



5th JoyMO 2021

Joyful Mathematical Olympiad

2021년 11월 8일; 제한시간 2시간; 문항당 7점

1. 다음 식

$$\frac{n^2 + 1}{[\sqrt{n}]^2 + 2}$$

이 정수가 되도록 하는 양의 정수 n 을 모두 구하여라.

2. 두 원 ω_1 과 ω_2 가 서로 다른 두 점 P, K 에서 만난다. 직선 XY 는 원 ω_1, ω_2 와 각각 점 X, Y 에서 접한다. 직선 YP 와 원 ω_1 의 교점을 B , 직선 XP 와 원 ω_2 의 교점을 C 라고 하자. 직선 BX 와 CY 가 만나는 점을 A 라고 하고, 삼각형 ABC 의 외접원과 삼각형 AXY 의 외접원의 교점을 $Q (\neq A)$ 라고 할 때, $\angle QXA = \angle QKP$ 임을 보여라.

3. 다음 조건을 만족하는 함수 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 를 모두 구하여라.

$$\text{모든 양의 실수 } x, y \text{에 대하여 } f\left(\frac{f(y)}{f(x)} + 1\right) = f\left(x + \frac{y}{x} + 1\right) - f(x)$$



3rd JoyMO 2021

Joyful Mathematical Olympiad

2021년 11월 8일; 제한시간 2시간; 문항당 7점

4. 다음 식을 만족하는 음이 아닌 정수 a, b, c 와 양의 정수 n 의 순서쌍을 모두 구하여라.

$$2^a + 3^b + 5^c = n!$$

5. 다음 조건을 만족하는 함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 를 모두 구하여라.

$$\text{모든 실수 } x, y \text{에 대하여 } f(xf(y) + 2y) = f(xy) + xf(y) + f(f(y))$$

6. 이등변삼각형이 아닌 예각삼각형 ABC 의 외접원을 Γ , 외심과 수심을 각각 O, H 라 하자. 변 AB 와 AC 의 중점을 각각 M, N 이라 하고, 점 B, C 에서 마주보는 변에 내린 수선의 발을 각각 E, F 라 하자. 직선 MN 과 점 A 에서 원 Γ 에 접하는 직선은 점 P 에서 만나고, 삼각형 AEF 의 외접원과 원 Γ 는 점 $Q (\neq A)$ 에서 만난다. 직선 AQ 와 EF 의 교점이 R 일 때, $PR \perp OH$ 임을 보여라.



3rd JoyMO 2021

Joyful Mathematical Olympiad

2021년 11월 8일; 제한시간 2시간; 문항당 7점

7. $2^n - 1$ 의 약수의 개수가 n 개인 양의 정수 n 을 모두 구하여라.

8. 다음 식을 만족하는 양의 정수 n 을 모두 구하여라.

$$\tau(n) + \phi(n) = n + 1$$

(단, 양의 정수 n 에 대하여 $\tau(n)$ 은 n 의 양의 약수의 개수를 의미하고, $\phi(n)$ 은 n 이하의 양의 정수 중 n 과 서로소인 정수의 개수를 의미한다.)

9. 다음 조건을 만족하는 모든 함수 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 에 대하여 $f(m) = m$ 인 양의 정수 m 을 모두 구하여라. (단, \mathbb{N} 은 양의 정수 전체 집합)

$$\text{모든 양의 정수 } x, y \text{에 대하여 } \gcd(f(f(x)), f(x+y)) = \gcd(x, y)$$



3rd JoyMO 2021

Joyful Mathematical Olympiad

2021년 11월 8일; 제한시간 2시간; 문항당 7점

10. 삼각형 ABC 의 외접원은 Ω 이고, 점 X 는 $\overline{XB} = \overline{XC}$ 를 만족하는 직선 AB 위의 점이다. 각 A 의 이등분선이 변 BC , 원 Ω 와 만나는 점을 각각 D, M 이라 하자. 점 P 는 직선 BC 위의 점으로 직선 AP 가 원 Ω 에 접하고, 점 Q 는 직선 DX 위의 점으로 직선 CQ 가 원 Ω 에 접한다. 이때, 세 직선 AB, CM, PQ 가 한 점에서 만남을 보여라.

11. 음이 아닌 실수 a, b, c, x, y, z 가 $a + b + c = x + y + z = 1$ 을 만족할 때,

$$(a - x^2)(b - y^2)(c - z^2)$$

의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

12. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 을 모두 구하여라.

임의의 정수 k 에 대하여, $a^3 + a - k$ 가 n 으로 나누어 떨어지는 정수 a 가 존재한다.



3rd JoyMO 2021

Joyful Mathematical Olympiad

2021년 11월 8일; 제한시간 2시간; 문항당 7점

13. 2021명의 학생과 2021명의 선생님이 원탁에 임의로 둘러 앉는다. 두 학생은 다음 두 조건을 모두 만족시킬 때 서로 악수를 한다.

- 두 학생 사이에 사람은 2명 이하로 앉아있다.
- 두 학생 사이에 학생은 1명 이하로 앉아있다.

한 사람이 악수를 여러 번 할 수는 있으나, 같은 두 사람은 악수를 한 번만 할 때, 악수의 총 횟수가 2021 이상임을 보여라.

14. 두 도시 A 와 B 에는 각각 여러 정거장이 있고, A 의 한 정거장과 B 의 한 정거장은 많아야 한 버스회사의 버스가 양방향으로 다닌다. 임의의 정거장과 그 정거장에 다니는 임의의 두 버스회사를 잡았을 때 한 버스회사를 통해 다른 도시로 이동할 수 있는 버스의 수와 다른 버스회사를 통해 다른 도시로 이동할 수 있는 버스의 수가 차이가 1 이하가 되도록 회사들이 버스를 운행할 수 있음을 보여라.

15. 2021개의 공항과 k 개의 항공기가 있다. 각 항공기는 두 공항을 양방향으로 다닐 수 있고, 두 공항 사이에는 많아야 한 항공기만 다닌다고 한다. 현재는 임의의 두 공항을 잡아도 항공기를 통해 이동할 수 있다. 여기서 임의의 두 공항 사이에 항공기가 다니지 않는 공항들에 대하여 이 공항들을 폐쇄하려고 한다. 폐쇄된 공항에는 항공기가 다닐 수 없다. 이때 k 개의 항공기가 어떤 공항을 다니더라도 몇 개의 공항을 폐쇄하여 항공기로 이동할 수 없는 두 공항이 생기게 할 수 있도록 하는 k 의 최댓값을 구하여라.