



3rd AoMO

Art of Mathematical Olympiad

2021년 11월 7일 (오전); 제한시간 2시간; 문항당 7점

1. 삼각형 ABC 의 외접원은 ω 이고, 점 D 는 변 BC 위의 점이다. 점 D 를 지나는 직선이 변 AB , 반직선 AC 와 각각 점 X, Y 에서 만난다. 삼각형 BXD 의 외접원과 원 ω 교점을 $Z (\neq B)$ 라 하고, 직선 ZD, ZY 가 원 ω 와 만나는 점을 각각 V, W 라고 할 때, $\overline{AB} = \overline{VW}$ 임을 보여라.

2. 다음 조건을 만족하는 함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 을 모두 구하여라. (단, \mathbb{R} 은 실수 전체 집합)

$$\text{모든 실수 } x, y \text{에 대하여 } f(xf(x-y)) + yf(x) = x + y + f(x^2)$$

3. 양의 정수 $n \geq 4$ 에 대하여 n 개의 정수 x_1, x_2, \dots, x_n 가 주어졌다. 1이상 n 이하의 모든 정수 i 에 대하여

$$k_i = \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{x_i}, \quad (x_0 = x_n, x_{n+1} = x_1)$$

로 정의하자. 모든 k_i 들이 정수일 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$2n \leq k_1 + k_2 + \dots + k_n < 3n$$



3rd AoMO

Art of Mathematical Olympiad

2021년 11월 7일 (오후); 제한시간 2시간; 문항당 7점

4. 양의 실수 a, b, c, d, e, f 에 대하여, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\sqrt[3]{\frac{abc}{a+b+d}} + \sqrt[3]{\frac{def}{c+e+f}} < \sqrt[3]{(a+b+d)(c+e+f)}$$

5. 양의 정수 n 과 소수 p 에 대하여 다음 식을 만족하는 순서쌍 (n, p) 를 모두 구하여라.

$$1 + 2 + \cdots + n = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + p^2)$$

6. 삼각형 ABC 의 외접원을 Ω 라고 하자. 점 B 를 지나고 변 AC 와 평행한 직선, 점 C 를 지나고 변 AB 와 평행한 직선이 원 Ω 와 만나는 점을 각각 D, E 라고 하자. 직선 AB 와 CD 의 교점을 P , 직선 AC 와 BE 의 교점을 Q 라고 하자. 선분 DE 의 중점을 M 라 하고, 직선 AM 이 원 Ω , 직선 PQ 와 만나는 점을 각각 $Y (\neq A)$, J 라 하자. 삼각형 BCN 의 외접원이 직선 PQ 와 점 $Z (\neq N)$ 에서 만나고 두 직선 BQ 와 CP 의 교점을 X 라 할 때, 세 점 X, Y, Z 가 한 직선 위에 있음을 보여라.