3^{rd} AoMO

Art of Mathematical Olympiad

2021년 11월 7일 (오); \시간 2시간; 8 m ù 7

1. ¼각형 ABC의 외 원은 ω이고, D″ À BC 위의 이ä. D| À˜″ Á선이 À AB, Á선 AC와 각각 X, YÐ서 Ìœä. ¼각형 BXD의 외 원과 원 ω P 을 $Z(\neq B)$| X고, Á선 ZD, ZY가 원 ω와 Ì˜″ 을 각각 V, W|고 ` 때, $\overline{AB} = \overline{VW}$임을 ô ì|.

2. ä음 p건을 Ìq X″ h수 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 ¨두 l X ì|. (è, $\mathbb{R}$은 실수 ´ Ñ i)

¨든 실수 x, yÐ 대X ì $f(xf(x-y)) + yf(x) = x + y + f(x^2)$

3. ʻ의 수 $n \geq 4$Ð 대X ì n개의 수 $x_1, x_2, \ldots, x_n$가 ü´ Lä. 1이Á n이X의 ¨든 수 i Ð 대X ì

$$k_i = \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{x_i}, \quad (x_0 = x_n,\ x_1 = x_{n+1})$$

\ 의X자. ¨든 k_i들이 수일 때, ä음 부등식이 성½ h을 ô ì|.

$$2n \leq k_1 + k_2 + \cdots + k_n < 3n$$

3^{rd} AoMO

Art of Mathematical Olympiad

2021년 11월 7일 (오후); \시간 2시간; 8 m ù 7

4. ' 의 실수 a, b, c, d, e, f Ð 대X ì, ä음 부등식이 성½ h을 ô ì |.

$$\sqrt[3]{\frac{abc}{a+b+d}} + \sqrt[3]{\frac{def}{c+e+f}} < \sqrt[3]{(a+b+d)(c+e+f)}$$

5. ' 의 수 n과 소수 pÐ 대X ì ä음 식을 Ì q X ″ 순서 (n,p)| ¨두 l X ì |.

$$1 + 2 + \cdots + n = 3 \cdot \left(1^2 + 2^2 + \cdots + p^2\right)$$

6. ¼각형 ABC의 외 원을 Ω | 고 X자. B | À ˜고 À AC와 É ‰ \ Á선, C | À ˜고 À AB와 É ‰ \ Á선이 원 Ω와 Ì ˜ ″ 을 각각 D, E | 고 X자. Á선 AB와 CD의 P 을 P, Á선 AC와 BE의 P 을 Q | 고 X자. 선분 DE의   을 M | X고, Á선 AM이 원 Ω, Á선 PQ와 Ì ˜ ″ 을 각각 $Y(\neq A)$, J | X자. ¼각형 BCN의 외 원이 Á선 PQ와 $Z(\neq N)$Ð서 Ì ˜고 두 Á선 BQ와 CP의 P 을 X | ` 때, 세 X, Y, Z가 \ Á선 위Ð 있음을 ô ì |.