Matrikelnummer: ______________________ Prüfungsnummer: ____________________

Name: ______________________________ Vorname: ________________________

Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät der Universität Zürich
Professur Mathematik für Ökonomen
Prof. Dr. Diethard Klatte

PRÜFUNG IN MATHEMATIK II (BACHELORSTUDIUM FS 2014)

26. Mai 2014

Zulässige Hilfsmittel: Schreibzeug (keine Taschenrechner)

Prüfungsdauer: 90 Minuten

Es können maximal 60 Punkte erzielt werden, und zwar 15 Punkte pro Aufgabe.

In den ersten 3 Aufgaben müssen zu jeder Frage die angewandte Lösungsmethode, die Argumente und Begründungen sowie Ihre Antwort bzw. das Ergebnis deutlich erkennbar sein. Die Lösungen sind unmittelbar unter "Platz für Lösung" einzutragen. Die Aufgabenstellung ist genau zu beachten.

In Aufgabe 4 wird in allen Teilaufgaben nur nach der Lösung gefragt. Dort wird der Lösungsweg nicht angeschaut, es zählen nur die in die Kästchen eingetragenen Antworten. Es ist eine Teilaufgabe dabei, in der die richtigen Antworten anzukreuzen sind; dafür gibt es 2 Punkte bei vollständig richtiger Lösung, sonst 0 Punkte.

Falls der Platz nicht ausreicht, kann die Bearbeitung der Aufgaben auf Zusatzblättern fortgesetzt werden. Ungültige Lösungsversuche sind in jedem Fall durchzustreichen!

Punktvergabe (leer lassen)

A1	A2	A3	A4	Summe

AUFGABE 1 (15 Punkte)

Der Lösungsweg bzw. die Begründungen sind anzugeben!

Aufgabe 1.1 (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \frac{6x^2}{(x^3+1)^3}\, dx\,.$$

Aufgabe 1.2 (6 Punkte)

Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\int_0^1 \int_0^1 x\, e^{x+y}\, dx\, dy\,.$$

Aufgabe 1.3 (4 Punkte)

Im Vektorraum V der reellen, stetigen Funktionen über dem Intervall $[-\pi, \pi]$ ist bekanntlich durch

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \qquad (\text{für Elemente } f, g \in V)$$

ein Skalarprodukt definiert. Berechnen Sie den Wert von $\langle f, g\rangle$ für $f(x) = \sin x$ und $g(x) = \cos x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

AUFGABE 2 (15 Punkte)

Der Lösungsweg bzw. die Begründungen sind anzugeben!

Gegeben sind die Vektoren im $\mathbb{R}^4$

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},\ \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\ \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie alle Parameterwerte $\alpha \in \mathbb{R}$, für die der Vektor $\underline{b}$ eine Linearkombination der Vektoren $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ ist.

(ii) Stellen Sie für den oder die unter (i) bestimmen Parameterwert(e) α den Vektor $\underline{b}$ als Linearkombination von $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ dar.

(iii) Bestimmen Sie alle α, für die das Vektorsystem $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{b}\}$ linear unabhängig ist. (Begründung!)

AUFGABE 3 (15 Punkte)

Der Lösungsweg bzw. die Begründungen sind anzugeben!

Aufgabe 3.1 (12 Punkte) Gegeben ist die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie - falls möglich - die Inverse C^{-1} von C.

(ii) Berechnen Sie die Determinante $\det C$ von C.

(iii) Stellen Sie fest, ob die Funktion $\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mapsto f(\underline{x}) := \underline{x}^T C \underline{x}$ konvex oder konkav ist.

Aufgabe 3.2 (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Inverse B^{-1} einer regulären, symmetrischen (2×2)-Matrix B wieder symmetrisch ist.

AUFGABE 4 (15 Punkte)

Bei allen Teilaufgaben wird der Lösungsweg nicht angeschaut. Es zählen nur die in die Kästchen eingetragenen Ergebnisse!

Aufgabe 4.1 (2 Punkte)

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{x^2} = \boxed{}$$

Aufgabe 4.2 (2 Punkte)

Gegeben ist das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 0 \end{array} \qquad (1)$$

sowie die Vektoren

$$\underline{v}^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{v}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen über die Lösungsmenge L des linearen Gleichungssystems (1) wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie die richtige Antwort an:

	wahr	falsch
Die Menge $X = \{\underline{v}^1, \underline{v}^2\}$ ist eine Basis von L.		
Die Menge $Y = \{\underline{v}^1, \underline{v}^2, \underline{v}^3\}$ ist ein Erzeugendensystem von L.		
Die Menge $Z = \{\underline{v}^2, \underline{v}^3\}$ ist linear unabhängig.		
Die Menge $W = \{\lambda \underline{v}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ist ein Unterraum von L.		

Aufgabe 4.3 (3 Punkte)

Gegeben sind die Matrizen A und B

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme, falls möglich (andernfalls schreibe man "unmöglich"),

das Produkt $B^T A \quad = \boxed{}$

Aufgabe 4.4 (6 Punkte, je 2 Punkte pro Kästchen)

Von einer regulären (4×4)-Matrix A ist ihre Inverse bekannt, nämlich

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie für das lineare Gleichungssystem

$$A\underline{x} = \underline{b} \qquad \text{mit} \quad \underline{b} = (1, -1,\ 5, -3)^T$$

die eindeutige Lösung $\underline{x}^* \in \mathbb{R}^4$ und schreiben Sie diese als Zeilenvektor:

$$(\underline{x}^*)^T \ = \ \boxed{}$$

(b) Berechnen Sie die Determinante $\det P$ der Matrix $P = \frac{1}{3}A^{-1}$:

$$\det P \ = \ \boxed{}$$

(c) Berechnen Sie die Determinante $\det Q$ der Matrix $Q = AA^T$:

$$\det Q \ = \ \boxed{}$$

Aufgabe 4.5 (2 Punkte)

Für drei reguläre $(n \times n)$-Matrizen A, B, C und drei Vektoren $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$ sollen die folgenden Beziehungen gelten:

$$\underline{y} = A^{-1}B\underline{x} \quad \text{und} \quad \underline{z} = AC\underline{y}\,.$$

Bestimmen Sie eine $(n \times n)$-Matrix D, so dass $\underline{x} = D\underline{z}$ gilt:

$$D \ = \ \boxed{}$$