Aufgabe 1 (Lineare Abbildung, Eigenwerte, Eigenvektoren)

Gegeben sei die folgende 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 4 & 2 & 16 \end{pmatrix}.$$

(a) Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.
Bestimmen Sie $f\left(\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ und $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

(b) Sind $\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von A? Wenn ja, was sind die zugehörigen Eigenwerte?

(c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(d) Bestimmen Sie die zu den Eigenwerten gehörigen Eigenvektoren von A.

Lösung:

(a) $f\left(\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 4 & 2 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$

$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 4 & 2 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 8 \end{pmatrix}.$

(b)

Definition 8.4.1 - Eigenwerte und Eigenvektoren
Sei A eine $n \times n$-Matrix. Gibt es für eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ einen Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, sodass

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v},$$

so heisst λ (reeller) Eigenwert und $\mathbf{v}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ der Matrix A.

Da $f\left(\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = 2$.

Da $f\left(\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\40\\8\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$ für kein $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt, ist $\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$ kein Eigenvektor von A.

(c) Es gilt:

> **Satz 8.4.2 - Bestimmung von Eigenwerten**
> Sei A eine quadratische Matrix der Ordnung n. Der Wert $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein (reeller) Eigenwert von A, wenn $\det(A - \lambda I) = 0$.

> **Definition 8.4.2 - Charakteristisches Polynom**
> Sei A eine quadratische Matrix. Die Gleichung $\det(A - \lambda I) = 0$ mit der Variablen λ heisst charakteristische Gleichung von A. Die linke Seite der Gleichung nennt man charakteristisches Polynom von A.

Die Eigenwerte der Matrix A werden daher mit Hilfe der charakteristischen Gleichung $\det(A - \lambda I) = 0$ berechnet bzw. mit den Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda I)$. Die Determinante von $A - \lambda I$ kann beispielsweise berechnet werden, indem man nach der ersten Spalte entwickelt. Man erhält,

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 10-\lambda & 0 \\ 4 & 2 & 16-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(10-\lambda)(16-\lambda).$$

Es gilt also

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff (2-\lambda)(10-\lambda)(16-\lambda) = 0.$$

Die Eigenwerte sind: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 10,\ \lambda_3 = 16$.

(d) Aus der Vorlesung kennen wir folgenden Satz:

> **Satz 8.4.1 - Eigenschaften von Eigenvektoren**
> Sei A eine quadratische Matrix der Ordnung n. Für jeden Eigenvektor zum Eigenwert λ von A ist auch $\alpha\mathbf{v}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von A.

Eigenvektoren zu einem Eigenwert λ sind also nicht eindeutig bestimmt. Die zu den gegebenen Eigenwerten λ_i gehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}^i$ können durch Lösen von $(A - \lambda_i I)\mathbf{v}^i = \mathbf{0}$, $i = 1,2,3$, bestimmt werden, vgl. Definition 8.4.1 aus Teilaufgabe (b).

<u>Für $\lambda_1 = 2$</u> :
$$(A - 2I)\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 2 & 14 \end{pmatrix}\mathbf{v}^1 = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} 8v_2^1 & = 0 \\ 4v_1^1 + 2v_2^1 + 14v_3^1 & = 0 \end{array} \Rightarrow \mathbb{L}_0 = \left\{ t\begin{pmatrix}-\frac{7}{2}\\0\\1\end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \mathbf{v}^1 = \alpha_1\begin{pmatrix}-\frac{7}{2}\\0\\1\end{pmatrix},\ \alpha_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Alle Vektoren der Form $\alpha_1\begin{pmatrix}-\frac{7}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, sind Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$. Es muss $\alpha_1 \neq 0$ gelten, da ein Eigenvektor ein vom Nullvektor verschiedener Vektor ist, vgl. Definition 8.4.1. Beispielsweise ist mit $\alpha_1 = 1$ der Vektor $(-\frac{7}{2}, 0, 1)^T$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$.

Für $\lambda_2 = 10$: $\qquad (A - 10I)\mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{v}^2 = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} -8v_1^2 & = 0 \\ 4v_1^2 + 2v_2^2 + 6v_3^2 & = 0 \end{array} \Rightarrow \mathbb{L}_0 = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \mathbf{v}^2 = \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Alle Vektoren der Form $\alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sind Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 10$. Es muss $\alpha_2 \neq 0$ gelten, da ein Eigenvektor ein vom Nullvektor verschiedener Vektor ist, vgl. Definition 8.4.1. Beispielsweise ist mit $\alpha_2 = 1$ der Vektor $(0, -3, 1)^T$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 10$.

Für $\lambda_3 = 16$: $\qquad (A - 16I)\mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} -14 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v}^3 = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} -14v_1^3 & = 0 \\ -6v_2^3 & = 0 \\ 4v_1^3 + 2v_2^3 & = 0 \end{array} \Rightarrow \mathbb{L}_0 = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \mathbf{v}^3 = \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \alpha_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Alle Vektoren der Form $\alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sind Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_3 = 16$. Es muss $\alpha_3 \neq 0$ gelten, da ein Eigenvektor ein vom Nullvektor verschiedener Vektor ist, vgl. Definition 8.4.1. Beispielsweise ist mit $\alpha_3 = 1$ der Vektor $(0, 0, 1)^T$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_3 = 16$.

Aufgabe 2 (Graphische Interpretation von Eigenvektoren I)

Betrachten Sie erneut die Aufgabe 6 aus Serie 7. Die lineare Abbildung $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

entspricht einer Spiegelung des Vektors $\mathbf{x}$ an der x_1-Achse.

(a) Bestimmen Sie alle (reellen) Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren von A.
(b) Hätte man das Ergebnis aus (a) auch graphisch erschliessen können, ohne zu rechnen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

Wir wenden folgende Vorgehensweise zur Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix A der Ordnung n an:

Schema: Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren

1. Berechne die Determinante $\det(A-\lambda I)$ als Polynom n-ten Grades.
2. Bestimme alle Nullstellen des Polynoms, also alle Lösungen von $\det(A-\lambda I)=0$. Die Nullstellen entsprechen den Eigenwerten.
3. Zu jedem Eigenwert λ bestimme die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ von $(A-\lambda I)\mathbf{v}=\mathbf{0}$. Jeder Vektor $\mathbf{v}\in\mathbb{L}\setminus\{\mathbf{0}\}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.

(a) Um die Eigenvektoren zu bestimmen, gehen wir also wie folgt vor:

Schritt 1: Berechne die Determinante $\det(A-\lambda I)$
Die Determinante einer Diagonalmatrix ist das Produkt der Elemente auf der Hauptdiagonalen, da alle Koeffizienten unterhalb der Hauptdiagonale gleich 0 sind, vgl. Satz 8.3.3 aus Serie 8. Somit ist

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & -1-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)(-1-\lambda)=-(1-\lambda)(1+\lambda).$$

Schritt 2: Bestimme alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms
Zu bestimmen sind die Nullstellen von $\det(A-\lambda I)$:
Es gilt,

$$\det(A-\lambda I)=0 \iff -(1-\lambda)(1+\lambda)=0 \iff \lambda=1 \text{ oder } \lambda=-1.$$

Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1=1$ und $\lambda_2=-1$.

Schritt 3: Bestimmung der Eigenvektoren als Lösung von $(A-\lambda I)\mathbf{v}=\mathbf{0},\ \mathbf{v}\neq\mathbf{0}$
Um die Eigenvektoren zu bestimmen, lösen wir $(A-1I)\mathbf{v}^1=\mathbf{0}$ und $(A+1I)\mathbf{v}^2=\mathbf{0}$:

<u>Für $\lambda_1=1$:</u> $\quad (A-1I)\mathbf{v}^1=\begin{pmatrix}0&0\\0&-2\end{pmatrix}\mathbf{v}^1=\mathbf{0}\implies \mathbb{L}_0=\left\{t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}|t\in\mathbb{R}\right\}$
$\implies \mathbf{v}^1=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$

<u>Für $\lambda_2=-1$:</u> $\quad (A+1I)\mathbf{v}^2=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\mathbf{v}^2=\mathbf{0}$
$\implies \mathbb{L}_0=\left\{t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}|t\in\mathbb{R}\right\}\implies \mathbf{v}^2=\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$

(b) Ein Eigenvektor $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ von A ist ein Vektor, der sich, nach Spiegelung an der x_1-Achse, höchstens streckt bzw. staucht; er verändert also seine Richtung höchstens um das Vorzeichen.
Hier im Beispiel entspricht das Bild von $\mathbf{v}$ der Spiegelung von $\mathbf{v}$ an der x_1-Achse. Kein Vektor verändert durch eine solche Spiegelung seine Länge. Existieren Eigenvektoren $\mathbf{v}$ zu dieser Abbildung, so können sie also nur die Eigenwerte 1 oder -1 haben. Ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist dabei ein Vektor, der durch Spiegelung an der x_1-Achse genau gleich bleibt, $f(\mathbf{v})=\mathbf{v}$. Anschaulich ist dabei klar, dass alle Vektoren, die nicht genau auf der x_1-Achse liegen, durch die Spiegelung ihre Richtung verändern. Vektoren, die auf der x_1-Achse liegen bleiben unverändert. Sie sind Eigenvektoren zum Eigenwert 1. Zum Eigenwert -1 gehörige Eigenvektoren verändern ihre Richtung um genau 180 Grad. Es gilt $f(\mathbf{v})=-\mathbf{v}$. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Vektor auf der x_2-Achse liegt.

Aufgabe 3 (Graphische Interpretation von Eigenvektoren II)

Betrachten Sie erneut die Aufgabe 7 aus Serie 7. Die lineare Abbildung $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

entspricht einer Drehung des Vektors $\mathbf{x}$ um 90° gegen den Uhrzeigersinn.

(a) Bestimmen Sie alle (reellen) Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren von A.

(b) Hätte man das Ergebnis aus (a) auch graphisch erschliessen können, ohne zu rechnen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

(a) Wir wenden das in Aufgabe 2 vorgestellte Schema zur Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren an:

Schritt 1: Berechne die Determinante $\det(A - \lambda I)$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Schritt 2: Bestimme alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms
Obiges Polynom hat keine reellen Nullstellen. Es existieren in dem Fall keine (reellen) Eigenwerte. Somit ist Schritt 3 nicht mehr erforderlich.

(b) Ein Eigenvektor von A ist ein Vektor, der sich, nach Drehung um 90°, höchstens streckt bzw. staucht; er verändert also seine Richtung höchstens um ein Vorzeichen.
Es kann keinen solchen Vektor geben, denn eine Drehung um 90° ändert stets die Richtung des Vektors. Somit kann es keine reellen Eigenwerte geben.

Aufgabe 4 (Eigenwerte und Eigenvektoren I)

Betrachten Sie die 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Verifizieren Sie, dass $(-1, -2, 1)^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 7 von A ist.

(b) Bestimmen Sie alle weiteren Eigenwerte von A und die dazugehörigen Eigenvektoren von A.

Lösung:

(a) Es gilt

$$A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -14 \\ 7 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $(-1, -2, 1)^T$ in der Tat ein Eigenvektor zum Eigenwert 7 von A, vgl. Definition 8.4.1 aus Aufgabe 1.

(b) Wir wenden das in Aufgabe 2 vorgestellte Schema zur Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren an:

Schritt 1: Berechne die Determinante $\det(A-\lambda I)$
Wir berechnen die Determinante von $(A-\lambda I)$, indem wir nach der 3. Spalte entwickeln:

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) =& \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 6-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
=& 0\det\begin{pmatrix} 2 & 6-\lambda \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - 0\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} \\
=& (2-\lambda)\left((3-\lambda)(6-\lambda)-4\right) \\
=& (2-\lambda)(18-9\lambda+\lambda^2-4) \\
=& (2-\lambda)(\lambda^2-9\lambda+14).
\end{aligned}$$

Da wir bereits wissen, dass 7 ein Eigenwert ist, muss 7 eine Nullstelle von $\lambda^2-9\lambda+14$ sein und es muss eine Faktorisierung der Form $(\lambda-7)(\lambda-a)$ für ein geeignetes $a \in \mathbb{R}$ geben. Es gilt, dass $\lambda^2-9\lambda+14 = (\lambda-7)(\lambda-a)$ für $a=2$. Daher lautet das charakteristische Polynom

$$\det(A-\lambda I) = (2-\lambda)(\lambda-7)(\lambda-2) = -(\lambda-2)^2(\lambda-7).$$

Schritt 2: Bestimme alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms
Da wir das charakteristische Polynom bereits faktorisiert haben, können wir die Nullstellen direkt ablesen. Es gilt,

$$\det(A-\lambda I) = 0 \iff -(\lambda-2)^2(\lambda-7) = 0.$$

Es ist gibt eine zweifache Nullstelle $\lambda_{1,2} = 2$ und die einfache Nullstelle $\lambda_3 = 7$. Somit sind $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 7$ die Eigenwerte.

Schritt 3: Bestimmung der Eigenvektoren als Lösung von $(A-\lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0},\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$
Um die Eigenvektoren zu bestimmen, lösen wir $(A-2I)\mathbf{v}^{1,2} = \mathbf{0}$ und $(A-7I)\mathbf{v}^3 = \mathbf{0}$:

Für $\lambda_{1,2} = 2$: Es gilt

$$(A-2I)\mathbf{v}^{1,2} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^{1,2} \\ v_2^{1,2} \\ v_3^{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{lrl} \text{(I)} & v_1^{1,2}+2v_2^{1,2} & =0 \\ \text{(II)} & 2v_1^{1,2}+4v_2^{1,2} & =0 \\ \text{(III)} & -v_1^{1,2}-2v_2^{1,2} & =0 \end{array}$$

Man erkennt leicht, dass sowohl $(0,0,1)^T$ als auch $(-2,1,0)^T$ dieses LGS lösen. Auch rechnerisch erhalten wir

	$v_1^{1,2}$	$v_2^{1,2}$	$v_3^{1,2}$	$\mathbf{0}$	
1	1	2	0	0	
2	2	4	0	0	
3	−1	−2	0	0	
4	1	2	0	0	1
5	0	0	0	0	2 − 2·1
6	0	0	0	0	3 + 1

Die Lösungsmenge lautet

$$\mathbb{L}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -2v_2^{1,2} \\ v_2^{1,2} \\ v_3^{1,2} \end{pmatrix} \middle| \, v_2^{1,2}, v_3^{1,2} \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \alpha_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \mathrm{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Jeder Vektor

$$\mathbf{v}^{1,2} \in \mathrm{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ mit } \mathbf{v}^{1,2} \neq \mathbf{0}$$

ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 2. Da die Vektoren $(-2,1,0)^T$ und $(0,0,1)^T$ linear unabhängig sind, gibt es zwei linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert 2. In der Vorlesung wurden mehrfache Eigenwerte definiert:

Definition 8.4.3 - Mehrfacher Eigenwert
Sei A eine quadratische Matrix der Ordnung n mit n linear unabhängigen Eigenvektoren. Einen Eigenwert λ von A, zu dem es $\ell \leq n$ linear unabhängige Eigenvektoren gibt, nennt man ℓ-fachen Eigenwert von A. Im Fall $\ell \geq 2$ spricht man auch von mehrfachen Eigenwerten von A.

Da es zum Eigenwert 2 zwei linear unabhängige Eigenvektoren gibt, ist 2 ein zweifacher Eigenwert, vgl. Definition 8.4.3.

Für $\lambda_3 = 7$: Wir wissen bereits, dass $(-1,-2,1)^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 7$ ist, siehe Teilaufgabe (a). Satz 8.4.1 aus Aufgabe 1 sagt somit, dass

$$\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 7$ für alle $\alpha \neq 0$ ist. Dies kann wie folgt überprüft werden: Um die Eigenvektoren zu bestimmen, lösen wir $(A-7I)\mathbf{v}^3 = \mathbf{0}$:

$$(A-7I)\mathbf{v}^3 = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^3 \\ v_2^3 \\ v_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{lrl} \text{(I)} & -4v_1^3 + 2v_2^3 & = 0 \\ \text{(II)} & 2v_1^3 - v_2^3 & = 0 \\ \text{(III)} & -v_1^3 - 2v_2^3 - 5v_3^3 & = 0 \end{array}$$

Mit dem Eliminationsverfahren erhalten wir

	v_1^3	v_2^3	v_3^3	$\mathbf{0}$	
(1)	-4	2	0	0	
(2)	2	-1	0	0	
(3)	-1	-2	-5	0	
(4)	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{4}$(1)
(5)	0	0	0	0	(2) $+\frac{1}{2}$(1)
(6)	0	$-\frac{5}{2}$	-5	0	(3) $-\frac{1}{4}$(1)
(7)	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	(4)
(8)	0	$-\frac{5}{2}$	-5	0	(6)
(9)	1	0	1	0	(7) $-\frac{1}{5}$(8)
(10)	0	1	2	0	$-\frac{2}{5}$(8)

Die Lösungsmenge lautet

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -v_3 \\ -2v_3 \\ v_3 \end{pmatrix} \middle| \, v_3 \in \mathbb{R} \right\} &= \left\{ v_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, v_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, \alpha \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 7$ für alle $\alpha \neq 0$.

Aufgabe 5 (Eigenwerte und Eigenvektoren II)

(a) Gegeben sei die 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(1) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 3. ☐ wahr ☐ falsch

(2) A ist orthogonal. ☐ wahr ☐ falsch

(3) A hat 4 Eigenwerte. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Alle Spaltenvektoren von A sind Eigenvektoren von A. ☐ wahr ☐ falsch

(b) Sei A eine $n \times n$-Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ und dazugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n$. Beurteilen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Sei $\det(A) = 0$. Dann ist $\lambda_i = 0$ ein Eigenwert von A. ☐ wahr ☐ falsch

(2) $A(\mathbf{v}^i + 3\mathbf{v}^j) = \lambda_i \mathbf{v}^i + 3\lambda_j \mathbf{v}^j,\ i, j \in \{1, \ldots, n\}$. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Sei $A\mathbf{v}^i = \mathbf{0}$ für ein $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Dann gilt: $\lambda_i = 0$. ☐ wahr ☐ falsch

(4) $\operatorname{rang}(A) < n \iff \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = 0$. ☐ wahr ☐ falsch

Lösung:

(a)
- Zu (1): Es gilt
$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\mathbf{v}.$$
Somit ist $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 3 von A, vgl. Definition 8.4.1 aus Aufgabe 1. Die Aussage (1) ist wahr.
- Zu (2): Es gilt:
$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
und somit ist A nicht orthogonal, vgl. Definition 8.2.3 aus Serie 8. Die Aussage (2) ist falsch.
- Zu (3): Es gilt
$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda).$$
Die Eigenwerte sind: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -1$. Die Matrix A hat 3 Eigenwerte. Die Aussage (3) ist falsch.

- Zu (4): Man kann nachprüfen, dass $(1,0,0)^T$ und $(0,3,0)^T$ in der Tat Eigenvektoren von A sind. Doch für $(0,2,-1)^T$ gilt

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 3 & 2\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}.$$

Aber es gibt kein $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, sodass

$$\alpha\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix};$$

und daher ist $(0,2,-1)^T$ kein Eigenvektor von A. Die Aussage (4) ist falsch.

(b)
- Zu (1): Sei $\det(A)=0$, dann gilt für $\lambda_i=0$, dass $\det(A-\lambda_i I)=\det(A)=0$. Somit ist $\lambda_i=0$ ein Eigenwert von A. Die Aussage (1) ist wahr.
- Zu (2): Der Vektor $\mathbf{v}^i$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i und $\mathbf{v}^j$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_j. Daher ist

$$A(\mathbf{v}^i+3\mathbf{v}^j)=A\mathbf{v}^i+3A\mathbf{v}^j=\lambda_i\mathbf{v}^i+3\lambda_j\mathbf{v}^j.$$

Die Aussage (2) ist wahr.
- Zu (3): Für $\mathbf{v}^i\neq\mathbf{0}$ gilt $A\mathbf{v}^i=\mathbf{0}=0\cdot\mathbf{v}^i$. Das ist genau die Eigenschaft eines Eigenvektors zum Eigenwert 0. Daher muss es einen Eigenwert λ_i geben, sodass $\lambda_i=0$. Die Aussage (3) ist wahr.
- Zu (4): Es gilt

$$\begin{aligned}\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n=0 &\iff \text{es existiert ein } i\in\{1,\ldots,n\} \text{ mit } \lambda_i=0\\ &\iff \det(A)=\det(A-\lambda_i I)=0\\ &\iff \operatorname{rang}(A)<n,\ \text{vgl Satz 8.3.3 aus Serie 8.}\end{aligned}$$

Die Aussage (4) ist wahr.

Aufgabe 6 (($*$) Eigenwerte und Eigenvektoren III)

Sei A eine $n\times n$-Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ und dazugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2,\ldots,\mathbf{v}^n$. Zeigen Sie, dass wenn die Eigenvektoren $\mathbf{v}^i$ und $\mathbf{v}^j$ linear abhängig sind, dann $\lambda_i=\lambda_j$ gilt, also

$$\mathbf{v}^i,\mathbf{v}^j \text{ sind linear abhängig } \Longrightarrow \lambda_i=\lambda_j.$$

Lösung:

Seien $\mathbf{v}^i$ und $\mathbf{v}^j$ linear abhängige Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_i und λ_j.
Dann gibt es ein $\alpha\neq0$, sodass $\mathbf{v}^i=\alpha\mathbf{v}^j$, denn Eigenvektoren dürfen nicht dem Nullvektor $\mathbf{0}$ entsprechen, $\mathbf{v}^i,\mathbf{v}^j\neq\mathbf{0}$. Daher ist einerseits

$$A\mathbf{v}^i=\alpha A\mathbf{v}^j=\alpha\cdot\lambda_j\mathbf{v}^j=\lambda_j\mathbf{v}^i,$$

das heisst $\mathbf{v}^i$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_j, und andererseits

$$A\mathbf{v}^i = \lambda_i \mathbf{v}^i,$$

da $\mathbf{v}^i$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i ist. Somit folgt insgesamt

$$\lambda_j \mathbf{v}^i = \lambda_i \mathbf{v}^i.$$

Dies kann aber nur gelten, wenn $\lambda_i = \lambda_j$, was zu zeigen war.

Aufgabe 7 (Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierung der Matrix)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Wie viele reelle, linear unabhängige Eigenvektoren hat die Matrix A?

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A und die zugehörigen Eigenvektoren.

(c) Sei V eine Matrix, deren Spaltenvektoren den normierten Eigenvektoren entsprechen. Bestimmen Sie V.

(d) Verifizieren Sie, dass V eine orthogonale Matrix ist.

(e) Berechnen Sie $V^{-1}AV$.

(f) (#) Bestimmen Sie die Determinante von A mit Hilfe der Eigenwerte von A.

Lösung:

(a) Aus der Vorlesung kennen wir folgenden Satz:

> **Satz 8.4.3 - Existenz reeller Eigenwerte**
> Eine (reelle) symmetrische $n \times n$-Matrix A hat n reelle, linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^n$ zu Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Da die Matrix A eine symmetrische 2×2-Matrix ist, hat sie 2 reelle, linear unabhängige Eigenvektoren.

(b) Wir wenden das in Aufgabe 2 vorgestellte Schema zur Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren an:

Schritt 1: Berechne die Determinante $\det(A - \lambda I)$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(1-\lambda) - 4 = \lambda^2 + \lambda - 6.$$

Schritt 2: Bestimme alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms
Zu bestimmen sind die Nullstellen von $\det(A - \lambda I)$. Es gilt,

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda^2 + \lambda - 6 = 0.$$

Aus der Mitternachtsformel erhalten wir die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+24} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}, \quad \text{d.h.,} \;\; \lambda_1 = -3\,,\; \lambda_2 = 2\,.$$

Schritt 3: Bestimmung der Eigenvektoren als Lösung von $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0},\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$
Um die Eigenvektoren zu bestimmen, lösen wir $(A+3I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ und $(A-2I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$:

Für $\lambda_1 = -3$: $\quad (A - \lambda_1 I)\mathbf{v}^1 = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad (A+3I)\mathbf{v}^1 = \mathbf{0}$.
Wenden wir das Eliminationsverfahren an, so erhalten wir

	v_1^1	v_2^1	$\mathbf{0}$	
①	1	-2	0	
②	-2	4	0	
③	1	-2	0	①
④	0	0	0	② $+2$①

Die Koeffizientenmatrix im Endtableau liegt in expliziter Form vor und somit ist

$$\mathbb{L}_0 = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

und daher ist mit Satz 8.4.1

$$\mathbf{v}^1 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für alle $\alpha_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = -3$.

Für $\lambda_2 = 2$: $\quad (A - \lambda_2 I)\mathbf{v}^2 = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad (A-2I)\mathbf{v}^2 = \mathbf{0}$.
Wenden wir das Eliminationsverfahren an, so erhalten wir

	v_1^2	v_2^2	$\mathbf{0}$	
①	-4	-2	0	
②	-2	-1	0	
③	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$①
④	0	0	0	② $-\frac{1}{2}$①

Die Koeffizientenmatrix im Endtableau liegt in expliziter Form vor und somit ist

$$\mathbb{L}_0 = \left\{ t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

und daher ist mit Satz 8.4.1

$$\mathbf{v}^2 = \alpha_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

für alle $\alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$.

(c) Wir normieren die Eigenvektoren $\mathbf{v}^1 = (2,1)^T$ und $\mathbf{v}^2 = (-\frac{1}{2},1)^T$:

$$\|(2,1)^T\| = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{v}}^1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \text{ (normierter Eigenvektor zu } \lambda_1\text{);}$$

$$\|(-\frac{1}{2},1)^T\| = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{v}}^2 = \frac{2}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \text{ (normierter Eigenvektor zu } \lambda_2\text{).}$$

Somit erhalten wir

$$V = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}.$$

(d) Es gilt,

$$VV^T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 0\\0 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = I.$$

Somit ist V eine orthogonale Matrix, vgl. Definition 8.2.3 aus Serie 8.

(e) Da V eine orthogonale Matrix ist, gilt $V^{-1} = V^T$. Somit erhalten wir, dass

$$\begin{aligned}
V^{-1}AV = V^TAV &= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -2\\-2 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6 & -2\\-3 & 4\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-15 & 0\\0 & 10\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-3 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\0 & \lambda_2\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Alternative Lösung:

(#) *Wir stellen fest, dass V^TAV eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonalelemente die Eigenwerte sind, die jeweils zu den Spaltenvektoren gehören. Dies hätten wir auch mit Hilfe von Satz 8.4.5 aus der Vorlesung erhalten können. Dort heisst es:*

Satz 8.4.5 - Darstellung von A mit Hilfe von Eigenwerten und Eigenvektoren

Sei $A \in \mathbb{R}^n$ mit n linear unabhängigen Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^n$ und zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Bezeichnet man die Matrix der Eigenvektoren als $V = [\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n]$, und die Diagonalmatrix der Eigenwerte als

$$L = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\\vdots & \ddots & \ddots & 0\\0 & \ldots & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix},$$

dann gilt

$$A = VLV^{-1}.$$

Wegen Satz 8.4.5 gilt also $L = V^{-1}AV$, wobei L die Diagonalmatrix ist, deren Diagonalelemente die Eigenwerte sind.

(f) (#)

> **Satz 8.4.8 - Zusammenhang zwischen Determinante und Eigenwerten**
> Sei A eine symmetrische $n \times n$-Matrix, mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
> $$\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Da A eine symmetrische 2×2-Matrix ist, gilt $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -3 \times 2 = -6$.

Aufgabe 8 (Eine Matrix mit Unbekannten)

Betrachen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & b & 1 \\ 2 & 1 & c \end{pmatrix}$$

mit reellen Parametern $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sei

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

(a)

(1) Ist $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A, dann muss $a = 5$ gelten. ☐ wahr ☐ falsch

(2) Ist $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A, dann muss $c = -2$ gelten. ☐ wahr ☐ falsch

(3) Für alle $b \in \mathbb{R}$ ist $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$ von A mit $a = 5$ und $c = 2$. ☐ wahr ☐ falsch

(4) Ist $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A, dann ist auch $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A. ☐ wahr ☐ falsch

(b)

(1) Ist $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A, dann ist 1 ein Eigenwert von A^{100}.	☐ wahr	☐ falsch
(2) Ist $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A, dann ist $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor von A^{39}.	☐ wahr	☐ falsch
(3) A hat 3, nicht notwendigerweise verschiedene, reelle Eigenwerte für alle $b \in \mathbb{R}$.	☐ wahr	☐ falsch
(4) Es existieren genau 3 linear unabhängige Eigenvektoren von A für alle $b \in \mathbb{R}$.	☐ wahr	☐ falsch

Lösung:

(a) Falls $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A ist, gilt

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a-4 \\ 0 \\ 2-2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \mathbf{v}.$$

- Zu (1): Aus dem ersten Eintrag folgt, dass $a-4=1$ sein muss. Somit ist $a=5$. Die Aussage (1) ist wahr.
- Zu (2): Aus dem dritten Eintrag folgt, dass $2-2c=-2$ sein muss. Somit ist $c=2$. Die Aussage (2) ist falsch.
- Zu (3): Aus Teilaufgaben (1) und (2) wissen wir, dass wenn $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor von A ist, $a=5$ und $c=2$ gelten muss. Aufgrund der 0 im zweiten Eintrag des Eigenvektors, gilt stets $2+0\cdot b-2=0$ für alle $b\in\mathbb{R}$. Die Aussage (3) ist wahr.
- Zu (4): Wenn $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist, ist $\alpha\mathbf{v}$ auch ein Eigenvektor zum Eigenwert λ für alle $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, vgl. Satz 8.4.1 aus Aufgabe 1. Setzt man $\alpha=-5$, so sieht man, dass $(-5,0,10)^T$ auch ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist. Die Aussage (4) ist wahr.

(b)
- Zu (1): Es ist
$$A^{100}\mathbf{v} = A^{99}(A\mathbf{v}) = A^{99}\mathbf{v},$$
da $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist. Wiederholt man diesen Schritt 99 mal, so folgt, dass $A^{100}\mathbf{v}=\mathbf{v}$ ist. Daher ist $\mathbf{v}$ auch ein Eigenvektor von A^{100} zum Eigenwert 1. Somit ist 1 ein Eigenwert von A^{100}. Die Aussage (1) ist wahr.
- Zu (2): Es ist
$$A^{39}\mathbf{v} = A^{38}(A\mathbf{v}) = A^{38}\mathbf{v},$$
da $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist. Wiederholt man diesen Schritt 38 mal, so folgt, dass $A^{39}\mathbf{v}=\mathbf{v}$ ist. Daher ist $\mathbf{v}$ auch ein Eigenvektor von A^{39}. Die Aussage (2) ist wahr.
- Zu (3): Nach dem Satz 8.4.3 aus Aufgabe 7 hat eine (reelle) symmetrische $n\times n$-Matrix genau n reelle Eigenwerte. Diese müssen aber nicht verschieden sein. A ist eine symmetrische 3×3-Matrix und hat daher 3 reelle Eigenwerte. Die Wahl von b (und auch von a und c) hat dabei keinen Einfluss auf die Symmetrie von A. Die Aussage (3) ist wahr.
- Zu (4): Nach dem Satz 8.4.3 aus Aufgabe 7 hat eine (reelle) symmetrische $n\times n$-Matrix genau n reelle, linear unabhängige Eigenvektoren. A ist eine symmetrische 3×3-Matrix und hat daher genau 3 reelle, linear unabhängige Eigenvektoren. Die Wahl von b (und auch von a und c) hat dabei keinen Einfluss auf die Symmetrie von A. Die Aussage (4) ist wahr.

Aufgabe 9 (Potenzbildung von Matrizen)

Gegeben sei die 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und die dazugehörigen Eigenvektoren.

(b) (#) Berechnen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus (a) die Matrixpotenz A^{10}.

Lösung:

(a) Wir wenden das in Aufgabe 2 vorgestellte Schema zur Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren an:

Schritt 1: Berechne die Determinante $\det(A - \lambda I)$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -7-\lambda & 4 \\ -6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-7-\lambda)(3-\lambda) + 24 = \lambda^2 + 4\lambda + 3.$$

Schritt 2: Bestimme alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms

Zu bestimmen sind die Nullstellen von $\det(A - \lambda I)$. Es gilt,

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \iff (\lambda + 3)(\lambda + 1) = 0.$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind somit $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -3$.

Schritt 3: Bestimmung der Eigenvektoren als Lösung von $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

Um die Eigenvektoren zu bestimmen, lösen wir $(A + I)\mathbf{v}^1 = \mathbf{0}$ und $(A + 3I)\mathbf{v}^2 = \mathbf{0}$:

Für $\lambda_1 = -1$: $\quad (A - \lambda_1 I)\mathbf{v}^1 = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad (A + I)\mathbf{v}^1 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{v}^1 = \mathbf{0}.$

Wenden wir das Eliminationsverfahren an, so erhalten wir

	v_1^1	v_2^1	$\mathbf{0}$	
1	-6	4	0	
2	-6	4	0	
3	1	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$ 1
4	0	0	0	2 $-$ 1

Die Koeffizientenmatrix im Endtableau liegt in expliziter Form vor und somit ist

$$\mathbf{v}^1 = \alpha_1 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

für alle $\alpha_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$.

Für $\lambda_2 = -3$: $\quad (A - \lambda_2 I)\mathbf{v}^2 = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad (A + 3I)\mathbf{v}^2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{v}^2 = \mathbf{0}.$

Wenden wir das Eliminationsverfahren an, so erhalten wir

	v_1^2	v_2^2		
1	-4	4	0	
2	-6	6	0	
3	1	-1	0	$-\frac{1}{4}$ 1
4	0	0	0	2 $- \frac{6}{4}$ 1

Die Koeffizientenmatrix im Endtableau liegt in expliziter Form vor und somit ist

$$\mathbf{v}^2 = \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für alle $\alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = -3$.

(b) (#)

> **Satz 8.4.6 - Berechnung von Potenzen**
> Hat $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau n linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^n$ mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, dann gilt mit $V = [\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n]$ für alle $k \in \mathbb{N}$:
>
> $$A^k = V \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \lambda_n^k \end{pmatrix} V^{-1}.$$

Die Matrix A hat 2 linear unabhängige Eigenvektoren. Wir setzen beispielsweise $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ und erhalten die Eigenvektoren $\mathbf{v}^1 = (\frac{2}{3}, 1)^T$ und $\mathbf{v}^2 = (1,1)^T$. Satz 8.4.5 aus Aufgabe 7 sagt somit, dass

$$A = VLV^{-1}, \text{ wobei } L = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ und } V = \left[\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2\right] = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnet man V^{-1} durch simultane Lösung des LGS $V\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \mathbf{e}^j$, $j = 1,2$, erhält man

	x_1	x_2	$\mathbf{e}^1$	$\mathbf{e}^2$	
①	$\frac{2}{3}$	1	1	0	
②	1	1	0	1	
③	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}\cdot$ ①
④	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	② $-\frac{3}{2}$ ①
⑤	1	0	-3	3	③ $+3$ ④
⑥	0	1	3	-2	-2 ④

Es ist also $V^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Nun lässt sich A^{10} mit Hilfe von Satz 8.4.6 wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} A^{10} = VL^{10}V^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{10} & 0 \\ 0 & (-3)^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 59049 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 177147 & -118098 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 177145 & -118096 \\ 177144 & -118095 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alternative Lösung:
Genauso gut hätten wir beispielsweise $\alpha_1 = 3$ wählen können und hätten so den Eigenvektor $\boldsymbol{v}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$ von A erhalten. Die Matrizen V und V^{-1} hätten dann eine schönere Form, nämlich

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } V^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dies würde aber nichts am Ergebnis von A^{10} ändern.

Aufgabe 10 (Höhenlinien in 2 Variablen)

Betrachten Sie die folgenden reellen Funktionen in 2 Variablen.

(a) $f_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1 x_2$
  (i) Bestimmen Sie den natürlichen Definitionsbereich $D_{f_1} \subseteq \mathbb{R}^2$ von f_1 und die Höhenlinie $N_y = \{\mathbf{x} \in D_{f_1} \mid f_1(\mathbf{x}) = y\}$ für $y = -1, 0, 1$.
  (ii) Zeichnen Sie die Höhenlinien N_y für $y = -1, 0, 1$ in ein Koordinatensystem ein.
  (iii) Ist diese Funktion eine affin-lineare, quadratische, Cobb Douglas oder Leontief Funktion?

(b) $f_2(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{x_2 - 1}$
  (i) Bestimmen Sie den natürlichen Definitionsbereich $D_{f_2} \subseteq \mathbb{R}^2$ von f_2 und die Höhenlinie $N_y = \{\mathbf{x} \in D_{f_2} \mid f_2(\mathbf{x}) = y\}$ für $y = 0, 1, 2, 3$.
  (ii) Zeichnen Sie die Höhenlinien N_y für $y = 0, 1, 2, 3$ in ein Koordinatensystem ein.
  (iii) Ist diese Funktion eine affin-lineare, quadratische, Cobb Douglas oder Leontief Funktion?

(c) $f_3(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2}$
  (i) Bestimmen Sie den natürlichen Definitionsbereich $D_{f_3} \subseteq \mathbb{R}^2$ von f_3 und die Höhenlinie $N_y = \{\mathbf{x} \in D_{f_3} \mid f_3(\mathbf{x}) = y\}$ für $y = 0, 1, 2$.
  (ii) Zeichnen Sie die Höhenlinien N_y für $y = 0, 1, 2$ in ein Koordinatensystem ein.
  (iii) Ist diese Funktion eine affin-lineare, quadratische, Cobb Douglas oder Leontief Funktion?

(d) $f_4(\mathbf{x}) = \min\{\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}\}$
  (i) Bestimmen Sie den natürlichen Definitionsbereich $D_{f_4} \subseteq \mathbb{R}^2$ von f_4 und die Höhenlinie $N_y = \{\mathbf{x} \in D_{f_4} \mid f_4(\mathbf{x}) = y\}$ für $y = -1, 0, 1$.
  (ii) Zeichnen Sie die Höhenlinien N_y für $y = -1, 0, 1$ in ein Koordinatensystem ein.
  (iii) Ist diese Funktion eine affin-lineare, quadratische, Cobb Douglas oder Leontief Funktion?

(e) $f_5(\mathbf{x}) = \max\{x_1, x_2\}$
  (i) Bestimmen Sie den natürlichen Definitionsbereich $D_{f_5} \subseteq \mathbb{R}^2$ von f_5 und die Höhenlinie $N_y = \{\mathbf{x} \in D_{f_5} \mid f_5(\mathbf{x}) = y\}$ für $y = 1, 2$.
  (ii) Zeichnen Sie die Höhenlinien N_y für $y = 1, 2$ in ein Koordinatensystem ein.
  (iii) Ist diese Funktion eine affin-lineare, quadratische, Cobb Douglas oder Leontief Funktion?

(f) $f_6(\mathbf{x}) = 6 - 3x_1 - 2x_2$

(i) Bestimmen Sie den natürlichen Definitionsbereich $D_{f_6} \subseteq \mathbb{R}^2$ von f_6 und die Höhenlinie $N_y = \{\mathbf{x} \in D_{f_6} \mid f_6(\mathbf{x}) = y\}$ für $y = 4, 6, 8$.

(ii) Zeichnen Sie die Höhenlinien N_y für $y = 4, 6, 8$ in ein Koordinatensystem ein.

(iii) Ist diese Funktion eine affin-lineare, quadratische, Cobb Douglas oder Leontief Funktion?

Lösung:

(a) In der Vorlesung haben wir reelle Funktionen in n Variablen definiert:

Definition 9.1.1 - Reelle Funktion in n Variablen
Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $Z \subseteq \mathbb{R}$. Dann heisst eine Funktion

$$f : D \to Z \text{ mit } \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$$

reellwertige Funktion in n (unabhängigen reellen) Variablen oder kurz reelle Funktion in n Variablen.

Ebenso wie im Fall einer Funktion in einer Variablen wurden in der Vorlesung besonders wichtige reelle Funktionen in mehreren Variablen benennt.

Definition 9.1.2 - Besondere Funktionen in n Variablen
Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine reelle Funktion f in n Variablen mit Abbildungsvorschrift

- $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n + c$ für $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ heisst affin-lineare Funktion in n Variablen;
- $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^n b_ix_i + c$ für $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ und Matrix A der Ordnung n, welche nicht der Nullmatrix entspricht, heisst quadratische Funktion in n Variablen;
- $f(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n x_i^{b_i} = x_1^{b_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{b_n}$ mit $\mathbf{x} \in (0, +\infty)^n$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, mit $b_1 + \cdots + b_n = 1$ und $b_i \geq 0$ für $i = 1, \ldots, n$, heisst Cobb Douglas Funktion in n Variablen;
- $f(\mathbf{x}) = b_0 \min\limits_{i=1,\ldots,n} \{b_ix_i\} = b_0 \min\{b_1x_1, \ldots, b_nx_n\}$ für $b_0 \in \mathbb{R}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ heisst Leontief Funktion in n Variablen.

Die Höhenlinien einer reellen Funktion in n Variablen ist:

Definition 9.1.3 - Höhenlinien
Für eine reelle Funktion in n Variablen $f : D \to Z$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$, und Funktionswert $y \in Z \subseteq \mathbb{R}$ heisst die Menge

$$N_y = \{\mathbf{x} \in D \mid f(\mathbf{x}) = y\}$$

Höhenlinie, Niveaumenge, Niveaulinie, oder Isoquante zur Höhe bzw. zum Niveau y.

(i) $D_{f_1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$\underline{\text{Für } y = -1}$: $x_1^2 + x_1x_2 \neq -1$ für $x_1 = 0$ und daher ist

$$x_1^2 + x_1x_2 = -1$$
$$\Leftrightarrow \quad x_2 = \tfrac{-1-x_1^2}{x_1} = -\tfrac{1}{x_1} - x_1.$$

Daher ist

$$N_{-1} = \{\mathbf{x} \in D_{f_1} \mid x_2 = -\frac{1}{x_1} - x_1,\ x_1 \neq 0\}.$$

Für $y = 0$: $x_1^2 + x_1 x_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1(x_1 + x_2) = 0$
$\Leftrightarrow x_1 = 0$ oder $x_1 = -x_2$.

Daher ist

$$N_0 = \{\mathbf{x} \in D_{f_1} \mid x_2 = -x_1 \text{ oder } x_1 = 0\}.$$

Für $y = 1$: $x_1^2 + x_1 x_2 \neq 1$ für $x_1 = 0$ und daher ist $\quad x_1^2 + x_1 x_2 = 1$

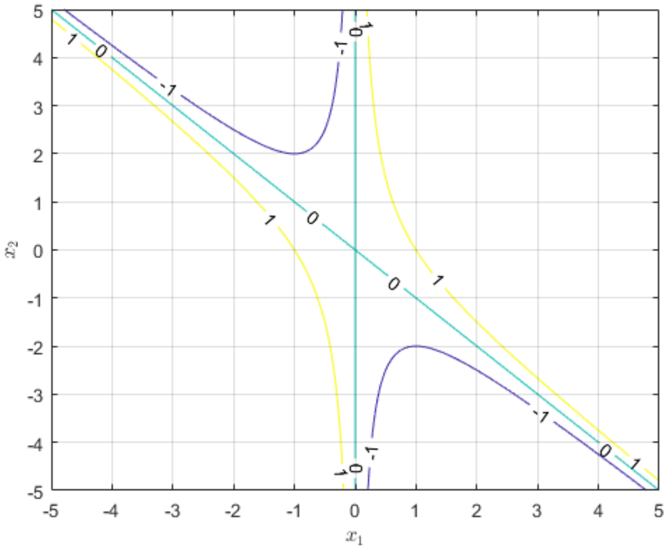
$$\Leftrightarrow \quad x_2 = \tfrac{1-x_1^2}{x_1} = \tfrac{1}{x_1} - x_1.$$

Daher ist

$$N_1 = \{\mathbf{x} \in D_{f_1} \mid x_2 = \frac{1}{x_1} - x_1,\; x_1 \neq 0\}.$$

(ii)

Abbildung 10.1: Die Höhenlinien von f_1



(iii) Laut Definition 9.1.2 ist f_1 eine quadratische Funktion in 2 Variablen, falls sich $f_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1 x_2$ mit Hilfe einer symmetrischen 2×2- Matrix A, einem Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ und einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ folgendermassen schreiben lässt:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) =& \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c \\ =& \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{2} b_i x_i + c \\ =& a_{11} x_1^2 + \underbrace{a_{12} x_1 x_2 + a_{21} x_2 x_1}_{=2a_{12}x_1x_2} + a_{22} x_2^2 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + c. \end{aligned}$$

Dies ist der Fall mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } c = 0.$$

Somit ist f_1 eine quadratische Funktion in 2 Variablen.

(b) (i) Es darf nicht durch 0 geteilt werden und daher darf x_2 nicht 1 sein; deshalb ist $D_{f_2} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{1\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \neq 1\}$.

Für $y = 0$: $\frac{1}{x_2 - 1} = 0$ für $\mathbf{x} \in D_{f_2} \Leftrightarrow 1 = 0$,

was für kein $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ möglich ist. Daher ist

$$N_0 = \{\}.$$

Für $y = 1$: $\frac{1}{x_2 - 1} = 1$ für $\mathbf{x} \in D_{f_2} \Leftrightarrow 1 = x_2 - 1 \Leftrightarrow x_2 = 2$.

Daher ist

$$N_1 = \{\mathbf{x} \in D_{f_2} \mid x_2 = 2\}.$$

Für $y = 2$: $\frac{1}{x_2 - 1} = 2$ für $\mathbf{x} \in D_{f_2} \Leftrightarrow 1 = 2(x_2 - 1) \Leftrightarrow x_2 = \frac{3}{2}$.

Daher ist

$$N_2 = \{(\mathbf{x} \in D_{f_2} \mid x_2 = \frac{3}{2}\}.$$

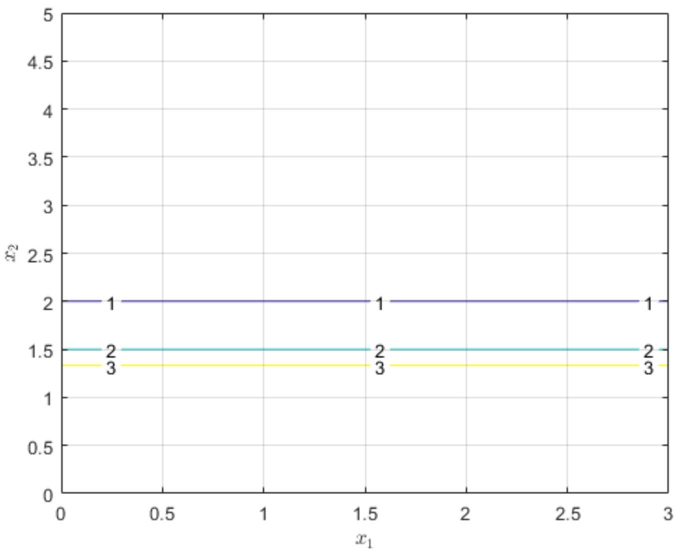
Für $y = 3$: $\frac{1}{x_2 - 1} = 3$ für $\mathbf{x} \in D_{f_2} \Leftrightarrow 1 = 3(x_2 - 1) \Leftrightarrow x_2 = \frac{4}{3}$.

Die Höhenlinie entspricht also einer Geraden, die parallel zur x_1-Achse verläuft,

$$N_3 = \{\mathbf{x} \in D_{f_2} \mid x_2 = \frac{4}{3}\}.$$

(ii)

Abbildung 10.2: Die Höhenlinien von f_2



(iii) f_2 ist keine affin-lineare, quadratische, Cobb Douglas oder Leontief Funktion, vgl. Definition 9.1.2 aus Teilaufgabe (a).

(c) (i) Die Wurzel-Funktion ist nur für positive Argumente definiert und daher ist $D_{f_3} = [0,\infty) \times [0,\infty)$.

Für $y = 0$: $\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} = 0$ für $\mathbf{x} \in D_{f_3} \quad \Leftrightarrow \; x_1 = 0$ oder $x_2 = 0$.

Daher ist

$$N_0 = \{\mathbf{x} \in D_{f_3} \mid x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = 0\}.$$

Für $y = 1$: $\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} = 1$ für $\mathbf{x} \in D_{f_3} \quad \Leftrightarrow \; x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{x_1},\; x_1 \neq 0$.

Daher ist

$$N_1 = \{\mathbf{x} \in D_{f_3} \mid x_2 = \frac{1}{x_1},\; x_1 \neq 0\}.$$

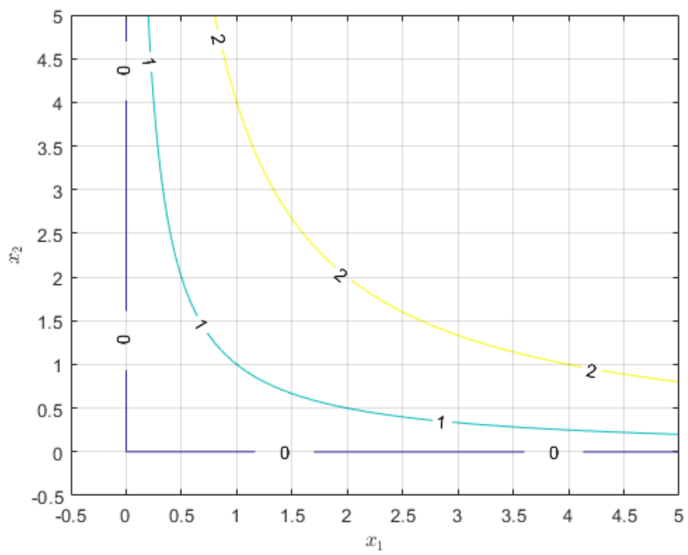
Für $y = 2$: $\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} = 2$ für $\mathbf{x} \in D_{f_3} \quad \Leftrightarrow \; x_1x_2 = 4 \Leftrightarrow x_2 = \frac{4}{x_1},\; x_1 \neq 0$.

Daher ist

$$N_2 = \{\mathbf{x} \in D_{f_3} \mid x_2 = \frac{4}{x_1},\; x_1 \neq 0\}.$$

(ii)

Abbildung 10.3: Die Höhenlinien von f_3



(iii) Laut Definition 9.1.2 aus Teilaufgabe (a) ist f_3 eine Cobb Douglas Funktion in 2 Variablen, falls sich f_3 schreiben lässt als

$$f_3(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{2} x_i^{b_i} = x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \text{ für } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2, \text{ sodass } b_1 + b_2 = 1 \text{ und } b_1, b_2 \geq 0.$$

Da $f_3(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2} = x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}}$, sieht man, dass dies der Fall ist für $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$. Die Funktion f_3 ist also eine Cobb Douglas Funktion in 2 Variablen.

(d) (i) $D_{f_4} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Für $y = -1$: $\quad \min\{\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}\} = -1 \quad \Leftrightarrow x_1 = -2$ und $x_2 \geq -3$ oder $x_2 = -3$ und $x_1 \geq -2$.

Daher ist

$$N_{-1} = \{\mathbf{x} \in D_{f_4} \mid (x_1 = -2 \text{ und } x_2 \geq -3) \text{ oder } (x_2 = -3 \text{ und } x_1 \geq -2)\}.$$

Für $y = 0$: $\quad \min\{\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}\} = 0 \quad \Leftrightarrow x_1 = 0$ und $x_2 \geq 0$ oder $x_2 = 0$ und $x_1 \geq 0$

Daher ist

$$N_0 = \{\mathbf{x} \in D_{f_4} \mid (x_1 = 0 \text{ und } x_2 \geq 0) \text{ oder } (x_2 = 0 \text{ und } x_1 \geq 0)\}.$$

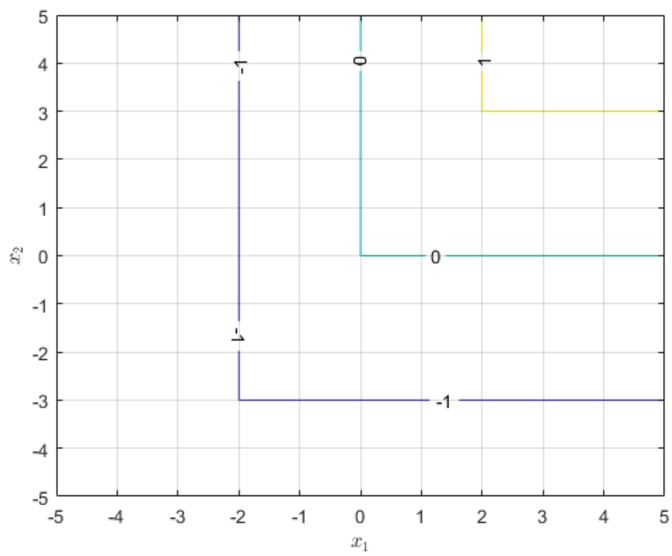
Für $y = 1$: $\quad \min\{\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}\} = 1 \quad \Leftrightarrow x_1 = 2$ und $x_2 \geq 3$ oder $x_2 = 3$ und $x_1 \geq 2$.

Daher ist

$$N_1 = \{\mathbf{x} \in D_{f_4} \mid (x_1 = 2 \text{ und } x_2 \geq 3) \text{ oder } (x_2 = 3 \text{ und } x_1 \geq 2)\}.$$

(ii)

Abbildung 10.4: Die Höhenlinien von f_4



(iii) Laut Definition 9.1.2 aus Teilaufgabe (a) ist f_4 eine Leontief Funktion in 2 Variablen, falls sich $f_4(\mathbf{x}) = \min\{\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}\}$ schreiben lässt als

$$f_4(\mathbf{x}) = b_0 \min\{b_1 x_1, b_2 x_2\} \text{ für } b_0 \in \mathbb{R},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2.$$

Dies ist der Fall für

$$b_0 = 1,\ b_1 = \frac{1}{2} \text{ und } b_2 = \frac{1}{3}.$$

Somit ist f_4 eine Leontief Funktion in 2 Variablen.

(e) (i) $D_{f_5} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

<u>Für $y = 1$:</u> $\max\{x_1, x_2\} = 1 \quad \Leftrightarrow x_1 = 1$ und $x_2 \leq 1$ oder $x_2 = 1$ und $x_1 \leq 1$.

Daher ist

$$N_1 = \{\mathbf{x} \in D_{f_5} \mid (x_1 = 1 \text{ und } x_2 \leq 1) \text{ oder } (x_2 = 1 \text{ und } x_1 \leq 1)\}.$$

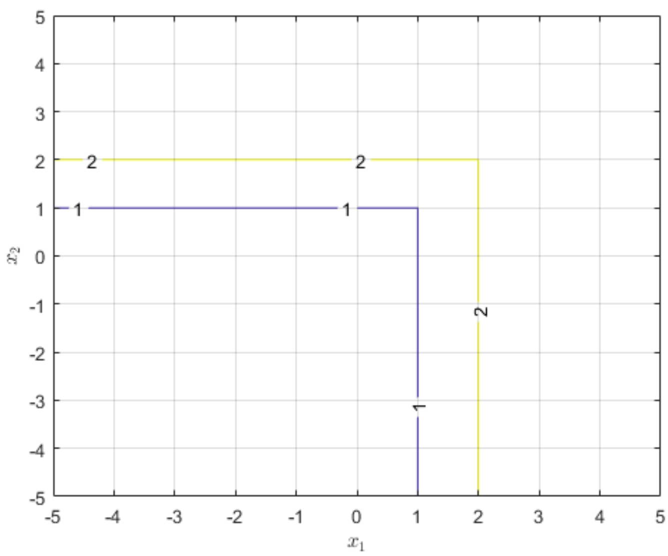
<u>Für $y = 2$:</u> $\max\{x_1, x_2\} = 2 \quad \Leftrightarrow x_1 = 2$ und $x_2 \leq 2$ oder $x_2 = 2$ und $x_1 \leq 2$

Daher ist

$$N_2 = \{\mathbf{x} \in D_{f_5} \mid (x_1 = 2 \text{ und } x_2 \leq 2) \text{ oder } (x_2 = 2 \text{ und } x_1 \leq 2)\}.$$

(ii)

Abbildung 10.5: Die Höhenlinien von f_5



(iii) Laut Definition 9.1.2 aus Teilaufgabe (a) ist f_5 eine Leontief Funktion in 2 Variablen, falls sich $f_5(\mathbf{x}) = \max\{x_1, x_2\}$ schreiben lässt als

$$f_5(\mathbf{x}) = b_0 \min\{b_1 x_1, b_2 x_2\} \text{ für } b_0 \in \mathbb{R},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3.$$

Es gilt für eine beliebige Funktion g, dass $\min g = -\max(-g)$ und $\max g = -\min(-g)$. Somit ist $f_5(\mathbf{x}) = \max\{x_1, x_2\} = -\min\{-x_1,\ -x_2\}$. Setzt man also

$$b_0 = -1\ , b_1 = -1 \text{ und } b_2 = -1,$$

sieht man, dass f_5 eine Leontief Funktion in 2 Variablen ist.

(f) (i) $D_{f_6} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Für $y = 4$: $\quad 6 - 3x_1 - 2x_2 = 4 \quad \Leftrightarrow x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 1.$

Daher ist

$$N_4 = \{\mathbf{x} \in D_{f_6} \mid x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 1\}.$$

Für $y = 6$: $\quad 6 - 3x_1 - 2x_2 = 6 \quad \Leftrightarrow x_2 = -\frac{3}{2}x_1.$

Daher ist

$$N_6 = \{\mathbf{x} \in D_{f_6} \mid x_2 = -\frac{3}{2}x_1\}.$$

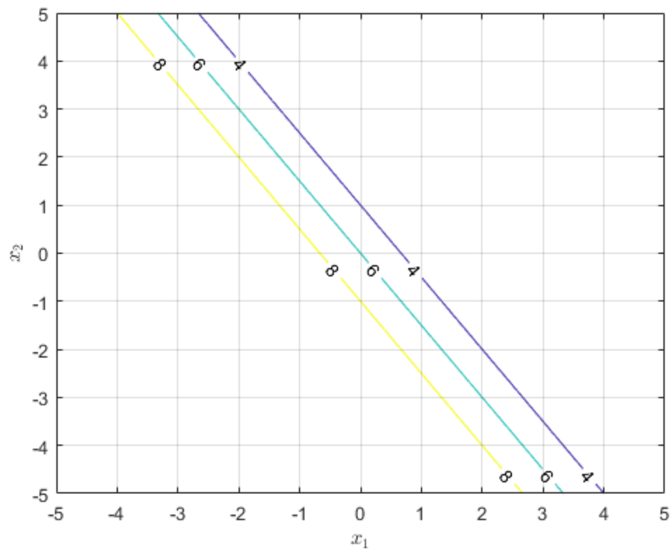
Für $y = 8$: $\quad 6 - 3x_1 - 2x_2 = 8 \quad \Leftrightarrow x_2 = -\frac{3}{2}x_1 - 1.$

Daher ist

$$N_8 = \{\mathbf{x} \in D_{f_6} \mid x_2 = -\frac{3}{2}x_1 - 1\}.$$

(ii)

Abbildung 10.6: Die Höhenlinien von f_6



(iii) Laut Definition 9.1.2 aus Teilaufgabe (a) ist f_6 eine affin-lineare Funktion in 2 Variablen, falls sich $f_6(\mathbf{x}) = 6 - 3x_1 - 2x_2$ schreiben lässt als

$$\begin{aligned} f_6(\mathbf{x}) =& \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c \\ =& \sum_{i=1}^{2} b_i x_i + c \\ =& b_1 x_1 + b_2 x_2 + c \end{aligned}$$

mit einem Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ und einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Dies ist der Fall mit

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } c = 6.$$

Somit ist f_6 eine affin-lineare Funktion in 2 Variablen.