제 1회 AoMO

Olympiadium

October 10, 2021

Contents

§0 Problems

1. ' 의 정수 mÐ 대하ì m^2-2의 소인수 p가 다음 조건을 Ì족한다.

$pa-m+2$가 D전제곱수가 　는 ' 의 정수 a가 존재한다.

이때, $pb+m+2$가 D전제곱수가 　는 ' 의 정수 b가 존재함을 보ì | .

2. ¼각 ABCÐ서 각 A의 이ñ분선은 변 BC@ 점 DÐ서 Ì나고, 변 BC의 　점은 M이다. B Ð서 È주보는 변Ð 내° 수선의 발을 E | 고 하고, ¼각 CDE의 x접Ð과 선분 AD의 P점을 X | 할 때, $\angle BAC+\angle XME=90°$임을 보ì | .

3. 함수 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$가 다음 조건을 Ì족한다.

임의의 ' 의 실수 x,y,zÐ 대하ì $\dfrac{f(x)f(y)f(z)}{f(z+xyf(z))}$가 일정한 값을 가Ä다.

이때, f가 Á수함수임을 보ì | . (단, $\mathbb{R}^+$는 ' 의 실수 Ñ합이다.)

4. 음이 D닌 실수 a,b,c,d가 $a+2b+3c+4d=5$ | Ì족할 때,

$$a^2(2b^2+3c^2+4d^2)$$

의 최댓값을 l하ì | .

5. ¼각 ABCÐ서 D,E,F는 각각 변 BC,CA,AB 위의 점으\ $\overline{BF}=\overline{CE}$@ $\angle BAD=\angle CAD$ | Ì족한다. Á선 BE@ CF의 P점을 P | 고 하고, ¼각 BPF,CPE의 내심을 각각 I,J | 고 하자. Á선 IJ@ AD가 점 QÐ서 Ì난다고 할 때, $\overline{IP}=\overline{JQ}$임을 보ì | .

6. $a+b=n-1$을 Ì족하는 ' 의 정수 a,b,n이 주´졌다. 대한수학 　학P의 각 학Ý은 친l가 Î D | n…이 | 고 한다. 이때, 학 　AÐ 속한 각 학Ý은 A반Ð 친l가 Î D | a…이고, 학 　BÐ 속한 각 학Ý은 B반Ð 친l가 Î D | b…이 　도] 전P Ý을 P 학 　A,BÐ 배정할 수 있음을 보ì | .

§1 AoMO 2021/1

Problem 1 (AoMO 2021/1)

‘의 정수 mĐ 대하ì m^2-2의 소인수 p가 다음 조건을 Ì족한다.

$pa-m+2$가 D전제곱수가 는 ‘의 정수 a가 존재한다.

이때, $pb+m+2$가 D전제곱수가 는 ‘의 정수 b가 존재함을 보ì |.

§2 AoMO 2021/2

Problem 2 (AoMO 2021/2)

¼각 ABCÐ서 각 A의 이ñ분선은 변 BC@ 점 DÐ서 Ì나고, 변 BC의 점은 M이다. BÐ서 È주보는 변Ð 내° 수선의 발을 E|고 하고, ¼각 CDE의 x접Ð과 선분 AD의 P점을 X| 할 때, $\angle BAC + \angle XME = 90°$임을 보ì |.

§3 AoMO 2021/3

Problem 3 (AoMO 2021/3)

함수 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$가 다음 조건을 Ì족한다.

$$\text{임의의 ' 의 실수 } x, y, z\text{Ð 대하ì } \frac{f(x)f(y)f(z)}{f(z+xyf(z))}\text{가 일정한 값을 가Ä다.}$$

이때, f가 Á수함수임을 보ì |. (단, $\mathbb{R}^+$는 ' 의 실수 Ñ합이다.)

§4 AoMO 2021/4

Problem 4 (AoMO 2021/4)

음이 D닌 실수 a, b, c, d가 $a + 2b + 3c + 4d = 5$ | Ì족할 때,

$$a^2(2b^2 + 3c^2 + 4d^2)$$

의 최댓값을 l하i |.

§5 AoMO 2021/5

Problem 5 (AoMO 2021/5)

¼각 ABCÐ서 D, E, F는 각각 변 BC, CA, AB 위의 점으\ $\overline{BF} = \overline{CE}$@ $\angle BAD = \angle CAD$ | Ì족한다. Á선 BE@ CF의 P점을 P | 고 하고, ¼각 BPF, CPE의 내심을 각각 I, J | 고 하자. Á선 IJ@ AD가 점 QÐ서 Ì난다고 할 때, $\overline{IP} = \overline{JQ}$임을 보ì | .

§6 AoMO 2021/6

Problem 6 (AoMO 2021/6)

$a+b=n-1$을 Ì족하는 ʻ의 정수 a, b, n이 주´졌다. 대한수학 학P의 각 학Ý은 친l가 Î D | n…이 | 고 한다. 이때, 학 AĐ 속한 각 학Ý은 A반Đ 친l가 Î D | a…이고, 학 BĐ 속한 각 학Ý은 B반Đ 친l가 Î D | b…이 도] 전P Ý을 P 학 A, BĐ 배정할 수 있음을 보ì | .