

Дифференциальные уравнения  
3 семестр

Данил Заблоцкий

10 октября 2023 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Основные понятия</b>	<b>2</b>
1.1	Уравнение 1-го порядка . . . . .	2
1.2	Уравнения с разделяющимися переменными . . . . .	4
1.3	Уравнение Бернулли . . . . .	6
1.4	Уравнения в полных дифференциалах . . . . .	7
1.5	Интегральный множитель . . . . .	9
1.6	Методы построения интегрирующего множителя . . . . .	9

# Глава 1

## Основные понятия

### 1.1 Уравнение 1-го порядка

**Определение 1.1.1** (Дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка). **Дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка** называется уравнение вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

$$x \in (a, b) \subset \mathbb{R}, \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty$$

$$[a, b), \quad (a, b], \quad (a, b]$$

**Определение 1.1.2** (Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно старшей производной). **Дифференциальным уравнением, разрешенным относительно старшей производной** называется уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad x \in (a, b) \quad (1.2)$$

**Определение 1.1.3** (Решение дифференциального уравнения). **Решением дифференциального уравнения** (1.1) или (1.2) называется  $n$  раз дифференцируемая функция  $y = \phi(x)$  на интервале  $(a, b)$ , если при подстановке она обращает уравнение в тождество на этом интервале.

**Замечание.**

$$y = \frac{1}{x+1}, \quad (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

Предмет дифференциального уравнения:

1. Решение дифференциального уравнения.
2. Существует ли решение на  $(a, b)$ ?
3. Единственность,  $y(x_0) = y_0$  (задача Коши).
4. О продолжении.

5. Свойства решения:

- ограниченность
- монотонность
- поведение решения вблизи границ ( $x \rightarrow +\infty$ )
- нули функции на  $(a, b)$

**Определение 1.1.4** (Дифференциальное уравнение 1-го порядка). **Дифференциальным уравнением 1-го порядка** называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0, \quad x \in (a, b) \quad (1.3)$$

(неразрешенное относительно  $y'$ )

**Определение 1.1.5** (Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно первой производной). **Дифференциальным уравнением 1-го порядка, разрешенным относительно первой производной**, называется уравнение вида

$$y' = f(x, y), \quad x \in (a, b) \quad (1.4)$$

**Определение 1.1.6** (Решение дифференциального уравнения (1.3) и (1.4)). **Решением дифференциального уравнения** (1.3) и (1.4) называется дифференцируемая функция  $y = \phi(x)$ , обращающая уравнение в тождество на этом интервале.

**Пример 1.**  $y' = -\frac{x}{y}$  имеет решение  $x^2 + y^2 = c$ , где  $c$  - произвольная константа,  $c > 0$ .

**Определение 1.1.7** (Поле направлений). Сопоставим любой точке  $(x_0, y_0) \rightarrow y'(x_0) = f(x_0, y_0) = \tan \alpha$  направления  $l$ . Семейство (совокупность) направлений  $l$  дает **поле направлений**.

**Определение 1.1.8** (Интегральная кривая). Кривая, касающаяся в каждой своей точке поля направлений, называется **интегральной кривой**.

$y = \phi(x, c)$  интегральная кривая  $\equiv$  график решений

**Определение 1.1.9** (Изоклины). Кривые, вдоль которых поле направлений постоянно, называется **изоклинами**.

**Пример 2.**  $y' = y - x^2$  Напишем уравнение изоклин:  $y - x^2 = c$  (заменяем  $y'$  на  $c$ )

$$1. \quad c = 0 \implies y - x^2 = 0 \implies y = x^2$$

$$\tan \alpha = 0 \implies \alpha = 0; \quad y \text{ const.}$$

$$2. \quad c = 1 \implies y - x^2 = 1 \implies y = x^2 + 1$$

$$\tan \alpha = 1 \implies \alpha = 45^\circ; \quad y \uparrow$$

3.  $c = 2 \implies y - x^2 = 2 \implies y = x^2 + 2$   
 $\tan \alpha = 2 \implies \alpha = \arctan 2; \quad y \uparrow$
  4.  $c = -1 \implies y - x^2 = -1 \implies y = x^2 - 1$   
 $\tan \alpha = -1 \implies \alpha = -45^\circ; \quad y \downarrow$
  5.  $c = -2 \implies y - x^2 = -2 \implies y = x^2 - 2$   
 $\tan \alpha = -2 \implies \alpha = -\arctan 2; \quad y \downarrow$
- $$y' = 0$$
- $$y' > 0, \quad y > x^2$$
- $$y' < 0, \quad y < x^2$$

**Определение 1.1.10** (Общее решение). **Общее решение** - совокупность функций, которая содержит все решения уравнения.

Если решение задается функцией  $y = \phi(x, c)$  или  $\psi(x, y, c) = 0$ , то общее решение должно удовлетворять условиям:

1. При любом  $c$  формула дает решение уравнения.
2. Любое решение уравнения находится по формуле при некотором  $c = c_0$ .

**Определение 1.1.11** (Частное решение). **Частное решение** определяется из общего при некотором  $c = c_0$ .

**Пример 3.**  $y' = x \implies y = \frac{x^2}{2} + c$  - общее решение

при  $c = 0$ :  $y = \frac{x^2}{2}$ , при  $c = 1$ :  $y = \frac{x^2}{2} + 1$  - частное решение

## 1.2 Уравнения с разделяющимися переменными

**Определение 1.2.1** (Уравнения с разделяющимися переменными). **Уравнениями с разделяющимися переменными** называются уравнения вида:

$$y' = f(x) \cdot g(y), \quad f_1(x) \cdot g_1(y) \cdot dx + f_2(x) \cdot g_2(y) \cdot dy = 0,$$

$f$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  зависят от  $x$ ,  $g$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  зависят от  $y$ .

Алгоритм:

$$\left[ \begin{array}{l} g(y) = 0 \implies y = c \\ \left\{ \begin{array}{l} g(y) \neq 0 \\ \frac{y'}{g(y)} = f(x) \end{array} \right. \implies \int \frac{y' dx}{g(y)} = \int f(x) dx \implies \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx \implies \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} y = \phi(x, c) \\ \psi(x, y, c) = 0 \end{array} \right. \iff \left[ \begin{array}{l} y = c_1 \\ \left[ \begin{array}{l} y = \phi(y, c_2) \\ \psi(x, y, c_2) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

**Пример 4.**  $y' = xy^2$

$$\left[ \begin{array}{l} y = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{y^2} = x dx \\ y \neq 0 \end{array} \right. \iff \int \frac{dy}{y^2} = \int x dx \implies -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C \\ y = -\frac{2}{x^2 + 2C}, \quad C \in \mathbb{R} \\ y = 0 \end{array} \right.$$

**Теорема 1.2.1** (Задача Коши).  $\left\{ \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$

$f(x, y) \in C(D), \quad (x_0, y_0) \in D$  (РИСУНКИ)

**Пример 5.**  $y' = \sqrt{y}$

$$\left[ \begin{array}{l} y = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx \\ y \neq 0 \end{array} \right. \iff 2\sqrt{y} = x + C \implies y = \left(\frac{x+c}{2}\right)^2 \text{ при } x + c \geq 0. \end{array} \right.$$

1.  $y = 0 \cup$  парабола  $AB_1D_1$ ;

2.  $x_0$  на кривой  $y = 0$   $\left[ \begin{array}{l} y = 0 \\ ABD \\ AB_1D_1 \\ AB_2D_2 \end{array} \right.$

Ответ:  $\left[ \begin{array}{l} y = 0 \\ y = \left(\frac{x+c}{2}\right)^2, \quad x + c \geq 0 \end{array} \right.$

**Определение 1.2.2** (Точка единственности решения). Точка  $(x_0, y_0)$  называется **точкой единственности решения**  $y = \phi(x)$ , если через нее не проходит другое решение, не совпадающее с решением  $y = \phi(x)$  ни в какой окрестности этой точки.

Остальные точки называются **точками неединственности**.

Решение, которое содержит точки неединственности, называется **особым решением**.

**Теорема 1.2.2** ( $\exists$  и !-ть решения задачи Коши). Пусть

$$f(x, y) \text{ в } \left\{ \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$$

1. Определена и непрерывна в прямоугольнике в прямоугольнике

$$\Pi = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

2. Удовлетворяет условию Липшица по  $y$  в  $\Pi$  ( $f'_y(x, y)$  непрерывна в  $\Pi$ )

Тогда  $\exists!$  решение задачи  $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$  в окрестности точки  $x_0$   $(x_0 - h, x_0 + h)$ , где  $h = \min(a, \frac{b}{M})$ ,  $M = \max |f(x, y)|$ ,  $(x, y) \in \Pi$ . (РИ-СУНОК)

**Определение 1.2.3.**  $f(x, y)$  удовлетворяет условию Липшица по переменной  $y$ , если  $\exists L > 0$  такая, что  $\forall (x, y_1)$  и  $(x, y_2)$  имеет место  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$ .

Если  $f'_y(x, y)$  - непрерывна в  $\Pi$ , то выполняется условие Липшица.

$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in \Pi, \exists \tilde{y} \in [y_1, y_2]$ .

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq |f'_y(x, \tilde{y}) \cdot (y_1 - y_2)| \leq |f'_y(x, \tilde{y})| |y_1 - y_2| = L |y_1 - y_2|$ .

**Пример 6.**  $y' = \frac{1}{y^2}, f(x, y) = \frac{1}{y^2}, f'_y = \frac{2}{y^3}, \int y^2 dy = \int y dx \implies \frac{y^3}{3} = x + c \implies \begin{cases} y = \sqrt[3]{3(x+c)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \implies y = \sqrt[3]{3(x-x_0) + y_0^3}$

**Пример 7.**  $y' = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

**Пример 8.**  $y' = y^2 - 2y + 1 = (y - 1)^2$

$$\begin{cases} y = 1 \\ y \neq 1 \\ \frac{dy}{(y-1)^2} = \int dx \end{cases} \iff \frac{1}{y-1} = x + C \implies y = 1 - \frac{1}{x+C}$$

ПОСЛЕ ЭТОГО ИДЕТ ТО, ЧТО Я ПРОПУСТИЛ

### 1.3 Уравнение Бернулли

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^m, \quad m \neq 1$$

$y = 0$  – решение при  $m > 0$

1. Сведение к линейному

2. Метод Бернулли

$$1. y^m \neq 0, \quad \frac{y'}{y^m} + P(x) \cdot \frac{y}{y^m} = q(x); \quad z = y^{1-m}, \quad z' = (1-m) \cdot y^{-m} \cdot y' = (1-m) \cdot \frac{y'}{y^m}$$

$$\frac{z'}{1-m} + P(x) \cdot z = q(x) \quad | \cdot (1-m)$$

$$z' + (1-m) \cdot P(x) \cdot z = (1-m) \cdot q(x)$$

2. Пусть  $y = u \cdot v$ ,  $u' \cdot v + u \cdot v' + P(x) \cdot u \cdot v = q(x) \cdot u^m \cdot v^m$

$$u' \cdot v + u(v' + P(x) \cdot v) = q(x) \cdot u^m \cdot v^m$$

$$\begin{cases} v' + P(x) \cdot v = 0 \\ u' = q(x) \cdot u^m \cdot v^{m-1} \end{cases} \implies u = e^{-\int p(x)dx}$$

$$\frac{u'}{u^m} = q(x)(e^{-\int p(x)dx})^{m-1} \implies u \implies y = u \cdot v$$

## 1.4 Уравнения в полных дифференциалах

**Определение 1.4.1** (Уравнение в ПД). Уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1.5)$$

называется **уравнением в полных дифференциалах (ПД)**, если левая часть уравнения (1.5) является дифференциалом некоторой функции.

$$P, Q, P_x, Q_x, P_y, Q_y \in C(D), \quad (1.6)$$

$D$  - односвязная область в  $\mathbb{R}^2$

**Теорема 1.4.1.** Если существует такая функция  $u(x, y) : du = Pdx + Qdy$ , выполняются условия (1.6), то имеет место в  $D$

$$\frac{\delta Q}{\delta x} = \frac{\delta P}{\delta y} \quad (1.7)$$

*Доказательство.* Пусть  $\exists u(x, y) : du = Pdx + Qdy$ ,  $du = \frac{\delta u}{\delta x}dx + \frac{\delta u}{\delta y}dy$ ,  $U \in C^2(x)$

$$\begin{cases} \frac{\delta u}{\delta x} = P \\ \frac{\delta u}{\delta y} = Q \end{cases} \iff \frac{\delta^2 u}{\delta y \delta x} = \frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x} \iff \frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}. \quad \square$$

**Теорема 1.4.2.** Для  $\exists$  функции  $u(x, y)$  такой, что  $du = Pdx + Qdy$  при выполнении (1.6)  $\iff \frac{\delta Q}{\delta x} = \frac{\delta P}{\delta y}$ .

$$1. Pdx + Qdy = 0$$

$$2. du = Pdx + Qdy \implies du = 0$$

$$3. u(x, y) = C$$

**Общий интеграл** - это функция  $u(x, y)$ , которая равна константе на решении уравнения.



*Доказательство.* Восстановление функции  $u(x, y)$  по ее полному дифференциалу.

Пусть выполняется (1.6),  $D$  — односвязная область в  $\mathbb{R}^2$ ,  $du = Pdx + Qdy$ .

Задача: найти  $u(x, y) \in C^2(D)$

$$du = \frac{\delta u}{\delta x} dx + \frac{\delta u}{\delta y} dy, \begin{cases} \frac{\delta u}{\delta x} = P(x, y) \\ \frac{\delta u}{\delta y} = Q(x, y) \end{cases}$$

Проинтегрируем 1-е уравнение:  $(x_0, y_0) \in D$

$$\int_{x_0}^x \frac{\delta u}{\delta x} dx = \int_{x_0}^x P(x, y) dx$$

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \int_{x_0}^x P(x, y) dx \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta u}{\delta y} &= \frac{\delta}{\delta y} (u(x_0, y) + \int_{x_0}^x P(x, y) dx) = \frac{\delta u(x_0, y)}{\delta y} + \int_{x_0}^x \frac{\delta P(x, y)}{\delta y} dx = \frac{\delta u(x_0, y)}{\delta y} + \\ &+ \int_{x_0}^x \frac{\delta Q}{\delta x} dx = \frac{\delta u(x_0, y)}{\delta y} + Q(x, y) - Q(x_0, y) = Q(x, y) \implies \frac{\delta u(x_0, y)}{\delta y} = Q(x_0, y), \end{aligned}$$

интегрируем по  $y$ :

$$\int_{y_0}^y \frac{\delta u(x_0, y)}{\delta y} dy = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy, \quad u(x_0, y) - u(x_0, y_0) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy$$

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy \quad (1.9)$$

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy \quad (1.10)$$

$$du(x, y) = 0, \quad u(x, y) = C$$

□

**Пример 9.**  $ydx + xdy = 0 \iff \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}, \quad y = P, \quad x = Q$

$$1. \quad \frac{\delta Q}{\delta x} = \frac{\delta P}{\delta y} = 1 \implies \text{уравнение в ПД.}$$

$$d(x \cdot y) = dx \cdot y + xdy = 0, \quad x \cdot y = C$$

$$2. \quad \begin{cases} \frac{\delta u}{\delta x} = y = P \implies \int \frac{\delta u}{\delta x} dx = \int y dx \implies u(x, y) = y \cdot x + C(y) \\ \frac{\delta u}{\delta y} = x = Q \implies \frac{\delta u}{\delta y} = \frac{\delta}{\delta y} (y \cdot x + C(y)) = x + C'(y) = x \end{cases}$$

$$y(x, y) = y \cdot x + C \implies y \cdot x + C = C_1 \implies y \cdot x = \tilde{C}, \quad \tilde{C} = C_1 - C$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta u}{\delta x} = y \\ \frac{\delta u}{\delta y} = x \end{array} \right\} \implies \int \frac{\delta u}{\delta y} dy = \int x \cdot dy \implies$$

$$u(x, y) = x \cdot y + C(x)$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta x} (x \cdot y) + C(x) = y + C'(x) = y \implies C'(x) = 0 \implies C(x) = C_1 \implies u(x, y) = x \cdot y + C_1;$$

$$u(x, y) = C_2 \implies x \cdot y + C_1 = C_2 \implies x \cdot y = C, \quad C = C_2 - C_1$$

## 1.5 Интегральный множитель

$$\frac{1}{y^2} : ydx - xdy = 0$$

$$\frac{\delta P}{\delta y} = y'_y = 1 \neq \frac{\delta Q}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta x}(-x) = -1$$

$$u(x, y) = C$$

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = 0 \implies d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

$$\frac{x}{y} = C, \quad y = 0$$

**Определение 1.5.1.** Пусть

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1.11)$$

не является уравнением в ПД,  $M, N \in C^2(D)$ ,  $D$  — односвязная область в  $\mathbb{R}^2$ .

$\mu(x, y)$  называется **интегрирующим множителем** уравнения (1.11), если  $\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy$  — является ПД некоторой функции

$$\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}$$

НАДО ДОПИСАТЬ

## 1.6 Методы построения интегрирующего множителя

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1.12)$$

$$M, N \in C^2(D), \quad \frac{\delta N}{\delta x} \neq \frac{\delta M}{\delta y}, \quad \mu(x, y) \in C^1(D)$$

$$\mu(x, y) \cdot M(x, y)dx + \mu(x, y) \cdot N(x, y)dy = 0$$

$$\frac{\delta Q}{\delta x} = \frac{\delta P}{\delta y}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mu(x, y)}{\delta x} \cdot N(x, y) + \mu(x, y) \cdot \frac{\delta N(x, y)}{\delta x} = \\ = \frac{\delta \mu(x, y)}{\delta y} \cdot M(x, y) + \mu(x, y) \cdot \frac{\delta M(x, y)}{\delta y} \end{aligned}$$

1.

$$\begin{aligned}
\mu = \mu(x) &\implies \frac{\delta\mu}{\delta y} = 0 \implies \\
&\implies \mu'(x) \cdot N(x, y) + \mu(x) \cdot \frac{\delta N}{\delta x} = \mu(x) \cdot \frac{\delta M}{\delta y} \\
\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} &= \frac{\frac{\delta M}{\delta y} - \frac{\delta N}{\delta x}}{N} = F(x) \\
\int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} dx &= \int F(x) dx \\
\ln |\mu(x)| &= \ln c + \int F(x) dx, \quad \mu(x) = c \cdot e^{\int F(x) dx} \underset{c=1}{=} e^{\int F(x) dx}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\mu = \mu(y) &\implies \frac{\delta\mu}{\delta x} = 0 \implies \\
&\implies \mu'(y) \cdot M(x, y) + \mu(y) \cdot \frac{\delta M}{\delta y} = \mu(y) \cdot \frac{\delta N}{\delta x} \\
\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} &= \frac{\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y}}{M} = F(y) \\
\int \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} dy &= \int F(y) dy \\
\ln |\mu(y)| &= \ln c + \int F(y) dy, \quad \mu(y) = c \cdot e^{\int F(y) dy} \underset{c=1}{=} e^{\int F(y) dy}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\mu &= \mu(\omega(x, y)) \\
\frac{\delta\mu}{\delta\omega} \cdot \frac{\delta\omega}{\delta x} \cdot N + \mu \cdot \frac{\delta N}{\delta x} &= \\
&= \frac{\delta\mu}{\delta\omega} \cdot \frac{\delta\omega}{\delta y} \cdot M + \mu \cdot \frac{\delta M}{\delta y} \\
\frac{\frac{\delta\mu}{\delta\omega}}{\mu(\omega)} &= \frac{\frac{\delta M}{\delta y} - \frac{\delta N}{\delta x}}{N \cdot \frac{\delta\omega}{\delta x} - M \cdot \frac{\delta\omega}{\delta y}} = F(\omega) \implies \\
&\implies \mu(\omega) = e^{F(\omega)d\omega}
\end{aligned}$$

**Пример 10.**

$$(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0, \quad M = x^2 + y^2 + x, \quad N = y$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta N}{\delta x} &= 0 \neq \\ &\neq 2y = \frac{\delta M}{\delta y} \end{aligned}$$

$$\mu = \mu(x) = ?, \quad \mu(x^2 + y^2 + x)dx + \mu y dy = 0,$$

$$P = \mu(x^2 + y^2 + x), \quad Q = \mu y,$$

$$\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}, \quad \frac{\delta M}{\delta y}(x^2 + y^2 + x) + \mu \cdot 2y = \frac{\delta \mu}{\delta x} \cdot y + \mu \cdot 0,$$

$$\frac{\mu'(x)}{M} = \frac{2y}{y} = 2, \quad \mu(x) = e^{2x},$$

$$e^{2x}(x^2 + y^2 + x)dx + e^{2x} \cdot y dy = 0,$$

$$P = e^{2x}(x^2 + y^2 + x), \quad Q = e^{2x} \cdot y,$$

$$\frac{\delta P}{\delta y} = 2e^{2x} \cdot y = \frac{\delta Q}{\delta x},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta u}{\delta x} = e^{2x}(x^2 + y^2 + x) \\ \frac{\delta u}{\delta y} = e^{2x} \cdot y \end{array} \right. \implies u(x, y) = e^{2x} \cdot \frac{y^2}{2} + c(x),$$

$$u'_x = 2e^{2x} \cdot \frac{y^2}{2} + c'(x) = e^{2x}(x^2 + y^2 + x), \quad c'(x) = e^{2x}(x^2 + x)$$

$$\begin{aligned} c(x) &= \frac{e^{2x}}{2}(x^2 + x) - \int \frac{e^{2x}}{2}(2x + 1)dx = \\ &= \frac{e^{2x}}{2}(x^2 + x) - \frac{e^{2x}}{4}(2x + 1) + \int \frac{e^{2x}}{4} \cdot 2dx = \\ &= \frac{e^{2x}}{2}(x^2 + x) - \frac{e^{2x}}{4}(2x + 1) + \frac{e^{2x}}{4} + C \end{aligned}$$

$$c(x) = \frac{e^{2x}}{2} \cdot x^2 + C$$

$$u(x, y) = e^{2x} \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} + C = \tilde{C}$$

$$e^{2x} \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} = C - \text{общий интеграл}$$

1. Если  $\mu_0$  – ИМ, то  $\forall c \in \mathbb{R} \quad \mu_1 = C \cdot \mu_0$  – тоже является ИМ

2. Пусть  $\mu_0$  – ИМ уравнения (1.12),  $V_0$  – соответствующий ему интеграл, то есть

$$\mu_0 \cdot Mdx + \mu_0 \cdot Ndy = dV_0,$$

тогда для произвольной функции  $\phi \in C^1(D)$ ,  $\phi \neq 0$ ,  $\mu_1 = \mu_0 \cdot \phi(V_0)$  – так же является ИМ.

$$\begin{aligned} Mdx + Ndy &= 0, \quad \mu_1 \cdot Mdx + \mu_1 \cdot Ndy = \\ &= \mu_0 \cdot \phi(V_0) \cdot Mdx + \mu_0 \cdot \phi(V_0) \cdot Ndy = \\ &= \phi(V_0)(\mu_0 \cdot Mdx + \mu_0 \cdot Ndy) = \phi(V_0)dV_0 = \\ &= d\left(\int \phi(V_0)dV_0\right) = dV_1, \quad \int \phi(V_0)dV_0 = V_1 \end{aligned}$$

3. Если  $\mu_1$  и  $\mu_2$  – интегральные множители уравнения (1.12), тогда

$$\mu_2 = \mu_1 \cdot \phi(V_1),$$

где  $\phi$  – произвольная функция класса  $C^1$ ,  $V_1$  – соответствующий интеграл для  $\mu_1$ .

**Следствие.** Если  $\mu_1$  и  $\mu_2$  – интегральные множители уравнения (1.12) и  $\frac{\mu_1}{\mu_2} \neq const$ , тогда  $\frac{\mu_1}{\mu_2}$  – является интегралом для уравнения (1.12).

**Теорема 1.6.1.** Если уравнение 1-го порядка имеет общий интеграл  $u(x, y) = C$ , то оно имеет интегрирующий множитель.

*Доказательство.*

$$u(x, y) = C \begin{cases} Mdx + Ndy = 0 \\ du \equiv \frac{\delta u}{\delta x}dx + \frac{\delta u}{\delta y}dy = 0 \end{cases}$$

$(dx, dy)$  – ненулевое решение если определитель равен 0, то есть

$$\begin{vmatrix} M & N \\ \frac{\delta u}{\delta x} & \frac{\delta u}{\delta y} \end{vmatrix} = M \cdot \frac{\delta u}{\delta y} - N \cdot \frac{\delta u}{\delta x} = 0$$

$$\begin{aligned} M \cdot \frac{\delta u}{\delta y} = N \cdot \frac{\delta u}{\delta x} \quad \Bigg| \cdot (MN) \implies \frac{1}{N} \cdot \frac{\delta u}{\delta y} &= \frac{1}{M} \cdot \frac{\delta u}{\delta x} \stackrel{?}{=} \mu, \\ \mu \cdot Mdx + \mu \cdot Ndy &= 0, \quad \frac{1}{M} \frac{\delta u}{\delta x} \cdot Mdx + \frac{1}{N} \cdot \frac{\delta u}{\delta y} \cdot Ndy = 0, \\ \frac{\delta u}{\delta x}dx + \frac{\delta u}{\delta y}dy &= 0 \implies du = 0 \end{aligned}$$

□

## Еще один способ построения интегрального множителя

$$M_1 dx + N_1 dy + M_2 dx + N_2 dy = 0$$

$I$ 
 $II$

Пусть  $\mu_1$  – интегральный множитель для  $I$ ,  $V_1$  – соответствующий ему интеграл, то есть

$$dV_1 = \mu_1 \cdot M_1 dx + \mu_1 \cdot N_1 dy,$$

$\mu_2$  – интегральный множитель для  $II$ ,  $V_2$  – соответствующий ему интеграл, то есть

$$dV_2 = \mu_2 \cdot M_2 dx + \mu_2 \cdot N_2 dy,$$

тогда  $\exists \phi, \psi \in C^1(D) : \mu_1 \cdot \phi(V_1) = \mu_2 \cdot \psi(V_2)$  и  $\mu = \mu_1 \cdot \phi(V_1)$  или  $\mu = \mu_2 \cdot \psi(V_2)$  – будет интегральным множителем.

**Пример 11.**

$$\left(\frac{y}{x} + 3x^2\right)dx + \left(1 + \frac{x^3}{y}\right)dy = 0$$

$$\left(\frac{y}{x} + dy\right) + \left(3x^2 dx + \frac{x^3}{y} dy\right) = 0$$

$$\frac{y}{x} + dy = 0$$

$$\frac{y}{x} + dy = 0$$

$$\mu_1 = x$$

$$\mu_1 = x$$

$$ydx + xdy = 0$$

$$ydx + xdy = 0$$

$$d(xy) = 0 \implies xy = C_1$$

$$d(xy) = 0 \implies xy = C_1$$

$$V_1 = xy$$

$$V_1 = xy$$

ДОПИСАТЬ НАДО