Математический Анализ
3 семестр

Данил Заблоцкий

13 ноября 2023 г.

Оглавление

Глава 1

Название

1.1 Название

Следствие. D - область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ дифференцируема на D и $\forall x \in D$ $df(x) = 0$, то есть $\forall i$ $\frac{\delta f}{\delta x_i} = 0$. Тогда $f - const$.

Доказательство. $x_0 \in D$, $B(x_0, \rho) \subset D$, $\forall x \in B(x_0, \rho)$, $[x_0, x] \subset B(x_0, \rho) \subset D$. $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$. $f(x) - f(x_0) = 0 \implies f(x) = f(x_0)$.

Построим путь из точки x_0 к некоторой точке $x \in D$, $\gamma : [0; 1] \to D$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x$. По определению пути, γ - непрерывна. Тогда $\exists \delta :$

$$\forall 0 \leqslant t \leqslant \delta \implies \forall x \in B(x_0, \rho), \quad \gamma(t) \in B(x_0, \rho) \implies f(\gamma(t)) = f(x_0), \ t \in [0, \delta]$$

Пусть $\Delta = \sup \delta \implies f(\gamma(\Delta)) = f(x_0)$. Покажем, что $\Delta = 1$. Пусть $\Delta < 1(0 + 1)$. Построим шар $B(\gamma(\Delta), \rho_\Delta) \subset D$. Тогда $\exists \epsilon > 0 :$

$$\Delta - \epsilon < t < \Delta + \epsilon$$

Но тогда $f(\gamma(\Delta + \epsilon)) = f(x_0)$ (так как точка $\gamma(\Delta + \epsilon) \in B(\gamma(\Delta), \rho_\Delta)$). Это противоречит с тем, что $\Delta = \sup \delta \implies \Delta = 1 \implies \gamma(1) = x$, $f(x) = f(x_0) \implies$ так как $x \in D$ - произвольная точка, то имеем, что $\forall x \in D :$

$$f(x) = f(x_0) \implies f(x) - const$$

□

Теорема 1.1.1 (Достаточное условие дифференцируемости функции)**.** Пусть D - область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, f имеет непрерывную часть произведения в каждой окрестности точки $x \in D$.

Тогда f - дифференцируема в точке x.

Доказательство. Без ограничения общности, что окрестность точки $x_0 \in D$ является шаром $B(x_0, \rho) \subset D$.

Пусть $h : x_0 + h \in B(x_0, \rho)$. Здесь $x_0 = (x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n)$, $x_0 + h = (x^1 + h^1,\ x^2 + h^2,\ \dots,\ x^n + h^n)$. Заметим, что точки $x_1 = (x^1,\ x^2 + h^2,\ \dots,\ x^n + h^n)$, $x^2 = (x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n + h^n)$, $\dots$, $x_{n-1} = (x^1,\ x^2,\ \dots, x^{n-1}\ x^n + h^n) \in B(x_0, \rho)$.

$f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2) + f(x_2) - \dots - f(x_{n-1}) + f(x_{n-1}) - f(x_0) = f(x^1 + h^1,\ \dots,\ x^n + h^n) - f(x^1,\ x^2 + h^2,\ \dots,\ x^n + h^n) + f(x^1,\ x^2 + h^2,\ \dots,\ x^n + h^n) - f(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n + h^n) + f(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n + h^n) - \dots - f(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^{n-1},\ x^n) + f(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^{n-1},\ x^n + h^n) - f(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n) = |Lagranj\ theorem\ for\ 1\ variable| = \frac{\delta f}{\delta x_1}(x^1 + \theta^1 h^1,\ x^2 + h^2,\ \dots,\ x^n + h^n) \cdot h^1 + \frac{\delta f}{\delta x^2}(x^1,\ x^2 + \theta^2 h^2,\ \dots,\ x^n + h^n) \cdot h^2 + \dots + \frac{\delta f}{\delta x^n}(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n + \theta^n h^n) \cdot h^n$.

Используя непрерывность частных производных, запишем: $f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{\delta f}{\delta x_1}(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n) \cdot h^1 + \alpha^1(h^1) + \dots + \frac{\delta f}{\delta x_n}(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n) \cdot h^2 + \alpha^n(h^n)$, где $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ стремятся к нулю при $h \to 0$.

Это означает, что $f(x_0 + h) - f(x_0) = L(x_0) \cdot h + \underset{h \to 0}{o}(h)$, где $L(x_0) = \frac{\delta f}{\delta x_1}(x_0) h^1 + \dots + \frac{\delta f}{\delta x^n}(x_0) \cdot h^n = df(x_0) \implies$ по определению $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. □

1.2 Производные высших порядков

Определение 1.2.1 (Вторая производная по двум переменным)**.** Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, D - область в $\mathbb{R}^n$. Производная по переменной x^i от производной по переменной x^j называется **второй производной** функции f по переменным x^i, x^j и обозначается:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}(x), \quad f''_{x^i x^j}(x)$$

Теорема 1.2.1 (О смешанных производных)**.** Пусть D - область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x \in D$, f имеет в D непрерывно смешанные производные (2-го порядка).

Тогда эти производные не зависят от порядка дифференцирования.

Доказательство. Пусть $\frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta x^j \delta x^i}$ - непрерывны в точке $x \in D$. Так как остальные переменные фиксированы, то можно считать, что f зависит только от двух переменных.

Тогда $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$ - непрерывны в точке $x_0 = (x, y) \in D$.

Покажем, что $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$.

Рассмотрим функции $\phi(t) = f(x + t \cdot \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x + t \cdot \Delta x,\ y)$, $\psi(t) = f(x + \Delta x,\ y + t \cdot \Delta y) - f(x,\ y + t \cdot \Delta y)$, $t \in [0; 1]$.

Имеем, что $\phi(1) - \phi(0) = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) = f(x + \Delta x,\ y) - f(x,\ y + \Delta y) + f(x,\ y)$.

$\psi(1) - \psi(0) = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y + \Delta y) - f(x + \Delta x,\ y) + f(x,\ y)$.

Тогда $\phi(1) - \phi(0) = \psi(1) - \psi(0)$.

Тут нужно дописать, фотки в галерее □

Доказательство. Рассмотрим функцию $\phi(t) = f(x+th)$. Применим формулу Тейлора к $\phi(t)$:

$$\phi(1) = \phi(0) + \frac{1}{1!}\cdot\phi'(0)\cdot(1-0) + \frac{1}{2!}\cdot\phi''(0)\cdot(1-0)^2 + \frac{1}{3!}\cdot\phi'''(0)\cdot(1-0)^3 + \ldots + \frac{1}{k!}\cdot\phi^{(k)}\cdot(1-0)^k$$

$\phi(1) = f(x+h)$; $\phi(0) = f(x)$;

$$\phi'(0) = f'(x+th)\cdot(x+th)'_k\big|_{t=0} = \begin{pmatrix}\frac{\delta f(x+th)}{\delta x^1} & \frac{\delta f(x+th)}{\delta x^2} & \ldots & \frac{\delta f(x+th)}{\delta x^n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h^1\\ h^2\\ \vdots\\ h^n\end{pmatrix} =$$

$= \left(\frac{\delta f(x+th)}{\delta x^1}\cdot h' + \frac{\delta f(x+th)}{\delta x^2}\cdot h^2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x^n}(x+th)\cdot h^n\right)\big|_{t=0} = \frac{\delta f(x)}{\delta x^1}\cdot h^1 + \frac{\delta f}{\delta x^2}(x)\cdot h^2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x^n}(x)\cdot h^n = \left(\frac{\delta}{\delta x^1}\cdot h^1 + \ldots + \frac{\delta}{\delta x^n}\cdot h^n\right)f(x)$.

$\phi''(0) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\delta f(x+th)}{\delta x^i}h^i\right)'_t\big|_{t=0} = \left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\delta^2 f(x+th)}{\delta x^i\ \delta x^j}h^ih^j\right)\big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\delta^2 f(x)}{\delta x^i\ \delta x^j}h^ih^j = \left(\frac{\delta}{\delta x^1} + \ldots + \frac{\delta}{\delta x^n}h^n\right)^2 f(x)$

И так далее. Подстановки получившиеся выражаем в $(*)$ и получим искомое. □

1.3 Экстремумы функций многих переменных

Определение 1.3.1. Пусть X - метрическое пространство $f : X \to \mathbb{R}$. Точка $x_0 \in X$ называется **точкой локального максимума (минимума)**, если:

$$\exists u(x_0) \subset X :\ \forall x \in u(x_0) \quad f(x) \leqslant f(x_0)\ (f(x) \geqslant f(x_0))$$

Точки локального максимума и минимума называются **точками локального экстремума**.

Теорема 1.3.1 (Необходимое условие локального экстремума)**.** Пусть D - область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ - точка локального экстремума, тогда в точке x_0

$$\forall i = \overline{1,n} \quad \frac{\delta f(x_0)}{\delta x^i} = 0$$

Доказательство. Фиксируем все переменные за исключением x^i, тогда можно рассмотреть $f(x^1, \ldots, x^i, \ldots x^n)$ как функцию одной переменной, для которой x_0 - точка локального экстремума $\implies \frac{\delta f}{\delta x^i}(x_0) = 0$.

i - произвольная $\implies \forall i$ - выполняется. □

Определение 1.3.2. Пусть D - область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^k$ - дифференцируемо в точке $x_0 \in D$, x_0 называется **критической точкой функции** $f(x)$, если

$$rank\Im f(x_0) < min(n,k),$$

где $\Im f(x_0)$ - матрица Якоби функции $f(x_0)$.

Пример 1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \cdot y \\ y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\Im f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\delta u}{\delta x} & \frac{\delta u}{\delta y} & \frac{\delta u}{\delta z} \\ \frac{\delta v}{\delta x} & \frac{\delta v}{\delta y} & \frac{\delta v}{\delta z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} - (x_0) \text{ (критические точки)}$$

$n = 3,\ k = 2$

Множество точек прямой, получаемой пересечением плоскостей $x = 0$ и $y = 0$ - множество критических точек функции $f(x,y,z)$.

Определение 1.3.3. Пусть D - область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^n$, f имеет непрерывные вторые производные в точке $x_0 \in D$. На касательном пространстве $T\mathbb{R}^n_{(x_0)}$ определим квадратичную форму

$$Q(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}(x_0) h^i \cdot h^j$$

$$Q : T\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

02.10

Пример 2. $S = \mathbb{R}^n$ - поверхность в $\mathbb{R}^n$

$$t^i(x^i) = \frac{\pi}{2} \cdot \arctan x^i$$

$$\Im = \begin{pmatrix} \frac{\delta t^1}{\delta x^1} & \frac{\delta t^1}{\delta x^2} & \cdots & \frac{\delta t^1}{\delta x^n} \\ \frac{\delta t^2}{\delta x^1} & \frac{\delta t^2}{\delta x^2} & \cdots & \frac{\delta t^2}{\delta x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta t^n}{\delta x^1} & \frac{\delta t^n}{\delta x^2} & \cdots & \frac{\delta t^n}{\delta x^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x^1)^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x^2)^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x^n)^2} \end{pmatrix}$$

Утверждение 1.3.1. Пусть задана система уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{cases},$$

здесь $F^i(x) \in C^{(1)}$.

Кроме того,

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta x^1} & \cdots & \frac{\delta F^1}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^1} & \cdots & \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^n} \end{vmatrix}(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Тогда решение этой системы является k-мерной поверхностью в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. По теореме о неявной функции, система

$$\begin{cases} F^1(x^1,\dots,x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1,\dots,x^n) = 0 \end{cases}$$

эквивалентна системе

$$\begin{cases} x^{k+1} = f^1(x^1,\dots,x^k) \\ x^{k+2} = f^2(x^1,\dots,x^k) \\ \vdots \\ x^{n-k} = f^{n-k}(x^1,\dots,x^k) \end{cases}$$

Получим:

$$\begin{aligned} &t^1 = x^1 \\ &t^2 = x^2 \\ &\vdots \\ &t^k = x^k \\ &t^{k+1} = x^{k+1} - f^1(x^1,\dots,x^k) = 0 \\ &t^{k+2} = x^{k+2} - f^2(x^1,\dots,x^k) = 0 \\ &\vdots \\ &t^n = x^{n-k} - f^{n-k}(x^1,\dots,x^k) = 0 \end{aligned}$$

Таким образом построенное отображение является диффиоморфизмом $\Longrightarrow$ решение системы

$$\begin{cases} F^1(x^1,\dots,x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1,\dots,x^n) = 0 \end{cases} \quad \text{– } k\text{-мерная поверхность в } \mathbb{R}^n.$$

□

Определение 1.3.4 (Локальная карта или параметризация поверхности, касательное пространство)**.** Пусть S – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$ и $\phi : U(x_0) \to I^n$ - диффиоморфизм:

$$\phi(U(x_0) \cap S) = I^k$$

Ограничение ϕ^{-1} на I^k будем называть **локальной картой** или **параметризацией поверхности** S в окрестности точки x_0.

Касательным пространством (или плоскостью) к S в точке x_0 называется k-мерная плоскость, заданная уравнением

$$x = x_0 + x'(0) \cdot t, \quad x_0 = (x_0^1, x_0^1, \dots, x_0^n)$$

$$x(t) = \begin{cases} x^1(t^1,\dots,t^k) \\ x^2(t^1,\dots,t^k) \\ \vdots \\ x^n(t^1,\dots,t^k) \end{cases}, \quad x'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\delta x^1}{\delta t^1} & \dots & \frac{\delta x^1}{\delta t^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta x^n}{\delta t^1} & \dots & \frac{\delta x^n}{\delta t^k} \end{pmatrix}(t)$$

Таким образом касательное пространство задается системой (из $x = x_0 + x'(0) \cdot t$)

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + \frac{\delta x^1}{\delta t^1}(0)t^1 + \ldots + \frac{\delta x^1}{t^k}(0)t^k \\ x^2 = x_0^2 + \frac{\delta x^2}{\delta t^1}(0)t^1 + \ldots + \frac{\delta x^2}{t^k}(0)t^k \\ \vdots \\ x^n = x_0^n + \frac{\delta x^n}{\delta t^1}(0)t^1 + \ldots + \frac{\delta x^n}{t^k}(0)t^k \end{cases}$$

Пример 3. 1. Пусть $\gamma = \gamma(t)$ - гладкая кривая в $\mathbb{R}^3$, $\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$.

Обозначим $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$, $z_0 = z(0)$.

$x = x_0 + x'(0) \cdot t :$ $x = x_0 + x'(0) \cdot t$ - касательное пространство к кривой γ в точке x_0

$$\begin{cases} x = x_0 + x'(0) \cdot t \\ y = y_0 + y'(0) \cdot t \\ z = z_0 + z'(0) \cdot t \end{cases}, \text{ иначе } \begin{cases} x - x_0 = x'(0) \cdot t \\ y - y_0 = y'(0) \cdot t \\ z - z_0 = z'(0) \cdot t \end{cases}$$

$$\frac{x - x_0}{x'(0)} = \frac{y - y_0}{y'(0)} = \frac{z - z_0}{z'(0)} = t$$

2. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Пусть $z_0 > 0$, тогда в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) сферу можно параметризовать следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{1 - u^2 - v^2} \end{cases}$$

Касательное пространство к сфере в точке (x_0, y_0, z_0):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta x}{\delta v} \\ \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta v} \\ \frac{\delta z}{\delta u} & \frac{\delta z}{\delta v} \end{pmatrix} (u_0, v_0) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{\delta x}{\delta u}(u_0, v_0) \cdot u + \frac{\delta x}{\delta v}(u_0, v_0) \cdot v \\ y = y_0 + \frac{\delta y}{\delta u}(u_0, v_0) \cdot u + \frac{\delta y}{\delta v}(u_0, v_0) \cdot v \\ z = z_0 + \frac{\delta z}{\delta u}(u_0, v_0) \cdot u + \frac{\delta z}{\delta v}(u_0, v_0) \cdot v \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + u \\ y = y_0 + v \\ z = z_0 - \frac{u_0}{\sqrt{1 - u_0^2 - v_0^2}} \cdot u - \frac{v_0}{\sqrt{1 - u_0^2 - v_0^2}} \cdot v \end{cases}$$

Утверждение 1.3.2. Пусть S – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1,\dots,x^n)=0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1,\dots,x^n)=0, \end{cases} \text{, причем } \begin{vmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta x^{k+1}} & \dots & \frac{\delta F^1}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^{n-1}}{\delta x^{k+1}} & \dots & \frac{\delta F^{n-1}}{\delta x^n} \end{vmatrix} (x_0) \neq 0.$$

Тогда касательная плоскость к S в точке x_0 задается системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\delta F^1}{\delta x^1}(x_0)\cdot(x^1-x_0^1)+\frac{\delta F^1}{\delta x^2}(x_0)(x^2-x_0^2)+\ldots+\frac{\delta F^1}{\delta x^n}(x_0)(x^n-x_0^n)=0 \\ \vdots \\ \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^1}(x_0)\cdot(x^1-x_0^1)+\frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^2}(x_0)(x^2-x_0^2)+\ldots+\frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^n}(x_0)(x^n-x_0^n)=0 \end{cases}$$

или кратко

$$F'(x_0)\cdot(x-x_0)=0$$

Доказательство. Обозначим $(x^1,\dots,x^k)=u,\ (x^{k+1},\dots,x^n)=v$

$$F=\begin{pmatrix} F^1 \\ \vdots \\ f^{n-k} \end{pmatrix}$$

Тогда условия утверждения запишем в виде:

$$F(u,v)=0,\quad |F'_v(u_0,v_0)|\neq 0$$

Тогда по теореме о неявной функции система $\begin{cases} F^1(x^1,\dots,x^n)=0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1,\dots,x^n)=0, \end{cases}$ эквивалентна системе

$$\begin{cases} u=u \\ v=f(u) \end{cases}$$

Тогда касательная плоскость задается (роль $t=\begin{pmatrix} t^1 \\ \vdots \\ t^k \end{pmatrix}$ играет $u=\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^k \end{pmatrix}$).

Тогда систему можно записать в виде:

$$\begin{cases} x^1=t^1 \\ \vdots \\ x^k=t^k \\ x^{k+1}=f^1(t^1,\dots,t^k) \\ \vdots \\ x^n=f^{n-k}(t^1,\dots,t^k) \end{cases}$$

$$t_0=(t_0^k,\dots,t_0^k)=(x_0^1,\dots,x_0^k)$$

$$x'(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{\delta x^1}{\delta t^1} & \dots & \frac{\delta x^1}{\delta t^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta x^k}{\delta t^1} & \dots & \frac{\delta x^k}{\delta t^k} \\ \frac{\delta f^1}{\delta t^1} & \dots & \frac{\delta f^1}{\delta t^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^1} & \dots & \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^k} \end{pmatrix}(t_0)$$

$$x = x_0 + x'(t_0) \cdot t$$

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + 1 \cdot t^1 \\ \vdots \\ x^k = x_0^k + 1 \cdot t^k \\ x^{k+1} = x^{k+1} + \frac{\delta f^1}{\delta t^k}(t_0) \cdot t^1 + \dots + \frac{\delta f^1}{\delta t^k}(x_0) t^k \\ \vdots \\ x^n = x^n + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^k}(t_0) t^1 + \dots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^k}(x_0) t^k \end{cases}, \qquad \begin{array}{l} u = (x^1, \dots, x^k) \\ v = (x^{k+1}, \dots, x^n) \\ \begin{cases} u = u \\ v = f(u) \end{cases} \end{array}$$

$$f'(u_0) = -[F'_x(u_0, v_0)]^{-1} \cdot F'_u(u_0, v_0)$$

$$\begin{cases} x^1 - x_0^1 = t^1 \\ \vdots \\ x^k - x_0^k = t^k \\ x^{k+1} - x_0^{k+1} = \frac{\delta f^1}{\delta t^k}(t_0) \cdot (x^1 - x_0^1) + \dots + \frac{\delta f^1}{\delta t^k}(x_0) \cdot (x^k - x_0^k) \\ \vdots \\ x^n - x_0^n = \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^k}(t_0) \cdot (x^1 - x_0^1) + \dots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^k}(x_0) \cdot (x^k - x_0^k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u - u_0 = u - u_0 \\ v - v_0 = f'(u_0) \cdot (u - u_0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u - u_0 = u - u_0 \\ v - v_0 = -[F'_v(u_0, v_0)]^{-1} \cdot F'_u(u_0, v_0) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$[F'_v(u_0, v_0)](v - v_0) + F'_u(u_0, v_0) \cdot (u - u_0) = 0 \qquad \square$$

Итак, мы вывели, что если поверхность задана линейным уравнением $\begin{cases} F'(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases}$ или $P(x) = 0$, $F = \begin{pmatrix} F'(x) \\ \vdots \\ F^{n-k}(x) \end{pmatrix}$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$.

Тогда уравнение касательной плоскости кратко записывается:

$$F'_x(x_0) \cdot (x - x_0) = 0$$

Обозначим $x - x_0 = \xi$, то есть:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - x'_0 \\ \vdots \\ x^n - x_0^n \end{pmatrix}$$

Таким образом получаем, что уравнение касательной пространства имеет вид:

$$F'_x(x_0) \cdot \xi = 0$$

Таким образом касательнаое пространство к поверхности заданной уравнением $F(x) = 0$ в точке x_0 состоит из векторов ξ, удовлетворяет уравнению

$$F'_x(x_0) \cdot \xi = 0 \tag{1.1}$$

Теорема 1.3.2 (О структуре касательных пространства)**.** Пусть S – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$. Тогда касательное пространство TS_{x_0} в точке x_0 состоит из направляющих векторов касательных к гладким кривым на поверхности S, проходящих через точку x_0.

Доказательство. Пусть $x = x(t)$ – гладкая кривая в $\mathbb{R}^n$, то есть
$\begin{cases} x' = x'(t) \\ \vdots \\ x^n = x^n(t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, $x_0 = x(t_0)$

Касательный вектор в точке x_0 к кривой имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{dx'}{dt}(t_0) \\ \vdots \\ \frac{dx^n}{dt}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{1'}(t_0) \\ \vdots \\ x^{1n}(t_0) \end{pmatrix}$$

1. Пусть S – k-мерная поверхность, задана системой уравнений $F(x) = 0$ и пусть $x = x(t)$ – гладкая кривая на S. Покажем, что вектор $x'(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{dx'}{dt}(t_0) \\ \vdots \\ \frac{dx^n}{dt}(t_0) \end{pmatrix}$, $x'(t_0) \in TS_{x_0}$, $x_0 = x(t_0)$, то есть покажем, что $x'(t_0)$ удовлетворяет уравнению $F'_x(x_0) \cdot \xi = 0$.

   Так как кривая $x = x(t)$ лежит на S, то $F(x(t)) = 0$ – верно. Продифференцируем $F(x(t)) = 0$ по t в точке x_0:

   $$F'_x(x_0) \cdot x'(t_0) = 0$$

   – это и есть уравнение касательного пространства, то есть $x'(t_0)$ удовлетворяет уравнению касательной кривой $F'_x(x_0) \cdot \xi = 0$.

2. Пусть $\xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) \in TS_{x_0}$, то есть ξ удовлетворяет уравнению $F'_x(x_0) \cdot \xi = 0$

Покажем, что $\exists$ гладкая кривая l на поверхности S:

1. $x_0 \in l$

2. ξ явявяется направляющим вектором касательной к l в точке x_0

Поверхность S задана системой уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x) = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Пусть

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta F'}{\delta x^{k+1}} & \cdots & \frac{\delta F'}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^{k+1}} & \cdots & \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^n} \end{vmatrix} (x_0) \neq 0$$

По теореме о неявной функции, система (1.4) эквивалентна системе

$$\left\{ \begin{array}{l} x^{k+1} = f^1(x^1, \ldots, x^k) \\ \vdots \\ x^n = f^{n-k}(x^1, \ldots, x^k) \end{array} \right\} \tag{1.3}$$

Обозначим $u = (x', \ldots, x^k)$, $v = (x^{k+1}, \ldots, x^n)$, тогда (1.3) имеет вид

$$v = f(u)$$

Тогда по утверждению касательное пространство задается уравнениями:

$$\begin{cases} x^{k+1} = x_0^{k+1} + \frac{\delta f'}{\delta x'}(x_0)(x' - x_0') + \ldots + \frac{\delta f^1}{\delta x^k}(x_0)(x^k - x_0^k) \\ \vdots \\ x^n = x_0^n + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^1}(x_0)(x' - x_0') + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^k}(x_0)(x^k - x_0^k) \end{cases} \tag{1.4}$$

Пусть

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta' \\ \vdots \\ \eta^k \\ \eta^{k+1} \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 - x_0^1 \\ \vdots \\ x^k - x_0^k \\ x^{k+1} - x_0^{k+1} \\ \vdots \\ x^n - x_0^n \end{pmatrix}$$

Тогда система (1.4) примет вид

$$\begin{cases} \eta^{k+1} = \frac{\delta f'}{\delta x'}(x_0) \cdot \eta' + \ldots + \frac{\delta f'}{\delta x^k}(x_0) \cdot \eta^k \\ \vdots \\ \eta^n = \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x'}(x_0) \cdot \eta' + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^k}(x_0) \cdot \eta^k \end{cases} \tag{1.5}$$

Таким образом, если вектор $\xi \in TS_{x_0}$, то он полностью определяется своими первыми k координатами, а остальные можно волучить с помощью системы (1.5).

Построим кривую в $\mathbb{R}^n$, то есть зададим ее уравнением $x = x(t)$:

$$l: \begin{cases} x' = x_0' + \xi' t \\ \vdots \\ x^k = x_0^k + \xi^k t \\ x^{k+1} = f^1(x_0' + \xi' t, \dots, x_0^k + \xi^k t) \\ \vdots \\ x^n = f^{n-k}(x_0' + \xi' t, \dots, x_0^k + \xi^k t) \end{cases}, \quad v = f(u) \tag{1.6}$$

Пусть точка x_0 соответствует параметру $t = 0$

$$x(0) = \begin{cases} x' = x_0' \\ \vdots \\ x^k = x_0^k \\ x^{k+1} = f^1(x_0', \dots, x_0^k) \\ \vdots \\ x^n = f^{n-k}(x_0', \dots, x_0^k) \end{cases},$$

то есть кривая проходит через точку x_0.

Далее, функция f удовлетворяет условию $v = f(u) \iff F(u, v) = 0$. Тогда $F(u, f(u)) = 0 \implies l$, заданная система (1.6), $l \subset S$.

Таким образом построили гладкий путь, лежащий на поверхности S, проходящий через точку $x_0 \in S$, вектор $x'(t_0)$ – его касательный вектор $\in TS_{x_0}$ $\square$

1.4 Условный экстремум функции многих переменных

Задача. Дана функция $u = f(x^1, \dots, x^n)$ и дана поверхность, заданная уравнениями:

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^k(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

Нужно найти точку $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$, в которой

$$f(x_0^1, \dots, x_0^n) = \max_{(\min)} f(x^1, \dots, x^n),$$

где max (min) берется по всем точкам $(x_0^1, \dots, x_0^n)$, удовлетворяющих уравнениям (1.7).

Геометрическая формулировка.

Задача. Пусть система (1.7) задает в пространстве $\mathbb{R}^n$ m-мерную поверхность S. Найти точку $x_0 \in S$:

$$\exists\, U_x(x_0) = U(x_0) \cap S : \quad \forall x \in U_s(x_0)$$

$$\underset{x_0 - \max}{f(x) \leqslant f(x_0)} \text{ (или } \underset{x_0 - \min}{f(x) \geqslant f(x_0)})$$

Определение 1.4.1 (линия уровня (c-уровень))**.** Пусть $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ – область. **Линией уровня (c-уровнем)** функции f называется множество

$$N_c = \{x \in D \mid f(x) = c\}$$

Теорема 1.4.1 (необходимое условие условного локального экстремума)**.** Пусть система уровнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

задает $(n-k)$-мерную гладкую поверхность S в $D \subset \mathbb{R}^n$, D – область. Функция $f : D \to \mathbb{R}$ – гладкая. Если $x_0 \in S$ является точкой условного локального экстремума для функции f, то существует такой набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$:

$$grad f(x_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot grad F^i(x_0)$$

Доказательство теоремы.

Лемма 1.4.1. Если x_0 – точка условного локального экстремума для функции f и x_0 не является критической для функции f (то есть $df(x_0) \neq 0$), то касательное пространство $TS_{x_0} \subset TN_{x_0}$, где

$$N_{x_0} = \{x \in D \mid f(x) = f(x_0)\}$$

– поверхность уровня, проходящая через x_0.

Доказательство леммы. Пусть $\xi \in TS_{x_0}$. Пусть $x = x(t)$ – гладкая кривая на S : $x(0) = x_0,\ x'(0) = \xi$.

Так как точка x_0 – условный экстремум, для функции f, то точка $t = 0$ есть локальный экстремум для функции $f(x(t)) \underset{th.\ Fermat's}{\Longrightarrow}$

$$[f(x(t))]'_t(0) = 0 \iff f'_x(x_0) \cdot x'_t(0) = 0 \tag{1.9}$$

Касательное пространство к N_{x_0} в точке x_0 имеет уравнение:

$$f'_x(x_0) \cdot \xi = 0 \tag{1.10}$$

Заметим, что (1.9) и (1.10) – одно и то же уравнение, то есть

$$x'_t(0) = \xi \implies x'_t(0) \in TN_{x_0}$$

□

Касательное пространство TS_{x_0} задается уравнениями

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta F^1}{\delta x^1}(x_0)\cdot\xi^1 + \ldots + \frac{\delta F^1}{\delta x^n}(x_0)\cdot\xi^n = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^1}(x_0)\cdot\xi^1 + \ldots + \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^n}(x_0)\cdot\xi^n = 0 \end{array} \right., \tag{1.11}$$

но $\forall i = \overline{1, n-k}$:

$$\left\{\frac{\delta F^i}{\delta x^1}\cdot(x_0);\ldots;\frac{\delta F^i}{\delta x^n}\right\} = gradF^i(x_0)$$

Перепишем (1.11) в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} (gradF^1(x_0),\xi) = 0 \\ \vdots \\ (gradF^{n-k}(x_0,),\xi) = 0 \end{array} \right. \tag{1.12}$$

Касательное пространство TN_{x_0} к $N_{x_0} = \{x \in D \mid f(x) = f(x_0)\}$ задается уравнением: $f'(x_0)\cdot\xi = 0$. Заметим, что $f'(x_0) = gradf(x_0) = \left\{\frac{\delta f(x_0)}{\delta x^1},\ldots,\frac{\delta f(x_0)}{\delta x^n}\right\} \implies f'(x_0)\cdot\xi = 0 \iff$

$$\iff (fradf(x_0),\xi) = 0 \tag{1.13}$$

Таким образом из леммы следует, что $\forall\xi$ удовлетворяет системе уравнений (1.12), так же удовлетворяет уравнению (1.13), то есть из того, что $\forall i \in \overline{1, n-k}\ \xi \perp gradF^i(x_0) \implies \xi \perp fradf(x_0) \implies \exists\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$:

$$fradf(x_0) = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \cdot gradF^i(x_0)$$

□

Метод Лагранжа

Пусть требуется найти условный экстремум функции $f : D \to \mathbb{R}$, D – область в $\mathbb{R}^n$, на поверхности S, заданной системой уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} F^1(x^1,\ldots,x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^k(x^1,\ldots,x^n) = 0 \end{array} \right.$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda) = L(x^1,\ldots,x^n,\lambda^1,\ldots,\lambda^k) =$$

$$= f(x^1,\ldots,x^n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda^i \cdots F^i(x^1,\ldots,x^n),$$

$\lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^k)$, $\lambda^i \in \mathbb{R}$ – коэффициент, в общем случае пока неизвестен. Необходимое условие локального экстремума для функции L:

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x^1} = \frac{\delta f}{\delta x^1} + \sum_{i=1}^k \lambda^i \cdot \frac{\delta F^i}{\delta x^1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta L}{\delta x^n} = \frac{\delta f}{\delta x^n} + \sum_{i=1}^k \lambda^i \cdot \frac{\delta F^i}{\delta x^n} = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda^1} = F^1(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda^k} = F^k(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{cases} \tag{1.14}$$

Определение 1.4.2 (условный экстремум)**.** Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, S – поверхность в D, **условным экстремумом** функции f называется экстремум функции $f\big|_S$.

Достаточное условие условного локального экстремума

Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, $f \in C^{(2)}(D, \mathbb{R})$, S – $(n-k)$-мерная поверхность в D, заданная системой уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^k(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{cases}.$$

Функция Лагранжа

$$L(x, \lambda) = f(x^1, \ldots, x^n) + \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \cdot F^i(x^1, \ldots, x^n).$$

Здесь $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ выбираются таким образом, чтобы было выполнено необходимое условие условного экстремума в точке x_0.

Теорема 1.4.2 (достаточное условие условного экстремума)**.** Если при введенных выше условиях квадратичная форма

$$Q(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 L}{\delta x^i \delta x^j}(x_0) \cdot \xi^i \cdot \xi^j,$$

$$(\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n))$$

Если:

1. Определена на TS_{x_0}
   (a) Если Q знакоположительная, то точка x_0 – точка условного локального min

(b) Если Q знакоотрицательная, то точка x_0 – точка условного локального max

2. Если Q может принимать значения разных знаков, то в точке x_0 условного экстремума не наблюдается

Доказательство. Заметим, что $f\big|_S$ и $L\big|_S$ совпадают. В самом деле, если $x \in S$, то

$$L(x, \lambda) = f(x) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot F^i(x) = f(x).$$

Поэтому покажем, что условие знакопостоянства Q является достаточным для экстремума функции $L\big|_s$.

Имеем, что

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x^1}(x_0) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta L}{\delta x^n}(x_0) = 0 \end{cases}$$

По формуле Тейлора:

$$L\big|_S(x) - L(x_0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i \delta x^j}(x^i - x_0^i) \cdot (x^j - x_0^j) + o(||x - x_0||^2) \tag{1.15}$$

Так как S – m-мерная ($m = n - k$) поверхность, то существует гладкое отображение $x(t) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n :\ x = x(t) \subset S\ \forall t \in \mathbb{R}^m,\ x(0) = x_0$. Отображение $x(t)$ биективно отображает $\mathbb{R}^{>}$ на $U_S(x_0) = U(x_0) \cap S$.

Если $x \in S$, то условие дифференцируемости $x(t)$:

$$x - x_0 = x(t) - x(0) = x'(0) \cdot t + o(||t||)$$

или

$$\begin{cases} x^1 - x_0^1 = \frac{\delta x^1}{\delta t^1}(0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta x^1}{\delta t^m}(0) \cdot t^m + d(||t||) \\ \vdots \\ x^n - x_0^n = \frac{\delta x^n}{\delta t^1}(0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta x^n}{\delta t^m}(0) \cdot t^m + d(||t||) \end{cases}$$

или кратко

$$\begin{cases} x^1 - x_0^1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\delta x^1}{\delta t^i}(0) \cdot t^i + o(||t||) \\ \vdots \\ x^n - x_0^n = \sum_{i=1}^{m} \frac{\delta x^n}{\delta t^i}(0) \cdot t^i + o(||t||) \end{cases} \tag{1.16}$$

Подставим (1.16) в (1.15):

$$L\big|_S(x) - L(x_0) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i \delta x^j} \cdot (\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0) \cdot t^\alpha + o(||t||))\cdot$$

$$\cdot (\sum_{\beta=1}^{m} \frac{\delta x^j}{\delta t^\beta}(0) \cdot t^\beta + o(||t||)) + o(||x - x_0||^2) \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i \delta x^j} \cdot \big[(\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0) \cdot t^\alpha) \cdot (\sum_{\beta=1}^{m} \frac{\delta x^i}{\delta t^\beta}(0) \cdot t^\beta) +$$

$$+ (\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0) t^\alpha) \cdot o(||t||) + (\sum_{\beta=1}^{m} \frac{\delta x^i}{\delta t^\beta}(0) \cdot t^\beta)\cdot$$

$$\cdot o(||t||) + o(||t||)\big] + o(||x - x_0||^2) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i \delta x^j}\cdot$$

$$\cdot \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha} \cdot \frac{x^i}{\delta t^\beta} \cdot t^\alpha \cdot t^\beta + o(||t||^2) = \frac{||t||^2}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i \delta x^j}\cdot$$

$$\cdot \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha} \cdot \frac{\delta x^j}{\delta t^\beta} \cdot \frac{t^\alpha}{||t||} \cdot \frac{t^\beta}{||t||} + o(||t||^2) = \frac{||t||^2}{2} Q(\xi) + o(||t||^2).$$

Таким образом получаем, что

$$L\big|_S(x) - L(x_0) = \frac{||t||^2}{2} \cdot Q(\xi) + o(||t||^2),\ \xi \in TS_{x_0}.$$

Тогда, если $Q > 0$, то

$$L\big|_S(x) - L(x_0) > 0 \implies x_0 \ \min\ L\big|_S(x) \implies x_0 \ \min\ f\big|_S.$$

Если $Q < 0$, то

$$L\big|_S(x) - L(x_0) < 0 \implies x_0 \ \max\ L\big|_S(x) \implies x_0 \ \max\ f\big|_S \ (\forall x \in U_S(x_0))$$

Если Q – знакопеременна, то $x(t)$ не для всех $x \in U_S(x_0)$ разность $L\big|_S(x) - L(x_0)$ имеет постоянный знак $\implies$ в этом случае в точке x_0 нет экстремума.

Докажем $(*)$, то есть покажем, что

$$o(||t||) \cdot \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha} \cdot t^\alpha = o(||t||^2)$$

и

$$o(||x - x_0||^2) = o(||t||^2),\ x \in S.$$

В самом деле,

$$\left| \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0) \cdot t^\alpha \right| \leqslant \sum_{\alpha=1}^{m} \left| \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0) \right| \cdot \left| t^\alpha \right| \leqslant ||t|| \cdot \sum_{\alpha=1}^{m} \left| \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0) \right| = A \cdot ||t||$$

Таким образом,

$$o(||t||)\cdot\left|\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\delta x^i(0)}{\delta t^\alpha}\cdot t^\alpha\right| \leqslant o(||t||)\cdot O(||t||) = \omega(t)\cdot||t||\cdot\gamma(t)\cdot||t|| =$$

$$= \left|\text{ где } \omega(t)\to 0 \text{ при } t\to 0,\ \gamma(t) \text{ – ограниченная функция }\right| =$$

$$= \alpha(t)\cdot||t||^2 = o(||t||^2),\ \ \alpha(t)\to 0,\ \ t\to 0$$

Далее, если $x\in S$, то

$$||x-x_0||^2 = \left\|\begin{pmatrix} x^1 - x_0^1 \\ \vdots \\ x^n - x_0^n \end{pmatrix}\right\|^2 \overset{(1.16)}{=} \left\|\begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha}\cdot t^\alpha + \dots \\ \vdots \\ \sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha}\cdot t^\alpha + \dots \end{pmatrix}\right\|^2 =$$

$$= \left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha}\cdot t^\alpha + o(||t||)\right)^2 + \dots + \left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha} + o(||t||)\right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha}\cdot t^\alpha\right)^2 + \dots + \left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha}\right)^2 + o(||t||^2) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\max_\alpha \frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha}\right)^2\cdot\left(\frac{\alpha = 1}{m} t^\alpha\right)^2 + \dots + \left(\max_\alpha(\frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha})\right)^2\cdot(\sum_{\alpha=1}^n t^\alpha)^2 \leqslant$$

$$\leqslant ||t||^2\cdot$$

ДОПИСАТЬ □

Глава 2

Теория рядов

2.1 Числовые ряды

Определение 2.1.1 (ряд, член ряда, n-мерный член ряда, частичная сумма)**. Рядом** называется выражение

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

где $a_i \in \mathbb{R}$.

Числа a_i называются **членами ряда**, a_n – n**-мерным членом ряда**.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2.1}$$

Рассмотрим числа:
$$\begin{aligned} &A_1 = a_1 \\ &A_2 = a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ &A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \end{aligned}$$

Числа $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются **частичными суммами** ряда (2.1)

Определение 2.1.2. Говорят, что ряд (2.1) сходится, если существует конечный предел частичных сумм, то есть

$$\exists \lim_{n\to\infty} A_n = A.$$

Тогда сумма бесконечного ряда (2.1) полагается равной

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Пример 4.

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^n} + \ldots = 10 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k}$$

$$A_n = \frac{1}{10^0} + \frac{1}{10^1} + \ldots + \frac{1}{10^n} = \frac{1 \cdot (q^k - 1)}{q - 1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{10^n} - 1}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9} \cdot (1 - \frac{1}{10^n})$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{9}(1 - \frac{1}{10^n}) = \frac{10}{9}$$

2.1.1 Гармонический ряд

Определение 2.1.3 (среднее гармоническое). Число C называется **средним гармоническим** чисел a и b $(a, b \neq 0)$, если

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$$

Определение 2.1.4. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{2.2}$$

называется **гармоническим**.

Покажем, что (2.2) расходится.

В самом деле,

$$\underbrace{1}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geqslant\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}}_{>\frac{1}{2}} + \ldots$$

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \quad \ldots \quad + \frac{1}{n}$$

$$\forall E > 0 \ \exists N: \ \forall n > N \quad |A_n| > E$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \infty$$

2.1.2 Основные свойства сходящихся рядов

Теорема 2.1.1 (критерий Коши). Ряд (2.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится тогда и только тогда, когда $\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n > N, \ \forall p > 0$

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \epsilon$$

Доказательство. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}$ сходится $\underset{by\ def.}{\iff}$ $\exists \lim\limits_{n\to} A_n \iff A_n$ – фундаментальная последовательность: $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N$ и $\forall p > 0$

$$|A_n - A_{n+p}| < \epsilon$$

(критерий Коши сходимости последовательности)

Имеем

$$\begin{aligned} &|A_n - A_{n+p}| = \\ &\qquad = |a_1 + a_2 + \ldots + a_n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots + a_{n+p})| = \\ &\qquad\qquad = |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \epsilon. \end{aligned}$$

□

Пример 5. Докажем, что ряд (2.2) расходится.

Если $\exists \epsilon > 0\ \forall N\ \exists n > N\ \exists p > 0$

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| \geqslant \epsilon$$

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right| \geqslant \left|\frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right| = \\ &\qquad = \frac{p}{n+p} = |n = p| = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

то есть для $\forall N:\ \ \epsilon = \frac{1}{2}\ \ p = n,\ n = N + 1 \implies$ по критерию Коши, гармонический ряд (2.2) расходится.

Замечание. Со всякой последовательностью x_n можно связать ряд, частичными суммами которого являются члены этой последовательности. Пусть:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

Тогда ряд

$$\underbrace{x_1}_{a_1} + \underbrace{(x_2 - x_1)}_{a_2} + \underbrace{(x_3 - x_2)}_{a_3} + \ldots + \underbrace{(x_n - x_{n-1})}_{a_n} + \ldots$$

$$A_n = a_1 + \ldots + a_n = x_1 + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) = x_n$$

Теорема 2.1.2 (необходимое условие сходимости ряда)**.** Если ряд (2.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, тогда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Доказательство. Пусть ряд (2.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}(A_n - A_{n-1}) = \\ = \lim_{n\to\infty} A_n - \lim_{n\to\infty} A_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

□

Определение 2.1.5 (m-ный остаток)**.** Пусть дан ряд (2.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ряд вида

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \tag{2.3}$$

называется m**-ным остатком** ряда (2.1)

Теорема 2.1.3 (об остатке ряда)**.** Следующие условия эквивалентны:

1. Ряд (2.1) сходится
2. $\forall$ его состаток сходится
3. Некоторый его остаток (2.2) сходится

Доказательство.

- 1. $\implies$ 2.

  Пусть ряд (2.1) сходится и его сумма равна A.

  Пусть

  $$A_k^* = \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n$$

  – k-тая частичная сумма ряда (2.2).

  Ряд (2.2) сходится, если $\exists \underset{k\to\infty}{A_k^*}$:

  $$A_k^* = A_{m+k} - A_m$$

  $$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} A_k^* &= \lim_{k\to\infty}(A_{m+k} - A_n) = \\ = \lim_{k\to\infty} A_{m+k} - \lim_{k\to\infty} A_m &= A - A_m \end{aligned}$$

- 2. $\implies$ 3. – очевидно
- 3. $\implies$ 1.

  Пусть ряд (2.1)
  $$\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n$$
  – сходится.

  Тогда при $n > m$
  $$A_n = A_m + A^*_{n-m} = \sum_{k=m+1}^{m+(n-m)} a_k$$

  Ряд (2.1)
  $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
  сходится тогда и только тогда (по определению), когда
  $$\exists \lim_{n\to\infty} A_n.$$

  Рассмотрим
  $$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} A_n &= \lim_{n\to\infty} (A_m + A^*_{n-m}) = \\ &= \lim_{n\to\infty} A_m + \lim_{n\to\infty} A_{n-m} \end{aligned}$$

  $\implies \exists \lim_{n\to\infty} A_n \implies$ (2.1) – сходится.

□

Обозначим α_m – сумма m-того остатка ряда (2.1) = сумме ряда (2.2)

$$\alpha_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$$

((2.1) сходится в этом случае)

Следствие. Ряд (2.1) сходится $\iff \lim_{m\to\infty} \alpha_m = 0$

Доказательство. Самостоятельно ⌣̈ □

Определение 2.1.6. Пусть даны ряды

$$(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n; \quad (B) \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

ДОПИСАТЬ

Теорема 2.1.4 (1-ый признак сравнения)**.** Пусть даны ряды

$$(A)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n; \quad (B)\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Причем $a_n > 0,\ b_n > 0\ \forall n.$
Если $\exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N \quad a_n \leqslant b_n$, то

1. Из сходимости ряда $(B) \implies$ сходимость ряда (A)
2. Из сходимости ряда $(A) \implies$ сходимость ряда (B)

Доказательство. 1. Пусть ряд (B) – сходится $\implies$ по теореме 2.2.1 его частичные суммы ограничены $\implies$ по неравенству $a_n \leqslant b_n$ частичные суммы ряда (A) также ограничены $\implies$ по 2.2.1 ряд (A) сходится.

2. Аналогично

□

Теорема 2.1.5 (2-ой признак сравнения)**.** Пусть даны ряды

$$(A)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n; \quad (B)\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Причем $a_n > 0,\ b_n > 0\ \forall n.$
Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k,\ k \in [0; \infty]$, то

1. При $k = \infty$ из сходимости $(A) \implies$ сходимость ряда (B)
2. При $k = 0$ из сходимости ряда $(B) \implies$ сходимость ряда (A)
3. При $0 < k < \infty$ $(k = const \neq 0)$ ряды (A) и (B) ведут себя одинаково

Доказательство. Переписать доказательство для несобственных интегралов, заменив слово "интеграл"на слово "ряд". □

Теорема 2.1.6 (3-й признак сравнения)**.** Пусть даны ряды

$$(A)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n; \quad (B)\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Причем $a_n > 0,\ b_n > 0\ \forall n.$
Если $\exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

то

1. Из сходимости ряда $(B) \implies$ сходимость ряда (A)
2. Из расходимости ряда $(A) \implies$ расходимость ряда (B)

Доказательство. Можно считать, что $N = 0$.

Тогда $\forall n > N$ имеем:

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{b_2}{b_1}; \quad \frac{a_3}{a_2} \leqslant \frac{b_3}{b_2}; \quad \frac{a_4}{a_3} \leqslant \frac{b_4}{b_3}; \quad \dots; \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Перемножим левые и правые части:

$$\frac{a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{n+1}}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot \ldots \cdot b_{n+1}}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_n},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_1} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n} \implies a_{n+1} \leqslant \frac{a_1}{b_1} \cdot b_{n+1}.$$

1. Если ряд (B) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится $\implies$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} \cdot b_{n+1} \implies$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

2. Аналогично

$\square$

Теорема 2.1.7 (интегральный признак Коши-Маклорена)**.** Пусть дан положительный ряд

$$(A) \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Если функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $f(x): \ [1; +\infty] \to \mathbb{R}$

2. $f(x)$ – монотонна

3. $f(x) = a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

тогда ряд (A) и интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ ведут себя одинаково

Доказательство. Ограничимся случаем, когда $f(x)$ монотонно убывает.

Рассмотрим функцию $\phi(x) = a_n$ при $n \leqslant x < n+1$ и $\psi(x) = a_{n+1}$ при $n \leqslant x < n+1$. Тогда $\forall x \in [1; +\infty)$

$$\psi(x) \leqslant f(x) \leqslant \phi(x).$$

Отсюда

$$\int_1^N \psi(x)dx \leqslant \int_1^N f(x)dx \leqslant \int_1^N \phi(x)dx \implies$$

$$\implies \underbrace{\overset{(1)}{\sum_{n=1}^{N} a_{n+1}}}_{partial\ series\ sum\ (A)} \leqslant \int_1^N f(x)dx \leqslant \underbrace{\overset{(2)}{\sum_{n=1}^{N} a_n}}_{partial\ series\ sum\ (A)}$$

Если интеграл сходится, то частичная сумма (1) ограничена $\Longrightarrow$ ряд (A) сходится. Если интеграл расходится, то частичная сумма (2) непрерывна $\Longrightarrow$ ряд (A) – расходится.

Если ряд (A) сходится, то (2) – ограничена $\Longrightarrow$ $\int_1^N f(x)dx$ – ограничен $\Longrightarrow$ $\int_1^\infty f(x)dx$ – сходится.

Если ряд (A) расходится $\Longrightarrow$ частичная сумма (1) неограничена $\Longrightarrow$ интеграл расходится. □

Пример 6. 1. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$

Рассмотрим $f(x) = \frac{1}{x^p}$ на $[1; +\infty)$ – непрерывно монотонно $\downarrow$, $f(n) = \frac{1}{n^p}$. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ ведет себя одинаково с интегралом $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ – сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$ $\Longrightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

2. $\sum_{n=1}^\infty$

$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, $x \in [e; +\infty)$, $\downarrow$, непрерывна.

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to \infty} \int_e^b \frac{d(\ln x)}{\ln x} =$$

$$= \lim_{b \to \infty} (\ln(\ln x))\Big|_e^b = \lim_{b \to \infty} \ln(\ln b) = \infty \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n \ln n}$ расходится (по интегралу Коши-Маклорена)

Теорема 2.1.8 (радикальный признак Коши)**.** Пусть ряд (A) $\sum_{n=1}^\infty a_n$ положительный и $\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда:

1. При $q < 1$ ряд (A) сходится
2. При $q > 1$ ряд (A) расходится
3. При $q = 1$ – ?

Доказательство. 1. Пусть $q < 1$. Возьмем число $r: \ q < r < 1$. Тогда $\exists N: \ \forall n > N$

$$\sqrt[n]{a_n} < r \Longrightarrow a_n < r^n$$

$0 < r < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^\infty r^n$ – сходится $\Longrightarrow$ по 1-му признаку сравнения сходится ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n$

2. Пусть $q > 1$, то существует подпоследовательность $\sqrt[n_i]{a_{n_i}} \to q$ при $i \to \infty \Longrightarrow a_{n_i} \to q^{n_i} > 1 \Longrightarrow$ ряда $\sum_{n=1}^\infty a_n$ расходится

3. Рассмотрим ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходятся.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$$

□

Теорема 2.1.9 (признак Даламбера)**.** Пусть ряд (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ положительный и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = d.$$

Тогда

1. При $d < 1$ ряд (A) сходится
2. При $d > 1$ ряд (A) расходится
3. При $d = 1$ – ?

Доказательство. 1. Пусть $d < 1$. Возьмем $d < r < 1 \implies \exists N:\ \forall n > N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1};\quad b_2 = \frac{a_3}{a_2};\quad b_3 = \frac{a_4}{a_3};\quad \ldots;\quad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n};\quad \ldots$$

Можно считать, что $N = 0$, тогда $\forall n > N$ $\begin{array}{l} a_2 < r\cdot a_1 \\ a_3 < r\cdot a_2 < r^2\cdot a_1 \\ a_4 < r\cdot a_3 < r^3\cdot a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} < r^n\cdot a_1 \end{array}$.

Так как $0 < r < 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cdot a_1$ сходится $\implies$ сходится ряд (A) по 1 признаку сравнения.

2. Самостоятельно.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, $\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \quad &= \\ &= \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1;\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

□

Теорема 2.1.10 (признак Раббе)**.** Пусть (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – положительная. Если

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}}) = r,$$

то

1. При $r > 1$ ряд (A) сходится;
2. При $r < 1$ ряд (A) расходится;
3. При $r = 1$ ряд (A) – ?

Доказательство. 1. Пусть $r > 1$. Возьмем p и q:

$$1 < p < q < r.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = r,$$

то $\exists N_1 : \ \forall n > N_1 \quad n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > q$, то есть

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{q}{n}. \tag{2.4}$$

Далее, рассмотрим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^p - 1}{\frac{1}{n}} \overset{Taylor's\ f.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{p}{n} + o(\frac{1}{n}) - 1}{\frac{1}{n}} = p < q \implies$$

$\implies \exists N_2 : \ \forall n > N_2$

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^p - 1}{\frac{1}{n}} < q \implies (1+\frac{1}{n})^p < 1 + \frac{q}{n}. \tag{2.5}$$

Сравниваем неравенства (2.4) и (2.5), получим, что при $n > \max(N_1, N_2)$:

$$(1+\frac{1}{n})^p < 1 + \frac{q}{n} \quad < \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \implies$$

$$\implies \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad > \quad (1+\frac{1}{n}^p) = \frac{(n+1)^p}{n^p} = \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}} \quad \implies \quad a_n \cdot \frac{1}{(n+1)^p} >$$

$$> \frac{1}{n^p} \cdot a_{n+1} \quad \implies \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}.$$

По 3-му признаку сравнения, ряд (A) сходится при $p > 1 \implies$ при $r > 1$.

2. Пусть $r < 1$. Тогда $\exists N: \ \forall n > N$:

$$n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1 \implies$$

$$\implies \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \implies$$

$$\implies \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонический, расходящийся $\implies$ по 3-му признаку сравнения ряд (A) расходится.

3. Упражнение: привести 2 примера рядов (сходящийся, расходящийся), но $r = 1$ в обоих случаях.

□

Теорема 2.1.11 (признак Кумера)**.** Пусть дан ряд (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – положительный. Пусть числа $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots: \ \forall n > N \ c_n > 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ – расходится. Если

$$\lim_{n\to\infty} \left(c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right) = k,$$

то

1. При $k > 0$ ряд (A) сходится;
2. При $k < 0$ ряд (A) расходится;
3. При $k = 1$ – ?

Доказательство. 1. Пусть $k > 0$. Возьмем $0 < p < k$.

Тогда $\exists N: \ \forall n > N$:

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} > p \implies$$

$$\implies c_n \cdot a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1} > p \cdot a_{n+1} > 0 \implies$$

$$\implies c_n \cdot a_n > c_{n+1} \cdot a_{n+1}, \quad \forall n > N$$

Тогда последовательность $\{c_n \cdot a_n\}$ убывает и ограничена снизу $\implies$ последовательность сходится.

Пусть $c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n \cdot a_n$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{m=1}^{n} (c_m \cdot a_m - c_{m+1} \cdot a_{m+1}) =$$

$$= (c_1 \cdot a_1 - c_2 \cdot a_2) + (c_2 \cdot a_2 - c_3 \cdot a_3) + \ldots + (c_n \cdot a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1}) =$$

$$= c_1 \cdot a_1 - c_{n+1} \cdot a_{n+1};$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}(c_m\cdot a_m - c_{m+1}\cdot a_{n+1}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(c_1\cdot a_1 - c_{n+1}\cdot a_{n+1}) = c_1\cdot a_1 - c \implies$$

$\implies$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cdot a_n - c_{n+1}\cdot a_{n+1}) \implies$ из того, что $c_n\cdot a_n - c_{n+1}\cdot a_{n+1} > p\cdot a_{n+1} > 0$ и 1-го признака сравнения $\implies$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p\cdot a_{n+1}$ сходится $\implies$ ряд (A) сходится.

2. Пусть $k < 0 \implies \exists N:\ \forall n > N$

$$c_n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} < 0 \implies$$

$$\implies \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{1}{c_n}}{\frac{1}{c+n+1}} \implies$$

$$\implies \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}};$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n}$ расходится $\implies$ по 3-му признаку сравнения ряд (A) расходится.

3. Придумать 2 примера когда $k = 0$ и ряды сходятся/расходятся.

□

Теорема 2.1.12 (признак Бертрана)**.** Пусть ряд (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – положительный. Если

$$\lim_{n\to\infty}\ln n\cdot[n\cdot(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)] = B,$$

то

1. При $B > 1$ ряд (A) сходится;
2. При $B < 1$ ряд (A) расходится;
3. При $B = 1$ ряд (A) – ?

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}$ – расходится. Составим последовательность Кумера:

$$k_n = \underbrace{n \cdot \ln n}_{c_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \underbrace{(n+1) \cdot \ln(n+1)}_{c_{n+1}} =$$

$$= \left| \ln(n+1) = \ln(n \cdot \frac{n+1}{n}) = \ln n + \ln(1 + \frac{1}{n}) \right| =$$

$$= n \cdot \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \cdot (\ln n + \ln(1 + \frac{1}{n})) =$$

$$= n \cdot \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n \cdot \ln n - \ln n - \ln(1 + \frac{1}{n})^{n+1} =$$

$$= \ln n(n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1) - \ln(1 + \frac{1}{n})^{n+1} =$$

$$= \ln n \cdot (n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1) - \ln(1 + \frac{1}{n})^{n+1};$$

$$\lim_{n \to \infty} k_n =$$

$$= \lim_{n \to \infty} [\underbrace{\ln n \cdot (n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1)}_{B} - \ln(\underbrace{1 + \frac{1}{n}^{n}}_{e}) - \ln(1 + \frac{1}{n})] =$$

$$= B - 1,$$

по признаку Кумера, при $B - 1 > 0$ ряд (A) сходится, при $B - 1 < 0$ ряд (A) расходится, при $B = 1$ – ? ☐

Теорема 2.1.13 (признак Гаусса)**.** Ряд (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Если

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = (\lambda + \frac{\mu}{n}) + O(\frac{1}{n^2}),$$

то

1. При $\lambda > 1$, ряд (A) сходится;
2. При $\lambda < 1$, ряд (A) расходится;
3. При $\lambda = 1$ и
   (a) $\mu > 1 \implies$ ряд (A) сходится;
   (b) $\mu \leqslant 1 \implies$ ряд (A) расходится.

Доказательство. 1. Если $\lambda < 1$, то

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = [\lim_{n \to \infty} (\lambda + \frac{\mu}{n} + O(\frac{1}{n^2}))]^{-1} =$$

$$= [\lim_{n \to \infty} (\lambda + \underbrace{\frac{\mu}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} \cdot \Omega(\frac{1}{n^2}))]^{-1} = \frac{1}{\lambda},$$

по признаку Даламбера, если $\frac{1}{\lambda} < 1$, то есть $\lambda > 1$, ряд (A) сходится.

2. Если $\lambda > 1$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = [\lim_{n\to\infty}(\lambda + \frac{\mu}{n} + O(\frac{1}{n^2}))]^{-1} =$$

$$= [\lim_{n\to\infty}(\lambda + \underbrace{\frac{\mu}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}\cdot\Omega(\frac{1}{n^2}))]^{-1} = \frac{1}{\lambda},$$

по признаку Даламбера, если $\frac{1}{\lambda} > 1$, то есть $\lambda < 1$, ряд (A) расходится.

3. Если $\lambda = 1$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + O(\frac{1}{n^2});$$

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \mu + n\cdot O(\frac{1}{n^2});$$

$$\lim_{n\to\infty}(n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \lim_{n\to\infty}(\mu + \underbrace{n\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\Omega(\frac{1}{n^2})}_{\to 0}) = \mu \implies$$

$$\implies \text{по признаку Реббе} \implies \left[\begin{array}{l} \mu > 1 \implies (A) \to\leftarrow \\ \mu < 1 \implies (A) \leftarrow\to \end{array}\right.$$

Пусть $\mu = 1$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}\ln n\cdot(n\cdot(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\ln n\cdot(n\cdot(1 + \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}) - 1) - 1) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\ln n\cdot(1 + n\cdot O(\frac{1}{n^2}) - 1) = \lim_{n\to\infty}\ln n\cdot n\cdot O(\frac{1}{n^2}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(\ln n\cdot n\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\Omega(\frac{1}{n^2})) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}\cdot\Omega(\frac{1}{n^2}) = 0.$$

В самом деле,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\ln n = \lim_{n\to\infty}\ln n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{n} = 0 \implies$$

$\implies$ по прихнаку Бертрана ряд (A) расходится.

$\square$

2.2 Сходимость знакопеременных рядов

Пусть дан ряд (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если $\exists N:\ \forall n > N\ a_n$ не меняет знак, то исследование сходимости такого ряда сводится к исследованию сходимости положительных рядов. Будем считать, что "+"и "−"бесконечно много. Такие ряды будем называть **знакопеременными**.

Определение 2.2.1 (абсолютно сходящийся ряд)**.** Ряд (A) называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд

$$(A^*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Утверждение 2.2.1. Если ряд (A) абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство. " $\Longleftarrow$ " Пусть ряд (A) абсолютно сходящийся, то есть сходится ряд (A^*) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \implies$ по критерию Коши $\forall \epsilon > 0 \ \exists N: \ \forall n > N \ \forall p > 0$

$$|a_{n+1}| + |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+1}| < \epsilon$$

" $\Longrightarrow$ " Пусть $\epsilon > 0$ задано. Рассмотрим

$$|A_{n+p} - A_n| = |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}| < \epsilon$$

$\implies$ ряд (A) сходится. □

Определение 2.2.2 (условно сходящийся ряд)**.** Если ряд (A) сходится, а ряд (A^*) расходится, то ряд (A) называется **условно сходящимся**.

Определение 2.2.3 (знакочередующийся ряд)**.** Ряд (A) называется **знакочередующимся**, если $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \cdot a_{n+1} < 0$. Обозначим знакочередующийся ряд:

$$(\overline{A}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n, \quad a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Теорема 2.2.1 (признак Лейбница)**.** Пусть ряд $(\overline{A})$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n$ $(a_n > 0 \ \forall n)$ удовлетворяет условиям:

1. $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots$;
2. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Тогда ряд $(\overline{A})$ сходится и его сумма $S: \quad 0 < S \leqslant a_1$.

Доказательство. Рассмотрим

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} = \\ = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}),$$

тогда $\forall i: \ a_i - a_{i+1} \geqslant 0 \implies S_{2n} \geqslant 0 \ \forall n \implies$ последовательность $S_{2n} \nearrow$.

С другой стороны,

$$S_{2n} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geqslant 0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\geqslant 0} - \ldots - \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{\geqslant 0} - a_{2n}$$

$\implies S_{2n} \leqslant a_1 \ \forall n$.

Таким образом, S_{2n} не убывает и ограничена сверху $\Longrightarrow$ по теореме Вейерштрасса $\Longrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Далее,

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Так как $0 < S_n \leqslant a_1$ (если $S_n = 0$, то a_1 может быть $= 0$, что невозможно, так как $a_1 > 0$) $\Longrightarrow$ (берем пределы от неравенства) $0 < S \leqslant a_1$. □

Следствие. Если знакочередующийся ряд $(\overline{A})$ сходится, то сумма его n-го остатка имеет знак $(n+1)$-го члена ряда и не больше его по модулю.

Пример 7. 1. Рассмотрим ряд

$$(\overline{H}) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots,$$

по признаку Лейбница:

(a) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

$\Longrightarrow (\overline{H})$ сходится, $0 < S \leqslant 1$;

2. Рассмотрим $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходится $\Longrightarrow$ ряд $(\overline{H})$ – условно сходящийся.

Теорема 2.2.2 (признак Абеля и Дирихле)**.** 1. (Абеля) Если

- последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена;
- ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.

2. (Дирихле) Если

- последовательность $\{a_n\}$ монотонна и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;
- частичные суммы ряд (B) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены, то есть $\exists k > 0 :$ $\forall n \quad |\sum_{m=1}^{n} b_m < k$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.

Доказательство теоремы.

Лемма 2.2.1. 1. Если числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ либо не возрастают, либо не убывают;

2. Суммы $B_1 = b_1,\ B_2 = b_1 + b_2,\ \dots,\ B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n:\ \forall k = 1, \dots, n \quad |B_k| \leqslant L$, тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right| \leqslant L \cdot (|a_1| + |a_n|) \tag{2.6}$$

Доказательство леммы. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
&a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n = \\
&\quad = a_1 \cdot B_1 + a_2 \cdot (B_2 - B_1) + a_3 \cdot (B_3 - B_2) + \dots + a_n \cdot (B_n - B_{n-1}) = \\
&\quad = a_1 \cdot B_1 + a_2 \cdot B_2 - a_2 \cdot B_1 + a_3 \cdot B_3 - a_3 \cdot B_2 + \dots + a_n \cdot B_n - a_n \cdot B_{n-1} = \\
&= B_1 \cdot (a_1 - a_2) + B_2 \cdot (a_2 - a_3) + B_3 \cdot (a_3 - a_4) + \dots + B_{n-1} \cdot (a_{n-1} - a_n) + a_n \cdot B_n = \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{n-1} B_k \cdot (a_k - a_{k-1}) + a_n \cdot B_n.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n-1} B_k \cdot (a_k - a_{k+1}) + a_n \cdot B_n\right| \leqslant \\
&\quad \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |B_k| \cdot |a_k - a_{k+1} + |a_n| \cdot |B_n| \leqslant L \cdot \left(\sum_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| + |a_n|\right) = \\
&\qquad = L \cdot (|a_1| + |a_n| + |a_n|) = L \cdot (|a_1| + 2 \cdot |a_n|).
\end{aligned}$$

□

1. Пусть выполнены условия признака Абеля. Тогда $\exists M > 0:\ |a_n| \leqslant M$. Пусть $\epsilon > 0$ задано. Возьмем номер $N:\ \forall n > N,\ \forall p > 0$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| < \epsilon^* = \frac{\epsilon}{3 \cdot M}.$$

Частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ имеют вид $S_n = a_1 \cdot b_1 + \dots + a_n \cdot b_n$. По критерию Коши найдем $N_1:\ \forall n > N_1, \forall p > 0$

$$|S_{n+p} - S_n| < \epsilon,$$

$$\begin{aligned}
&|a_{n+1} \cdot b_{n+1} + a_{n+2} \cdot b_{n+2} + \dots + a_{n+p} \cdot b_{n+p}| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \epsilon^* \cdot (|a_{n+1}| + 2 \cdot |a_{n+p}|) \leqslant \epsilon^* \cdot 3 \cdot M = \frac{\epsilon}{3 \cdot M} = \epsilon \implies
\end{aligned}$$

$\implies$ по критерию Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.

2. Пусть выполнены условия признака Дирихле. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то $\exists N: \ \forall n > N \quad (\epsilon > 0 \text{ задано})$:

$$|a_n| < \frac{\epsilon}{3\cdot k}, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant k.$$

По критерию Коши:

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1}\cdot b_{n+1} + \ldots + a_{n+p}\cdot b_{n+p}| \overset{by\ lemma}{\leqslant}$$
$$\leqslant k\cdot(|a_{n+1}| + 2\cdot|a_{n+p}|) < k\cdot\frac{3\cdot\epsilon}{3\cdot k} = \epsilon.$$

□

Пример 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\cdot x)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\sin(n\cdot x)$

$a_n = \frac{1}{n} \to 0$ при $n\to\infty$. Оценим частичную сумму $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\cdot x)$:

$$\sin x + \sin(2\cdot x) + \sin(3\cdot x) + \ldots + \sin(n\cdot x) =$$
$$= \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\left(\sin x\cdot\sin\frac{x}{2} + \sin(2\cdot x)\cdot\sin\frac{x}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3\cdot x}{2} + \cdot\frac{3\cdot x}{2} - \cos\frac{5\cdot x}{2} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \cos\frac{(2\cdot n-1)\cdot x}{2} - \cos\frac{(2\cdot n+1)\cdot x}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2\cdot n+1)\cdot x}{2}\right) =$$
$$= \frac{2\cdot\sin\frac{(n+1)\cdot x}{2}\cdot\sin\frac{n\cdot x}{2}}{2\cdot\sin\frac{x}{2}}.$$

Тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(k\cdot x)\right| = \left|\frac{\sin\frac{(n+1)\cdot x}{2}\cdot\sin\frac{n\cdot x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}},$$

$\frac{x}{2} \neq \pi\cdot k,\ k\in\mathbb{Z} \implies x \neq 2\cdot\pi\cdot k,\ k\in\mathbb{Z}$.

По признаку Дирихле ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\cdot x)}{n}$ сходится.

2.3 Свойства сходящихся рядов

Рассмотрим ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Если

$$(1-1)+(1-1)+\ldots+(1-1)+\ldots,$$
$$1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots$$

Пусть дан ряд

$$(A)\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Составим из ряда (A) ряд $(\widetilde{A})$:

$$\underbrace{(a_1+a_2+\ldots+a_{n_1})}_{\tilde{a}_1}+\underbrace{(a_{n_1+1}+a_{n_1+2}+\ldots+a_{n_2})}_{\tilde{a}_2}+\ldots$$

$$\ldots+\underbrace{(a_{n_k+1}+\ldots+a_{n_k+1})}_{\tilde{a}_{k+1}}+\ldots=(\widetilde{A})\quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} a_l,\quad a_{n_0}=a_1.$$

Теорема 2.3.1 (сочетательное свойство сходящихся рядов)**.** 1. Если ряд (A) сходится, то для любой возрастающей последовательности n_k ряд $(\widetilde{A})$ сходится и их суммы совпадают $(A=\widetilde{A})$;

2. Если ряд $(\widetilde{A})$ сходится и внутри каждой скобки знак не меняется, то ряд (A) сходится и их суммы совпадают, то есть $\widetilde{A}=A$.

Доказательство. 1. Пусть ряд (A) сходится, $\widetilde{A}_k$ – частичные суммы ряда $(\widetilde{A})$:

$$\begin{aligned}&\widetilde{A}_1=\tilde{a}_1=\textstyle\sum_{k=1}^{n_1} a_k=A_{n_1}\\&\widetilde{A}_2=\tilde{a}_1+\tilde{a}_2=\textstyle\sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k=A_{n_1}\\&\vdots\\&\widetilde{A}_k=A_{n_k}\end{aligned}$$

Так как ряд (A) сходится, то существует

$$\lim_{k\to\infty} A_{n_k}=A \implies A=\lim_{k\to\infty} A_{n_k}=\lim_{n\to\infty}\widetilde{A}_k=\widetilde{A}$$

2. Пусть ряд $(\widetilde{A})$ сходится. Имеем, при

$$\begin{aligned}a_1>0:&\quad A_1<A_2<\ldots<A_{n_1}\\a_1<0:&\quad A_1>A_2>\ldots>A_{n_1}\end{aligned}$$

- Далее, если $a_{n_1+1}>0$, тогда при

$$a_1>0:\quad A_{n_1+1}<A_{n_1+2}<\ldots<A_{n_2}\implies$$

$\implies A_{n_1}=\widetilde{A}_1<A_{n_2}=\widetilde{A}_2$, при $a_1<0\implies A_{n_1}<0$ и $A_{n_1}<A_{n_2}\implies\widetilde{A}_1<\widetilde{A}_2$ если $a_{n_1+1}<0$.

- Если же $a_{n_1+1} < 0$, тогда при

$$\begin{aligned} a_1 < 0: &\quad A_{n_1} = \widetilde{A}_1 > A_{n_2} = \widetilde{A}_2 \\ a_1 > 0: &\quad A_{n_1} = \widetilde{A}_1 > \widetilde{A}_2 \end{aligned}$$

Аналогично, пока n меняется от n_k до n_{k+1}, то будем иметь либо $A_{n_k} < A_n < A_{n_{k+1}}$, либо $A_{n_k} > A_n > A_{n_{k+1}}$.

Ряд $(\widetilde{A})$ – сходится $\implies \exists \lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{A}_k = \lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{A}_{k+1} = \widetilde{A} \implies$ по теореме о 2-х миллиционерах:

$$\lim_{k\to\infty} A_n = \widetilde{A}$$

□

Теорема 2.3.2 (переместительное свойство сходящихся рядов)**.** Если ряд $(A)\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то его сумма не зависит от перестановки членов ряда.

Доказательство теоремы. Пусть ряд

$$(A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится абсолютно $\implies$ ряд

$$(A^*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

сходится. Пусть ряд

$$(A') \quad \sum_{n=1}^{\infty} a'_n$$

получен из ряда (A) путем перестановки его членов. Покажем, что ряд (A') сходится и $A = A'$ (их суммы совпадают).

1. Пусть (A) – знакоположительный, то есть $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > 0$. Рассмотрим частичные суммы ряда (A'):

   $$A'_k = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_k = a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_k}.$$

   Пусть $n' = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$. Тогда

   $$A'_k \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_j} + \ldots + a_{n'} = A_{n'},$$

   где $A_{n'}$ – n'-я частичная сумма ряда (A). Так как (A) сходится и знакоположительный $\implies A_{n'} \leqslant A$.

   Таким образом получаем, что $\forall k \quad A'_k \leqslant A \implies$ последовательность $A'_k \nearrow$ и ограничена $\implies$

   $$\exists \lim_{k\to\infty} A'_k = A' \leqslant A.$$

С другой стороны, ряд (A') получен перестановкой членов ряда $(A) \implies A' \geqslant A \implies A' \leqslant A \leqslant A' \implies A = A'$.

2. Пусть ряд (A) сходится абсолютно, то есть (A^*) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится. С рядом (A) свяжем два ряда:

$$(P) \sum_{n=1}^{\infty} p_n, \quad (Q) \sum_{n=1}^{\infty} q_n,$$

где p_n – положительные члены ряда (A), q_n – отрицательные члены ряда (A), взятые по модулю, причем все члены рядов (P) и (Q) взяты в том же порядке, как они стояли в ряде (A).

Лемма 2.3.1. Если ряд (A) абсолютно сходящийся, то ряды (P) и (Q) сходятся и $A = P - Q$.

Доказательство леммы. Пусть (A^*) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ – сходится $\implies \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = A^*$. A_n^* – частичные суммы ряда (A^*). Имеем $P_{n_k} = a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_k}$, где $n_1 < n_2 < \ldots < n_k \leqslant n$, $P_{n_k} \leqslant A_n^*$,

$$(A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$

$$(P) \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \underbrace{a_1 + a_3 + a_4 + a_6}_{P_3}$$

$$(A^*) \quad \underbrace{|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + |a_5|}_{A_5^*} + \ldots$$

и $Q_{n_m} \leqslant A_n^* \implies$ (так как $(A)^*$ сходится) $\implies A_n^* \leqslant A^* \leftarrow$ сумма ряда (A^*) и $\implies P_{n_k} \leqslant A^*$ и $Q_{n_m} \leqslant A^*$.

Далее, $A_n = P_{n_k} - Q_{n_m}$, где $n_k \leqslant n$, $n_m \leqslant n$. При $n \to \infty \implies k \to \infty$, $m \to \infty$.

Далее, так как (A) сходится абсолютно $\implies (A)$ сходится $\implies$

$$\implies \exists A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{\substack{m\to\infty \\ k\to\infty}} (P_{n_k} - Q_{n_m}) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} P_{n_k} - \lim_{m\to\infty} Q_{n_m} = P - Q.$$

□

Если ряд (A) сходится абсолютно, то сходится ряд (A^*), (A^*) – положительный ряд $\implies (A^{*'})$ сходится (получен путем перестановки членов ряда (A^*)) $\implies$ по лемме сходятся ряды (P') и (Q')

ТУТ ХИМИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

и $A' = P' - Q'$.

- P' – положительный ряд $\Longrightarrow$ по пункту 1, P – сходится;
- Q' – положительный ряд $\Longrightarrow$ по пункту 1, Q – сходится

и $P' = P, \quad Q' = Q \implies A' = P - Q = A.$ □

Теорема 2.3.3 (Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда)**.** Если ряд (A) условно сходится, то $\forall B \in \mathbb{R}$ (в том числе $B = \pm\infty$) $\exists$ перестановка ряда (A) такая, что полученный ряд сходится и имеет сумму B. Более того, $\exists$ перестановка ряда (A) такая, что частичные суммы полученного ряда не стремятся ни к конечному, ни к бесконечному пределу.

Доказательство теоремы.

Лемма 2.3.2. Если ряд (A) сходится условно, то ряды (P) и (Q) расходятся.

Доказательство леммы. Рассмотрим $A_n = P_k - Q_m$, где $k \leqslant n,\ m \leqslant n$ $(k + m = n)$

$$A_n^* = P_k^* + Q_m^* \quad (k + m = n),$$
$$\lim_{n\to\infty} A_n = A; \quad \lim_{n\to\infty} A_n^* = \infty.$$

Допустим, что ряд (P) сходится $\Longrightarrow$ (P^*) сходится, а так же $\exists \lim\limits_{k\to\infty} P_k = P \implies \exists \lim\limits_{m\to\infty} Q_m = A - P \overset{from\ (*)}{\Longrightarrow} Q^*$ – сходится $\Longrightarrow$ A^* имеет предел. Противоречие $\Longrightarrow$ P расходится.

Для Q – аналогично. □

Пусть $B \in \mathbb{R}$. Возьмем номер $n_1 :\ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1} \geqslant B$. Выберем $n_2 :\ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \ldots - q_{n_2} \leqslant B$.

Более того, элементы p и q будем брать столько, сколько это необходимо для выполнения этого условия.

Возьмем $n_3 :\ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \ldots - q_{n_2} + p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + \ldots + p_{n_3} \geqslant B$ и так далее.

Таким образом получим ряд $(p_1 + \ldots + p_{n_1}) + (-q_1 - \ldots - q_{n_2}) + (p_{n_1+1} + \ldots + p_{n_3}) + (-q_{n_2+1} - \ldots - q_{n_4}) + \ldots$ – этот ряд сходится к B.

Действительно, так как ряд (A) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Так как количество членов p_i и q_i бралось лишь столько, сколько необходимо, то соответствующие частичные суммы отличаются от B разве что на последнее слогаемое в этой частичной сумме, которое стремится к нулю $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} A_n' = B$. □

2.4 Умножение рядов

Пусть даны ряды

$$(A)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (B)\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Составим таблицу:

	a_1	a_2	$\cdots$	a_n	$\cdots$
b_1	a_1b_1	a_2b_1	$\cdots$	a_nb_1	$\cdots$
b_2	a_1b_2	a_2b_2	$\cdots$	a_nb_2	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\cdots$	$\cdots$
b_n	a_1b_n	a_2b_n	$\vdots$	a_nb_n	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Определение 2.4.1 (произведение рядов, форма Коши)**. Произведением рядов** (A) и (B) назовем ряд, членами которого являются элементы на строке таблицы a_ib_j, взятые в произвольном порядке.

Если числа выбираются по диагоналям, то произведение называется **формой Коши**:

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + \ldots$$

Теорема 2.4.1 (Коши о произведении рядов)**.** Если ряды

$$(A)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (B)\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

абсолютно сходятся, A и B – их суммы, то $\forall$ их произведение абсолютно сходится и равно $A \cdot B$.

Доказательство. Рассмотрим r-тую частичную сумму ряда

$$(A \cdot B)^* \quad \sum_{r=1}^{\infty} |a_{n_r} \cdot b_{k_r}|,$$

$$\begin{aligned} S_r = |a_{n_1} \cdot b_{k_1}| + |a_{n_2} \cdot b_{k_2}| + \ldots + |a_{n_r} \cdot b_{k_r}| \leqslant \\ \leqslant (|a_{n_1}| + |a_{n_2}| + \ldots + |a_{n_r}|) \cdot (|b_{k_1}| + |b_{k_2}| + \ldots + |b_{k_r}|) \leqslant \\ \leqslant (|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_m|) \cdot (|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_m|), \end{aligned}$$

где $m = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_r, k_1, k_2, \ldots, k_r\}$.

Так как ряды (A) и (B) сходятся абсолютно, то есть сходятся ряды (A^*) и (B^*), то $S_r \leqslant A^* \cdot B^* \implies$ последовательность $S_r \nearrow$ и ограничена $\implies$ $\exists \lim\limits_{r\to\infty} S_r \implies$ ряд $(A \cdot B)^*$ сходится $\implies$ ряд

$$(A \cdot B) \quad \sum_{r=1}^{\infty} a_{n_r} \cdot b_{k_r}$$

– сходится, причем его сумма не зависит от порядка суммирования.

Будем суммировать ряд $A \cdot B$ по квадратам

$$\underbrace{a_1b_1}_{c_1} + \underbrace{(a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1)}_{c_2} + \underbrace{(a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + b_3b_1)}_{c_3} + \ldots$$

$$
\begin{aligned}
&S_1 = a_1 b_1 = A_1 \cdot B_1\\
&S_2 = c_1 + c_2 = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1) = (a_1 + a_2) \cdot (b_1 + b_2) = A_2 \cdot B_2\\
&S_3 = c_1 + c_2 + c_3 = (a_1 + a_2 + a_3) \cdot (b_1 + b_2 + b_3) = A_3 \cdot b_3\\
&\vdots\\
&S_n = A_n \cdot B_n
\end{aligned}
$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (A_n \cdot B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n \cdot \lim_{n\to\infty} B_n = A \cdot B$$

□

2.5 Двойные и повторные ряды

Рассмотрим таблицу (⋆)

a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\cdots$	a_{1k}	$\cdots$
a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\cdots$	a_{2k}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\cdots$	$\cdots$
a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	$\vdots$	a_{nk}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Определение 2.5.1 (повторный ряд)**. Повторным рядом** называется выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}, \tag{2.7}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}. \tag{2.8}$$

Говорят, что ряд (2.7) сходится, если сходятся все ряды (A_n) по строкам $(\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = A_n)$ и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Определение 2.5.2. Двойным рядом называется выражение

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk} \tag{2.9}$$

Говорят, что ряд (2.9) сходится, если ∃

$$A = \lim_{\substack{N \to \infty \\ K \to \infty}} = \lim_{\substack{N \to \infty \\ K \to \infty}} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} a_{nk}.$$

То есть $\forall \epsilon > 0\ \exists N_0$ и $K_0 :\ \forall N > N_0$ и $\forall k > K_0$

$$\left| \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} a_{nk}}_{A_{NK}} - A \right| < \epsilon$$

Определение 2.5.3 (простой ряд)**.** Пусть ряд

$$(U) \quad \sum_{r=1}^{\infty} U_r \tag{2.10}$$

построен из элементов таблицы, взятых в произвольном порядке. Такой ряд будем называть **простым**, связанным с данной таблицей.

Теорема 2.5.1 ("Главная")**.** Пусть дана таблица

a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\cdots$	a_{1k}	$\cdots$
a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\cdots$	a_{2k}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\cdots$	$\cdots$
a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	$\vdots$	a_{nk}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

и по ней построены ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}, \quad \sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk}, \quad \sum_{r=1}^{\infty} U_r.$$

Если после замены элементов таблицы их модулями хотя бы один из 4-х рядов становится сходящимся, то сходятся остальные и их суммы равны.

Теорема 2.5.2 (о связи сходимости простого и повторного рядов)**.**

1. Если ряд

   $$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$$

   абсолютно сходится, то ряд

   $$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$$

   сходится и его сумма равна U.

2. Если после замены элементов таблицы ($\star$) их модулями ряд

   $$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|$$

   сходится, то ряд

   $$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$$

   сходится абсолютно и суммы рядов

   $$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \quad \& \quad \sum_{r=1}^{\infty} U_r$$

   совпадают.

Доказательство. 1. Пусть (U^*) сходится. Покажем, что все ряды по строкам сходятся

$$(A_n) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Рассмотрим

$$|a_{n1}| + |a_{n2}| + \ldots + |a_{nk}| \leqslant |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_r|,$$

где r выбран таким образом, чтобы среди $|u_i|$ были все слагаемые $|a_{n1}, \ldots, a_{nk}|$.

Таким образом,

$$\underbrace{|a_{n1}| + \ldots + |a_{nk}|}_{A^*_{nk}} \leqslant U^* \implies \exists \lim_{k\to\infty} A^*_{nk} = A^*_n \implies$$

$\implies$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ сходится абсолютно $\implies$ он сходится.

Далее, пусть $\epsilon > 0$ задано. Выберем номер $r_0 :\ \forall r > r_0$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_{r+i}| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Тогда

$$\left|\sum_{i=1}^{r} u_i - U\right| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} u_{r+i}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |u_{r+i}| < \frac{\epsilon}{3}$$

Так как ряды по строкам сходятся, то $\forall n$ выберем $m(n)$:

$$\left|\sum_{k=1}^{m(n)} a_{n_k} - A_n\right| < \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^n}.$$

Наконец, выберем номер N_0 такой, что все числа $u_1, u_2, \ldots, u_{r_0}$ содержались бы в первых N_0 строчках.

$$\left|\sum_{n=1}^{N} A_n - U\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{N_0} A_n - \sum_{n=1}^{N_0}\sum_{k=1}^{m(n)} a_{n_k} + \sum_{n=1}^{N_0}\sum_{k=1}^{m(n)} a_{n_k} - \sum_{i=1}^{r_0} u_i + \sum_{i=1}^{r_0} u_i - U\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{N_0}\left|A_n - \sum_{k=1}^{m(n)} a_{n_k}\right| + \left|\sum_{n=1}^{N_0}\sum_{k=1}^{m(n)} a_{n_k} - \sum_{i=1}^{r_0} u_i\right| + \underbrace{\left|\sum_{i=1}^{r_0} u_i - U\right|}_{<\frac{\epsilon}{3}} <$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \sum_{i=r_0+1}^{\infty}(u_i) + \frac{\epsilon}{3} < \frac{\epsilon}{3}\cdot 3 = \epsilon.$$

2. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{n_k}| = A^*$ сходится.

   Тогда $\forall r\ \exists N, K$ такие, что числа $u_1, \ldots, u_r$ содержатся в N первых строчках и K первых столбцах таблицы

$$\sum_{i=1}^{r}|u_i| \leqslant \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}|a_{n_k}| \leqslant A^* \implies$$

   $\implies$ $|u_r| \nearrow$ и ограничен $\implies$ ряд (U) сходится абсолютно $\implies$ по пункту 1., суммы рядов (U) и (???) равны.

$\square$

Теорема 2.5.3 (свойства двойных рядов). 1. Если ряд

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk}$$

сходится, то

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\k\to\infty}} a_{nk} = 0$$

2. (Критерий Коши) Ряд

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk}$$

   сходится тогда и только тогда, когда $\forall\epsilon > 0\ \exists N_0, K_0 :\ \forall n > N_0,\ \forall k > K_0,\ \forall p > 0,\ \forall q > 0$

$$\left|\sum_{n=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} a_{(N_0+n)(K_0+k)}\right| < \epsilon.$$

3. Если ряд
$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk}$$
сходится, то $\forall c \in \mathbb{R}$ ряд
$$\sum_{n,k=1}^{\infty} (c \cdot a_{nk})$$
сходится, и его сумма равна $c \cdot A$ (где $A = \sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk}$).

4. Если ряд
$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk}$$
сходится и ряд
$$\sum_{n,k=1}^{\infty} b_{nk}$$
сходится, то
$$\sum_{n,k=1}^{\infty} (a_{nk} + b_{nk}) = A + B,$$
а к тому же – сходится.

5. Если $\forall n,\ \forall k\ a_{nk} \geqslant 0$, то ряд
$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk}$$
сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы ограничены в совокупности.

Доказательство. 1. Пусть ряд
$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk}$$
сходится. Заметим, что
$$A_{nk} = \sum_{i,j=1}^{n,k},$$
$$a_{nk} = A_{nk} - A_{n(k-1)} - A_{(n-k)k} + A_{(n-1)(k-1)} \implies a_{nk} \to 0.$$

2. (Критерий Коши) На декартовом произведении $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ введем базу:
$$B_{nk} = \{(n,k) :\ n > N_0,\ k > K_0\}.$$
Тогда критерий Коши сходимости ряда – это есть критерий Коши существования предела функции A_{nk} по данной базе.

3. Самостоятельно.
4. Самостоятельно.
5. " $\to$ " Очевидно.

   " $\leftarrow$ " Пусть множество $\{A_{nk}\}$ – ограничено. Пусть $A = \sup\{A_{nk}\}$. Покажем, что A – сумма ряда

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk}.$$

   Пусть $\epsilon > 0$ задано. Выберем N_0 и K_0:

$$A - A_{N_0 K_0} < \epsilon$$

   ДОПИСАТЬ!!!

□

Теорема 2.5.4 (о связи сходимости двойного и простого рядов)**.** Если ряд $\sum_{n,k=1}^{\infty} |a_{nk}|$ сходится, то сходится ряд $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$.

И наоборот, если сходится ряд $\sum_{r=1}^{\infty} |u_r|$, то сходится ряд $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk}$.

И в обоих случаях суммы рядов равны:

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{r=1}^{\infty} u_r$$

Доказательство. " $\implies$ " Пусть двойной ряд сходится абсолютно, то есть сходится ряд $\sum_{n,k=1}^{\infty} |a_{nk}|$.

Тогда для любого номера S $\exists N, K$ такие, что все числа $u_1, \ldots, u_S$ содержатся в первых N строках и первых K столбцах, тогда:

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_S| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} |a_{nk}| \leqslant A^* = \sum_{n,k=1}^{\infty} |a_{nk}| \implies$$

$\implies$ последовательность $U_i^* \nearrow$ и ограничена $\implies$ ряд $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ сходится абсолютно $\implies$ сходится.

" $\impliedby$ " Пусть ряд $\sum_{r=1}^{\infty} |u_r|$ сходится $\implies$ $\forall N, K$ $\exists S$: все числа $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1K}, a_{21}, \ldots, a_{2K}, \ldots, a_{N1}, \ldots, a_{NK}$ содержатся среди чисел $u_1, \ldots, u_S$. Тогда

$$A^*_{NK} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} |a_{nk}| \leqslant \sum_{r=1}^{S} |u_r| \leqslant U^* = \sum_{r=1}^{\infty} |u_r| \implies$$

$\implies$ ряд $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk}$ сходится.

Покажем, что $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{r=1}^{\infty} u_r$.

Так как ряд $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ сходится абсолютно, то расположим элементы по квадратам:

$$\begin{aligned}
&a_{11} = u_{r_1} \\
&a_{12} + a_{22} + a_{21} = u_{r_2} + u_{r_3} + u_{r_4} \\
&\vdots \\
&A_{nn} = a_{11} + \ldots + a_{nn} = U_n = u_{r_1} + \ldots + u_{r_n}
\end{aligned}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} A_{nn} = \lim_{n\to\infty} U_n = U$$

$\square$

Доказательство "Главной". Из четырех предыдущих теорем $\Longrightarrow$ "Главная"теорема. $\square$

2.6 Поточечная и равномерная сходимость семейства функций

Определение 2.6.1. Семейство функций – это произвольное множество функций.

Пусть $f : X \times T \to Y$. Если по каким-либо соображениям элементам множества T уделяется особое внимание, то будем их называть **параметрами**.

То есть $\forall t \in T$ можно рассмотреть функцию

$$f_t(x) = f(x, t).$$

В этом случае будем говорить, что задано семейство функций, зависящих от параметра t.

Пример 9. $T = \mathbb{N}$, тогда $f_n(x) = x^n$.

Пусть задано семейство отображений $f_t : \; X \to Y_\rho$, Y – метрическое пространство с заданной метрикой ρ, $t \in T$.

Пусть $\mathfrak{B}$ – база на T.

Определение 2.6.2. Будем говорить, что семейство $\{f_t\}$ сходится в точке $x \in X$, если $f_t(x)$ как функция аргумента t имеет предел по базе $\mathfrak{B}$, то есть $\exists y_x \in Y_\rho : \; \forall \epsilon > 0 \; \exists B \in \mathfrak{B} : \; \forall t \in B$

$$\rho(f_t(x), y_x) < \epsilon.$$

Определение 2.6.3. Множество $E = \{x \in X \; : \; \{f_t\}$ сходится в точке $x\}$ называется **областью сходимости** семейства $\{f_t\}$ по базе $\mathfrak{B}$.

Далее, на E введем функцию, положив

$$f(x) = \lim_{\mathfrak{B}} f_t(x).$$

Функция $f(x)$ называется **предельной**.

Определение 2.6.4. Пусть дано семейство $f_t : X \to Y_u$ и $f : X \to Y$. Будем говорить, что f_t сходится по базе $\mathfrak{B}$ **поточечно** к f на X, если $\forall x \in X\ \forall \epsilon > 0\ \exists B_x \in \mathfrak{B} :\ \forall t \in B_x$

$$\rho(f_t(x), f(x)) < \epsilon.$$

Обозначение:

$$f_t \underset{\mathfrak{B}}{\to} f\ (on\ X)$$

Определение 2.6.5. Семейство $\{f_t\}$ сходится **равномерно** по базе $\mathfrak{B}$ к f на X, если $\forall \epsilon > 0\ \exists B \in \mathfrak{B} :\ \forall t \in B$ и $\forall x \in X$

$$\rho(f_t(x), f(x)) < \epsilon$$

Обозначение:

$$f_t \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} f\ (on\ X)$$

Определение 2.6.6. Пусть $f_n : X \to \mathbb{R}$ – последовательность функций и $f : X \to \mathbb{R}$. Семейство $\{f_n\}$ **сходится поточечно** к f на X, если $\forall x \in X\ \exists f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x),\ \forall \epsilon > 0\ \exists N :\ \forall n > N$

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Обозначение:

$$f_n \underset{n\to\infty}{\to} f\ (on\ X)$$

Определение 2.6.7. Последовательность $\{f_n\}$ **равномерно сходится** к f на X при $n \to \infty$, если $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n > N\ \forall x \in X$

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Обозначение:

$$f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f\ (on\ X)$$

Пример 10. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n$

Имеем при фиксирвоанном x:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ +\infty, & x > 1 \\ \nexists, & x \leqslant -1 \end{cases}$$

Таким образом область сходимости этой последовательности $E = (-1; 1]$. На множестве E определим предельую функцию

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in (-1; 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Покажем, что f_n сходится к f на E неравномерно, то есть $\exists \epsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N}: \ \exists n > N \ \exists x \in X:$

$$|f_n(x) - f(x)| \geqslant \epsilon.$$

Возьмем $\epsilon = \frac{1}{2}$. Пусть N задано произвольно. Возьмем $n = N + 1$ и $x: \ x^n = \frac{3}{4}$, то есть $x = \sqrt[n]{\frac{3}{4}}$. Тогда:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \left(\sqrt[n]{\frac{3}{4}} \right)^n - 0 \right| = \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$$

Пример 11. $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$

$\forall x \in X$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{x}{\underset{n\to\infty}{1 + n^2x^2}} = 0.$$

Таким образом, $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Покажем, что $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ на $\mathbb{R}$.

Имеем:

$$|f_n(x) - 0| = \left| \frac{x}{1 + n^2x^2} \right| = \frac{1}{2n} \cdot \left| \frac{2nx}{1 + n^2x^2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \begin{array}{l} 0 \leqslant (1 - nx)^2 = 1 + n^2x^2 - 2nx \implies \\ \implies 2nx \leqslant 1 + n^2x^2 \end{array} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2n} \cdot 1 = \frac{1}{2n}$$

Пусть $\epsilon > 0$ задано. Возьмем $N: \ \forall n > N \ \frac{1}{2n} < \epsilon, \ N = [\frac{1}{2\epsilon}]$. Таким образом, $\forall n > N \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x) \leqslant \frac{1}{2n} < \frac{1}{2N} = \epsilon \implies$$

$$\implies f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x) \text{ на } \mathbb{R}^\infty$$

Пример 12. $f_n(x) = \frac{n \cdot x}{1+n^2x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \underset{n\to\infty}{f_n(x)} = 0$

Покажем, что данное семейство не имеет равномерной сходимости к f.

Рассмотрим $f_n(x) - f(x) = f_n(x) = \frac{n \cdot x}{1+n^2x^2}$:

$$f_n'(x) = \frac{n \cdot (1 + n^2x^2) - n \cdot x \cdot (2xn^2)}{(1 + n^2x^2)^2} = \frac{n - n^3x^2}{(1 + n^2x^2)^2} = 0, \quad x = \pm\frac{1}{n}$$

Далее, $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$. Возьмем $\epsilon = \frac{1}{4}$. Тогда если N задано, то выберем $n = N + 1$ и $x = \frac{1}{n}$.

Тогда $|f_n(x) - f(x)|\big|_{x=\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} \implies f_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

Теорема 2.6.1 (критерий Коши сходимости семейства функций)**.** Пусть Y – полное метрическое пространство (М.П.), $f_t : X \to Y,\ t \in T$ – семейство $\{f_t\}$ равномерно сходится на X по базе $\mathfrak{B} \iff \forall \epsilon > 0 \exists B \in \mathfrak{B}:\ \forall t_1, t_2 \in B$ и $\forall x \in X$

$$\rho(f_{t_1}(x); f_{t_2}(x)) < \epsilon$$

Определение 2.6.8 (равномерная сходимость семейства функций по базе)**.** Будем говорить, что семейство функций $f_t : X \to Y$ **равномерно сходится на** X **по базе** $\mathfrak{B}$, если:

1. $\exists f : X \to Y :$
$$\lim_{\mathfrak{B}} f_t(x) = f(x), \quad \forall x \in X$$
2. f_t сходится равномерно к f на X по базе $\mathfrak{B}$.

Теорема 2.6.2 (формулировка критерия Коши для последовательности $f_n(x)$)**.** Последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится на $X \iff \forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N\ \forall p > 0\ \forall x \in X$

$$\left| f_n(x) - f_{n+p}(x) \right| < \epsilon$$

Доказательство. " $\implies$ " Проведем доказательство для $Y = \mathbb{R}$.

Пусть семейство f_t сходится равномерно на X по базе $\mathfrak{B}$, то есть $\exists f(x) : X \to \mathbb{R} :$

$$f_t(x) \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} f(x).$$

Покажем, что выполнено условие Коши.

Пусть $\epsilon > 0$ задано. Выберем $B \in \mathfrak{B} : \forall t \in B\ \forall x \in X$

$$\left| f_t(x) - f(x) \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Тогда $\forall t_1, t_2 \in B\ \forall x \in X$.

$$\left| f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x) \right| = \left| f_{t_1}(x) - f(x) + f(x) - f_{t_2}(x) \right| \leqslant \\ \leqslant \left| f_{t_1}(x) - f(x) \right| + \left| f_{t_2}(x) - f(x) \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

" $\impliedby$ " Пусть $\forall \epsilon > 0\ \exists B \in \mathfrak{B} : \forall t_1, t_2 \in B$ и $\forall x \in X$

$$\left| f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x) \right| < \epsilon \quad (\star)$$

Зафиксируем $x \in X$. Тогда выражение $(\star)$ есть точная формулировка критерия Коши существования предела функции $f_t(x)$ по базе $\mathfrak{B} \implies \forall x \in X\ \exists \lim_{\mathfrak{B}} f_t(x) = f(x)$.

Покажем, что $f_t(x) \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} f(x)$ на X.

В $(\star)$ передем к пределу по базе $\mathfrak{B}$ по переменной t_1. Получим, что

$$\left| f(x) - f_{t_2}(x) \right| < \epsilon.$$

Таким образом получаем равномерную сходимость семейства $f_{t_2}(x)$ к f на X по базе $\mathfrak{B}$, то есть $\forall \epsilon > 0\ \exists B \in \mathfrak{B}\ \forall t_2 \in B$ и $\forall x \in X$

$$\left|f_{t_2}(x) - f(x)\right| < \epsilon$$

$\square$

Следствие. Пусть X, Y – метрические пространства, $E \subset X$, $x_0 \in E$ – предельная точка для E. Семейство $f_t : X \to Y$:

1. f_t сходится на E по базе $\mathfrak{B}$;
2. f_t расходится в точке x_0 по базе $\mathfrak{B}$;
3. $\forall t\ f_t$ непрерывно в точке x_0.

Тогда на E семейство f_t сходится неравномерно.

Доказательство. Применим критерий Коши, покажем, что $\exists \epsilon > 0 :\ \forall B \in \mathfrak{B}\ \exists t_1, t_2 \in B$ и $\exists x \in E$:

$$\rho_Y(f_{t_1}(x), f_{t_2}(x)) \geqslant \epsilon.$$

Таким образом f_t расходится в точке x_0, то $\exists \epsilon > 0 : \forall B \in \mathfrak{B}\ \exists t_1, t_2 \in B$:

$$\rho_Y(f_{t_1}(x_0), f_{t_2}(x_0)) \geqslant \epsilon.$$

Так как f_{t_1} и f_{t_2} непрерывны, то $\exists U(x_0) \subset X :\ \forall x \in U(x_0)$

$$\rho_Y(f_{t_1}(x), f_{t_2}(x)) \geqslant \epsilon.$$

Возьмем $\forall x \in U(x_0) \cap E \implies$ тогда в x будет выполняться неравенство

$$\rho_Y(f_{t_1}(x), f_{t_2}(x)) \geqslant E \implies$$

$\implies f_t$ на E сходится неравномерно. $\square$

Следствие (из следствия)**.** Если $f_t : (a, b] \to D,\ D$ – область в Y:

1. $\forall t\ f_t$ непрерывно в точке b;
2. f_t сходится на (a, b) по $\mathfrak{B}$;
3. f_t расходится в точке b.

Тогда на (a, b) f_t сходится неравномерно.

2.7 равномерная сходимость функциональных рядов

Определение 2.7.1 (функциональный ряд)**.** Пусть $f_n : X \to \mathbb{R},\ X$ – произвольное множество.

Функциональным рядом называется выражение вида

$$(\triangle) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Говорят, что ряд $(\triangle)$ сходится на X поточечно, если на X сходится поточечно последовательность его частичных сумм. Ряд $(\triangle)$ равномерно сходится на X, если на X равномерно сходится последовательность его частичных сумм.

Теорема 2.7.1 (критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов)**.** Ряд $(\triangle)$ равномерно сходится на $X \iff \forall \epsilon > 0\ \exists N :\ \forall n > N\ \forall p > 0\ \forall x \in X$

$$\left|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)\right| < \epsilon$$

Доказательство. Самостоятельно. □

Следствие. Если:

1. Ряд $(\triangle)$ сходится на (a, b);
2. Расходится в точке b;
3. $\forall n\ f_n(x)$ непрерывно в точке b.

Тогда ряд $(\triangle)$ сходится на (a, b) неравномерно.

Доказательство. Следует из предыдущих следствий. □

Определение 2.7.2. Ряд $(\triangle)$ сходится абсолютно на X, если на X сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|f_n(x)\right|$$

Теорема 2.7.2. Пусть ряды

$$(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x), \quad (B) \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$$

такие, что:

1. $\forall n$ функции $a_n(x)$ и $b_n(x)$ определены на X;
2. $\exists N :\ \forall n > N$
$$\left|a_n(x)\right| \leqslant b_n(x) \quad \forall x \in X$$

3. Ряд (B) сходится на X равномерно.

Тогда ряд (A) сходится на X равномерно.

Доказательство. Пусть $\epsilon > 0$ задано. Выберем $N: \ \forall n > N, \ \forall p > 0 \ \forall x \in X$

$$b_{n+1}(x) + \ldots + b_{n+p}(x) < \epsilon.$$

Тогда $\forall n > N, \ \forall p > 0, \ \forall x \in X$

$$\left|a_{n+1}(x) + \ldots + a_{n+p}(x)\right| \leqslant \\ \leqslant \left|a_{n+1}(x)\right| + \ldots + \left|a_{n+p}(x)\right| \leqslant b_{n+1}(x) + \ldots + b_{n+p}(x) < \epsilon \implies$$

$\implies$ по критерию Коши ряд (A) сходится равномерно на X. □

Следствие (Мажорантный признак Вейерштрасса)**.** Пусть

1. $\forall n \exists M_n:$
$$\left|a_n(x)\right| \leqslant M_n \quad \forall x \in X$$

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ сходится.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ сходится на X абсолютно и равномерно.

Определение 2.7.3 (неубывающая (невозрастающая) последовательность)**.** Последовательность $f_n : X \to \mathbb{R}$ называется **неубывающей (невозрастающей)** на X, если $\forall x \in X$ последовательность f_n не убывает (не возрастает).

Теорема 2.7.3 (признаки Абеля и Дирихле)**.**