ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE & ENGINEERING
UNIVERSITY OF IOANNINA

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
Τ.Θ. 1186, 45110 ΙΩΑΝΝΙΝΑ
T: 26510 08817 - F: 26510 08890

P.O. Box 1186
GR 45110 IOANNINA, GREECE
T: +30 26510 08817 - F: +30 26510 08890

Μάθημα: **ΜΥΥ504 - Υπολογιστικά Μαθηματικά**
Ακαδημαϊκό έτος: 2021-2022
Διδάσκων: Κ. Βλάχος
Ημερομηνία: 5 Δεκεμβρίου 2021
Παράδοση: 14 Ιανουαρίου 2022

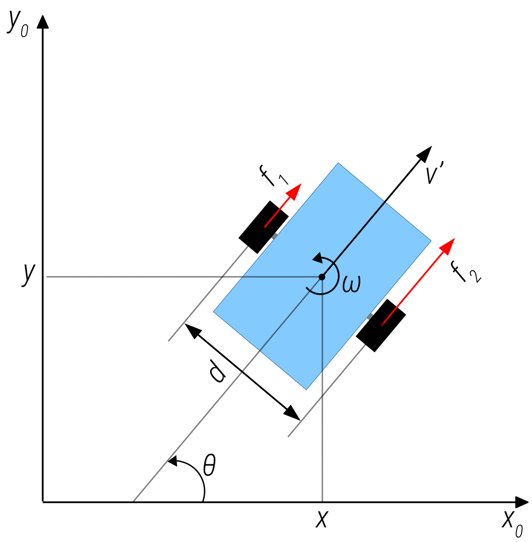
Ομαδική εργασία - Β

Ομάδες με ζυγό μεγαλύτερο Α.Μ.

Περιγραφή και δεδομένα

Μελετάμε το τροχοφόρο ρομπότ του εργαστηρίου Ρομποτικής, το οποίο απεικονίζεται στο Σχήμα 1. Η κίνηση του ρομπότ ελέγχεται από τους δύο τροχούς, σύμφωνα με το Σχήμα 2.

Σχήμα 1: Τροχοφόρο ρομπότ



Σχήμα 2: Μοντέλο τροχοφόρου ρομπότ

Ένα *απλουστευμένο* μαθηματικό μοντέλο του τροχοφόρου ρομπότ περιγράφεται από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$mv' = (f_1 + f_2) - b_x|v|v \tag{1}$$

$$I_z\theta'' = \frac{d}{2}(f_2 - f_1) - b_\theta|\theta'|\theta' \tag{2}$$

$$v(0) = 0 \tag{3}$$

$$\theta'(0) = 0,\ \theta(0) = \theta_0 \tag{4}$$

όπου τα σύμβολα εξηγούνται στον Πίνακα 1. Η είσοδος στο ρομποτικό σύστημα είναι οι δυνάμεις f_1 και f_2, οι οποίες παράγονται από την ροπή περιστροφής του κάθε τροχού, βλέπε Σχήμα 2. Επίσης είσοδος στο σύστημα

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE & ENGINEERING
UNIVERSITY OF IOANNINA

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
Τ.Θ. 1186, 45110 ΙΩΑΝΝΙΝΑ
Τ: 26510 08817 - F: 26510 08890

P.O. Box 1186
GR 45110 IOANNINA, GREECE
T: +30 26510 08817 - F: +30 26510 08890

Πίνακας 1: Επεξήγηση συμβόλων στις εξισώσεις (1)-(4) και στο Σχήμα 2

Σύμβολο	Επεξήγηση
v	γραμμική ταχύτητα του τροχοφόρου ρομπότ μπροστά ή πίσω
(x, y)	θέση του τροχοφόρου ρομπότ στο επίπεδο
θ	προσανατολισμός του τροχοφόρου ρομπότ ως προς τον κατακόρυφο άξονα
ω	γωνιακή ταχύτητα του τροχοφόρου ρομπότ ως προς τον κατακόρυφο άξονα
m	μάζα τροχοφόρου ρομπότ
I_z	ροπή αδράνειας τροχοφόρου ρομπότ
f_1	δύναμη από τον αριστερό τροχό
f_2	δύναμη από τον δεξιό τροχό
b_x	συντελεστής τριβής κατά την μεταφορική κίνηση
b_θ	συντελεστής τριβής κατά την περιστροφική κίνηση
d	απόσταση μεταξύ των δύο τροχών

Πίνακας 2: Αριθμητικές τιμές παραμέτρων στις εξισώσεις (1)-(2)

Παράμετρος	Τιμή
m	9 kg
d	1 m
I_z	0.38 kg m^2

είναι δυνάμεις τριβής, οι οποίες γενικά είναι αντίθετες στην κίνηση και ανάλογες του τετραγώνου της ταχύτητας του ρομπότ. Η έξοδος του συστήματος είναι η γραμμική ταχύτητα του ρομπότ προς τα μπροστά ή πίσω, v, και ο προσανατολισμός του, θ. Στον Πίνακα 2 δίνονται οι απαραίτητες αριθμητικές τιμές των παραμέτρων στις διαφορικές εξισώσεις (1)-(2).

Πρόβλημα 1

α΄) Να βρεθούν οι τύποι για την επίλυση του Π.Α.Τ. (1)-(4) με την Μέθοδο του Euler και την Τροποποιημένη Μέθοδο του Euler με τις παρακάτω τιμές για τις εισόδους και τις αρχικές συνθήκες:

$$[f_1, f_2]^\mathsf{T} = [\text{A.M.}/7000, \text{A.M.}/7000]^\mathsf{T}$$
$$[f_1, f_2]^\mathsf{T} = [\text{A.M.}/7000, \text{A.M.}/8000]^\mathsf{T}$$

$$\theta_0 = \text{A.M.}/20000$$

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE & ENGINEERING
UNIVERSITY OF IOANNINA

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
Τ.Θ. 1186, 45110 ΙΩΑΝΝΙΝΑ
Τ: 26510 08817 - F: 26510 08890

P.O. Box 1186
GR 45110 IOANNINA, GREECE
T: +30 26510 08817 - F: +30 26510 08890

και

$$b_x = 3 - (\text{A.M.}/5000)$$
$$b_\theta = 5 - (\text{A.M.}/5000)$$

όπου "Α.Μ." είναι ο μεγαλύτερος των αριθμών μητρώου των μελών κάθε ομάδας. **Τα ζευγάρια των εισόδων, $[f_1, f_2]^\top$, θα εφαρμοστούν και τα δύο, και στις δύο μεθόδους**.

β΄) Να γραφεί πρόγραμμα σε MATLAB ή GNU Octave ή C που υλοποιεί τους παραπάνω τύπους, για βήμα $h = 0.001$, στο διάστημα $t \in [0, 30]$.

γ΄) Αντικαταστήστε στην (2) τη διαφορά των εισόδων, $f_2 - f_1$, με την παρακάτω σχέση και αναδιατυπώστε τις ίδιες μεθόδους, μόνο για την (2).

$$(f_2 - f_1) = K_{p\theta}(\theta_{des} - \theta) - K_{d\theta}(\theta')$$

με

$$K_{p\theta} = 5$$
$$K_{d\theta} = 15 + (\text{A.M.}/1000)$$
$$\theta_0 = 0$$
$$\theta_{des} = -\text{A.M.}/10000$$

και

$$b_\theta = 5 - (\text{A.M.}/5000)$$

όπου "Α.Μ." είναι ο μεγαλύτερος των αριθμών μητρώου των μελών κάθε ομάδας. Σε αυτό το ερώτημα, το θ_{des} περιγράφει τον επιθυμητό στόχο (επιθυμητός προσανατολισμός) του τροχοφόρου ρομπότ και είναι σταθερός. Η διαφορά των εισόδων, $f_2 - f_1$, είναι έτσι δομημένη (υλοποιεί έναν απλό αλγόριθμο αυτομάτου ελέγχου κλειστού βρόχου, αναλογικού-διαφορικού τύπου) ώστε να τοποθετεί αυτόματα το τροχοφόρο ρομπότ στον επιθυμητό προσανατολισμό.

δ΄) Να γραφεί πρόγραμμα σε MATLAB ή GNU Octave ή C που υλοποιεί τους τύπους του ερωτήματος 1γ, για βήμα $h = 0.001$, στο διάστημα $t \in [0, 30]$.

ε΄) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις, για όλα τα ερωτήματα, των $\theta(t), \theta'(t), v(t)$.

Πρόβλημα 2

Για να απλοποιήσω τη μελέτη της περιστροφικής κίνησης του τροχοφόρου ρομπότ, προσεγγίζω την (2) με την γραμμική διαφορική εξίσωση

$$I_z\theta'' = \frac{d}{2}(f_2 - f_1) - b_\theta\theta' \tag{5}$$

$$\text{με είσοδο} \quad (f_2 - f_1) = K_{p\theta}(\theta_{des} - \theta) - K_{d\theta}(\theta') \tag{6}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
Τ.Θ. 1186, 45110 ΙΩΑΝΝΙΝΑ
T: 26510 08817 - F: 26510 08890

P.O. Box 1186
GR 45110 IOANNINA, GREECE
T: +30 26510 08817 - F: +30 26510 08890

α΄) Αφού αντικαταστήσετε την (6) στην (5), να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς και να προσδιορισθούν *συμβολικά* οι πόλοι και τα μηδενικά της (5), υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες. **Θεωρούμε ότι η είσοδος στο σύστημα είναι ο επιθυμητός προσανατολισμός, θ_{des}, και η έξοδος είναι ο προσανατολισμός, θ, σε κάθε χρονική στιγμή**. Στη συνέχεια, υπολογίστε τους πόλους και τα μηδενικά, *αριθμητικά*, με τις παρακάτω τιμές για τις παραμέτρους:

Πίνακας 3: Αριθμητικές τιμές παραμέτρων στις εξισώσεις (5)-(6)

Παράμετρος	Τιμή
I_z	0.38 kg m^2
b_θ	4 - (A.M./5000)
$K_{p\theta}$	5
$K_{d\theta}$	15
θ_{des}	-A.M./10000

β΄) Μελετήστε και απεικονίστε σχηματικά, στο μιγαδικό επίπεδο, την αλλαγή των πόλων και των μηδενικών της (5), καθώς τα $K_{p\theta}$ και $K_{d\theta}$ μεταβάλλονται από σχεδόν μηδενικές τιμές (π.χ. 0.1) σε πολύ μεγάλες τιμές (π.χ. 100) με βήμα 1, διατηρώντας κάθε φορά το ένα από τα δύο σταθερό με την τιμή του Πίνακα 3. Τι συμπεράσματα βγάζετε σχετικά με την μορφή της απόκρισης και την ευστάθεια του συστήματος;

γ΄) Βρείτε την αναλυτική λύση της (5) με τις αρχικές συνθήκες του Προβλήματος 1γ.

δ΄) Να γραφεί πρόγραμμα σε MATLAB ή GNU Octave ή C, το οποίο να υλοποιεί την αναλυτική λύση της (5), και υπολογίστε, μόνο για την (5), ξανά το ερώτημα 1γ. Να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων. Τι συμπεράσματα βγάζετε;

ε΄) Να γίνει η γραφική παράσταση της λύσης, $\theta(t)$, και της πρώτης παραγώγου της, $\theta'(t)$.