligned}$$