

제 1회 AoMO

OLYMPIADIUM

October 10, 2021

Contents

0	Problems	2
1	AoMO 2021/1	3
2	AoMO 2021/2	4
3	AoMO 2021/3	5
4	AoMO 2021/4	6
5	AoMO 2021/5	7
6	AoMO 2021/6	8

§0 Problems

1. 양의 정수 m 에 대하여 $m^2 - 2$ 의 소인수 p 가 다음 조건을 만족한다.

$$pa - m + 2 \text{가 완전제곱수가 되는 양의 정수 } a \text{가 존재한다.}$$

이때, $pb + m + 2$ 가 완전제곱수가 되는 양의 정수 b 가 존재함을 보여라.

2. 삼각형 ABC 에서 각 A 의 이등분선은 변 BC 와 점 D 에서 만나고, 변 BC 의 중점은 M 이다. B 에서 마주보는 변에 내린 수선의 발을 E 라고 하고, 삼각형 CDE 의 외접원과 선분 AD 의 교점을 X 라 할 때, $\angle BAC + \angle XME = 90^\circ$ 임을 보여라.

3. 함수 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 가 다음 조건을 만족한다.

$$\text{임의의 양의 실수 } x, y, z \text{에 대하여 } \frac{f(x)f(y)f(z)}{f(z + xyf(z))} \text{가 일정한 값을 가진다.}$$

이때, f 가 상수함수임을 보여라. (단, \mathbb{R}^+ 는 양의 실수 집합이다.)

4. 음이 아닌 실수 a, b, c, d 가 $a + 2b + 3c + 4d = 5$ 를 만족할 때,

$$a^2(2b^2 + 3c^2 + 4d^2)$$

의 최댓값을 구하여라.

5. 삼각형 ABC 에서 D, E, F 는 각각 변 BC, CA, AB 위의 점으로 $\overline{BF} = \overline{CE}$ 와 $\angle BAD = \angle CAD$ 를 만족한다. 직선 BE 와 CF 의 교점을 P 라고 하고, 삼각형 BPF, CPE 의 내심을 각각 I, J 라고 하자. 직선 IJ 와 AD 가 점 Q 에서 만난다고 할 때, $\overline{IP} = \overline{JQ}$ 임을 보여라.

6. $a + b = n - 1$ 을 만족하는 양의 정수 a, b, n 이 주어졌다. 대한수학중학교의 각 학생은 친구가 많아야 n 명이라고 한다. 이때, 학급 A 에 속한 각 학생은 A 반에 친구가 많아야 a 명이고, 학급 B 에 속한 각 학생은 B 반에 친구가 많아야 b 명이 되도록 전교생을 두 학급 A, B 에 배정할 수 있음을 보여라.

§1 AoMO 2021/1**Problem 1 (AoMO 2021/1)**

양의 정수 m 에 대하여 $m^2 - 2$ 의 소인수 p 가 다음 조건을 만족한다.

$pa - m + 2$ 가 완전제곱수가 되는 양의 정수 a 가 존재한다.

이때, $pb + m + 2$ 가 완전제곱수가 되는 양의 정수 b 가 존재함을 보여라.

§2 AoMO 2021/2**Problem 2** (AoMO 2021/2)

삼각형 ABC 에서 각 A 의 이등분선은 변 BC 와 점 D 에서 만나고, 변 BC 의 중점은 M 이다. B 에서 마주보는 변에 내린 수선의 발을 E 라고 하고, 삼각형 CDE 의 외접원과 선분 AD 의 교점을 X 라 할 때, $\angle BAC + \angle XME = 90^\circ$ 임을 보여라.

§3 AoMO 2021/3**Problem 3 (AoMO 2021/3)**

함수 $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 가 다음 조건을 만족한다.

임의의 양의 실수 x, y, z 에 대하여 $\frac{f(x)f(y)f(z)}{f(z + xyf(z))}$ 가 일정한 값을 가진다.

이때, f 가 상수함수임을 보여라. (단, \mathbb{R}^+ 는 양의 실수 집합이다.)

§4 AoMO 2021/4**Problem 4** (AoMO 2021/4)

음이 아닌 실수 a, b, c, d 가 $a + 2b + 3c + 4d = 5$ 를 만족할 때,

$$a^2(2b^2 + 3c^2 + 4d^2)$$

의 최댓값을 구하여라.

§5 AoMO 2021/5**Problem 5 (AoMO 2021/5)**

삼각형 ABC 에서 D, E, F 는 각각 변 BC, CA, AB 위의 점으로 $\overline{BF} = \overline{CE}$ 와 $\angle BAD = \angle CAD$ 를 만족한다. 직선 BE 와 CF 의 교점을 P 라고 하고, 삼각형 BPF, CPE 의 내심을 각각 I, J 라고 하자. 직선 IJ 와 AD 가 점 Q 에서 만난다고 할 때, $\overline{IP} = \overline{JQ}$ 임을 보여라.

§6 AoMO 2021/6**Problem 6 (AoMO 2021/6)**

$a + b = n - 1$ 을 만족하는 양의 정수 a, b, n 이 주어졌다. 대한수학중학교의 각 학생은 친구가 많아야 n 명이라고 한다. 이때, 학급 A 에 속한 각 학생은 A 반에 친구가 많아야 a 명이고, 학급 B 에 속한 각 학생은 B 반에 친구가 많아야 b 명이 되도록 전교생을 두 학급 A, B 에 배정할 수 있음을 보여라.