Aufgabe 1 (Lineare Abbildungen)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch?

(1) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ mit $f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\ x_1\cdot x_2\end{pmatrix}$ ist eine lineare Abbildung. ☐ wahr ☐ falsch

(2) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ mit $f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ ist eine lineare Abbildung. ☐ wahr ☐ falsch

(3) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ mit $f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\ x_1\\ x_3-x_1\\ x_1+x_2-x_3\end{pmatrix}$ ist eine lineare Abbildung. ☐ wahr ☐ falsch

(4) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$ mit $f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ ist eine lineare Abbildung. ☐ wahr ☐ falsch

Lösung:

Definition 8.1.1 - Die lineare Abbildung
Eine Funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, die jedem Urbild $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ ein Bild $\mathbf{y}=f(\mathbf{x})\in\mathbb{R}^m$ zuordnet, heisst lineare Abbildung, wenn eine Matrix $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$ existiert mit $\mathbf{y}=f(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$ bzw.

$$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

- Zu (1): f ist eine lineare Abbildung, wenn es eine 2×2-Matrix gibt, so dass

  $$A\mathbf{x}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\ x_1\cdot x_2\end{pmatrix},$$

  also wenn

  $$\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\ x_1\cdot x_2\end{pmatrix}.$$

  Da es keine Werte von a_{21} und a_{22} geben kann, welche die zweite Gleichung erfüllen, ist Aussage (1) falsch.

- Zu (2): f ist eine lineare Abbildung, wenn es eine 2×4-Matrix gibt, so dass

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also wenn

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da aber für $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ die rechte Seite stets $\mathbf{0}$ ist, kann es keine solche Matrix A geben. Die Aussage (2) ist also falsch.

- Zu (3): f ist eine lineare Abbildung, wenn es eine 4×3-Matrix gibt, so dass

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_3 - x_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Hier gilt, dass

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_3 - x_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix},$$

und somit ist f eine lineare Abbildung.
Wie erhalten wir die Matrix A? Die Bilder der Einheitsvektoren $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$ und $\mathbf{e}^3$ aus $\mathbb{R}^3$ sind die Spalten der Matrix A mit $A\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$. Denn allgemein gilt für eine Matrix $A = [\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n]$, dass $A\mathbf{e}^k = \mathbf{a}^k$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n$. Somit folgt für unseren Fall:

$$A = \left[\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\right] = \left[A\mathbf{e}^1, A\mathbf{e}^2, A\mathbf{e}^3\right] = \left[f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right].$$

Die Aussage (3) ist wahr.

- Zu (4): f ist eine lineare Abbildung, wenn es eine 4×2-Matrix gibt, so dass

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hier gilt, dass

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und somit ist f eine lineare Abbildung. Die Aussage (4) ist wahr.

Aufgabe 2 (Verknüpfungen linearer Abbildungen)

Betrachten Sie drei lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} f_A &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{mit} \quad f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \\ f_B &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{mit} \quad f_B(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}, \\ f_C &: \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p \quad \text{mit} \quad f_C(\mathbf{x}) = C\mathbf{x}, \end{aligned}$$

mit $m \times n-$Matrizen A, B und einer $p \times q-$Matrix C.

(a) Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- (i) Bestimmen Sie m und n, sowie p und q.
- (ii) Bestimmen Sie, falls möglich, die Matrix D, welche die Verknüpfung $(f_A + f_B)(\mathbf{x}) = D\mathbf{x}$ beschreibt.
- (iii) Bestimmen Sie, falls möglich, die Matrix E, welche die Verknüpfung $(f_A - f_C)(\mathbf{x}) = E\mathbf{x}$ beschreibt.
- (iv) Bestimmen Sie, falls möglich, die Matrix F, welche die Verknüpfung $(f_A - f_C + f_B)(\mathbf{x}) = F\mathbf{x}$ beschreibt.
- (v) Bestimmen Sie, falls möglich, die Matrix G, welche die Verknüpfung $(f_A \circ f_B)(\mathbf{x}) = G\mathbf{x}$ beschreibt.
- (vi) Bestimmen Sie, falls möglich, die Matrix H, welche die Verknüpfung $(f_C \circ (f_A \circ f_B))(\mathbf{x}) = H\mathbf{x}$ beschreibt.

(b) Seien $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 9 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- (i) Bestimmen Sie m und n, sowie p und q.
- (ii) Bestimmen Sie, falls möglich, die Matrix D, welche die Verknüpfung $(f_A + f_B + f_C)(\mathbf{x}) = D\mathbf{x}$ beschreibt.
- (iii) Bestimmen Sie, falls möglich, die Matrix E, welche die Verknüpfung $(f_C \circ (f_A \circ f_B))(\mathbf{x}) = E\mathbf{x}$ beschreibt.
- (iv) Bestimmen Sie, falls möglich, die Matrix F, welche die Verknüpfung $(f_B \circ f_C)(\mathbf{x}) = F\mathbf{x}$ beschreibt.

Lösung:

(a) (i) A, B und C sind 2×2-Matrizen. Es ist somit $m = n = p = q = 2$.

(ii)

Satz 8.1.3 - Verknüpfungen linearer Abbildungen

Gegeben sind die linearen Abbildungen

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $(m \times n)$-Matrix A und $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$,
- $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $(m \times n)$-Matrix B und $g(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$,
- $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$ mit $(q \times m)$-Matrix C und $h(\mathbf{x}) = C\mathbf{x}$,

dann gilt

- $f = g \Leftrightarrow A = B$,
- $f + g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist eine lineare Abbildung mit $(f+g)(\mathbf{x}) = (A+B)\mathbf{x}$,
- $f - g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist eine lineare Abbildung mit $(f-g)(\mathbf{x}) = (A-B)\mathbf{x}$, und
- $h \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ ist eine lineare Abbildung mit $(h \circ g)(\mathbf{x}) = h(B\mathbf{x}) = CB\mathbf{x}$,

wobei wir die Summe und Differenz zweier Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ komponentenweise definieren, also $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ und $A - B = (a_{ij} - b_{ij})$.

Mit Hilfe von Satz 8.1.3 und Satz 8.1.4 aus Serie 6 lösen wir nun die nächsten Aufgaben. Die Matrix D ist gegeben durch die Addition der beiden Matrizen A und B,

$$D = A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & -1+0 \\ -1+(-2) & 1+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) Die Matrix E ist gegeben durch die Subtraktion der beiden Matrizen A und C, vgl. Satz 8.1.3,

$$E = A - C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 & -1-2 \\ -1-(-1) & 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(iv) Die Matrix F ist gegeben durch die entsprechende Verknüpfung der Matrizen, vgl. Satz 8.1.3,

$$F = A - C + B = (A - C) + B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alternative Lösung:
Da die Matrixaddition kommutativ und assoziativ ist, vgl. Satz 8.1.4 aus Serie 6, hätten wir auch genauso gut das Resultat aus (ii) benutzen können, um die Matrix F zu berechnen,

$$F = A - C + B = (A + B) - C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(v) Die Matrix G ist gegeben durch die Multiplikation der beiden Matrizen A und B, vgl. Satz 8.1.3,

$$G = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

(vi) Die Matrix H ist gegeben durch die entsprechende Verknüpfung der Matrizen, vgl. Satz 8.1.3,

$$H = C \cdot (A \cdot B) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vorsicht: Das Matrixprodukt ist nicht kommutativ, daher dürfen wir die Reihenfolge der Verknüpfung nicht verändern. Jedoch können wir H, aufgrund der Assoziativität, auch wie folgt berechnen:

$$H = (C \cdot A) \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es ist also $(f_C \circ (f_A \circ f_B))(\mathbf{x}) = ((f_C \circ f_A) \circ f_B)(\mathbf{x})$.

(b) (i) A, B sind 3×3-Matrizen und C ist eine 2×3-Matrix. Es ist somit $m = n = 3$, sowie $p = 2$ und $q = 3$.

(ii) Diese Verknüpfung ist nicht möglich, vgl. Satz 8.1.3. Die lineare Abbildung f_C bildet den $\mathbb{R}^3$ auf den $\mathbb{R}^2$ ab, f_A und f_B jedoch auf den $\mathbb{R}^3$. Ein Vektor des $\mathbb{R}^2$ lässt sich nicht mit einem Vektor des $\mathbb{R}^3$ addieren. Die Matrixaddition ist nur definiert für Matrizen vom gleichen Typ.

(iii) $(f_A \circ f_B)$ ist eine Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$. Die Definitionsmenge der linearen Abbildung f_C ist der $\mathbb{R}^3$. Die lineare Abbildung $f_C \circ (f_A \circ f_B)$ muss demnach existieren, vgl. Satz 8.1.3. In der Tat, ist

$$\begin{aligned} E = C \cdot (A \cdot B) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 9 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 1 & 3 \\ -10 & -1 & 3 \\ -24 & -9 & -9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -43 & -9 & -3 \\ -10 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analog zur Teilaufgabe (a)(vi) hätten wir auch die Assoziativität der Matrixmultiplikation nutzen können, um E zu berechnen:

$$\begin{aligned} E = (C \cdot A) \cdot B &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 9 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -5 & 6 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 9 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -43 & -9 & -3 \\ -10 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(iv) Die lineare Abbildung f_C bildet den $\mathbb{R}^3$ auf den $\mathbb{R}^2$ ab, jedoch ist der Definitionsbereich von f_B der $\mathbb{R}^3$. Daher ist die Verknüpfung $(f_B \circ f_C)\mathbf{x} = f_B(f_C(\mathbf{x}))$ nicht möglich, vgl. Satz 8.1.3. Die Matrixmultiplikation einer $m \times n-$Matrix mit einer $p \times q-$Matrix ist nur möglich, wenn $n = p$, vgl. Definition 6.5.9 aus Serie 4. In diesem Fall ist aber $n = 3$ und $p = 2$.

Aufgabe 3 (Lineare Abbildungen)

Betrachten Sie folgende lineare Abbildungen:

$$f_A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f_B(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Finden Sie Matrizen A und B, sodass $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ und $f_B(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$.

(b) Wie kann man sich anschaulich $f_A(\mathbb{R}^2) = \text{Bild}(f_A) = \{\mathbf{y} \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,\ \text{sodass } A\mathbf{x} = \mathbf{y}\}$ vorstellen? Bestimmen Sie eine Basis sowie die Dimension von $f_A(\mathbb{R}^2)$. Ist die Abbildung surjektiv, injektiv oder bijektiv?

(c) Wie kann man sich anschaulich $f_B(\mathbb{R}^2) = \text{Bild}(f_B) = \{\mathbf{y} \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,\ \text{sodass } B\mathbf{x} = \mathbf{y}\}$ vorstellen? Bestimmen Sie eine Basis sowie die Dimension von $f_B(\mathbb{R}^2)$. Ist die Abbildung surjektiv, injektiv oder bijektiv?

(d) Betrachten Sie nun die additive Verknüpfung dieser beiden Abbildungen:

$$f_C(\mathbf{x}) = (f_A + f_B)(\mathbf{x}).$$

Bestimmen Sie zunächst eine Matrix C, sodass $f_C(\mathbf{x}) = C\mathbf{x}$. Wie kann man sich anschaulich $f_C(\mathbb{R}^2) = \text{Bild}(f_C) = \{\mathbf{y} \mid \exists\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,\ \text{sodass } C\mathbf{x} = \mathbf{y}\}$ vorstellen? Bestimmen Sie eine Basis sowie die Dimension von $f_C(\mathbb{R}^2)$. Ist die Abbildung surjektiv, injektiv oder bijektiv?

Lösung:

(a) Es gilt

$$f_A(\mathbf{x}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A}\mathbf{x}, \qquad f_B(\mathbf{x}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=B}\mathbf{x},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Erkennt man dies nicht sofort, so setzt man einfach die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{e}^1$ und $\mathbf{e}^2$, in die Abbildungsvorschrift ein. Analog zur Aufgabe 1 (3), erhalten wir dadurch

$$A = \left[\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2\right] = \left[A\mathbf{e}^1, A\mathbf{e}^2\right] = \left[f_A(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}), f_A(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})\right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

und

$$B = \left[\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2\right] = \left[B\mathbf{e}^1, B\mathbf{e}^2\right] = \left[f_B(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}), f_B(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})\right] = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

(b)

> **Definition 8.1.2 - Das Bild einer linearen Abbildung**
> Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung und $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Menge
>
> $$f(M) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \text{es existiert ein } \mathbf{x} \in M \text{ mit } f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}$$
>
> heisst Bild von M unter f. Man nennt $f(\mathbb{R}^n)$ auch Bild oder Wertebereich von f.

Setzen wir die Abbildungsvorschrift ein, so erhalten wir

$$f_A(\mathbb{R}^2) = \text{Bild}(f_A) = \{\mathbf{y} \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,\ \text{sodass } A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\}.$$

Somit ist

$$\text{Bild}(f_A) = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R}\right\} = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Das Bild von $\mathbb{R}^2$ unter f_A ist damit die lineare Hülle von $(1,0)^T$. Anschaulich kann man sich das Bild $f_A(\mathbb{R}^2)$ als x_1-Achse vorstellen. Eine mögliche Basis wäre der Vektor $(1,0)^T$. Um die Dimension von $f_A(\mathbb{R}^2)$ zu bestimmen und die Eigenschaften der linearen Abbildung zu untersuchen, bestimmen wir den Rang der Matrix A. Denn es gilt:

Satz 8.1.5 - Charakterisierung des Bildes
Sei A eine $m \times n$-Matrix mit Spaltenvektoren $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n \in \mathbb{R}^m$ und $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ eine lineare Abbildung. Es gilt:

- $f(\mathbb{R}^n) = \text{lin}\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n\}$;
- Die Dimension von $f(\mathbb{R}^n)$ ist $\text{rang}(A)$.

Satz 8.1.6 - Eigenschaften linearer Abbildungen.
Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ eine lineare Abbildung. Die lineare Abbildung f ist

- surjektiv genau dann, wenn $\text{rang}(A) = m$;
- injektiv genau dann, wenn $\text{rang}(A) = n$;
- bijektiv genau dann, wenn $\text{rang}(A) = m = n$. Die Umkehrabbildung von f ist in diesem Fall eine lineare Abbildung.

Die Matrix A liegt bereits in Zeilenstufenform vor und hat nur eine von Nullzeilen verschiedene Zeile. Der Rang der Matrix A ist daher 1. Die Dimension von $f_A(\mathbb{R}^2)$ ist somit 1, vgl. Satz 8.1.5. Da $\text{rang}(A) = 1$ ist, aber $1 \neq m$ und $1 \neq n$, ist die Abbildung weder surjektiv noch injektiv. Insbesondere kann sie dadurch nicht bijektiv sein, vgl. Satz 8.1.6.

– –

Alternative Lösung:
Auch anschaulich kann man sich überlegen, dass die Abbildung nicht surjektiv sein kann, da das Bild nur der x_1-Achse und nicht dem ganzen $\mathbb{R}^2$ entspricht. Die Funktion kann nicht injektiv sein, da verschiedene Elemente des $\mathbb{R}^2$ auf das selbe Element abgebildet werden, sofern die erste Komponente übereinstimmt. Es gilt $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ für alle $x_2 \in \mathbb{R}$.

(c) Setzen wir die Abbildungsvorschrift ein, so erhalten wir

$$f_B(\mathbb{R}^2) = \text{Bild}(f_B) = \{\mathbf{y} \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \text{ sodass } B\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\}.$$

Somit ist

$$\text{Bild}(f_B) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

und eine mögliche Basis von $f_B(\mathbb{R}^2)$ der Vektor $(0,1)^T$. Anschaulich kann man sich das Bild $f_B(\mathbb{R}^2)$ als x_2-Achse vorstellen.
Um die Dimension von $f_B(\mathbb{R}^2)$ zu bestimmen, berechnen wir den Rang der Matrix B. Streicht man die erste Zeile der Matrix B (da diese Zeile eine Nullzeile ist) so liegt die Matrix B in Zeilenstufenform vor und hat nur eine von Nullzeilen verschiedene Zeile. Der Rang der Matrix B ist 1, vgl. Satz 7.4.4 aus Serie 6. Die Dimension von $f_B(\mathbb{R}^2)$ ist somit 1, vgl. Satz 8.1.5.
Da $\text{rang}(B) = 1 < 2 = n = m$ ist, ist die Abbildung weder surjektiv noch injektiv. Insbesondere kann sie dadurch nicht bijektiv sein, , vgl. Satz 8.1.6.

– –

Alternative Lösung:
Auch anschaulich kann man sich überlegen, dass die Abbildung nicht surjektiv sein kann, da das Bild nur der x_2-Achse und nicht dem ganzen $\mathbb{R}^2$ entspricht. Die Funktion kann nicht injektiv sein, da verschiedene Elemente des $\mathbb{R}^2$ auf das selbe Element abgebildet werden, sofern die zweite

Komponente übereinstimmt. Es gilt $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *für alle* $x_1 \in \mathbb{R}$.

(d) Die Abbildungsmatrix C der additiven Verknüpfung der beiden linearen Abbildungen entspricht der Summe der Abbildungsmatrizen von f_A und f_B:

$$C = A + B \iff C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix C ist die Einheitsmatrix und beschreibt somit die Identität, $\mathbf{y} = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Setzen wir die Abbildungsvorschrift ein, so erhalten wir

$$f_C(\mathbb{R}^2) = \text{Bild}(f_C) = \{\mathbf{y} \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \text{ sodass } C\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\}.$$

Somit ist

$$\text{Bild}(f_C) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Das Bild von $\mathbb{R}^2$ unter f_C ist damit die lineare Hülle von $(1,0)^T$ und $(0,1)^T$, also der gesamte $\mathbb{R}^2$. Eine mögliche Basis wären die Vektoren $(1,0)^T$ und $(0,1)^T$.
Um die Dimension von $f_C(\mathbb{R}^2)$ zu bestimmen, berechnen wir den Rang der Matrix C. Die Matrix C liegt in Zeilenstufenform vor und hat 2 von Nullzeilen verschiedene Zeilen. Der Rang der Matrix C ist 2, vgl. Satz 7.4.4 aus Serie 6. Die Dimension von $f_C(\mathbb{R}^2)$ ist somit 2, vgl. Satz 8.1.5. Da $\text{rang}(C) = 2 = n = m$ ist, folgt die Injektivität, die Surjektivität und damit auch die Bijektivität von f_C, vgl. Satz 8.1.6.

Aufgabe 4 (Lineare Abbildung, Bild und Urbild der Abbildung)

Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) (i) Bestimmen Sie das Bild $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ von $\mathbf{x}^1 = (1,1,0,0)^T$ und $\mathbf{x}^2 = (1,0,1,0)^T$.

(ii) Prüfen Sie rechnerisch für $\mathbf{x}^1 = (1,1,0,0)^T$ und $\mathbf{x}^2 = (1,0,1,0)^T$ nach, dass gilt:
$f(\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2) = f(\mathbf{x}^1) + f(\mathbf{x}^2)$
$f(\alpha\mathbf{x}^1) = \alpha f(\mathbf{x}^1),\ \alpha = 2.$

(b) Bestimmen Sie jeweils die Menge aller Urbilder $\mathbf{x}$ von $\mathbf{y}$, in folgenden Fällen:

(i) $\mathbf{y} = (3,4,5)^T$

(ii) $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis sowie die Dimension von $f(\mathbb{R}^4)$. Ist die Abbildung surjektiv, injektiv oder bijektiv?

Lösung:

(a) (i) Das Bild $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ bestimmen wir jeweils als $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$.
Für $\mathbf{x}^1 = (1,1,0,0)^T$ erhalten wir:

$$\mathbf{y}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Für $\mathbf{x}^2 = (1,0,1,0)^T$ erhalten wir:

$$\mathbf{y}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Wir prüfen zunächst $f(\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2) = f(\mathbf{x}^1) + f(\mathbf{x}^2)$ nach.
Wir erhalten einerseits:

$$f(\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2) = f(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Anderseits gilt:

$$f(\mathbf{x}^1) + f(\mathbf{x}^2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}. \checkmark$$

Mit $\alpha = 2$ prüfen wir $f(\alpha\mathbf{x}^1) = \alpha f(\mathbf{x}^1)$ nach.

$$f(\alpha\mathbf{x}^1) = f(2\mathbf{x}^1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Anderseits gilt: $\alpha f(\mathbf{x}^1) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}. \checkmark$

(b) Die Menge aller Urbilder $\mathbf{x}$ von $\mathbf{y}$ ist die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

(i) Ein Urbild von $\mathbf{y} = (3,4,5)^T$, d.h. ein Element der Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des LGS $A\mathbf{x} = (3,4,5)^T$, kennen wir schon: Es ist $\mathbf{x}^1$ aus dem Teil (a)(i).
Um alle Urbilder zu bestimmen, lösen wir das inhomogene LGS $A\mathbf{x} = (3,4,5)^T$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{y}$		
1	1	2	1	0	3		eliminiere x_1
2	1	3	1	1	4		
3	1	4	0	1	5		
4	1	2	1	0	3	1	
5	0	1	0	1	1	2 − 1	eliminiere x_2
6	0	2	−1	1	2	3 − 1	
7	1	0	1	−2	1	4 − 2 5	
8	0	1	0	1	1	5	
9	0	0	−1	−1	0	6 − 2 5	eliminiere x_3 und erzeuge führende 1
10	1	0	0	−3	1	7 + 9	
11	0	1	0	1	1	8	
12	0	0	1	1	0	(−1) · 9	

Das LGS im Endtableau liegt in expliziter Form vor. Wir erhalten mit $x_4 = t$ die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\},$$

welche der Menge aller Urbilder von $\mathbf{y} = (3,4,5)^T$ entspricht.

(ii) Um alle Urbilder von $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ zu bestimmen, lösen wir das homogene LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Die Lösungsmenge $\mathbb{L}_0$ können wir aus der Lösungsmenge $\mathbb{L}$ in Aufgabe (b)(i) ablesen. Wir können im Endtableau aus Aufgabe (b) (i) die rechte Seite mit dem Nullvektor ersetzen und erhalten das Endtableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{0}$	
10	1	0	0	−3	0	
11	0	1	0	1	0	
12	0	0	1	1	0	

Daraus können wir die Lösungsmenge $\mathbb{L}_0$ ablesen:

$$\mathbb{L}_0 = \left\{ t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c) Die Spaltenvektoren der Matrix A erzeugen das Bild des $\mathbb{R}^4$ unter f. Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3, \mathbf{a}^4],$$

gilt mit

$$\mathbf{a}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dass

$$f(\mathbb{R}^4) = \operatorname{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3, \mathbf{a}^4\}.$$

Da vier Vektoren des $\mathbb{R}^3$ stets linear abhängig sind, können diese vier Vektoren keine Basis des Bildes darstellen. Da man aber leicht durch die Lösung eines entsprechenden linearen Gleichungssystems zeigen kann, dass beispielsweise $\{\mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3, \mathbf{a}^4\}$ linear unabhängig sind, stellt $\{\mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3, \mathbf{a}^4\}$ eine Basis des Bildes dar. Die drei linear unabhängigen Vektoren des $\mathbb{R}^3$ spannen den $\mathbb{R}^3$ auf. Die Dimension des Bildes ist somit 3 und die Abbildung ist surjektiv. (Auf die Surjektivität kann man auch wegen $\operatorname{rang}(A) = 3 = m$ schliessen.) Da aber $\operatorname{rang}(A) = 3 < 4 = n$, ist die Abbildung nicht injektiv und damit nicht bijektiv.

Aufgabe 5 (Berechnung der Inversen mit einem simultanen LGS)

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Matrizen, falls möglich, die Inverse:

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(e) $F = A \cdot D$

Lösung:

(a)

Definition 8.2.2 - Die Inverse einer Matrix
Sei A eine quadratische Matrix und I die Einheitsmatrix der Ordnung n. Falls eine quadratische Matrix A^{-1} der Ordnung n existiert, so dass

$$A \cdot A^{-1} = I$$

gilt, dann heisst A^{-1} Inverse von A. Die Matrix A heisst in diesem Fall invertierbar.

Satz 8.2.2 - Die Inverse und die Umkehrabbildung
Sei A eine quadratische Matrix der Ordnung n. Die Inverse A^{-1} existiert genau dann, wenn $\operatorname{rang}(A) = n$, bzw. wenn A regulär ist. In diesem Fall ist die Umkehrabbildung f^{-1} der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ gegeben als

$$f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad f^{-1}(\mathbf{y}) = A^{-1}\mathbf{y}.$$

Berechnung von A^{-1}:

	A			$\mathbf{e}^1$	$\mathbf{e}^2$	$\mathbf{e}^3$		
1	0	1	1	1	0	0		tausche Zeile 1 mit Zeile 3
2	−1	0	1	0	1	0		
3	1	0	0	0	0	1		
4	1	0	0	0	0	1	3	
5	−1	0	1	0	1	0	2	tausche Zeile 5 mit Zeile 6
6	0	1	1	1	0	0	1	
7	1	0	0	0	0	1	4	eliminiere x_1
8	0	1	1	1	0	0	6	
9	−1	0	1	0	1	0	5	
10	1	0	0	0	0	1	7	
11	0	1	1	1	0	0	8	
12	0	0	1	0	1	1	9 + 7	eliminiere x_3
13	1	0	0	0	0	1	10	
14	0	1	0	1	−1	−1	11 − 12	
15	0	0	1	0	1	1	12	

Es gilt also

$$A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \mathbf{e}^1, A\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \mathbf{e}^2 \text{ und } A\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \mathbf{e}^3.$$

Die Inverse lautet somit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man kann die Inverse also einfach auf der rechten Seite der Gleichungen $(13)-(15)$ ablesen.

(b) B ist nicht invertierbar, da B eine 3×4-Matrix und somit nicht quadratisch ist.

(c) Berechnung von C^{-1}:

	C			$\mathbf{e}^1$	$\mathbf{e}^2$	$\mathbf{e}^3$		
1	1	−1	1	1	0	0		eliminiere x_1
2	1	−1	2	0	1	0		
3	1	−1	3	0	0	1		
4	1	−1	1	1	0	0	1	
5	0	0	1	−1	1	0	2 − 1	überspringe x_2 und eliminiere x_3
6	0	0	2	−1	0	1	3 − 1	
7	1	−1	0	2	−1	0	4 − 5	
8	0	0	1	−1	1	0	5	
9	0	0	0	1	−2	1	6 − 2 5	

Das LGS ist nicht lösbar, da im Endtableau die Koeffizientenmatrix eine Nullzeile hat, die Komponenten der zugehörigen rechten Seiten aber ungleich 0 sind.
Die Matrix C hat in Zeilenstufenform 2 von Nullzeilen verschiedene Zeilen. Die Matrix hat somit nicht vollen Rang und ist daher nicht invertierbar, vgl. Satz 8.2.2.

Alternative Lösung:
Man erkennt sofort, dass die ersten beiden Spaltenvektoren der Matrix C linear abhängig sind, somit ist $\mathrm{rang}(C) \leq 2$. *Die Inverse der Matrix C existiert somit nicht, vgl. Satz 8.2.2.*

(d) Berechnung von D^{-1}:

	D			$\mathbf{e}^1$	$\mathbf{e}^2$	$\mathbf{e}^3$		
1	1	0	1	1	0	0		eliminiere x_1
2	0	1	0	0	1	0		
3	1	0	2	0	0	1		
4	1	0	1	1	0	0	1	
5	0	1	0	0	1	0	2	
6	0	0	1	−1	0	1	3 − 1	eliminiere x_3
7	1	0	0	2	0	−1	4 − 6	
8	0	1	0	0	1	0	5	
9	0	0	1	−1	0	1	6	

Aus dem Endtableau erhalten wir:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) Es gilt:

$$(AD)^{-1} \cdot AD = I \quad \Leftrightarrow \quad (AD)^{-1} \cdot A = I \cdot D^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad (AD)^{-1} = I \cdot D^{-1} A^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad (AD)^{-1} = D^{-1} A^{-1}.$$

Durch Multiplikation der Inversen von D und A erhalten wir also

$$F^{-1} = (AD)^{-1} = D^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

als Inverse der Matrix $F = AD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Die Inverse einer $n \times n$-Matrix A kann durch simultane Lösung des LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \mathbf{e}^j$, $j = 1, \ldots, n$, gefunden werden.

Aufgabe 6 (Lineare Abbildung, Spiegelung)

Gegeben ist die folgende lineare Abbildung

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \quad \text{wobei } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

(a) Finden Sie eine Matrix A, so dass $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ wobei $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$.

(b) f ist eine Abbildung von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$. Bestimmen Sie m und n sowie die Dimension des Bildes von $\mathbb{R}^n$ unter f, sprich $\dim(f(\mathbb{R}^n))$. Ist die Abbildung surjektiv, injektiv oder bijektiv?

(c) Erläutern Sie die geometrische Bedeutung von $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix})$ und illustrieren Sie diese graphisch, indem Sie das Bild des Punktes $(3,4)^T$ bestimmen.

(d) Finden Sie die Umkehrabbildung zu f.

Lösung:

(a) Die Abbildungsmatrix ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Die Probe zeigt

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

Alternative Lösung:

Alternativ kann man die Bilder der Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}^1 = (1,0)^T$, $\boldsymbol{e}^2 = (0,1)^T$ bestimmen. Sie sind die Spalten der Matrix A:

$$A = [\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2] = [A\boldsymbol{e}^1, A\boldsymbol{e}^2] = \left[f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}), f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})\right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right].$$

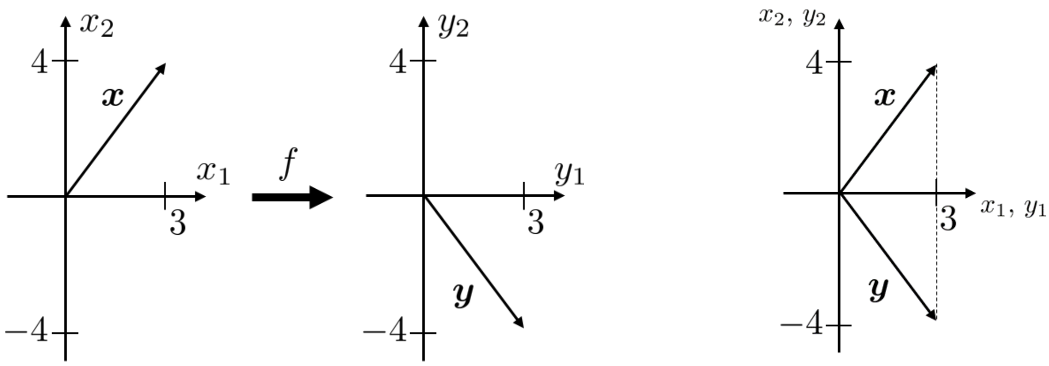
(b) Die Abbildung ist beschrieben durch

$$f: \begin{array}{ccccccccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m & & & & & & \\ \underbrace{\mathbf{x}}_{\in\mathbb{R}^2} & \mapsto & \underbrace{A}_{(2\times 2)} & \cdot & \underbrace{\mathbf{x}}_{\in\mathbb{R}^2} & = & \underbrace{\mathbf{y}}_{\in\mathbb{R}^2} & \Rightarrow & \begin{array}{c} n=2 \\ m=2 \end{array} \end{array}$$

Um die Dimension von $f(\mathbb{R}^2)$ zu bestimmen, berechnen wir den Rang der Matrix A. Die Matrix A liegt bereits in Zeilenstufenform vor und hat 2 von Nullzeilen verschiedene Zeilen. Der Rang der Matrix A ist 2, vgl. Satz 7.4.4 aus Serie 6. Die Dimension von $f(\mathbb{R}^2)$ ist somit 2, vgl. Satz 8.1.5 aus Aufgabe 3. Da $\operatorname{rang}(A) = 2 = n = m$ ist, folgt, dass f injektiv und surjektiv und damit auch bijektiv ist, vgl. Satz 8.1.6 aus Aufgabe 3.

(c) Die Abbildung f spiegelt das Urbild an der x_1-Achse:

$$f(\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}}$$



(d) Aus Satz 8.2.2 aus Aufgabe 5 wissen wir, dass die Inverse A^{-1} existiert (da $\operatorname{rang}(A) = 2 = n = m$) und das die Umkehrabbildung f^{-1} der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ gegeben ist als $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}$. Wir berechenen die Inverse von A durch simultane Lösung des LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \mathbf{e}^j$, $j = 1, 2$:

	A		$\mathbf{e}^1$	$\mathbf{e}^2$	
①	1	0	1	0	
②	0	−1	0	1	
③	1	0	1	0	
④	0	1	0	−1	(−1)②

Aus dem Endtableau erhalten wir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

− −

Alternative Lösung:

Da die lineare Abbildung mit Abbildungsmatrix A den Vektor $\mathbf{x}$ *an der* x_1 *Achse spiegelt, um* $\mathbf{y}$ *zu erhalten, erscheint es logisch, dass die Umkehrabbildung den Vektor* $\mathbf{y}$ *erneut an der* x_1 *Achse* *spiegeln muss, um so wieder* $\mathbf{x}$ *zu erhalten. Man vermutet also, dass im Beispiel* $A^{-1} = A$ *gilt. Allgemein ist die Inverse* A^{-1} *von* A *eine Matrix, für welche* $A^{-1}A = I$ *gilt. Die Probe zeigt hier:*

$$A^{-1}A = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = I. \quad \checkmark$$

Also ist hier wirklich $A^{-1} = A$*. Die Umkehrabbildung ist also gegeben durch*

$$f^{-1}(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7 (Lineare Abbildung, Drehung)

Gegeben ist die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, wobei A eine 2×2-Matrix ist.

(a) Skizzieren Sie das durch die Punkte $(0,0)^T, (1,0)^T$, und $(-1,2)^T$ definierte Dreieck.

(b) Bestimmen Sie die lineare Abbildung f mit $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $f(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

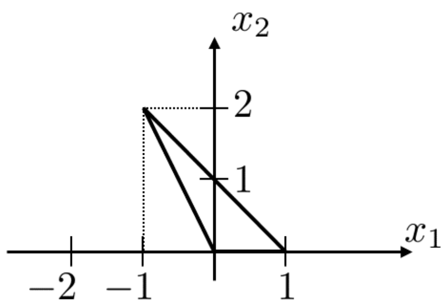
(c) Skizzieren Sie das durch die Bildpunkte aus (b) definierte Dreieck.

(d) Interpretieren Sie die Abbildung f mit Hilfe von (a) und (c).

(e) Geben Sie - falls möglich - die inverse Abbildung f^{-1} an und interpretieren Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe von (d).

Lösung:

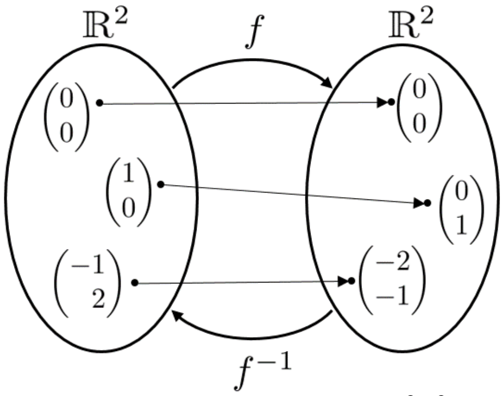
(a)



(b) Gegeben ist die lineare Abbildung $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ von der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen nun die Matrix A.



Da $f(\mathbf{0}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ für alle $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt, ist diese Angabe nicht nützlich, um die Matrix der Abbildung zu bestimmen.

Einsetzen des Punktes $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ in die lineare Abbildung ergibt

$$f(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow a_{11} = 0,\ a_{21} = 1.$$

Einsetzen des Punktes $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ in die lineare Abbildung ergibt

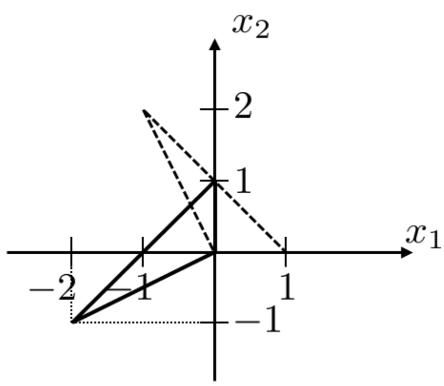
$$f(\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned}-a_{11}+2a_{12} &= -2\\ -a_{21}+2a_{22} &= -1.\end{aligned}$$

Wir wissen bereits, dass $a_{11} = 0$ und $a_{21} = 1$. Eingesetzt in das zweite Gleichungssystem ergibt das

$$\begin{aligned}-a_{11}+2a_{12} &= -2\\ -a_{21}+2a_{22} &= -1\end{aligned} \iff \begin{aligned}0+2a_{12} &= -2\\ -1+2a_{22} &= -1\end{aligned} \iff \begin{aligned}a_{12} &= -1\\ a_{22} &= 0.\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $A = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

(c)



(d) Die Abbildung f mit $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix}-x_2\\x_1\end{pmatrix} = \mathbf{y}$ bewirkt eine Drehung des ursprünglichen Dreiecks um 90° gegen den Uhrzeigersinn.

(e) Bringt man die Matrix A auf Zeilenstufenform, so sieht man, dass die Matrix A zwei von Nullzeilen verschiedene Zeilen hat. Der Rang der Matrix A ist somit 2, vgl. Satz 7.4.4 aus Serie 6. Somit gilt $\operatorname{rang}(A) = 2 = n$ und wir wissen aus Satz 8.2.2, dass die Umkehrabbildung existiert. Die Matrix A^{-1} kann durch simultane Lösung des LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \mathbf{e}^j$, $j = 1, 2$, gefunden werden:

	A		$\mathbf{e}^1$	$\mathbf{e}^2$		
①	0	−1	1	0		tausche Zeile 1 mit Zeile 2
②	1	0	0	1		
③	1	0	0	1	②	
④	0	−1	1	0	①	erzeuge führende 1
⑤	1	0	0	1	③	
⑥	0	1	−1	0	(−1)④	

Aus dem Endtableau erhalten wir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die inverse Abbildung bewirkt nach (d) eine Drehung um 90° im Uhrzeigersinn.

– –

Alternative Lösung:

Die inverse Abbildung soll nach (d) eine Drehung um 90° *im Uhrzeigersinn bewirken. Sie ist also durch die Matrix* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *bestimmt, denn*

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I. \quad \checkmark$$

Die inverse Abbildung ist also $f^{-1}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 8 (Lineare Abbildung, Ausnutzung der Linearität)

Sei $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, von der bekannt ist, dass

$$g(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad g(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $g(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ und $g(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix})$.

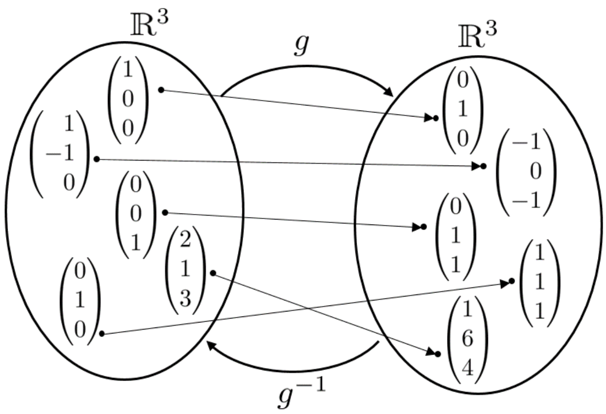
(b) Bestimmen Sie die Matrix A, sodass $g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis sowie die Dimension von $g(\mathbb{R}^3)$. Ist die Abbildung surjektiv, injektiv oder bijektiv?

(d) Existiert die Umkehrabbildung g^{-1}? Falls ja, beschreiben Sie g^{-1} durch eine geeignete Matrix.

Lösung:

(a)



Es gilt: $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$. Wir nutzen die Linearität der Funktion g und rechnen:

$$\begin{aligned}
g(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) &= g(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix})\\
&= g(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) - g(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Es gilt: $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Wir nutzen wieder die Linearität der Funktion g sowie die vorherige Berechnung und erhalten:

$$\begin{aligned}
g(\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}) &= g(2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix})\\
&= 2g(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) + 1g(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) + 3g(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) = 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\6\\4\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(b) Die Bilder der Einheitsvektoren $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$ und $\mathbf{e}^3$ aus $\mathbb{R}^3$ sind die Spalten der Matrix A mit $A\mathbf{x} = g(\mathbf{x})$. Allgemein gilt für eine Matrix $A = [\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^n]$, dass $A\mathbf{e}^k = \mathbf{a}^k$ für alle $k = 1, 2, \dots, n$. Somit folgt für unseren Fall:

$$A = \left[\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\right] = \left[A\mathbf{e}^1, A\mathbf{e}^2, A\mathbf{e}^3\right] = \left[g(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}), g(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}), g(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix})\right] = \left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right].$$

Daher ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Die Matrix A besteht aus 3 linear unabhängigen Spaltenvektoren. Aus Satz 8.1.5 und Satz 8.1.6 aus Aufgabe 3 folgt daher:

$$\operatorname{rang}(A) = 3 \quad \Longrightarrow \quad \dim(g(\mathbb{R}^3)) = \dim(\operatorname{lin}\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}) = \operatorname{rang}(A) = 3.$$

Zudem ist $\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$ eine Basis von $g(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$. Bezeichnen wir, wie üblich, die Dimension des Definitionsbereiches mit n und die Dimension des Wertebereiches mit m, so gilt also, dass $\operatorname{rang}(A) = 3 = n = m$ ist und daher ist g injektiv, surjektiv und damit auch bijektiv, vgl. Satz 8.1.6 aus Aufgabe 3.

(d) Da $\operatorname{rang}(A) = 3 = n = m$ folgt aus Satz 8.2.2 aus Aufgabe 5, dass die Umkehrabbildung existiert. Die Umkehrabbildung ist bestimmt durch die Inverse von A,

$$g^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \text{ mit } g^{-1}(\mathbf{y}) = A^{-1}\mathbf{y}.$$

Die Matrix A^{-1} kann durch simultane Lösung des LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \mathbf{e}^j$, $j = 1,2,3$, gefunden werden.

	A			$\mathbf{e}^1$	$\mathbf{e}^2$	$\mathbf{e}^3$		
1	0	1	0	1	0	0		tausche Zeile 1 mit Zeile 2
2	1	1	1	0	1	0		
3	0	1	1	0	0	1		
4	1	1	1	0	1	0	2	
5	0	1	0	1	0	0	1	eliminiere x_2
6	0	1	1	0	0	1	3	
7	1	0	1	−1	1	0	4 − 5	
8	0	1	0	1	0	0	5	
9	0	0	1	−1	0	1	6 − 5	eliminiere x_3
10	1	0	0	0	1	−1	7 − 9	
11	0	1	0	1	0	0	8	
12	0	0	1	−1	0	1	9	

Aus dem Endtableau erhalten wir

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alternative Lösung:

Die Bilder der Einheitsvektoren $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$ *und* $\mathbf{e}^3$ *aus* $\mathbb{R}^3$ *sind die Spalten der Matrix* A^{-1} *mit* $A^{-1}\mathbf{x} = g^{-1}(\mathbf{x})$. *Aus den Angaben in der Aufgabenstellung wissen wir, dass*

$$g^{-1}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g^{-1}(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g^{-1}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. *Wir nutzen die Linearität der Funktion* g^{-1} *und rechnen:*

$$\begin{aligned} g^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) &= g^{-1}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) \\ &= g^{-1}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) - g^{-1}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) - g^{-1}(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$g^{-1}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Wir nutzen die Linearität der Funktion* g^{-1} *und rechnen:*

$$\begin{aligned} g^{-1}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) &= g^{-1}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \\ &= g^{-1}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) - g^{-1}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit folgt für unseren Fall:

$$A^{-1} = \left[A^{-1}\mathbf{e}^1, A^{-1}\mathbf{e}^2, A^{-1}\mathbf{e}^3\right] = \left[g^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), g^{-1}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}), g^{-1}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})\right] = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

Daher ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9 (Rechnen mit Inversen)

(a) Von einer regulären 4×4-Matrix A sei die Inverse bekannt:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & 9 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 8 & 3 & 15 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für den Vektor $\mathbf{b} = (4, -2, 0, 1)^T$.

(b) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie, falls möglich, die Matrizengleichung

(i) $AX + 3XB = 5C$ nach X auf,
(ii) $AY = 2BY + 10C$ nach Y auf,
(iii) $A^{-1}Z_1 = B$ nach Z_1 auf,
(iv) $Z_2A^{-1} = B$ nach Z_2 auf.

(c) Es sei die folgende Matrix gegeben

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $A^3 - 3A^2 + 4I$ entspricht der Nullmatrix, d.h.

$$A^3 - 3A^2 + 4I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie dieses Ergebnis, um die Inverse von A zu bestimmen.

(d) Es sei I die Einheitsmatrix der Ordnung 5, A, B, und C reguläre 5×5-Matrizen mit $AB = 5I$ sowie $CA = B$. Vereinfachen Sie folgenden Term so weit, dass möglichst wenig Summanden übrig bleiben und nur noch A^{-1} und die Einheitsmatrix I vorkommen:

$$A7B + 20B^{-1}A^{-1} + 2A^{-1}B + 3ACB^{-1} + 13A^{-1}C^{-1}B + B^{-1}CA.$$

(e) Sei $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ wobei
$A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$ und $B^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$.

Zudem sei $\mathbf{b} = (0, 1)^T$. Lösen Sie das LGS $A \cdot B \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Lösung:

> **Satz 8.2.4 - Lösung eines LGS mit Hilfe der Inversen**
> Sei A eine invertierbare quadratische Matrix der Ordnung n und $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Dann gilt
> $$A^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{x}.$$

(a) Wir können Satz 8.2.4 anwenden und erhalten,

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & 9 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 8 & 3 & 15 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ 9 \\ 31 \end{pmatrix} \implies \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ 9 \\ 31 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) (i) Da A und B jeweils 2×2-Matrizen sind, muss X auch eine 2×2-Matrix sein, sodass sowohl AX, als auch XB definiert ist. Somit steht auf der linken Seite eine 2×2-Matrix und auf der rechten eine 2×3-Matrix. Solch ein X kann es also nicht geben.

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} && AY &= 2BY + 10C \\ \iff && AY - 2BY &= 10C \\ \iff && (A-2B)Y &= 10C \\ \iff && Y &= (A-2B)^{-1}10C. \end{aligned}$$

Wir müssen also die Inverse von

$$A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

berechnen, sofern diese existiert. Diese kann durch simultanes Lösen des LGS $(A-2B)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \mathbf{e}^j$, $j = 1, 2$ gefunden werden.

	x_1	x_2	$\mathbf{e}^1$	$\mathbf{e}^2$		
1	1	-1	1	0		
2	0	-5	0	1		eliminiere x_2 und erzeuge führende 1
3	1	0	1	$-\frac{1}{5}$	$1 - \frac{1}{5} \cdot 2$	
4	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5} \cdot 2$	

Somit existiert $(A-2B)^{-1}$ und es gilt

$$\begin{aligned} Y = (A-2B)^{-1}10C = 10 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -32 & -26 \\ -4 & -2 & -6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(iii) Aus der Vorlesung kennen wir folgende Rechenregeln für invertierbare Matrizen:

> **Satz 8.2.5 - Rechenregeln invertierbarer Matrizen**
> Seien A und B reguläre Matrizen der Ordnung n. Dann gilt:
> i. $A^{-1}A = AA^{-1} = I$;
> ii. $(A^{-1})^{-1} = A$;

iii. A^T ist ebenfalls regulär mit $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;
iv. $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$, falls $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$;
v. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Die Inverse von A^{-1} ist A, da $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, vgl. Satz 8.2.5. Daher ist

$$A^{-1}Z_1 = B \iff Z_1 = AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

(iv) Die Inverse von A^{-1} ist A, da $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, vgl. Satz 8.2.5. Daher ist

$$Z_2A^{-1} = B \iff Z_2A^{-1}A = BA \iff Z_2 = BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}.$$

(c) Die Inverse von A ist die Matrix A^{-1}, sodass $A^{-1}A = I$, vgl. Definition 8.2.2 aus Aufgabe 5. Es gilt daher

$$\begin{aligned} & A^3 - 3A^2 + 4I = && \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \iff\quad & A^3 - 3A^2 = && -4I \\ \iff\quad & -\tfrac{1}{4}A^3 + \tfrac{3}{4}A^2 = && I \\ \iff\quad & (-\tfrac{1}{4}A^2 + \tfrac{3}{4}A)A = && I \\ \iff\quad & (-\tfrac{1}{4}A^2 + \tfrac{3}{4}A) = && A^{-1}. \end{aligned}$$

Die Inverse von A ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} A^{-1} &= (-\frac{1}{4}A^2 + \frac{3}{4}A) = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alternative Lösung:
Wir hätten die Inverse von A auch durch simultane Lösung des LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \mathbf{e}^j$, $j = 1,\ldots,3$ berechnen können.

(d) Wir erhalten mit Hilfe der Rechenregeln invertierbarer Matrizen in Satz 8.2.5:

$$\underbrace{A7B}_{7\cdot 5I} \; \underbrace{+20B^{-1}A^{-1}}_{20\frac{1}{5}I} \; \underbrace{+2A^{-1}B}_{2A^{-1}B} \; \underbrace{+3ACB^{-1}}_{3AC(A^{-1}C^{-1})} \; \underbrace{+13A^{-1}C^{-1}B}_{13I} \; \underbrace{+B^{-1}CA}_{I}$$

wobei wir:

- im ersten Summanden benutzt haben, dass $A\alpha = \alpha A$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und, dass $AB = 5I$,
- im zweiten, dass $AB = 5I \iff B = 5A^{-1} \iff B^{-1} = \frac{1}{5}A \iff B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{5}I$,

- im vierten, fünften und sechsten, dass $CA = B \iff A^{-1}C^{-1} = B^{-1}$ und die Assoziativität der Matrixmultiplikation.

Dabei haben wir stets die Existenz der Inversen gebraucht, welche gegeben ist, da die Matrizen regulär sind, vgl. Satz 8.2.2 aus Aufgabe 5.
Wir können weiter zusammenfassen, und erhalten,

$$\begin{aligned} A7B + 20B^{-1}A^{-1} + 2A^{-1}B + 3ACB^{-1} + 13A^{-1}C^{-1}B + B^{-1}CA &= (35+4+13+1)I + 2A^{-1}B \\ &\quad + 3ACA^{-1}C^{-1} \\ &= 53I + 2A^{-1}B + 3ACA^{-1}C^{-1}. \end{aligned}$$

Aus $CA = B$ folgt, dass $C = BA^{-1}$ und $C^{-1} = AB^{-1}$ ist. Damit lässt sich der dritte Term schreiben als

$$3ACA^{-1}C^{-1} = 3A(BA^{-1})A^{-1}(AB^{-1}) = 3\underbrace{(AB)}_{=5I}A^{-1}\underbrace{(A^{-1}A)}_{=I}B^{-1} = 15A^{-1}B^{-1}.$$

Aus $AB = 5I$ folgt, dass $B = 5A^{-1}$ und $B^{-1} = \frac{1}{5}A$ ist. Somit fassen wir den Gesamtausdruck kompakt zusammen als

$$53I + 2A^{-1}B + \underbrace{3ACA^{-1}C^{-1}}_{=15A^{-1}B^{-1}} = 53I + 10(A^{-1})^2 + 3I = 56I + 10(A^{-1})^2.$$

Ohne zusätzliche Informationen über A bzw. A^{-1}, lässt sich dieser Ausdruck nicht weiter vereinfachen.

(e) Anstatt zuerst $A \cdot B$ zu berechnen und dann das LGS wie gewohnt zu lösen, können wir ausnutzen, dass wir die Inversen der Matrizen A und B bereits kennen. Nach Satz 8.2.5 aus Aufgabe 9 gilt $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ und somit ist $\mathbf{x} = (AB)^{-1}\mathbf{b} = B^{-1}A^{-1}\mathbf{b}$. Es gilt,

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 9 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{182}\begin{pmatrix} -25 & 17 \\ 121 & -75 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$\mathbf{x} = \frac{1}{182}\begin{pmatrix} -25 & 17 \\ 121 & -75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{182}\begin{pmatrix} 17 \\ -75 \end{pmatrix}.$$