제 36회 중등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2021년 10월 10일; 제한시간 2시간; 문항당 7점

1. 양의 정수 m에 대하여 m^2-2의 소인수 p가 다음 조건을 만족한다.

$pa-m+2$가 완전제곱수가 되는 양의 정수 a가 존재한다.

이때, $pb+m+2$가 완전제곱수가 되는 양의 정수 b가 존재함을 보여라.

2. 삼각형 ABC의 외접원 위에 점 P를 잡고 직선 AP와 BC의 교점을 D라 하자. $\overline{BD}=\overline{CT}$를 만족하는 점 T를 변 BC 위에 잡고 직선 AT와 삼각형 PDT의 외접원의 교점을 $G(\neq T)$라 하자. 삼각형 APG의 외접원이 직선 AB, AC와 각각 점 E, F에서 만난다. 직선 EF와 GP의 교점을 Q라 할 때, AQ와 BC가 평행함을 보여라.

3. 함수 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$가 다음 조건을 만족한다.

임의의 양의 실수 x,y,z에 대하여 $\dfrac{f(x)f(y)f(z)}{f(z+xyf(z))}$가 일정한 값을 가진다.

이때, f가 상수함수임을 보여라. (단, $\mathbb{R}^+$는 양의 실수 집합이다.)

제 36회 중등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2021년 10월 10일; 제한시간 2시간; 문항당 7점

4. 음이 아닌 실수 a, b, c, d가 $a + 2b + 3c + 4d = 5$를 만족할 때,

$$a^2(2b^2 + 3c^2 + 4d^2)$$

의 최댓값을 구하여라.

5. 삼각형 ABC에서 D, E, F는 각각 변 BC, CA, AB 위의 점으로 $\overline{BF} = \overline{CE}$와 $\angle BAD = \angle CAD$를 만족한다. 직선 BE와 CF의 교점을 P라고 하고, 삼각형 BPF, CPE의 내심을 각각 I, J라고 하자. 직선 IJ와 AD가 점 Q에서 만난다고 할 때, $\overline{IP} = \overline{JQ}$임을 보여라.

6. $a + b = n - 1$을 만족하는 양의 정수 a, b, n이 주어졌다. 대한수학중학교의 각 학생은 친구가 많아야 n명이라고 한다. 이때, 학급 A에 속한 각 학생은 A반에 친구가 많아야 a명이고, 학급 B에 속한 각 학생은 B반에 친구가 많아야 b명이 되도록 전교생을 두 학급 A, B에 배정할 수 있음을 보여라.