Математический Анализ
3 семестр

Данил Заблоцкий

25 октября 2023 г.

Оглавление

Глава 1

Название

1.1 Название

Следствие. D - область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ дифференцируема на D и $\forall x \in D$ $df(x) = 0$, то есть $\forall i$ $\frac{\delta f}{\delta x_i} = 0$. Тогда $f - const$.

Доказательство. $x_0 \in D$, $B(x_0, \rho) \subset D$, $\forall x \in B(x_0, \rho)$, $[x_0, x] \subset B(x_0, \rho) \subset D$. $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$. $f(x) - f(x_0) = 0 \implies f(x) = f(x_0)$.

Построим путь из точки x_0 к некоторой точке $x \in D$, $\gamma : [0; 1] \to D$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x$. По определению пути, γ - непрерывна. Тогда $\exists \delta :$

$$\forall 0 \leqslant t \leqslant \delta \implies \forall x \in B(x_0, \rho), \quad \gamma(t) \in B(x_0, \rho) \implies f(\gamma(t)) = f(x_0),\ t \in [0, \delta]$$

Пусть $\Delta = \sup \delta \implies f(\gamma(\Delta)) = f(x_0)$. Покажем, что $\Delta = 1$. Пусть $\Delta < 1(0 + 1)$. Построим шар $B(\gamma(\Delta), \rho_\Delta) \subset D$. Тогда $\exists \epsilon > 0 :$

$$\Delta - \epsilon < t < \Delta + \epsilon$$

Но тогда $f(\gamma(\Delta + \epsilon)) = f(x_0)$ (так как точка $\gamma(\Delta + \epsilon) \in B(\gamma(\Delta), \rho_\Delta)$). Это противоречит с тем, что $\Delta = \sup \delta \implies \Delta = 1 \implies \gamma(1) = x$, $f(x) = f(x_0) \implies$ так как $x \in D$ - произвольная точка, то имеем, что $\forall x \in D :$

$$f(x) = f(x_0) \implies f(x) - const$$

□

Теорема 1.1.1 (Достаточное условие дифференцируемости функции)**.** Пусть D - область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, f имеет непрерывную часть произведения в каждой окрестности точки $x \in D$.

Тогда f - дифференцируема в точке x.

Доказательство. Без ограничения общности, что окрестность точки $x_0 \in D$ является шаром $B(x_0, \rho) \subset D$.

Пусть $h : x_0 + h \in B(x_0, \rho)$. Здесь $x_0 = (x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n)$, $\quad x_0 + h = (x^1{+}h^1,\ x^2{+}h^2,\ \dots,\ x^n{+}h^n)$. Заметим, что точки $x_1 = (x^1,\ x^2{+}h^2,\ \dots,\ x^n + h^n)$, $x^2 = (x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n + h^n)$, $\dots$, $x_{n-1} = (x^1,\ x^2,\ \dots, x^{n-1}\ x^n + h^n) \in B(x_0, \rho)$.

$f(x_0{+}h){-}f(x_0) = f(x_0{+}h){-}f(x_1){+}f(x_1){-}f(x_2){+}f(x_2){-}\dots{-}f(x_{n-1}){+}f(x_{n-1}) - f(x_0) = f(x^1 + h^1,\ \dots,\ x^n + h^n) - f(x^1,\ x^2 + h^2,\ \dots,\ x^n + h^n) + f(x^1,\ x^2 + h^2,\ \dots,\ x^n + h^n) - f(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n + h^n) + f(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n + h^n) - \dots - f(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^{n-1},\ x^n) + f(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^{n-1},\ x^n + h^n) - f(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n) = |Lagranj\ theorem\ for\ 1\ variable| = \frac{\delta f}{\delta x_1}(x^1 + \theta^1 h^1,\ x^2 + h^2,\ \dots,\ x^n{+}h^n){\cdot}h^1{+}\frac{\delta f}{\delta x^2}(x^1,\ x^2{+}\theta^2 h^2,\ \dots,\ x^n{+}h^n){\cdot}h^2{+}\dots{+}\frac{\delta f}{\delta x^n}(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n + \theta^n h^n) \cdot h^n$.

Используя непрерывность частных производных, запишем: $f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{\delta f}{\delta x_1}(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n){\cdot}h^1{+}\alpha^1(h^1){+}\dots{+}\frac{\delta f}{\delta x_n}(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n){\cdot}h^2{+}\alpha^n(h^n)$, где $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ стремятся к нулю при $h \to 0$.

Это означает, что $f(x_0 + h) - f(x_0) = L(x_0) \cdot h + \underset{h\to 0}{o}(h)$, где $L(x_0) = \frac{\delta f}{\delta x_1}(x_0)h^1 + \dots + \frac{\delta f}{\delta x^n}(x_0) \cdot h^n = df(x_0) \implies$ по определению $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. $\square$

1.2 Производные высших порядков

Определение 1.2.1 (Вторая производная по двум переменным)**.** Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, D - область в $\mathbb{R}^n$. Производная по переменной x^i от производной по переменной x^j называется **второй производной** функции f по переменным x^i, x^j и обозначается:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}(x), \quad f''_{x^i x^j}(x)$$

Теорема 1.2.1 (О смешанных производных)**.** Пусть D - область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x \in D$, f имеет в D непрерывно смешанные производные (2-го порядка).

Тогда эти производные не зависят от порядка дифференцирования.

Доказательство. Пусть $\frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta x^j \delta x^i}$ - непрерывны в точке $x \in D$. Так как остальные переменные фиксированы, то можно считать, что f зависит только от двух переменных.

Тогда $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$ - непрерывны в точке $x_0 = (x, y) \in D$.

Покажем, что $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$.

Рассмотрим функции $\phi(t) = f(x{+}t\cdot\Delta x,\ y{+}\Delta y){-}f(x{+}t\cdot\Delta x,\ y)$, $\psi(t) = f(x + \Delta x,\ y + t\cdot\Delta y) - f(x,\ y + t\cdot\Delta y)$, $t \in [0;1]$.

Имеем, что $\phi(1) - \phi(0) = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) = f(x + \Delta x,\ y) - f(x,\ y + \Delta y) + f(x,\ y)$.

$\psi(1) - \psi(0) = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y + \Delta y) - f(x + \Delta x,\ y) + f(x,\ y)$.

Тогда $\phi(1) - \phi(0) = \psi(1) - \psi(0)$.

Тут нужно дописать, фотки в галерее $\square$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\phi(t) = f(x+th)$. Применим формулу Тейлора к $\phi(t)$:

$$\phi(1) = \phi(0) + \frac{1}{1!}\cdot\phi'(0)\cdot(1-0) + \frac{1}{2!}\cdot\phi''(0)\cdot(1-0)^2 + \frac{1}{3!}\cdot\phi'''(0)\cdot(1-0)^3 + \dots + \frac{1}{k!}\cdot\phi^{(k)}\cdot(1-0)^k$$

$\phi(1) = f(x+h); \quad \phi(0) = f(x);$

$$\phi'(0) = f'(x+th)\cdot(x+th)'_k\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} \frac{\delta f(x+th)}{\delta x^1} & \frac{\delta f(x+th)}{\delta x^2} & \dots & \frac{\delta f(x+th)}{\delta x^n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \\ \vdots \\ h^n \end{pmatrix} =$$

$= (\frac{\delta f(x+th)}{\delta x^1}\cdot h' + \frac{\delta f(x+th)}{\delta x^2}\cdot h^2 + \dots + \frac{\delta f}{\delta x^n}(x+th)\cdot h^n)\Big|_{t=0} = \frac{\delta f(x)}{\delta x^1}\cdot h^1 + \frac{\delta f}{\delta x^2}(x)\cdot h^2 + \dots + \frac{\delta f}{\delta x^n}(x)\cdot h^n = (\frac{\delta}{\delta x^1}\cdot h^1 + \dots + \frac{\delta}{\delta x^n}\cdot h^n)f(x).$

$\phi''(0) = (\sum_{i=1}^n \frac{\delta f(x+th)}{\delta x^i}h^i)'_t\Big|_{t=0} = (\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\delta^2 f(x+th)}{\delta x^i\,\delta x^j}h^ih^j)\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\delta^2 f(x)}{\delta x^i\,\delta x^j}h^ih^j = (\frac{\delta}{\delta x^1} + \dots + \frac{\delta}{\delta x^n}h^n)^2 f(x)$

И так далее. Подстановки получившиеся выражаем в $(*)$ и получим искомое. $\square$

1.3 Экстремумы функций многих переменных

Определение 1.3.1. Пусть X - метрическое пространство $f : X \to \mathbb{R}$. Точка $x_0 \in X$ называется **точкой локального максимума (минимума)**, если:

$$\exists u(x_0) \subset X : \ \forall x \in u(x_0) \quad f(x) \leqslant f(x_0) \ (f(x) \geqslant f(x_0))$$

Точки локального максимума и минимума называются **точками локального экстремума**.

Теорема 1.3.1 (Необходимое условие локального экстремума)**.** Пусть D - область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ - точка локального экстремума, тогда в точке x_0

$$\forall i = \overline{1,n} \quad \frac{\delta f(x_0)}{\delta x^i} = 0$$

Доказательство. Фиксируем все переменные за исключением x^i, тогда можно рассмотреть $f(x^1, \dots, x^i, \dots x^n)$ как функцию одной переменной, для которой x_0 - точка локального экстремума $\implies \frac{\delta f}{\delta x^i}(x_0) = 0$.

i - произвольная $\implies \forall i$ - выполняется. $\square$

Определение 1.3.2. Пусть D - область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^k$ - дифференцируемо в точке $x_0 \in D$, x_0 называется **критической точкой функции** $f(x)$, если

$$rank\Im f(x_0) < min(n,k),$$

где $\Im f(x_0)$ - матрица Якоби функции $f(x_0)$.

Пример 1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \cdot y \\ y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{I} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\delta u}{\delta x} & \frac{\delta u}{\delta y} & \frac{\delta u}{\delta z} \\ \frac{\delta v}{\delta x} & \frac{\delta v}{\delta y} & \frac{\delta v}{\delta z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \quad -(x_0) \\ z = t \end{cases}$$

(критические точки)

$n = 3,\ k = 2$

Множество точек прямой, получаемой пересечением плоскостей $x = 0$ и $y = 0$ - множество критических точек функции $f(x,y,z)$.

Определение 1.3.3. Пусть D - область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^n$, f имеет непрерывные вторые производные в точке $x_0 \in D$. На касательном пространстве $T\mathbb{R}^n_{(x_0)}$ определим квадратичную форму

$$Q(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}(x_0) h^i \cdot h^j$$

$$Q : T\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

02.10

Пример 2. $S = \mathbb{R}^n$ - поверхность в $\mathbb{R}^n$

$$t^i(x^i) = \frac{\pi}{2} \cdot \arctan x^i$$

$$\mathfrak{I} = \begin{pmatrix} \frac{\delta t^1}{\delta x^1} & \frac{\delta t^1}{\delta x^2} & \cdots & \frac{\delta t^1}{\delta x^n} \\ \frac{\delta t^2}{\delta x^1} & \frac{\delta t^2}{\delta x^2} & \cdots & \frac{\delta t^2}{\delta x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta t^n}{\delta x^1} & \frac{\delta t^n}{\delta x^2} & \cdots & \frac{\delta t^n}{\delta x^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x^1)^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x^2)^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x^n)^2} \end{pmatrix}$$

Утверждение 1.3.1. Пусть задана система уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{cases},$$

здесь $F^i(x) \in C^{(1)}$.

Кроме того,

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta x^1} & \cdots & \frac{\delta F^1}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^1} & \cdots & \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^n} \end{vmatrix}(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Тогда решение этой системы является k-мерной поверхностью в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. По теореме о неявной функции, система

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases}$$

эквивалентна системе

$$\begin{cases} x^{k+1} = f^1(x^1, \dots, x^k) \\ x^{k+2} = f^2(x^1, \dots, x^k) \\ \vdots \\ x^{n-k} = f^{n-k}(x^1, \dots, x^k) \end{cases}$$

Получим:

$t^1 = x^1$
$t^2 = x^2$
$\vdots$
$t^k = x^k$
$t^{k+1} = x^{k+1} - f^1(x^1, \dots, x^k) = 0$
$t^{k+2} = x^{k+2} - f^2(x^1, \dots, x^k) = 0$
$\vdots$
$t^n = x^{n-k} - f^{n-k}(x^1, \dots, x^k) = 0$

Таким образом построенное отображение является диффиоморфизмом $\Longrightarrow$ решение системы

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases} \quad \text{– } k\text{-мерная поверхность в } \mathbb{R}^n.$$

$\square$

Определение 1.3.4 (Локальная карта или параметризация поверхности, касательное пространство)**.** Пусть S – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$ и $\phi : U(x_0) \to I^n$ - диффиоморфизм:

$$\phi(U(x_0) \cap S) = I^k$$

Ограничение ϕ^{-1} на I^k будем называть **локальной картой** или **параметризацией поверхности** S в окрестности точки x_0.

Касательным пространством (или плоскостью) к S в точке x_0 называется k-мерная плоскость, заданная уравнением

$$x = x_0 + x'(0) \cdot t, \quad x_0 = (x_0^1, x_0^1, \dots, x_0^n)$$

$$x(t) = \begin{cases} x^1(t^1, \ldots, t^k) \\ x^2(t^1, \ldots, t^k) \\ \vdots \\ x^n(t^1, \ldots, t^k) \end{cases}, \quad x'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\delta x^1}{\delta t^1} & \cdots & \frac{\delta x^1}{\delta t^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta x^n}{\delta t^1} & \cdots & \frac{\delta x^n}{\delta t^k} \end{pmatrix}(t)$$

Таким образом касательное пространство задается системой (из $x = x_0 + x'(0) \cdot t$)

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + \frac{\delta x^1}{\delta t^1}(0)t^1 + \ldots + \frac{\delta x^1}{t^k}(0)t^k \\ x^2 = x_0^2 + \frac{\delta x^2}{\delta t^1}(0)t^1 + \ldots + \frac{\delta x^2}{t^k}(0)t^k \\ \vdots \\ x^n = x_0^n + \frac{\delta x^n}{\delta t^1}(0)t^1 + \ldots + \frac{\delta x^n}{t^k}(0)t^k \end{cases}$$

Пример 3. 1. Пусть $\gamma = \gamma(t)$ - гладкая кривая в $\mathbb{R}^3$, $\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$.

Обозначим $x_0 = x(0),\ y_0 = y(0),\ z_0 = z(0)$.

$x = x_0 + x'(0) \cdot t :\ x = x_0 + x'(0) \cdot t$ - касательное пространство к кривой γ в точке x_0

$$\begin{cases} x = x_0 + x'(0) \cdot t \\ y = y_0 + y'(0) \cdot t \\ z = z_0 + z'(0) \cdot t \end{cases}, \text{ иначе } \begin{cases} x - x_0 = x'(0) \cdot t \\ y - y_0 = y'(0) \cdot t \\ z - z_0 = z'(0) \cdot t \end{cases}$$

$$\frac{x - x_0}{x'(0)} = \frac{y - y_0}{y'(0)} = \frac{z - z_0}{z'(0)} = t$$

2. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Пусть $z_0 > 0$, тогда в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) сферу можно параметризовать следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{1 - u^2 - v^2} \end{cases}$$

Касательное пространство к сфере в точке (x_0, y_0, z_0):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta x}{\delta v} \\ \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta v} \\ \frac{\delta z}{\delta u} & \frac{\delta z}{\delta v} \end{pmatrix}(u_0, v_0) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{\delta x}{\delta u}(u_0, v_0) \cdot u + \frac{\delta x}{\delta v}(u_0, v_0) \cdot v \\ y = y_0 + \frac{\delta y}{\delta u}(u_0, v_0) \cdot u + \frac{\delta y}{\delta v}(u_0, v_0) \cdot v \\ z = z_0 + \frac{\delta z}{\delta u}(u_0, v_0) \cdot u + \frac{\delta z}{\delta v}(u_0, v_0) \cdot v \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + u \\ y = y_0 + v \\ z = z_0 - \frac{u_0}{\sqrt{1 - u_0^2 - v_0^2}} \cdot u - \frac{v_0}{\sqrt{1 - u_0^2 - v_0^2}} \cdot v \end{cases}$$

Утверждение 1.3.2. Пусть S – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1,\dots,x^n)=0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1,\dots,x^n)=0, \end{cases}, \text{ причем } \begin{vmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta x^{k+1}} & \dots & \frac{\delta F^1}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^{n-1}}{\delta x^{k+1}} & \dots & \frac{\delta F^{n-1}}{\delta x^n} \end{vmatrix}(x_0)\neq 0.$$

Тогда касательная плоскость к S в точке x_0 задается системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\delta F^1}{\delta x^1}(x_0)\cdot(x^1-x_0^1)+\frac{\delta F^1}{\delta x^2}(x_0)(x^2-x_0^2)+\dots+\frac{\delta F^1}{\delta x^n}(x_0)(x^n-x_0^n)=0 \\ \vdots \\ \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^1}(x_0)\cdot(x^1-x_0^1)+\frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^2}(x_0)(x^2-x_0^2)+\dots+\frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^n}(x_0)(x^n-x_0^n)=0 \end{cases}$$

или кратко

$$F'(x_0)\cdot(x-x_0)=0$$

Доказательство. Обозначим $(x^1,\dots,x^k)=u,\ (x^{k+1},\dots,x^n)=v$

$$F=\begin{pmatrix} F^1 \\ \vdots \\ f^{n-k} \end{pmatrix}$$

Тогда условия утверждения запишем в виде:

$$F(u,v)=0,\quad |F'_v(u_0,v_0)|\neq 0$$

Тогда по теореме о неявной функции система $\begin{cases} F^1(x^1,\dots,x^n)=0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1,\dots,x^n)=0, \end{cases}$ эквивалентна системе

$$\begin{cases} u=u \\ v=f(u) \end{cases}$$

Тогда касательная плоскость задается (роль $t=\begin{pmatrix} t^1 \\ \vdots \\ t^k \end{pmatrix}$ играет $u=\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^k \end{pmatrix}$).

Тогда систему можно записать в виде:

$$\begin{cases} x^1=t^1 \\ \vdots \\ x^k=t^k \\ x^{k+1}=f^1(t^1,\dots,t^k) \\ \vdots \\ x^n=f^{n-k}(t^1,\dots,t^k) \end{cases}$$

$$t_0 = (t_0^k, \ldots, t_0^k) = (x_0^1, \ldots, x_0^k)$$

$$x'(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{\delta x^1}{\delta t^1} & \cdots & \frac{\delta x^1}{\delta t^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta x^k}{\delta t^1} & \cdots & \frac{\delta x^k}{\delta t^k} \\ \frac{\delta f^1}{\delta t^1} & \cdots & \frac{\delta f^1}{\delta t^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^1} & \cdots & \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^k} \end{pmatrix} (t_0)$$

$$x = x_0 + x'(t_0) \cdot t$$

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + 1 \cdot t^1 \\ \vdots \\ x^k = x_0^k + 1 \cdot t^k \\ x^{k+1} = x^{k+1} + \frac{\delta f^1}{\delta t^k}(t_0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta f^1}{\delta t^k}(x_0) t^k \\ \vdots \\ x^n = x^n + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^k}(t_0) t^1 + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^k}(x_0) t^k \end{cases}, \quad \begin{array}{l} u = (x^1, \ldots, x^k) \\ v = (x^{k+1}, \ldots, x^n) \\ \begin{cases} u = u \\ v = f(u) \end{cases} \end{array}$$

$$f'(u_0) = -[F_x'(u_0, v_0)]^{-1} \cdot F_u'(u_0, v_0)$$

$$\begin{cases} x^1 - x_0^1 = t^1 \\ \vdots \\ x^k - x_0^k = t^k \\ x^{k+1} - x_0^{k+1} = \frac{\delta f^1}{\delta t^k}(t_0) \cdot (x^1 - x_0^1) + \ldots + \frac{\delta f^1}{\delta t^k}(x_0) \cdot (x^k - x_0^k) \\ \vdots \\ x^n - x_0^n = \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^k}(t_0) \cdot (x^1 - x_0^1) + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^k}(x_0) \cdot (x^k - x_0^k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u - u_0 = u - u_0 \\ v - v_0 = f'(u_0) \cdot (u - u_0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u - u_0 = u - u_0 \\ v - v_0 = -[F_v'(u_0, v_0)]^{-1} \cdot F_u'(u_0, v_0) \end{cases} \Longrightarrow$$

$[F_v'(u_0, v_0)](v - v_0) + F_u'(u_0, v_0) \cdot (u - u_0) = 0$ $\square$

Итак, мы вывели, что если поверхность задана линейным уравнением $\begin{cases} F'(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{cases}$ или $P(x) = 0,\ F = \begin{pmatrix} F'(x) \\ \vdots \\ F^{n-k}(x) \end{pmatrix},\ x = (x^1, \ldots, x^n),\ x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$.

Тогда уравнение касательной плоскости кратко записывается:

$$F_x'(x_0) \cdot (x - x_0) = 0$$

Обозначим $x - x_0 = \xi$, то есть:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - x'_0 \\ \vdots \\ x^n - x^n_0 \end{pmatrix}$$

Таким образом получаем, что уравнение касательной пространства имеет вид:

$$F'_x(x_0) \cdot \xi = 0$$

Таким образом касательнаое пространство к поверхности заданной уравнением $F(x) = 0$ в точке x_0 состоит из векторов ξ, удовлетворяет уравнению

$$F'_x(x_0) \cdot \xi = 0 \tag{1.1}$$

Теорема 1.3.2 (О структуре касательных пространства)**.** Пусть S – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$. Тогда касательное пространство TS_{x_0} в точке x_0 состоит из направляющих векторов касательных к гладким кривым на поверхности S, проходящих через точку x_0.

Доказательство. Пусть $x = x(t)$ – гладкая кривая в $\mathbb{R}^n$, то есть

$$\begin{cases} x' = x'(t) \\ \vdots \\ x^n = x^n(t) \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}, \ x_0 = x(t_0)$$

Касательный вектор в точке x_0 к кривой имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{dx'}{dt}(t_0) \\ \vdots \\ \frac{dx^n}{dt}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{1'}(t_0) \\ \vdots \\ x^{1n}(t_0) \end{pmatrix}$$

1. Пусть S – k-мерная поверхность, задана системой уравнений $F(x) = 0$ и пусть $x = x(t)$ – гладкая кривая на S. Покажем, что вектор $x'(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{dx'}{dt}(t_0) \\ \vdots \\ \frac{dx^n}{dt}(t_0) \end{pmatrix}$, $x'(t_0) \in TS_{x_0}$, $x_0 = x(t_0)$, то есть покажем, что $x'(t_0)$ удовлетворяет уравнению $F'_x(x_0) \cdot \xi = 0$.

   Так как кривая $x = x(t)$ лежит на S, то $F(x(t)) = 0$ – верно. Продифференцируем $F(x(t)) = 0$ по t в точке x_0:

   $$F'_x(x_0) \cdot x'(t_0) = 0$$

   – это и есть уравнение касательного пространства, то есть $x'(t_0)$ удовлетворяет уравнению касательной кривой $F'_x(x_0) \cdot \xi = 0$.

2. Пусть $\xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) \in TS_{x_0}$, то есть ξ удовлетворяет уравнению $F'_x(x_0) \cdot \xi = 0$

Покажем, что $\exists$ гладкая кривая l на поверхности S:

1. $x_0 \in l$
2. ξ является направляющим вектором касательной к l в точке x_0

Поверхность S задана системой уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x) = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Пусть

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta F'}{\delta x^{k+1}} & \cdots & \frac{\delta F'}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^{k+1}} & \cdots & \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^n} \end{vmatrix} (x_0) \neq 0$$

По теореме о неявной функции, система (1.4) эквивалентна системе

$$\left\{ \begin{array}{l} x^{k+1} = f^1(x^1, \ldots, x^k) \\ \vdots \\ x^n = f^{n-k}(x^1, \ldots, x^k) \end{array} \right\} \tag{1.3}$$

Обозначим $u = (x', \ldots, x^k),\ v = (x^{k+1}, \ldots, x^n)$, тогда (1.3) имеет вид

$$v = f(u)$$

Тогда по утверждению касательное пространство задается уравнениями:

$$\begin{cases} x^{k+1} = x_0^{k+1} + \frac{\delta f'}{\delta x'}(x_0)(x' - x_0') + \ldots + \frac{\delta f^1}{\delta x^k}(x_0)(x^k - x_0^k) \\ \vdots \\ x^n = x_0^n + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^1}(x_0)(x' - x_0') + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^k}(x_0)(x^k - x_0^k) \end{cases} \tag{1.4}$$

Пусть

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta' \\ \vdots \\ \eta^k \\ \eta^{k+1} \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 - x_0^1 \\ \vdots \\ x^k - x_0^k \\ x^{k+1} - x_0^{k+1} \\ \vdots \\ x^n - x_0^n \end{pmatrix}$$

Тогда система (1.4) примет вид

$$\begin{cases} \eta^{k+1} = \frac{\delta f'}{\delta x'}(x_0) \cdot \eta' + \ldots + \frac{\delta f'}{\delta x^k}(x_0) \cdot \eta^k \\ \vdots \\ \eta^n = \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x'}(x_0) \cdot \eta' + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^k}(x_0) \cdot \eta^k \end{cases} \tag{1.5}$$

Таким образом, если вектор $\xi \in TS_{x_0}$, то он полностью определяется своими первыми k координатами, а остальные можно волучить с помощью системы (1.5).

Построим кривую в $\mathbb{R}^n$, то есть зададим ее уравнением $x = x(t)$:

$$l : \begin{cases} x' = x_0' + \xi' t \\ \vdots \\ x^k = x_0^k + \xi^k t \\ x^{k+1} = f^1(x_0' + \xi' t, \dots, x_0^k + \xi^k t) \\ \vdots \\ x^n = f^{n-k}(x_0' + \xi' t, \dots, x_0^k + \xi^k t) \end{cases}, \; v = f(u) \tag{1.6}$$

Пусть точка x_0 соотуетствует параметру $t = 0$

$$x(0) = \begin{cases} x' = x_0' \\ \vdots \\ x^k = x_0^k \\ x^{k+1} = f^1(x_0', \dots, x_0^k) \\ \vdots \\ x^n = f^{n-k}(x_0', \dots, x_0^k) \end{cases},$$

то есть кривая проходит через точку x_0.

Далее, функция f удовлетворяет условию $v = f(u) \iff F(u,v) = 0$. Тогда $F(u, f(u)) = 0 \implies l$, заданная система (1.6), $l \subset S$.

Таким образом построили гладкий путь, лежащий на поверхности S, проходящий через точку $x_0 \in S$, вектор $x'(t_0)$ – его касательный вектор $\in TS_{x_0}$ $\square$

1.4 Условный экстремум функции многих переменных

Задача. Дана функция $u = f(x^1, \dots, x^n)$ и дана поверхность, заданная уравнениями:

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^k(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

Нужно найти точку $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$, в которой

$$f(x_0^1, \dots, x_0^n) = \max_{(\min)} f(x^1, \dots, x^n),$$

где max (min) берется по всем точкам $(x_0^1, \dots, x_0^n)$, удовлетворяющих уравнениям (1.7).

Геометрическая формулировка.

Задача. Пусть система (1.7) задает в пространстве $\mathbb{R}^n$ m-мерную поверхность S. Найти точку $x_0 \in S$:

$$\exists\, U_x(x_0) = U(x_0) \cap S : \quad \forall x \in U_s(x_0)$$

$$\underset{x_0-\max}{f(x) \leqslant f(x_0)} \text{ (или } \underset{x_0-\min}{f(x) \geqslant f(x_0)}\text{)}$$

Определение 1.4.1 (линия уровня (c-уровень))**.** Пусть $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ – область. **Линией уровня (c-уровнем)** функции f называется множество

$$N_c = \{x \in D \mid f(x) = c\}$$

Теорема 1.4.1 (необходимое условие условного локального экстремума)**.** Пусть система уровнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

задает $(n-k)$-мерную гладкую поверхность S в $D \subset \mathbb{R}^n$, D – область. Функция $f : D \to \mathbb{R}$ – гладкая. Если $x_0 \in S$ является точкой условного локального экстремума для функции f, то существует такой набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$:

$$grad f(x_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot grad F^i(x_0)$$

Доказательство теоремы.

Лемма 1.4.1. Если x_0 – точка условного локального экстремума для функции f и x_0 не является критической для функции f (то есть $df(x_0) \neq 0$), то касательное пространство $TS_{x_0} \subset TN_{x_0}$, где

$$N_{x_0} = \{x \in D \mid f(x) = f(x_0)\}$$

– поверхность уровня, проходящая через x_0.

Доказательство леммы. Пусть $\xi \in TS_{x_0}$. Пусть $x = x(t)$ – гладкая кривая на S : $x(0) = x_0,\ x'(0) = \xi$.

Так как точка x_0 – условный экстремум, для функции f, то точка $t = 0$ есть локальный экстремум для функции $f(x(t))$ $\underset{th.\ Fermat's}{\Longrightarrow}$

$$[f(x(t))]'_t(0) = 0 \iff f'_x(x_0) \cdot x'_t(0) = 0 \tag{1.9}$$

Касательное пространство к N_{x_0} в точке x_0 имеет уравнение:

$$f'_x(x_0) \cdot \xi = 0 \tag{1.10}$$

Заметим, что (1.9) и (1.10) – одно и то же уравнение, то есть

$$x'_t(0) = \xi \implies x'_t(0) \in TN_{x_0}$$

$\square$

Касательное пространство TS_{x_0} задается уравнениями

$$\begin{cases} \frac{\delta F^1}{\delta x^1}(x_0)\cdot\xi^1 + \ldots + \frac{\delta F^1}{\delta x^n}(x_0)\cdot\xi^n = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^1}(x_0)\cdot\xi^1 + \ldots + \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^n}(x_0)\cdot\xi^n = 0 \end{cases}, \tag{1.11}$$

но $\forall i = \overline{1, n-k}$:

$$\left\{\frac{\delta F^i}{\delta x^1}\cdot(x_0);\ldots;\frac{\delta F^i}{\delta x^n}\right\} = gradF^i(x_0)$$

Перепишем (1.11) в виде:

$$\begin{cases} (gradF^1(x_0), \xi) = 0 \\ \vdots \\ (gradF^{n-k}(x_0,), \xi) = 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

Касательное пространство TN_{x_0} к $N_{x_0} = \{x \in D \mid f(x) = f(x_0)\}$ задается уравнением: $f'(x_0)\cdot\xi = 0$. Заметим, что $f'(x_0) = gradf(x_0) = \left\{\frac{\delta f(x_0)}{\delta x^1}, \ldots, \frac{\delta f(x_0)}{\delta x^n}\right\} \implies f'(x_0)\cdot\xi = 0 \iff$

$$\iff (fradf(x_0), \xi) = 0 \tag{1.13}$$

Таким образом из леммы следует, что $\forall\xi$ удовлетворяет системе уравнений (1.12), так же удовлетворяет уравнению (1.13), то есть из того, что $\forall i \in \overline{1, n-k}\ \xi \perp gradF^i(x_0) \implies \xi \perp fradf(x_0) \implies \exists\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$:

$$fradf(x_0) = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \cdot gradF^i(x_0)$$

$\square$

Метод Лагранжа

Пусть требуется найти условный экстремум функции $f : D \to \mathbb{R}$, D – область в $\mathbb{R}^n$, на поверхности S, заданной системой уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^k(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{cases}$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda) = L(x^1,\dots,x^n,\lambda^1,\dots,\lambda^k) =$$
$$= f(x^1,\dots,x^n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda^i \cdots F^i(x^1,\dots,x^n),$$

$\lambda = (\lambda^1,\dots,\lambda^k),\ \lambda^i \in \mathbb{R}$ – коэффициент, в общем случае пока неизвестен.
Необходимое условие локального экстремума для функции L :

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x^1} = \frac{\delta f}{\delta x^1} + \sum_{i=1}^{k} \lambda^i \cdot \frac{\delta F^i}{\delta x^1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta L}{\delta x^n} = \frac{\delta f}{\delta x^n} + \sum_{i=1}^{k} \lambda^i \cdot \frac{\delta F^i}{\delta x^n} = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda^1} = F^1(x^1,\dots,x^n) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda^k} = F^k(x^1,\dots,x^n) = 0 \end{cases} \tag{1.14}$$

Определение 1.4.2 (условный экстремум)**.** Пусть $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ – область, S – поверхность в D, **условным экстремумом** функции f называется экстремум функции $f\big|_S$.

Достаточное условие условного локального экстремума

Пусть $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ – область, $f \in C^{(2)}\ (D,\mathbb{R}),\ S$ – $(n-k)$-мерная поверхность в D, заданная системой уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1,\dots,x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^k(x^1,\dots,x^n) = 0 \end{cases}.$$

Функция Лагранжа

$$L(x,\lambda) = f(x^1,\dots,x^n) + \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \cdot F^i(x^1,\dots,x^n).$$

Здесь $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ выбираются таким образом, чтобы было выполнено необходимое условие условного экстремума в точке x_0.

Теорема 1.4.2 (достаточное условие условного экстремума)**.** Если при введенных выше условиях квадратичная форма

$$Q(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 L}{\delta x^i \delta x^j}(x_0) \cdot \xi^i \cdot \xi^j,$$
$$(\xi = (\xi^1,\dots,\xi^n))$$

Если:

1. Определена на TS_{x_0}
   (a) Если Q знакоположительная, то точка x_0 – точка условного локального min
   (b) Если Q знакоотрицательная, то точка x_0 – точка условного локального max
2. Если Q может принимать значения разных знаков, то в точке x_0 условного экстремума не наблюдается

Доказательство. Заметим, что $f\Big|_S$ и $L\Big|_S$ совпадают. В самом деле, если $x \in S$, то

$$L(x, \lambda) = f(x) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot F^i(x) = f(x).$$

Поэтому покажем, что условие знакопостоянства Q является достаточным для экстремума функции $L\Big|_s$.

Имеем, что

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x^1}(x_0) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta L}{\delta x^n}(x_0) = 0 \end{cases}$$

По формуле Тейлора:

$$L\Big|_S(x) - L(x_0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i \delta x^j}(x^i - x_0^i) \cdot (x^j - x_0^j) + o(||x - x_0||^2) \qquad (1.15)$$

Так как S – m-мерная $(m = n - k)$ поверхность, то существует гладкое отображение $x(t) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : \ x = x(t) \subset S \ \forall t \in \mathbb{R}^m, \ x(0) = x_0$. Отображение $x(t)$ биективно отображает $\mathbb{R}^{\geqslant}$ на $U_S(x_0) = U(x_0) \cap S$.

Если $x \in S$, то условие дифференцируемости $x(t)$:

$$x - x_0 = x(t) - x(0) = x'(0) \cdot t + o(||t||)$$

или

$$\begin{cases} x^1 - x_0^1 = \frac{\delta x^1}{\delta t^1}(0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta x^1}{\delta t^m}(0) \cdot t^m + d(||t||) \\ \vdots \\ x^n - x_0^n = \frac{\delta x^n}{\delta t^1}(0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta x^n}{\delta t^m}(0) \cdot t^m + d(||t||) \end{cases}$$

или кратко

$$\begin{cases} x^1 - x_0^1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\delta x^1}{\delta t^i}(0) \cdot t^i + o(||t||) \\ \vdots \\ x^n - x_0^n = \sum_{i=1}^{m} \frac{\delta x^n}{\delta t^i}(0) \cdot t^i + o(||t||) \end{cases} \qquad (1.16)$$

Подставим (1.16) в (1.15):

$$L\Big|_S(x) - L(x_0) = \frac{1}{2}\cdot\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i\delta x^j}\cdot(\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0)\cdot t^\alpha + o(||t||))\cdot$$

$$\cdot(\sum_{\beta=1}^{m}\frac{\delta x^j}{\delta t^\beta}(0)\cdot t^\beta + o(||t||)) + o(||x-x_0||^2) \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i\delta x^j}\cdot\big[(\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0)\cdot t^\alpha)\cdot(\sum_{\beta=1}^{m}\frac{\delta x^i}{\delta t^\beta}(0)\cdot t^\beta)+$$

$$+(\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0)t^\alpha)\cdot o(||t||) + (\sum_{\beta=1}^{m}\frac{\delta x^i}{\delta t^\beta}(0)\cdot t^\beta)\cdot$$

$$\cdot o(||t||) + o(||t||)\big] + o(||x-x_0||^2) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i\delta x^j}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\alpha,\beta=1}^{m}\frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}\cdot\frac{x^i}{\delta t^\beta}\cdot t^\alpha\cdot t^\beta + o(||t||^2) = \frac{||t||^2}{2}\cdot\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i\delta x^j}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\alpha,\beta=1}^{m}\frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}\cdot\frac{\delta x^j}{\delta t^\beta}\cdot\frac{t^\alpha}{||t||}\cdot\frac{t^\beta}{||t||} + o(||t||^2) = \frac{||t||^2}{2}Q(\xi) + o(||t||^2).$$

Таким образом получаем, что

$$L\Big|_S(x) - L(x_0) = \frac{||t||^2}{2}\cdot Q(\xi) + o(||t||^2),\ \xi\in TS_{x_0}.$$

Тогда, если $Q > 0$, то

$$L\Big|_S(x) - L(x_0) > 0 \implies x_0\ \min\ L\Big|_S(x) \implies x_0\ \min\ f\Big|_S.$$

Если $Q < 0$, то

$$L\Big|_S(x) - L(x_0) < 0 \implies x_0\ \max\ L\Big|_S(x) \implies x_0\ \max\ f\Big|_S\ (\forall x\in U_S(x_0))$$

Если Q – знакопеременна, то $x(t)$ не для всех $x \in U_S(x_0)$ разность $L\Big|_S(x) - L(x_0)$ имеет постоянный знак $\implies$ в этом случае в точке x_0 нет экстремума.

Докажем $(*)$, то есть покажем, что

$$o(||t||)\cdot\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}\cdot t^\alpha = o(||t||^2)$$

и

$$o(||x-x_0||^2) = o(||t||^2),\ x\in S.$$

В самом деле,

$$\left|\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0)\cdot t^\alpha\right| \leqslant \sum_{\alpha=1}^{m}\left|\frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0)\right|\cdot\left|t^\alpha\right| \leqslant ||t||\cdot\sum_{\alpha=1}^{m}\left|\frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0)\right| = A\cdot||t||$$

Таким образом,

$$o(||t||)\cdot\left|\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\delta x^i(0)}{\delta t^\alpha}\cdot t^\alpha\right| \leqslant o(||t||)\cdot O(||t||) = \omega(t)\cdot||t||\cdot\gamma(t)\cdot||t|| =$$

$$= \left|\text{ где } \omega(t)\to 0 \text{ при } t\to 0,\ \gamma(t) \text{ – ограниченная функция }\right| =$$

$$= \alpha(t)\cdot||t||^2 = o(||t||^2),\ \ \alpha(t)\to 0,\ \ t\to 0$$

Далее, если $x\in S$, то

$$||x-x_0||^2 = \left\|\begin{pmatrix} x^1-x_0^1 \\ \vdots \\ x^n-x_0^n\end{pmatrix}\right\|^2 \overset{(1.16)}{=} \left\|\begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha}\cdot t^\alpha+\ldots \\ \vdots \\ \sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha}\cdot t^\alpha+\ldots\end{pmatrix}\right\|^2 =$$

$$= \left(\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha}\cdot t^\alpha + o(||t||)\right)^2 + \ldots + \left(\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha} + o(||t||)\right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha}\cdot t^\alpha\right)^2 + \ldots + \left(\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha}\right)^2 + o(||t||^2) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\max_\alpha\frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha}\right)^2\cdot\left(\frac{\alpha=1}{m}t^\alpha\right)^2 + \ldots + \left(\max_\alpha(\frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha})\right)^2\cdot(\sum_{\alpha=1}^{n}t^\alpha)^2 \leqslant$$

$$\leqslant ||t||^2.$$

ДОПИСАТЬ $\square$

Глава 2

Теория рядов

2.1 Числовые ряды

Определение 2.1.1 (ряд, член ряда, n-мерный член ряда, частичная сумма). **Рядом** называется выражение

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

где $a_i \in \mathbb{R}$.

Числа a_i называются **членами ряда**, a_n – n**-мерным членом ряда**.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2.1}$$

Рассмотрим числа:
$$\begin{aligned} &A_1 = a_1 \\ &A_2 = a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ &A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \end{aligned}$$

Числа $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются **частичными суммами** ряда (2.1)

Определение 2.1.2. Говорят, что ряд (2.1) сходится, если существует конечный предел частичных сумм, то есть

$$\exists \lim_{n\to\infty} A_n = A.$$

Тогда сумма бесконечного ряда (2.1) полагается равной

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Пример 4.

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^n} + \ldots = 10 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k}$$

$$A_n = \frac{1}{10^0} + \frac{1}{10^1} + \ldots + \frac{1}{10^n} = \frac{1 \cdot (q^k - 1)}{q - 1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{10^n} - 1}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9} \cdot (1 - \frac{1}{10^n})$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{9}(1 - \frac{1}{10^n}) = \frac{10}{9}$$

2.1.1 Гармонический ряд

Определение 2.1.3 (среднее гармоническое)**.** Число C называется **средним гармоническим** чисел a и b $(a, b \neq 0)$, если

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$$

Определение 2.1.4. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{2.2}$$

называется **гармоническим**.

Покажем, что (2.2) расходится.

В самом деле,

$$\underbrace{1}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geqslant\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}}_{>\frac{1}{2}} + \ldots$$

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \quad \ldots \quad + \frac{1}{n}$$

$$\forall E > 0 \ \exists N : \ \forall n > N \quad |A_n| > E$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \infty$$

2.1.2 Основные свойства сходящихся рядов

Теорема 2.1.1 (критерий Коши)**.** Ряд (2.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится тогда и только тогда, когда $\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n > N, \ \forall p > 0$

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \epsilon$$

Доказательство. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}$ сходится $\underset{by\ def.}{\iff}$ $\exists \lim\limits_{n\to} A_n \iff A_n$ – фундаментальная последовательность: $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N$ и $\forall p > 0$

$$|A_n - A_{n+p}| < \epsilon$$

(критерий Коши сходимости последовательности)

Имеем

$$\begin{aligned} &|A_n - A_{n+p}| = \\ &\qquad = |a_1 + a_2 + \ldots + a_n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots + a_{n+p})| = \\ &\qquad\qquad = |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \epsilon. \end{aligned}$$

□

Пример 5. Докажем, что ряд (2.2) расходится.

Если $\exists \epsilon > 0\ \forall N\ \exists n > N\ \exists p > 0$

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| \geqslant \epsilon$$

$$\begin{aligned} &|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}| \geqslant |\frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \ldots + \frac{1}{n+p}| = \\ &\qquad = \frac{p}{n+p} = |n = p| = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

то есть для $\forall N:\ \ \epsilon = \frac{1}{2}\ \ p = n,\ n = N + 1 \implies$ по критерию Коши, гармонический ряд (2.2) расходится.

Замечание. Со всякой последовательностью x_n можно связать ряд, частичными суммами которого являются члены этой последовательности. Пусть:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

Тогда ряд

$$\underbrace{x_1}_{a_1} + \underbrace{(x_2 - x_1)}_{a_2} + \underbrace{(x_3 - x_2)}_{a_3} + \ldots + \underbrace{(x_n - x_{n-1})}_{a_n} + \ldots$$

$$A_n = a_1 + \ldots + a_n = x_1 + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) = x_n$$

Теорема 2.1.2 (необходимое условие сходимости ряда)**.** Если ряд (2.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, тогда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Доказательство. Пусть ряд (2.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}(A_n - A_{n-1}) = \\ = \lim_{n\to\infty} A_n - \lim_{n\to\infty} A_{n-1} &= 0\end{aligned}$$

□

Определение 2.1.5 (m-ный остаток)**.** Пусть дан ряд (2.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ряд вида

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \tag{2.3}$$

называется m**-ным остатком** ряда (2.1)

Теорема 2.1.3 (об остатке ряда)**.** Следующие условия эквивалентны:

1. Ряд (2.1) сходится
2. $\forall$ его состаток сходится
3. Некоторый его остаток (2.2) сходится

Доказательство.

- 1. $\Longrightarrow$ 2.

  Пусть ряд (2.1) сходится и его сумма равна A.

  Пусть

  $$A_k^* = \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n$$

  – k-тая частичная сумма ряда (2.2).

  Ряд (2.2) сходится, если $\exists \underset{k\to\infty}{A_k^*}$:

  $$A_k^* = A_{m+k} - A_m$$

  $$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} A_k^* &= \lim_{k\to\infty}(A_{m+k} - A_n) = \\ = \lim_{k\to\infty} A_{m+k} - \lim_{k\to\infty} A_m &= A - A_m\end{aligned}$$

- 2. $\implies$ 3. – очевидно
- 3. $\implies$ 1.

  Пусть ряд (2.1)

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n$$

  – сходится.

  Тогда при $n > m$

$$A_n = A_m + A^*_{n-m} = \sum_{k=m+1}^{m+(n-m)} a_k$$

  Ряд (2.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

  сходится тогда и только тогда (по определению), когда

$$\exists \lim_{n\to\infty} A_n.$$

  Рассмотрим

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} A_n &= \lim_{n\to\infty}(A_m + A^*_{n-m}) = \\ &= \lim_{n\to\infty} A_m + \lim_{n\to\infty} A_{n-m} \end{aligned}$$

  $\implies \exists \lim_{n\to\infty} A_n \implies$ (2.1) – сходится.

□

Обозначим α_m – сумма m-того остатка ряда (2.1) $=$ сумме ряда (2.2)

$$\alpha_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$$

((2.1) сходится в этом случае)

Следствие. Ряд (2.1) сходится $\iff \lim_{m\to\infty} \alpha_m = 0$

Доказательство. Самостоятельно ☺ □

Определение 2.1.6. Пусть даны ряды

$$(A) \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n; \quad (B) \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

ДОПИСАТЬ

Теорема 2.1.4 (1-ый признак сравнения)**.** Пусть даны ряды

$$(A)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n; \quad (B)\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Причем $a_n > 0,\ b_n > 0\ \forall n$.
Если $\exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N \quad a_n \leqslant b_n$, то

1. Из сходимости ряда $(B) \implies$ сходимость ряда (A)
2. Из сходимости ряда $(A) \implies$ сходимость ряда (B)

Доказательство. 1. Пусть ряд (B) – сходится $\implies$ по теореме 2.2.1 его частичные суммы ограничены $\implies$ по неравенству $a_n \leqslant b_n$ частичные суммы ряда (A) также ограничены $\implies$ по 2.2.1 ряд (A) сходится.

2. Аналогично

□

Теорема 2.1.5 (2-ой признак сравнения)**.** Пусть даны ряды

$$(A)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n; \quad (B)\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Причем $a_n > 0,\ b_n > 0\ \forall n$.
Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k,\ k \in [0;\infty]$, то

1. При $k = \infty$ из сходимости $(A) \implies$ сходимость ряда (B)
2. При $k = 0$ из сходимости ряда $(B) \implies$ сходимость ряда (A)
3. При $0 < k < \infty$ $(k = const \neq 0)$ ряды (A) и (B) ведут себя одинаково

Доказательство. Переписать доказательство для несобственных интегралов, заменив слово "интеграл"на слово "ряд". □

Теорема 2.1.6 (3-й признак сравнения)**.** Пусть даны ряды

$$(A)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n; \quad (B)\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Причем $a_n > 0,\ b_n > 0\ \forall n$.
Если $\exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

то

1. Из сходимости ряда $(B) \implies$ сходимость ряда (A)
2. Из расходимости ряда $(A) \implies$ расходимость ряда (B)

Доказательство. Можно считать, что $N = 0$.

Тогда $\forall n > N$ имеем:

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{b_2}{b_1}; \quad \frac{a_3}{a_2} \leqslant \frac{b_3}{b_2}; \quad \frac{a_4}{a_3} \leqslant \frac{b_4}{b_3}; \quad \ldots; \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Перемножим левые и правые части:

$$\frac{a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{n+1}}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot \ldots \cdot b_{n+1}}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_n},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_1} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n} \implies a_{n+1} \leqslant \frac{a_1}{b_1} \cdot b_{n+1}.$$

1. Если ряд (B) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится $\implies$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} \cdot b_{n+1} \implies$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$
2. Аналогично

□

Теорема 2.1.7 (интегральный признак Коши-Маклорена)**.** Пусть дан положительный ряд

$$(A) \; \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Если функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $f(x): \; [1; +\infty] \to \mathbb{R}$
2. $f(x)$ – монотонна
3. $f(x) = a_n, \; \forall n \in \mathbb{N}$

тогда ряд (A) и интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ ведут себя одинаково

Доказательство. Ограничимся случаем, когда $f(x)$ монотонно убывает.

Рассмотрим функцию $\phi(x) = a_n$ при $n \leqslant x < n+1$ и $\psi(x) = a_{n+1}$ при $n \leqslant x < n+1$. Тогда $\forall x \in [1; +\infty)$

$$\psi(x) \leqslant f(x) \leqslant \phi(x).$$

Отсюда

$$\int_1^N \psi(x)dx \leqslant \int_1^N f(x)dx \leqslant \int_1^N \phi(x)dx \implies$$

$$\implies \underbrace{\overset{(1)}{\sum_{n=1}^{N} a_{n+1}}}_{partial\ series\ sum\ (A)} \leqslant \int_1^N f(x)dx \leqslant \underbrace{\overset{(2)}{\sum_{n=1}^{N} a_n}}_{partial\ series\ sum\ (A)}$$

Если интеграл сходится, то частичная сумма (1) ограничена $\Longrightarrow$ ряд (A) сходится. Если интеграл расзодится, то частичная сумма (2) непрерывна $\Longrightarrow$ ряд (A) – расходится.

Если ряд (A) сходится, то (2) – ограничена $\Longrightarrow$ $\int_1^N f(x)dx$ – ограничен $\Longrightarrow$ $\int_1^\infty f(x)dx$ – сходится.

Если ряд (A) расходится $\Longrightarrow$ частичная сумма (1) неограничена $\Longrightarrow$ интеграл расходится. $\square$

Пример 6. 1. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$

Рассмотрим $f(x) = \frac{1}{x^p}$ на $[1; +\infty)$ – непрерывно монотонно $\downarrow$, $f(n) = \frac{1}{n^p}$.

$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ ведет себя одинаково с интегралом $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ – сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$ $\Longrightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

2. $\sum_{n=1}^\infty$

$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, $x \in [e; +\infty)$, $\downarrow$, непрерывна.

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b\to\infty} \int_e^b \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \\ = \lim_{b\to\infty} (\ln(\ln x))\Big|_e^b = \lim_{b\to\infty} \ln(\ln b) = \infty \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n \ln n}$ расходится (по интегралу Коши-Маклорена)

Теорема 2.1.8 (радикальный признак Коши)**.** Пусть ряд (A) $\sum_{n=1}^\infty a_n$ положительный и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда:

1. При $q < 1$ ряд (A) сходится
2. При $q > 1$ ряд (A) расходится
3. При $q = 1$ – ?

Доказательство. 1. Пусть $q < 1$. Возьмем число $r:\ q < r < 1$. Тогда $\exists N:\ \forall n > N$

$$\sqrt[n]{a_n} < r \Longrightarrow a_n < r^n$$

$0 < r < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^\infty r^n$ – сходится $\Longrightarrow$ по 1-му признаку сравнения сходится ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n$

2. Пусть $q > 1$, то существует подпоследовательность $\sqrt[n_i]{a_{n_i}} \to q$ при $i \to \infty \Longrightarrow a_{n_i} \to q^{n_i} > 1 \Longrightarrow$ ряда $\sum_{n=1}^\infty a_n$ расходится

3. Рассмотрим ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходятся.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$$

$\square$

Теорема 2.1.9 (признак Даламбера)**.** Пусть ряд (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ положительный и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d.$$

Тогда

1. При $d < 1$ ряд (A) сходится
2. При $d > 1$ ряд (A) расходится
3. При $d = 1$ – ?

Доказательство. 1. Пусть $d < 1$. Возьмем $d < r < 1 \implies \exists N : \forall n > N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1}; \quad b_2 = \frac{a_3}{a_2}; \quad b_3 = \frac{a_4}{a_3}; \quad \ldots; \quad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}; \quad \ldots$$

Можно считать, что $N = 0$, тогда $\forall n > N$ $\begin{array}{l} a_2 < r \cdot a_1 \\ a_3 < r \cdot a_2 < r^2 \cdot a_1 \\ a_4 < r \cdot a_3 < r^3 \cdot a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} < r^n \cdot a_1 \end{array}$.

Так как $0 < r < 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot a_1$ сходится $\implies$ сходится ряд (A) по 1 признаку сравнения.

2. Самостоятельно.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

$\square$

Теорема 2.1.10 (признак Раббе)**.** Пусть (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – положительная. Если

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = r,$$

то

1. При $r > 1$ ряд (A) сходится;
2. При $r < 1$ ряд (A) расходится;
3. При $r = 1$ ряд (A) – ?

Доказательство. 1. Пусть $r > 1$. Возьмем p и q:

$$1 < p < q < r.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r,$$

то $\exists N_1 : \ \forall n > N_1 \quad n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > q$, то есть

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{q}{n}. \tag{2.4}$$

Далее, рассмотрим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^p - 1}{\frac{1}{n}} \overset{Taylor's\ f.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{p}{n} + o(\frac{1}{n}) - 1}{\frac{1}{n}} = p < q \implies$$

$\implies \exists N_2 : \ \forall n > N_2$

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^p - 1}{\frac{1}{n}} < q \implies (1+\frac{1}{n})^p < 1 + \frac{q}{n}. \tag{2.5}$$

Сравниваем неравенства (2.4) и (2.5), получим, что при $n > \max(N_1, N_2)$:

$$(1+\frac{1}{n})^p < 1 + \frac{q}{n} \quad < \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \implies$$

$$\implies \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad > \quad (1+\frac{1}{n}^{p}) = \frac{(n+1)^p}{n^p} = \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}} \quad \implies \quad a_n \cdot \frac{1}{(n+1)^p} >$$

$$> \frac{1}{n^p} \cdot a_{n+1} \quad \implies \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}.$$

По 3-му признаку сравнения, ряд (A) сходится при $p > 1 \implies$ при $r > 1$.

2. Пусть $r < 1$. Тогда $\exists N: \ \forall n > N$:

$$n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) < 1 \implies$$
$$\implies \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \implies$$
$$\implies \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонический, расходящийся $\implies$ по 3-му признаку сравнения ряд (A) расходится.

3. Упражнение: привести 2 примера рядов (сходящийся, расходящийся), но $r = 1$ в обоих случаях.

□

Теорема 2.1.11 (признак Кумера)**.** Пусть дан ряд (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – положительный. Пусть числа $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots: \ \forall n > N \ c_n > 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ – расходится. Если

$$\lim_{n\to\infty} (c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}) = k,$$

то

1. При $k > 0$ ряд (A) сходится;
2. При $k < 0$ ряд (A) расходится;
3. При $k = 1$ – ?

Доказательство. 1. Пусть $k > 0$. Возьмем $0 < p < k$.

Тогда $\exists N: \ \forall n > N$:

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} > p \implies$$
$$\implies c_n \cdot a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1} > p \cdot a_{n+1} > 0 \implies$$
$$\implies c_n \cdot a_n > c_{n+1} \cdot a_{n+1}, \quad \forall n > N$$

Тогда последовательность $\{c_n \cdot a_n\}$ убывает и ограничена снизу $\implies$ последовательность сходится.

Пусть $c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n \cdot a_n$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{m=1}^{n} (c_m \cdot a_m - c_{m+1} \cdot a_{m+1}) =$$
$$= (c_1 \cdot a_1 - c_2 \cdot a_2) + (c_2 \cdot a_2 - c_3 \cdot a_3) + \ldots + (c_n \cdot a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1}) =$$
$$= c_1 \cdot a_1 - c_{n+1} \cdot a_{n+1};$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}(c_m\cdot a_m - c_{m+1}\cdot a_{n+1}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(c_1\cdot a_1 - c_{n+1}\cdot a_{n+1}) = c_1\cdot a_1 - c \implies$$

$\implies$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cdot a_n - c_{n+1}\cdot a_{n+1}) \implies$ из того, что $c_n\cdot a_n - c_{n+1}\cdot a_{n+1} > p\cdot a_{n+1} > 0$ и 1-го признака сравнения $\implies$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p\cdot a_{n+1}$ сходится $\implies$ ряд (A) сходится.

2. Пусть $k < 0 \implies \exists N:\ \forall n > N$

$$c_n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} < 0 \implies$$

$$\implies \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{1}{c_n}}{\frac{1}{c+n+1}} \implies$$

$$\implies \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}};$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n}$ расходится $\implies$ по 3-му признаку сравнения ряд (A) расходится.

3. Придумать 2 примера когда $k = 0$ и ряды сходятся/расходятся.

□

Теорема 2.1.12 (признак Бертрана)**.** Пусть ряд (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – положительный. Если

$$\lim_{n\to\infty}\ln n\cdot[n\cdot(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)] = B,$$

то

1. При $B > 1$ ряд (A) сходится;
2. При $B < 1$ ряд (A) расходится;
3. При $B = 1$ ряд (A) – ?

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}$ – расходится. Составим последовательность Кумера:

$$k_n = \underbrace{n \cdot \ln n}_{c_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \underbrace{(n+1) \cdot \ln(n+1)}_{c_{n+1}} =$$

$$= \left| \ln(n+1) = \ln(n \cdot \frac{n+1}{n}) = \ln n + \ln(1 + \frac{1}{n}) \right| =$$

$$= n \cdot \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \cdot (\ln n + \ln(1 + \frac{1}{n})) =$$

$$= n \cdot \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n \cdot \ln n - \ln n - \ln(1 + \frac{1}{n})^{n+1} =$$

$$= \ln n (n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1) - \ln(1 + \frac{1}{n})^{n+1} =$$

$$= \ln n \cdot (n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1) - \ln(1 + \frac{1}{n})^{n+1};$$

$$\lim_{n\to\infty} k_n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\underbrace{\ln n \cdot (n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1)}_{B} - \ln(\underbrace{1 + \frac{1}{n}^{n}}_{e}) - \ln(1 + \frac{1}{n})] =$$

$$= B - 1,$$

по признаку Кумера, при $B - 1 > 0$ ряд (A) сходится, при $B - 1 < 0$ ряд (A) расходится, при $B = 1$ – ? □

Теорема 2.1.13 (признак Гаусса)**.** Ряд (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Если

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = (\lambda + \frac{\mu}{n}) + O(\frac{1}{n^2}),$$

то

1. При $\lambda > 1$, ряд (A) сходится;
2. При $\lambda < 1$, ряд (A) расходится;
3. При $\lambda = 1$ и
   (a) $\mu > 1 \implies$ ряд (A) сходится;
   (b) $\mu \leqslant 1 \implies$ ряд (A) расходится.

Доказательство. 1. Если $\lambda < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = [\lim_{n\to\infty} (\lambda + \frac{\mu}{n} + O(\frac{1}{n^2}))]^{-1} =$$

$$= [\lim_{n\to\infty} (\lambda + \underbrace{\frac{\mu}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} \cdot \Omega(\frac{1}{n^2}))]^{-1} = \frac{1}{\lambda},$$

по признаку Даламбера, если $\frac{1}{\lambda} < 1$, то есть $\lambda > 1$, ряд (A) сходится.

2. Если $\lambda > 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = [\lim_{n\to\infty} (\lambda + \frac{\mu}{n} + O(\frac{1}{n^2}))]^{-1} =$$

$$= [\lim_{n\to\infty} (\lambda + \underbrace{\frac{\mu}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} \cdot \Omega(\frac{1}{n^2}))]^{-1} = \frac{1}{\lambda},$$

по признаку Даламбера, если $\frac{1}{\lambda} > 1$, то есть $\lambda < 1$, ряд (A) расходится.

3. Если $\lambda = 1$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + O(\frac{1}{n^2});$$

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \mu + n \cdot O(\frac{1}{n^2});$$

$$\lim_{n\to\infty} (n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \lim_{n\to\infty} (\mu + \underbrace{n \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \Omega(\frac{1}{n^2})}_{\to 0}) = \mu \implies$$

$$\implies \text{по признаку Реббе} \implies \left[\begin{array}{l} \mu > 1 \implies (A) \to\leftarrow \\ \mu < 1 \implies (A) \leftarrow\to \end{array} \right.$$

Пусть $\mu = 1$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} \ln n \cdot (n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln n \cdot (n \cdot (1 + \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}) - 1) - 1) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln n \cdot (1 + n \cdot O(\frac{1}{n^2}) - 1) = \lim_{n\to\infty} \ln n \cdot n \cdot O(\frac{1}{n^2}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\ln n \cdot n \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \Omega(\frac{1}{n^2})) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \cdot \Omega(\frac{1}{n^2}) = 0.$$

В самом деле,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln n = \lim_{n\to\infty} \ln n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{n} = 0 \implies$$

$\implies$ по прихнаку Бертрана ряд (A) расходится.

$\square$

2.2 Сходимость знакопеременных рядов

Пусть дан ряд (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если $\exists N : \ \forall n > N \ a_n$ не меняет знак, то исследование сходимости такого ряда сводится к исследованию сходимости положительных рядов. Будем считать, что "+"и "−"бесконечно много. Такие ряды будем называть **знакопеременными**.

Определение 2.2.1 (абсолютно сходящийся ряд)**.** Ряд (A) называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд

$$(A^*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Утверждение 2.2.1. Если ряд (A) абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство. $\leftarrow$ Пусть ряд (A) абсолютно сходящийся, то есть сходится ряд (A^*) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \implies$ по критерию Коши $\forall \epsilon > 0 \ \exists N: \ \forall n > N \ \forall p > 0$

$$|a_{n+1}| + |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+1}| < \epsilon$$

$\rightarrow$ Пусть $\epsilon > 0$ задано. Рассмотрим

$$|A_{n+p} - A_n| = |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}| < \epsilon$$

$\implies$ ряд (A) сходится. $\square$

Определение 2.2.2 (условно сходящийся ряд)**.** Если ряд (A) сходится, а ряд (A^*) расходится, то ряд (A) называется **условно сходящимся**.

Определение 2.2.3 (знакочередующийся ряд)**.** Ряд (A) называется **знакочередующимся**, если $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \cdot a_{n+1} < 0$. Обозначим знакочередующийся ряд:

$$(\overline{A}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n, \quad a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Теорема 2.2.1 (признак Лейбница)**.** Пусть ряд $(\overline{A})$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n$ $(a_n > 0 \ \forall n)$ удовлетворяет условиям:

1. $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots$;
2. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Тогда ряд $(\overline{A})$ сходится и его сумма $S: \quad 0 < S \leqslant a_1$.

Доказательство. Рассмотрим

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} = \\ = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}),$$

тогда $\forall i: \ a_i - a_{i+1} \geqslant 0 \implies S_{2n} \geqslant 0 \ \forall n \implies$ последовательность $S_{2n} \nearrow$.

С другой стороны,

$$S_{2n} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geqslant 0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\geqslant 0} - \ldots - \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{\geqslant 0} - a_{2n}$$

$\implies S_{2n} \leqslant a_1 \ \forall n$.

Таким образом, S_{2n} не убывает и ограничена сверху $\implies$ по теореме Вейерштрасса $\implies \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Далее,

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Так как $0 < S_n \leqslant a_1$ (если $S_n = 0$, то a_1 может быть $= 0$, что невозможно, так как $a_1 > 0$) $\implies$ (берем пределы от неравенства) $0 < S \leqslant a_1$. □

Следствие. Если знакочередующийся ряд $(\overline{A})$ сходится, то сумма его n-го остатка имеет знак $(n+1)$-го члена ряда и не больше его по модулю.

Пример 7. 1. Рассмотрим ряд

$$(\overline{H}) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots,$$

по признаку Лейбница:

(a) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\implies (\overline{H})$ сходится, $0 < S \leqslant 1$;

2. Рассмотрим $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1}\frac{1}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится $\implies$ ряд $(\overline{H})$ – условно сходящийся.

Теорема 2.2.2 (признак Абеля и Дирихле)**.** 1. (Абеля) Если

- последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена;
- ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.

2. (Дирихле) Если

- последовательность $\{a_n\}$ монотонна и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;
- частичные суммы ряд (B) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены, то есть $\exists k > 0 :$ $\forall n \quad |\sum_{m=1}^{n} b_m < k$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.

Доказательство теоремы.

Лемма 2.2.1. 1. Если числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ либо не возрастают, либо не убывают;

2. Суммы $B_1 = b_1,\ B_2 = b_1 + b_2,\ \dots,\ B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n :\ \forall k = 1, \dots, n \quad |B_k| \leqslant L$, тогда

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k \right| \leqslant L \cdot (|a_1| + |a_n|) \tag{2.6}$$

Доказательство леммы. Рассмотрим

$$\begin{gathered} a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n = \\ = a_1 \cdot B_1 + a_2 \cdot (B_2 - B_1) + a_3 \cdot (B_3 - B_2) + \dots + a_n \cdot (B_n - B_{n-1}) = \\ = a_1 \cdot B_1 + a_2 \cdot B_2 - a_2 \cdot B_1 + a_3 \cdot B_3 - a_3 \cdot B_2 + \dots + a_n \cdot B_n - a_n \cdot B_{n-1} = \\ = B_1 \cdot (a_1 - a_2) + B_2 \cdot (a_2 - a_3) + B_3 \cdot (a_3 - a_4) + \dots + B_{n-1} \cdot (a_{n-1} - a_n) + a_n \cdot B_n = \\ = \sum_{k=1}^{n-1} B_k \cdot (a_k - a_{k-1}) + a_n \cdot B_n. \end{gathered}$$

Таким образом,

$$\begin{gathered} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1} B_k \cdot (a_k - a_{k+1}) + a_n \cdot B_n \right| \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |B_k| \cdot |a_k - a_{k+1} + |a_n| \cdot |B_n| \leqslant L \cdot \left(\sum_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| + |a_n| \right) = \\ = L \cdot (|a_1| + |a_n| + |a_n|) = L \cdot (|a_1| + 2 \cdot |a_n|). \end{gathered}$$

□

1. Пусть выполнены условия признака Абеля. Тогда $\exists M > 0 :\ |a_n| \leqslant M$. Пусть $\epsilon > 0$ задано. Возьмем номер $N :\ \forall n > N,\ \forall p > 0$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \right| < \epsilon^* = \frac{\epsilon}{3 \cdot M}.$$

Частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ имеют вид $S_n = a_1 \cdot b_1 + \dots + a_n \cdot b_n$. По критерию Коши найдем $N_1 :\ \forall n > N_1, \forall p > 0$

$$|S_{n+p} - S_n| < \epsilon,$$

$$\begin{gathered} |a_{n+1} \cdot b_{n+1} + a_{n+2} \cdot b_{n+2} + \dots + a_{n+p} \cdot b_{n+p}| \leqslant \\ \leqslant \epsilon^* \cdot (|a_{n+1}| + 2 \cdot |a_{n+p}|) \leqslant \epsilon^* \cdot 3 \cdot M = \frac{\epsilon}{3 \cdot M} = \epsilon \implies \end{gathered}$$

$\implies$ по критерию Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.

2. Пусть выполнены условия признака Дирихле. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то $\exists N :\ \forall n > N \quad (\epsilon > 0$ задано):

$$|a_n| < \frac{\epsilon}{3 \cdot k}, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant k.$$

По критерию Коши:

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} \cdot b_{n+1} + \ldots + a_{n+p} \cdot b_{n+p}| \overset{by\ lemma}{\leqslant}$$
$$\leqslant k \cdot (|a_{n+1}| + 2 \cdot |a_{n+p}|) < k \cdot \frac{3 \cdot \epsilon}{3 \cdot k} = \epsilon.$$

□

Пример 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot x)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin(n \cdot x)$

$a_n = \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. Оценим частичную сумму $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n \cdot x)$:

$$\sin x + \sin(2 \cdot x) + \sin(3 \cdot x) + \ldots + \sin(n \cdot x) =$$
$$= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \left(\sin x \cdot \sin \frac{x}{2} + \sin(2 \cdot x) \cdot \sin \frac{x}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3 \cdot x}{2} + \cdot \frac{3 \cdot x}{2} - \cos \frac{5 \cdot x}{2} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \cos \frac{(2 \cdot n - 1) \cdot x}{2} - \cos \frac{(2 \cdot n + 1) \cdot x}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{(2 \cdot n + 1) \cdot x}{2}\right) =$$
$$= \frac{2 \cdot \sin \frac{(n+1) \cdot x}{2} \cdot \sin \frac{n \cdot x}{2}}{2 \cdot \sin \frac{x}{2}}.$$

Тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(k \cdot x)\right| = \left|\frac{\sin \frac{(n+1) \cdot x}{2} \cdot \sin \frac{n \cdot x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{x}{2}},$$

$\frac{x}{2} \neq \pi \cdot k,\ k \in \mathbb{Z} \implies x \neq 2 \cdot \pi \cdot k,\ k \in \mathbb{Z}.$

По признаку Дирихле ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot x)}{n}$ сходится.

2.3 Свойства сходящихся рядов

Рассмотрим ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Если

$$(1-1)+(1-1)+\ldots+(1-1)+\ldots,$$
$$1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots$$

Пусть дан ряд

$$(A)\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Составим из ряда (A) ряд $(\widetilde{A})$:

$$\underbrace{(a_1+a_2+\ldots+a_{n_1})}_{\widetilde{a}_1}+$$
$$+\underbrace{(a_{n_1+1}+a_{n_1+2}+\ldots+a_{n_2})}_{\widetilde{a}_2}+\ldots+\underbrace{(a_{n_k+1}+\ldots+a_{n_k+1})}_{\widetilde{a}_{k+1}}+\ldots=$$
$$=\sum_{min}^{max}\sum_{min}^{max} a_n.$$

Теорема 2.3.1 (сочетательное свойство сходящихся рядов)**.**

1. Если ряд (A) сходится, то для любой возрастающей последовательности n_k ряд $(\widetilde{A})$ сходится и их суммы совпадают $(A=\widetilde{A})$;
2. Если ряд $(\widetilde{A})$ сходится и внутри каждой скобки знак не меняется, то ряд (A) сходится и их суммы совпадают, то есть $\widetilde{A}=A$.