Математический Анализ
3 семестр

Данил Заблоцкий

15 сентября 2023 г.

Оглавление

Глава 1

Название

1.1 Название

Следствие. D - область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ дифференцируема на D и $\forall x \in D\ df(x) = 0$, то есть $\forall i\ \frac{\delta f}{\delta x_i} = 0$. Тогда $f - const$.

Доказательство. $x_0 \in D$, $B(x_0, \rho) \subset D$, $\forall x \in B(x_0, \rho)$, $[x_0, x] \subset B(x_0, \rho) \subset D$. $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$. $f(x) - f(x_0) = 0 \implies f(x) = f(x_0)$.

Построим путь из точки x_0 к некоторой точке $x \in D$, $\gamma : [0; 1] \to D$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x$. По определению пути, γ - непрерывна. Тогда $\exists \delta :$

$$\forall 0 \leqslant t \leqslant \delta \implies \forall x \in B(x_0, \rho), \quad \gamma(t) \in B(x_0, \rho) \implies f(\gamma(t)) = f(x_0),\ t \in [0, \delta]$$

Пусть $\Delta = \sup \delta \implies f(\gamma(\Delta)) = f(x_0)$. Покажем, что $\Delta = 1$. Пусть $\Delta < 1(0 + 1)$. Построим шар $B(\gamma(\Delta), \rho_\Delta) \subset D$. Тогда $\exists \epsilon > 0 :$

$$\Delta - \epsilon < t < \Delta + \epsilon$$

Но тогда $f(\gamma(\Delta + \epsilon)) = f(x_0)$ (так как точка $\gamma(\Delta + \epsilon) \in B(\gamma(\Delta), \rho_\Delta)$). Это противоречит с тем, что $\Delta = \sup \delta \implies \Delta = 1 \implies \gamma(1) = x$, $f(x) = f(x_0) \implies$ так как $x \in D$ - произвольная точка, то имеем, что $\forall x \in D :$

$$f(x) = f(x_0) \implies f(x) - const$$

$\square$

Теорема 1.1.1 (Достаточное условие дифференцируемости функции)**.** Пусть D - область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, f имеет непрерывную часть произведения в каждой окрестности точки $x \in D$.

Тогда f - дифференцируема в точке x.

Доказательство. Без ограничения общности, что окрестность точки $x_0 \in D$ является шаром $B(x_0, \rho) \subset D$.

Пусть $h : x_0 + h \in B(x_0, \rho)$. Здесь $x_0 = (x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n)$, $\quad x_0 + h = (x^1+h^1,\ x^2+h^2,\ \dots,\ x^n+h^n)$. Заметим, что точки $x_1 = (x^1,\ x^2+h^2,\ \dots,\ x^n+h^n)$, $x^2 = (x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n+h^n)$, $\dots$, $x_{n-1} = (x^1,\ x^2,\ \dots, x^{n-1}\ x^n+h^n) \in B(x_0, \rho)$.

$f(x_0+h)-f(x_0) = f(x_0+h)-f(x_1)+f(x_1)-f(x_2)+f(x_2)-\ldots-f(x_{n-1})+f(x_{n-1})-f(x_0) = f(x^1+h^1,\ \dots,\ x^n+h^n) - f(x^1,\ x^2+h^2,\ \dots,\ x^n+h^n) + f(x^1,\ x^2+h^2,\ \dots,\ x^n+h^n) - f(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n+h^n) + f(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n+h^n) - \ldots - f(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^{n-1},\ x^n) + f(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^{n-1},\ x^n+h^n) - f(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n) = |Lagranj\ theorem\ for\ 1\ variable| = \frac{\delta f}{\delta x_1}(x^1+\theta^1 h^1,\ x^2+h^2,\ \dots,\ x^n+h^n)\cdot h^1 + \frac{\delta f}{\delta x^2}(x^1,\ x^2+\theta^2 h^2,\ \dots,\ x^n+h^n)\cdot h^2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x^n}(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n+\theta^n h^n)\cdot h^n$.

Используя непрерывность частных производных, запишем: $f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{\delta f}{\delta x_1}(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n)\cdot h^1 + \alpha^1(h^1) + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n}(x^1,\ x^2,\ \dots,\ x^n)\cdot h^2 + \alpha^n(h^n)$, где $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ стремятся к нулю при $h \to 0$.

Это означает, что $f(x_0+h) - f(x_0) = L(x_0)\cdot h + \underset{h\to 0}{o}(h)$, где $L(x_0) = \frac{\delta f}{\delta x_1}(x_0)h^1 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x^n}(x_0)\cdot h^n = df(x_0) \implies$ по определению $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. □

1.2 Производные высших порядков

Определение 1.2.1 (Вторая производная по двум переменным)**.** Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, D - область в $\mathbb{R}^n$. Производная по переменной x^i от производной по переменной x^j называется **второй производной** функции f по переменным x^i, x^j и обозначается:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}(x), \quad f''_{x^i x^j}(x)$$

Теорема 1.2.1 (О смешанных производных)**.** Пусть D - область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x \in D$, f имеет в D непрерывно смешанные производные (2-го порядка).

Тогда эти производные не зависят от порядка дифференцирования.

Доказательство. Пусть $\frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta x^j \delta x^i}$ - непрерывны в точке $x \in D$. Так как остальные переменные фиксированы, то можно считать, что f зависит только от двух переменных.

Тогда $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$ - непрерывны в точке $x_0 = (x, y) \in D$.

Покажем, что $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$.

Рассмотрим функции $\phi(t) = f(x+t\cdot\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x+t\cdot\Delta x,\ y)$, $\psi(t) = f(x+\Delta x,\ y+t\cdot\Delta y) - f(x,\ y+t\cdot\Delta y)$, $t \in [0;1]$.

Имеем, что $\phi(1) - \phi(0) = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) = f(x+\Delta x,\ y) - f(x,\ y+\Delta y) + f(x,\ y)$.

$\psi(1) - \psi(0) = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y+\Delta y) - f(x+\Delta x,\ y) + f(x,\ y)$.

Тогда $\phi(1) - \phi(0) = \psi(1) - \psi(0)$. □