ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Ομάδα Β με ζυγό μεγαλύτερο Α.Μ.

ΣΤΑΜΑΤΙΟΥ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ Α.Μ. 4172
ΑΛΕΞΙΟΥ ΒΑΣΙΛΗΣ Α.Μ. 4022
ΣΟΛΔΑΤΟΥ ΧΡΙΣΤΙΝΑ ΟΛΥΜΠΙΑ Α.Μ. 4001

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1</u>

<u>α)</u>

Οι σταθερές που χρησιμοποιούμαι για το ερώτημα α μετά τους υπολογισμούς είναι οι εξής:
<u>Σημείωση:</u> Μεγαλύτερο Α.Μ. 4172

[f1, f2] = [0,596, 0,596]
[f1, f2] = [0,596, 0,5215]
θ0 = θ(0) = 0,2086
θ'(0) = 0
bx = 2,1656
bθ = 4,1656
m = 9 kg
d = 1 m
Iz = 0,38 kg m^2

Αντικαθιστούμε τις σταθερές στην διαφορική εξίσωση u και έχουμε:
9u' = (f1 + f2) – 2,1656|u|u **{1}**
Κατά τον ίδιο τρόπο η εξίσωση της θ γίνεται:
0,38θ'' = 1/2(f2 – f1) – 4,1656|θ'|θ' **{2}**
Λόγω των δυο σετ τιμών για τα f1 και f2 θα έχουμε 2 περιπτώσεις για κάθε εξίσωση.

<u>ΜΕΘΟΔΟΣ EULER</u>

<u>Μέθοδος Euler για u:</u>

1)[f1, f2] = [0,596, 0,596] 1ο σετ

Η Δ.Ε. {1} αντικαθιστώντας το 1ο σετ τιμών γίνεται:
u' = (1,192 – 2,1656|u|u)/9

Η Δ.Ε. Είναι πρώτου βαθμού άρα εφαρμόζουμε την μέθοδο Euler ως εξής:

u(n+1) = u(n) + h*u'(n) =>
u(n+1) = u(n) + h*((1,192 – 2,1656|u|u)/9)

2)[f1, f2] = [0,596, 0,5215] 2ο σετ

Η Δ.Ε. {1} αντικαθιστώντας το 2ο σετ τιμών γίνεται:
u' = (1,1175 – 2,1656|u|u)/9

Η Δ.Ε. Είναι πρώτου βαθμού άρα εφαρμόζουμε την μέθοδο Euler ως εξής:

u(n+1) = u(n) + h*u'(n) =>
u(n+1) = u(n) + h*((1,1175 – 2,1656|u|u)/9)

<u>Μέθοδος Euler για θ:</u>

1)[f1, f2] = [0,596, 0,596] 1ο σετ

Η Δ.Ε. {2} αντικαθιστώντας το 1ο σετ τιμών γίνεται:
θ'' = -(4,1656|θ'|θ')/0,38

Μετατρέπουμε την Δ.Ε. 2ου βαθμού του θ σε σύστημα Δ.Ε. 1ου βαθμού για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο Euler.
Επομένως έχουμε:

- θ1(t) = θ(t)
- θ2(t) = θ'(t)

θ1'(t) = θ2(t)
θ2'(t) = -(4,1656|θ'(t)|θ(t)')/0,38

Μέθοδος Euler για θ2(t):
θ2(n+1) = θ2(n) + h*f(tn, θ2(n)) =>
θ2(n+1) = θ2(n) + h*[-(4,1656|θ2(n)|θ2(n))/0,38] {2.1}

Μέθοδος Euler για θ1(t):
θ1(n+1) = θ1(n) + h*f(tn, θ1(n)) =>
θ1(n+1) = θ1(n) + h*[θ2(n)] {2.2}

2)[f1, f2] = [0,596, 0,5215] 2ο σετ

Η Δ.Ε. {2} αντικαθιστώντας το 2ο σετ τιμών γίνεται:
θ'' = (0,2235 – 4,1656|θ'|θ')/0,38

Και ακριβώς όπως πριν έχουμε:
θ2(n+1) = θ2(n) + h*[(0,2235 – 4,1656|θ2(n)|θ2(n))/0,38] {2.3}
θ1(n+1) = θ1(n) + h*[θ2(n)] {2.4}

Για την επίλυση του Π.Α.Τ. Θα πάρουμε τις παραπάνω σχέσεις και αντικαθιστούμε όπου θ2 το θ' και το θ1 το θ:

2.1 ~ θ'(n+1) = θ'(n) + h*[-(4,1656|θ'(n)|θ'(n))/0,38]
2.2 , 2.4 ~ θ(n+1) = θ(n) + h*[θ'(n)]
2.3 ~ θ'(n+1) = θ'(n) + h*[(0,2235 – 4,1656|θ'(n)|θ'(n))/0,38]

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ EULER

Τροποποιημένη Μέθοδος Euler για u:

1)[f1, f2] = [0,596, 0,596] 1o σετ

H Δ.Ε. {1} αντικαθιστώντας το 1o σετ τιμών γίνεται:
u' = (1,192 – 2,1656|u|u)/9

H Δ.Ε. Είναι πρώτου βαθμού άρα εφαρμόζουμε την τροποποιημένη μέθοδο Euler ως εξής:
u(n+1) = u(n) + h*f(tn + h/2, u(n) + h/2*u'(n))=>
u(n+1) = u(n) +h*[(h/2 + 1)*(1,192 – 2,1656|u(n)|u(n)/9)]

2)[f1, f2] = [0,596, 0,5215] 2o σετ

H Δ.Ε. {1} αντικαθιστώντας το 2o σετ τιμών γίνεται:
u' = (1,1175 – 2,1656|u|u)/9

H Δ.Ε. Είναι πρώτου βαθμού άρα εφαρμόζουμε την τροποποιημένη μέθοδο Euler ως εξής:
u(n+1) = u(n) + h*f(tn + h/2, u(n) + h/2*u'(n))=>
u(n+1) = u(n) +h*[(h/2 + 1)*(1,1175 – 2,1656|u(n)|u(n)/9)]

Τροποποιημένη Μέθοδος Euler για θ:

1)[f1, f2] = [0,596, 0,596] 1o σετ

H Δ.Ε. {2} αντικαθιστώντας το 1o σετ τιμών γίνεται:
θ'' = -(4,1656|θ'|θ')/0,38

Μετατρέπουμε την Δ.Ε. 2ου βαθμού του θ σε σύστημα Δ.Ε. 1ου βαθμού για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε την τροποποιημένη μέθοδο Euler.
Επομένως έχουμε:

- θ1(t) = θ(t)
- θ2(t) = θ'(t)

θ1'(t) = θ2(t)
θ2'(t) = -(4,1656|θ'(t)|θ'(t))/0,38

Τροποποιημένη Μέθοδος Euler για θ2(t):
θ2(n+1) = θ2(n) +h*[(h/2 + 1)*(-(4,1656|θ2(n)|θ2(n))/0,38)] {3.1}

Τροποποιημένη Μέθοδος Euler για θ1(t):
$θ1(n+1) = θ1(n) + h*[(h/2 + 1)*θ2(n)]$ {3.2}

2)[f1, f2] = [0,596, 0,5215] 2ο σετ

Η Δ.Ε. {2} αντικαθιστώντας το 2ο σετ τιμών γίνεται:
$θ'' = (0{,}2235 – 4{,}1656|θ'|θ')/0{,}38$

Και ακριβώς όπως πριν έχουμε:
$θ2(n+1) = θ2(n) + h*[(h/2 + 1)*(0{,}2235 – 4{,}1656|θ2(n)|θ2(n))/0{,}38]$ {3.3}
$θ1(n+1) = θ1(n) + h*[(h/2 + 1)*θ2(n)]$ {3.4}

Για την επίλυση του Π.Α.Τ. Θα πάρουμε τις παραπάνω σχέσεις και αντικαθιστούμε όπου θ2 το θ' και το θ1 το θ:

3.1~ $θ'(n+1) = θ'(n) + h*[(h/2 + 1)*(-4{,}1656|θ'(n)|θ'(n))/0{,}38]$
3.2, 3.4 ~ $θ(n+1) = θ(n) + h*[(h/2 + 1)*θ'(n)]$
3.3~ $θ'(n+1) = θ'(n) + h*[(h/2 + 1)*(0{,}2235 – 4{,}1656|θ'(n)|θ'(n))/0{,}38]$

γ)

Οι σταθερές που χρησιμοποιούμαι για το ερώτημα γ μετά τους υπολογισμούς είναι οι εξής:

Kρθ = 5
Kdθ = 19,172
θ0 = 0
θdes = - 0,4172
bθ = 4,1656

Μας δίνεται:
$Izθ'' = d/2\ (f2 − f1) − bθ|θ'|θ'$
όπου $(f2 − f1) = Kpθ(θdes − θ) − Kdθ(θ')$ και μετά τις αντικαταστάσεις έχουμε:

$θ'' = - (2{,}085 + 5θ + 19{,}172(θ') + 8{,}3312|θ'|θ')/0{,}76$

Μέθοδος Euler για θ:
Μετατρέπουμε την Δ.Ε. 2ου βαθμού του θ σε σύστημα Δ.Ε. 1ου βαθμού για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο Euler.
Επομένως έχουμε:
- θ1(t) = θ(t)
- θ2(t) = θ'(t)

θ1'(t) = θ2(t)

$\theta 2'(t) = - (2{,}085 + 5\theta +19{,}172\ \theta' + 8{,}3312|\theta'|\theta')/0{,}76$

Μέθοδος Euler για θ2(t):
$\theta 2(n+1) = \theta 2(n) + h*f(tn, \theta 2(n)) =>$
$\theta 2(n+1) = \theta 2(n) + h*[- (2{,}085 + 5\theta 1(n) +19{,}172(\theta 2(n)) + 8{,}3312|\theta 2(n)|\theta 2(n))/0{,}76]$ {1.1}

Μέθοδος Euler για θ1(t):
$\theta 1(n+1) = \theta 1(n) + h*f(tn, \theta 1(n)) =>$
$\theta 1(n+1) = \theta 1(n) + h*[\theta 2(n)]$ {1.2}

Για την επίλυση του Π.Α.Τ. Θα πάρουμε τις παραπάνω σχέσεις και αντικαθιστούμε όπου θ2 το θ' και το θ1 το θ:
1.1~ $\theta'(n+1) = \theta'(n) + h*[- (2{,}085 + 5\theta(n) +19{,}172\theta'(n) + 8{,}3312|\theta'(n)|\theta'(n))/0{,}76]$
1,2~$\theta(n+1) = \theta(n) + h*[\theta'(n)]$

<u>Τροποποιημένη Μέθοδος Euler για θ:</u>
Μετατρέπουμε την Δ.Ε. 2ου βαθμού του θ σε σύστημα Δ.Ε. 1ου βαθμού για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε την τροποποιημένη μέθοδο Euler.
Επομένως έχουμε:
- $\theta 1(t) = \theta(t)$
- $\theta 2(t) = \theta'(t)$

$\theta 1'(t) = \theta 2(t)$
$\theta 2'(t) = - (2{,}085 + 5\theta +19{,}172\ \theta' + 8{,}3312|\theta'|\theta')/0{,}76$

Τροποποιημένη Μέθοδος Euler για θ2(t):
$\theta 2(n+1) = \theta 2(n) +h*[(h/2 + 1)*(-(2{,}085 + 5\theta 1(n) +19{,}172\theta 2(n) + 8{,}3312|\theta 2(n)|\theta 2(n))/0{,}76]$ {2.1}

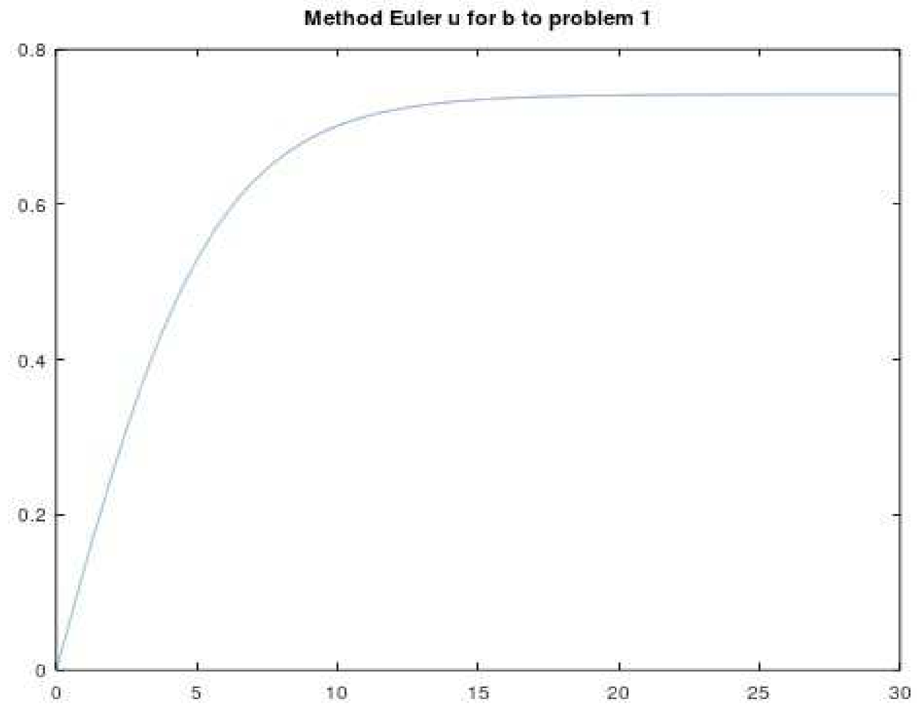
Τροποποιημένη Μέθοδος Euler για θ1(t):
$\theta 1(n+1) = \theta 1(n) +h*[(h/2 + 1)*\theta 2(n)]$ {2.2}

Για την επίλυση του Π.Α.Τ. Θα πάρουμε τις παραπάνω σχέσεις και αντικαθιστούμε όπου θ2 το θ' και το θ1 το θ:

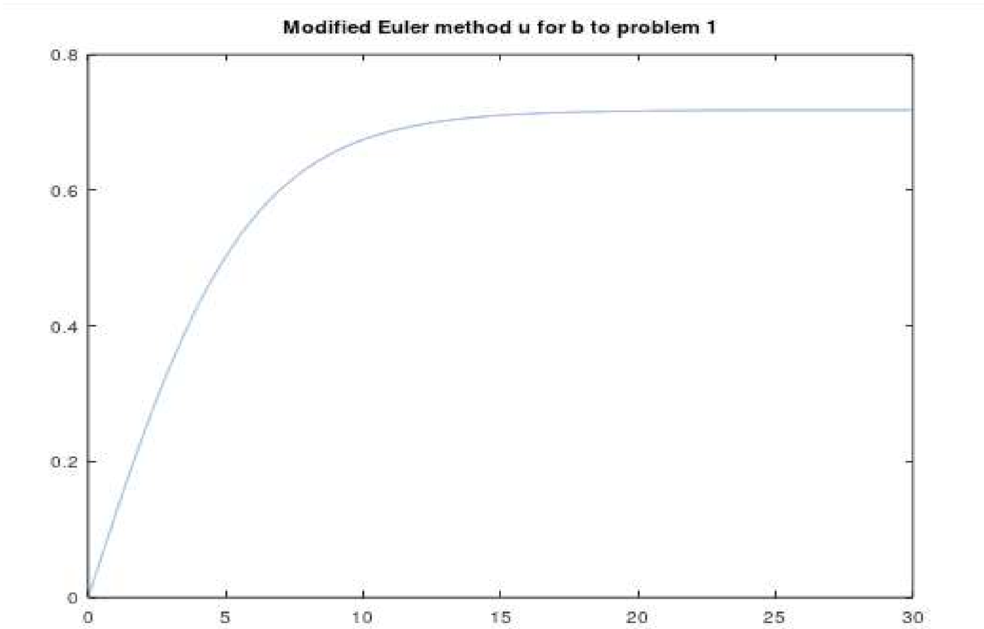
2.1~ $\theta'(n+1) = \theta'(n) + h*[(h/2 + 1)*(-(2{,}085 + 5\theta(n) +19{,}172\theta'(n) + 8{,}3312 |\theta'(n)|\theta'(n))/0{,}76]$
2.2 ~ $\theta(n+1) = \theta(n) + h*[(h/2 + 1)*\theta'(n)]$

ε)
Γραφικές παραστάσεις για u(t), θ(t) και θ'(t).
Σημείωση: Στο πρόγραμμα του octave καθώς και στα διαγράμματα όπου θ = th.

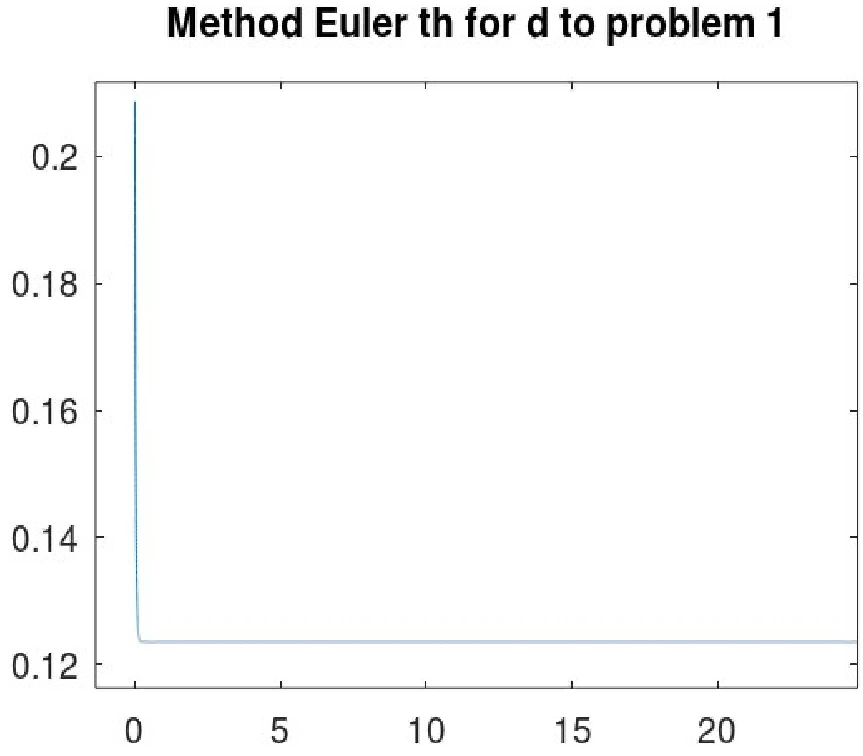
Γραφικές παραστάσεις για u(t):
Για μέθοδο Euler:



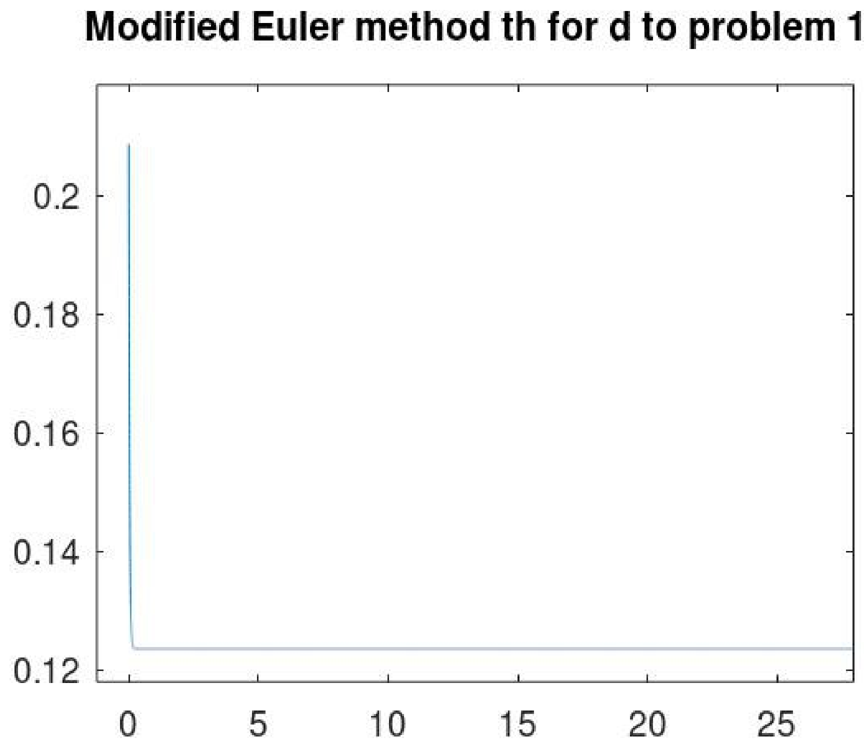
Για τροποποιημένη μέθοδο Euler:



<u>Γραφικές παραστάσεις για θ(t):</u>
Για μέθοδο Euler:

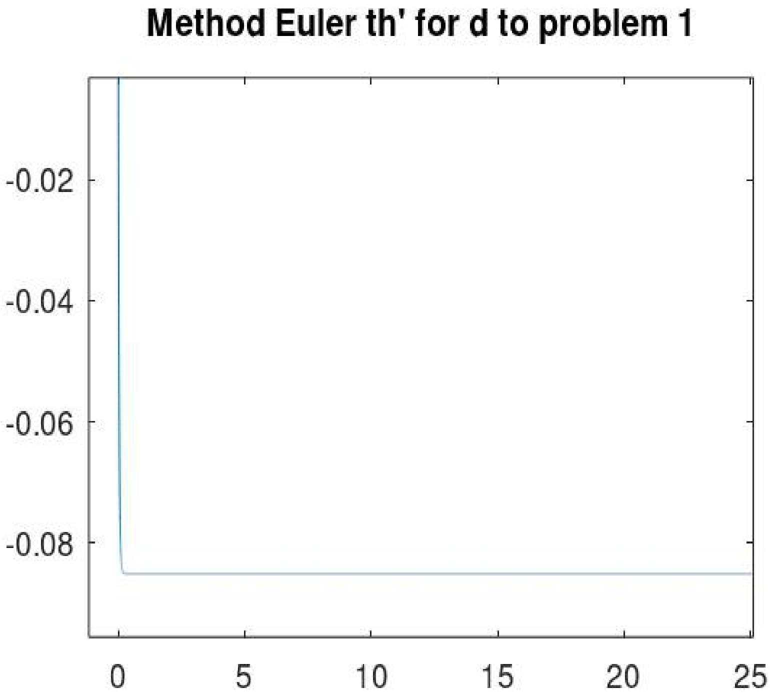


Για τροποποιημένη μέθοδο Euler:

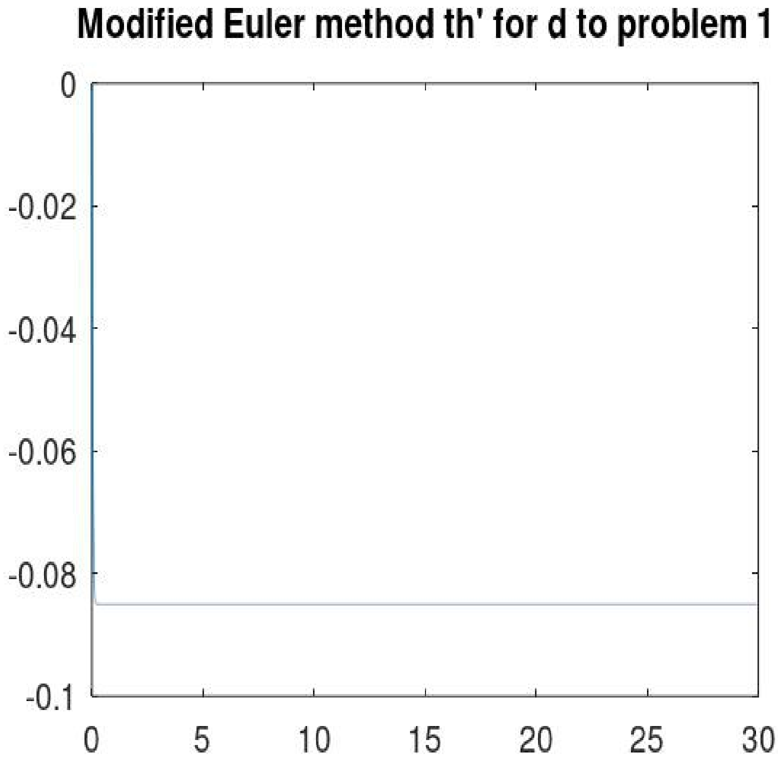


<u>Γραφικές παραστάσεις για θ'(t):</u>

Για μέθοδο Euler:



Για τροποποιημένη μέθοδο Euler:



<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2</u>

<u>α)</u>

Οι σταθερές που χρησιμοποιούμαι για το ερώτημα α μετά τους υπολογισμούς είναι οι εξής:
Iz = 0,38 kg m^2
bθ = 4 – (A.M./5000) = 3,1656
Kρθ = 5
Kdθ = 15
θdes = - A.M./10000 = - 0,4172

$$Iz\theta'' = d\,2\,(f2 - f1) - b\theta\theta'\ (5)$$
$$\text{με είσοδο } (f2 - f1) = K\rho\theta(\theta des - \theta) - Kd\theta(\theta')\ (6)$$

Αντικαθιστούμε την (6) στην (5) και έχουμε:

Izθ'' = 1/2[Kρθ(θdes – θ) – Kdθ(θ')] – bθθ' =>
2Izθ'' = Kρθ*θdes – Kρθ*θ – Kdθ*θ' – 2bθ*θ' =>
2Izθ'' - Kρθ*θdes + Kρθ*θ + Kdθ*θ' + 2bθ*θ' = 0 =>
(2Izθ'' + Kρθ*θ + Kdθ*θ' + 2bθ*θ')/Kρθ = (Kρθ*θdes)/Kρθ =>
(2Iz/Kρθ)θ'' + θ + (Kdθ/Kρθ)θ' + (2bθ/Kρθ)θ' = θdes (7)

- Το πρόβλημα μας λέει ότι έχουμε μηδενικές αρχικές συνθήκες. Αυτό συνεπάγεται θ(0) = 0 και θ'(0) = 0.
- Για να βρούμε την συνάρτηση μεταφοράς πρέπει να κάνουμε χρήση του μετασχηματισμού Laplace στην εξίσωση (7):

L[θ''] = s^2*Θ(s)
L[θ'] = s*Θ(s)
L[θ] = Θ(s)
L[θdes] = Θdes(s)

Αντικαθιστούμε στην (7) τα παραπάνω:
(2Iz/Kρθ)(s^2*Θ(s)) + ((Kdθ+2bθ)/Kρθ)(s*Θ(s)) + Θ(s) = Θdes(s)=>
Θ(s)[(2Iz/Kρθ)(s^2) + ((Kdθ+2bθ)/Kρθ)(s) + 1] = Θdes(s) =>
Θ(s)/Θdes(s) = H(s) = Kρθ/(2Iz*(s^2) + (Kdθ+2bθ)*(s) + Kρθ)
Η H(s) είναι η συνάρτηση μεταφοράς. Αντικαθιστούμε τις σταθερές τιμές που έχουμε, άρα:
H(s) = 5/(0,76*s^2 + 21,3312*s + 5)

- <u>Μηδενικά</u>: Εφόσον ο αριθμητής είναι ίσος με μία σταθερά αρχικά τα μηδενικά δεν υπάρχουν.
- <u>Πόλοι</u>: Λύνουμε την εξίσωση του παρονομαστή και έχουμε:

Δ = 20,9718882 > 0 άρα έχουμε 2 ρίζες:
s1 = - 0,236389 και s2 = - 27,83097
<u>Σημείωση</u>: Τα αποτελέσματα των ριζών είναι γραμμένα προσεγγιστικά.

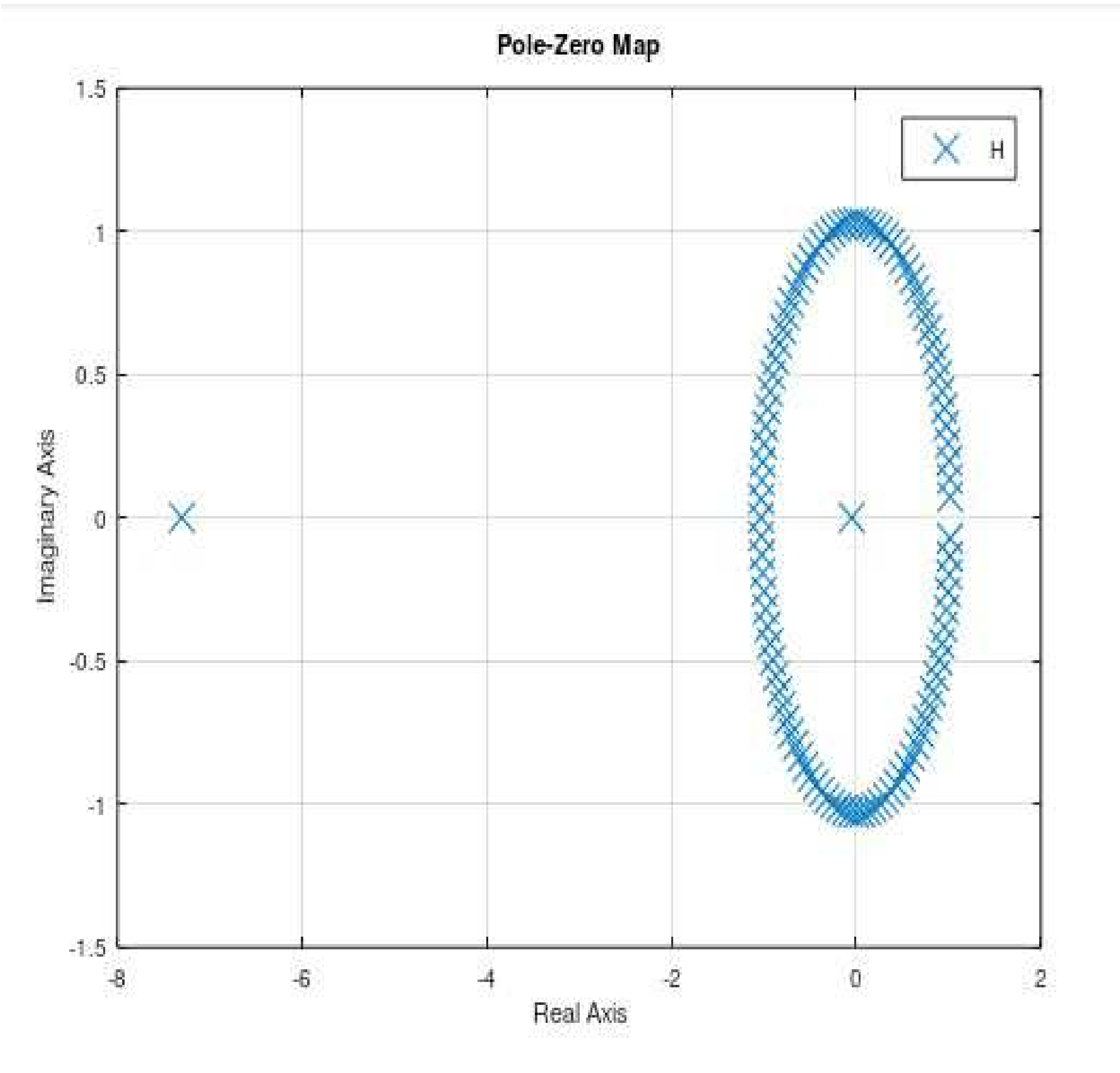
Επομένως, το πολυώνυμο του παρονομαστή είναι:
P(s) = (s + 0,236389) + (s +27,83097)
Και οι πόλοι είναι -27,83097 και – 0,236389

β)

Εφόσον στο προηγούμενο ερώτημα ο αριθμητής είναι ίσος με μία σταθερά τα μηδενικά δεν υπάρχουν στο διάγραμμα μας.
Με βήμα ίσο με 1 μεταβάλλουμε Κρθ και Kdθ από τιμές 0.1 έως 100

Περίπτωση 1

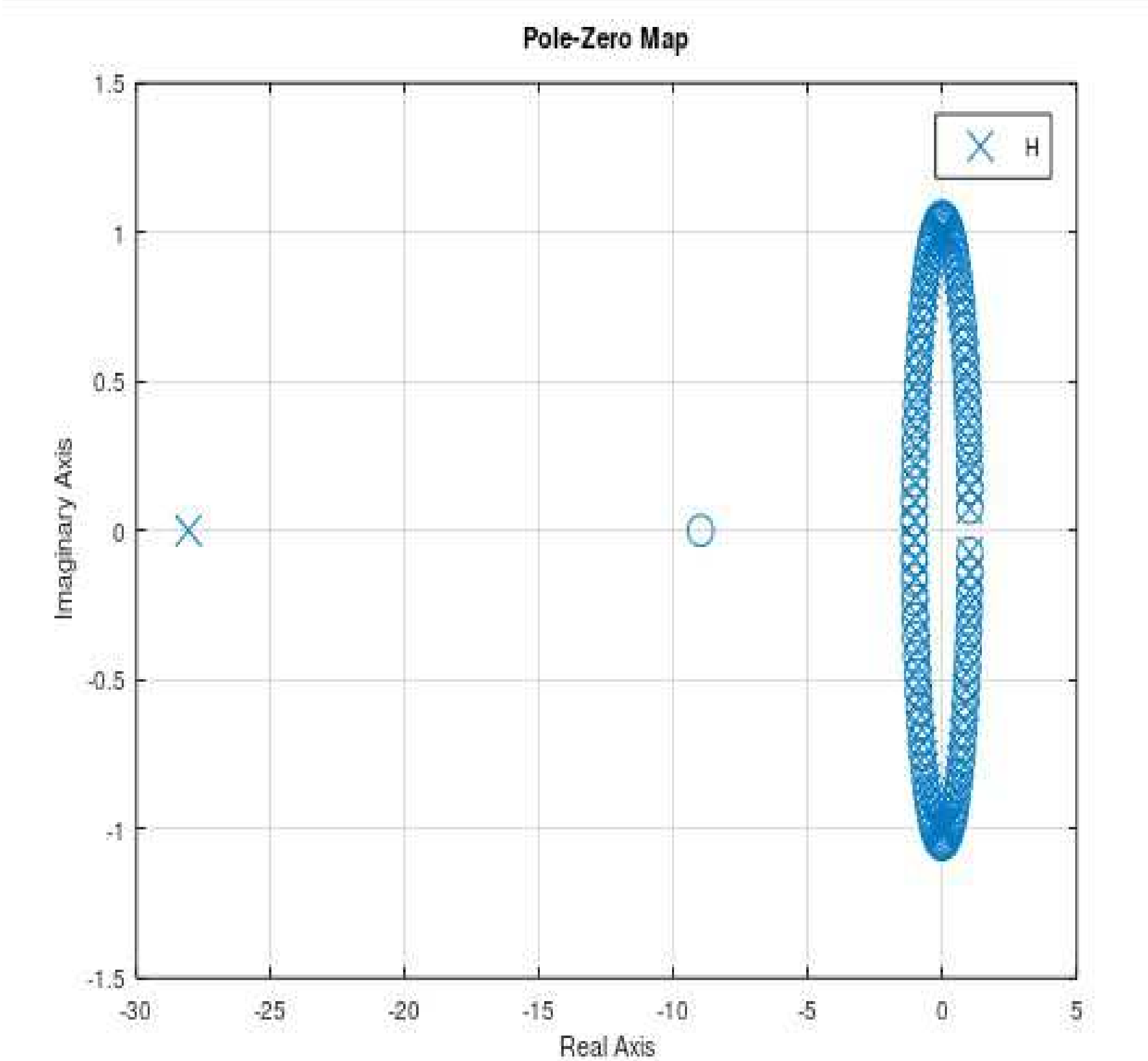
Μεταβολή όταν το Κρθ παραμένει σταθερό στο 5.



Παρατηρούμε ότι η θέση των πόλων είναι στην αριστερή πλευρά του μιγαδικού επιπέδου και ο ένας πόλος αρχίζει και μετακινείται πολύ γρήγορα προς τον άλλον όσο αλλάζει η τιμή του Κρθ. Επομένως στην απόκριση του συστήματος έχουμε υπεραπόσβεση.

Περίπτωση 2

Μεταβολή όταν το Kdθ παραμένει σταθερό στο 15.



(Σημείωση: Αντιλαμβανόμαστε ότι δεν θα έπρεπε να βγαίνουν μηδενικά αλλά δεν γνωρίζουμε γιατί παρουσιάζονται εδώ και στο παραπάνω διάγραμμα όχι.)

Παρατηρούμε και εδώ ότι οι πόλοι έχουν την ίδια μορφή με τους παραπάνω άρα είναι ασφαλές να συμπεράνουμε ότι στην απόκριση του συστήματος έχουμε υπεραπόσβεση.

Εν κατακλείδι σε κάθε περίπτωση οι πόλοι είναι στο αριστερό ημιεπίπεδο οπότε σύστημα σε κάθε περίπτωση είναι ευσταθές.

γ)

Οι σταθερές που χρησιμοποιούμαι για το ερώτημα γ μετά τους υπολογισμούς είναι οι εξής:
Kρθ = 5
Kdθ = 19,172
θ0 = 0
θdes = - 0,4172
d = 1 m
Iz = 0,38 kg m^2

Izθ ′′ = d/2 (f2 − f1) − bθθ (5) με είσοδο (f2 − f1) = Kpθ(θdes − θ) − Kdθ(θ ′) (6)
Izθ'' = 1/2[Kρθ(θdes – θ) – Kdθ(θ')] – bθθ'
Στην παραπάνω σχέση αντικαθιστούμε τις σταθερές και έχουμε:

0,76θ'' + 27,50320' + 5θ = - 2,085

Για να βρούμε την αναλυτική λύση της διαφορικής εξίσωσης θα πρέπει πρωτα να βρούμε την μερικής λύση της και κατόπιν την ομογενή.

ΜΕΡΙΚΗ ΛΥΣΗ

Το δεύτερο μέρος της Δ.Ε. Είναι μια σταθερά g(t) = - 2,085, επομένως μπορούμε να υποθέσουμε:
θμερ(t) = At + B
Στη συνέχεια πρέπει να βρούμε τις παραγώγους και να αντικαταστήσουμε στην Δ.Ε.

θμερ''(t) = 0
θμερ'(t) = A
0,76θ'' + 27,50320' + 5θ = - 2,085 => 0,76*0 + 27,5032*A + 5(At + B) = - 2,085 =>
27,5032A + 5At + 5B = - 2,085 =>
5At + (27,5032A +5B) = - 2,085 (7)

- 5At = 0 => **A = 0**
- 27,5032A + 5B = -2,085 => **B = -0,417**

Άρα θμερ(t) = - 0,417.

ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΛΥΣΗ

Χαρακτηριστική Εξίσωση => 0,76r^2 + 27,5032r + 5 = 0
Δ = 27,22546620794582
r1 = - 36,0057 και r2 = -0,1827
Σημείωση: Τα αποτελέσματα των ριζών είναι γραμμένα προσεγγιστικά.

Γενική λύση: **θομ(t) = c1*e^(-36,0057*t) + c2*e^(-0,1827t) – 0,417**

Βρίσκουμε τα $c1$ και $c2$:
$θομ(t) = 0 => c1 + c2 – 0,417 = 0 => c1 + c2 = 0,417 => c2 = 0,417 - c1$ (1)
$θομ'(t) = 0 => - 36,0057c1 – 0,1827c2 = 0 => - 36,0057c1 = 0,1827c2$ (2)
Από (1) και (2) έχουμε: $- 36,0057c1 – 0,1827(0,417 - c1) = 0 => c1 = -0,0021267$
Άρα $c2 = 0,4148733$
<u>Σημείωση</u>: Τα c1 και c2 είναι γραμμένα προσεγγιστικά.
Άρα η ομογενής λύση είναι η εξής:
<u>θομ(t) = -0,0021267*e^(-36,0057*t) + 0,4148733*e^(-0,1827t) – 0,417</u>

Τελικά η αναλυτική λύση είναι:
θ(t) = -0,0021267*e^(-36,0057*t) + 0,4148733*e^(-0,1827t) – 0,417

<u>δ)</u>

Η διαφορική εξίσωση που έχουμε είναι:
θ'' = (- 2,085 + 27,50320' + 5θ)/0,76

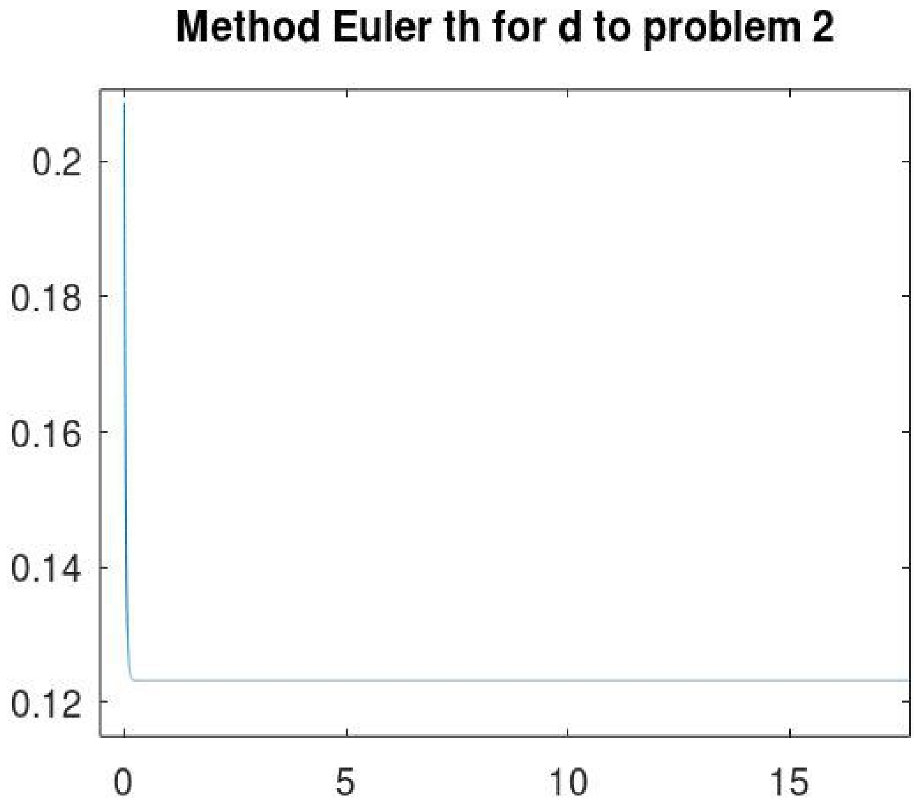
Εφαρμόζουμε την μέθοδο Euler. Μετατρέπουμε την Δ.Ε. 2ου βαθμού του θ σε σύστημα Δ.Ε. 1ου βαθμού για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο.
θ1'(t) = θ2(t)
θ2'(t) = (- 2,085 + 27,50320' + 5θ)/0,76

Μέθοδος Euler για θ2(t):
θ2(n+1) = θ2(n) + h*f(tn, θ2(n)) =>
θ2(n+1) = θ2(n) + h*[(- 2,085 + 27,5032θ2(n) + 5θ1(n))/0,76] {1.1}

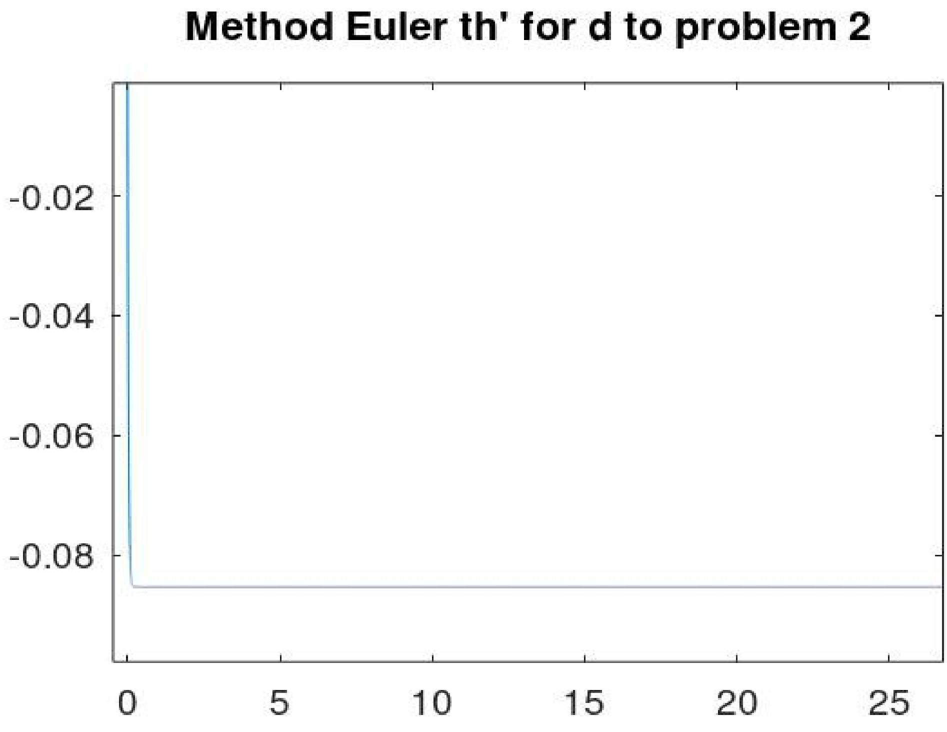
Μέθοδος Euler για θ1(t):
θ1(n+1) = θ1(n) + h*f(tn, θ1(n)) =>
θ1(n+1) = θ1(n) + h*[θ2(n)] {1.2}

Παίρνουμε τις παραπάνω σχέσεις και αντικαθιστούμε όπου θ2 το θ' και το θ1 το θ:
1.1~ θ'(n+1) = θ'(n) + h*[(- 2,085 + 27,50320'(n) + 5θ(n))/0,76]
1.2 ~ θ(n+1) = θ(n) + h*[θ'(n)]

Κάνουμε εφαρμογή των παραπάνω τύπων της μεθόδου Euler στο Octave και παίρνουμε την γραφική παράσταση:

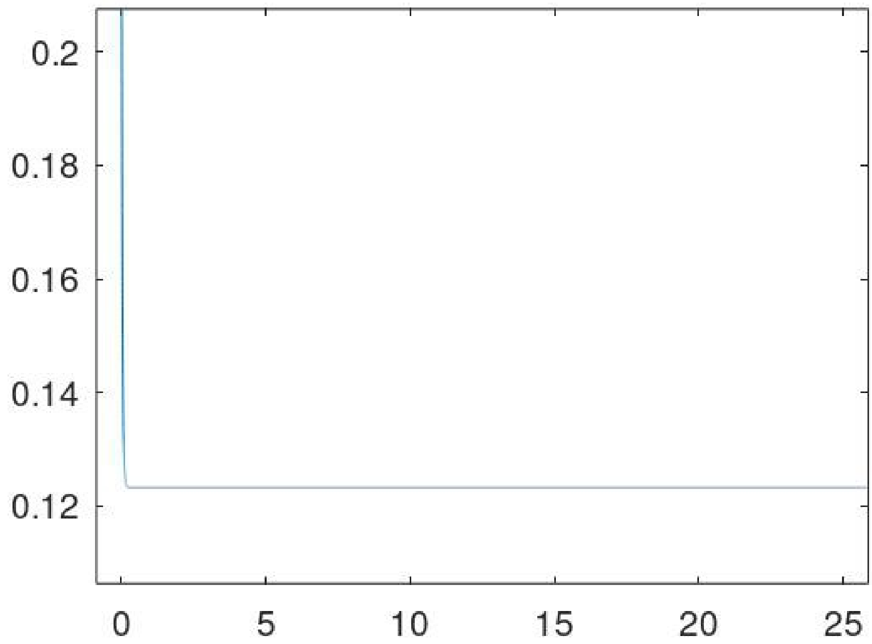


Παρατηρούμε για την μέθοδο Euler ότι για τιμές μετά το t=0,35 τα αποτελέσματα σταθεροποιούνται κοντά στην πραγματική λύση της εξίσωσης η οποία είναι θ(t) = 0,1233. Ομοίως για την θ' στην μέθοδο Euler όπου σταθεροποιούνται για t = 0,3 και θ΄(t) = - 0,085347



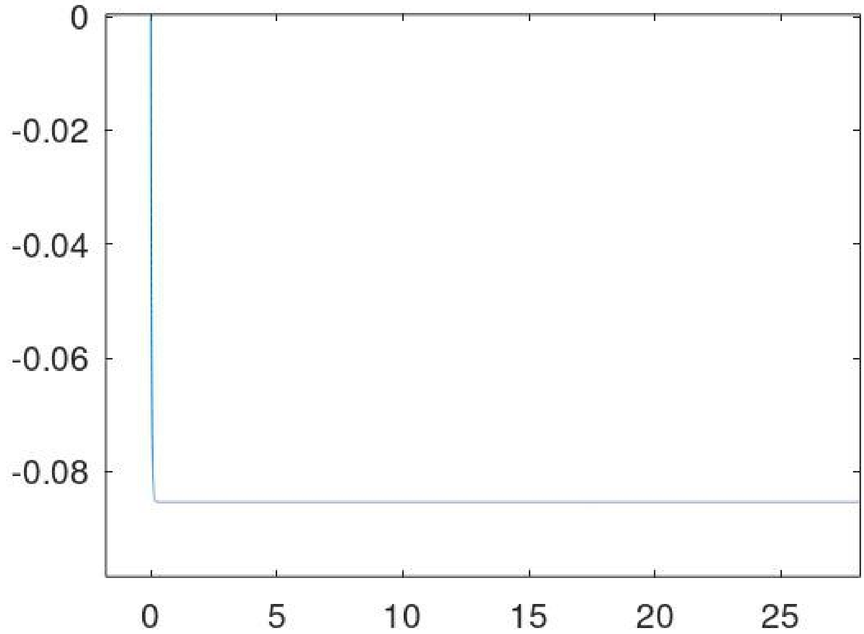
Στην συνέχεια εφαρμόζουμε την τροποποιημένη μέθοδο Euler και παίρνουμε τις εξής εξισώσεις:
θ'(n+1) = θ'(n) + h*[(h/2 + 1)*((- 2,085 + 27,50320'(n) + 5θ(n))/0,76]
θ(n+1) = θ(n) + h*[(h/2 + 1)*θ'(n)]

Modified Euler method th for d to problem 2



Παρατηρούμε για την τροποποιημένη μέθοδο Euler ότι για τιμές μετά το t=0,5 τα αποτελέσματα σταθεροποιούνται κοντά στην πραγματική λύση της εξίσωσης η οποία είναι θ(t) = 0,12324. Ομοίως για την θ' στην τροποποιημένη μέθοδο Euler όπου σταθεροποιούνται για t = 1 και θ΄(t) = - 0,085351

Modified Euler method th' for d to problem 2



<u>ε)</u>

Παρατηρούμε ότι για τιμές μετά το t=4 τα αποτελέσματα σταθεροποιούνται. Επίσης βλέπουμε ότι η πραγματική λύση της εξίσωσης η οποία είναι θ(t) = -0,41755 είναι πάρα πολύ κοντά στην μέθοδο Euler και την τροποποιημένη μέθοδο Euler που βρήκαμε παραπάνω. Επομένως το σφάλμα είναι πάρα πολύ μικρό.