

# 제 1회 AoMO

OLYMPIADIUM

October 10, 2021

## Contents

0	Problems	2
1	AoMO 2021/1	3
2	AoMO 2021/2	4
3	AoMO 2021/3	5
4	AoMO 2021/4	6
5	AoMO 2021/5	7
6	AoMO 2021/6	8

## §0 Problems

1. '의 정수  $m$ 에 대하여  $m^2 - 2$ 의 소인수  $p$ 가 다음 조건을 만족한다.

$$pa - m + 2 \text{가 D전제곱수가 } \text{는 '의 정수 } a \text{가 존재한다.}$$

이때,  $pb + m + 2$ 가 D전제곱수가 는 '의 정수  $b$ 가 존재함을 보이다.

2.  $\triangle ABC$ 에서 각  $A$ 의 이분선은 변  $BC$ 의 점  $D$ 에서 만나고, 변  $BC$ 의 중점은  $M$ 이다.  $B$ 에서  $E$ 를 주보는 변  $BC$  내의 수선의 발을  $E$ 라고 하고,  $\triangle CDE$ 의  $\angle C$ 의 점  $D$ 와 선분  $AD$ 의  $P$ 점을  $X$ 로 할 때,  $\angle BAC + \angle XME = 90^\circ$ 임을 보이다.

3. 함수  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 가 다음 조건을 만족한다.

$$\text{임의의 '의 실수 } x, y, z \text{에 대하여 } \frac{f(x)f(y)f(z)}{f(z+xyf(z))} \text{가 일정한 값을 가진다.}$$

이때,  $f$ 가  $\mathbb{R}^+$  상수함수임을 보이다. (단,  $\mathbb{R}^+$ 는 '의 실수 집합이다.)

4. 음이 아닌 실수  $a, b, c, d$ 가  $a + 2b + 3c + 4d = 5$ 를 만족할 때,

$$a^2(2b^2 + 3c^2 + 4d^2)$$

의 최댓값을 구하시오.

5.  $\triangle ABC$ 에서  $D, E, F$ 는 각각 변  $BC, CA, AB$  위의 점으로  $\overline{BF} = \overline{CE}$ 와  $\angle BAD = \angle CAD$ 를 만족한다.  $\overline{BE}$ 와  $\overline{CF}$ 의 교점을  $P$ 라고 하고,  $\triangle BPF, \triangle CPE$ 의 내심을 각각  $I, J$ 라고 하자.  $\overline{IJ}$ 과  $\overline{AD}$ 가 점  $Q$ 에서 만난다고 할 때,  $\overline{IP} = \overline{JQ}$ 임을 보이다.

6.  $a + b = n - 1$ 을 만족하는 '의 정수  $a, b, n$ 이 주어졌다. 대수학 학년의 각 학생은 친구가  $1 \leq d \leq n-1$ 이 있다고 한다. 이때, 학년  $A$ 에 속한 각 학생은  $A$ 에 친구가  $1 \leq d \leq a$ 이고, 학년  $B$ 에 속한 각 학생은  $B$ 에 친구가  $1 \leq d \leq b$ 이므로, 전학생을  $P$  학년  $A, B$ 에 배정할 수 있음을 보이다.

**§1 AoMO 2021/1****Problem 1** (AoMO 2021/1)

'의 정수  $m \in \mathbb{D}$ 에 대하여  $m^2 - 2$ 의 소인수  $p$ 가 다음 조건을 만족한다.

$pa - m + 2$ 가  $\mathbb{D}$ 전제곱수가 되는 '의 정수  $a$ 가 존재한다.

이때,  $pb + m + 2$ 가  $\mathbb{D}$ 전제곱수가 되는 '의 정수  $b$ 가 존재함을 보이다.

## §2 AoMO 2021/2

### Problem 2 (AoMO 2021/2)

$\triangle ABC$ 에서 각  $A$ 의 이등분선은 변  $BC$ 의 점  $D$ 에서 만나고, 변  $BC$ 의 중점은  $M$ 이다.  
 $BD$ 의 수직이등분선은 변  $BC$ 의 내부에 수선의 발을  $E$ 로 하고,  $\triangle CDE$ 의  $\angle C$ 의 이등분선과 선분  $AD$ 의  
 교점을  $X$ 로 할 때,  $\angle BAC + \angle XME = 90^\circ$ 임을 보이다.

### §3 AoMO 2021/3

#### Problem 3 (AoMO 2021/3)

함수  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 가 다음 조건을 만족한다.

임의의  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ 에 대하여  $\frac{f(x)f(y)f(z)}{f(z+xyf(z))}$ 가 일정한 값을 가진다.

이때,  $f$ 가 함수임을 보이다. (단,  $\mathbb{R}^+$ 는  $\mathbb{R}$ 의 실수 집합이다.)

**§4 AoMO 2021/4****Problem 4** (AoMO 2021/4)

음이 아닌 실수  $a, b, c, d$ 가  $a + 2b + 3c + 4d = 5$ 를 만족할 때,

$$a^2(2b^2 + 3c^2 + 4d^2)$$

의 최댓값을 구하시오.

## §5 AoMO 2021/5

### Problem 5 (AoMO 2021/5)

삼각형  $ABC$ 에서  $D, E, F$ 는 각각 변  $BC, CA, AB$  위의 점으로  $\overline{BF} = \overline{CE}$ 와  $\angle BAD = \angle CAD$ 를 만족한다. 직선  $BE$ 와  $CF$ 의 교점을  $P$ 라고 하고, 삼각형  $BPF, CPE$ 의 내심을 각각  $I, J$ 라고 하자. 직선  $IJ$ 과  $AD$ 가 점  $Q$ 에서 만난다고 할 때,  $\overline{IP} = \overline{JQ}$ 임을 보일 것.

## §6 AoMO 2021/6

**Problem 6** (AoMO 2021/6)

$a+b=n-1$ 을 만족하는 '의 정수  $a, b, n$ 이 주어졌다. 대한수학 학P의 각 학Y은 친I 가  $\hat{I} \mid D \mid n \dots$ 이고 한다. 이때, 학  $A \in D$  속한 각 학Y은  $A$ 반D 친I 가  $\hat{I} \mid D \mid a \dots$ 이고, 학  $B \in D$  속한 각 학Y은  $B$ 반D 친I 가  $\hat{I} \mid D \mid b \dots$ 이 도] 전PY을 P 학  $A, B \in D$  배정할 수 있음을 보ì | .