Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät der Universität Zürich
Institut für Betriebswirtschaftslehre

Prüfung zur Vorlesung Mathematik II Frühjahrssemester 2011 Musterlösungen

16. Juni 2011

AUFGABE 1

Aufgabe 1.1

Mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{2x^2-1} = 4xe^{2x^2-1}$ folgt, dass

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{2x^2-1}\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{4}e^{2x^2-1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right).\end{aligned}$$

Alternativ kann die Substitutionsmethode verwendet werden.

$$\begin{aligned}u(x) &= 2x^2 - 1 \\ \mathrm{d}u &= 4x\,\mathrm{d}x \\ u(0) &= -1 \\ u(1) &= 1\end{aligned}$$

Somit erhalten wir durch Einsetzen

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{2x^2-1}\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int_{-1}^1 e^u \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right).\end{aligned}$$

Aufgabe 1.2

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \left(\int_0^1 \left(\sqrt{x} + e^y\right) \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y &= \int_{-1}^1 \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + xe^y\right]_0^1 \mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{3} + e^y\right) \mathrm{d}y \\ &= \left[\frac{2}{3}y + e^y\right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{3} + e - \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{e}\right) \\ &= \frac{4}{3} + e - \frac{1}{e}\end{aligned}$$

Aufgabe 1.3

$$\int_a^b (\ln f(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b (\underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln f(x)}_{v})\mathrm{d}x$$

Wir arbeiten hier mit der Partiellen Integration:

$$\begin{aligned} u'(x) = 1 \quad &\Longrightarrow \quad u(x) = x \\ v(x) = \ln f(x) \quad &\Longrightarrow \quad v'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \end{aligned}$$

Somit erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} \int_a^b (1 \cdot \ln f(x))\,\mathrm{d}x &= [x \ln f(x)]_a^b - \int_a^b x \underbrace{\frac{f'(x)}{f(x)}}_{c}\,\mathrm{d}x \\ &= [x \ln f(x)]_a^b - \int_a^b c\,\mathrm{d}x \\ &= [x \ln f(x)]_a^b - [c\,x]_a^b \\ &= b \ln f(b) - a \ln f(a) - c(b-a). \end{aligned}$$

AUFGABE 2

Aufgabe 2.1

a. $\boxed{P_2(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2}$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \tfrac{(x-0)^0}{0!}e^{-0} + \tfrac{(x-0)^1}{1!}\left(-e^{-0}\right) + \tfrac{(x-0)^2}{2!}\left(e^{-0}\right) \\ &= 1 - x + \tfrac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

b. Zuerst berechnen wir die Lagrange-Restglieder

$$R_1(x) = \frac{(x-0)^2}{2!}\left(e^{-\xi}\right) = \frac{x^2}{2}e^{-\xi} \quad \text{und} \quad R_2(x) = \frac{(x-0)^3}{3!}\left(-e^{-\xi}\right) = -\frac{x^3}{6}e^{-\xi}.$$

w	f
×	
	×
	×

- Da $R_1(x) \geq 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$, folgt $e^{-x} = P_1(x) + R_1(x) \geq P_1(x) \, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Für alle $x > 0$ ist $R_2(x) < 0$ und somit $e^{-x} = P_2(x) + R_2(x) < P_2(x)$.
- Für alle $x < 0$ ist $R_2(x) > 0$ und somit $e^{-x} = P_2(x) + R_2(x) > P_2(x)$.

Aufgabe 2.2

Durch Einsetzen der zwei Vektoren von X und der drei Vektoren von Y in das homogene LGS $A\underline{x} = \underline{0}$ sieht man, dass diese das LGS erfüllen, d.h. $X \subseteq L$ und $Y \subseteq L$. Daraus folgt, dass auch

$$Y \setminus X = \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq L.$$

Da $r(A) = 2$, ist $\dim L = 4 - r(A) = 2$.

w	f
×	
×	
×	

- Da X genau zwei linear unabhängige Vektoren enthält, ist X eine Basis von L ist.
- Da Y mindestens zwei linear unabhängige Vektoren enthält, ist Y ein Erzeugendensystem von L ist.
- Da $X \setminus Y$ genau zwei linear unabhängige Vektoren enthält, ist $X \setminus Y$ eine Basis von L ist.

Aufgabe 2.3

existiert nicht

A ist eine (3×3)-Matrix und B ist eine (2×3)-Matrix. Daher kann man das Produkt AB nicht berechnen.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Inverse von A mit dem Gauss-Algorithmus.

$$\begin{array}{rrr|rrr|l}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
-1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & +Z_1 \\
2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -2Z_1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\
0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & -Z_2 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -Z_3 \\
0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & \\ \hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & 4 & 2 & -1 & \\
0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 &
\end{array}$$

Das Ergebnis kann nachgeprüft werden indem man zeigt, dass $AA^{-1} = I$.

$$\left\| B^\mathsf{T} \underline{x} \right\|_1 = 6$$

$$B^\mathsf{T}\underline{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left\| B^\mathsf{T} \underline{x} \right\|_1 = |3| + |0| + |3| = 6$$

AUFGABE 3

Aufgabe 3.1

(i) Lösung durch "gemischtes Rechnen": Zunächst wenden wir Zeilen- und Spaltenoperationen in Richtung einer Dreiecksform an, später führen wir eine Laplace-Entwicklung nach der ersten Spalte durch und Berechnen die (3×3)-Determinante mit der Sarrus-Regel.

$$\det A = \begin{vmatrix} -7 & 2 & 1 & 1 \\ 14 & -2 & 1 & 1 \\ -28 & 8 & 6 & 1 \\ 21 & -5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 1 \\ -3 & -5 & -3 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ +2Z_1 \\ -4Z_1 \\ +3Z_1 \end{array} = -7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -7 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -7 \cdot (16 - 9 - 6) = -7$$

(ii) $\det\left(\frac{1}{2}A\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 \det A = -\dfrac{7}{16}$

Aufgabe 3.2

(i) A ist regulär, falls $\det A = ac - b^2 \neq 0$, d.h. für alle (a, b, c) mit $ac - b^2 \neq 0$.

(ii) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\, A_{ad}$

$$A^{-1} = \frac{1}{ac - b^2} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

(iii) Das lineare Gleichungssystem $(*)$ hat genau eine Lösung, genau dann wenn A regulär ist, d.h. für alle (a, b, c) mit $ac - b^2 \neq 0$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(iv) Unter den Bedingungen von Teilaufgabe (iii) lässt sich durch Anwendung der Cramerschen Regel die eindeutige Lösung sehr einfach bestimmen.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & c \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\alpha c - \beta b}{ac - b^2}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{a\beta - b\alpha}{ac - b^2}$$

(v) Das lineare Gleichungssystem $(*)$ hat zum Beispiel für die 5-Tupel $(a, b, c, \alpha, \beta) = (1, 0, 0, 1, 0)$ oder $(a, b, c, \alpha, \beta) = (1, 2, 4, 3, 6)$ unendlich viele Lösungen.
Eine allgemeine Begründung ist in der Aufgabe nicht verlangt, jedes gültige 5-Tupel muss aber gemeinsam die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. $\det A = 0$
2. Lineare Abhängigkeit der Zeilentripel (a, b, α) und (b, c, β)
3. $a \neq b$.

Bedingung 3 schliesst dabei sehr einfache Lösungen wie $(0, 0, 0, 0, 0)$ oder $(1, 1, 1, 1, 1)$ aus.

AUFGABE 4

Aufgabe 4.1

Addiert man -2 mal die letzte Zeile zur zweiten, dann erhält man

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & & & = & 2 \\ & & & & x_3 & & & = & -2 \\ & & & & & x_4 & + \; x_5 & = & 2 \end{array} \; .$$

Jetzt wählen wir $x_2 = t_1$ und $x_5 = t_2$ und erhalten die allgemeine Lösung

$$\boxed{\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.}$$

Es gibt hier unendlich viele richtige Lösungen. Sie müssen folgende Bedingungen erfüllen.

1. Die spezielle Lösung muss das LGS lösen.
2. Die Richtungsvektoren müssen das zugehörige homogene LGS lösen.
3. Es benötigt zwei Richtungsvektoren die linear unabhängig sind.

Aufgabe 4.2

Addiert man die zweite Zeile zur ersten und -1 mal die zweite zur dritten, dann erhält man

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & & & & & 6x_4 & = & 7 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ & & & & (u+2)x_3 & - & (u+2)x_4 & = & 2v-4 \end{array} \; .$$

Daraus sieht man, dass *nur* die folgenden Fälle auftreten können.

Das System ist unlösbar für	$u = -2$ und $v \neq 2$.
Die Lösungsmenge hat Dimension 1 für	$u \neq -2$ und $v \in \mathbb{R}$.
Die Lösungsmenge hat Dimension 2 für	$u = -2$ und $v = 2$.
Die Lösungsmenge hat Dimension 3 für	kein (u, v).

Aufgabe 4.3

1. $\boxed{\det(A^{\mathsf{T}}A) = 9}$

$\det(A^{\mathsf{T}}A) = \det(A^{\mathsf{T}}) \cdot \det(A) = (-3) \cdot (-3) = 9$

2. $\boxed{r(A) = 4}$

$\det A \neq 0 \Rightarrow r(A) = 4$, da A eine (4×4)-Matrix ist.

3. $\boxed{\underline{x} = (1, 1, 1, 1)^{\mathsf{T}}}$

A ist invertierbar und somit hat das LGS $A\underline{y}_j = \underline{a}^j$ nur eine Lösung und zwar $\underline{y}_j = \underline{e}_j$, wobei $\underline{e}_j$ der j-te Einheitsvektor des $\mathbb{R}^4$ ist.
Da nun wiederum $\underline{b} = \underline{a}^1 + \underline{a}^2 + \underline{a}^3 + \underline{a}^4$ ist haben wir, dass $\underline{x} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 + \underline{e}_4 = (1, 1, 1, 1)^{\mathsf{T}}$ ist.

4. $\boxed{\text{Basis von } L = \{\underline{a}^1 + \underline{a}^2,\ \underline{a}^3 - \underline{a}^2,\ \underline{a}^4\}}$

Wenn man die ersten drei Vektoren addiert bekommt man $\underline{a}^4$, also sind die Vektoren linear abhängig. Nun sieht man, dass die lineare Hülle dieser Vektoren Dimension 3 hat, da die folgenden drei Basisvektoren linear unabhängig sind $\{\underline{a}^1 + \underline{a}^2, \underline{a}^3 - \underline{a}^2, \underline{a}^4\}$. Man kann dies daran sehen, dass die Spalten von A linear unabhängig sind und jeder dieser Basisvektoren enthält eine Spalte, welche die anderen nicht enthalten.