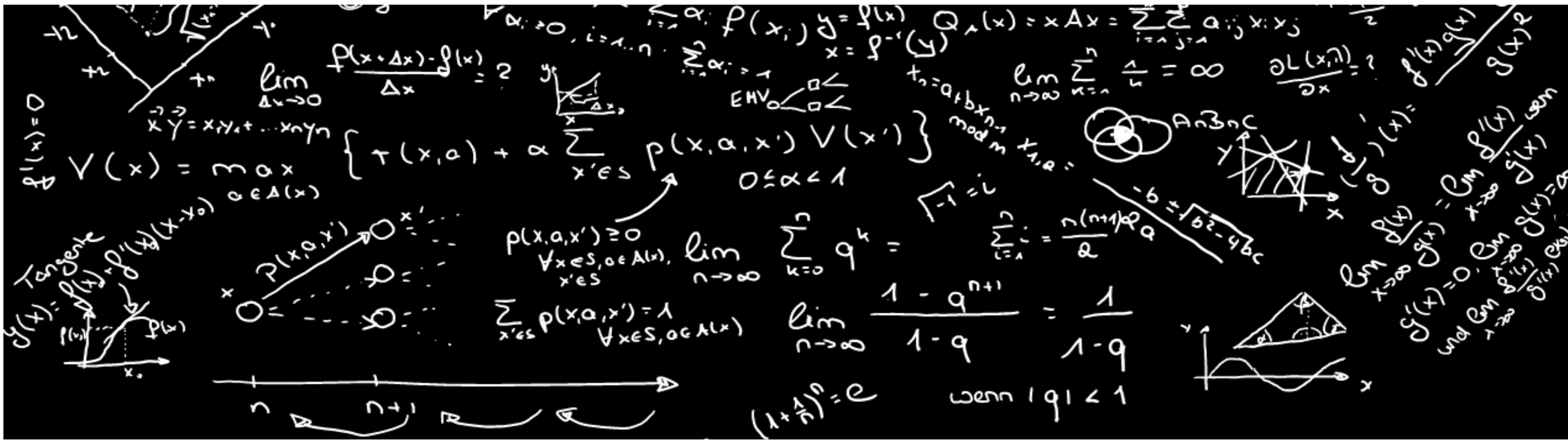
Mathematik II

Optimierung unter Nebenbedingungen

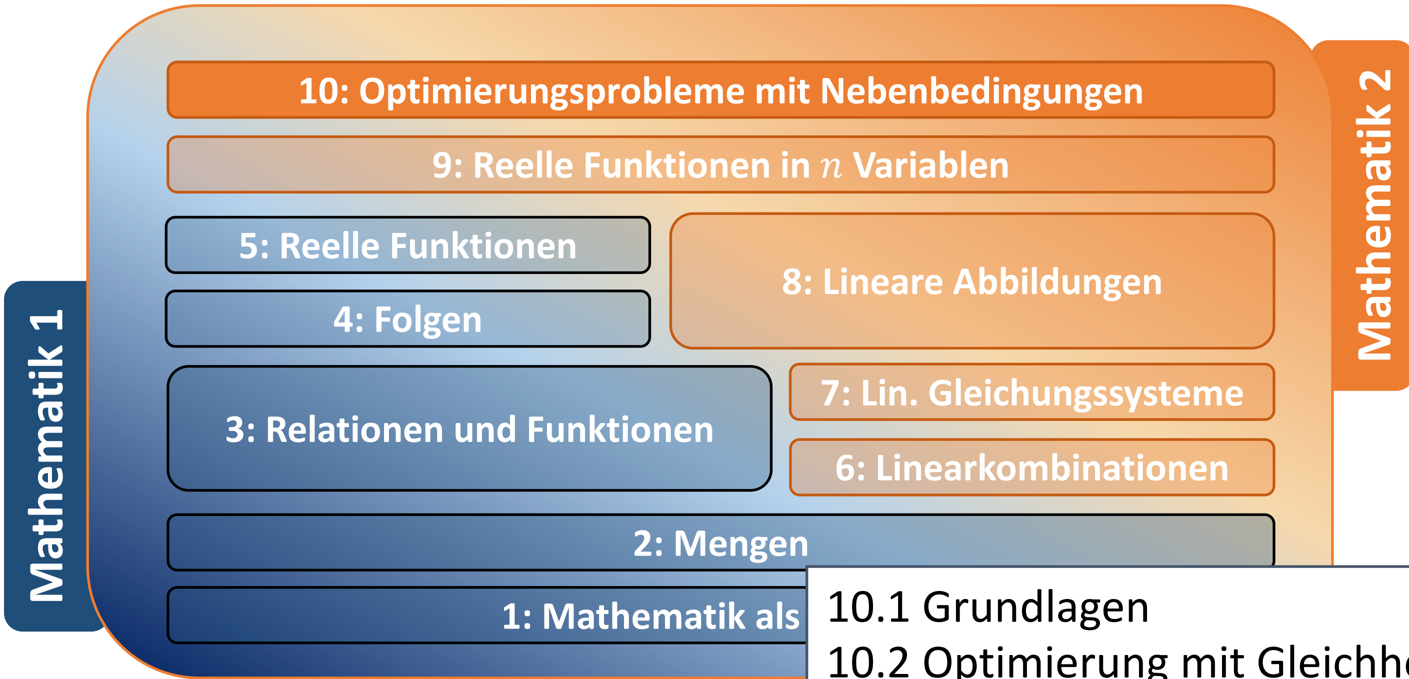
FS 2019



Universität Zürich[UZH]

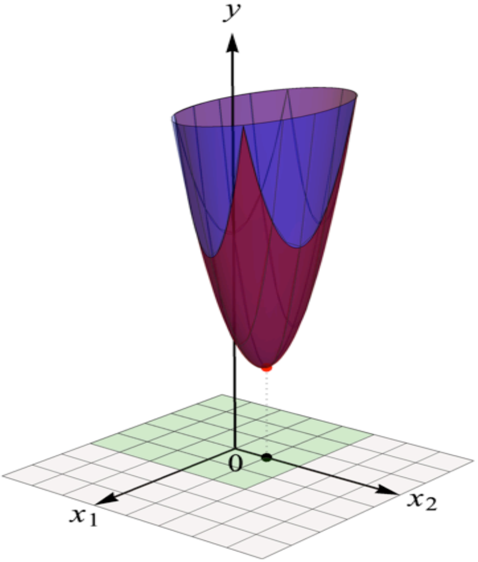
Prof. Dr. Christiane Barz
Lehrstuhl Mathematik für Wirtschaftswissenschaften (Chair of Mathematics for Business and Economics)

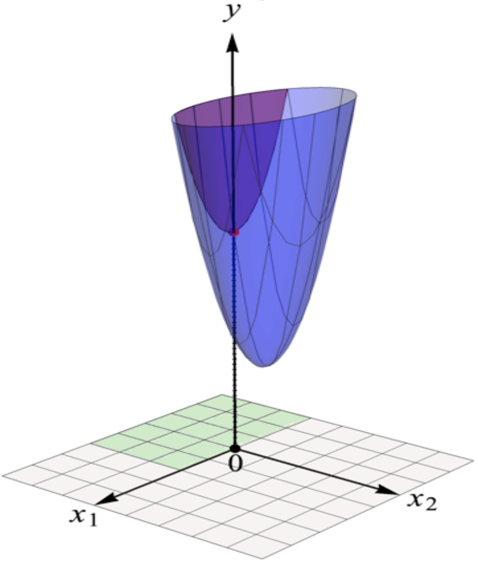
Agenda



10.1 Grundlagen
10.2 Optimierung mit Gleichheitsnebenbedingungen
10.3 Lineare Optimierung
10.4 Ausblick

Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen





Definitionen 10.1.1 – 10.1.2: Optimierung unter Nebenbedingungen

Seien $f, g_1, \ldots, g_m : D \to Z$ reelle Funktionen in n Variablen und

$$B = \{\mathbf{x} \in D \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \ldots, k, g_i(\mathbf{x}) \geq 0, i = k+1, \ldots, \ell, \\ g_i(\mathbf{x}) = 0, i = \ell+1, \ldots, m\} \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Zulässiger Bereich

Maximierungsproblem unter Nebenbedingungen

(P-max) $\quad \max\limits_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x})$

$$\begin{aligned} \text{u.d.N. } & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \ i = 1, \ldots, k, \\ & g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \ i = k+1, \ldots, \ell, \\ & g_i(\mathbf{x}) = 0, \ i = \ell+1, \ldots, m \end{aligned}$$

kurz: $\max\limits_{\mathbf{x} \in B} f(\mathbf{x})$

Minimierungsproblem unter Nebenbedingungen

(P-min) $\quad \min\limits_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x})$

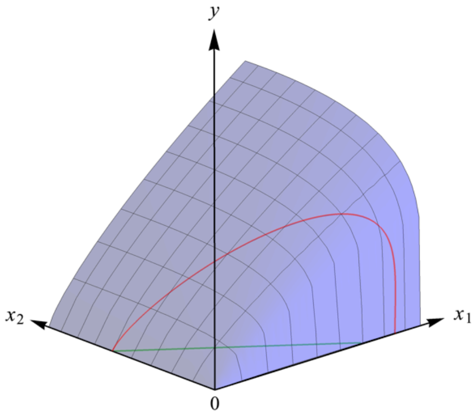
$$\begin{aligned} \text{u.d.N. } & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \ i = 1, \ldots, k, \\ & g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \ i = k+1, \ldots, \ell, \\ & g_i(\mathbf{x}) = 0, \ i = \ell+1, \ldots, m \end{aligned}$$

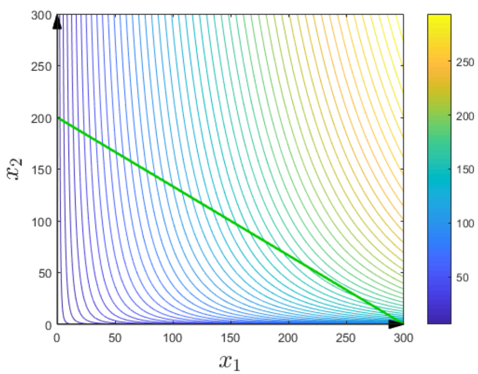
kurz: $\min\limits_{\mathbf{x} \in B} f(\mathbf{x})$

Zulässige Lösung

Existiert $\mathbf{x}^* \in B$ mit $f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x})$ bzw. $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$ $\forall\ \mathbf{x} \in B$, heisst $\mathbf{x}^*$ optimale Lösung von (P-max) bzw. (P-min).

Beispiel: Nutzenmaximierender Konsument





- Konsument hat Budget von 600 CHF für zwei Güter;
- 1 ME von Gut 1 kostet 2 CHF, 1 ME von Gut 2 kostet 3 CHF;
- Nutzenfunktion des Kosumenten ist $x_1^{0.8}x_2^{0.2}$, wobei x_1 Menge von Gut 1 und x_2 Menge von Gut 2 ist.

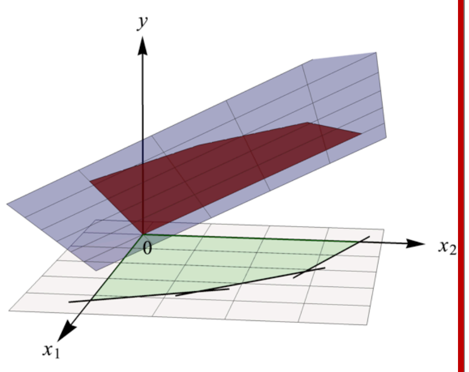
Welche Mengen x_1 und x_2 maximieren den Nutzen bei gegebenem Budget?

Formulierung als Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen:

$$\max_{\mathbf{x}\in(0,+\infty)^2} x_1^{0.8}x_2^{0.2} \qquad \text{bzw.} \qquad \max_{\mathbf{x}\in(0,+\infty)^2} \overbrace{x_1^{0.8}x_2^{0.2}}^{f(\mathbf{x})}$$

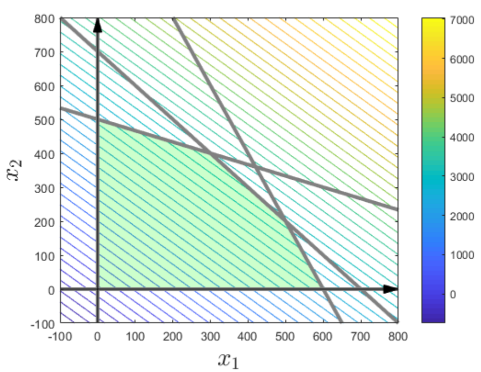
$$\text{u.d.N. } 2x_1+3x_2=600 \qquad \text{u.d.N. } \underbrace{2x_1+3x_2-600}_{g_1(\mathbf{x})}=0$$

Beispiel: Produktionsplanung



- Deckungsbeitrag von P_1 4 CHF/ME, von P_2 5 CHF/ME;
- 1 ME P_1 benötigt 1 ME F_1, 2 ME F_2, 1 min Presse;
- 1 ME P_2 benötigt 3 ME F_1, 1 ME F_2, 1 min Presse;
- Kapazität: 1500 ME F_1, 1200 ME F_2, 700 min Presse.

Welche Mengen x_1 und x_2 von P_1 und P_2 maximieren den Gesamtdeckungsbeitrag?

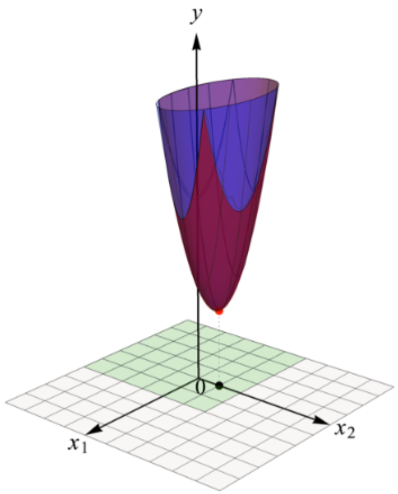


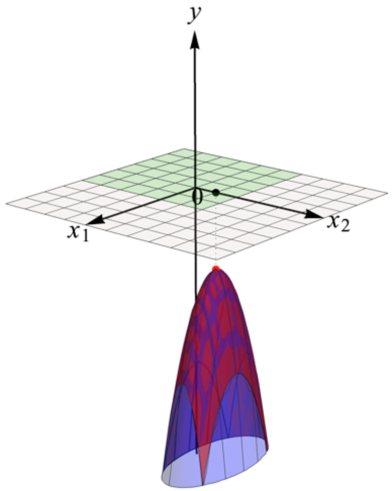
Formulierung als Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen:

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} 4x_1 + 5x_2 \qquad \text{bzw.} \quad \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} \overbrace{4x_1 + 5x_2}^{f(\mathbf{x})}$$

$$\begin{aligned}
\text{u.d.N. } x_1 + 3x_2 &\le 1500 & \qquad \text{u.d.N. } \overbrace{x_1 + 3x_2 - 1500}^{g_1(\mathbf{x})} &\le 0 \\
2x_1 + x_2 &\le 1200 & g_2(\mathbf{x}) \{\ 2x_1 + x_2 - 1200 &\le 0 \\
x_1 + x_2 &\le 700 & g_3(\mathbf{x}) \{\ x_1 + x_2 - 700 &\le 0 \\
x_1 &\ge 0 & g_4(\mathbf{x}) \{\ x_1 &\ge 0 \\
x_2 &\ge 0 & g_5(\mathbf{x}) \{\ x_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

Äquivalente Optimierungsprobleme





Definition 10.1.4: Äquivalente Optimierungsprobleme

Zwei Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen heissen äquivalent, wenn jede optimale Lösung des einen auch eine optimale Lösung des anderen ist und umgekehrt.

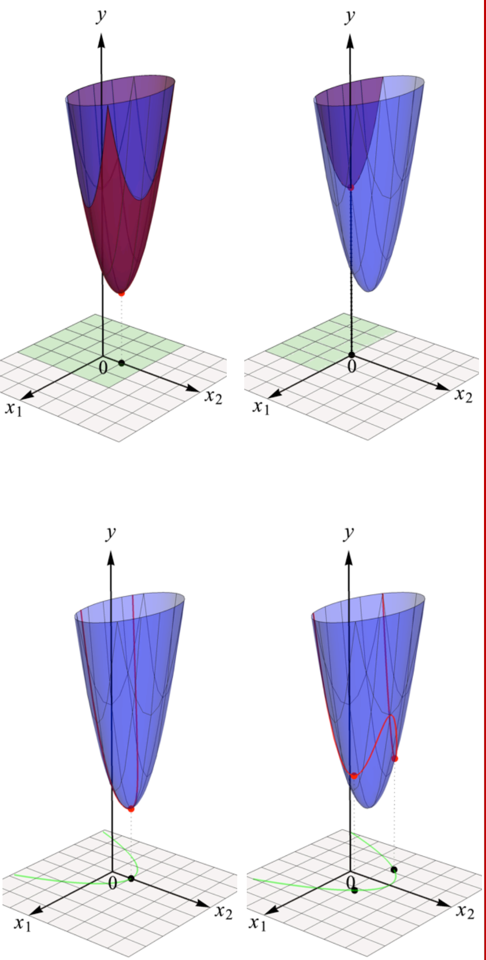
Beispiele:

- $$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2+4(x_2-1)^2+3$$
  $$\text{u.d.N. } x_1 \leq 2$$
  $$x_2 \leq 2$$
- $$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} -x_1^2-4(x_2-1)^2-3$$
  $$\text{u.d.N. } x_1 \leq 2$$
  $$x_2 \leq 2$$

Satz 10.1.1: Max-Min-Dualität für Optimierungsprobleme

$\min_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ ist äquivalent zu $\max_{\mathbf{x}\in B} -f(\mathbf{x})$.

Schranken



Satz 10.1.2: Schranken von Optimierungsproblemen

Hat f ein globales Minimum $f(\mathbf{x}^{\min})$ und $\min\limits_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ eine optimale Lösung $\mathbf{x}^* \in B$, so gilt $f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}^{\min})$.

Hat f ein globales Maximum $f(\mathbf{x}^{\max})$ und $\max\limits_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ eine optimale Lösung $\mathbf{x}^* \in B$, so gilt $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}^{\max})$.

Beispiele:

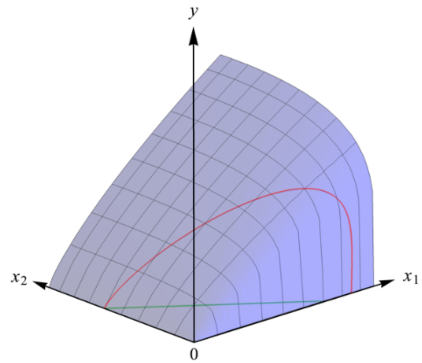
- $$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2+4(x_2-1)^2+3$$
  u.d.N. $x_1 \leq 2$
  $x_2 \leq 2$

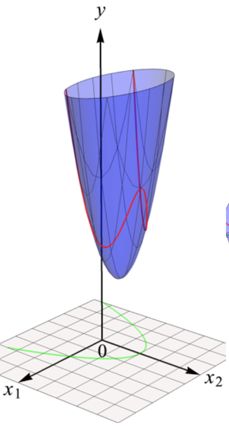
- $$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2+4(x_2-1)^2+3$$
  u.d.N. $x_1 \leq 2$
  $x_2 \leq 0$

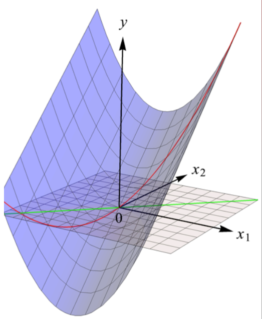
- $$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2+4(x_2-1)^2+3$$
  u.d.N. $x_1^2+2(x_2-1)=0$

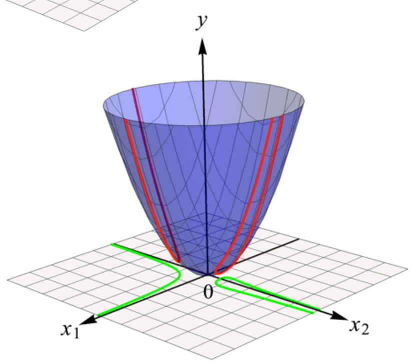
- $$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2+4(x_2-1)^2+3$$
  u.d.N. $x_1^2+2(x_2-1)-2=0$

Optimierungsprobleme unter Gleichheitsnebenbedingungen









(P-max) $\max_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$

u.d.N. $g_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = 1,\ldots,m$

oder

(P-min) $\min_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$

u.d.N. $g_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = 1,\ldots,m$

$m=1$

(P-max) $\max_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$

u.d.N. $g_1(\mathbf{x}) = 0$

oder

$m=1$

(P-min) $\min_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$

u.d.N. $g_1(\mathbf{x}) = 0$

Das Substitutionsverfahren

Das Verfahren von Lagrange

Beispiele:

- $\max_{\mathbf{x}\in(0,+\infty)^2} x_1^{0.8}x_2^{0.2}$

  u.d.N. $2x_1 + 3x_2 - 600 = 0$

- $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3$

  u.d.N. $x_1^2 + 2(x_2-1) - 2 = 0$

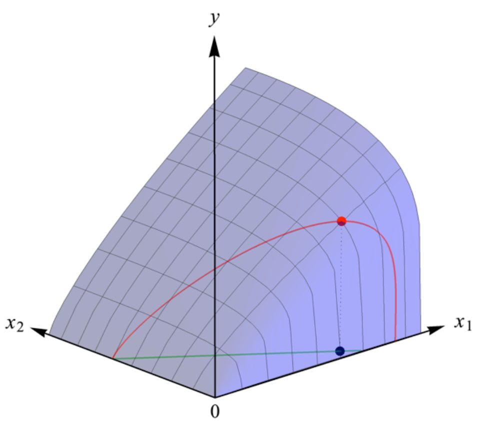
- $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2 + x_2$

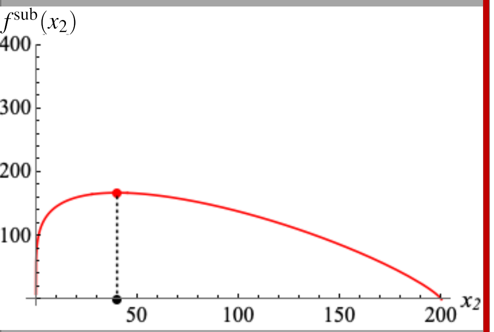
  u.d.N. $(x_1 - x_2)^2 = 0$

- $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2 + x_2^2$

  u.d.N. $x_2 + x_1x_2^2 - e^{x_1x_2} = 0$

Das Substitutionsverfahren





Satz 10.2.1: Substitutionsverfahren im Fall $n = 2$, $m = 1$

Ist $g_1(\mathbf{x}) = 0$ äquivalent zu $x_1 = \tilde{g}_1(x_2)$ mit bekanntem $\tilde{g}_1(x_2)$, dann:
$\mathbf{x}^* = (\tilde{g}_1(x_2^*), x_2^*)^T$ optimale Lösung von (P-max) bzw. (P-min)
$\Leftrightarrow x_2^*$ globale Maximal- bzw. Minimalstelle von $f^{\text{sub}}(x_2) = f(\tilde{g}_1(x_2), x_2)$.

Beispiel:

- $$\max_{\mathbf{x} \in (0,+\infty)^2} x_1^{0.8} x_2^{0.2}$$
  u.d.N. $2x_1 + 3x_2 - 600 = 0 \;\Leftrightarrow x_1 = 300 - \dfrac{3}{2}x_2$

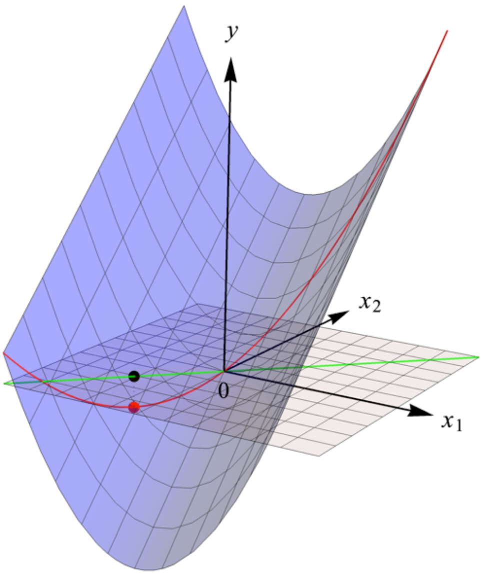
$$f^{\text{sub}}(x_2) = f\left(300 - \frac{3}{2}x_2, x_2\right) = \left(300 - \frac{3}{2}x_2\right)^{0.8} x_2^{0.2}$$

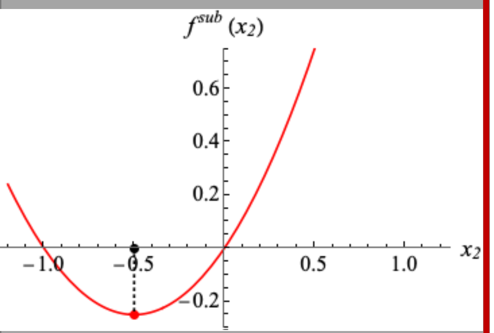
$$\left(f^{\text{sub}}\right)'(x_2) = \left(300 - \frac{3}{2}x_2\right)^{-0.2} x_2^{-0.8}\,(60 - 1.5x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 = 40$$

$$\left(f^{\text{sub}}\right)''(x_2) \le 0 \quad \forall x_2 \in D^{\text{sub}} = (0, 200) \;\Rightarrow x_2^{\max} = 40 \text{ globale Maximalstelle von } f^{\text{sub}}$$

$$\Rightarrow x_1^* = 300 - \tfrac{3}{2}40 = 240, x_2^* = 40 \text{ optimale Lösung}$$

Das Substitutionsverfahren: Beispiele





Satz 10.2.1: Substitutionsverfahren im Fall $n = 2$, $m = 1$

Ist $g_1(\mathbf{x}) = 0$ äquivalent zu $x_1 = \tilde{g}_1(x_2)$ mit bekanntem $\tilde{g}_1(x_2)$, dann:
$\mathbf{x}^* = (\tilde{g}_1(x_2^*), x_2^*)^T$ optimale Lösung von (P-max) bzw. (P-min)
$\Leftrightarrow x_2^*$ globale Maximal- bzw. Minimalstelle von $f^{\text{sub}}(x_2) = f(\tilde{g}_1(x_2), x_2)$.

Beispiel:

- $\min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2 + x_2$

  u.d.N. $(x_1 - x_2)^2 = 0 \;\Leftrightarrow x_1 = x_2$

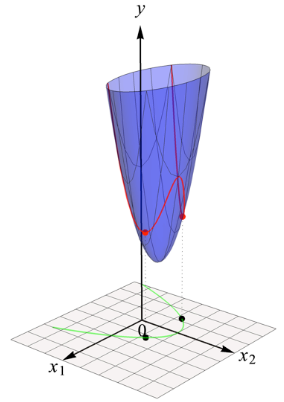
  $$f^{\text{sub}}(x_2) = x_2^2 + x_2$$

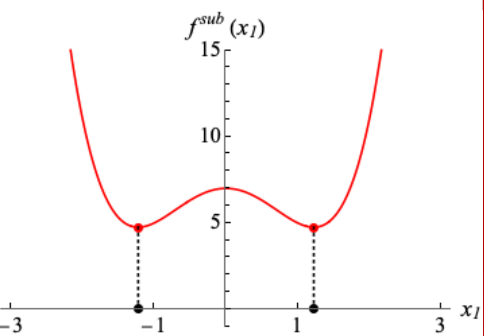
  $$\left(f^{\text{sub}}\right)'(x_2) = 2x_2 + 1 = 0 \;\Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2}$$

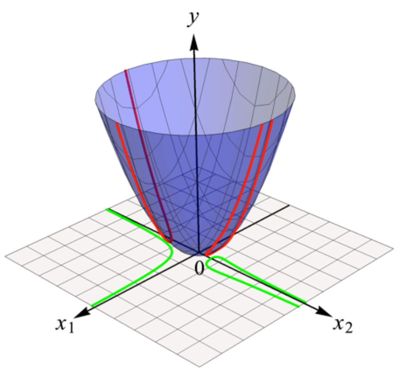
  $$\left(f^{\text{sub}}\right)''(x_2) = 2 > 0 \quad \forall x_2 \in \mathbb{R} \;\Rightarrow x_2^{\min} = -\tfrac{1}{2} \text{ globale Minimalstelle von } f^{\text{sub}}$$

  $\Rightarrow x_1^* = -\frac{1}{2}, x_2^* = -\frac{1}{2}$ optimale Lösung

Vorsicht bei der Anwendung







Die Rollen von x_1 und x_2 können vertauscht werden.

- $$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3$$
  $$\text{u.d.N. } x_1^2 + 2(x_2-1) - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_2 = \frac{2-x_1^2}{2} + 1$$

  $$f^{\text{sub}}(x_1) = x_1^2 + (2-x_1^2)^2 + 3$$
  $$(f^{\text{sub}})'(x_1) = 4x_1^3 - 6x_1 \qquad = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \in \left\{-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$$
  $$(f^{\text{sub}})''(x_1) = 12x_1^2 - 6$$
  $$(f^{\text{sub}})''(0) = -6 < 0 \qquad \Rightarrow \text{lokale Maximalstelle}$$
  $$(f^{\text{sub}})''\left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) = (f^{\text{sub}})''\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) = 12 > 0 \qquad \Rightarrow \text{lokale Minimalstellen}$$
  $$\lim_{x_1\to+\infty} f^{\text{sub}}(x_1) = \lim_{x_1\to-\infty} f^{\text{sub}}(x_1) = +\infty \qquad \Rightarrow x_1^{\min} = -\sqrt{\tfrac{3}{2}} \text{ und } \sqrt{\tfrac{3}{2}} \text{ globale Minimalstellen von } f^{\text{sub}}$$

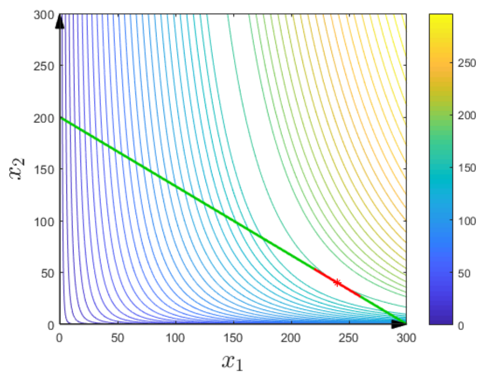
  $$\Rightarrow x_1^* = -\sqrt{\frac{3}{2}},\, x_2^* = 1.25 \text{ und } x_1^* = \sqrt{\frac{3}{2}}, x_2^* = 1.25 \text{ optimale Lösungen}$$

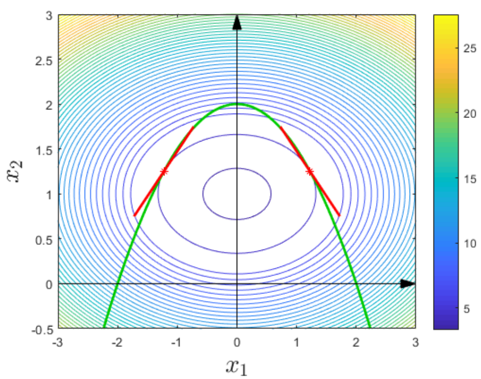
- $$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2 + x_2^2$$
  $$\text{u.d.N. } x_2 + x_1 x_2^2 - e^{x_1 x_2} = 0$$

Das Verfahren ist nicht immer anwendbar!

Die Idee des Verfahrens von Lagrange

Suche Stellen, an welchen die «Ableitung der Höhenlinie» gleich der «Ableitung der Nebenbedingung» ist.





Beispiele:

- $\max\limits_{\mathbf{x}\in(0,+\infty)^2} x_1^{0.8}x_2^{0.2}$

  u.d.N. $2x_1+3x_2-600=0$

  Höhenlinie zum Niveau y: $x_1^{0.8}x_2^{0.2}=y \Leftrightarrow x_2=\tilde{f}(x_1)=\frac{y^5}{x_1^4}$

  Nebenbedingung: $x_2=\tilde{g}_1(x_1)=200-\frac{2}{3}x_1$

  In $\mathbf{x}^*$ gilt:

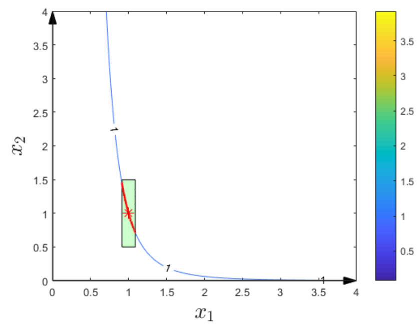
  - $\tilde{f}'(x_1^*)=g_1'(x_1^*)$ mit $y=x_1^{*0.8}x_2^{*0.2}$: $-4\frac{y^5}{x_1^{*5}}=-\frac{2}{3}$ bzw. $-4\frac{x_2^*}{x_1^*}=-\frac{2}{3}$
  - $g_1(\mathbf{x}^*)=0$: $2x_1^*+3x_2^*-600=0$

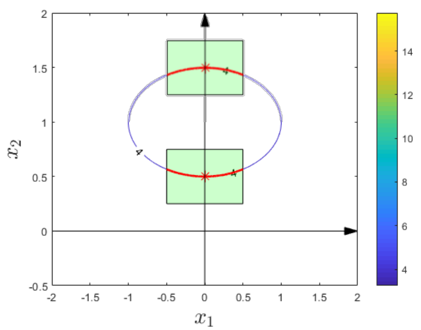
  $\Rightarrow \mathbf{x}^*=(240,40)^T$

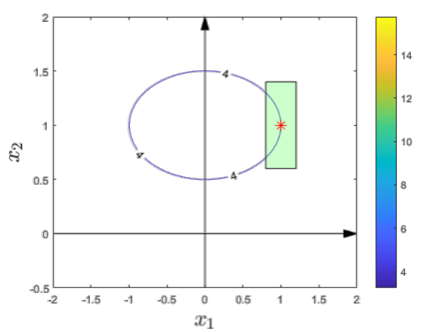
- $\min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2+4(x_2-1)^2+3$

  u.d.N. $x_1^2+2(x_2-1)-2=0$

Die implizite Funktion







Definition 10.2.1: Implizite Funktion (im Fall n=2)

Durch $g(\mathbf{x}) = 0$ ist für $\varepsilon, \delta > 0$ in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0$ implizit

$$\tilde{g} : U(x_1^0, \delta) \to U(x_2^0, \varepsilon) \text{ mit } x_2 = \tilde{g}(x_1)$$

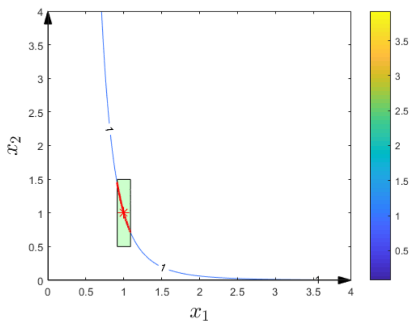
definiert, wenn $U(x_1^0, \delta) \times U(x_2^0, \varepsilon) \subseteq D$ und

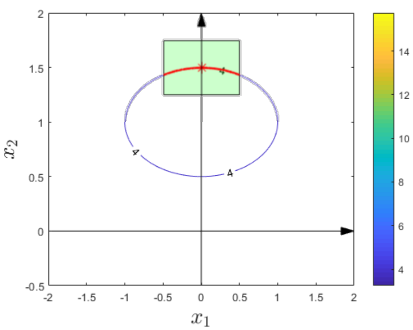
$$g(\mathbf{x}) = 0 \;\Leftrightarrow x_2 = \tilde{g}(x_1) \text{ für alle } \mathbf{x} \in U(x_1^0, \delta) \times U(x_2^0, \varepsilon).$$

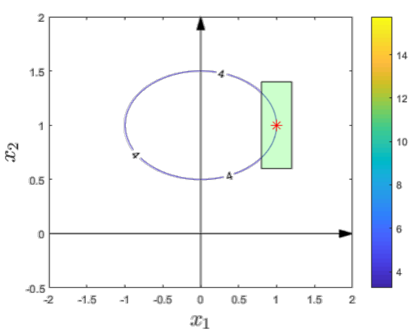
Beispiele implizit gegebener Funktionen:

- Durch $g(\mathbf{x}) = x_1^{0.8} x_2^{0.2} - 1 = 0$ in einer Umgebung von:
  - $\mathbf{x}^0 = (1,1)^T$: $\quad \tilde{g} : (0.91, 1.09) \to (0.5, 1.5)$ mit $\tilde{g}(x_1) = \frac{1}{x_1^4}$
- Durch $g(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 3 - 4 = 0$ in einer Umgebung von:
  - $\mathbf{x}^0 = (0, 0.5)^T$: $\tilde{g} : (-0.5, 0.5) \to (0.25, 0.75)$ mit $\tilde{g}(x_1) = -\frac{1}{2}\sqrt{1 - x_1^2} + 1$
  - $\mathbf{x}^0 = (0, 1.5)^T$: $\tilde{g} : (-0.5, 0.5) \to (1.25, 1.75)$ mit $\tilde{g}(x_1) = \frac{1}{2}\sqrt{1 - x_1^2} + 1$
  - $\mathbf{x}^0 = (1,1)^T$: $\quad$ keine Funktion

Satz von der impliziten Funktion







Satz 10.2.3: Satz von der impliziten Funktion (im Fall *n=2*)

Ist D offen, $\mathbf{x}^0 \in D$, $g : D \to Z$ stetig partiell differenzierbar und gilt:

$$g(\mathbf{x}^0) = 0 \qquad \text{und} \qquad g_{x_2}(\mathbf{x}^0) \neq 0, \qquad \text{dann}$$

- ist durch $g(\mathbf{x}) = 0$ in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0$ implizit $\tilde{g} : U(x_1^0, \delta) \to U(x_2^0, \varepsilon)$ mit $x_2 = \tilde{g}(x_1)$ definiert;
- ist $\tilde{g}$ stetig differenzierbar mit $\tilde{g}'(x_1) = -\frac{g_{x_1}(x_1, \tilde{g}(x_1))}{g_{x_2}(x_1, \tilde{g}(x_1))}$.

Beispiele:

- Durch $g(\mathbf{x}) = x_1^{0.8} x_2^{0.2} - 1 = 0$ in einer Umgebung von:
  - $\mathbf{x}^0 = (1,1)^T$: $\quad g(\mathbf{x}^0) = 0$, $g_{x_2}(\mathbf{x}^0) = 0.2 \cdot 1^{0.8} \cdot 1^{-0.8} = 0.2 \neq 0$

    $$\Rightarrow \tilde{g}'(1) = -\frac{g_{x_1}(\mathbf{x}^0)}{g_{x_2}(\mathbf{x}^0)} = -\frac{0.8}{0.2} = -4.$$

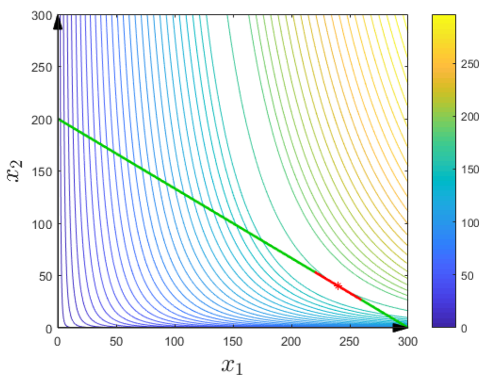
- Durch $g(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 3 - 4 = 0$ in einer Umgebung von:
  - $\mathbf{x}^0 = (0, 1.5)^T$: $g(\mathbf{x}^0) = 0$, $g_{x_2}(\mathbf{x}^0) = 8(1.5 - 1) = 4 \neq 0$

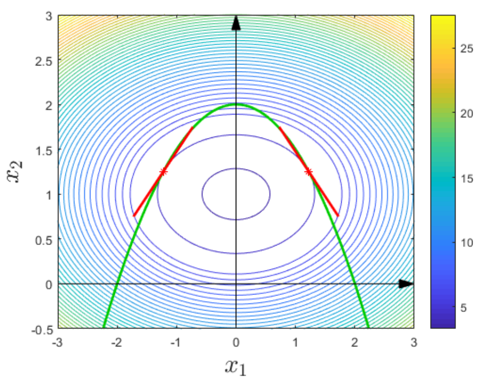
    $$\Rightarrow \tilde{g}'(0) = -\frac{g_{x_1}(\mathbf{x}^0)}{g_{x_2}(\mathbf{x}^0)} = -\frac{0}{4} = 0.$$

  - $\mathbf{x}^0 = (1,1)^T$: $\quad g(\mathbf{x}^0) = 0$, $g_{x_2}(\mathbf{x}^0) = 8(1-1) = 0$

    $$\not\Rightarrow \text{Existenz von } \tilde{g}(x_1).$$

Die Idee des Verfahrens von Lagrange für *n=2* und *m=1*





$m=1$ (P-max) $\max\limits_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$ u.d.N. $g_1(\mathbf{x})=0$

oder

$m=1$ (P-min) $\min\limits_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$ u.d.N. $g_1(\mathbf{x})=0$

Ist durch $f(\mathbf{x})-y=0$ implizit $\tilde{f}(x_1)$ und durch $g_1(\mathbf{x})=0$ implizit $\tilde{g}_1(x_1)$ definiert, so gilt:

- $\tilde{f}'(x_1^*)=\tilde{g}_1'(x_1^*)$ bzw. $\frac{f_{x_1}(\mathbf{x}^*)}{f_{x_2}(\mathbf{x}^*)}=\frac{(g_1)_{x_1}(\mathbf{x}^*)}{(g_1)_{x_2}(\mathbf{x}^*)}$
- $g_1(\mathbf{x}^*)=0$

Umformulierung obiger Kriterien:

$$(i)\quad \frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_1} = f_{x_1}(\mathbf{x}^*)-\lambda^*(g_1)_{x_1}(\mathbf{x}^*)=0 \qquad \boxed{\tilde{f}'(x_1^*)=\tilde{g}'(x_1^*)}$$

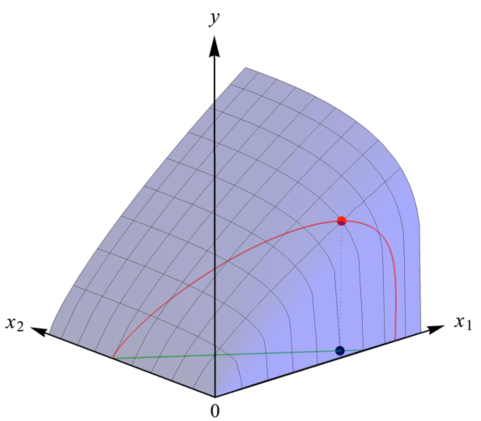
$$(ii)\quad \frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_2} = f_{x_2}(\mathbf{x}^*)-\lambda^*(g_1)_{x_2}(\mathbf{x}^*)=0 \qquad \boxed{\lambda^*=\frac{f_{x_2}(\mathbf{x}^*)}{(g_1)_{x_2}(\mathbf{x}^*)}}$$

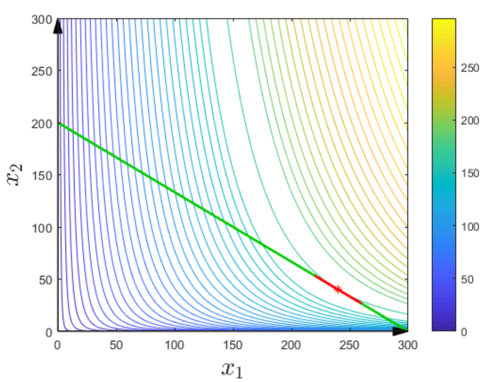
$$(iii)\quad \frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial \lambda} = -g_1(\mathbf{x}^*)=0 \qquad \boxed{g_1(\mathbf{x}^*)=0}$$

Definition 10.2.3: Lagrange-Funktion (im Fall *n=2* und *m=1*)

Seien $f,g_1:D\to Z$, $D\subseteq\mathbb{R}^2$. Die Funktion $L:D\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $L(x_1,x_2,\lambda)=f(x_1,x_2)-\lambda g_1(x_1,x_2)$ heisst Lagrange-Funktion.

Das Lagrange-Verfahren





Satz 10.2.5: Der Satz von Lagrange (im Fall *n=2, m=1*)

D offen, $f,g : D \to Z$ stetig partiell differenzierbar, $\mathbf{x}^* \in D \subseteq \mathbb{R}^2$:
$\mathbf{x}^*$ optimale Lösung von (P-max) oder (P-min) mit $\nabla g(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$
$\Rightarrow$ es existiert $\lambda^* \in \mathbb{R}$ mit $\nabla L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) = \mathbf{0}$ und $L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) = f(x_1^*, x_2^*)$.

Beispiel:

- $$\max_{\mathbf{x}\in(0,+\infty)^2} x_1^{0.8} x_2^{0.2}$$
  u.d.N. $2x_1 + 3x_2 - 600 = 0$

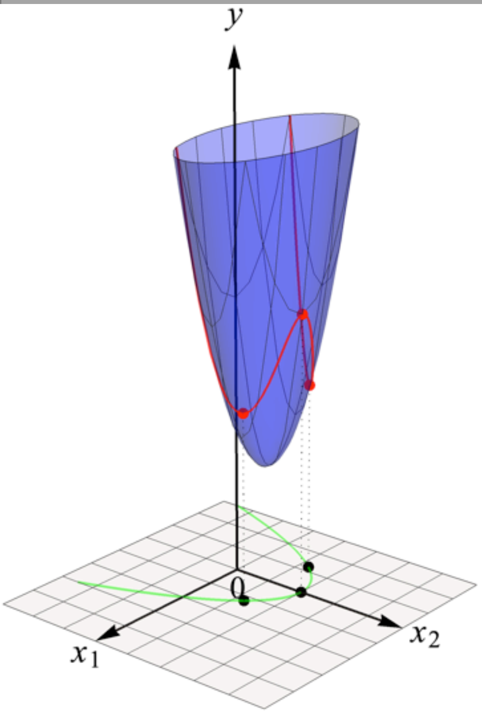
$$L(x_1,x_2,\lambda) = x_1^{0.8}x_2^{0.2} - \lambda(2x_1 + 3x_2 - 600)$$

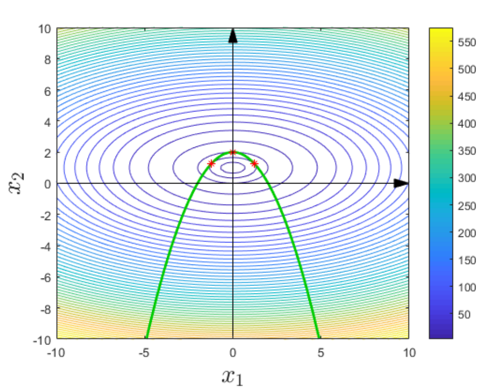
$$\nabla L(x_1,x_2,\lambda) = \begin{pmatrix} 0.8x_1^{-0.2}x_2^{0.2} - 2\lambda \\ 0.2x_1^{0.8}x_2^{-0.8} - 3\lambda \\ -2x_1 - 3x_2 + 600 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Stationäre Stelle von L: $(240, 40, 0.4\sqrt[5]{\frac{1}{6}})^T$

$$L(240,40,0.4\sqrt[5]{\tfrac{1}{6}}) = 240^{0.8}40^{0.2} - 0.4\sqrt[5]{\tfrac{1}{6}}(2\cdot 240 + 3\cdot 40 - 600)$$
$$= f(240,40)$$

Das Lagrange-Verfahren: Beispiele





- $\min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2+4(x_2-1)^2+3$

  u.d.N. $x_1^2+2(x_2-1)-2=0$

$$L(x_1,x_2,\lambda)=x_1^2+4(x_2-1)^2+3-\lambda(x_1^2+2(x_2-1)-2)$$

$$(i)\quad L_{x_1}(x_1,x_2,\lambda)=2x_1-\lambda\cdot 2x_1 \qquad =2x_1(1-\lambda)=0$$

$$(ii)\quad L_{x_2}(x_1,x_2,\lambda)=8(x_2-1)-2\lambda \qquad =0$$

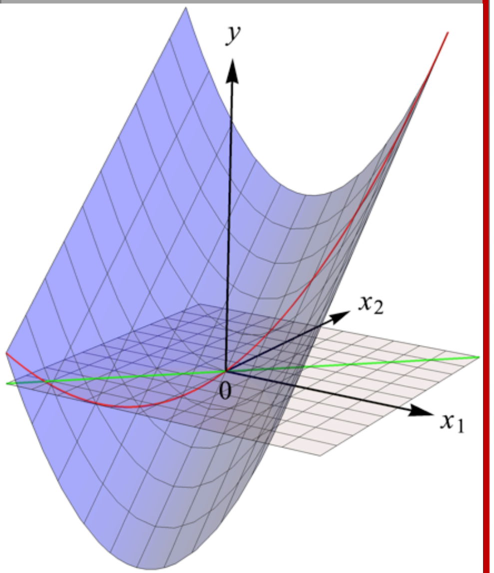
$$(iii)\quad L_{\lambda}(x_1,x_2,\lambda)=-\left(x_1^2+2(x_2-1)-2\right) \qquad =0$$

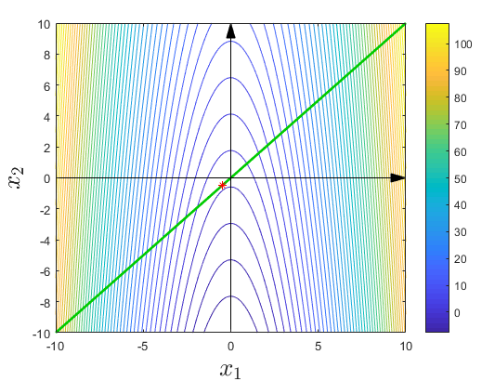
$\Rightarrow$ Stationäre Stellen von L:

$$(0,2,4)^T,(-\sqrt{\tfrac{3}{2}},\tfrac{5}{4},1)^T,(\sqrt{\tfrac{3}{2}},\tfrac{5}{4},1)^T$$

Nicht alle stationären Stellen sind optimale Lösungen!

Das Lagrange-Verfahren: Beispiele





- $$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2 + x_2$$

  $$\text{u.d.N. } (x_1 - x_2)^2 = 0$$

  $$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2 - \lambda(x_1 - x_2)^2$$

  $$(i) \quad L_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1 - \lambda \cdot 2(x_1 - x_2) \qquad = 0$$

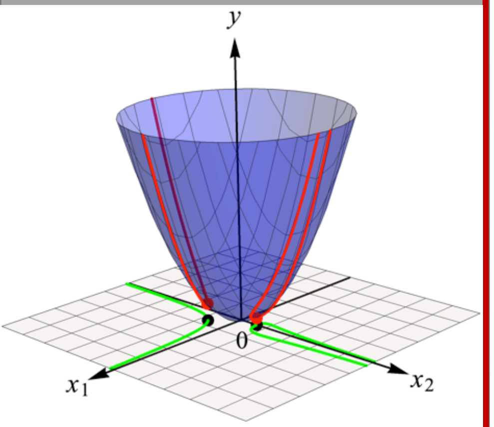
  $$(ii) \quad L_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = 1 + \lambda \cdot 2(x_1 - x_2) \qquad = 0$$

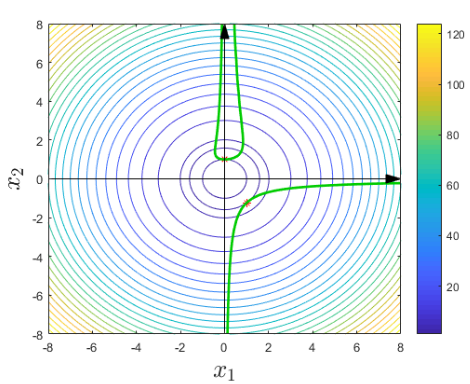
  $$(iii) \quad L_{\lambda}(x_1, x_2, \lambda) = -(x_1 - x_2)^2 \qquad = 0$$

  $\Rightarrow$ L hat keine stationären Stellen

  Hier gilt für die optimale Lösung: $\nabla g(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$

Das Lagrange-Verfahren: Beispiele





- $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2 + x_2^2$

  u.d.N. $x_2 + x_1 x_2^2 - e^{x_1 x_2} = 0$

  $$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 - \lambda(x_2 + x_1 x_2^2 - e^{x_1 x_2})$$

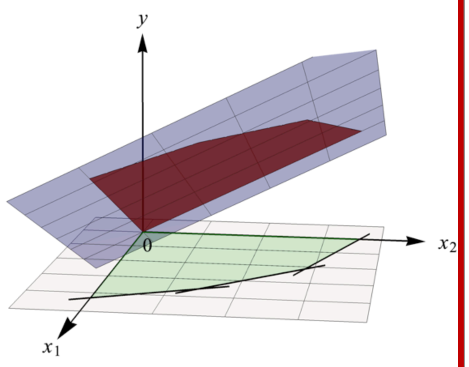
  $$\begin{aligned} &(i) && L_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1 - \lambda\left(x_2^2 - x_2 \mathrm{e}^{x_1 x_2}\right) && = 0 \\ &(ii) && L_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = 2x_2 - \lambda\left(1 + 2x_1 x_2 - x_1 \mathrm{e}^{x_1 x_2}\right) && = 0 \\ &(iii) && L_{\lambda}(x_1, x_2, \lambda) = -\left(x_2 + x_1 x_2^2 - \mathrm{e}^{x_1 x_2}\right) && = 0 \end{aligned}$$

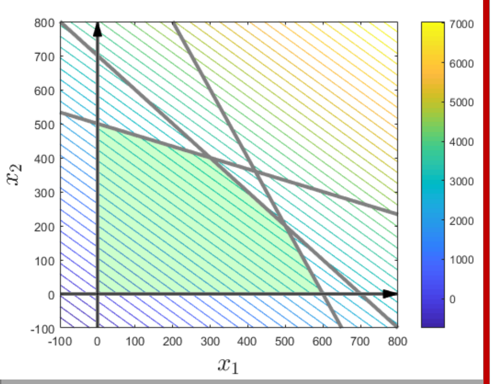
  $\Rightarrow$ Stationäre Stellen von L:

  $$(0, 1, 2)^T,\ (x_1, x_2, \lambda)^T \approx (1.07654, -1.15904, 1.12845)^T$$

  Nicht alle stationären Stellen sind optimale Lösungen!

Definition eines linearen Optimierungsproblems





Definition 10.3.1: Standardform eines LPs

Für $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ heisst

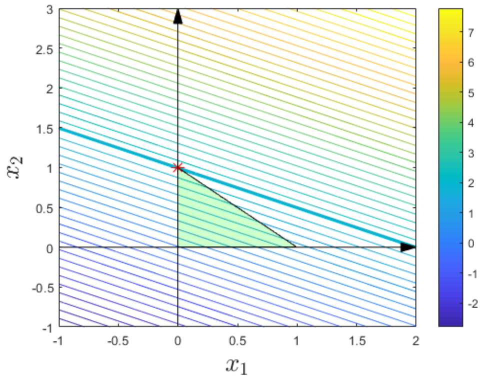
$$\begin{aligned} \text{(P-max)} \quad \max\ & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{u.d.N. } A\mathbf{x} & \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

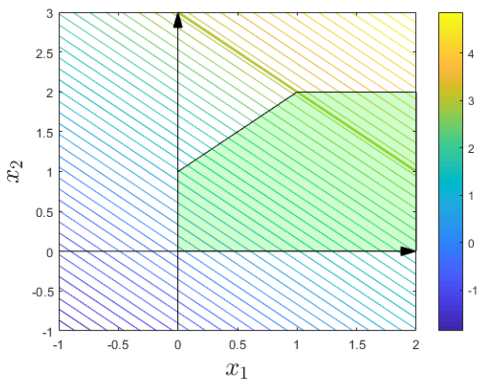
lineares Optimierungsproblem oder lineares Programm (LP) in Standardform.

Beispiel:

- $$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 5x_2 \\ \text{u.d.N.} \quad & x_1 + x_2 \leq 700 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 1500 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 1200 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

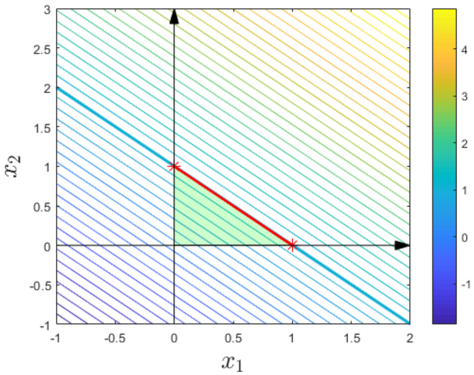
Lineare Optimierung: Beispiele





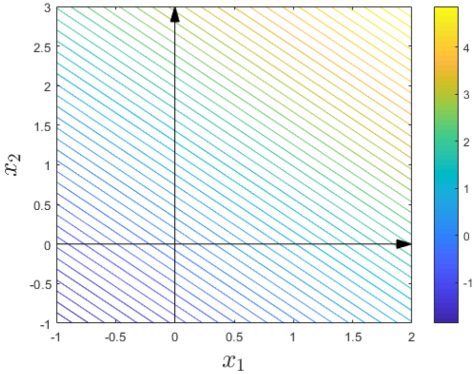
- $$\begin{aligned} &\max x_1 + 2x_2 \\ \text{u.d.N.} \quad & x_2 \le 2 \\ & x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} &\max x_1 + x_2 \\ \text{u.d.N.} \quad & x_2 \le 2 \\ & x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

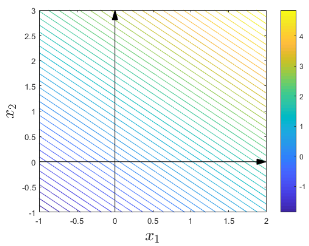


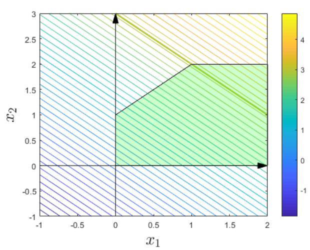
- $$\begin{aligned} &\max x_1 + x_2 \\ \text{u.d.N.} \quad & x_2 \le 2 \\ & -x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

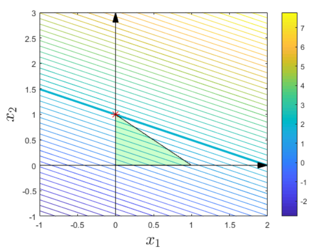
- $$\begin{aligned} &\max x_1 + x_2 \\ \text{u.d.N.} \quad & -x_2 \le -2 \\ & x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

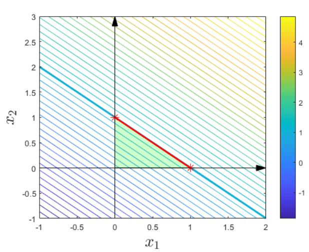


Bedeutung von Ecken









Definition 10.3.2: Eckpunkt des zulässigen Bereichs

$\mathbf{x} \in B$ heisst Eckpunkt von B, wenn es keine $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in B, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \neq \mathbf{x}$ gibt, so dass $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x}^1 + (1-\alpha)\mathbf{x}^2$ für ein $\alpha \in [0,1]$.

Sätze 10.3.1 – 10.3.2: Eigenschaften des zulässigen Bereich

Der zulässige Bereich eines LPs ist konvex (oder leer) und hat höchstens endlich viele Eckpunkte.

Satz 10.3.3: Hauptsatz der linearen Optimierung

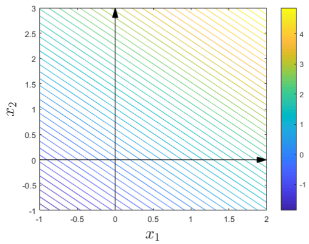
Für ein LP in Standardform mit zulässigem Bereich B gilt:

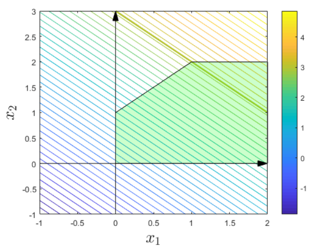
- Ist $B = \{\}$, hat das LP keine optimale Lösung.
- Ist $B \neq \{\}$, ist entweder mindestens einer der Eckpunkte von B eine optimale Lösung $\mathbf{x}^*$ des LPs oder das LP hat keine optimale Lösung, da $\sup_{\mathbf{x} \in B} \mathbf{c}^T \mathbf{x} = +\infty$.
- Existieren optimale Lösungen an Eckpunkten $\mathbf{x}^{*1}, \ldots \mathbf{x}^{*s}$, so ist

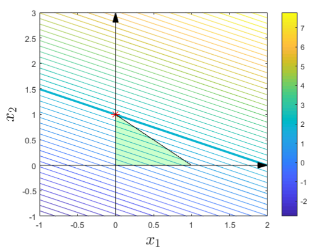
$$\mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \mathbf{x}^{*i}, \alpha_i \geq 0, i = 1, \ldots, s, \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$$

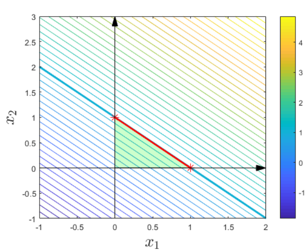
ebenfalls eine optimale Lösung.

Der Hauptsatz der linearen Optimierung









Lineares Optimierungsproblem in Standardform

$B = \{\}$

keine zulässige Lösung $\Rightarrow$ keine optimale Lösung

$B \neq \{\}$

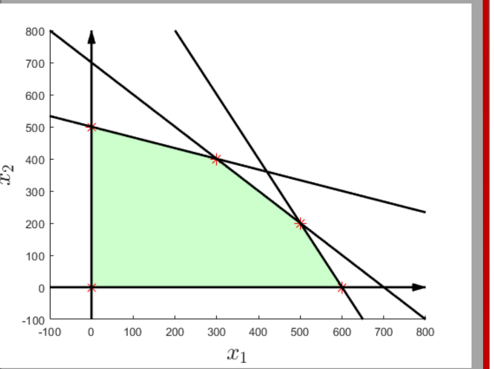
$\sup\limits_{\mathbf{x}\in B} \mathbf{c}^T\mathbf{x} = +\infty$ $\Rightarrow$ keine optimale Lösung

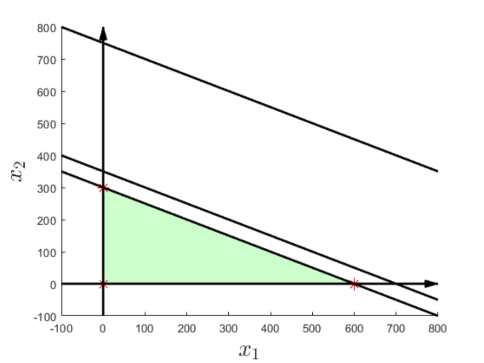
zulässige und optimale Lösung an einem Eckpunkt von B

eindeutige optimale Lösung an einem Eckpunkt von B

mehrere optimale Lösungen an Eckpunkten von B $\Rightarrow$ unendlich viele optimale Lösungen

Der Hauptsatz: Beispiele





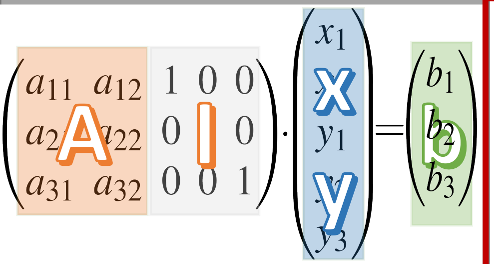
- $$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 5x_2 \\ \text{u.d.N. } & x_1 + x_2 \leq 700 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 1500 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 1200 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$
  $\Rightarrow \mathbf{x}^* = (300, 400)^T$

Eckpunkte	$4x_1+5x_2$	$4x_1+4x_2$
$(0,0)^T$	0	0
$(600,0)^T$	2400	2400
$(0,500)^T$	2500	2000
$(500,200)^T$	3000	2800
$(300,400)^T$	3200	2800

- $$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 4x_2 \\ \text{u.d.N. } & x_1 + x_2 \leq 700 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 1500 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 1200 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$
  $\Rightarrow$ Jedes $\mathbf{x}^* = \alpha\begin{pmatrix}300\\400\end{pmatrix} + (1-\alpha)\begin{pmatrix}500\\200\end{pmatrix}, 0 \leq \alpha \leq 1$ ist optimale Lösung

- $$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 5x_2 \\ \text{u.d.N. } & x_1 + 2x_2 \leq 700 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 1500 \\ & 2x_1 + 4x_2 \leq 1200 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$
  $\Rightarrow \mathbf{x}^* = (600, 0)^T$

Eckpunkte	$4x_1+5x_2$
$(0,0)^T$	0
$(600,0)^T$	2400
$(0,300)^T$	1500



Wie findet man Eckpunkte?

Satz 10.3.4 und Definition 10.3.3: Zulässige Basislösungen

$B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} + I\mathbf{y} = \mathbf{b}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$

Eine Basislösung des LGS $A\mathbf{x} + I\mathbf{y} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ heisst zulässig.

Beispiel:

- $$\max \quad 4x_1 + 5x_2$$

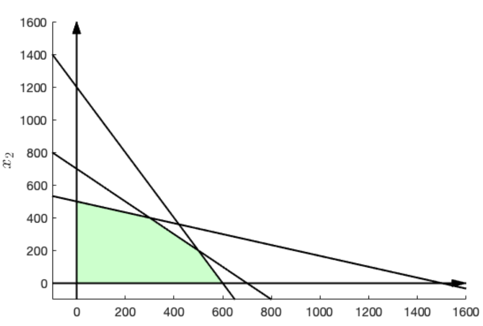
  u.d.N.: $$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 + y_1 &= 700 \\ x_1 + 3x_2 + y_2 &= 1500 \\ 2x_1 + x_2 + y_3 &= 1200 \end{aligned}}$$

  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$\mathbf{b}$	
1	1	1	1	0	0	700	
2	1	3	0	1	0	1500	
3	2	1	0	0	1	1200	
4	1	1	1	0	0	700	1
5	0	2	-1	1	0	800	2 $-$ 1
6	0	-1	-2	0	1	-200	3 -2 1
7	1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	300	4 $-\frac{1}{2}$ 5
8	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	400	$\frac{1}{2}$ 5
9	0	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	200	6 $+\frac{1}{2}$ 5
10	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	420	7 $+\frac{3/2}{5/2}$ 9
11	0	1	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	360	8 $-\frac{1/2}{5/2}$ 9
12	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	-80	$-\frac{2}{5}$ 9

Basislösungen sind u.a.:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 700 \\ 1500 \\ 1200 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 700 \\ 0 \\ 0 \\ 800 \\ -200 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 420 \\ 360 \\ -80 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Wie findet man Eckpunkte?

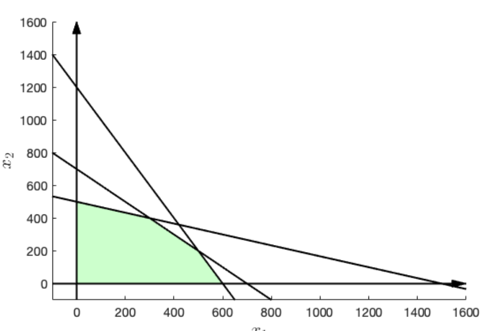
$$\left(\begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

A I x y b

$$\max \quad 4x_1 + 5x_2$$

$$\text{u.d.N.} \quad x_1 + x_2 + y_1 = 700$$
$$x_1 + 3x_2 + y_2 = 1500$$
$$2x_1 + x_2 + y_3 = 1200$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$



Beispiel (Fortsetzung):

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	**b**	
(10)	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	420	
(11)	0	1	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	360	
(12)	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	-80	
(13)	1	0	-1	0	1	500	(10) − (12)
(14)	0	1	2	0	-1	200	(11) + 2 (12)
(15)	0	0	-5	1	2	400	(-5) (12)
(16)	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	600	(13) + $\frac{1}{2}$ (14)
(17)	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	100	$\frac{1}{2}$ (14)
(18)	0	$\frac{5}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	900	(15) + $\frac{5}{2}$ (14)
(19)	1	3	0	1	0	1500	(16) + (18)
(20)	0	-2	1	-1	0	-800	(17) − (18)
(21)	0	-5	0	-2	1	-1800	-2 (18)
(22)	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	500	$\frac{1}{3}$ (19)
(23)	$\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	200	(20) + $\frac{2}{3}$ (19)
(24)	$\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	700	(21) + $\frac{5}{3}$ (19)
(25)	2	1	0	0	1	1200	(22) + (24)
(26)	-1	0	1	0	-1	-500	(23) − (24)
(27)	-5	0	0	1	-3	-2100	-3 (24)
(28)	1	1	1	0	0	700	(25) + (26)
(29)	1	0	-1	0	1	500	(-1) (26)
(30)	-2	0	-3	1	0	-600	(27) − 3 (26)

Basislösungen sind u.a.:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 700 \\ 1500 \\ 1200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 700 \\ 0 \\ 0 \\ 800 \\ -200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 420 \\ 360 \\ -80 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 500 \\ 200 \\ 0 \\ 400 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 600 \\ 0 \\ 100 \\ 900 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1500 \\ 0 \\ -800 \\ 0 \\ -1800 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 500 \\ 200 \\ 0 \\ 700 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1200 \\ -500 \\ -2100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 700 \\ 0 \\ -600 \\ 500 \end{pmatrix}$$

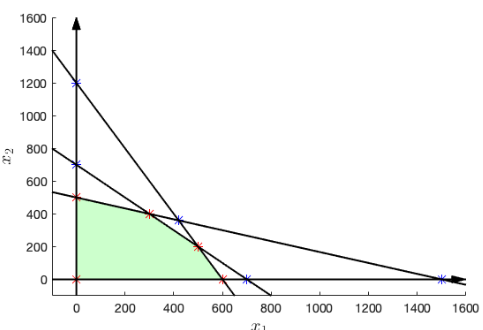
Eckpunkte und Basislösungen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

A I x y b

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 5x_2 \\ \text{u.d.N.} \quad & x_1 + x_2 + y_1 = 700 \\ & x_1 + 3x_2 + y_2 = 1500 \\ & 2x_1 + x_2 + y_3 = 1200 \end{aligned}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$
$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$



Satz 10.3.5: Eckpunkte und zulässige Basislösungen

$\mathbf{x}$ Eckpunkt von $B \Leftrightarrow$

Es existiert $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ mit $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$ zulässige Basislösung von $A\mathbf{x} + I\mathbf{y} = \mathbf{b}$.

Beispiel (Fortsetzung):

Basislösung	Zulässig	Eckpunkt	$4x_1 + 5x_2$
$(0,0,700,1500,1200)^T$	✓	$(0,0)^T$	0
$(700,0,0,800,-200)^T$	–	–	–
$(1500,0,-800,0,-1800)^T$	–	–	–
$(600,0,100,900,0)^T$	✓	$(600,0)^T$	2400
$(0,700,0,-600,500)^T$	–	–	–
$(0,500,200,0,700)^T$	✓	$(0,500)^T$	2500
$(0,1200,-500,-2100,0)^T$	–	–	–
$(420,360,-80,0,0)^T$	–	–	–
$(500,200,0,400,0)^T$	✓	$(500,200)^T$	3000
$(300,400,0,0,200)^T$	✓	$(300,400)^T$	3200

Ein (unvollständiger) Rückblick

- Optimierungsprobleme mit Nebenbedingungen sind in der Regel nicht einfach zu lösen.
- Einige Optimierungsprobleme mit Gleichheitsnebenbedingungen können durch Substitution oder das Lagrange-Verfahren gelöst werden. Achtung:
  - Kann man die Nebenbedingungen nicht geschickt nach einer Variablen auflösen, funktioniert das Verfahren durch Substitution in der Regel nicht.
  - Nicht immer ist die optimale Lösung des Optimierungsproblems eine stationäre Stelle der Lagrange-Funktion.
- Die Ableitung einer durch eine Gleichung der Form $g(\mathbf{x}) = 0$ implizit definierten Funktion $\tilde{g}$ kann (unter gewissen Voraussetzungen) durch die partiellen Ableitungen von g und ohne explizite Kenntnis der Funktion $\tilde{g}$ bestimmt werden.
- Lineare Optimierungsprobleme sind Optimierungsprobleme mit affin-linearer Zielfunktion und Nebenbedingungen, welche durch affin-lineare Funktionen beschrieben werden. Lineare Optimierungsprobleme können durch geschicktes Aufzählen von Eckpunkten gelöst werden.

Ausblick

- In der Veranstaltung “Lineare Optimierung” werden lineare Optimierungsprobleme vertieft.
- In der Veranstaltung “Introduction to Operations Research: Convex Optimization” werden Optimierungsprobleme mit konvexer Zielfunktion und konvexem zulässigem Bereich vertieft.
- In der Veranstaltung “Nichtlineare Optimierung” werden allgemeine Optimierungsprobleme (mit Nebenbedingungen) vertieft.
- Im Seminar “Mathematik online” werden ausgewählte Themen der Veranstaltungen Mathematik I und II vertieft und in Kurzvideos oder durch Spiele etc. erklärt. Bewerbungen mit Kurzlebenslauf und Noten Mathematik I und II an math@business.uzh.ch. Mehr Informationen auf unserer Website.