



5th JoyMO 2021

Joyful Mathematical Olympiad

2021년 11월 8일 ; 제\ 시간 2시간; 8m당 7점

1. 다L 식

$$\frac{n^2 + 1}{[P]n^2 + 2}$$

t 정수가 \mathbb{N} X는 ' X 정수 $n \in \mathbb{N} \mid P \mid X$ 라.

2. $P \in \omega_1$ 과 ω_2 가 서\ 다x P 점 $P, K \in \mathbb{R}$ 다. Á선 XY 는 $\mathbb{R} \omega_1, \omega_2$ 각각 점 X, Y \mathbb{R} 서 접\ 다. Á선 $YP \in \mathbb{R} \omega_1$ X P점D B, Á선 $XP \in \mathbb{R} \omega_2$ X P점D C라고 X•. Á선 $BX \in \mathbb{R} CY$ 가 \mathbb{R} 는 점D A라고 X고, 삼각형 ABC X x 점D과 삼각형 AXY X x 점D X P점D $Q (\neq A)$ 라고 \ 때, $\angle QXA = \angle QKP$ D 보ì 라.

3. 다L 조건Dì 족X는 h수 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \mathbb{R}^+ \mid$ $\mathbb{R}^+ \mid$ Xì 라.

$$\mathbb{R}^+ \mid \mathbb{R}^+ \mid \text{X 실수 } x, y \in \mathbb{R}^+ \mid f\left(\frac{f(y)}{f(x)} + 1\right) = f\left(x + \frac{y}{x} + 1\right) - f(x)$$



3rd JoyMO 2021

Joyful Mathematical Olympiad

2021년 11월 8일 ; 제\ 시간 2시간; 8문당 7점

4. 다음 식을 만족시키는 n 개의 정수 a, b, c 의 순서를 P 라 하자.

$$2^a + 3^b + 5^c = n!$$

5. 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 를 P 라 하자.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(xf(y) + 2y) = f(xy) + xf(y) + f(f(y))$$

6. n 변삼각형의 내각의 삼각형 ABC 의 꼭짓점 Γ , Δ 의 중심과 수심 O, H 를 \bullet 로 표시. 변 AB 와 AC 의 중점 M, N 를 \times 로 표시. 점 B, C 에서 $\angle B, \angle C$ 의 수선 EF 를 \bullet 로 표시. 직선 MN 과 점 A 에서 $\Gamma\Delta$ 에 평행한 직선 PR 의 교점 Q ($Q \neq A$)에서 \circ 로 표시. 직선 AQ 와 EF 의 교점 R 를 \times 로 표시. $PR \perp OH$ 임을 보라.



3rd JoyMO 2021

Joyful Mathematical Olympiad

2021년 11월 8일 ; 제\ 시간 2시간; 8문당 7점

7. $2^n - 1$ 이하의 수 중 n 개의 n 의 배수인 n 의 정수 $n \in \mathbb{P}$ 이라.

8. 다음 식을 만족하는 n 의 정수 $n \in \mathbb{P}$ 이라.

$$\tau(n) + \phi(n) = n + 1$$

(단, n 의 정수 $n \in \mathbb{P}$ 이 $\tau(n)$ 은 n 의 약수의 개수이고, $\phi(n)$ 은 n 이하의 n 와 서로소인 정수의 개수이다.)

9. 다음 조건을 만족하는 함수 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 이 $f(m) = m$ 인 m 의 정수 $m \in \mathbb{P}$ 이라. (단, \mathbb{N} 은 n 의 정수 전체이다.)

$$\forall x, y \in \mathbb{N} \quad \gcd(f(f(x)), f(x+y)) = \gcd(x, y)$$



3rd JoyMO 2021

Joyful Mathematical Olympiad

2021년 11월 8일 ; 제\ 시간 2시간; 8m당 7점

10. 삼각형 ABC 의 $\angle C$ 의 이등분선이 AB 를 M 에서 만난다. P 는 BC 위의 점이고, Q 는 AC 위의 점이다. PQ 가 CM 와 평행할 때, 세 선분 AP, CM, PQ 의 길이의 곱은 CM^3 과 같다.

11. x, y, z 는 실수이고 $a + b + c = x + y + z = 1$ 일 때,

$$(a - x^2)(b - y^2)(c - z^2)$$

의 최댓값을 구하시오.

12. 다음 조건을 만족시키는 n 의 개수를 구하시오.

모든 정수 k 에 대하여, $a^3 + a - k$ 가 n 의 배수일 때, A 는 정수 a 가 존재한다.



3rd JoyMO 2021

Joyful Mathematical Olympiad

2021년 11월 8일 ; 제\ 시간 2시간; 8m당 7점

13. 2021...X Y생과 2021...X 선생님 $t \in \mathbb{N}$, $X \setminus X$ 리 I 는다. P Y생 @ 다 L P 조건 D P I 족시 \neg 때 서 $\setminus E$ 수 $| \setminus$ 다.

P Y생 사 $t \in$ 사람 @ $2 \dots t \setminus X \setminus I D^{\wedge}$ 다.

P Y생 사 $t \in$ Y생 @ $1 \dots t \setminus X \setminus I D^{\wedge}$ 다.

\setminus 사람 $t \in$ 수 $|$ i 리 번 \setminus 수는 $\wedge < \sim$, 같 @ P 사람 @ E 수 $| \setminus$ 번 $i \setminus$ 때, E 수 X 횟수가 2021 t 상, D 보 i 라.

14. P Δ 시 $A @ B \in$ 는 각각 i 리 정거 $\forall t \in$ 고, $A X \setminus$ 정거 \forall 과 $B X \setminus$ 정거 $\forall @ \hat{I} D | \setminus$ 버스회사 X 버스가 \setminus 방 $\forall < \setminus$ 다닌다. \setminus XX 정거 \forall 과 \emptyset 정거 $\forall \in$ 다니는, XX P 버스회사 $|$ $X D$ 때 \setminus 버스회사 $|$ 통 $t \in$ 다 $x \Delta$ 시 $\setminus t \in$ 수 \wedge 는 버스 X 수 @ 다 x 버스회사 $|$ 통 $t \in$ 다 $x \Delta$ 시 $\setminus t \in$ 수 \wedge 는 버스 X 수가 (t 가 1 $t X$ 가 Δ) 회사 Δt 버스 $| \setminus \% \setminus$ 수 $\wedge L D$ 보 i 라.

15. 2021개 X 공 m 과 k 개 X m 공기가 \wedge 다. 각 m 공기는 P 공 $m D \setminus$ 방 $\forall < \setminus$ 다닐 수 \wedge 고, P 공 m 사 $t \in$ 는 $\hat{I} D | \setminus$ m 공기 i 다닌다고 \setminus 다. 현 \neg 는, XX P 공 $m D$ $| D \Delta$ m 공기 $|$ 통 $t \in$ $t \in$ 수 \wedge 다. i 기서, XX P 공 m 사 $t \in$ m 공기가 다니 ΔJ 는 공 $m \Delta \in$ $X i$ t 공 $m \Delta D$ 폐쇄 $X \$$ 고 \setminus 다. 폐쇄 \setminus 공 $m \in$ 는 m 공기가 다닐 수 Δ 다. t 때 k 개 X m 공기가 \setminus 편 공 $m D$ 다니 T 라 $\Delta \setminus$ 개 X 공 $m D$ 폐쇄 $X i$ m 공기 $\setminus t \in$ 수 Δ 는 P 공 $m t$ 생기게 \setminus 수 $\wedge \Delta$ X 는 $k X \setminus$ 값 $D | X i$ 라.