

UNIVERSITÉ NATIONALE DES SCIENCES,
TECHNOLOGIE, INGÉNIERIE ET
MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE D'INGÉNIEUR

Modélisation des relations entre dégâts de CLA,
Spodoptera frugiperda (J. E. Smith, 1797)
(*Lepidoptera: Noctuidae*) et le rendement du
maïs au Bénin

Auteur :

Olivier Mahumawon
ADJAGBA

Superviseur :

Dr.

4 décembre 2021

A la mémoire de mon père qui
a fourni tant d'efforts pour
m'accompagner jusqu'à ce
niveau, mais qui
malheureusement n'est plus
parmi nous pour voir le fruit de
ces efforts. Papa, sans toi rien
n'aurait été possible, je t'aime
infiniment et ce mémoire est
pour toi !

Résumé

Olivier Mahumawon ADJAGBA

*Modélisation des relations entre dégâts de CLA,
S. frugiperda et le rendement du maïs au Bénin*

Remerciements

Je remercie tout d'abord le Dieu tout puissant pour m'avoir donné la santé, la force et l'intelligence nécessaire pour poursuivre mes études jusqu'à ce jour.

Je tiens à remercier mes parents et surtout mon père, pour m'avoir accompagné d'une manière ou d'une autre durant tout mon cursus scolaire.

Je voudrais remercier tout le personnel de GREEN TECH INNOVATION (GTI) pour m'avoir accepté parmi eux.

Je témoigne toute ma reconnaissance à tous ceux qui m'ont permis de . . . , en particulier aux personnes suivantes :

Enfin, j'adresse mes sincères remerciements à mes camarades stagiaires et étudiants qui n'ont pas manqué de me donner un coup de mains quand j'en ai eu besoin.

Sommaire

Résumé	v
Remerciements	vii
Table des figures	xi
Liste des tableaux	xiii
Liste des abréviations	xv
Symboles	xvii
1 Introduction	1
2 Revue de Littérature	7
3 Méthodologie	43
4 Résultats et discussions	55
5 Conclusion	57

Table des figures

2.1	Stades du cycle de vie du <i>Spodoptera frugiperda</i>	12
2.2	Distribution géographique de la CLA de 2016 à 2021	15
2.3	Méthode d'Euler explicite	28
3.1	Diagramme montrant les interactions en la population du maïs et de celle de la CLA	51

Liste des tableaux

3.1	Description des variables d'état du modèle	45
3.2	Descriptions des paramètres du le modèle	46

Liste des abréviations

CIMMYT	Centre International d'Amélioration du Maïs et du Blé.
CLA	chénille légionnaire d'automne.
DFE	Disease Free Equilibrium.
EDO	équation différentielle ordinaire.
EDP	équation aux dérivées partielles.
EDR	équation différentielle à retard.
EDS	équation différentielle stochastique.
IITA	Institut International de Agriculture Tropicale.
RK2	Runge-Kutta d'ordre 2.
RK4	Runge-Kutta d'ordre 4.
<i>S. frugiperda</i>	<i>Spodoptera frugiperda</i> (J. E. Smith, 1797) (<i>Lepidoptera: Noctuidae</i>).
SIS	Susceptible, Infecté, Susceptible.

Symboles

1

Introduction

Sommaire

1.1 Introduction	1
----------------------------------	---

1.1 Introduction

1.1.1 Contexte et justification

Mêlant à la fois la complexité des plantes et la variété du monde des insectes, les interactions entre plantes et insectes est un domaine extrêmement riche. Parmi ces interactions, la pollinisation est indubitablement celle à laquelle on pense en premier. Et pour cause, les insectes permettent l'existence et la reproduction de nombreuses plantes. La pollinisation est considérée comme l'un des services écosystémiques les plus répandus au monde. Selon le programme de recherche européen, Alarm¹, mené de 2004 à 2009 pour évaluer les risques encourus par la biodiversité terrestre et aquatique en Europe, la pollinisation représenterait près de 153 milliards d'euros soit 9,5% de la valeur de production agricole mondiale. Les cultures dépendant des pollinisateurs, quant à elles, constituent près de 35% en tonnes de la production mondiale de nourriture.

Dans le même temps, d'autres insectes s'attaquent eux directement aux récoltes (directement aux champs, soit pendant le stockage) ou transmettent des maladies (virus, bactéries,...). Par exemple, Pimentel et al. [2005] évaluent les pertes liées

1. <http://www.alarmproject.net>

aux insectes invasifs aux Etats-Unis (perte directe et coût de la lutte) à près de 20 milliards de dollars. Les ravageurs peuvent impacter toutes les parties de la plante : les feuilles, les tiges, les racines, les fleurs ou les fruits.... Les dégâts peuvent être tout autant quantitatifs que qualitatifs et se mesurent en unité absolue (poids, unité financière...) ou relative (en % de production par exemple) (LEBON 2014). L'objet de cette étude porte sur l'un des ravageurs -pour ne pas dire le ravageur le plus dangereux- du maïs qui l'une des cultures les plus consommées en Afrique. Ce ravageur porte le nom du CLA encore appelé *S. frugiperda*.

En effet la CLA est un lépidoptère nuisible originaire d'Amérique tropicale et subtropicale SPARKS 1979. Elle attaque plus de 80 espèces de cultures différentes, mais avec une préférence pour les graminées, et le maïs en particulier (DAY et al. 2017). La présence du ravageur a été signalée en Afrique centrale et occidentale depuis 2016 (GOERGEN et al. 2016), et plus tard dans la majeure partie de l'Afrique subsaharienne (DAY et al. 2017). On ne sait pas comment cette invasion s'est produite, mais les preuves suggèrent que l'haplotype présent en Afrique est originaire de Floride et des Caraïbes (HUESING et al. 2018). La proliférance de la CLA (les lots d'œufs contiennent souvent plusieurs centaines d'œufs ; (SPARKS 1979)) associée à sa capacité à migrer sur de longues distances (plusieurs centaines de kilomètres ; ROSE et al. 1975) sont deux des traits de l'espèce qui pourraient expliquer la vitesse à laquelle elle a envahi le continent (BAUDRON et al. 2019). La préférence du maïs ; la principale culture céréalière en Afrique (DEVI 2018) – et d'autres cultures dont se nourrit ce ravageur hautement polyphage – associée aux conditions agroécologiques propices à la CLA dans une grande partie de la région en fait une menace sérieuse (et très certainement pérenne) pour la sécurité alimentaire en Afrique subsaharienne (DAY et al. 2017).

Depuis l'invasion du continent par la CLA, la réaction immédiate des gouvernements a été d'investir dans les pesticides chimiques (HARRISON et al. 2019) et leur utilisation reste la principale stratégie des agriculteurs pour lutter contre le ravageur, bien qu'avec des résultats mitigés (KUMELA et al. 2019). Plusieurs études ont été publiées, mais il n'y a eu aucune étude systématique et quantitative à l'échelle nationale dans aucun des pays touchés en Afrique (DE GROOTE et al. 2020). Les méthodes de lutte basées sur la gestion agronomique représentent une alternative intéressante, plus abordable pour

les petits exploitants aux ressources limitées et à moindre risque pour la santé et l'environnement (THIERFELDER et al. 2018). Cependant, il existe peu de données empiriques pour orienter les recommandations pour un contrôle efficace de la CLA par la gestion agronomique en Afrique, car la plupart de ces connaissances sont basées sur des données provenant des Américains et des observations - parfois anecdotiques - faites dans la région (HARRISON et al. 2019).

L'impact de la CLA sur le rendement du maïs en Afrique a été signalé comme très important. DAY et al. 2017 ont estimé en moyenne l'impact de la CLA à 45% (entre 22 et 67%) du rendement au Ghana et à 40% (entre 25 et 50%) en Zambie, entraînant des millions de dollars US de pertes. De même, KUMELA et al. 2019 ont estimé l'impact de la CLA à 32% du rendement en Éthiopie et à 47% du rendement au Kenya. Ces estimations, cependant, sont basées sur des enquêtes socio-économiques axées sur les perceptions des agriculteurs, mais pas sur des méthodes rigoureuses de dépistage sur le terrain telles que celle proposée par MCGRATH et al. 2018. Cependant, une étude directe menée à Zimbabwe a estimé les pertes causées par la CLA en 2018 à 11.57%, mais seulement dans deux districts : Chipinge et Makoni (BAUDRON et al. 2019).

Face à cette pandémie, de nombreuses études ont été menées pour comprendre ces épidémies périodiques. Des modèles mathématiques basés sur les schémas météorologiques et les dates d'arrivée estimées des papillons à partir de la prévision des précipitations et du nombre de chenilles à partir des inspections sur le terrain ont également été formulés pour prédire d'éventuelles épidémies (BISTA et al. 2020 ; EARLY et al. 2018). Dans son étude, EARLY et al. 2018 a créé un ensemble de Modèles de Distribution des Espèces (SDM), comprenant huit techniques de modélisation : réseaux neuronaux artificiels (ANN), analyse des arbres de classification (CTA), analyse discriminante flexible (FDA), modèles additifs généralisés (GAM), modèles linéaires généralisés (GLM), splines de régression adaptative multivariée (MARS), forêt aléatoire (RF), et enveloppe de portée de surface (SRE).

1.1.2 Problématique

L'agriculture représente la part importante de source de vie de l'homme. Les ravageurs des cultures en générale et celui du maïs en particulier causent chaque

année, des déficits alimentaires dûs aux pertes de récoltes. Des mesures de prévention et de contrôle ont été appliquées, mais la plus part est soit couteuse ; donc difficile d'accès aux petits exploitant, soit présente un risque pour la santé et l'environnement. Il existe un riche ensemble de modèles mathématiques des effets de la CLA sur la production de maïs qui ont été rapportés par plusieurs auteurs (ANGUELOV et al. 2017; PÁEZ CHÁVEZ et al. 2017; RAFIKOV et al. 2008). Des modèles tels que les modèles structurés par étapes avec et sans délai qui considèrent souvent les prédateurs matures (ennemis naturels) ont également été appliqués ; cependant, la plupart de ces modèles, bien qu'incorporant les types I, II, III et IV de Holling et les réponses fonctionnelles de Beddington-DeAngelis comme base de référence, n'ont pas ciblé l'interaction entre le maïs et les CLA.

Cependant, dans une étude récente, DAUDI et al. 2021 a utilisé une équation différentielle ordinaire pour explorer les implications de l'infestation par les CLA dans un champ de maïs planté avec un nombre initial de graines de maïs au temps $t = 0$. Afin d'obtenir les résultats escomptés, il a proposé deux sous-modèles, chacun étant structuré par étapes dans les deux populations (maïs et CLA) pour déterminer la dynamique de la population en présence et en absence d'immigration de la CLA adulte et a estimé le rendement lorsque des mesures de contrôle telles que les pesticides et les cultures associées sont utilisées. L'un des défauts majeurs que nous avons fait ressortir de ce modèle, est le fait qu'il ne prenne pas en compte le fait qu'un maïs attaqué ne meurt pas nécessairement. Normalement, le maïs a la possibilité de compenser les pertes foliaires en fonction de la fertilité du sol (FAO et PPD 2018). Nous proposerons alors une méthode qui prenne en compte ce facteur.

1.1.3 Objectifs de l'étude

1.1.3.1 Objectif général

Cette étude consiste à modéliser les relations entre dégâts de la chenille légionnaire, *S. frugiperda* d'automne et le rendement du maïs au Bénin. Cela revient en quelque sorte à étudier la dynamique de la population du maïs et de celle du ravageur en fonction du temps.

1.1.3.2 Objectifs spécifiques

- Modéliser à l'aide d'un système d'équations différentielles les deux populations sont structurées par étape, la variation de la population du maïs et celle de la CLA dans le temps,
- Estimer sur la base des données collectées sur le terrain, les paramètres du modèle,
- Résoudre le système d'équations d'équation différentielle à l'aide d'une méthode de résolution numérique soigneusement choisie,
- Proposer une solution qui permettrait à tout producteur de prendre les mesures qu'il faut pour éviter le plus possible les dégâts de la CLA.

2

Revue de Littérature

Sommaire

2.1	Biologie des plantes, insectes et de leurs interactions	7
2.2	La chénille légionnaire d'automne	10
2.3	Modélisation sur les des insectes, plantes et leurs interactions . .	16
2.4	Méthodes de résolution numérique des équations différentielles .	24

2.1 Biologie des plantes, insectes et de leurs interactions¹

Les relations plantes-insectes ont toujours été à double tranchant. D'un côté de nombreux végétaux ne pourraient survivre sans la présence de leurs insectes pollinisateurs. De l'autre, une part non négligeable des récoltes est directement consommée par les insectes que cela soit au champs ou lors de leur stockage. Depuis toujours, les hommes se sont donc tout naturellement penchées sur ces relations afin de les comprendre mais aussi de les modifier, surtout depuis quelques années. En effet, avec pour objectif de nourrir plus de neuf milliards d'individus sur une planète qui de toute évidence a des limites de production, il est nécessaire de réduire au maximum les pertes subies afin d'améliorer les rendements finaux. Pour cela, l'homme a mis en place des méthodes de lutte diversifiée qui modifie ces interactions plantes-insectes : lutte chimique,

1. LEBON 2014.

mécanique, biologique ou encore intégrée. Afin d'optimiser ces méthodes et prédire leur impacts sur les interactions plantes-insectes, il est nécessaire de cerner au plus près ces relations plantes-insecte.

2.1.1 L'objet Plante

Les végétaux sont des organismes photoautotrophes, c'est à dire les producteurs primaires des chaines alimentaires (à l'exception des plantes parasites et des plantes carnivores). Ils sont capables de capturer l'énergie solaire sous forme de photons et la transformer en carbohydrates, des composés de matière organique. Ce phénomène est appelé photosynthèse. La matière organique ainsi créée peut être allouée à différents compartiments de la plante et être utilisée dans le cadre de la croissance (principalement par la respiration), dans la reproduction, ou être stockée. Cependant, elle peut également être détournée par des consommateurs secondaires tels que les insectes phytophages. Les plantes sont un groupe très diversifié, présentant de multiples formes et taille. Néanmoins, elles partagent toutes la même organisation de base dont les parties principales sont les feuilles où se déroule la photosynthèse, les tiges ou branches qui servent de support et les racines qui ancrent la plante au sol et permettent l'acquisition d'eau et de nutriments. Lors de la phase reproductive, de nouveaux organes apparaissent : les fleurs, les fruits mais aussi les organes de réserves. Cette organisation ainsi que les principaux mécanismes ayant lieu dans une plante sont représentés dans la figure 2.1. Il s'agit d'un schéma simplifié d'une plante où sont représentées les zones de photosynthèse (zone de production) et de respiration, les zones de stockage et de croissance, et les flux de matière sous la forme de sève brute et élaborée. Chacun de ces processus sera abordé dans cette section.

Les informations présentées dans cette section proviennent principalement des ouvrages de (HELLER et al. 1998, 2000).

2.1.2 L'objet Insecte

La classe des insectes, découpée en de très nombreux ordres, représente près de la moitié des espèces vivantes recensées au monde et près des trois quarts de celle du monde animal (SAUVION et al. 2013). Si un million d'espèces a déjà été

décrivées, il en resterait près de 30 millions encore inconnus, présents dans toutes les zones du globe et sous tous les climats. C'est l'organisation du corps qui détermine l'appartenance d'un animal à la classe des insectes. Il doit comporter : une tête, porteuse des organes des sens (yeux et antennes classiquement) et de la nutrition (pièces buccales), d'un thorax où sont attachés les trois paires de pattes ainsi que les ailes et un abdomen qui contient les organes internes. Ce corps étant entièrement recouvert de chitine (ce qui constitue leur exosquelette), la respiration s'effectue par leur peau au travers de trachées ouvertes sur l'extérieur appelées des stigmates et disposées le long de l'abdomen. Si certains aspects de cette organisation tel que le nombre d'ailes peut être légèrement modifiés (chez les diptères par exemple, une paire d'ailes s'est atrophiée afin de créer ce qu'on appelle les balanciers), la présence des six pattes est obligatoire. C'est le critère essentiel de la détermination des insectes. Par exemple, les acariens qui sont souvent comparés aux insectes ont huit paires de pattes et sont donc des arachnides.

2.1.3 Interactions entre les plantes et les insectes

Quand les plantes et les insectes cohabitent, deux types d'interactions peuvent se produire entre eux. Il s'agit soit du l'antagonisme, soit du mutualisme. Nous présentons brièvement ces deux types d'interactions dans cette sous-section.

2.1.3.1 Antagonisme plantes-insectes

Les plantes et les insectes étant tous deux des éléments particulièrement complexes et affichant une incroyable diversité, les relations qu'ils ont pu mettre en place durant leur co-évolutions sont tout aussi riches. Il est néanmoins possible de les séparer en deux grandes catégories qui sont les relations antagonistes où plantes et insectes s'opposent, tentant chacun de survivre, et les relations mutualistes où des interactions bénéfiques pour les deux protagonistes apparaissent. Nous commencerons ici par les relations antagonistes car ce sont elles qui ont motivé les hommes dans la recherche de moyens de lutte tels que la lutte biologique, la lutte chimique ou encore la sélection variétale en vue de trouver des plantes plus résistantes. Au vu de la diversité des deux groupes, les relations antagonistes entre plante et insecte peuvent prendre de

nombreuses formes. L'herbivorie peut ainsi diminuer la surface foliaire, mais également les stocks de nutriments, la capacité photosynthétique (ZANGERL et al. 2002), la capacité reproductrice (QUESADA et al. 1995) ou encore la croissance végétative (MEYER 1998). Ces différents types d'attaques conduisent à des pertes quantitatives (réduction de la production de biomasse) et/ou à des pertes qualitatives (diminution du contenu nutritionnel, de la qualité commerciale ou de la caractéristique de stockage,... (OERKE 2006)). Celles-ci peuvent être exprimées en termes de valeurs absolues (kg/ha, ou valeur financière/ha) ou de valeurs relatives (%). (*ibid.*).

2.1.3.2 Mutualisme plantes-insectes

Cependant, les relations plantes-insectes ne se résument pas à des interactions de type antagonistes. Nombreuses sont les plantes qui ne pourraient se reproduire, se disperser voire survivre sans la présence d'insectes. Il s'agit donc de relations mutualistes. Le mutualisme est défini comme un interaction bénéfique entre deux individus (ou deux populations) d'un point de vue reproduction et/ou survie. Cette relation peut être obligatoire (les deux protagonistes ne peuvent pas survivre l'un sans l'autre) ou facultative (HOLLAND et BRONSTEIN 2008). Charles Darwin a probablement été le premier à mettre en avant le mutualisme et plus particulièrement la pollinisation, le désignant comme une exception à sa théorie de l'évolution. Mais le mutualisme peut prendre d'autres formes telles que le mutualisme de protection, de dispersion ou même de nutrition. Cependant les limites du mutualisme restent floues et ce qui apparaît comme d'une mutualisme à une échelle large peut être en fait, tout autre lorsque l'on change d'échelle. Dans cette section, nous passerons en revue ces différents types de mutualisme que sont le mutualisme de pollinisation, de protection, de dispersion, de nutrition mais également un dernier type de mutualisme fondé sur une base d'antagonisme et une réaction de défense de plante très particulière appelée tolérance.

2.2 La chénille légionnaire d'automne

La chénille légionnaire d'automne (*Spodoptera frugiperda*) est une espèce de lépidoptères (papillons) de la famille des *Noctuidae*. C'est un ravageur des

cultures céréalières extrêmement dévastateur. Son intrusion dans un champs de ses cultures préférées provoque des dégâts énormes en un temps record. Dans cette section, nous parlerons

2.2.1 Origine et historique du *Spodoptera frugiperda* (chénille légionnaire d'automne)

Les apparitions de la CLA se sont produites aux États-Unis à des intervalles très irréguliers. L'espèce a été enregistrée comme un ravageur néfaste en Géorgie dès 1797 (SMITH et ABBOT 1797). La prochaine épidémie a été signalée par GLOVER 1856 qui a déclaré que les «marching-worm» causaient des dommages dans l'ouest de la Floride suffisamment importants pour justifier l'institution de la « méthode de fossé » pour détruire les vers.

LUGINBILL 1928 a noté de nombreux rapports sur les épidémies de la CLA aux États-Unis de 1856 à 1928. Des dommages graves au maïs ont été signalés au Missouri et en Illinois en 1870. Des dommages moins importants se sont alors produits peu fréquemment jusqu'en 1899 lorsqu'une épidémie a été signalée des Carolines de l'ouest jusqu'au Kansas et au Missouri. WALTON et LUGINBILL 1936 ont rapporté qu'une épidémie particulièrement grave s'est produite à l'été 1912 lorsque le ravageur a balayé presque l'ensemble des Etats-Unis à l'est des montagnes rocheuses, a complètement détruit le maïs et le mil dans le sud des Etats-Unis, des cultures de cotonet a détruit des herbes sur les pelouses dans les villes comme par magie. LUGINBILL 1928 a signalé d'autres épidémies en 1912, 1915, 1918 et 1920. Depuis 1928, plusieurs épidémies de la CLA se sont produites. Ces dernières ne sont pas bien documentées, mais les entomologistes se souviennent des années où la CLA est devenue un ravageur général, prédominant et nuisible ayant dévasté des cultures dans certaines régions du sud. Les entomologistes se souviendront surtout de 1975, 1976, 1977 comme des années de fortes infestations de CLA dans tout le sud et le long de la côte atlantique (SPARKS 1979).

2.2.2 Biologie du *Spodoptera frugiperda*

Le cycle biologique de la CLA comprend l'œuf, 6 étapes de développement de la chenille (stades larvaires), la pupe et la noctuelle (adulte) (FAO et PPD 2018).

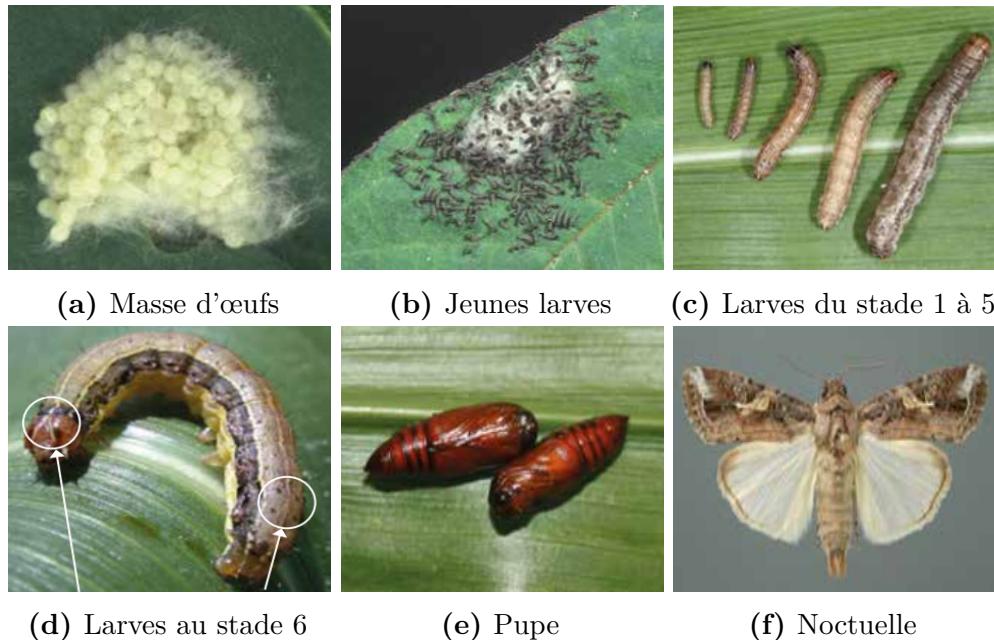


Figure 2.1 – Stades du cycle de vie du *Spodoptera frugiperda* ²

Dans des conditions favorables, la CLA femelle pond 1500 à 2000 œufs pendant son cycle de vie. Les œufs éclosent en larves néonates 4 jours après avoir été pondus (PRASANNA et al. 2018 ; SIMMONS et LYNCH 1990). Le stade larvaire se compose de six étapes, suivies d'une étape pré-pupe, au cours de laquelle la larve tombe et s'enfouit dans le sol à une profondeur de 7,62 à 10,16 cm pendant 2 à 4 jours avant la transformation en pupe (HARDKE et al. 2015). Cette étape de transformation en pupe peut durer de 7 à 14 jours, selon la température du sol. Les insectes émergents du stade de pupe se déplacent vers la surface du sol, deviennent adultes et infestent des plantes en croissance. Le cycle de vie entier d'une CLA peut prendre jusqu'à 4 semaines, tandis qu'une génération composée de larves émergeant de masses d'œufs d'âge similaire peut durer de 80 à 90 jours (ABRAHAMS et al. 2017). Le cycle de vie, la reproduction et la distribution de la CLA dépendent des conditions de température, de la saison des cultures, de la présence d'espèces végétales hôtes et de la fécondité. La propagation rapide du ravageur en Afrique sub-saharienne est probablement liée à la capacité de dispersion notable du papillon, aux conditions éoliennes

prévalentes et à la disponibilité d'espèces hôtes variées (KASOMA et al. 2021). Les larves plus âgées présentent une alimentation nocturne et vorace qui atteint son pic au cours des deux dernières stades larvaires (HARRISON et al. 2019).

Il existe deux biotypes connus de la CLA, à savoir : les biotypes de maïs (C) et de riz (R) (ABRAHAMS et al. 2017). Les deux biotypes ont été distingués par l'utilisation de marqueurs ?? (SIBANDA 2018). Morphologiquement, les biotypes sont identiques (NAGOSHI et al. 2018), mais leurs étapes de développement diffèrent en taux de croissance, en poids nymphal (poids de la pupe) et en période de ponte (PASHLEY 1988). De plus, on croyait que les deux biotypes étaient sexuellement incompatibles (*ibid.*). Cependant, l'accouplement réussi des femelles de R-biotype avec les mâles de C-biotype a été signalé, bien que les croix réciproques aient échoué (*ibid.*). Les compatibilités de rotation entre les deux biotypes peuvent entraîner des variantes nouvelles et agressives. Les deux biotypes sont génétiquement et comportementalement différents, et donc ils ont besoin de différentes méthodes de contrôle. FOTSO KUATE et al. 2019 a signalé une réponse différente des biotypes de la CLA aux produits chimiques de protection des cultures, avec un taux de mortalité différent.

2.2.3 Plantes hôtes du *Spodoptera frugiperda*

La CLA est un ravageur polyphage ; c'est-à-dire qu'il attaque un grand nombre de plants mais a une préférence pour les graminées.

Malgré la large gamme d'hôtes qu'a la CLA, ses deux biotypes préfèrent principalement le maïs et le riz (CASMUZ et al. 2017 ; PRASANNA et al. 2018) a signalé que la CLA a causé des dommages variables sur les familles suivantes de plantes dans l'ordre décroissant de proportions : *Poaceae* (35,5%), *Fabaceae* (11,3%), *Solanaceae* et *Asteraceae* (4,3%), *Rosaceae* et *Chenopodiaceae* (3,7%) et *Brassicaceae* et *Cyperaceae* (3,2%). Par conséquent, la famille *Poaceae*, qui contient les principales cultures céréaliers, y compris le maïs, sert de principal hôte de la CLA. Au cours de l'étape larvaires, la CLA acquiert « l'habitude de la légionnaire » et se propage souvent en grand nombre, défoliant agressivement ses plantes hôtes (ABRAHAMS et al. 2017). Les hôtes primaires et alternatifs de la CLA, y compris les céréales, comme le blé et les espèces d'herbe qui poussent pendant les périodes hors saison, étendent ses chances de survie, servant de

ponts verts entre les espèces végétales et la période de culture (PRASANNA et al. 2018).

2.2.4 Distribution géographique du *Spodoptera frugiperda* en Afrique

La première apparition de la CLA en Afrique a été signalée précisément en Janvier 2016 sur des plants de maïs dans la zone tropicale au Nord-Ouest du Nigeria et dans des domaines de maïs à Institut International de Agriculture Tropicale (IITA) à Ibadan et Ikenne (GOERGEN et al. 2016). Avant la fin de cette année (2016), d'autres pays tels que le São Tomé et Príncipe, le Bénin, le Togo ont également signalé la présence du ravageur. La CLA peut migrer sur des centaines de kilomètres par nuit et se reproduit tous les 1–2 mois ; ce qui fait que ce ravageur se propage aussi rapidement en Afrique depuis son apparition (STOKSTAD 2017). Ainsi, en avril 2017, au moins 16 pays africains avaient confirmé la présence de la CLA, et plus tard en octobre, plus de 30 pays africains avaient confirmé la présence de la CLA (ABRAHAMS et al. 2017; FAO et PPD 2018). En décembre 2018, 41 pays africains sur 54 avaient confirmé la présence de la CLA, alors que trois pays, à savoir le Gabon, la Guinée équatoriale, et la République du Congo soupçonnaient sa présence, en attendant la confirmation (FAO 2018).

Lesotho est le seul pays d'Afrique australe sans présence CLA (RWOMUSHANA 2019) Dans la conception de stratégies intégrées de gestion de la CLA pour l'Afrique sub-saharienne, une enquête détaillée sur les différents facteurs qui peuvent contribuer à entraver l'infestation et la distribution de la CLA au Lesotho est cruciale. Au milieu de 2019, quatre pays de plus ont confirmé la présence de la CLA, apportant le nombre total des pays touchés en Afrique à 45 (*ibid.*). Outre les pays d'Afrique continentale, la présence de la CLA est également confirmée dans les îles associées à l'Afrique, comme Madagascar (KASOMA et al. 2021).

La carte de la figure 2.2 montre la distribution géographique de la CLA en mai 2021 dans le monde. On peut y voir qu'il n'a fallu que 2 ans pour le ravageur pour envahir la quasi-totalité des pays de l'Afrique sub-saharienne.



Figure 2.2 – Distribution géographique de la CLA depuis son apparition en Afrique en 2016 jusqu'en Mai 2021 dans le monde³

2.2.5 Prévention et contrôle du *Spodoptera frugiperda*

Plusieurs stratégies de contrôle ont été recommandées, qui peuvent être testées et adoptées en Afrique sub-saharienne. Ces stratégies incluent les pratiques culturelles, le contrôle chimique (ABRAHAMS et al. 2017), les agents de biocontrôle, résistance des plantes d'hôte et gestion intégrée de la CLA (PRASANNA et al. 2018). Les pratiques culturelles recommandées incluent la plantation en temps opportun en suivant les principales chutes de pluie, la rotation des cultures, de préférence avec des espèces non gazeuses, telles que le soja, la combustion des résidus de culture et la gestion du paysage en enlevant les hôtes majeurs et alternatifs autour des champs de maïs (ABRAHAMS et al. 2017). Les pratiques culturelles sont le point de départ pour minimiser les populations de ravageurs et peuvent être considérées comme des mesures préventives. Actuellement en Afrique sub-saharienne, l'application de pesticides chimiques serait la stratégie de contrôle la plus utilisée pour la CLA (STOKSTAD 2017). Certains agents de biocontrôle sont connus pour être des ennemis naturels de la CLA en Amérique. ABRAHAMS et al. 2017 a signalé un taux de réussite de 70% dans le contrôle de la CLA en utilisant des guêpes parasitaires au Brésil.

Le déploiement réussi des agents de biocontrôle pour une utilisation en Afrique sub-saharienne nécessite des recherches ciblées sur les interactions entre les

biotypes de la CLA et leurs ennemis naturels. Les cultures transgéniques offrent une option de contrôle de la CLA et sont la principale forme de contrôle utilisée contre le ravageur en Amérique (HRUSKA 2019), mais ne sont utilisées que dans quelques pays d'Afrique car les systèmes agricoles sont souvent très différents de ceux en Afrique. Peu de régions d'Amérique ont les petites tailles de ferme et de terrain qui prédominent en Afrique. Les rendements sont beaucoup plus élevés en Amérique, en moyenne plus de huit tonnes par hectare pour le maïs, par rapport à environ deux tonnes par hectare en Afrique (DAY et al. 2017). La résistance des plantes hôtes basée sur la capacité intrinsèque de la plante à résister ou à tolérer l'herbivorie CLA, est un approche économique et écologique utile aux petits exploitants et aux agriculteurs commerciaux. Elle repose sur les différents mécanismes de défense des plantes contre les insectes nuisibles. Ces systèmes de défense sont importants à prendre en compte lors de la sélection des parents pour l'élevage de résistance des plantes hôtes (KASOMA et al. 2021).

La gestion intégrée de la CLA comprend deux ou plusieurs stratégies de gestion qui peuvent fournir des effets synergiques sur la lutte antiparasitaire avant que des dommages importants ne soient infligés (FAO et PPD 2018). Les départements de la recherche internationale, tels que le CIMMYT (Centre International d'Amélioration du Maïs et du Blé), IITA (Institut International de Agriculture Tropicale), (), (), (), les instituts de recherches nationaux ainsi que le secteur privé travaillent ensemble activement pour élaborer des stratégies de contrôle rentable de la CLA. Le Centre International d'Amélioration du Maïs et du Blé (CIMMYT) et IITA visent à introduire de nouveaux gènes de résistance CLA dans des variétés sensibles pour développer des cultures en Afrique sub-saharienne (KASOMA et al. 2021).

2.3 Modélisation sur les des insectes, plantes et leurs interactions

2.3.1 La notion de modèle

Une définition de ce qu'est un modèle est proposée par (COQUILLARD et al. 1997) : « Un modèle est une abstraction qui simplifie le système réel étudié en

ignorant de nombreuses caractéristiques du système réel étudié, pour se focaliser sur les aspects qui intéressent le modélisateur et qui définissent la problématique du modèle ». Un modèle est donc une représentation idéalisée et simplifiée d'un système biologique complexe. Il se restreint à quelques aspects essentiels de son objet d'étude afin de répondre à un questionnement précis. La démarche de modélisation passe ainsi par tout d'abord, la détermination d'un objet d'étude, puis la formalisation d'une problématique, la définition des hypothèses ainsi que de l'échelle de modélisation, l'évaluation des processus internes, la simulation de l'évolution du système puis sa validation par comparaison aux données expérimentales ou aux théories [Davi et al.].

La modélisation est un outil très performant dans le domaine de l'agronomie ou de l'écologie. Elle remplit de nombreux objectifs : de simplification, de quantification, de test d'hypothèses, de détermination de paramètres, d'études de systèmes ainsi que de comparaison et de généralisation mais aussi de prévision. En agriculture par exemple, la modélisation peut fournir des informations quantitatives sur la période de culture, l'irrigation, la fertilisation, la lutte contre les ravageurs, et le climat (LEBON 2014).

2.3.2 Les modèles individus centrés

L'approche individus centrés (Individual-Based Models ou IBMs en anglais) s'est principalement développée à la fin des années 90 bien que son origine semble remontrer aux années 60 (DEANGELIS et MOOIJ 2005). Ces modèles s'appuient sur des parallèles en économie et sciences sociales, les systèmes multi-agents ou encore l'intelligence artificielle et les modèles particulaires de la physique (BESLON 2008). Ces modèles sont aussi appelés modèles d'automate cellulaire et sont utilisés en fonction du questionnement, du modèle d'étude, du contexte, de l'échelle et de la résolution considérée (REBAUDO 2012). Ce dernier Selon Grimm and Railsback [2005], il n'existerait pas de définition absolue des IBMs (ROUGHGARDEN 2012). Les IBMs simulent des populations ou des ensembles de populations en les décomposant à un niveau local, c'est à dire en individus (ou groupe restreint d'individus). Chaque individu interagit de manière indépendante avec son environnement et avec les autres individus. La dynamique globale de la population émerge donc naturellement des "choix" de

chaque individu. Différents processus peuvent être pris en compte dans le cadre des IBMs : la variabilité spatiale, le détail du cycle de vie de chaque individus, les variations comportementales, l'apprentissage et l'évolution. (GRIEBELER et GOTTSCHALK 2000) a ainsi mis en place un IBM afin de déterminer l'importance des habitats sous-optimal dans la survie des dectinelles chagrinées, *Platycleis albopunctata*. Son modèle est en fait constitué de deux sous modèles : l'un pour la croissance démographique des dectinelles qui dépend principalement de la température et le second pour la simulation de deux zones de reproduction distinctes. Ce modèle a permis de mettre en évidence que la présence d'un environnement sous-optimal encerclant une zone favorable à la reproduction permettait de diminuer de près de 50% la population de dectinelles (LEBON 2014).

2.3.3 Les modèles de type proie-prédateur et leurs dérivés

Les modèles d'interactions entre populations sont donc également particulièrement connus, avec des modèles classiques tels que ceux de Lotka-Volterra (BACAËR 2011; HARRISON 2014; KOSTITZIN 1937; VOLTERRA et BRELOT 1931) qui peuvent représenter des relations proies/prédateurs, de compétition voire même de coopération. Ces modèles reposent sur au minimum deux équations différentielles pour chacun des deux compartiments. Dans ce type de modélisation, il s'agit souvent de coupler deux équations globales ce qui donne d'un point de vue général :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) - g(.)y \\ \dot{y} = h(.)y - m(.)y \end{cases} \quad (2.1)$$

Les proies sont soumises à une fonction de croissance ($f(x)$) qui peut prendre différentes formes (NUNDLOLL 2010) et les prédateurs à une loi de mortalité ($m(.)$). L'interaction entre les deux populations se fait sous la forme des réponses fonctionnelles ($g(.)$) et numériques ($h(.)$) (SOLOMON 1949). La réponse fonctionnelle (le nombre de proies tuées par prédateur et par unité de temps) peut être soit dépendante de la densité des proies mais indépendante de celle des prédateurs (courbe de Holling par exemple (HOLLING 1961); soit directement

dépendant de la densité de prédateur (ARDITI et GINZBURG 1989 ; BEDDINGTON 1975 ; DEANGELIS, GOLDSTEIN et al. 1975). Ainsi, BEDDINGTON 1975 met en avant les possibles interférences entre les prédateurs (R) dans l'équation d'efficience de recherche des proies (E) :

$$E = \frac{a}{1 + at_h N + bt_w R} \quad (2.2)$$

où a est le taux d'attaque, b , la fréquence de rencontre d'une proie, t_h le temps perdu à manipuler la proie, t_w le temps perdu entre deux proies et N le nombre de proies. La réponse numérique (l'augmentation de la population de prédateur due à la consommation de proies) peut également être représentée par trois courbes de Holling (HOLLING 1961).

Les fonctions de du système d'équations 2.1 peuvent prendre des formes diverses (NUNDLOLL 2010) :

☞ la fonction de croissance $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} rx, & \text{Malthus} \\ rx \left(1 - \frac{x}{K}\right), & \text{Verhulst} \\ rx \ln\left(\frac{x}{K}\right), & \text{Gompertz} \\ rxv \left(1 - \left(\frac{x}{K}\right)^{\frac{1}{v}}\right), & \text{Forme générale des fonctions logistiques} \\ rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{K_A} - 1\right), & \text{Croissance avec effet Allee} \end{cases} \quad (2.3)$$

☞ la réponse fonctionnelle $g(\cdot)$:

$$g(x) = \begin{cases} ax, & \text{Lotka-Volterra} \\ \begin{cases} ax, & \forall x \leq \bar{x} \\ ax, & \forall x > \bar{x} \end{cases} & \text{Holling Type I} \\ \frac{ax}{dx + c} & \text{Holling Type II} \\ \frac{ax^v}{dx^v + c} & \text{Holling Type III} \\ 1 - e^{ux}, & \text{Ivlev} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{ax}{dx + (by + b_0)c}, & \text{Beddington-DeAngelis} \\ \frac{ax}{dx + cy}, & \text{Ratio-dependent} \end{cases} \quad (2.5)$$

☞ la réponse numérique $h(\cdot)$

$$h(\cdot) = eg(\cdot) \quad (2.6)$$

☞ le taux de mortalité $m(\cdot)$

$$m(x) = \begin{cases} m & \text{mortalité constante} \\ m + qy & \begin{array}{l} \text{mortalité augmentant en fonction} \\ \text{de la densité de prédateur} \end{array} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$m(y) = \begin{cases} m + \phi(\cdot)y & \text{mortalité dû à d'autres formes de cannibalisme} \end{cases} \quad (2.8)$$

Ces modèles ont été largement utilisés afin de déterminer les conditions de co-existence ou d'exclusion des populations d'insectes. Ainsi, EDMUNDS 2007 présente un modèle discret structuré en âge avec deux espèces compétitives basé

sur un modèle *lpa* :

$$\begin{cases} l_{t+1} = ba_t \exp(-c_{el}l_t - c_{ea}a_t), \\ p_{t+1} = l_t(1 - \mu_l), \\ a_{t+1} = p_t \exp(-c_{pa}a_t) + a_t(1 - \mu_a) \end{cases} \quad (2.9)$$

avec l_t le nombre de larves, p_t le nombre d'individus qui ne se nourrissent pas (nymphes, pupes,...), a_t le nombre d'adultes sexuellement actifs, le paramètre b représente la natalité des larves, les paramètres μ leur mortalité et les paramètres c les taux de cannibalisme. Il met en évidence l'importance des conditions initiales dans l'existence de bassins d'attractions qui déterminent les notions de co-existence ou d'exclusion. Ce type de modélisation de la compétition des espèces a également donné lieu à la modélisation des contrôles biologiques (MILLS et GETZ 1996; NUNDLOLL 2010). En effet, les contrôles biologiques sont principalement basés sur l'utilisation d'espèces prédatrice ou parasites des ravageurs afin d'en contrôler la population. Il est à souligner l'absence souvent complète d'un compartiment plante dans cette modélisation du contrôle. Découlant plus ou moins directement des relations de type Lotka-Volterra, la modélisation de type hôte-parasite est l'une des modélisations les plus répandues lorsque l'on considère les interactions plantes-insectes. Principalement basée sur des lois de Holling, elle peut intégrer plus ou moins de raffinements (toxicité, impact de la qualité nutritionnelle des plantes, intervention d'un troisième étage trophique sous la forme de prédateurs...) mais repose la plupart du temps sur des équations globales. Par exemple, KANG et al. 2008 décrit l'étude d'un modèle mathématique discret sur la dynamique plante-herbivore (qui est ici un insecte : la spongieuse *Lymantria dispar L.*) sur la base du système suivant, dérivé du modèle classique de Nicholson Bailey (HORNE et BAILEY 1991) pour les hôtes-parasitoïdes :

$$\begin{cases} P_{n+1} = \lambda P_n g(P_n) f(H_n) \\ H_{n+1} = c \lambda P_n g(P_n) [1 - f(H_n)] \end{cases} \quad (2.10)$$

avec P pour la population de plantes, H pour la population d'herbivores, et

$f(H_n)$ la fraction des herbivores parasités qui survit. Il met en évidence deux stratégies de contrôle (soit réduire la population de ravageur, soit augmenter le taux de croissance végétatif de la plante). FENG, LIU et al. 2008 et FENG, QIU et al. 2011 décrivent également un système plantes-insectes sous la forme hôte-parasite mais avec une réponse fonctionnelle de type Holling 2 modifiée

$$C(N) = f(N) \left(1 - \frac{Tf(N)}{M} \right). \quad (2.11)$$

Ainsi, cette nouvelle réponse fonctionnelle prend en compte un impact négatif des plantes sur les ravageurs $\left(1 - \frac{Tf(N)}{M} \right)$ qui peut dépasser l'impact positif lié à l'apport nutritif végétal lors de forts taux de toxicité. Les auteurs décrivent alors deux types de comportement face à cette toxine : soit les herbivores sont capables de réguler cet apport nocif soit ils ne le peuvent pas. Les conséquences de ces deux comportements sont étudiés dans des diagrammes de bifurcation. Ainsi, pour des taux de consommation relativement bas, l'effet toxique a tendance à augmenter les risques de cycle limite de type « paradoxe de l'enrichissement » alors qu'à fort taux de consommation, cette probabilité est diminuée. Ces études ont également été étayés par d'autres travaux (LI et al. 2006 ; LIU et al. 2008).

D'autres modèles s'appuient également sur des relations de type proie prédateur ((ALLEN, HANNIGAN et al. 1993) et les références associées) mais couplent des équations complexes de type compartemental. Le modèle de GUTIERREZ et al. 1985 reprend par exemple les effets des herbivores sur les différentes allocations de matière dans la plante (ici la vigne), sur la base du modèle de McKendrick von Foerster (KERMACK et al. 1927 ; MCKENDRICK 1925). (ALLEN, HANNIGAN et al. 1993 ; ALLEN, STRAUSS et al. 1991) considèrent l'impact du foreur de sarment de la vigne (*Amphicerus bicaudatus*) sur un vignoble (l'échelle est donc ici celle de la population contrairement aux deux modèles cités précédemment).

La population de ravageurs est découpée en trois classes (selon l'impact sur le matériel végétal) tandis que les équations de type proie-prédateur sont modifiées afin de prendre en compte les spécificités de cette interaction foreur de sarment de vigne et vigne. Ce modèle est utilisé à des fins de contrôle de populations. Les équations à retard peuvent aussi être utilisées afin de modéliser les interactions entre plusieurs antagonistes. Par exemple, SUN et al. 2021 présentent un modèle à retard afin de mieux comprendre les invasions importantes d'insectes ravageurs.

Le modèle couple une équation de réaction-diffusion des herbivores à une équation de retard représentant les réactions de défenses des plantes. Ce modèle permet de mettre en évidence une valeur seuil déterminant l'occurrence de l'invasion (LEBON 2014).

2.3.4 Les modèles compartimentaux

Les modèles compartimentaux ont été historiquement utilisés en épidémiologie dans la description de l'évolution des maladie (BACAËR 2011 ; KERMACK et al. 1927 ; MCKENDRICK 1925). Ces modèles se basent sur l'interaction entre trois compartiments, les sains (S), les infectieux (I) et ceux en rémission (R). Chaque compartiment est un groupe homogène et isotope. Cependant, cette idée de compartiments ne s'est pas restreint à la seule étude des maladie infectieuses et a été reprise dans des modélisations des dynamiques d'insectes et de plantes.

2.3.5 Les modèles de méta-population

Les modèles de méta-population incluent de multiples patchs de populations liés entre eux par des phénomènes de diffusion et dispersion (HANSKI et GILPIN 2008). La méta-population peut être constituée d'une unique espèce ou de plusieurs (on peut alors parler de méta-communauté). Les questions principales de cette modélisation reposent sur la compréhension de la dynamique des différents patchs (extinction, extension,...). Le premier modèle de méta-population a été proposé par Levins (*ibid.*). Ce modèle est basé sur la notion de présence/absence. Ainsi si $p = 1$, tous les sites sont occupés par la population, si $p = 0$ tous les sites sont vides (la population s'éteint). Le modèle prend alors la forme de :

$$\frac{dp}{dt} = \text{taux d'immigration} - \text{taux d'extinction} \quad (2.12)$$

Le taux d'immigration représente le taux auquel les sites sont colonisés par l'espèce considérée alors que le taux d'extinction représente le taux auquel les sites se vident. Le modèle de Levins s'écrit plus précisément :

$$\frac{dp}{dt} = ip(1 - p) - ep \quad (2.13)$$

où i et e sont les probabilités d'immigration et d'extinction

Il existe dans la littérature beaucoup d'autres modèles qui sont développer, toujours dans le but de mieux appréhender les interactions existant entre les plantes et les insectes (voir (LEBON 2014) pour une revue plus détaillée sur ces modèles). Ce dernier, dans le but d'apporter de nouvelles pistes de réflexion dans le domaine des interactions plantes-insectes, a conduit trois études différentes sur la compensation chez les plantes. Dans la première, il a développé un modèle mathématique générique, dont l'étude a mis en évidence l'existence de paramètres seuils qui déterminent la co-existence ou non de différents types d'équilibres de compensation. La seconde étude, expérimentale, a permis de tester l'hypothèse de compensation chez la tomate en réponse à la mineuse de la tomate, *Tuta absoluta*. Dans son expérience, le cultivar de tomate a présenté des tendances à la compensation pour deux niveaux d'infestation, et à la sur-compensation reproductive en cas de faible infestation. Enfin, toujours dans le cas de la tomate et *T. absoluta*, les derniers développements s'appuient sur un modèle informatique de type « Structure-Fonction ». Ce modèle a permis de tester et visualiser différentes situations (dates et positionnements de l'attaque) sur une représentation plus réaliste de la plante.

2.4 Méthodes de résolution numérique des équations différentielles

2.4.1 Définition

Une équation différentielle est une équation où l'inconnue est une fonction, et qui se présente sous la forme d'une relation entre cette fonction et ses dérivées.

On distingue généralement deux types d'équations différentielles :

1. les équations différentielles ordinaires (EDO) où la ou les fonctions inconnues ne dépendent que d'une seule variable ;
2. les équation aux dérivées partielles (EDP) où la ou les fonctions inconnues peuvent dépendre de plusieurs variables indépendantes.

Sans plus de précision, le terme équation différentielle fait le plus souvent référence aux EDO.

On rencontre également d'autres types d'équations différentielles (liste non exhaustive) :

1. les équations intégro-différentielles qui font intervenir les dérivées de fonction(s) et ses/leurs intégrale(s) ;
2. les équations différentielles stochastiques (EDP) où un ou plusieurs termes de l'équation différentielle sont des processus stochastiques ; équations différentielles à retard (EDR) dans lesquelles la dérivée de la fonction inconnue à un moment donné est exprimée selon les valeurs de la fonction aux temps précédents ;
3. etc...

Dans cette section, nous nous intéressons aux EDO.

2.4.2 Les équations différentielles ordinaires

Cette section est tirée du livre de FORTIN (2008)

La résolution numérique des équations différentielles est probablement le domaine de l'analyse numérique où les applications sont les plus nombreuses. Que ce soit en mécanique des fluides, en transfert de chaleur en analyse de structure, en biologie, en agronomie, etc. . . , on aboutit souvent à la résolution d'équations différentielles, de systèmes d'équations différentielles ou plus généralement d'équations aux dérivées partielles.

Dans cette section, les diverses méthodes de résolutions proposées sont d'autant plus précis qu'elles sont d'ordre élevé. Nous considérons principalement les équations différentielles avec conditions initiales.

De manière générale, on s'intéresse à trouver une fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$y^{(m)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t)), \quad m \in \mathbb{N}^*, \quad t \in [t_0, t_f] \quad (2.14)$$

Définition 2.4.1 (EDO)

Une EDO (équation différentielle ordinaire) est une relation faisant intervenir une fonction inconnue (ici y) d'une seule variable indépendante (ici t) et ses dérivées. L'ordre d'une EDO est déterminé par la dérivée la plus élevée de la fonction inconnue apparaissant dans l'équation.

L'unicité de la solution à ce type de problème est garantie par l'ajout de conditions supplémentaires.

En général il s'agit de conditions portant sur la valeur de l'inconnue en certains points. Le nombre de conditions nécessaires étant déterminées par l'ordre de l'EDO.

La variable indépendante t représente souvent (mais pas toujours !) le temps.

Quelques exemples d'EDO :

$$mg - k(v(t))^2 - v'(t) = 0, \text{ EDO d'ordre 1 (non linéaire)}$$

$$y^{(4)}(t) - ty(t) = 9, \text{ EDO d'ordre 4 (linéaire)}$$

$$(y''(x))^3 - y(x) = x^5 \text{ EDO d'ordre 2 (non linéaire)}$$

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser aux EDO d'ordre 1.

Faisant toujours référence au temps, la condition que l'on ajoute pour pouvoir résoudre est souvent prise en t_0 et est dite condition initiale. On parlera de condition finale si la condition est prise en t_f .

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Le système (2.15) est dit problème de Cauchy.

Comme toujours, on souhaite une approche de résolution systématique du problème, viable numériquement.

Naturellement au niveau numérique il n'est pas possible de construire une solution pour toutes les valeurs possibles de t . On ne décrira $y(t)$ que pour un nombre fini de points ! discrétisation de l'EDO Plus généralement, on se donnera :

- N , un nombre de pas de temps,
- $t_i, i = 0, \dots, N - 1$, les valeurs du temps où la solution sera approchée,

- y_i sera l'approximation de la solution au temps t_i , i.e

$$y_i \approx y(t_i)$$

L'erreur commise au temps t_i sera alors $|y_i - y(t_i)|$. Il n'y a pas d'erreur au temps t_0 , c'est la condition initiale $y(t_0) = y_0$

- $h_i = t_{i+1} - t_i$, les pas de temps. On aura fréquemment un pas de temps constant noté h .

2.4.2.1 Méthodes d'Euler

La méthode d'Euler est de loin la méthode la plus simple de résolution numérique d'EDO. Elle possède une très belle interprétation géométrique et son emploi est facile. Toutefois, elle est relativement peu utilisée en raison de sa faible précision.

Méthode d'Euler explicite Commençons par l'approche géométrique

On connaît la solution au temps t_0 , on souhaite une approximation au temps $t_1 = t_0 + h$.

On connaît également la pente à y en t_0

$$y'(t_0) = f(t_0, y(t_0)) = f(t_0, y_0)$$

On suit la droite passant par (t_0, y_0) de pente $f(t_0, y_0)$,

$$d_0(t) = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0)$$

On prend $y_1 \approx y(t_1)$ comme étant

$$y_1 = d_0(t_1) = y_0 + h f(t_0, y_0)$$

On recommence à partir de t_1

$$y'(t_1) = f(t_1, y(t_1)) \approx f(t_1, y_1)$$

on obtient

$$d_1(t) = y_1 + f(t_1, y_1)(t - t_1)$$

et l'on prend

$$y_2 = d_1(t_2) = y_1 + h f(t_1, y_1) \approx y(t_2)$$

Une illustration géométrique est donnée par la figure 2.3

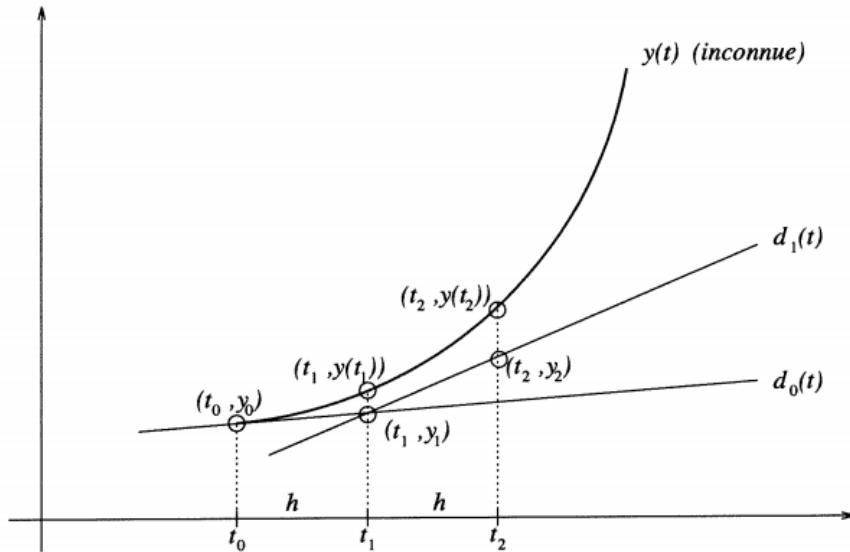


Figure 2.3 – Méthode d’Euler explicite

L’erreur introduite lors du calcul y_1 est réintroduite dans le calcul de y_2 et ainsi, les erreurs vont se propager d’une itération à l’autre.

De façon générale, avec la méthode d’Euler explicite, on obtient y_{n+1} à l’aide de la formule suivante :

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) \quad (2.16)$$

Définition 2.4.2 (Schéma explicite à un pas)

Un schéma numérique explicite à un pas est une relation de la forme

$$y_{n+1} = y_n + h \phi(t_n, y_n) \quad (2.17)$$

Autrement dit, pour calculer la solution au pas de temps suivant, on se sert uniquement de la solution au pas de temps précédent (connue).

Le schéma d’Euler explicite est un schéma à un pas avec $\phi(t, y) = f(t, y)$. Par opposition aux schémas explicites, il y a les schémas implicites.

Définition 2.4.3 (Schéma implicite)

Un schéma numérique implicite est une relation de la forme :

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad (2.18)$$

Cela implique de résoudre une équation à chaque pas de temps.

En résumé, pour la méthode d'Euler explicite, on a l'algorithme 2.1.

Algorithme 2.1 – Méthode d'Euler explicite

Données :

- Un pas de temps h , un nombre maximal de pas de temps N ,
- Une condition initiale (t_0, y_0)

Résultat : Une variable (vecteur) contenant la solution à chaque pas de temps

Pour $0 \leq n \leq N$:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n); \\ t_{n+1} &= t_n + h; \end{aligned}$$

fin

Convergence de la méthode d'Euler explicite

$$\tilde{y}(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n))$$

On a deux sources d'erreurs :

- Une erreur locale, \tilde{e}_{n+1}

$$\tilde{e}_{n+1} = y(t_{n+1}) - \tilde{y}(t_{n+1})$$

- Une erreur tenant compte de la propagation

$$\tilde{e}_{n+1} = \tilde{y}(t_{n+1}) - y_{n+1}$$

Au final, l'erreur $e_{n+1} = y(t_{n+1}) - y_{n+1}$ est donnée par

$$e_{n+1} = (y(t_{n+1}) - \tilde{y}(t_{n+1})) + (\tilde{y}(t_{n+1}) - y_{n+1})$$

On sait quantifier la première erreur. Pour Euler explicite, le développement de Taylor nous donne

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n + h) = y(t_n) + hy'(t_n) + O(h^2) \\ &= \underbrace{y(t_n) + hf(t_n, y(t_n))}_{\tilde{y}(t_{n+1})} + O(h^2) \end{aligned}$$

puisque $y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$

À partir de ce développement de Taylor, on définit également l'erreur de troncature $\tau_{n+1}(h)$.

$$\begin{aligned} \tau_{n+1}(h) &= \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - f(t_n, y(t_n)) \\ &= O(h) \end{aligned}$$

L'erreur de troncature est l'erreur «locale» en t_n . On dit également que la méthode d'Euler explicite est consistante à l'ordre 1, car $\tau_{n+1}(h) = O(h)$.

Cette erreur ne tient pas compte des erreurs introduites auparavant. Le contrôle de cette erreur n'est pas suffisant pour assurer la convergence de la solution numérique vers la solution exacte. Il faut en plus que la méthode soit stable.

Définissons d'abord ce que l'on entend par convergence d'un schéma numérique pour une EDO.

Définition 2.4.4 (Convergence ordre p)

On dit qu'un schéma converge à l'ordre p si

$$\max_{1 \leq n \leq N} |y(t_{n+1}) - y(t_n)| = O(h^p)$$

La convergence à l'ordre p est le fruit de deux éléments : la consistance à l'ordre p et la stabilité.

- La consistance mesure l'erreur locale à un pas de temps t_n . C'est l'erreur commise en remplaçant y_0 par une différence finie à un pas donné. Elle assure que la solution exacte des équations discrétisées tende vers la solution exacte des équations continues (quand $h \rightarrow 0$).
- La stabilité d'un schéma assure que l'erreur de propagation d'un pas de temps à l'autre, est bornée.

Théorème 2.4.1 (de Lax)

Si un schéma numérique est stable et consistant à l'ordre p alors il est convergent à l'ordre p .

Quelques remarques supplémentaires sur la stabilité. La stabilité dépend :

- de l'EDO considérée (de la fonction f) ;
- du schéma numérique. Un schéma numérique peut être :
 - conditionnellement stable, i.e stable sous une condition faisant intervenir le pas de discrétisation h ,
 - inconditionnellement stable, i.e stable peu importe le pas de discrétisation h ,
 - instable, i.e la propagation d'erreur dégradera (beaucoup) la solution à chaque pas de temps.

Le développement de Taylor ouvre la voie à des schémas d'ordre plus élevé.
Voyons la méthode de Taylor du second ordre.

2.4.2.2 Méthode de Taylor

Reprenons le développement de Taylor, et poussons d'un ordre de plus

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{y''(t_n)h^2}{2} + O(h^3) \\ &= y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \frac{f'(t_n, y(t_n))h^2}{2} + O(h^3) \end{aligned} \tag{2.19}$$

Or

$$\begin{aligned} f'(t, y(t)) &= \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} y'(t) \\ &= \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} f(t, y(t)) \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) \\ &\quad + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} f(t_n, y(t_n)) \right) \end{aligned} \tag{2.20}$$

En remplaçant $y(t_n)$ par y_n , on obtient l'algorithme de Taylor d'ordre 2 (algorithme 2.2).

Algorithm 2.2 – Méthode de Taylor d'ordre 2

Données :

- Un pas de temps h , un nombre maximal de pas de temps N ,
- Une condition initiale (t_0, y_0)

Résultat : Une variable (vecteur) contenant la solution à chaque pas de temps

Pour $0 \leq n \leq N$:

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} f(t_n, y_n) \right);$$

$$t_{n+1} = t_n + h;$$

fin

Comme Euler explicite, c'est un schéma à un pas, avec

$$\phi(t_n, y_n) = f(t_n, y_n) + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} f(t_n, y_n) \right) \quad (2.21)$$

On montre que $\tau_{n+1}(h) = O(h^2)$, le schéma est consistant à l'ordre 2.

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle nécessite le calcul des dérivées de la fonction f .

2.4.2.3 Méthodes de Runge-Kutta

Il serait avantageux de disposer de méthodes d'ordre de plus en plus élevé tout en évitant les désavantages des méthodes de Taylor, qui nécessitent l'évaluation des dérivées partielles de la fonction $f(t, y)$. Une voie est tracée par les méthodes de Runge-Kutta, qui sont calquées sur les méthodes de Taylor du même ordre.

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 (RK2) Reprenons (encore) notre développement de Taylor,

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) \\ &\quad + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} f(t_n, y(t_n)) \right) \\ &\quad + O(h^3) \end{aligned} \quad (2.22)$$

L'idée est de chercher à remplacer les dérivées de f par des évaluations de f en certains points bien choisis. Pour cela, on cherche des poids α_1 et α_2 et des

points β_1 et β_2 tels que l'expression

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \alpha_1 h f(t_n, y(t_n)) + \alpha_2 h f(t_n + \beta_1 h, y(t_n) + \beta_2 h) \quad (2.23)$$

soit une approximation d'ordre 3. Un développement de Taylor en deux variables nous donne

$$\begin{aligned} f(t_n + \beta_1 h, y(t_n) + \beta_2 h) &= f(t_n, y(t_n)) \\ &+ \beta_1 h \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + \beta_2 h \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} \\ &+ O(h^2) \end{aligned}$$

et donc, (2.23) devient

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + (\alpha_1 + \alpha_2) h f(t_n, y(t_n)) \\ &+ \alpha_2 \beta_1 h^2 \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + \alpha_2 \beta_2 h^2 \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} \\ &+ O(h^3) \end{aligned} \quad (2.24)$$

On a deux expressions d'ordre 3 : (2.22) et (2.24)

Par identifications des coefficients respectifs, on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_1 + \alpha_2 &=& 1 \\ \alpha_2 \beta_1 &=& \frac{1}{2} \\ \alpha_2 \beta_2 &=& \frac{f(t_n, y(t_n))}{2} \end{array} \right. \quad (2.25)$$

On obtient 3 équations pour 4 inconnues ; donc pas de solution unique ; il y a donc plusieurs combinaisons possibles. On va voir deux solutions populaires.

Méthode d'Euler modifiée On prend

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_1 = \alpha_2 &=& \frac{1}{2} \\ \beta_1 &=& 1 \\ \beta_2 &=& f(t_n, y(t_n)) \end{array} \right.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (2.23), on obtient

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) \\ &+ \frac{h}{2} \left(f(t_n, y(t_n)) + f\left(t_n + h, y(t_n) + hf(t_n, y(t_n))\right) \right) + O(h^3) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Au niveau discret, en remplaçant $y(t_n)$ par son approximation y_n , on obtient

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left(f(t_n, y_n) + f\left(t_n + h, \underbrace{y_n + hf(t_n, y_n)}_{\text{Euler explicite}}\right) \right) \quad (2.27)$$

À chaque itération (pas de temps) on décompose souvent le calcul en deux étapes :

1. Calcul de $\hat{y} = y_n + hf(t_n, y_n)$ → prédiction,
2. Calcul de $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, \hat{y}) \right)$ → correction

Au final, on a l'algorithme 2.3.

Algorithm 2.3 – Méthode d'Euler modifiée

Données :

- Un pas de temps h , un nombre maximal de pas de temps N ,
- Une condition initiale (t_0, y_0)

Résultat : Une variable (vecteur) contenant la solution à chaque pas de temps

Pour $0 \leq n \leq N$:

$$\begin{aligned} \hat{y} &= y_n + hf(t_n, y_n); \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} \left(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, \hat{y}) \right); \\ t_{n+1} &= t_n + h; \end{aligned}$$

fin

Méthode du point milieu On prend

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_1 & = & 0 \\ \alpha_2 & = & 1 \\ \beta_1 & = & \frac{1}{2} \\ \beta_2 & = & \frac{f(t_n, y(t_n))}{2} \end{array} \right.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (2.23), on obtient

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf \left(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n) + \frac{hf(t_n, y(t_n))}{2} \right) + O(h^3) \quad (2.28)$$

Au niveau discret, en remplaçant $y(t_n)$ par son approximation y_n , on obtient

$$y_{n+1} = y_n + hf \left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hf(t_n, y_n)}{2} \right) \quad (2.29)$$

À chaque itération (pas de temps) on décompose souvent le calcul en deux étapes :

1. Calcul de $k_1 = hf(t_n, y_n)$,
2. Calcul de $y_{n+1} = y_n + hf \left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2} \right)$

Au final, on a l'algorithme dit du point milieu (algorithme 2.4).

Algorithme 2.4 – Méthode du point milieu

Données :

- Un pas de temps h , un nombre maximal de pas de temps N ,
- Une condition initiale (t_0, y_0)

Résultat : Une variable (vecteur) contenant la solution à chaque pas de temps

Pour $0 \leq n \leq N$:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, y_n); \\ y_{n+1} &= y_n + hf \left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2} \right); \\ t_{n+1} &= t_n + h; \end{aligned}$$

fin

D'autres combinaisons de coefficients α_1 , α_2 , β_1 et β_2 sont possibles. Ces deux schémas numériques (Euler modifié et point milieu) sont dites RK2.

Nous allons continuer à augmenter l'ordre du développement de Taylor de l'équation (2.19), afin d'obtenir des schémas convergeant à l'ordre 4.

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) On pousse le développement de Taylor à l'ordre 5. Ensuite, on introduit 4 poids et 6 points, un raisonnement similaire à celui des méthodes de RK2 nous donne un système de 8 équations pour 10 inconnues.

Parmi toute les possibilités pour le choix des coefficients, un choix est particulièrement populaire. Voici le schéma «RK 4». À chaque itération (pas de temps), on effectue

1. Calcul de $k_1 = hf(t_n, y_n)$,
2. Calcul de $k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$,
3. Calcul de $k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$,
4. Calcul de $k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3)$,
5. Calcul de $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$.

Cela nous donne l'algorithme 2.5.

Algorithme 2.5 – Méthode RK4

Données :

- Un pas de temps h , un nombre maximal de pas de temps N ,
- Une condition initiale (t_0, y_0)

Résultat : Une variable (vecteur) contenant la solution à chaque pas de temps

Pour $0 \leq n \leq N$:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, y_n); \\ k_2 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right); \\ k_3 &= y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right); \\ k_4 &= hf(t_n + h, y_n + k_3); \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4); \\ t_{n+1} &= t_n + h; \end{aligned}$$

fin

Le nombre et la complexité des calculs augmentent avec l'ordre :

- Euler explicite : 1 évaluation de la fonction f à chaque itération,
- RK2 : 2 évaluations de la fonction f à chaque itération,
- RK4 : 4 évaluations de la fonction f à chaque itération.

Cependant plus l'ordre est grand plus l'erreur diminue vite quand h diminue.

Remarque 2.4.1

- Si la convergence est d'ordre 2, alors l'erreur diminue par un facteur $2^2 = 4$ quand h est divisé par deux,

- Si la convergence est d'ordre 4, alors l'erreur diminue par un facteur $2^4 = 16$ quand h est divisé par deux,

De plus, pour h fixé, l'erreur sera plus petite avec une méthode d'ordre 2 qu'avec une méthode d'ordre 1, et ainsi de suite.

2.4.2.4 Les équations différentielles ordinaires d'ordre m et les systèmes d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1

Les méthodes vues jusqu'à présent concernent les EDO d'ordre 1.

Résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1

Plaçons nous dans le cas général, consistant à trouver y_1, y_2, \dots, y_m tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} y'_1(t) = f_1(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) & y_1(t_0) = y_{1,0} \\ y'_2(t) = f_2(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) & y_2(t_0) = y_{2,0} \\ y'_3(t) = f_3(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) & y_3(t_0) = y_{3,0} \\ \vdots & \\ y'_m(t) = f_m(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) & y_m(t_0) = y_{m,0} \end{array} \right. \quad (2.30)$$

que l'on ré-écrit sous forme compacte

$$\left\{ \begin{array}{l} Y'(t) = F(t, Y(t)) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{array} \right. \quad (2.31)$$

où

$$\begin{aligned} Y(t) &= [y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)]^T \\ F(t, Y(t)) &= [f_1(t, Y(t)), f_2(t, Y(t)), \dots, f_m(t, Y(t))]^T \\ Y_0 &= [y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{m,0}]^T \end{aligned}$$

Les méthodes vues dans ce chapitre se généralisent bien aux systèmes.

On note

$$Y_i = [y_{1,i}, y_{2,i}, \dots, y_{m,i}]^T \approx Y(t_i) = [y_1(t_i), y_2(t_i), \dots, y_m(t_i)]^T$$

Méthode Euler explicite pour les systèmes d'équations différentielles ordinaires

$$Y_{n+1} = Y_n + hF(t_n, Y_n) \quad (2.32)$$

Soit encore

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{1,n+1} = y_{1,n} + h f_1(t_n, y_{1,n}, y_{2,n}, \dots, y_{m,n}) \\ y_{2,n+1} = y_{2,n} + h f_2(t_n, y_{1,n}, y_{2,n}, \dots, y_{m,n}) \\ \vdots \\ y_{m,n+1} = y_{m,n} + h f_m(t_n, y_{1,n}, y_{2,n}, \dots, y_{m,n}) \end{array} \right. \quad (2.33)$$

À chaque pas de temps, on fait m Euler explicite «standard» avant de passer au pas de temps suivant.

On en déduit l'algorithme d'Euler explicite pour un système donné par l'algorithme 2.6.

Algorithme 2.6 – Méthode d'Euler explicite pour les systèmes d'EDO

Données :

- Un pas de temps h , un nombre maximal de pas de temps N ,
- Une condition initiale $Y_0 = [y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{m,0}]^T$

Résultat : Une variable (matrice) contenant la solution à chaque pas de temps, pour chaque y_i

Pour $0 \leq n \leq N$:

Pour $0 \leq i \leq m$:

$$y_{i,n+1} = y_{i,n} + h f_i(t_n, y_{1,n}, y_{2,n}, \dots, y_{m,n});$$

fin

fin

On peut faire la même chose pour les méthodes RK2 (Euler modifié, ou la méthode du Point milieu). Voyons directement la généralisation de la méthode RK4.

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour les systèmes d'équations différentielles ordinaires À chaque pas de temps, on va calculer 4m coefficients $k_{i,1}, k_{i,2}, k_{i,3}, k_{i,4}$ pour $i = 1, \dots, m$ en partant de (t_0, Y_0)

On obtient alors l'algorithme 2.7

Algorithme 2.7 – Méthode RK4 pour les systèmes d'EDO**Données :**

- Un pas de temps h , un nombre maximal de pas de temps N ,
- Une condition initiale $Y_0 = [y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{m,0}]^T$

Résultat : Une variable (matrice) contenant la solution à chaque pas de temps, pour chaque y_i **Pour** $0 \leq n \leq N$:**Pour** $0 \leq i \leq m$:

$$k_{i,1} = h f_i(t_n, y_{1,n}, y_{2,n}, \dots, y_{m,n});$$

fin**Pour** $0 \leq i \leq m$:

$$k_{i,2} = h f_i \left(t_n + \frac{h}{2}, y_{1,n} + \frac{k_{1,1}}{2}, y_{2,n} + \frac{k_{2,1}}{2}, \dots, y_{m,n} + \frac{k_{m,1}}{2} \right)$$

fin**Pour** $0 \leq i \leq m$:

$$k_{i,3} = h f_i \left(t_n + \frac{h}{2}, y_{1,n} + \frac{k_{1,2}}{2}, y_{2,n} + \frac{k_{2,2}}{2}, \dots, y_{m,n} + \frac{k_{m,2}}{2} \right);$$

fin**Pour** $0 \leq i \leq m$:

$$k_{i,4} = h f_i(t_n + h, y_{1,n} + k_{1,3}, y_{2,n} + k_{2,3}, \dots, y_{m,n} + k_{m,3});$$

fin**Pour** $0 \leq i \leq m$:

$$y_{i,n+1} = y_{i,n} + \frac{h}{6} (k_{i,1} + 2k_{i,2} + 2k_{i,3} + k_{i,4});$$

fin**fin**

Il faut calculer les m constantes $k_{i,1}$ avant de passer au calcul des constantes $k_{i,2}$ et ainsi de suite.

Résolution d'équations différentielles ordinaires d'ordre m Considérons à présent une équation d'ordre m , avec m conditions initiales,

$$\left\{ \begin{array}{l} y_t^{(m)} = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t)) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(t_0) = y_{m-1} \end{array} \right. \quad (2.34)$$

On va transformer cette EDO d'ordre m en un système de m EDO d'ordre 1, pour pouvoir utiliser les méthodes vues précédemment. Pour cela, posons

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(t) = y(t) \\ u_1(t) = y'(t) \\ u_2(t) = y''(t) \\ \vdots \\ u_{m-1}(t) = y^{(m-1)}(t) \\ u_m(t) = y^{(m)}(t) \end{array} \right.$$

Ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_0(t) = y'(t) = u_1(t) \\ u'_1(t) = y''(t) = u_2(t) \\ u'_2(t) = y^{(3)}(t) = u_3(t) \\ \vdots \\ u'_{m-2}(t) = y^{(m-1)}(t) = u_{m-1}(t) \\ u'_{m-1}(t) = y^{(m)}(t) = u_m(t) = f(t, u_0(t), u_1(t), \dots, u_{m-1}(t)) \end{array} \right.$$

On peut alors ré-écrire l'EDO d'ordre m avec conditions initiales (2.34) comme un système d'EDO d'ordre 1 semblable au système d'EDO (2.30) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'_0(t) = u_1(t) & u_0(t_0) = y_0 \\ u'_1(t) = u_2(t) & u_1(t_0) = y_1 \\ u'_2(t) = u_3(t) & u_2(t_0) = y_2 \\ \vdots & \\ u'_{m-2}(t) = u_{m-1}(t) & u_{m-2}(t_0) = y_{m-2} \\ u'_{m-1}(t) = f(t, u_0(t), u_1(t), \dots, u_{m-1}(t)) & u_{m-1}(t_0) = y_{m-1} \end{array} \right. \quad (2.35)$$

La résolution d'une EDO d'ordre m est donc un cas particulier de la résolution d'un système d'EDO d'ordre 1.

En conclusion, la stratégie de résolution d'une EDO d'ordre m est la suivante :

- Ré-écriture de l'EDO d'ordre m (2.34) en un système d'EDO d'ordre 1 de la forme du système (2.35),

- Résolution du système à l'aide de l'une des méthodes vue dans cette section.

Il existe encore d'autres méthodes de résolution numérique d'EDO dont nous ne parlerons pas..

3

Méthodologie

Sommaire

3.1 Matériel	43
3.2 Méthodes	43

Dans ce chapitre, nous présentons les matériels et méthodes qui nous ont servi à produire ce travail.

3.1 Matériel

3.1.1 Logiciel utilisé

3.2 Méthodes

Dans cette section, nous parlerons du modèle que nous avons développé ainsi que des outils mathématiques ayant concouru au développement de ce dernier.

3.2.1 Modèle de base

Pour développer notre modèle, nous nous sommes appuyés sur le modèle de DAUDI et al. (2021). Il s'agit d'un modèle dans lequel la population de maïs été celle de la CLA sont structurées par étape. Ainsi, ils ont considéré la croissance du maïs de l'émergence à la maturité à tout instant $t > 0$, à travers deux périodes

de développement : Période I et période II. La période I, qui se déroule sur l'intervalle de temps $[0, t_1]$, représente le stade végétatif et comprend la plantation des graines de maïs, l'émergence des graines, le développement des feuilles des verticilles et l'épiaison, tandis que la période II, qui se déroule sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$, représente le stade reproductif et comprend la formation des épis, le développement des épis et la maturité.

D'autre part, la population de CLA à tout instant $t > 0$ a été subdivisée en population d'œufs, de chenilles et de papillons adultes. Bien que le CLA ait six stades larvaires, ils les ont considérés comme un seul groupe appelé chenille afin de réduire la complexité du modèle. Ils ont supposé que les conditions météorologiques, l'environnement et le système de plantation des graines de maïs favorisent la germination des graines et leur croissance correspondante aux deux stades, sans taux de mortalité naturelle avant la récolte.

En cas de non immigration des adultes, le modèle s'écrit au stade végétatif comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = -\alpha x_1 y - \lambda x_1 \\ \frac{dy}{dt} = e_1 \alpha x_1 y + \gamma w - \delta y - \mu_y y \\ \frac{dz}{dt} = \delta y - \mu_z z \\ \frac{dw}{dt} = \rho z - \gamma w - \mu_w w \end{array} \right. \quad (3.1)$$

avec les conditions initiales vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(0) = k \\ x_2(0) = 0 \\ y(0) \geq 0 \\ z(0) \geq 0 \\ w(0) \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Au stade reproductif, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_2}{dt} = -\eta x_2 y - \lambda x_1 \\ \frac{dy}{dt} = e_2 \eta x_2 y + \gamma w - \delta y - \mu_y y \\ \frac{dz}{dt} = \delta y - \mu_z z \\ \frac{dw}{dt} = \rho z - \gamma w - \mu_w w \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Les conditions initiales de ce système sont données par la solution du système 3.1 à $t = t_1$.

Les variables et les paramètres du modèle sont décrits dans les tableaux 3.1 et 3.2 respectivement.

Tableau 3.1 – Description des variables d'état du modèle

Variables	Description
$x_1(t)$	Densité de la population des plantes de maïs grandissant dans la phase végétative à tout instant t
$x_2(t)$	Densité de la population des plantes de maïs grandissant dans la phase de reproduction à tout instant t
$w(t)$	Densité de la population des œuf pondus à tout instant t
$y(t)$	Densité de la population des chenilles à tout instant t
$z(t)$	Densité de la population des papillons adultes à tout instant t

On voit que les deux équations (3.1 et 3.3) ont la même forme. La différence entre elle réside dans le fait que les taux d'attaque des chenilles et les taux de conversion de biomasse ne soient pas les mêmes (α et e_1 pour le stade végétatif et η et e_2 pour le stade reproductif).

Nous avons relevé quelques insuffisances de ce modèles.

3.2.2 Quelques insuffisances du modèle

Tout d'abord, le modèle s'apparente au modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra (voir équation 2.1, à la page 18) où le maïs est la proie et la larve de la CLA,

Tableau 3.2 – Descriptions des paramètres du le modèle

Paramètres	Description
α	Le taux auquel les chenilles attaquent $x_1(t)$
η	Le taux auquel les chenilles attaquent $x_2(2)$
ρ	Le taux auquel les papillons adultes pondent des œuf
k	Le nombre maximum de plantes de maïs dans le champ à $t = 0$
δ	Le taux auquel les chenilles se développent en papillon adulte
γ	Le taux auquel les œufs éclosent en chenilles
μ_w	Le taux de mortalité des œufs
μ_y	Le taux de mortalité des chenilles
μ_z	Le taux de mortalité des adultes
λ	Le taux auquel le maïs meurt dû à une attaque de chenille
e_1	Le taux de conversion de la biomasse de maïs biomasse de chenille

le prédateur. On peut alors extraire du modèle de DAUDI et al. (2021), les différentes fonctions présentes dans le modèle de Lotka-Volterra. Ainsi, on a :

- ☞ la fonction de croissance (ici, il s'agit plutôt d'une décroissance) $f(x) = -\lambda x,$
- ☞ la réponse fonctionnelle $g(x) = \alpha x$ au stade végétatif et $g(x) = \eta x$ au stade reproductif,
- ☞ la réponse numérique $h(x) = e_1 g(x)$ au stade végétatif et $h(x) = e_2 g(x)$ au stade reproductif,
- ☞ la mortalité $m(x) = \mu_y.$

Les termes additionnels sont dus au fait que les autres stades de développement de le CLA soient pris en compte.

Dans ce modèle, le terme $\alpha x_1 y$ du système 3.1 indique le nombre de maïs attaqué dans un intervalle dt . On voit que dans ce système, cette variation réduit automatiquement la population de maïs ; ce qui ne cadre pas avec la réalité. En effet, lorsque la chenille attaque le maïs, celui-ci ne meurt pas nécessairement

ni automatiquement. Il faudra des attaques répétées et continues pour tuer probablement le maïs. Il est également possible que le maïs survive même à une attaque continue. D'après FAO et PPD (2018) « la réaction du rendement du maïs à l'infestation de la CLA a été étudiée sur le terrain un certain nombre de fois aux Amériques. Une revue de ces études montre que, même s'ils sont inquiétants, les dommages de la CLA dans le maïs ne sont pas dévastateurs. Si quelques études montrent des réductions de rendement dues à la CLA de plus de 50 pour cent, la majorité des essais dans les champs montrent des réductions de rendement de moins de 20 pour cent, même avec une forte infestation de CLA (jusqu'à 100 pour cent des plants infestés). Les plants de maïs sont capables de compenser les dégâts foliaires, en particulier s'il y a une bonne nutrition des végétaux et de l'humidité ». Cela indique clairement que l'attaque de la CLA n'est pas une fatalité pour la plante de maïs. On pourrait pourra dire que l'attaque de la CLA infecte le maïs. Les maïs infectés peuvent compenser les pertes foliaires et redevenir sains ou mourir. Ce qui nous a amené à introduire le modèle compartimental SIS dans la population de maïs (voir section 3.2.3.2).

Le taux auquel le maïs meurt dû à l'attaque de la CLA a été supposé constant, mais en réalité, plus le maïs est jeune, plus son taux de mortalité par attaque de la CLA est élevé. D'après FAO et PPD (*ibid.*) : « l'infestation de CLA au début du stade végétatif peut provoquer plus de dommages aux feuilles et de pertes de rendement que l'infestation au stade d'épiaison ». Ce taux décroît donc au fur et à mesure que le maïs grandit.

3.2.3 Formulation de notre modèle

Notre modèle est une version améliorée du modèle de DAUDI et al. (2021).

Pour prendre en compte les insuffisances que nous avons relevé, nous avons tout d'abord redéfini et détaillé la structure par étape des deux populations.

3.2.3.1 Structure par étape de la population du maïs et de celle de la CLA

Contrairement au modèle de DAUDI et al. (*ibid.*), nous considérons trois stades de l'évolution du maïs qui sont :

1. le stade juvénile qui débute de $t = 0$ et prend fin à $t = t_0$. Cette période correspond au moment où les graines de maïs ont été mises en terre jusqu'à l'émergence des plants avec un minimum de feuillage pour que l'attaque de la CLA soit possible. En effet, ce n'est pas à partir de l'instant où le maïs est planté que la CLA peut commencer à faire des ravages. Il faudra que la maïs ait un minimum de feuillage avant même d'attirer l'attention du ravageur. Ce laps de temps est crucial dans notre modèle afin de prendre en compte cette période d'émergence des plants de maïs ; ce qui n'a pas été pris en compte dans le modèle de DAUDI et al. (2021) en cas de non immigration ;
2. le stade végétatif qui débute de la fin du stade juvénile ($t = t_0$) et s'achève au début de l'efflorescence ; nous notons cet instant t_1 . C'est au cours de cette période que la CLA pourra commencer par attaquer. C'est aussi le stade ou cours duquel l'attaque de la CLA provoque le plus de dégât ;
3. le stade reproductif qui débute de l'efflorescence (t_1) et s'achève à la maturité ; nous notons cet instant T qui représente en même temps la durée totale du cycle de vie du maïs.

En ce qui concerne la CLA, nous avons considéré trois stades tout comme dans le modèle de DAUDI et al. (*ibid.*). Ces trois stades s'énoncent comme suit :

1. le stade embryonnaire : il correspond à l'étape où la CLA est sous forme d'oeuf ;
2. le stade larvaire : il correspond à l'étape où la CLA est sous forme de larve (ver). En effet, d'après la biologie de la CLA présentée dans notre revue de littérature à la section 2.2.2, page 12, ce stade est composé de 6 étapes allant de jeune larve jusqu'à larve mature. Par soucis de simplification, ces six étapes sont regroupées en une seule. C'est à ce stade que la CLA fait des ravage (attaque le maïs) ;
3. le stade adulte (reproductif) : il correspond au stade où la CLA est à l'étape de reproduction. Il faut noter qu'avant de devenir adulte, la CLA passe par un stade nymphal (elle prend la forme de pupe). En effet, ce stade est en quelque sorte une phase de transition entre le stade larvaire et le stade adulte. Pour ne pas rendre trop complexe le modèle, nous regroupons ce stade et le stade adulte en un seul.

Pour prendre en compte le fait qu'un maïs attaqué ne meurt pas nécessairement, nous avons introduit le modèle compartimental SIS dans la dynamique de la population du maïs ; pour la population de CLA, il s'agira de passage d'un stade de développement à un autre. Nous présenterons alors le modèle SIS tout en faisant l'analogie avec notre modèle.

3.2.3.2 Le modèle compartimental SIS

Les modèles compartimentaux sont des modèles très utilisés en épidémiologie pour décrire l'évolution de la population touchée dans le temps. Il y a plusieurs compartiments ayant donné naissance à plusieurs variantes de modèles compartimentaux. On peut citer entre autre :

1. le compartiment S pour les individus Sains encore appelé Susceptibles : les individus appartenant à ce compartiment ne présentent pas de signe d'infection, mais sont susceptibles d'être infectés ;
2. le compartiment E pour les individus Exposés : les individus appartenant à ce compartiment sont suspectés d'être infectés, mais qui attendent confirmation ;
3. le compartiment I pour les individus Infectés.
4. le compartiment R pour les individus Rétablis : les individus appartenant à ce compartiment sont ceux qui guéris de l'infection et en sont immunisés ;
5. le compartiment D pour les individus Décédés : les individus appartenant à ce compartiment sont ont succombé à l'infection ;
6. etc...

Le modèle compartiment SIS que nous avons choisi prend en compte les compartiments S et I avec possibilité pour ceux du compartiment I d'aller dans le compartiment S. Ce modèle nous permet de prendre en compte le fait qu'un maïs attaqué a la possibilité de compenser les dégâts foliaires et de venir à nouveau sain. Ainsi, lorsque la CLA attaque, les maïs touchés sont d'abord infectés. En étant infecté, les maïs a la possibilité de mourir si l'attaque continue et que le maïs n'arrive pas à compenser les pertes en poussant de nouvelles feuilles ou redevenir sain sinon.

3.2.3.3 Les variables et paramètres de notre modèle

Pour les variables de notre modèle, nous conservons les mêmes variables que celles du modèle de DAUDI et al. (2021) décrites dans le tableau 3.1 sauf que la population de maïs est divisée en deux sous populations au niveau de chaque stade de développement. Ainsi, nous notons x_S la densité de population des maïs sains et x_I , celle de la population des maïs attaqués (infectés).

Concernant les paramètres, nous conservons également ceux de DAUDI et al. (*ibid.*) (voir tableau 3.2) sauf le λ qui est le taux de mortalité du maïs dû à l'attaque de la CLA supposé constant. Dans notre modèle, ce taux n'est pas constant ; il dépend du temps.

Nous notons β , le taux de compensation du maïs. Ce taux est lié à la croissance du maïs ; plus le taux de croissance est grand plus ce taux l'est aussi (en se référant à FAO et PPD 2018). La mortalité naturelle des maïs est notée μ_x .

3.2.3.4 Les hypothèses du modèle

Notre modèle est soumis aux hypothèses suivantes :

- (H1) La plantation des grains de maïs est fait à $t = 0$ et le taux de croissance du maïs est supposé constant du stade sur toute la durée de vie du maïs ;
- (H2) A $t = t_0$, la population de maïs atteint une valeur maximale notée k et c'est à partir de cet instant que la CLA pourrait commencer par attaquer ;
- (H3) Du stade végétatif au stade reproductif, il n'y a pas de plantation de nouveaux plants de maïs ;
- (H4) Nous supposons que les papillons adultes préfèrent pondre des œufs sur la source de nourriture des chenilles qui est le maïs. En d'autres termes, lorsqu'il n'y a pas de maïs, aucun œuf ne sera pondu ; donc pas de naissance de chenilles et ainsi, la population de papillons va disparaître ;
- (H5) Le taux de mortalité dû à l'attaque des chenilles λ n'est pas constant ; ce taux décroît avec le temps et nous le notons $\lambda(t) = ae^{-bt}$. Une autre forme pourrait être choisi selon les observation effectués sur le terrain. Le paramètre a est liée au taux de croissance de la plante ; plus ce taux est grand, plus ce paramètre est petit. Autrement dit, on aura moins de mort dû à la CLA si le taux de croissance est élevé.

3.2.3.5 Le modèle

Les interactions entre les deux populations est illustrées par le diagramme suivant : Les flèches en pointillées indique l'interaction entre la population de

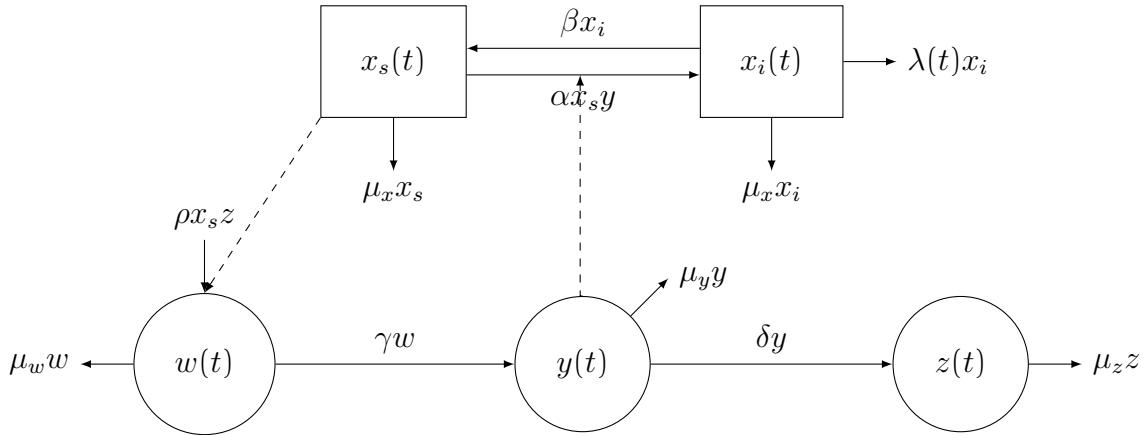


Figure 3.1 – Diagramme montrant les interactions en la population du maïs et de celle de la CLA

maïs et de celle de la CLA.

En faisant le bilan de masse à partir du diagramme précédent, nous obtenons le système d'équations différentielles suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_s = \beta x_i - \alpha x_s y \\ \dot{x}_i = \alpha x_s y - \beta x_i - \lambda(t)x_i \\ \dot{y} = \gamma w - \delta y - \mu_y y \\ \dot{z} = \delta y - \mu_z z \\ \dot{w} = \rho x_s z - \gamma w - \mu_w w \end{array} \right. \quad (3.4)$$

avec des conditions initiales vérifiant :

Il faut noter que toutes les variables sont en fonction du temps comme le montre notre diagramme. De plus, \dot{x}_s représente $\frac{dx_s}{dt}$.

3.2.3.6 Propriétés de base du modèle

Positivité de la solution Pour que le modèle soit épidémiologiquement et mathématiquement bien posé, il faut que tous les paramètres et toutes les variables soient positifs. Pour cela, nous imposons une solution initiale vérifiant

$$x(0) \geq 0 ; \quad y(0) \geq 0 ; \quad z(0) \geq 0 ; \quad w(0) \geq 0$$

Vérifions si notre système respecte cette propriété de positivité. Pour cela, écrivons notre système sous forme matricielle.

Sous forme compacte, on a :

$$\frac{dX}{dt} = A(X)X + F \quad (3.5)$$

avec

$$X = \begin{pmatrix} x_s \\ x_i \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A(X) = \begin{pmatrix} -(\alpha y + \mu_x) & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \alpha y & -(\beta + \lambda(t) + \mu_x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\delta + \mu_y) & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & \delta & -\mu_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho x_s & -(\gamma + \mu_w) \end{pmatrix}$$

Cette matrice est une matrice de METZLER.

Définition 3.2.1

On appelle matrice de METZLER, toute matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, dont les coefficients vérifient la propriété suivante :

$$a_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j \quad (3.6)$$

(i.e. dont tous les coefficients extra-diagonaux sont positifs)

$\forall X \in \mathbb{R}_+^5$, la matrice $A(X)$ est METZLER car les paramètres sont positifs supposer positifs (condition nécessaire). Avec des conditions initiales prises dans l'orthant positif, les solutions du système d'équations 3.5 sont positives selon le théorème suivant :

Théorème 3.2.1

Soit le système défini sur \mathbb{R}^n par

$$\dot{x} = A(x)x \quad (3.7)$$

Si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $A(x)$ est une matrice de METZLER, alors le système 3.7 laisse positivement invariant l'orthant positif R_+^n .

3.2.3.7 Existence d'un point d'équilibre sans maladie**Définition 3.2.2**

Un point d'équilibre sans maladie couramment appelé Disease Free Equilibrium (DFE) est un point d'équilibre où il n'y a pas de maladie dans la population.

Dans notre cas, nous parlerons plutôt d'absence d'attaque. En effet, il y a absence d'attaque dans notre système si on a $x_i = 0$ et $y = 0$. Notons X_{dfc} le DFE de notre modèle (3.4). En remplaçant $x_i = 0$ et $y = 0$ dans (3.4), on a :

$$X_{dfc} = (x_s^*, 0, 0, 0, 0)$$

3.2.3.8 Taux de reproduction de base

Le nombre de reproduction de base couramment appelé R_0 est une quantité sans dimension qui, sous certaines conditions permet d'établir la stabilité des points d'équilibres d'un système dynamique. Il est défini comme « le nombre moyen

de cas secondaires, produit par un individu infectieux typique au cours de sa période d'infectivité, dans une population totalement constituée de susceptibles.» R_0 est par conséquent, une mesure du potentiel de transmission, c'est à dire la capacité d'un agent infectieux à propager l'infection à travers une population donnée immédiatement après son introduction. Le moyen de transmission peut être direct ou indirect.

Pour déterminer R_0 , nous utiliserons la méthode la prochaine génération.

Méthode de la prochaine génération Dans cette technique de calcul, R_0 est définie comme le rayon spectral de «l'opérateur de la prochaine génération». La détermination de l'opérateur implique la répartition en deux compartiments ; le compartiment des infectés (latents, infectieux...) et le compartiment des individus non infectés.

La description complète de la méthode se trouve dans la thèse de MBANG (2009) ainsi que dans celle de ZONGO (2009).

4

Résultats et discussions

5

Conclusion

Bibliographie

- ABRAHAMS, P., T. BEALE, M. COCK, N. CORNIANI, R. DAY, J. GODWIN, J. GOMEZ, P. G. MORENO, S. T. MURPHY, B. OPON-MENSAH, N. PHIRI, G. RICHARDS, C. PRATT, S. SILVESTRI et A. WITT (avr. 2017). *Fall Armyworm Status- Impacts and Control Options in Africa : Preliminary Evidence Note.* CABI, Wallingford, UK. URL : <https://www.invasive-species.org/Uploads/InvasiveSpecies/FAWinception-report.pdf>.
- ALLEN, L. J., M. K. HANNIGAN et M. J. STRAUSS (1993). « Mathematical analysis of a model for a plant-herbivore system ». In : *Bulletin of Mathematical Biology* 55.4, p. 847-864. ISSN : 0092-8240. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0092-8240\(05\)80192-2](https://doi.org/10.1016/S0092-8240(05)80192-2). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0092824005801922>.
- ALLEN, L. J., M. J. STRAUSS, H. G. THORVILSON et W. N. LIPE (1991). « A preliminary mathematical model of the apple twig borer (Coleoptera : Bostrichidae) and grapes on the Texas high plains ». In : *Ecological Modelling* 58.1, p. 369-382. ISSN : 0304-3800. DOI : [https://doi.org/10.1016/0304-3800\(91\)90046-4](https://doi.org/10.1016/0304-3800(91)90046-4). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304380091900464>.
- ANGUELOV, R., C. DUFOURD et Y. DUMONT (2017). « Mathematical model for pest-insect control using mating disruption and trapping ». In : *Applied Mathematical Modelling* 52, p. 437-457. ISSN : 0307-904X. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.07.060>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X17305085>.
- ARDITI, R. et L. R. GINZBURG (1989). « Coupling in predator-prey dynamics : Ratio-Dependence ». In : *Journal of Theoretical Biology* 139.3, p. 311-326. ISSN : 0022-5193. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0022-5193\(89\)80033-3](https://doi.org/10.1016/S0022-5193(89)80033-3)

- 80211-5. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022519389802115>.
- BACAËR, N. (2011). *A short history of mathematical population dynamics*. Springer Science & Business Media.
- BAUDRON, F., M. A. ZAMAN-ALLAH, I. CHAIPA, N. CHARI et P. CHINWADA (2019). « Understanding the factors influencing fall armyworm (*Spodoptera frugiperda* J.E. Smith) damage in African smallholder maize fields and quantifying its impact on yield. A case study in Eastern Zimbabwe ». In : *Crop Protection* 120, p. 141-150. ISSN : 0261-2194. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cropro.2019.01.028>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0261219419300304>.
- BEDDINGTON, J. R. (1975). « Mutual Interference Between Parasites or Predators and its Effect on Searching Efficiency ». In : *Journal of Animal Ecology* 44.1, p. 331-340. ISSN : 00218790, 13652656. URL : <http://www.jstor.org/stable/3866>.
- BESLON, G. (2008). « Apprivoiser la vie ; modélisation individu-centrée de systèmes biologiques complexes ». In : *Habilitation à Diriger des Recherches, INSA-Lyon*.
- BISTA, S., M. THAPA et S. KHANAL (août 2020). « Fall armyworm : Menace to Nepalese farming and the integrated management approaches ». In : *International Journal of Agriculture Environment and Biotechnology* 5, p. 1011-1018. DOI : <10.22161/ijeb.54.21>.
- CASMUZ, A., M. L. JUAREZ, M. G. SOCIAS, M. G. MURUA, S. PRIETO, S. MEDINA, E. WILLINK et G. GASTAMINZA (2017). « Review of the Host Plants of Fall Armyworm, *Spodoptera Frugiperda* (Lepidoptera : Noctuidae) ». In : *Revista De La Sociedad Entomológica Argentina* 69, p. 3.
- COQUILLARD, P., D. R. HILL et T. SIME-NGANDO (1997). *Modélisation et simulation d'écosystèmes : des modèles déterministes aux simulations à évènements discrets*. Masson Paris.
- DAUDI, S., L. LUBOOBI, M. KGOSIMORE et D. KUZNETSOV (mars 2021). « Modelling the Control of the Impact of Fall Armyworm (*Spodoptera frugiperda*) Infestations on Maize Production ». In : *International Journal of Differential Equations* 2021. Sous la dir. de J. YU. ISSN : 1687-9643. DOI : <10.1155/2021/8838089>. URL : <https://doi.org/10.1155/2021/8838089>.

- DAY, R., P. ABRAHAMS, M. BATEMAN, T. BEALE, V. CLOTTEY, M. COCK, Y. COLMENAREZ, N. CORNIANI, R. EARLY, J. GODWIN et al. (2017). « Fall armyworm : impacts and implications for Africa ». In : *Outlooks on Pest Management* 28.5, p. 196-201.
- DE GROOTE, H., S. C. KIMENJU, B. MUNYUA, S. PALMAS, M. KASSIE et A. BRUCE (2020). « Spread and impact of fall armyworm (*Spodoptera frugiperda* J.E. Smith) in maize production areas of Kenya ». In : *Agriculture, Ecosystems & Environment* 292, p. 106804. ISSN : 0167-8809. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.agee.2019.106804>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167880919304219>.
- DEANGELIS, D. L., R. A. GOLDSTEIN et R. V. O'NEILL (1975). « A Model for Tropic Interaction ». In : *Ecology* 56.4, p. 881-892. DOI : <https://doi.org/10.2307/1936298>. eprint : <https://esajournals.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.2307/1936298>. URL : <https://esajournals.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.2307/1936298>.
- DEANGELIS, D. L. et W. M. MOOIJ (2005). « Individual-Based Modeling of Ecological and Evolutionary Processes ». In : *Annual Review of Ecology, Evolution, and Systematics* 36.1, p. 147-168. DOI : [10.1146/annurev.ecolsys.36.102003.152644](https://doi.org/10.1146/annurev.ecolsys.36.102003.152644). eprint : <https://doi.org/10.1146/annurev.ecolsys.36.102003.152644>. URL : <https://doi.org/10.1146/annurev.ecolsys.36.102003.152644>.
- DEVI, S. (2018). « Fall armyworm threatens food security in southern Africa ». In : *The Lancet* 391.10122, p. 727. ISSN : 0140-6736. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0140-6736\(18\)30431-8](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(18)30431-8). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0140673618304318>.
- EARLY, R., P. GONZÁLEZ-MORENO, S. T. MURPHY et R. DAY (2018). « Forecasting the global extent of invasion of the cereal pest *Spodoptera frugiperda*, the fall armyworm ». In : *bioRxiv*. DOI : [10.1101/391847](https://doi.org/10.1101/391847). eprint : <https://www.biorxiv.org/content/early/2018/08/15/391847.full.pdf>. URL : <https://www.biorxiv.org/content/early/2018/08/15/391847>.
- EDMUNDS, J. L. (2007). « Multiple attractors in a discrete competition model ». In : *Theoretical Population Biology* 72.3, p. 379-388. ISSN : 0040-5809. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.tpb.2007.07.004>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0040580907000755>.

- FAO (juin 2018). *Fall Armyworm Keeps Spreading and Becomes More Destructive*. Food et Agriculture Organization (FAO) of the United Nations. URL : <https://www.fao.org/news/story/en/item/1142085/icode/>.
- (mai 2021). *Global Action for Fall Armyworm Control*. Food et Agriculture Organization (FAO) of the United Nations. URL : <https://www.fao.org/fall-armyworm/monitoring-tools/faw-map/en>.
- FAO et PPD (déc. 2018). *Integrated Management of the Fall Armyworm on Maize : A Guide for Farmer Field Schools in Africa*. Food et Agriculture Organization (FAO) of the United Nations. URL : <http://www.fao.org/3/i8741en/i8741EN.pdf>.
- FENG, Z., R. LIU et D. L. DEANGELIS (2008). « Plant–herbivore interactions mediated by plant toxicity ». In : *Theoretical Population Biology* 73.3, p. 449-459. ISSN : 0040-5809. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.tpb.2007.12.004>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0040580907001347>.
- FENG, Z., Z. QIU, R. LIU et D. L. DEANGELIS (2011). « Dynamics of a plant–herbivore–predator system with plant-toxicity ». In : *Mathematical Biosciences* 229.2, p. 190-204. ISSN : 0025-5564. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2010.12.005>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0025556410001860>.
- FORTIN, A. (2008). *Analyse numérique pour ingénieurs*. Sous la dir. d'E. de l'Ecole POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL. Chap. Chapitre 7 : Equations différentielles, p. 351-400. 448 p.
- FOTSO KUATE, A., R. HANNA, A. R. P. DOUMTSOP FOTIO, A. F. ABANG, S. N. NANGA, S. NGATAT, M. TINDO, C. MASSO, R. NDEMAH, C. SUH et K. K. M. FIABOE (2019). « Spodoptera Frugiperda Smith (Lepidoptera : Noctuidae) in Cameroon : Case Study on Its Distribution, Damage, Pesticide Use, Genetic Differentiation and Host Plants ». In : *PloS One* 14.4, p. 1-18. DOI : [10.1371/journal.pone.0215749](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0215749). URL : <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0215749>.
- GLOVER, T. (1856). *Insects frequenting the cotton-plant*. Washington : Washington, Cornelius Wendell, printer, p. 64-115. 300 p. DOI : <https://doi.org/10.5962/bhl.title.138377>.
- GOERGEN, G., P. L. KUMAR, S. B. SANKUNG, A. TOGOLA et M. TAMÒ (2016). « First report of outbreaks of the fall armyworm Spodoptera frugiperda

- (JE Smith)(Lepidoptera, Noctuidae), a new alien invasive pest in West and Central Africa ». In : *PloS one* 11.10, e0165632.
- GRIEBELER, E. M. et E. GOTTSCHALK (déc. 2000). « An Individual Based Model of the Impact of Suboptimal Habitat on Survival of the Grey Bush Cricket, Platycleis Albopunctata (Orthoptera : Tettigoniidae) ». In : *Journal of Insect Conservation* 4.4, p. 225-237. ISSN : 1572-9753. DOI : [10.1023/A:1011343609779](https://doi.org/10.1023/A:1011343609779). URL : <https://doi.org/10.1023/A:1011343609779>.
- GUTIERREZ, A. P., D. W. WILLIAMS et H. KIDO (1985). « A Model of Grape Growth and Development : the Mathematical Structure and Biological Considerations1 ». In : *Crop Science* 25.5, cropsci1985.0011183X002500050001x. DOI : <https://doi.org/10.2135/cropsci1985.0011183X002500050001x>. eprint : <https://acress.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.2135/cropsci1985.0011183X002500050001x>. URL : <https://acress.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.2135/cropsci1985.0011183X002500050001x>.
- HANSKI, I. et M. GILPIN (jan. 2008). « Metapopulation dynamics : brief history and conceptual domain ». In : *Biological Journal of the Linnean Society* 42.1-2, p. 3-16. ISSN : 0024-4066. DOI : [10.1111/j.1095-8312.1991.tb00548.x](https://doi.org/10.1111/j.1095-8312.1991.tb00548.x). eprint : <https://academic.oup.com/biolinnean/article-pdf/42/1-2/3/14064274/j.1095-8312.1991.tb00548.x.pdf>. URL : <https://doi.org/10.1111/j.1095-8312.1991.tb00548.x>.
- HARDKE, J. T., G. M. LORENZ et B. R. LEONARD (2015). « Fall Armyworm (Lepidoptera : Noctuidae) Ecology in Southeastern Cotton ». In : *Journal of Integrated Pest Management* 6, p. 10.
- HARRISON, R. D. (2014). « Ecology of a fig ant–plant ». In : *Acta Oecologica* 57. Special Issue : Plant-insect mutualisms and their parasites : figs and fig wasps, p. 88-96. ISSN : 1146-609X. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.actao.2013.05.008>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1146609X13000854>.
- HARRISON, R. D., C. THIERFELDER, F. BAUDRON, P. CHINWADA, C. MIDEGA, U. SCHAFFNER et J. VAN DEN BERG (2019). « Agro-ecological options for fall armyworm (*Spodoptera frugiperda* JE Smith) management : Providing low-cost, smallholder friendly solutions to an invasive pest ». In : *Journal of Environmental Management* 243, p. 318-330. ISSN : 0301-4797. DOI :

- <https://doi.org/10.1016/j.jenvman.2019.05.011>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301479719306097>.
- HELLER, R., R. ESNAULT et C. LANCE (1998). « Physiologie végétale 1.Nutrition ». In.
- (2000). « Physiologie végétale 2.Développement ». In.
- HOLLAND, J. et J. BRONSTEIN (jan. 2008). « Mutualism ». English (US). In : *Encyclopedia of Ecology, Five-Volume Set*. Elsevier Inc., p. 2485-2491. ISBN : 9780080454054. DOI : [10.1016/B978-008045405-4.00673-X](https://doi.org/10.1016/B978-008045405-4.00673-X).
- HOLLING, C. S. (1961). « Principles of Insect Predation ». In : *Annual Review of Entomology* 6.1, p. 163-182. DOI : [10.1146/annurev.en.06.010161.001115](https://doi.org/10.1146/annurev.en.06.010161.001115). eprint : <https://doi.org/10.1146/annurev.en.06.010161.001115>. URL : <https://doi.org/10.1146/annurev.en.06.010161.001115>.
- HORNE, J. et P. BAILEY (1991). « Bruchus pisorum L. (Coleoptera, Bruchidae) control by a knockdown pyrethroid in field peas ». In : *Crop Protection* 10.1, p. 53-56. ISSN : 0261-2194. DOI : [https://doi.org/10.1016/0261-2194\(91\)90026-N](https://doi.org/10.1016/0261-2194(91)90026-N). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/026121949190026N>.
- HRUSKA, A. (2019). « Fall Armyworm (Spodoptera Frugiperda) Management by Smallholders ». In : *CAB Reviews* 14, p. 43.
- HUESING, J. E., B. M. PRASANNA, D. MCGRATH, P. CHINWADA, P. JEPSON et J. L. CAPINERA (2018). « Integrated pest management of fall armyworm in Africa : an introduction ». In : *Fall Armyworm in Africa : A Guide for Integrated Pest Management*. CIMMYT, Mexico, CDMX.
- KANG, Y., D. ARMBRUSTER et Y. KUANG (2008). « Dynamics of a plant–herbivore model ». In : *Journal of Biological Dynamics* 2.2. PMID : 22880694, p. 89-101. DOI : [10.1080/17513750801956313](https://doi.org/10.1080/17513750801956313). eprint : <https://doi.org/10.1080/17513750801956313>. URL : <https://doi.org/10.1080/17513750801956313>.
- KASOMA, C., H. SHIMELIS et M. D. LAING (2021). « Fall armyworm invasion in Africa : implications for maize production and breeding ». In : *Journal of Crop Improvement* 35.1, p. 111-146. DOI : [10.1080/15427528.2020.1802800](https://doi.org/10.1080/15427528.2020.1802800). eprint : <https://doi.org/10.1080/15427528.2020.1802800>. URL : <https://doi.org/10.1080/15427528.2020.1802800>.
- KERMACK, W. O., A. G. MCKENDRICK et G. T. WALKER (1927). « A contribution to the mathematical theory of epidemics ». In : *Proceedings of*

- the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 115.772, p. 700-721. DOI : [10.1098/rspa.1927.0118](https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118). eprint : <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rspa.1927.0118>. URL : <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1927.0118>.
- KOSTITZIN, V. (1937). *Biologie mathématique*. Collection Armand Colin. Librairie Armand Colin. URL : https://books.google.bj/books?id=7hTtGOI%5C_gkUC.
- KUMELA, T., J. SIMIYU, B. SISAY, P. LIKHAYO, E. MENDESIL, L. GOHOLE et T. TEFERA (2019). « Farmers' knowledge, perceptions, and management practices of the new invasive pest, fall armyworm (*Spodoptera frugiperda*) in Ethiopia and Kenya ». In : *International Journal of Pest Management* 65.1, p. 1-9. DOI : [10.1080/09670874.2017.1423129](https://doi.org/10.1080/09670874.2017.1423129). eprint : <https://doi.org/10.1080/09670874.2017.1423129>. URL : <https://doi.org/10.1080/09670874.2017.1423129>.
- LEBON, A. (déc. 2014). « La compensation dans les interactions plantes-insectes : modélisation, simulation et expérimentation ». Theses. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01747618>.
- LI, Y., Z. FENG, R. SWIHART, J. BRYANT et N. HUNTLY (oct. 2006). « Modeling the Impact of Plant Toxicity on Plant–Herbivore Dynamics ». In : *Journal of Dynamics and Differential Equations* 18.4, p. 1021-1042. ISSN : 1572-9222. DOI : [10.1007/s10884-006-9029-y](https://doi.org/10.1007/s10884-006-9029-y). URL : <https://doi.org/10.1007/s10884-006-9029-y>.
- LIU, R., Z. FENG, H. ZHU et D. L. DEANGELIS (2008). « Bifurcation analysis of a plant–herbivore model with toxin-determined functional response ». In : *Journal of Differential Equations* 245.2, p. 442-467. ISSN : 0022-0396. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jde.2007.10.034>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039607003592>.
- LUGINBILL, P. (1928). *The fall army worm*. 34. US Department of Agriculture. 92 p.
- MBANG, J. (mars 2009). « Analyse de la stabilité des modèles intra-hôtes avec retard : application à des modèles intra-hôtes de paludisme et de V.I.H-1 ». Theses. Université Paul Verlaine - Metz. URL : <https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01752615>.

- McGRATH, D., J. E. HUESING, R. BEIRIGER, G. NUESSLY, T. TEPA-YOTTO, D. HODSON, E. KIMATHI, E. FELEGE, J. ABAH OBAJE, M. MULAA et al. (2018). « Monitoring, surveillance, and scouting for fall armyworm ». In : *fall armyworm in Africa : a guide for integrated pest management*, p. 11-28.
- McKENDRICK, A. G. (1925). « Applications of Mathematics to Medical Problems ». In : *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 44, p. 98-130. DOI : [10.1017/S0013091500034428](https://doi.org/10.1017/S0013091500034428).
- MEYER, G. A. (1998). « Pattern of defoliation and its effect on photosynthesis and growth of Goldenrod ». In : *Functional Ecology* 12.2, p. 270-279. DOI : <https://doi.org/10.1046/j.1365-2435.1998.00193.x>. eprint : <https://besjournals.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1046/j.1365-2435.1998.00193.x>. URL : <https://besjournals.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1046/j.1365-2435.1998.00193.x>.
- MILLS, N. et W. GETZ (1996). « Modelling the biological control of insect pests : a review of host-parasitoid models ». In : *Ecological Modelling* 92.2. Ecological Resource Modelling, p. 121-143. ISSN : 0304-3800. DOI : [https://doi.org/10.1016/0304-3800\(95\)00177-8](https://doi.org/10.1016/0304-3800(95)00177-8). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304380095001778>.
- NAGOSHI, R. N., G. GOERGEN, K. A. TOUNOU, K. AGBOKA, D. KOFFI et R. L. MEAGHER (fév. 2018). « Analysis of Strain Distribution, Migratory Potential, and Invasion History of Fall Armyworm Populations in Northern sub-Saharan Africa ». In : *Science Reports* 8.1, p. 3710. ISSN : 2045-2322. DOI : [10.1038/s41598-018-21954-1](https://doi.org/10.1038/s41598-018-21954-1). URL : <https://doi.org/10.1038/s41598-018-21954-1>.
- NUNDLOLL, S. (mars 2010). « Dos and Don'ts in Augmentative Biological Control : Insights from Mathematical Modelling ». Theses. Université Nice Sophia Antipolis. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00850358>.
- OERKE, E.-C. (2006). « Crop losses to pests ». In : *The Journal of Agricultural Science* 144.1, p. 31-43. DOI : <https://doi.org/10.1017/S0021859605005708>.
- PÁEZ CHÁVEZ, J., D. JUNGMANN et S. SIEGMUND (déc. 2017). « Modeling and Analysis of Integrated Pest Control Strategies via Impulsive Differential Equations ». In : *International Journal of Differential Equations* 2017. Sous la

- dir. de G. ZHANG, p. 437-457. ISSN : 1687-9643. DOI : [10.1155/2017/1820607](https://doi.org/10.1155/2017/1820607).
URL : <https://doi.org/10.1155/2017/1820607>.
- PASHLEY, D. P. (1988). « Current Status of Fall Armyworm Host Strains ». In : *Florida Entomologist* 71.3, p. 227-234. ISSN : 00154040, 19385102. URL : <http://www.jstor.org/stable/3495425>.
- PRASANNA, B., J. HUESING, R. EDDY et V. PESCHKE (2018). « Fall armyworm in Africa : a guide for integrated pest management ». In.
- QUESADA, M., K. BOLLMAN et A. G. STEPHENSON (1995). « Leaf Damage Decreases Pollen Production and Hinders Pollen Performance in Cucurbita Texana ». In : *Ecology* 76.2, p. 437-443. DOI : <https://doi.org/10.2307/1941202>. eprint : <https://esajournals.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.2307/1941202>. URL : <https://esajournals.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.2307/1941202>.
- RAFIKOV, M., J. BALTHAZAR et H. von BREMEN (2008). « Mathematical modeling and control of population systems : Applications in biological pest control ». In : *Applied Mathematics and Computation* 200.2. Special Issue on The Foz2006 Congress of Mathematics and its Applications, p. 557-573. ISSN : 0096-3003. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.11.036>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300307011356>.
- REBAUDO, F. (juill. 2012). « Modélisation de la dynamique spatio-temporelle d'insectes ravageurs des cultures dans des systèmes socio-écologiques ». Theses. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00836104>.
- ROSE, A. H., R. H. SILVERSIDES et O. H. LINDQUIST (1975). « Migration flight by an aphid, Rhopalosiphum maidis (Hemiptera : Aphididae), and a noctuid, Spodoptera frugiperda (Lepidoptera : Noctuidae) ». In : *The Canadian Entomologist* 107.6, p. 567-576.
- ROUGHGARDEN, J. (2012). « Individual based models in ecology : An evaluation, or how not to ruin a good thing ». In.
- RWOMUSHANA, I. (mai 2019). *Spodoptera frugiperda (fall armyworm)*. CABI, Wallingford, UK. DOI : [10.1079/isc.29810.20203373913](https://doi.org/10.1079/isc.29810.20203373913). URL : <https://www.cabi.org/isc/datasheet/29810>.
- SAUVION, N., P.-A. CALATAYUD, D. THIÉRY et F. MARION-POLL (2013). *Interactions insectes-plantes*. Editions Quae.

- SIBANDA, Z. (mars 2018). *Training manual on fall armyworm*. Sous la dir. de JOYCE, MULILA-MITTI, S. LUCHEN, L. HOVE et R. TANYONGANA. Food et Agriculture Organization (FAO) of the United Nations. URL : <http://www.livestockzimbabwe.com/Publications/Fall%20Army%20Worm%20Training%20Manual.pdf>.
- SIMMONS, A. M. et R. E. LYNCH (1990). « Egg Production and Adult Longevity of Spodoptera Frugiperda, Helicoverpa Zea (Lepidoptera : Noctuidae) and Elasmopalpus Lignosellus (Lepidoptera : Pyralidae) on Selected Adult Diets ». In : *The Florida Entomologist* 73.4, p. 665-671. ISSN : 00154040, 19385102. URL : <http://www.jstor.org/stable/3495282>.
- SMITH, J. E. et J. ABBOT (1797). *The Natural History of the Rarer Lepidopterous Insects of Georgia. Including Their Systematic Characters, the Particulars of Their Several Metamorphoses, and the Plants on which They Feed*. T. 2. London.
- SOLOMON, M. E. (1949). « The Natural Control of Animal Populations ». In : *Journal of Animal Ecology* 18.1, p. 1-35. ISSN : 00218790, 13652656. URL : <http://www.jstor.org/stable/1578>.
- SPARKS, A. N. (1979). « A review of the biology of the fall armyworm ». In : *The Florida Entomologist* 62.2, p. 82-87. DOI : [10.2307/3494083](https://doi.org/10.2307/3494083). URL : <http://www.jstor.org/stable/3494083>.
- STOKSTAD, E. (2017). « New crop pest takes Africa at lightning speed ». In : *Science* 356.6337, p. 473-474. DOI : [10.1126/science.356.6337.473](https://doi.org/10.1126/science.356.6337.473). eprint : <https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.356.6337.473>. URL : <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.356.6337.473>.
- SUN, G.-Q., A. CHAKRABORTY, Q.-X. LIU, Z. JIN, K. E. ANDERSON et B.-L. LI (2021). « Influence of time delay and nonlinear diffusion on herbivore outbreak ». In : *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 19.5, p. 1507-1518. ISSN : 1007-5704. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2013.09.016>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570413004164>.
- THIERFELDER, C., S. NIASSY, C. MIDEGA, S. SUBRAMANIAN, J. VAN DEN BERG, B. PRASANNA, F. BAUDRON et R. D. HARRISON (2018). « low-cost agronomic practices and landscape management approaches to control FAW ». In : CIMMYT.

- VOLTERRA, V. et M. BRELOT (1931). *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie.* Sous la dir. de G.-V. e. c. PARIS. "Les conférences que j'ai faites à l'Institut Henri Poincaré."—Préf. 214 p.
- WALTON, W. R. et P. LUGINBILL (1936). *The fall armyworm or grass worm and its control.* 752. US Department of agriculture.
- ZANGERL, A. R., J. G. HAMILTON, T. J. MILLER, A. R. CROFTS, K. OXBOROUGH, M. R. BERENBAUM et E. H. de LUCIA (2002). « Impact of folivory on photosynthesis is greater than the sum of its holes ». In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 99.2, p. 1088-1091. ISSN : 0027-8424. DOI : [10.1073/pnas.022647099](https://doi.org/10.1073/pnas.022647099). eprint : <https://www.pnas.org/content/99/2/1088.full.pdf>. URL : <https://www.pnas.org/content/99/2/1088>.
- ZONGO, P. (mai 2009). « Modélisation mathématique de la dynamique de la transmission du paludisme ». Theses. université de Ouagadougou. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00419519>.

Table des matières

Résumé	v
Remerciements	vii
Table des figures	xi
Liste des tableaux	xiii
Liste des abréviations	xv
Symboles	xvii
1 Introduction	1
1.1 Introduction	1
1.1.1 Contexte et justification	1
1.1.2 Problématique	3
1.1.3 Objectifs de l'étude	4
1.1.3.1 Objectif général	4
1.1.3.2 Objectifs spécifiques	5
2 Revue de Littérature	7
2.1 Biologie des plantes, insectes et de leurs interactions	7
2.1.1 L'objet Plante	8
2.1.2 L'objet Insecte	8
2.1.3 Interactions entre les plantes et les insectes	9
2.1.3.1 Antagonisme plantes-insectes	9
2.1.3.2 Mutualisme plantes-insectes	10

2.2	La chénille légionnaire d'automne	10
2.2.1	Origine et historique du <i>Spodoptera frugiperda</i> (chénille légionnaire d'automne)	11
2.2.2	Biologie du <i>Spodoptera frugiperda</i>	12
2.2.3	Plantes hôtes du <i>Spodoptera frugiperda</i>	13
2.2.4	Distribution géographique du <i>Spodoptera frugiperda</i> en Afrique	14
2.2.5	Prévention et contrôle du <i>Spodoptera frugiperda</i>	15
2.3	Modélisation sur les des insectes, plantes et leurs interactions	16
2.3.1	La notion de modèle	16
2.3.2	Les modèles individus centrés	17
2.3.3	Les modèles de type proie-prédateur et leurs dérivés	18
2.3.4	Les modèles compartimentaux	23
2.3.5	Les modèles de méta-population	23
2.4	Méthodes de résolution numérique des équations différentielles	24
2.4.1	Définition	24
2.4.2	Les équations différentielles ordinaires	25
2.4.2.1	Méthodes d'Euler	27
	Méthode d'Euler explicite	27
	Convergence de la méthode d'Euler explicite	29
2.4.2.2	Méthode de Taylor	31
2.4.2.3	Méthodes de Runge-Kutta	32
	Méthode de RK2	32
	Méthode d'Euler modifiée	33
	Méthode du point milieu	34
	Méthode de RK4	35
2.4.2.4	Les EDO d'ordre m et les systèmes d'ordre 1	37
	Résolution d'un système d'EDO d'ordre 1	37
	Méthode Euler explicite pour les systèmes d'EDO	38
	Méthode RK4 pour les systèmes d'EDO	38
	Résolution d'EDO d'ordre m	39
3	Méthodologie	43

3.1	Matériel	43
3.1.1	Logiciel utilisé	43
3.2	Méthodes	43
3.2.1	Modèle de base	43
3.2.2	Quelques insuffisances du modèle	45
3.2.3	Formulation de notre modèle	47
3.2.3.1	Structure par étape des deux populations	47
3.2.3.2	Le modèle compartimental SIS	49
3.2.3.3	Les variables et paramètres de notre modèle	50
3.2.3.4	Les hypothèses du modèle	50
3.2.3.5	Le modèle	51
3.2.3.6	Propriétés de base du modèle	52
	Positivité de la solution	52
3.2.3.7	Existence d'un point d'équilibre sans maladie	53
3.2.3.8	Taux de reproduction de base	53
	Méthode de la prochaine génération	54
4	Résultats et discussions	55
5	Conclusion	57