

Дифференциальные уравнения  
3 семестр

Данил Заблоцкий

21 декабря 2023 г.

# Оглавление

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Основные понятия</b>  | <b>2</b>  |
| 1.1      | Уравнение 1-го порядка . . . . .   | 2         |
| 1.2      | Уравнения с разделяющимися переменными . . . . .                                   | 4         |
| 1.3      | Особые решения . . . . .   | 7         |
| <b>2</b> | <b>Методы интегрирования дифференциальных уравнений</b>                            |           |
|          | <b>1-го порядка</b>  | <b>10</b> |
| 2.1      | Однородные уравнения . . . . .   | 10        |
| 2.2      | Линейные уравнения 1-го порядка . . . . .  | 12        |
| 2.3      | Уравнение Бернулли . . . . .   | 16        |
| 2.4      | Уравнения в полных дифференциалах . . . . .  | 17        |
| 2.5      | Интегрирующий множитель . . . . .  | 19        |
| 2.6      | Методы построения интегрирующего множителя . . . . .                               | 20        |
| 2.7      | Теорема существования и единственности . . . . .                                   | 24        |
| 2.8      | Уравнения, не разрешенные относительно производной . . . . .                       | 27        |
| 2.9      | Интегрирование уравнений, не разрешенных относительно<br>производной . . . . .     | 28        |
| 2.10     | Уравнения высших порядков . . . . .  | 29        |
| 2.11     | Линейные уравнения высших порядков . . . . .                                       | 30        |
| 2.12     | Построение общего решения уравнения $Ly = 0$ . . . . .                             | 33        |
| 2.13     | Линейные уравнения с переменными коэффициентами . . . . .                          | 34        |
| 2.14     | Структура общего решения линейного неоднородного урав-<br>нения $Ly = f$ . . . . . | 36        |
| 2.15     | Линейные уравнения с постоянными коэффициентами . . . . .                          | 38        |
| 2.16     | Линейные неоднородные уравнения с правой частью спец.<br>вида . . . . .            | 41        |

# Глава 1

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

### 1.1 Уравнение 1-го порядка

**Определение 1.1.1** (дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка). *Дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка* называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad x \in \begin{matrix} (a, b) \\ [a, b], [a, b], (a, b) \end{matrix} \subset \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

где  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ .

**Определение 1.1.2** (дифференциальное уравнение, разрешенное относительно старшей производной). *Дифференциальным уравнением, разрешенным относительно старшей производной* называется уравнение вида:

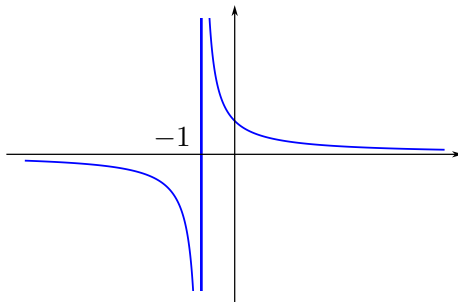
$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad x \in (a; b) \quad (1.2)$$

**Определение 1.1.3** (решение дифференциального уравнения). *Решением дифференциального уравнения 1.1 или 1.2* называется  $n$  раз дифференцируемая функция  $y = \phi(x)$  на интервале  $(a, b)$ , если при подстановке она обращает уравнение в тождество на этом интервале.

*Замечание.*

$$y = \frac{1}{x+1}, \quad (-\infty; -1) \cup (-1; -\infty),$$

где  $(-\infty; -1)$  – первое решение, а  $(-1; -\infty)$  – второе решение.



**Предмет дифференциального уравнения:**

1. Решение дифференциального уравнения.
2. Существует ли решение на  $(a; b)$ ?
3. Единственность,  $y(x_0) = y_0$  (задача Коши).
4. О продолжении.
5. Свойства решения:
  - ограниченность
  - монотонность
  - поведение решения вблизи границ ( $x \rightarrow +\infty$ )
  - нули функции на  $(a; b)$

**Определение 1.1.4** (дифференциальное уравнение 1-го порядка). *Дифференциальным уравнением 1-го порядка* называется уравнение вида:

$$F(x, y, y') = 0, \quad x \in (a; b) \quad (1.3)$$

(неразрешенное относительно  $y'$ )

**Определение 1.1.5** (дифференциальное уравнение, разрешенное относительно первой производной). *Дифференциальным уравнением 1-го порядка, разрешенным относительно первой производной*, называется уравнение вида:

$$y' = f(x, y), \quad x \in (a; b) \quad (1.4)$$

**Определение 1.1.6** (решение дифференциального уравнения 1.3 и 1.4). *Решением дифференциального уравнения 1.3 и 1.4* называется дифференцируемая функция  $y = \phi(x)$ , обращающая уравнение в тождество на этом интервале.

**Пример 1.**  $y' = -\frac{x}{y}$  имеет решение  $x^2 + y^2 = c$ , где  $c$  - произвольная константа,  $c > 0$ .

**Определение 1.1.7** (поле направлений). Сопоставим любой точке  $(x_0, y_0) \rightarrow y'(x_0) = f(x_0, y_0) = \tan \alpha$  направления  $l$ . Семейство (совокупность) направлений  $l$  дает *поле направлений*.

**Определение 1.1.8** (интегральная кривая). Кривая, касающаяся в каждой своей точке поля направлений, называется *интегральной кривой*:

$y = \phi(x, c)$  – интегральная кривая  $\equiv$  график решения

**Определение 1.1.9** (изоклины). Кривые, вдоль которых поле направлений постоянно, называется *изоклинами*.

**Пример 2.**  $y' = y - x^2$

Напишем уравнение изоклин:  $y - x^2 = c$  (заменяем  $y'$  на  $c$ )

$$1. \ c = 0 \implies y - x^2 = 0 \implies y = x^2 \text{ (уравнение изоклины)}$$

$$\tan \alpha = 0 \implies \alpha = 0; \quad y \text{ const.}$$

$$2. \ c = 1 \implies y - x^2 = 1 \implies y = x^2 + 1$$

$$\tan \alpha = 1 \implies \alpha = 45^\circ; \quad y \nearrow$$

$$3. \ c = 2 \implies y - x^2 = 2 \implies y = x^2 + 2$$

$$\tan \alpha = 2 \implies \alpha = \arctan 2; \quad y \nearrow$$

$$4. \ c = -1 \implies y - x^2 = -1 \implies y = x^2 - 1$$

$$\tan \alpha = -1 \implies \alpha = -45^\circ; \quad y \searrow$$

$$5. \ c = -2 \implies y - x^2 = -2 \implies y = x^2 - 2$$

$$\tan \alpha = -2 \implies \alpha = -\arctan 2; \quad y \searrow$$

$$y' = 0$$

$$y' > 0, \quad y > x^2$$

$$y' < 0, \quad y < x^2$$

**Определение 1.1.10** (общее решение). *Общее решение* – совокупность функций, которая содержит все решения уравнения.

Если решение задается функцией  $y = \phi(x, c)$  или  $\psi(x, y, c) = 0$ , то общее решение должно удовлетворять условиям:

1. При любом  $c$  формула дает решение уравнения.

2. Любое решение уравнения находится по формуле при некотором  $c = c_0$ .

**Определение 1.1.11** (частное решение). *Частное решение* определяется из общего при некотором  $c = c_0$ .

**Пример 3.**  $y' = x \implies y = \frac{x^2}{2} + c$  – общее решение,

$$\begin{cases} c = 0 : & y = \frac{x^2}{2}, \\ c = 1 : & y = \frac{x^2}{2} + 1 \end{cases} \quad \text{– частное решение.}$$

## 1.2 Уравнения с разделяющимися переменными

**Определение 1.2.1** (уравнения с разделяющимися переменными). *Уравнениями с разделяющимися переменными* называются уравнения вида:

$$y' = f(x) \cdot g(y) \text{ или } f_1(x) \cdot g_1(y) \cdot dx + f_2(x) \cdot g_2(y) \cdot dy = 0,$$

$$\text{где } \begin{matrix} f, f_1, f_2 \text{ зависят от } x, \\ g, g_1, g_2 \text{ зависят от } y \end{matrix}$$

**Алгоритм:**

$$\left[ \begin{array}{l} g(y) = 0 \implies y = c \\ \left\{ \begin{array}{l} g(y) \neq 0 \\ \frac{y'}{g(y)} = f(x) \end{array} \right. \implies \int \frac{y' dx}{g(y)} = \int f(x) dx \xrightarrow{dy=y'dx} \\ \xrightarrow{dy=y'dx} \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx \implies \\ \implies \left[ \begin{array}{l} y = \phi(x, c) \\ \psi(x, y, c) = 0 \end{array} \right] \iff \left[ \begin{array}{l} y = c_1 \\ \left[ \begin{array}{l} y = \phi(y, c_2) \\ \psi(x, y, c_2) = 0 \end{array} \right] \end{array} \right]$$

**Пример 4.**  $y' = xy^2$

$$\left[ \begin{array}{l} y = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{y^2} = x dx \\ y \neq 0 \end{array} \right. \end{array} \right] \iff \int \frac{dy}{y^2} = \int x dx \implies -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C \implies \\ \implies \left[ \begin{array}{l} y = -\frac{2}{x^2 + 2C}, \quad C \in \mathbb{R} \\ y = 0 \end{array} \right]$$

**Теорема 1.2.1** (задача Коши).

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right. \quad (1.5)$$

$$f(x, y) \in C(D), \quad (x_0, y_0) \in D$$

**Пример 5.**  $y' = \sqrt{y}$

$$\left[ \begin{array}{l} y = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx \\ y \neq 0 \end{array} \right. \end{array} \right] \iff 2\sqrt{y} = x + C \implies \\ \implies y = \left( \frac{x+c}{2} \right)^2 \text{ при } x+c \geq 0$$

1.  $y = 0 \cup$  парабола  $AB_1D_1$ ;

2.  $x_0$  на кривой  $y = 0$   $\left[ \begin{array}{l} y = 0 \\ ABD \\ AB_1D_1 \\ AB_2D_2 \end{array} \right]$

Ответ:  $\left[ \begin{array}{l} y = 0 \\ y = \left( \frac{x+c}{2} \right)^2, \quad x+c \geq 0 \end{array} \right]$

**Определение 1.2.2** (точка единственности, неединственности решения, особое решение). Точка  $(x_0, y_0)$  называется *точкой единственности решения*  $y = \phi(x)$ , если через нее не проходит другое решение, не совпадающее с решением  $y = \phi(x)$  ни в какой окрестности этой точки.

Остальные точки называются *точками неединственности*.

Решение, которое содержит точки неединственности, называется *особым решением*.

**Теорема 1.2.2** ( $\exists$  и !-ть решения задачи Коши). Пусть  $f(x, y)$  в 1.5:

1. Определена и непрерывна в прямоугольнике в прямоугольнике:

$$\Pi = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

2. Удовлетворяет условию Липшица по  $y$  в  $\Pi$ :

$$(f'_y(x, y) \text{ непрерывна в } \Pi)$$

Тогда  $\exists!$  решение задачи 1.5 в окрестности точки  $x_0$ :

$$(x_0 - h; x_0 + h),$$

где  $h = \min(a; \frac{b}{M})$ ,  $M = \max |f(x, y)|$ ,  $(x, y) \in \Pi$ .

**Определение 1.2.3** (функция, удовлетворяющая условию Липшица).  $f(x, y)$  удовлетворяет условию Липшица по переменной  $y$ , если  $\exists L > 0$  такая, что  $\forall (x, y_1)$  и  $(x, y_2)$  имеет место соотношение:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

Если  $f'_y(x, y)$  – непрерывна в  $\Pi$ , то выполняется условие Липшица:  $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in \Pi, \exists \tilde{y} \in [y_1; y_2]$ :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq |f'_y(x, \tilde{y}) \cdot (y_1 - y_2)| \leq \underbrace{|f'_y(x, \tilde{y})|}_{\leq L} \cdot |y_1 - y_2| = L \cdot |y_1 - y_2|$$

**Пример 6.**  $y' = \frac{1}{y^2}$ ,  $f(x, y) = \frac{1}{y^2}$ ,  $f'_y = \frac{2}{y^3}$

$$\begin{aligned} \int y^2 dy = \int y dx &\implies \frac{y^3}{3} = x + c \implies \\ &\implies \begin{cases} y = \sqrt[3]{3(x+c)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \implies y = \sqrt[3]{3(x-x_0)} + y_0^3 \end{aligned}$$

**Пример 7.**  $y' = \text{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ ,  $y = |x|$

**Пример 8.**  $y' = y^2 - 2y + 1 = (y - 1)^2$

$$\left[ \begin{array}{l} y = 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} y \neq 1 \\ \frac{dy}{(y-1)^2} = \int dx \end{array} \right. \end{array} \right] \iff -\frac{1}{y-1} = x + C \implies y = 1 - \frac{1}{x+C}$$

$$\left[ \begin{array}{l} y = 1, \\ y = 1 - \frac{1}{x+C_1}, \quad (-\infty; -C_1), \\ y = 1 - \frac{1}{x+C_2}, \quad (-C_2; +\infty) \end{array} \right]$$

### 1.3 Особые решения

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(y), \quad f \in C(D), \quad D \subset \mathbb{R}, \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} f(y) = 0 \implies y = c - ? \\ \left\{ \begin{array}{l} f(y) \neq 0, \\ \int \frac{dy}{f(y)} = \int dx \end{array} \right. \implies \left[ \begin{array}{l} y = \phi(x, C), \\ \psi(y, x, C) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right]$$

Для  $\forall$  точки  $x \in \{y = C\} \exists$  точка  $(x_1, y_1)$  и интегральная кривая, проходящая через точку  $(x_1, y_1)$ , которая пересекает прямую  $y = C$  в точке  $x$  ( $x \equiv (x, C)$ ).

Проинтегрируем на отрезке  $[x_1; x]$ :

$$\int_{y_1}^C \frac{dy}{f(y)} = \int_{x_1}^x dx \iff \int_{y_1}^C \frac{dy}{f(y)} = x - x_1 \iff \underbrace{x}_{\text{конечная}} = x_1 + \underbrace{\int_{y_1}^C \frac{dy}{f(y)}}_{\text{конечный}},$$

(несобственный интеграл сходится)

**Критерий.** Решение  $y = C$  дифференциального уравнения  $y' = f(y)$ ,  $f \in C(D)$  такое, что  $f(C) = 0$  называется *особым*  $\iff$

$$\iff \int_{y_1}^C \frac{dy}{f(y)} < \infty \quad (\text{несобственный интеграл сходится})$$

**Пример 9.**  $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$

1. Непрерывно.

2.  $f'_y = 2y^{-\frac{1}{3}}$  – разрывна в точке 0 (условие Липшица не выполнено?).

$$\left[ \begin{array}{l} y = 0 ? \\ \int \frac{dy}{3y^{\frac{2}{3}}} = \int dx \implies y^{\frac{1}{3}} = x + C \end{array} \right]$$

$$\int_{y_1}^0 \frac{dy}{3y^{\frac{2}{3}}} = y^{\frac{1}{3}} \Big|_{y_1}^0 = 0 - y_1^{\frac{1}{3}} < +\infty \xrightarrow{\text{по критерию}} y = 0 - \text{особое}$$



**Пример 10.** Найти особое решение  $y' = \begin{cases} y \cdot \ln y, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$ ,  $D = [0; +\infty)$ :

$$f(y) = \begin{cases} y \cdot \ln y, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

1. Непрерывно.

$$\lim_{y \rightarrow +0} (y \cdot \ln y) = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{\ln y}{\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{y^2}} = - \lim_{y \rightarrow +0} = 0$$

2. Условие Липшица:

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|, \quad \begin{matrix} y_1 \in (0; +\infty), \\ y_2 = 0 \end{matrix}$$

$$|f(y_1) - f(y_2)| = |y_1 \cdot \ln y_1 - 0| \leq |y_1| \cdot |\ln y_1| \leq |y_1| \cdot L,$$

то есть  $|\ln y_1| \leq L$ .

Для  $\forall L > 0 \exists y_1^*$  близкий к 0 и такой, что  $|\ln y_1^*| > L$ .

$$3. f(y) = 0 \implies \begin{cases} y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

(a)  $y = 0$ :

$$\int_{y_1}^0 \frac{dy}{y \cdot \ln y} = \int_{y_1}^0 \frac{d(\ln y)}{\ln y} = \ln |\ln y| \Big|_{y_1}^0 = \infty - \ln |\ln y_1| = \infty \implies$$

$\implies y = 0$  не является особым.

(b)  $y = 1$ :

$$\int_{y_1}^1 \frac{dy}{y \cdot \ln y} = \ln |\ln y| \Big|_{y_1}^1 = -\infty - \ln |\ln y_1| = -\infty \implies$$

$\implies y = 1$  не является особым.

**Пример 11.** Найти особое решение  $y' = \begin{cases} y \cdot \ln^2 y, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$ ,  $D = [0; +\infty)$ :

$$f(y) = \begin{cases} y \cdot \ln^2 y, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

1. Непрерывно (аналогично).

2. Условие Липшица (аналогично).

$$3. f(y) = 0 \implies y \cdot \ln^2 y = 0 \begin{cases} y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

(a)  $y = 0$ :

$$\int_{y_1}^0 \frac{dy}{y \cdot \ln^2 y} = \int_{y_1}^0 \frac{d(\ln y)}{\ln^2 y} = \frac{1}{\ln y} \Big|_{y_1}^0 = 0 + \frac{1}{\ln y_1} \implies$$

$\implies y = 0$  – особое.

(b)  $y = 1$ :

$$\int_{y_1}^1 \frac{dy}{y \cdot \ln^2 y} = -\frac{1}{\ln y} \Big|_{y_1}^1 = -\infty + \frac{1}{\ln y_1} - \text{расходится} \implies$$

$\implies y = 1$  не является особым.

## Глава 2

# Методы интегрирования дифференциальных уравнений 1-го порядка

### 2.1 Однородные уравнения

**Определение 2.1.1** (однородное уравнение первого порядка). *Однородным уравнением первого порядка* называется уравнение вида:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad f \in C(D) \quad (2.1)$$

или:

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad (2.2)$$

где  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  являются однородными функциями одного и того же порядка.

**Определение 2.1.2** (однородная функция порядка  $k$ ). *Однородной функцией порядка  $k$*  называется функция:

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k \cdot P(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$$

**Пример 12.**  $P(x, y) = x^2 - 2xy + 7y^2$

$$P(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 - 2(\lambda x)(\lambda y) + 7(\lambda y)^2 = \lambda^2(x^2 - 2xy + 7y^2)$$

**Пример 13.**  $x(x^2 + y^2)dy = y(y^2 - xy + x^2)dx$

$$\underbrace{x^3 + xy^2}_{Q(x,y)}, \quad \underbrace{y^3 - xy^2 + yx^2}_{P(x,y)}$$

**Замена переменной:**  $t = \frac{y}{x} \implies y = t \cdot x$

$y = t(x) \cdot x \implies y' = t' \cdot x + t$  – подставим в 2.1 :

$t' \cdot x = f(t) - t$  – уравнение с разделяющей переменной (РП)

$$\frac{dt}{dx}x = f(t) - t$$

$$\left[ \begin{array}{l} f(t) - t = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} f(t) - t \neq 0 \\ \int \frac{dt}{f(t)-t} = \int \frac{dx}{x} \end{array} \right. \end{array} \right] \iff \left[ \begin{array}{l} t = \phi(x, C) \implies y = x \cdot \phi(x, C) \\ \psi(t, x, C) = 0 \implies \psi\left(\frac{y}{x}, x, C\right) = 0 \end{array} \right]$$

$t'x = 0 \implies t' = 0 \implies t = C \implies y = Cx$  – решение при  $C$  :  
 $f(C) - C = 0$ .

Изоклины:  $f\left(\frac{y}{x}\right) = \text{const}$   
 $\frac{y}{x} = C \implies f(C) = \text{const}$   
 $y = Cx$  – изоклины уравнения 2.1

1. (а) Уравнение вида  $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$  сводится к однородному с помощью замены:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \xi + \alpha \\ y = \eta + \beta \end{array} \right., \quad (\alpha; \beta) - \text{решение системы} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array} \right.$$

- (б) Прямые параллельны, то есть  $a_1x + b_1y = k(a_2x + b_2y)$ .

Замена переменной  $t = a_2x + b_2y$  и привести к уравнению с РП.

2. Замена переменной  $y = t^m$ . Подставить эту замену в уравнение и из условия однородности выбрать  $m$ .

**Пример 14.**  $ydx + x(2xy + 1)dy = 0$ ,  $ydx + (2x^2 + x)dy = 0$

$$y = t^m \implies t^m dx + (2x^2 t^m + x) \cdot m t^{m-1} dt = 0$$

$$m = 2m + 1 = m$$

$$m = -1 \implies y = t^{-1} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{dx}{t} + \left(\frac{2x^2}{t} + x\right) \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = Q \implies$$

$$\implies dx - \frac{x}{t} \left(\frac{2x}{t} + 1\right) dt = 0 - \text{однородное уравнение} \implies$$

$$\implies \frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} \left(\frac{2x}{t} + 1\right) \equiv f\left(\frac{x}{t}\right)$$

Замена переменной:  $u = \frac{x}{t} \implies x = ut \implies dx = udt + tdu$

$$\begin{aligned} udt + tdu - u(2u + t)dt &= 0 \\ tdu - 2u^2dt &= 0, \quad t \neq 0, \quad u^2 \neq 0 \\ \int \frac{du}{2u^2} &= \int \frac{dt}{t} \\ -\frac{1}{2u} &= \ln|t| + C \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u = \frac{x}{t} \\ t = \frac{1}{y} \end{cases} \implies \begin{cases} u = xy \\ t = \frac{1}{y} \end{cases}, \quad \begin{aligned} -\frac{1}{xy} &= \ln\left(\frac{1}{y}\right)^2 + C \\ -\frac{1}{xy} &= \ln y^2 + C \end{aligned}$$

$$\ln y^2 - \frac{1}{xy} = C$$

$$u = 0 \implies x \cdot y = 0 \implies \begin{cases} x = 0 - \text{решение} \\ y = 0 - \text{решение} \end{cases}$$

Ответ:  $\ln y^2 - \frac{1}{xy} = C, \quad x = 0, \quad y = 0$

## 2.2 Линейные уравнения 1-го порядка

**Определение 2.2.1** (линейное уравнение 1-го порядка). *Линейным уравнением 1-го порядка* называется уравнение вида:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x), \quad (2.3)$$

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = 0, \quad (2.4)$$

где  $b(x), a_0(x), a_1 \in C(\alpha; \beta), \quad a_0(x) \neq 0, \quad -\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$ .

**Задача Коши:**  $y(x_0) = y_0$

**Теорема 2.2.1** ( $\exists$  и !).

$$y' = \underbrace{\frac{b(x)}{a_0(x)} - \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y}_{f(x,y)}$$

1.  $f \in C((\alpha; \beta) \times (-\infty; +\infty))$ .

2.  $f'_y = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$

Однородное уравнение 2.4.

$$y = 0 - \text{решение: } y = c \cdot e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}$$

**Определение 2.2.2** (линейное уравнение 1-го порядка). *Линейным уравнением 1-го порядка* называется уравнение вида:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x), \quad (2.5)$$

$$y' + p(x) \cdot y = 0, \quad (2.6)$$

где  $p(x), q(x) \in C(\alpha; \beta)$ .

**Свойства 2.6:**

1. Пусть  $y_1(x)$  – решение 2.6  $\implies k \cdot y_1$  – решение 2.6,  $k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ .
2. Если  $y_1, y_2$  – решения 2.6  $\implies y_1 + y_2$  – решение 2.6 ( $k_1 y_1 + k_2 y_2$  – решение).
3.  $y = 0$  – решение 2.6.

**Утверждение 2.2.1.** *Решения 2.6 образуют линейное пространство:*

$$y' + p(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\ln |y| = - \int p(x)dx + \ln |C|$$

$$(\star) \quad y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

$$\begin{cases} y' + p(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad [x_0; x]$$

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(s)}{y(s)} ds = - \int_{x_0}^x p(s)dx$$

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{y} = - \int_{x_0}^x p(s)dx \implies \ln |y| - \ln |y_0| = - \int_{x_0}^x p(x)dx \implies$$

$$(\star\star) \implies y = y_0 \cdot e^{-\int_{x_0}^x p(x)dx},$$

при  $C = y_0$ .

4. Если  $y$  – частное решение, то  $C \cdot y$  – общее решение 2.6.

## Структура решений неоднородного линейного уравнения 2.5.

### Теорема 2.2.2.

$$\underbrace{y_{OH}}_{\substack{\text{общее реш-е} \\ \text{неодн. ур.}}} = \underbrace{y_{OO}}_{\substack{\text{общее реш-е} \\ \text{одн.}}} + \underbrace{y_{CH}}_{\substack{\text{частное реш-е} \\ \text{неодн. ур.}}}$$

*Доказательство.* Пусть  $y_1$  – частное решение уравнения 2.5. Рассмотрим  $y = y_1 + z$ .

Подставим в 2.5:

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= (y_1 + z)'_p(x)(y_1 + z) = \\ &= y'_1 + p(x)y_1 + z' + p(x)z = q(x) \implies z' + p(x)z = 0 \implies \\ &\implies z - \text{решение однородного дифференциального уравнения} \end{aligned}$$

□

## Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа).

1. Находим общее решение однородного уравнения:

$$y' + p(x)y = 0$$

$$\left[ \begin{array}{l} y = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{y} = -p(x) \\ y \neq 0 \end{array} \right. \end{array} \right] \iff y_{OO} = C \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

2. Решение неоднородного уравнения  $y_{OH} = \underbrace{c(x)}_{\text{диф-мая ф-ция}} \cdot e^{-\int p(x)dx}$

$$\begin{aligned} &+ \frac{y' = c'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} + c(x) (-p(x) \cdot e^{-\int p(x)dx})}{p(x)y = p(x) \cdot c(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}} \\ &\frac{q(x) = c'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}}{} \end{aligned}$$

$$c'(x) = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$c(x) = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C$$

- 3.

$$\begin{aligned} y &= \left( \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right) \cdot e^{-\int p(x)dx} = \\ &= \underbrace{C \cdot e^{-\int p(x)dx}}_{=y_{OO}} + \underbrace{e^{-\int p(x)dx} \cdot \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx}_{=y_{CH}} \end{aligned}$$

**Пример 15.**  $y' + y = e^{-x}$  (методом Лагранжа)

$$1. \quad y' + y = 0$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= - \int dx; \\ \ln |y| &= -x + \ln |C|; \\ y &= C \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

$$2. \quad y = c(x) \cdot e^{-x}$$

$$\begin{aligned} c'(x) \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x} + c(x) \cdot e^{-x} &= e^{-x}; \\ c'(x) \cdot e^{-x} &= e^{-x} \quad \Big| : e^{-x}; \\ c'(x) &= 1; \\ c(x) &= x + C \end{aligned}$$

$$3. \quad y_{\text{OH}} = (x + c) \cdot e^{-x} = \underbrace{c \cdot e^{-x}}_{=y_{\text{OO}}} + x \cdot e^{-x}$$

**Метод Бернулли (метод подстановки).**

$$1. \quad y = u(x) \cdot v(x), \quad u(x), v(x) - \text{неизвестные функции.}$$

$$2. \quad y' = u'v + uv' \implies$$

$$\begin{aligned} u'v + uv' + p(x) \cdot u \cdot v &= q(x); \\ u'v + u(v' + p(x) \cdot v) &= q(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} u'v = q(x) \\ v' + p(x)v = 0 \end{cases} &\iff \frac{dv}{dx} = -p(x)v \iff \\ \iff \begin{cases} v = 0 \\ \frac{dv}{v} = -p(x)dx \end{cases} &\iff v = C \cdot e^{-\int p(x)dx}, \quad C = 1 \end{aligned}$$

$$\implies u' \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

$u(x)$  и  $u'(x)$  – аналогичны  $c(x)$  и  $c'(x)$  (в методе Лагранжа).

$$\begin{aligned} u' &= q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}; \\ u(x) &= \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{\text{OH}} = y = u \cdot v &= \\ &= \left( \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right) \cdot e^{-\int p(x)dx} = \\ &= \underbrace{C \cdot e^{-\int p(x)dx}}_{=y_{\text{OO}}} + \underbrace{e^{-\int p(x)dx} \cdot \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx}_{=y_{\text{CH}}} \end{aligned}$$



**Пример 16.**  $y' + y = e^{-x}$  (методом Бернулли)

$$\begin{aligned} y &= uv; \\ u'v + uv' + uv &= e^{-x}; \\ \begin{cases} u'v &= e^{-x} \\ v' + v &= 0 \end{cases} \implies \int \frac{dv}{v} = - \int dx \iff \\ \iff \ln |x| &= -x + \underbrace{C}_{=0} \implies v = e^{-x} \end{aligned}$$

$$u'e^{-x} = e^{-x} \implies u' = 1 \implies u = x + C \implies y = uv = (x + C)e^{-x}$$

## 2.3 Уравнение Бернулли

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^m, \quad m \neq 1$$

$y = 0$  – решение при  $m > 0$

1. Сведение к линейному

2. Метод Бернулли

1.  $y^m \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^m} + p(x) \cdot \frac{y}{y^m} &= q(x); \\ z &= y^{1-m}; \end{aligned}$$

$$z' = (1 - m) \cdot y^{-m} \cdot y' = (1 - m) \cdot \frac{y'}{y^m};$$

$$\frac{z'}{1 - m} + p(x) \cdot z = q(x) \quad \Big| \cdot (1 - m)$$

$$\underbrace{z' + (1 - m) \cdot p(x) \cdot z}_{\text{метод Лагранжа}} = \underbrace{(1 - m) \cdot q(x)}_{\text{метод Бернулли}}$$

2. Пусть  $y = u \cdot v$

$$u' \cdot v + \underbrace{u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v}_{\text{метод Лагранжа}} = q(x) \cdot u^m \cdot v^m$$

$$u' \cdot v + u(v' + p(x) \cdot v) = q(x) \cdot u^m \cdot v^m$$

$$\begin{cases} v' + p(x) \cdot v &= 0 \\ u' &= q(x) \cdot u^m \cdot v^{m-1} \end{cases} \implies$$

$$\begin{aligned} \implies u &= e^{-\int p(x) dx} \\ \frac{u'}{u^m} &= q(x)(e^{-\int p(x) dx})^{m-1} \implies u \implies y = u \cdot v \end{aligned}$$

## 2.4 Уравнения в полных дифференциалах

**Определение 2.4.1** (уравнение в ПД). Уравнение вида:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (2.7)$$

называется *уравнением в полных дифференциалах (ПД)*, если левая часть уравнения 2.7 является полным дифференциалом некоторой функции.

$$P, Q, P_x, Q_x, P_y, Q_y \in C(D), \quad (2.8)$$

$D$  – односвязная область в  $\mathbb{R}^2$

**Теорема 2.4.1.** Если существует такая функция  $u(x, y)$  :  $du = Pdx + Qdy$ , что выполняются условия 2.8, то имеет место в  $D$ :

$$\frac{\delta Q}{\delta x} = \frac{\delta P}{\delta y} \quad (2.9)$$

*Доказательство.* Пусть  $\exists u(x, y)$  :  $du = Pdx + Qdy$

$$du = \frac{\delta u}{\delta x}dx + \frac{\delta u}{\delta y}dy, \quad u \in C^2(x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta u}{\delta x} = P \\ \frac{\delta u}{\delta y} = Q \end{array} \right\} \iff \begin{array}{l} \frac{\delta^2 u}{\delta y \delta x} = \frac{\delta P}{\delta y} \\ \parallel \\ \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x} \end{array} \iff \frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}$$

□

**Теорема 2.4.2.** Для  $\exists$  функции  $u(x, y)$  такой, что  $du = Pdx + Qdy$  при выполнении 2.8  $\iff \frac{\delta Q}{\delta x} = \frac{\delta P}{\delta y}$ :

1.  $Pdx + Qdy = 0$ .
2.  $du = Pdx + Qdy \implies du = 0$ .
3.  $u(x, y) = C$ .

Общий интеграл – это функция  $u(x, y)$ , которая равна константе на решении уравнения.

**Восстановление функции  $u(x, y)$  по ее полному дифференциалу.** Пусть выполняется 2.8,  $D$  – односвязная область в  $\mathbb{R}^2$ ,

$$du = Pdx + Qdy$$

Задача: найти  $u(x, y) \in C^2(D)$ .

$$du = \frac{\delta u}{\delta x}dx + \frac{\delta u}{\delta y}dy, \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta u}{\delta x} = P(x, y) \\ \frac{\delta u}{\delta y} = Q(x, y) \end{array} \right.$$

Проинтегрируем 1-е уравнение:  $(x_0, y_0) \in D$

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^x \frac{\delta u}{\delta x} dx &= \int_{x_0}^x P(x, y) dx \\ u(x, y) &= u(x_0, y) + \int_{x_0}^x P(x, y) dx\end{aligned}\quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta u}{\delta y} &= \frac{\delta}{\delta y} \left( u(x_0, y) + \int_{x_0}^x P(x, y) dx \right) = \\ &= \frac{\delta u(x_0, y)}{\delta y} + \int_{x_0}^x \frac{\delta P(x, y)}{\delta y} dx = \frac{\delta u(x_0, y)}{\delta y} + \int_{x_0}^x \frac{\delta Q}{\delta x} dx = \\ &= \frac{\delta u(x_0, y)}{\delta y} + Q(x, y) - Q(x_0, y) = Q(x, y) \implies \\ &\implies \frac{\delta u(x_0, y)}{\delta y} = Q(x_0, y),\end{aligned}$$

интегрируем по  $y$ :

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^y \frac{\delta u(x_0, y)}{\delta y} dy &= \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy \\ u(x_0, y) - u(x_0, y_0) &= \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy \\ u(x, y) &= u(x_0, y_0) + \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy\end{aligned}\quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}u(x, y) &= u(x_0, y_0) + \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy \\ du(x, y) &= 0, \quad u(x, y) = C\end{aligned}\quad (2.12)$$

**Пример 17.**  $ydx + xdy = 0 \iff \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}$

$$1. \quad \begin{array}{c} \frac{\delta Q}{\delta x} \\ \parallel \\ 1 \end{array} = \begin{array}{c} \frac{\delta P}{\delta y} \\ \parallel \\ 1 \end{array} = 1 \implies \text{уравнение в ПД.}$$

$$d(x \cdot y) = dx \cdot y + xdy = 0, \quad x \cdot y = C$$

$$2. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta u}{\delta x} = y \implies \int \frac{\delta u}{\delta x} dx = \int y dx \implies u(x, y) = y \cdot x + c(y) \\ \frac{\delta u}{\delta y} = x \implies \frac{\delta u}{\delta y} = \frac{\delta}{\delta y} (y \cdot x + c(y)) = x + c'(y) = x \end{array} \right.$$

$$y(x, y) = y \cdot x + C \implies y \cdot x + C = C_1$$

$$y \cdot x = \tilde{C}, \quad \tilde{C} = C_1 - C$$

$$\begin{cases} \frac{\delta u}{\delta x} = y \\ \frac{\delta u}{\delta y} = x \end{cases} \implies \int \frac{\delta u}{\delta y} dy = \int x \cdot dy \implies$$

$$\implies u(x, y) = x \cdot y + c(x) \text{ в 1-е уравнение}$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta x}(x \cdot y) + c(x) = y + c'(x) = y \implies$$

$$\implies c'(x) = 0 \implies c(x) = C_1 \implies \begin{matrix} u(x, y) = x \cdot y + C_1 \\ u(x, y) = C_2 \end{matrix} \implies$$

$$\implies x \cdot y + C_1 = C_2 \implies x \cdot y = C, \quad C = C_2 - C_1$$

## 2.5 Интегрирующий множитель

$$\begin{matrix} ydx - xdy = 0 \\ \parallel \\ P \end{matrix} \Bigg| \cdot \frac{1}{y^2} \begin{matrix} \parallel \\ Q \end{matrix}$$

$$\frac{\delta P}{\delta y} = y'_y = 1$$

$$\frac{\delta Q}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta x}(-x) = -1$$

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = 0 \implies d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

$$\frac{x}{y} = C, \quad y = 0$$

**Определение 2.5.1** (интегрирующий множитель). Пусть

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.13)$$

не является уравнением в полных дифференциалах,  $M, N \in C^2(D)$ ,  $D$  — односвязная область в  $\mathbb{R}^2$ .

$M(x, y)$  называется *интегрирующим множителем* уравнения 2.13, если

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy$$

является полным дифференциалом некоторой функции  $\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}$ .

I.  $\mu(x, y) \in C^2(D)$

$$\mu(x, y) \cdot M(x, y) = P(x, y), \quad \mu(x, y) \cdot N(x, y) = Q(x, y)$$

$$\frac{\delta \mu(x, y)}{\delta y} M(x, y) + \mu(x, y) \cdot \frac{\delta M(x, y)}{\delta y} = \frac{\delta \mu(x, y)}{\delta x} N(x, y) + \mu(x, y) \cdot \frac{\delta N(x, y)}{\delta x}$$

1.  $\mu = \mu(x)$ .
2.  $\mu = \mu(y)$ .
3.  $\mu = \mu(\omega(x, y))$ .

## 2.6 Методы построения интегрирующего множителя

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.14)$$

$$M, N \in C^2(D), \quad \frac{\delta N}{\delta x} \neq \frac{\delta M}{\delta y}, \quad \mu(x, y) \in C^1(D) :$$

$$\mu(x, y) \cdot M(x, y)dx + \mu(x, y) \cdot N(x, y)dy = 0 - \text{уравнение в ПД?}$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ P(x, y) & & Q(x, y) \\ \frac{\delta Q}{\delta x} & = & \frac{\delta P}{\delta y} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mu(x, y)}{\delta x} \cdot N(x, y) + \mu(x, y) \cdot \frac{\delta N(x, y)}{\delta x} = \\ = \frac{\delta \mu(x, y)}{\delta y} \cdot M(x, y) + \mu(x, y) \cdot \frac{\delta M(x, y)}{\delta y} \end{aligned}$$

1.

$$\begin{aligned} \mu = \mu(x) \implies \frac{\delta \mu}{\delta y} = 0 \implies \\ \implies \mu'(x) \cdot N(x, y) + \mu(x) \cdot \frac{\delta N}{\delta x} = \mu(x) \cdot \frac{\delta M}{\delta y} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}}_{\text{зависит от } x} = \underbrace{\frac{\frac{\delta M}{\delta y} - \frac{\delta N}{\delta x}}{N}}_{\text{зависит от } x} = F(x)$$

( $M \neq 0$  и  $N \neq 0$ )

$$\int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} dx = \int F(x) dx$$

$$\ln |\mu(x)| = \ln c + \int F(x) dx, \quad \mu(x) = c \cdot e^{\int F(x) dx} \underset{c=1}{=} e^{\int F(x) dx}$$

2.

$$\begin{aligned} \mu = \mu(y) \implies \frac{\delta \mu}{\delta x} = 0 \implies \\ \implies \mu'(y) \cdot M(x, y) + \mu(y) \cdot \frac{\delta M}{\delta y} = \mu(y) \cdot \frac{\delta N}{\delta x} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\frac{\mu'(y)}{\mu(y)}}_{\text{зависит от } y} = \underbrace{\frac{\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y}}{M}}_{\text{зависит от } y} = F(y)$$

$$\int \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} dy = \int F(y) dy$$

$$\ln |\mu(y)| = \ln c + \int F(y) dy, \quad \mu(y) = c \cdot e^{\int F(y) dy} \underset{c=1}{=} e^{\int F(y) dy}$$

3.

$$\mu = \mu(\omega(x, y))$$

$$\frac{\delta \mu}{\delta \omega} \cdot \frac{\delta \omega}{\delta x} \cdot N + \mu \cdot \frac{\delta N}{\delta x} = \frac{\delta \mu}{\delta \omega} \cdot \frac{\delta \omega}{\delta y} \cdot M + \mu \cdot \frac{\delta M}{\delta y}$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\delta \mu}{\delta \omega}}{\mu(\omega)} &= \frac{\frac{\delta M}{\delta y} - \frac{\delta N}{\delta x}}{N \cdot \frac{\delta \omega}{\delta x} - M \cdot \frac{\delta \omega}{\delta y}} = F(\omega) \implies \\ &\implies \mu(\omega) = e^{\int F(\omega) d\omega} \end{aligned}$$

**Пример 18.**

$$(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0, \quad M = x^2 + y^2 + x, \quad N = y$$

$$\frac{\delta N}{\delta x} = 0$$

$$\frac{\delta M}{\delta y} = 2y$$

$$\mu = \mu(x) = ?, \quad \mu(x^2 + y^2 + x)dx + \mu y dy = 0,$$

$$P = \mu(x^2 + y^2 + x), \quad Q = \mu y,$$

$$\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}, \quad \frac{\delta M}{\delta y}(x^2 + y^2 + x) + \mu \cdot 2y = \frac{\delta \mu}{\delta x} \cdot y + \mu \cdot 0,$$

$$\frac{\mu'(x)}{M} = \frac{2y}{y} = 2, \quad \mu(x) = e^{2x},$$

$$e^{2x}(x^2 + y^2 + x)dx + e^{2x} \cdot y dy = 0,$$

$$P = e^{2x}(x^2 + y^2 + x), \quad Q = e^{2x} \cdot y,$$

$$\frac{\delta P}{\delta y} = 2e^{2x} \cdot y = \frac{\delta Q}{\delta x},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta u}{\delta x} = e^{2x}(x^2 + y^2 + x) \\ \frac{\delta u}{\delta y} = e^{2x} \cdot y \end{array} \right\} \implies u(x, y) = e^{2x} \cdot \frac{y^2}{2} + c(x),$$

$$u'_x = 2e^{2x} \cdot \frac{y^2}{2} + c'(x) = e^{2x}(x^2 + y^2 + x), \quad c'(x) = e^{2x}(x^2 + x)$$

$$\begin{aligned}
c(x) &= \frac{e^{2x}}{2}(x^2 + x) - \int \frac{e^{2x}}{2}(2x + 1)dx = \\
&= \frac{e^{2x}}{2}(x^2 + x) - \frac{e^{2x}}{4}(2x + 1) + \int \frac{e^{2x}}{4} \cdot 2dx = \\
&= \frac{e^{2x}}{2}(x^2 + x) - \frac{e^{2x}}{4}(2x + 1) + \frac{e^{2x}}{4} + C \\
c(x) &= \frac{e^{2x}}{2} \cdot x^2 + C \\
u(x, y) &= e^{2x} \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} + C = \tilde{C} \\
e^{2x} \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} &= C - \text{общий интеграл}
\end{aligned}$$

**Свойства интегрирующего множителя (ИМ):**

1. Если  $\mu_0$  – ИМ, то  $\forall c \in \mathbb{R} \quad \mu_1 = C \cdot \mu_0$  – тоже является ИМ.
2. Пусть  $\mu_0$  – ИМ уравнения (1.12),  $V_0$  – соответствующий ему интеграл, то есть:

$$\mu_0 \cdot Mdx + \mu_0 \cdot Ndy = dV_0,$$

тогда для произвольной функции  $\phi \in C^1(D)$ ,  $\phi \neq 0$ ,  $\mu_1 = \mu_0 \cdot \phi(V_0)$  – так же является ИМ.

$$\begin{aligned}
Mdx + Ndy &= 0, \quad \mu_1 \cdot Mdx + \mu_1 \cdot Ndy = \\
&= \mu_0 \cdot \phi(V_0) \cdot Mdx + \mu_0 \cdot \phi(V_0) \cdot Ndy = \\
&= \phi(V_0)(\mu_0 \cdot Mdx + \mu_0 \cdot Ndy) = \phi(V_0)dV_0 = \\
&= d\left(\int \phi(V_0)dV_0\right) = dV_1, \quad \int \phi(V_0)dV_0 = V_1
\end{aligned}$$

3. Если  $\mu_1$  и  $\mu_2$  – интегральные множители уравнения 2.14, тогда:

$$\mu_2 = \mu_1 \cdot \phi(V_1),$$

где  $\phi$  – произвольная функция класса  $C^1$ ,  $V_1$  – соответствующий интеграл для  $\mu_1$ .

**Следствие.** Если  $\mu_1$  и  $\mu_2$  – интегральные множители уравнения 2.14 и  $\frac{\mu_1}{\mu_2} \neq \text{const}$ , тогда  $\frac{\mu_1}{\mu_2}$  – является интегралом для уравнения 2.14.

**Теорема 2.6.1.** Если уравнение 1-го порядка имеет общий интеграл  $u(x, y) = C$ , то оно имеет интегрирующий множитель.

*Доказательство.*

$$u(x, y) = C \begin{cases} Mdx + Ndy = 0 \\ du \equiv \frac{\delta u}{\delta x} dx + \frac{\delta u}{\delta y} dy = 0 \end{cases}$$

$(dx, dy)$  – ненулевое решение если определитель равен 0, то есть

$$\begin{vmatrix} M & N \\ \frac{\delta u}{\delta x} & \frac{\delta u}{\delta y} \end{vmatrix} = M \cdot \frac{\delta u}{\delta y} - N \cdot \frac{\delta u}{\delta x} = 0$$

$$\begin{aligned} M \cdot \frac{\delta u}{\delta y} = N \cdot \frac{\delta u}{\delta x} \quad \Bigg| \cdot (MN) &\implies \frac{1}{N} \cdot \frac{\delta u}{\delta y} = \frac{1}{M} \cdot \frac{\delta u}{\delta x} \stackrel{?}{=} \mu, \\ \mu \cdot Mdx + \mu \cdot Ndy = 0, \quad \frac{1}{M} \frac{\delta u}{\delta x} \cdot Mdx + \frac{1}{N} \cdot \frac{\delta u}{\delta y} \cdot Ndy &= 0, \\ \frac{\delta u}{\delta x} dx + \frac{\delta u}{\delta y} dy = 0 &\implies du = 0 \end{aligned}$$

□

**Еще один способ построения интегрального множителя:**

$$\underbrace{M_1 dx + N_1 dy}_I + \underbrace{M_2 dx + N_2 dy}_{II} = 0$$

Пусть  $\mu_1$  – интегральный множитель для  $I$ ,  $V_1$  – соответствующий ему интеграл, то есть:

$$dV_1 = \mu_1 \cdot M_1 dx + \mu_1 \cdot N_1 dy,$$

$\mu_2$  – интегральный множитель для  $II$ ,  $V_2$  – соответствующий ему интеграл, то есть:

$$dV_2 = \mu_2 \cdot M_2 dx + \mu_2 \cdot N_2 dy,$$

тогда  $\exists \phi, \psi \in C^1(D) : \mu_1 \cdot \phi(V_1) = \mu_2 \cdot \psi(V_2)$  и  $\mu = \mu_1 \cdot \phi(V_1)$  или  $\mu = \mu_2 \cdot \psi(V_2)$  – будет интегральным множителем.

**Пример 19.**

$$\left(\frac{y}{x} + 3x^2\right)dx + \left(1 + \frac{x^3}{y}\right)dy = 0$$

$$\left(\frac{y}{x} + dy\right) + \left(3x^2 dx + \frac{x^3}{y} dy\right) = 0$$



$$\frac{y}{x}dx + dy = 0$$

$$3x^2dx + \frac{x^3}{y}dy = 0$$

$$\mu_1 = x$$

$$\mu_2 = y$$

$$ydx + xdy = 0$$

$$3x^2ydx + x^3dy = 0$$

$$d(xy) = 0 \implies xy = C_1$$

$$d(x^3y) = 0$$

$$u_1 = xy$$

$$u_2 = x^3y$$

$$x\phi(xy) = y\psi(x^3y), \quad \phi(t) = t^2, \quad \psi(t) = t,$$

$$x(x^2y^2) = yx^3y = \mu$$

$$x^3y^2 \left( \frac{y}{x} + 3x^2 \right) dx + x^3y^2 \left( 1 + \frac{x^2}{y} \right) dy = 0$$

$$\underbrace{(x^2y^3 + 3x^5y^2)}_P dx + \underbrace{(x^3y^2 + x^6y)}_Q dy = 0$$

$$\frac{\delta P}{\delta y} = 3x^2y^2 + 6x^5y$$

$$\parallel$$

$$\implies \text{уравнение в ПД}$$

$$\frac{\delta Q}{\delta x} = 3x^2y^2 + 6x^5y$$

$$\begin{cases} \frac{\delta u}{\delta x} = x^2y^3 + 3x^5y^2 \\ \frac{\delta u}{\delta y} = x^3y^2 + x^6y \end{cases}$$

## 2.7 Теорема существования и единственности

**Задача Коши:**

$$y' = f(x, y), \tag{2.15}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{2.16}$$

**Теорема 2.7.1** (теорема Пикара). Пусть функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна по совокупности переменных в прямоугольнике  $\Pi = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$  и на переменной  $y$  удовлетворяет условию Липшица:

$$(f(x, y) \in C(\Pi) \cap Lip_y(\Pi))$$

Тогда  $\exists!$  решение задачи Коши 2.15, 2.16 в  $V_h = (x_0 - h; x_0 + h)$ , где  $h = \min(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L})$ ,  $M = \max_{(x, y) \in \Pi} |f(x, y)|$ .

**Определение 2.7.1.**  $f(x, y) \in Lip_y$ , если  $\exists L > 0 : \forall (x, y_1), (x, y_2) \in \Pi$  имеет место:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

**Лемма 2.7.1** (об интегральном уравнении). В предположении теоремы  $y$  является решением задачи 2.15, 2.16  $\iff$  оно является решением интегрального уравнения:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(s)) ds \quad (2.17)$$

**Определение 2.7.2** (решение интегрального уравнения 2.17). Решением интегрального уравнения 2.17 называется непрерывная функция  $y$ , обращающая уравнение в тождество.

*Доказательство леммы?* •  $\Rightarrow y$  – решение 2.15, 2.16, проинтегрируем 2.15 на  $[x_0; x]$ :

$$\int_{x_0}^x y'(x) dx = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$$

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds, \text{ с учетом 2.16,}$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(x)) dx, \quad y(x) \text{ удовлетворяет уравнению 2.17}$$

$y(x)$  непрерывна (следует из дифференцируемости).

- $\Leftarrow y(x)$  – решение 2.17,  $y(x)$  – непрерывна,  $f(x, y)$  – непрерывна по условию теоремы  $\implies$  интеграл с переменным верхним пределом можно дифференцировать:

$$y'(x) = f(x, y(x)) \cdot 1, \quad y(x) \text{ удовлетворяет уравнению 2.15}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} F(x, \alpha) d\alpha &= \\ &= \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} F'_\alpha(x, \alpha) d\alpha + F(b(\alpha), \alpha) \cdot b'(\alpha) - F(a(\alpha), \alpha) \cdot a'(\alpha) \end{aligned}$$

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(s, y(s)) ds, \text{ выполняется условие 2.16}$$

□

*Доказательство теоремы Пикара.* 1. Последовательность приближения Пикара:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0, \\ y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_0(s)) ds, \\ y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_1(s)) ds, \\ &\vdots \\ y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds \end{aligned}$$

2.  $y_n(x)$  – непрерывна при  $|x - x_0| \leq h$ ,  $(x, y_n(x)) \in \Pi$ .

По индукции,  $n = 1$ :

$$|y_1(x) - y_0| \stackrel{?}{\leq} b$$

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(s, y_0(s)) ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(s, y_0(s))| dx \right| \leq M|x - x_0| \leq M \cdot h \leq M \cdot \frac{b}{M} = b \end{aligned}$$

Пусть  $|y_{n-1}(x) - y_0| \leq b$ , то есть  $(x, y_{n-1}(x)) \in \Pi$ . Докажем, что  $(x, y_n(x)) \in \Pi$ :

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_0| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(s, y_{n-1}(s))| \right| \leq \\ &\leq M \cdot |x - x_0| \leq M \cdot h \leq M \cdot \frac{b}{M} = b \end{aligned}$$

3. Покажем, что  $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \bar{y}(x)$ .

Составим функциональный ряд:

$$\begin{aligned} (\star) \quad &\underbrace{y_0(x)}_{S_0(x)}, \underbrace{y_1(x) - y_0(x)}_{S_1(x)=y_1(x)}, \underbrace{y_2(x) - y_1(x)}_{S_2(x)=y_2(x)}, \dots, \underbrace{y_1(x) - y_{n-1}(x)}_{S_n(x)=y_n(x)}, \dots \end{aligned}$$

Нужно дописать. □

**Лемма 2.7.2** (Гронуолла). Пусть  $u(x) \geq 0$  и  $u(x) \in C([x_0; x_0 + h])$ ,

$$(\star) \quad u(x) \leq a + b \int_{x_0}^x u(t) dt, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0$$

Тогда  $u(x) \leq a \cdot e^{b(x-x_0)}$  на  $[x_0; x_0 + h]$ .

Доказательство.  $u(x) = e^{b(x-x_0)}v(x)$

На  $[x_0; x_0 + h]$  :  $v(x)$  – непрерывна и в точке  $x_1$  :  $v(x_1) = \max_{[x_0; x_0 + h]} v(x)$ .

$$\begin{aligned}
 e^{b(x-x_0)}v(x_1) &= u(x_1) \leq \\
 &\leq a + b \int_{x_0}^{x_1} u(t)dt = a + b \int_{x_0}^{x_1} e^{b(t-x_0)}v(t)dt \leq \\
 &\leq a + b \cdot v(x_1) \cdot \frac{e^{v(t-x_0)}}{b} \Big|_{x_0}^{x_1} = a + v(x_1) \cdot e^{b(x_1-x_0)} - v(x_1) \implies \\
 &\implies 0 \leq a - v(x_1) \implies v(x_1) \leq a \implies \\
 &\implies u(x) = e^{b(x-x_0)}v(x) \leq e^{b(x-x_0)}v(x_1) \leq a \cdot e^{b(x-x_0)}
 \end{aligned}$$

□

**Следствие.** Если  $a = 0$ , то  $u(x) \equiv 0$ .

## 2.8 Уравнения, не разрешенные относительно производной

**Определение 2.8.1** (уравнение, не разрешенное относительно производной). Уравнением, не разрешенным относительно производной называется уравнение вида:

$$f(x, y, y') = 0 \quad (2.18)$$

**Задача Коши:** найти прешение 2.18 при условиях:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \quad (2.19)$$

**Теорема 2.8.1** ( $\exists$  и  $!$  задачи Коши). Пусть  $f \in C^1(D)$  и в точке  $(x_0, y_0, y'_0) \in D$ ,

$$f(x_0, y_0, y'_0) = 0 \text{ и } f'_{y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0$$

Тогда на достаточно малом отрезке  $[x_0 - h; x_0 + h]$  решение задачи Коши 2.18, 2.19 существует и единственно.

**Пример 20.**  $(y')^2 = x^2$

$$\begin{cases} y' = x \\ y' = -x \end{cases} \implies \begin{cases} y = \frac{x^2}{2} + C \\ y = -\frac{x^2}{2} + C \end{cases}$$

**Определение 2.8.2** (особое решение, дискриминантная кривая). Решение  $y = \phi(x)$  уравнения 2.18 называется *особым*, если через  $\forall$  точку

$y = \phi(x)$ , помимо того, проходит другое решение, имеющее ту же касательную, не совпадающее с исходным решением в сколь угодно малой окрестности этой точки.

Особые решения будем искать из системы:

$$\begin{cases} f(x, y, y') = 0 \\ f'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

путем исключения  $y'$ .

Кривая, определенная уравнением 2.20  $\psi(x, y) = 0$ , называется *дискриминантной*.

## 2.9 Интегрирование уравнений, не разрешенных относительно производной

1. Выразить, если это возможно, явно  $y' : (y')_{1,2} = \dots$
2. Метод параметра:  $y' = p$

$$x = \Phi(y, y') \quad (2.21)$$

$$y = \Psi(x, y') \quad (2.22)$$

Из 2.21:  $y' = p \implies dy = p dx, \quad x = \Phi(y, p)$

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\delta \Phi}{\delta y} dy + \frac{\delta \Phi}{\delta p} dp \\ \frac{dy}{p} &= \frac{\delta \Phi}{\delta y} dy + \frac{\delta \Phi}{\delta p} dp \end{aligned}$$

$$\begin{cases} p = 0 \\ p \neq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = y(p, c) \\ x = \Phi(y(p, c), p) \end{cases}$$

Из 2.22:  $y = \Psi(x, p)$

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\delta \Psi}{\delta x} dx + \frac{\delta \Psi}{\delta p} dp \\ p dx &= \frac{\delta \Psi}{\delta x} dx + \frac{\delta \Psi}{\delta p} dp \implies \begin{cases} x = x(p, c) \\ y = \Psi(x(p, c), p) \end{cases} \end{aligned}$$

### Уравнение Лагранжа

$$\begin{aligned}
 y &= x \cdot F(y') + G(y') \\
 y' = p &\implies y = x \cdot F(p) + G(p) \\
 dy &= F(p)dx + x \cdot F'(p)dp + g'(p)dp \\
 &\parallel \\
 &pdx \\
 (p - F(p))dx - F'(p)dp \cdot x &= G'(p)dp : dp \neq 0, p - F(p) \neq 0 \\
 \frac{dx}{dp} - \frac{F'(p)}{p-F(p)} \cdot x &= \frac{G'(p)}{p-F(p)} - \text{линейное уравнение относительно } x
 \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{array}{l} p - F(p) = 0 \implies p = p_0 \implies y = x \cdot \underset{\parallel}{F(p_0)} + \underset{\parallel}{G(p_0)} \implies y = x \cdot C_1 + C_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} p - F(p) \neq 0 \\ \frac{dx}{dp} - \frac{F'(p)}{p-F(p)} \cdot x = \frac{G'(p)}{p-F(p)} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} x = \phi(p, C) \\ y = \phi(p, C) \cdot F(p) + G(p) \end{array} \right. \\ dp = 0 \implies p = C \implies y = x \cdot F(C) + G(C) \end{array} \right.$$

### Уравнение Клеро

$$\begin{aligned}
 y &= xy' + G(y'); \\
 y &= xp + G(p); \\
 dy &= xdp + pdx + G'(p)dp; \\
 &\parallel \\
 &pdx \\
 (x + G'(p))dp &= 0; \\
 \left\{ \begin{array}{l} x = -G'(p) \implies y = -G(p) \cdot p + G(p) \\ dp = 0 \implies p = C \implies y = xF(C) + G(C) \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

## 2.10 Уравнения высших порядков

**Определение 2.10.1** (уравнение  $n$ -го порядка). Уравнением порядка  $n$  называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2.23)$$

где  $x$  — неизвестная,  $n$  — наивысший порядок производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.24)$$

**Определение 2.10.2** (решение уравнений 2.23 и 2.24). Решением уравнений 2.23 и 2.24 называется  $n$  раз дифференцируемая функция, которая при подстановке в уравнение, обращает его в тождество.

**Определение 2.10.3** (задача Коши). *Задача Коши*: найти уравнения 2.24 удовлетворяющему начальным условиям:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} y_0^0 \\ y_1^0 \\ \vdots \\ y_{n-1}^0 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

**Теорема 2.10.1** ( $\exists$  и ! задачи Коши 2.24, 2.25). Пусть  $f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$  – непрерывна по совокупности переменных в параллелепипеде:

$$\Pi = \{(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) : |x - x_0| \leq a, |y_k - y_k^0| \leq b, k = \overline{0, n-1}\}$$

и удовлетворяет условию Липшица по переменным  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$

$$\left( \frac{\delta f}{\delta y_k} - \text{непр.}, k = \overline{0, n-1} \right)$$

Тогда в окрестности точки  $x_0$  ( $x_0 - h; x_0 + h$ ) решение задачи Коши существует и единственно, где:

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{\max\{M_0, M_1, \dots, M_{n-1}\}} \right\}, \quad M_k = \max \left| \frac{\delta f}{\delta y_k} \right|$$

## 2.11 Линейные уравнения высших порядков

**Определение 2.11.1** (линейное неоднородное уравнение порядка  $n$ , однородное уравнение). Уравнение вида:

$$a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x), \quad a_0(x) \neq 0 \quad (2.26)$$

называется *линейным неоднородным порядком  $n$* ,

$$a_j(x) \in C(\alpha; \beta), \quad j = \overline{0, n}, \quad f(x) \in C(\alpha, \beta), \quad -\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$$

Если  $f(x) = 0$ , то уравнение называется *однородным*.

Пусть  $L[y] = Ly \equiv a_0(x) \cdot y^{(n)} + \dots + a_n(x) \cdot y$ ,

$$Ly = f \quad (2.27)$$

$$Ly = 0 \quad (2.28)$$

$$y^{(n)} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} \cdot y^{(n-1)} - \dots - \frac{a_{n-1}(x)}{a_0(x)} \cdot y' - \frac{a_n(x)}{a_0(x)} \cdot y + \frac{f(x)}{a_0(x)} \quad (2.29)$$

**Теорема 2.11.1** (о существовании и единственности). Пусть для уравнения 2.29 выполняются условия:  $a_0(x) \neq 0$ ,  $a_j(x) \in C(\alpha; \beta)$ ,  $f(x) \in C(\alpha, \beta)$ . Тогда решение задачи Коши для уравнения 2.29 существует и единственно на  $(\alpha, \beta)$ .

**Свойства оператора  $Ly$ :**

1.  $L(\alpha y) = \alpha Ly, \forall \alpha \in \mathbb{R}$  (свойство однородности);
2.  $L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$  (свойство аддитивности).

**Свойства решений однородного линейного уравнения 2.28 или  $Ly = 0$ .**

1.  $y \equiv 0$  является решением 2.28;
2. Если  $y_1(x)$  – решение 2.28, то  $y(x) = \alpha y_1(x), \alpha \in \mathbb{R}$  также является решением:

$$Ly = L(\alpha y_1) = \alpha Ly_1 = 0$$

3. Если  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  – решения 2.28, то  $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$  также является решением:

$$Ly = L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2 = 0 + 0 = 0$$

4. Если  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  – решения 2.28, то  $\forall c_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$   $y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$  так же является решением.

$y_1(x), \dots, y_n(x)$  – линейно независимая система функций  $\implies \forall y(x) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot y_i(x)$  – решение 2.28.

**Определение 2.11.2** (линейно зависимость системы функций). Система функций  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  называется *линейно зависимой*, если  $\exists$  такой набор  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} : \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$ , что линейная комбинация

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

**Определение 2.11.3** (линейно независимая система функций). Система функций  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  называется *линейно независимой*, если линейная комбинация этих функций равна 0 в случае, когда

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0,$$

$$\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0 \iff \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

**Определение 2.11.4** (определитель Вронского). *Определителем Вронского (вронскианом)* системы функций  $y_1(x), \dots, y_n(x)$ , имеющих производные до порядка  $(n-1)$  включительно, называется определитель:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$



**Теорема 2.11.2.** Если система функций  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  линейно зависима, то определитель Вронского равен 0, то есть  $W(x) = 0$ .

*Доказательство.* Из линейной зависимости  $y_1(x), \dots, y_n(x) \implies \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ :

$$\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0.$$

Пусть  $\alpha_n \neq 0$ , тогда:

$$\begin{aligned} y_n(x) &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1(x) - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2(x) - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}(x) \\ y'_n(x) &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y'_1(x) - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y'_2(x) - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y'_{n-1}(x) \\ &\vdots \\ y_n^{(n-1)}(x) &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1^{(n-1)}(x) - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2^{(n-1)}(x) - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_{n-1}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_n} y_k(x) \\ y'_1(x) & \dots & y'_{n-1}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_n} y'_k(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_n} y_k^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0$$

□

*Замечание.*  $W(x) = 0 \not\Rightarrow y_1(x), \dots, y_n(x)$  – линейно зависима.

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad y_2(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$$

$$W(x) = \begin{cases} \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 0, & x \geq 0 \\ \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 0, & x < 0 \end{cases} \equiv 0$$

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \begin{cases} \infty, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \text{const ЛЗ}$$

$$\alpha_1 \cdot y_1 + \alpha_2 \cdot y_2 = 0, \quad y_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot y_2$$

**Теорема 2.11.3.** Пусть  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  – система линейно независимых на  $(\alpha; \beta)$  решений уравнения  $Ly = 0$ . Тогда  $W(x) \neq 0$  ни в какой точке интервала  $(\alpha; \beta)$ .

*Доказательство.* От противного. Предположим, что  $\exists x_0 \in (\alpha; \beta)$ .  $W(x_0) = 0$ ,

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y'_1(x_0) & \dots & y'_n(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Однородная система линейно алгебраических уравнений,  $\det = W(x_0) = 0$ ,  $\Rightarrow$  система 2.30 имеет нетривиальное решение:  $\vec{c}^0 = (c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0)$ ,  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  – линейно зависимость?

$$y(x) = c_1^0 \cdot y_1(x) + \dots + c_n^0 \cdot y_n(x)$$

1.  $y(x)$  – решение  $Ly = 0$ ;

$$2. \begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = c_1^0 y_1'(x) + \dots + c_n^0 y_n'(x) \Big|_{x=x_0} = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = c_1^0 y_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n^0 y_n^{(n-1)}(x) \Big|_{x=x_0} = 0 \end{cases}$$

1.  $y \equiv 0 \Rightarrow Ly = 0 \Rightarrow$  из теоремы существования и единственности  $\Rightarrow y(x) = \sum_{k=1}^n c_k^0 y_k(x) \equiv 0 \Rightarrow y_1, \dots, y_n$  – линейно зависимые  $\Rightarrow$  противоречие.

□

**Теорема 2.11.4** (Лиувилля-Остроградского  $(W(x), W(x_0))$ ). Пусть задано уравнение:

$$a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0,$$

$a_0(x) \neq 0$ ,  $a_j(x) \in C(\alpha; \beta)$ ,  $j = \overline{0, n-1}$ ,  $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ . Тогда:

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_1(s)}{a_0(s)} ds}, \quad x_0 \in (\alpha; \beta)$$

**Следствие.** Если  $\exists x_0 \in (\alpha; \beta) : W(x_0) = 0 \Rightarrow W(x) = 0 \forall x \in (\alpha; \beta)$

## 2.12 Построение общего решения уравнения $Ly = 0$

**Определение 2.12.1** (решение  $Ly = 0$ ). Функция  $y = \phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  называется решением  $Ly = 0$ , если для  $\forall$  набора  $C_1, C_2, \dots, C_n$  она является решением  $Ly = 0$  и для  $\forall$  задачи Коши  $y(x_0) = y_0^o$ ,  $y'(x_0) = y_1^o, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}^o \exists$  набор  $C_1^o, C_2^o, \dots, C_n^o : y = \phi(x, C_1^o, \dots, C_n^o)$  является решением  $Ly = 0$ .

**Теорема 2.12.1** (структура решения однородного уравнения). Пусть  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  – линейно независимые решения  $Ly = 0$   $n$ -го порядка. Тогда:

$$y_{OO} = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

где  $C_1, \dots, C_n$  – произвольные константы.

**Определение 2.12.2** (фундаментальная система решений (ФСР)). Любые  $n$  линейно независимых решений задачи Коши уравнения  $Ly = 0$  называются *фундаментальной системой решений (ФСР)*.

**Теорема 2.12.2.** *ФСР уравнения  $Ly = 0$  – существует.*

**Теорема 2.12.3.** Любые  $(n + 1)$  решения задачи Коши для  $Ly = 0$   $n$ -го порядка линейно зависимы, то есть  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ :

$$\alpha_1^2 + \dots + \alpha_{n+1}^2 \neq 0, \quad \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_{n+1} y_{n+1}(x) = 0$$

## 2.13 Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Решения линейного однородного уравнения  $n$ -го порядка с переменными коэффициентами – линейное пространство размерности  $n$  с базисом ФСР.

*Нормированная ФСР* – это задача Коши с начальными условиями:

$$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$$

Если имеем  $y_1, y_2, \dots, y_n$  – решений  $Ly = 0$  и  $\exists x_0 \in (\alpha; \beta) : W(x_0) \neq 0$ , то пытаемся восстановить дифференциальное уравнение.

**Пример 21.**  $n = 2$ ,  $\{\sin x, \cos x\}$ ,  $w(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad a_0(x) \neq 0$$

$$y'' + p(x)y' + q(x) \cdot y = 0$$

$$\begin{cases} -\sin x + p(x) \cdot \cos x + q(x) \cdot \sin x = 0 \\ -\cos x - p(x) \cdot \sin x + q(x) \cdot \cos x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p(x) \\ q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0 \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} \sin x & \sin x \\ \cos x & \cos x \end{vmatrix} = 0 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ p(x) &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0 \\ q(x) &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1 \implies y'' + y = 0\end{aligned}$$

### Способы восстановления дифференциального уравнения

1. Способ первый:

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + p_1(x) \cdot y' + p_0(x) \cdot y = 0 \\ y_1^{(n)} + p_{n-1}(x) \cdot y_1^{(n-1)} + \dots + p_1(x) \cdot y_1' + p_0(x) \cdot y_1 = 0 \\ y_2^{(n)} + p_{n-1}(x) \cdot y_2^{(n-1)} + \dots + p_1(x) \cdot y_2' + p_0(x) \cdot y_2 = 0 \\ \vdots \\ y_n^{(n)} + p_{n-1}(x) \cdot y_n^{(n-1)} + \dots + p_1(x) \cdot y_n' + p_0(x) \cdot y_n = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(n-1)} & p_0 \\ y_2 & y_2' & \dots & y_2^{(n-1)} & p_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_n & y_n' & \dots & y_n^{(n-1)} & p_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

( $\implies y_1, y_2, \dots, y_n$  — ЛНЗ)  $\implies$  система имеет ! решение  
 $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x)$ , которое выражается через  $y_1, y_2, \dots, y_n$  и их производные.

2. Способ второй: потерян

**Пример 22.** По второму способу:

$$y_1 = x, \quad y_2 = x^2, \quad W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0, \text{ при } x \neq 0.$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} y_1'' & y_1' & y_1 \\ y_2'' & y_2' & y_2 \\ y_1'' & y_1' & y_1 \end{vmatrix} = 0 &\iff \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 2 & 2x & x^2 \\ y'' & y' & y \end{vmatrix} = 0 \iff \\ &\iff y'' \cdot \begin{vmatrix} 2x & x^2 \\ y' & y \end{vmatrix} - y' \cdot \begin{vmatrix} 0 & x \\ 2 & x^2 \end{vmatrix} + y \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2x \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$x^2 \cdot y'' - 2x \cdot y' + 2y = 0$$

## 2.14 Структура общего решения линейного неоднородного уравнения $Ly = f$

$$Ly = a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x), \quad (2.31)$$

где  $a_0(x) \neq 0$ ,  $a_j(x)$ ,  $f(x) \in C(\alpha; \beta)$ ,  $j = \overline{0, n}$ ,  $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$

**Теорема 2.14.1.** Все решения уравнения вида 2.31 даются формулой:

$$y_{OH} = y_{OO} + y_{2CH} \quad (2.32)$$

*Доказательство.* Пусть  $y_{2CH}$  – произвольное частное решение 2.31, то есть

$$L(y_{2CH}) = f(x)$$

1. Покажем, что решение 2.32 удовлетворяет 2.31:

$$L(y_{OH}) = L(y_{OO} + y_{2CH}) = L(y_{OO}) + L(y_{2CH}) = 0 + f(x) = f(x)$$

2. Покажем, что формула 2.32 покрывает все решения 2.31:

$\tilde{y}$  – частное решение 2.31,  $L(\tilde{y}) = f(x)$

$$\tilde{y} = (\tilde{y} - y_{CH}) + y_{CH}$$

$$\begin{aligned} L(\tilde{y} - y_{CH}) &= L(\tilde{y}) - L(y_{CH}) = f(x) - f(x) = 0 \implies \\ &\implies \tilde{y} = (\tilde{y} - y_{CH}) + y_{CH} = y_{OO} + y_{CH} \end{aligned}$$

□

## Построение общего решения неоднородного уравнения 2.31

### Метод вариации произвольных постоянных

1.  $y_1, y_2, \dots, y_n$  – ФСР уравнения 2.31  $\implies y_{OO} = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$ .

2.  $y = y_{\text{OH}} = C_1(x)y_1(x) + \dots + C_n(x)y_n(x)$ . Найдем производные до  $n$ -го порядка:

$$\begin{aligned}
 a_n(x) &: C_1(x)y_1(x) + \dots + C_n(x)y_n(x) \\
 a_{n-1}(x) &: C_1(x)y_1'(x) + \dots + C_n(x)y_n'(x) + \underbrace{C_1'(x)y_1(x) + \dots + C_n'(x)y_n(x)}_{\parallel_0} \\
 a_{n-2}(x) &: C_1(x)y_1''(x) + \dots + C_n(x)y_n''(x) + \underbrace{C_1'(x)y_1'(x) + \dots + C_n'(x)y_n'(x)}_{\parallel_0} \\
 &\vdots \\
 a_1(x) &: C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x) + \underbrace{C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x)}_{\parallel_0} \\
 a_0(x) &: C_1(x)y_1^{(n)}(x) + \dots + C_n(x)y_n^{(n)}(x) + \underbrace{C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)}_{\parallel_0} \\
 &\quad \quad \quad \parallel_0 \\
 C_1(x) &\underbrace{(a_0(x)y_1^{(n)}(x) + a_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x)y_1' + a_n(x)y_1(x))}_{\parallel_0}
 \end{aligned}$$

Система  $n$  уравнений и  $n$  неизвестных  $C_1'(x), \dots, C_n'(x)$ , определитель  $\Delta = ?$

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

**Метод вариации произвольных постоянных (продолжение?)**

$$y_{\text{OH}} = C_1(x) \cdot y_1 + \dots = C_n(x)y_n$$

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + \dots + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + \dots + C_n'(x)y_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases}$$

$\Delta = W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ , так как  $y_1, y_2, \dots, y_n$  – ФСР  $\implies$  система имеет ! решение. Найти это решение по формулам Крамера:

$$C_k'(x) = \frac{W_k(x)}{W(x)} dx + C_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (2.33)$$

где:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

$$W_k(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n & 0 & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' & 0 & y_{k+1}' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} & 0 & y_{k+1}^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Проинтегрируем 2.33:

$$C_k(x) = \int \frac{W_k(x)}{W(x)} dx + C_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (2.34)$$

$$y(x) = y_{\text{OH}} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{W_k(x)}{W(x)} dx + C_k \right) y_k = \underbrace{\sum_{k=1}^n C_k y_k}_{y_{\text{ОО}}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n y_k \int \frac{W_k(x)}{W(x)} dx}_{y_{\text{ЧН}}}$$

## 2.15 Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (2.35)$$

где  $a_0 \neq 0$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ . Теперь  $y = e^{\lambda x}$ ,  $y' = \lambda e^{\lambda x}$ ,  $\dots$ ,  $y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$ :

$$e^{\lambda x} (a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) = 0 \quad (2.36)$$

$y = e^{\lambda x}$  – решение уравнения 2.35  $\iff \lambda$  – корень характеристического уравнения  $T_n(\lambda) = 0$ ,  $T_n(\lambda) = a_0 \lambda^n + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$ .

Если  $a_i \in \mathbb{R} \implies$  характеристическое уравнение 2.36 имеет ровно  $n$  корней, учитывая их кратность. Корни могут быть комплексными.

1.  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_i \neq \lambda_m$ ,  $i \neq m$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Найти  $y_1, y_2, \dots, y_n$  – ФСР ?

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}, \quad \dots, \quad y_n = e^{\lambda_n x}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  – корни характеристического многочлена 2.36.

$$W(x) = 0 \iff y_1, y_2, \dots, y_n, \text{ так как решения } Ly = 0, \text{ ЛЗ}$$

$$W(x) \neq 0 \implies y_1, \dots, y_n \text{ ЛНЗ}$$

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = \\ &= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \dots e^{\lambda_n x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ при } \lambda_i \neq \lambda_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies y_1, y_2, \dots, y_n \text{ ЛНЗ} &\implies \\ &\implies y_{00} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \end{aligned}$$

$$2. \underbrace{\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = \lambda}_{\text{кратный}}, \quad \underbrace{\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n}_{\nparallel_{\lambda}} \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} &\underbrace{e^{\lambda x}, e^{\lambda x}, \dots, e^{\lambda x}}_m \quad e^{\lambda_{m+1} x}, \dots, e^{\lambda_n x} \\ &\quad \begin{array}{ccc} e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{m-1} e^{\lambda x} \\ \parallel \quad \parallel \quad \parallel \\ y_1 \quad y_2 \quad y_m \end{array} \end{aligned}$$

$y_1, y_2, \dots, y_m$  – ФСР:

(а) ЛНЗ:

$$\alpha_1 e^{\lambda x} + \alpha_2 x e^{\lambda x} + \dots + \alpha_m x^{m-1} e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x} (\alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_m x^{m-1}) = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$$

(б) Является решением 2.35:

$$L(x^k e^{\lambda x}) \stackrel{?}{=} 0, \quad k = \overline{0, m-1}$$

$$L(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} \cdot T_n(\lambda) \quad (2.37)$$

$$\frac{\delta^k}{\delta x^k} (L(e^{\lambda x})) = \frac{\delta^k}{\delta \lambda^k} (e^{\lambda x} T_n(\lambda)), \quad (u \cdot v)^{(k)} = \sum_{i=0}^k C_k^i u^{(i)} v^{(k-i)}$$

$$L\left(\frac{\delta^k}{\delta \lambda^k} e^{\lambda x}\right) = \sum_{i=0}^k C_k^i T_n^{(i)}(\lambda) \cdot (e^{\lambda x})^{(k-i)}$$



$$L(x^k e^{\lambda x}) = \sum_{i=0}^k C_k^i T_n^{(i)}(\lambda) x^{k-i} e^{\lambda x}$$

Если  $\lambda$  – корень  $T_n(\lambda)$  кратности  $m$ , то:

$$T_n(\lambda) = T_n'(\lambda) = \dots = T_n^{(m-1)}(\lambda) = 0, \quad T_n^{(m)}(\lambda) \neq 0$$

Правая часть = 0, если  $k = \overline{0, m-1} \implies L(x^k e^{\lambda x}) = 0, \quad k = \overline{0, m-1},$

$$y_{00} = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} + \dots + C_m x^{m-1} e^{\lambda x} + C_{m+1} e^{\lambda_m x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$$

$$3. \quad \lambda_{1,2} = a \pm b_i, \quad \lambda_3, \dots, \lambda_n$$

$$\quad \quad \quad \begin{array}{c} \nparallel \\ \lambda_{1,2} \end{array}$$

$$y_1 = e^{(a+b_i)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)$$

$$y(x) = u(x) + iv(x), \quad y'(x) = u'(x) + iv'(x)$$

**Утверждение 2.15.1.**  $y(x)$  – решение  $Ly = 0 \iff u(x)$  и  $v(x)$  – решения 2.35.

$$Ly(x) = Lu(x) + iLv(x)$$

$$y_2 = e^{(a-b_i)x} = e^{ax} \cdot e^{-ibx} = e^{ax} (\cos bx - i \sin bx);$$

$$\tilde{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{ax} \cdot \cos bx;$$

$$\tilde{y}_2 = \frac{y_1 - y_2}{2} = e^{ax} \cdot \sin bx$$

(a)  $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$  – решения 2.35;

(b)  $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$  – ЛНЗ?

$\implies \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, y_3, \dots, y_n$  – ФСР:

$$y_{00} = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx + C_3 e^{\lambda_3 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$$

$$4. \quad \lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = \dots = \lambda_{2m-1,2m} = a \pm bi, \quad \lambda_{2m+1}, \dots, \lambda_n$$

$$\quad \quad \quad \begin{array}{c} \nparallel \\ \lambda_{1,2} \end{array}$$

$$y_1 = e^{ax} \cos bx, \quad y_2 = x e^{ax} \cos bx, \quad \dots, \quad y_m = x^{m-1} e^{ax} \cos bx,$$

$$y_{m+1} = e^{ax} \sin bx, \quad y_{m+2} = x e^{ax} \sin bx, \quad \dots, \quad y_{2m} = x^{m-1} e^{ax} \sin bx$$

$$y_{00} = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 x \cos bx + \dots + C_m x^{m-1} \cos bx) +$$

$$+ e^{ax} \sin bx (C_{m+1} + C_{m+2} x + \dots + C_{2m} x^{m-1}) +$$

$$+ C_{2m+1} e^{\lambda_{2m+1} x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$$

$f(x)$  – специального вида

$$b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m, e^{ax}, \cos bx, \sin bx$$

## 2.16 Линейные неоднородные уравнения с правой частью спец. вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (2.38)$$

где  $a_0 \neq 0$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{0, n}$

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (2.39)$$

1. Пусть:

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x) \quad (2.40)$$

Тогда частное решение уравнения 2.38 будем искать  $\lambda$  вида:

$$y_{\text{ЧН}} = e^{\alpha x} (M_k(x) \cos \beta x + N_k(x) \sin \beta x) \cdot x^\tau,$$

где  $k = \max(m, n)$ ,  $M_k(x), N_k(x)$  – многочлены степени  $k$  общего вида с неоднородными коэффициентами,  $\tau$  – кратность числа  $\alpha \pm \beta i$  как корня характеристического уравнения 2.39, если  $\alpha \pm \beta i$  не является корнем 2.39, то  $\tau = 0$ .

2.  $f(x) = (b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m) e^{2x}$ . Тогда:

$$y_{\text{ЧН}} = (d_0 + d_1 x + \dots + d_m x^m) e^{\alpha x} \cdot x^\tau,$$

где  $\tau$  – кратность числа  $\alpha$  как корня характеристического уравнения 2.39, если  $\lambda$  не является корнем характеристического уравнения 2.39, то  $\tau = 0$ .

3. Если  $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_p(x)$ , где  $f_i(x)$  – многочлен вида 2.40, то  $y_{\text{ОН}} = y_{\text{ОО}} + y_{\text{ЧН}}^{(1)} + y_{\text{ЧН}}^{(2)} + \dots + y_{\text{ЧН}}^{(p)}$ .

4. Если  $f(x)$  – произвольного вида (отличного от вида 2.40), то  $y_{\text{ОН}}$  находим с помощью метода вариаций произвольных простоянных.

### Уравнение Эйлера.

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x),$$

$x^k y^{(k)}$  сводится к уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замены  $x = e^t$  при  $x > 0$  ( $x = e^t$  при  $x < 0$ ).

**Пример 23.**  $x^3 y''' - x^2 y'' + 2x y' - 2y = x^3$ ,  $x = e^t$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{e^t} = e^{-t} y'_t \\ y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^{-t}(y''_t - y'_t)}{e^t} = e^{-2t}(y''_t - y'_t) \\ y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^{-2t}(y'''_t - y''_t - 2y''_t + 2y'_t)}{e^t} = e^{-3t}(y'''_t - 3y''_t + 2y'_t) \end{aligned}$$

$$e^{3t} \cdot e^{-3t}(y_t''' - 3y_t'' + 2y_t') - e^{2t} \cdot e^{-2t} \cdot (y_t'' - y_t') + 2e^t \cdot e^{-t}y_t' - 2y = e^{3t}$$

$$y_t''' - 4y_t'' + 5y_t' - dy = e^{3t}, \quad \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$$

1. Характеристическое уравнение:  $x^k y^{(k)} \rightarrow \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - k + 1)$ ,

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) - \lambda(\lambda - 1) + 2\lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda - \lambda) + 2(\lambda - 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0 \iff (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0 \implies$$

$$\implies \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases} \implies y_{\text{ОО}} = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t}$$

2.  $\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) - \lambda^2 + \lambda + 2\lambda - 2 = 0$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda - \lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0 \implies$$

$$\implies y''' - 4y'' + 5y' - 2y = e^{3t}$$

$$f(t) = e^{3t} \implies \alpha \pm \beta i = 3 \neq \lambda_1, \lambda_2 \implies \tau = 0 \implies y_{\text{ЧН}} = Ae^{3t}$$

$$27Ae^{3t} - 36Ae^{3t} + 15Ae^{3t} - 2Ae^{3t} = e^{3t}$$

$$4A = 1 \implies A = \frac{1}{4} \implies y_{\text{ЧН}} = \frac{1}{4}e^{3t}$$

$$y_{\text{ОН}} = y_{\text{ОО}} + y_{\text{ЧН}} =$$

$$= (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t} + \frac{1}{4}e^{3t} = (C_1 + C_2 \ln x)x + C_3 x^2 + \frac{1}{4}x^3$$

$$x > 0, \quad x = e^t, \quad \ln x = t$$

**Пример 24.**  $y'' - 3y' + 2y = 9e^{3x}$

$$1. \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$$

$$2. f(x) = 9e^{3x} \implies \alpha \pm \beta i = 3 \neq \lambda_1, \lambda_2 \implies \tau = 0 \implies y_{\text{ЧН}} = Ae^{3x} \cdot x^\circ = Ae^{3x}.$$

**Пример 25.**  $y'' + 16y = x \cdot \sin 4x$

$$1. \lambda^2 + 16 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \pm 4i.$$

$$2. f(x) = x \sin x \implies \alpha \pm \beta i = 0 \pm 4i = \lambda_1 \implies \tau = 1$$

$$y_{\text{ЧН}} = x(Ax + B) \sin x + x(Cx + D) \cos x$$

1. Характеристическое уравнение:

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) - \lambda(\lambda - 1) + 2\lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda - \lambda) + 2(\lambda - 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0 \iff$$

$$\iff (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0 \iff \left[ \begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2 \end{array} \right] \implies$$

$$y_{\text{ОО}} = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t}$$

**Пример 26.**  $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}(1 - x)$

1.  $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \implies (\lambda - 4)^2 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 4$ , кратность – 2.

2.  $f(x) = e^{4x}(1 - x) \implies \alpha \pm \beta i = 4 = \lambda_1 \implies \tau = 2$ .

$$y_{\text{ЧН}} = e^{4x}(Ax + B)x^2 = e^{4x}(Ax^3 + Bx^2)$$