Дифференциальные уравнения
3 семестр

Данил Заблоцкий

14 ноября 2023 г.

Оглавление

Глава 1

Основные понятия

1.1 Уравнение 1-го порядка

Определение 1.1.1 (Дифференциальное уравнение n-го порядка)**. Дифференциальным уравнением n-го порядка** называется уравнение вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

$$x \in (a, b) \subset \mathbb{R}, \quad -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$$

$$[a, b), \quad [a, b], \quad (a, b]$$

Определение 1.1.2 (Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно старшей производной)**. Дифференциальным уравнением, разрешенным относительно старшей производной** называется уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad x \in (a, b) \tag{1.2}$$

Определение 1.1.3 (Решение дифференциального уравнения)**. Решением дифференциального уравнения** (1.1) или (1.2) называется n раз дифференцируемая функция $y = \phi(x)$ на интервале (a, b), если при подстановке она обращает уравнение в тождество на этом интервале.

Замечание.

$$y = \frac{1}{x+1}, \quad (-\infty, -1) \cup (-1, -\infty)$$

Предмет дифференциального уравнения:

1. Решение дифференциального уравнения.
2. Существует ли решение на (a, b)?
3. Единственность, $y(x_0) = y_0$ (задача Коши).
4. О продолжении.

5. Свойства решения:
   - ограниченность
   - монотонность
   - поведение решения вблизи границ ($x \to +\infty$)
   - нули функции на (a, b)

Определение 1.1.4 (Дифференциальное уравнение 1-го порядка)**. Дифференциальным уравнением 1-го порядка** называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0, \quad x \in (a, b) \tag{1.3}$$

(неразрешенное относительно y')

Определение 1.1.5 (Дифференциальное уравнение, разрешеноое относительно первой производной)**. Дифференциальным уравнением 1-го порядка, разрешенным относительно первой производной**, называется уравнение вида

$$y' = f(x, y), \quad x \in (a, b) \tag{1.4}$$

Определение 1.1.6 (Решение дифференциального уравнения (1.3) и (1.4))**. Решением дифференциального уравнения** (1.3) и (1.4) называется дифференцируемая функция $y = \phi(x)$, обращающая уравнение в тождество на этом интервале.

Пример 1. $y' = -\frac{x}{y}$ имеет решение $x^2 + y^2 = c$, где c - произвольная константа, $c > 0$.

Определение 1.1.7 (Поле направлений)**.** Сопоставим любой точке $(x_0, y_0) \to y'(x_0) = f(x_0, y_0) = \tan\alpha$ направления l. Семейство (совокупность) направлений l дает **поле направлений**.

Определение 1.1.8 (Интегральная кривая)**.** Кривая, касающаяся в каждой своей точке поля направлений, называется **интегральной кривой**.

$$y = \phi(x, c) \quad \text{интегральная кривая} \equiv \text{график решений}$$

Определение 1.1.9 (Изоклины)**.** Кривые, вдоль которых поле направлений постоянно, называется **изоклинами**.

Пример 2. $y' = y - x^2$ Напишем уравнение изоклин: $y - x^2 = c$ (заменяем y' на c)

1. $c = 0 \implies y - x^2 = 0 \implies y = x^2$
   $\tan\alpha = 0 \implies \alpha = 0; \quad y\ const.$
2. $c = 1 \implies y - x^2 = 1 \implies y = x^2 + 1$
   $\tan\alpha = 1 \implies \alpha = 45^\circ; \quad y \uparrow$

3. $c = 2 \implies y - x^2 = 2 \implies y = x^2 + 2$

   $\tan\alpha = 2 \implies \alpha = \arctan 2; \quad y\uparrow$

4. $c = -1 \implies y - x^2 = -1 \implies y = x^2 - 1$

   $\tan\alpha = -1 \implies \alpha = -45°; \quad y\downarrow$

5. $c = -2 \implies y - x^2 = -2 \implies y = x^2 - 2$

   $\tan\alpha = -2 \implies \alpha = -\arctan 2; \quad y\downarrow$

$$y' = 0$$
$$y' > 0, \quad y > x^2$$
$$y' < 0, \quad y < x^2$$

Определение 1.1.10 (Общее решение)**. Общее решение** - совокупность функций, которая содержит все решения уравнения.

Если решение задается функцией $y = \phi(x, c)$ или $\psi(x, y, c) = 0$, то общее решение должно удовлетворять условиям:

1. При любом c формула дает решение уравнение.

2. Любое решение уравнения находится по формуле при некотором $c = c_0$.

Определение 1.1.11 (Частное решение)**. Частное решение** определяется из общего при некотором $c = c_0$.

Пример 3. $y' = x \implies y = \frac{x^2}{2} + c$ - общее решение

при $c = 0: \ y = \frac{x^2}{2}$, при $c = 1: \ y = \frac{x^2}{2} + 1$ - частное решение

1.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 1.2.1 (Уравнения с разделяющимися переменными)**. Уравнениями с разделяющимися переменными** называются уравнения вида:

$$y' = f(x) \cdot g(y), \quad f_1(x) \cdot g_1(y) \cdot dx + f_2(x) \cdot g_2(y) \cdot dy = 0,$$

$f, \ f_1, \ f_2$ зависят от x, $g, \ g_1, \ g_2$ зависят от y.

Алгоритм:

$$\left[\begin{array}{l} g(y) = 0 \implies y = c \\ \begin{cases} g(y) \neq 0 \\ \frac{y'}{g(y)} = f(x) \end{cases} \implies \int \frac{y'dx}{g(y)} = \int f(x)dx \implies \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \implies \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y = \phi(x, c) \\ \psi(x, y, c) = 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} y = c_1 \\ \left[\begin{array}{l} y = \phi(y, c_2) \\ \psi(x, y, c_2) = 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Пример 4. $y' = xy^2$

$$\left[\begin{array}{l} y=0 \\ \left\{\begin{array}{l} \frac{dy}{y^2}=xdx \\ y\neq 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \iff \int \frac{dy}{y^2} = \int xdx \implies -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\left[\begin{array}{l} y=-\frac{2}{x^2+2C},\ C\in\mathbb{R} \\ y=0 \end{array}\right.$$

Теорема 1.2.1 (Задача Коши)**.** $\left\{\begin{array}{l} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{array}\right.$

$f(x,y)\in C(D), \quad (x_0,y_0)\in D$ (РИСУНКИ)

Пример 5. $y' = \sqrt{y}$

$$\left[\begin{array}{l} y=0 \\ \left\{\begin{array}{l} \frac{dy}{\sqrt{y}}=\int dx \\ y\neq 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \iff 2\sqrt{y} = x + C \implies y = (\tfrac{x+c}{2})^2 \text{ при } x+c\geqslant 0.$$

1. $y=0 \cup$ парабола AB_1D_1;
2. x_0 на кривой $y=0$ $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ ABD \\ AB_1D_1 \\ AB_2D_2 \end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=(\frac{x+c}{2})^2, \quad x+c\geqslant 0 \end{array}\right.$

Определение 1.2.2 (Точка единственности решения)**.** Точка (x_0,y_0) называется **точкой единственности решения** $y=\phi(x)$, если через нее не проходит другое решение, не совпадающее с решением $y=\phi(x)$ ни в какой окрестности этой точки.

Остальные точки называются **точками неединственности**.

Решение, которое содержит точки неединственности, называется **особым решением**.

Теорема 1.2.2 ($\exists$ и !-ть решения задачи Коши)**.** Пусть

$$f(x,y) \text{ в } \left\{\begin{array}{l} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{array}\right.$$

1. Определена и непрерывна в прямоугольнике в прямоугольнике
$\Pi = \{(x,y):\ |x-x_0|\leqslant a,\ |y-y_0|\leqslant b\}$
2. Удовлетворяет условию Липшица по y в Π ($f'_y(x,y)$ непрерывна в Π)

Тогда $\exists!$ решение задачи $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ в окрестности точки x_0 $(x_0 - h,\ x_0 + h)$, где $h = \min(a, \frac{b}{M}),\ M = \max|f(x,y)|,\ (x,y) \in \Pi$. (РИСУНОК)

Определение 1.2.3. $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y, если $\exists L > 0$ такая, что $\forall (x, y_1)$ и (x, y_2) имеет место $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant L \cdot |y_1 - y_2|$.

Если $f'_y(x,y)$ - непрерывна в Π, то выполняется условие Липшица.

$\forall (x, y_1),\ (x, y_2) \in \Pi,\ \exists \widetilde{y} \in [y_1, y_2]$.

$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant |f'_y(x,\widetilde{y}) \cdot (y_1 - y_2)| \leqslant |f'_y(x,\widetilde{y})||y_1 - y_2| = L|y_1 - y_2|$.

Пример 6. $y' = \frac{1}{y^2},\ f(x,y) = \frac{1}{y^2},\ f'_y = \frac{2}{y^3},\quad \int y^2 dy = \int y dx \implies \frac{y^3}{3} = x + c \implies \begin{cases} y = \sqrt[3]{3(x+c)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \implies y = \sqrt[3]{3(x - x_0) + y_0^3}$

Пример 7. $y' = signx = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

Пример 8. $y' = y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2$

$$\left[\begin{array}{l} y = 1 \\ \begin{cases} y \neq 1 \\ \frac{dy}{(y-1)^2} = \int dx \end{cases} \end{array} \right. \iff \frac{1}{y-1} = x + C \implies y = 1 - \frac{1}{x+C}$$

ПОСЛЕ ЭТОГО ИДЕТ ТО, ЧТО Я ПРОПУСТИЛ

1.3 Уравнение Бернулли

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^m, \quad m \neq 1$$

$$y = 0 \text{ – решение при } m > 0$$

1. Сведение к линейному

2. Метод Бернулли

1. $y^m \neq 0, \quad \frac{y'}{y^m} + P(x) \cdot \frac{y}{y^m} = q(x); \quad z = y^{1-m}, \quad z' = (1-m) \cdot y^{-m} \cdot y' = (1-m) \cdot \frac{y'}{y^m}$

   $\frac{z'}{1-m} + P(x) \cdot z = q(x) \ \Big| \ \cdot (1-m)$

   $z' + (1-m) \cdot P(x) \cdot z = (1-m) \cdot q(x)$

2. Пусть $y = u \cdot v, \quad u' \cdot v + u \cdot v' + P(x) \cdot u \cdot v = q(x) \cdot u^m \cdot v^m$

$u' \cdot v + u(v' + P(x) \cdot v) = q(x) \cdot u^m \cdot v^m$

$\begin{cases} v' + P(x) \cdot v = 0 \\ u' = q(x) \cdot u^m \cdot v^{m-1} \end{cases} \implies u = e^{-\int p(x)dx}$

$\frac{u'}{u^m} = q(x)(e^{-\int p(x)dx})^{m-1} \implies u \implies y = u \cdot v$

1.4 Уравнения в полных дифференциалах

Определение 1.4.1 (Уравнение в ПД)**.** Уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1.5}$$

называется **уравнением в полных дифференциалах (ПД)**, если левая часть уравнения (1.5) является дифференциалом накоторой функции.

$$P, Q, P_x, Q_x, P_y, Q_y \in C(D), \tag{1.6}$$

$$D \text{ - односвязная область в } \mathbb{R}^2$$

Теорема 1.4.1. Если существует такая функция $y(x,y): \ du = Pdx + Qdy$, выполняются условия (1.6), то имеет место в D

$$\frac{\delta Q}{\delta x} = \frac{\delta P}{\delta y} \tag{1.7}$$

Доказательство. Пусть $\exists u(x,y): \ du = Pdx + Qdy, \quad du = \frac{\delta u}{\delta x}dx + \frac{\delta u}{\delta y}dy$, $U \in C^2(x)$

$$\begin{cases} \frac{\delta u}{\delta x} = P \\ \frac{\delta u}{\delta y} = Q \end{cases} \iff \frac{\delta^2 u}{\delta y \delta x} = \frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x} \iff \frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}. \qquad \square$$

Теорема 1.4.2. Для $\exists$ функции $u(x,y)$ такой, что $du = Pdx + Qdy$ при выполнении (1.6) $\iff \frac{\delta Q}{\delta x} = \frac{\delta P}{\delta y}$.

1. $Pdx + Qdy = 0$
2. $du = Pdx + Qdy \implies du = 0$
3. $u(x,y) = C$

Общий интеграл - это функция $u(x,y)$, которая равна константе на решении уравнения.

Доказательство. Восстановление функции $u(x,y)$ по ее полному дифференциалу.

Пусть выполняется (1.6), D – односвязная область в $\mathbb{R}^2$, $du = Pdx + Qdy$.

Задача: найти $u(x,y) \in C^2(D)$

$du = \frac{\delta u}{\delta x}dx + \frac{\delta u}{\delta y}dy, \begin{cases} \frac{\delta u}{\delta x} = P(x,y) \\ \frac{\delta u}{\delta y} = Q(x,y) \end{cases}$

Проинтегрируем 1-е уравнение: $(x_0, y_0) \in D$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\delta u}{\delta x}dx = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx$$

$$u(x,y) = u(x_0,y_0) + \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx \tag{1.8}$$

$\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{\delta}{\delta y}(u(x_0,y) + \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx) = \frac{\delta u(x_0,y)}{\delta y} + \int_{x_0}^{x} \frac{\delta P(x,y)}{\delta y}dx = \frac{\delta u(x_0,y)}{\delta y} + \int_{x_0}^{x} \frac{\delta Q}{\delta x}dx = \frac{\delta u(x_0,y)}{\delta y} + Q(x,y) - Q(x_0,y) = Q(x,y) \implies \frac{\delta u(x_0,y)}{\delta y} = Q(x_0,y)$, интегрируем по y:

$\int_{y_0}^{y} \frac{\delta u(x_0,y)}{\delta y}dy = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy, \quad u(x_0,y) - u(x_0,y_0) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$

$$u(x,y) = u(x_0,y_0) + \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy \tag{1.9}$$

$$u(x,y) = u(x_0,y_0) + \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy \tag{1.10}$$

$$du(x,y) = 0, \quad u(x,y) = C$$

□

Пример 9. $ydx + xdy = 0 \iff \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}, \quad y = P,\ x = Q$

1. $\frac{\delta Q}{\delta x} = \frac{\delta P}{\delta y} = 1 \implies$ уравнение в ПД.

$$d(x \cdot y) = dx \cdot y + xdy = 0, \quad x \cdot y = C$$

2. $\begin{cases} \frac{\delta u}{\delta x} = y = P \implies \int \frac{\delta u}{\delta x}dx = \int ydx \implies u(x,y) = y \cdot x + C(y) \\ \frac{\delta u}{\delta y} = x = Q \implies \frac{\delta u}{\delta y} = \frac{\delta}{\delta y}(y \cdot x + C(y)) = x + C'(y) = x \end{cases}$

$$y(x,y) = y \cdot x + C \implies y \cdot x + C = C_1 \implies y \cdot x = \widetilde{C},\ \widetilde{C} = C_1 - C$$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta u}{\delta x} = y \\ \frac{\delta u}{\delta y} = x \end{array} \right\} \implies \int \frac{\delta u}{\delta y}dy = \int x \cdot dy \implies$

$$u(x,y) = x \cdot y + C(x)$$

$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta x}(x \cdot y) + C(x) = y + C'(x) = y \implies C'(x) = 0 \implies C(x) = C_1 \implies u(x,y) = x \cdot y + C_1;$

$$u(x,y) = C_2 \implies x \cdot y + C_1 = C_2 \implies x \cdot y = C, \quad C = C_2 - C_1$$

1.5 Интегральный множитель

$\frac{1}{y^2}$: $ydx - xdy = 0$

$\frac{\delta P}{\delta y} = y'_y = 1 \neq \frac{\delta Q}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta x}(-x) = -1$

$$u(x,y) = C$$

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = 0 \implies d(\frac{x}{y}) = 0$$

$$\frac{x}{y} = C, \quad y = 0$$

Определение 1.5.1. Пусть

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1.11}$$

не является уравнением в ПД, $M, N \in C^2(D)$, D – односвязная область в $\mathbb{R}^2$.

$\mu(x,y)$ называется **интегрирующим множителем** уравнения (1.11), если $\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy$ – является ПД некоторой функции

$$\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}$$

НАДО ДОПИСАТЬ

1.6 Методы построения интегрирующего множителя

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1.12}$$

$$M, N \in C^2(D), \quad \frac{\delta N}{\delta x} \neq \frac{\delta M}{\delta y}, \quad \mu(x,y) \in C^1(D)$$

$$\mu(x,y) \cdot M(x,y)dx + \mu(x,y) \cdot N(x,y)dy = 0$$

$$\frac{\delta Q}{\delta x} = \frac{\delta P}{\delta y}$$

$$\frac{\delta \mu(x,y)}{\delta x} \cdot N(x,y) + \mu(x,y) \cdot \frac{\delta N(x,y)}{\delta x} = \\ = \frac{\delta \mu(x,y)}{\delta y} \cdot M(x,y) + \mu(x,y) \cdot \frac{\delta M(x,y)}{\delta y}$$

1.

$$\mu=\mu(x) \implies \frac{\delta\mu}{\delta y}=0 \implies$$

$$\implies \mu'(x)\cdot N(x,y)+\mu(x)\cdot\frac{\delta N}{\delta x}=\mu(x)\cdot\frac{\delta M}{\delta y}$$

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=\frac{\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}}{N}=F(x)$$

$$\int\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}dx=\int F(x)dx$$

$$\ln|\mu(x)|=\ln c+\int F(x)dx,\quad \mu(x)=c\cdot e^{\int F(x)dx}\underset{c=1}{=}e^{\int F(x)dx}$$

2.

$$\mu=\mu(y) \implies \frac{\delta\mu}{\delta x}=0 \implies$$

$$\implies \mu'(y)\cdot M(x,y)+\mu(y)\cdot\frac{\delta M}{\delta y}=\mu(y)\cdot\frac{\delta N}{\delta x}$$

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)}=\frac{\frac{\delta N}{\delta x}-\frac{\delta M}{\delta y}}{M}=F(y)$$

$$\int\frac{\mu'(y)}{\mu(y)}dy=\int F(y)dy$$

$$\ln|\mu(y)|=\ln c+\int F(y)dy,\quad \mu(y)=c\cdot e^{\int F(y)dy}\underset{c=1}{=}e^{\int F(y)dy}$$

3.

$$\mu=\mu(\omega(x,y))$$

$$\frac{\delta\mu}{\delta\omega}\cdot\frac{\delta\omega}{\delta x}\cdot N+\mu\cdot\frac{\delta N}{\delta x} = \frac{\delta\mu}{\delta\omega}\cdot\frac{\delta\omega}{\delta y}\cdot M+\mu\cdot\frac{\delta M}{\delta y}$$

$$\frac{\frac{\delta\mu}{\delta\omega}}{\mu(\omega)}=\frac{\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}}{N\cdot\frac{\delta\omega}{\delta x}-M\cdot\frac{\delta\omega}{\delta y}}=F(\omega)\quad\implies$$

$$\implies\quad \mu(\omega)=e^{F(\omega)d\omega}$$

Пример 10.

$$(x^2+y^2+x)dx+ydy=0, \quad M=x^2+y^2+x, \quad N=y$$

$$\frac{\delta N}{\delta x}=0 \quad \neq$$
$$\neq \quad 2y=\frac{\delta M}{\delta y}$$

$$\mu=\mu(x)=?, \quad \mu(x^2+y^2+x)dx+\mu ydy=0,$$
$$P=\mu(x^2+y^2+x), \quad Q=\mu y,$$
$$\frac{\delta P}{\delta y}=\frac{\delta Q}{\delta x}, \quad \frac{\delta M}{\delta y}(x^2+y^2+x)+\mu\cdot 2y=\frac{\delta\mu}{\delta x}\cdot y+\mu\cdot 0,$$
$$\frac{\mu'(x)}{M}=\frac{2y}{y}=2, \quad \mu(x)=e^{2x},$$
$$e^{2x}(x^2+y^2+x)dx+e^{2x}\cdot ydy=0,$$
$$P=e^{2x}(x^2+y^2+x), \quad Q=e^{2x}\cdot y,$$
$$\frac{\delta P}{\delta y}=2e^{2x}\cdot y=\frac{\delta Q}{\delta x},$$
$$\begin{cases} \frac{\delta u}{\delta x}=e^{2x}(x^2+y^2+x) \\ \frac{\delta u}{\delta y}=e^{2x}\cdot y \end{cases} \implies u(x,y)=e^{2x}\cdot\frac{y^2}{2}+c(x),$$
$$u'_x=2e^{2x}\cdot\frac{y^2}{2}+c'(x)=e^{2x}(x^2+y^2+x), \quad c'(x)=e^{2x}(x^2+x)$$

$$c(x)=\frac{e^{2x}}{2}(x^2+x)-\int\frac{e^{2x}}{2}(2x+1)dx \quad =$$
$$=\frac{e^{2x}}{2}(x^2+x)-\frac{e^{2x}}{4}(2x+1) \quad + \quad \int\frac{e^{2x}}{4}\cdot 2dx=$$
$$=\frac{e^{2x}}{2}(x^2+x) \quad - \quad \frac{e^{2x}}{4}(2x+1)+\frac{e^{2x}}{4}+C$$

$$c(x)=\frac{e^{2x}}{2}\cdot x^2+C$$

$$u(x,y)=e^{2x}\cdot\frac{x^2+y^2}{2}+C=\widetilde{C}$$

$e^{2x}\cdot\frac{x^2+y^2}{2}=C$ – общий интеграл

1. Если μ_0 – ИМ, то $\forall c\in\mathbb{R} \quad \mu_1=C\cdot\mu_0$ – тоже является ИМ

2. Пусть μ_0 – ИМ уравнения (1.12), V_0 – соответствующий ему интеграл, то есть
$$\mu_0 \cdot Mdx + \mu_0 \cdot Ndx = dV_0,$$
тогда для произвольной функции $\phi \in C^1(D),\ \phi \neq 0,\ \mu_1 = \mu_0 \cdot \phi(V_0)$ – так же является ИМ.
$$\begin{aligned} Mdx + Ndy = 0, \quad \mu_1 \cdot Mdx + \mu_1 \cdot Ndy &= \\ = \mu_0 \cdot \phi(V_0) \cdot Mdx + \mu_0 \cdot \phi(V_0) \cdot Ndy &= \\ = \phi(V_0)(\mu_0 \cdot Mdx + \mu_0 \cdot Ndy) = \phi(V_0)dV_0 &= \\ = d\left(\int \phi(V_0)dV_0\right) = dV_1, \quad \int \phi(V_0)dV_0 = V_1 \end{aligned}$$

3. Если μ_1 и μ_2 – интегральные множители уравнения (1.12), тогда
$$\mu_2 = \mu_1 \cdot \phi(V_1),$$
где ϕ – произвольная функция класса C^1, V_1 – соответствующий интеграл для μ_1.

Следствие. Если μ_1 и μ_2 – интегральные множители уравнения (1.12) и $\frac{\mu_1}{\mu_2} \neq const$, тогда $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ – является интегралом для уравнения (1.12).

Теорема 1.6.1. Если уравнение 1-го порядка имеет общий интеграл $u(x, y) = C$, то оно имеет интегрирующий множитель.

Доказательство.
$$u(x,y) = C \begin{cases} Mdx + Ndy = 0 \\ du \equiv \frac{\delta u}{\delta x}dx + \frac{\delta u}{\delta y}dy = 0 \end{cases}$$
(dx, dy) – ненулевое решение если определитель равен 0, то есть
$$\begin{vmatrix} M & N \\ \frac{\delta u}{\delta x} & \frac{\delta u}{\delta y} \end{vmatrix} = M \cdot \frac{\delta u}{\delta y} - N \cdot \frac{\delta u}{\delta x} = 0$$
$$M \cdot \frac{\delta u}{\delta y} = N \cdot \frac{\delta u}{\delta x} \quad \Big| \cdot (MN) \implies \frac{1}{N} \cdot \frac{\delta u}{\delta y} = \frac{1}{M} \cdot \frac{\delta u}{\delta x} \stackrel{?}{=} \mu,$$
$$\mu \cdot Mdx + \mu \cdot Ndy = 0, \quad \frac{1}{M}\frac{\delta u}{\delta x} \cdot Mdx + \frac{1}{N} \cdot \frac{\delta u}{\delta y} \cdot Ndy = 0,$$
$$\frac{\delta u}{\delta x}dx + \frac{\delta u}{\delta y}dy = 0 \implies du = 0$$
$\square$

Еще один способ построения интегрального множителя

$$M_1dx \underset{I}{+} N_1dy + M_2dx \underset{II}{+} N_2dy = 0$$

Пусть μ_1 – интегральный множитель для I, V_1 – соответствующий ему интеграл, то есть

$$dV_1 = \mu_1 \cdot M_1dx + \mu_2 \cdot N_2dy,$$

μ_2 – интегральный множитель для II, V_2 – соответствующий ему интеграл, то есть

$$dV_2 = \mu_2 \cdot M_2dx + \mu_2 \cdot N_2dy,$$

тогда $\exists \phi, \psi \in C^1(D): \quad \mu_1 \cdot \phi(V_1) = \mu_2 \cdot \psi(V_2)$ и $\mu = \mu_1 \cdot \phi(V_1)$ или $\mu = \mu_2 \cdot \psi(V_2)$ – будет интегральным множителем.

Пример 11.

$$(\frac{y}{x} + 3x^2)dx + (1 + \frac{x^3}{y})dy = 0$$

$$(\frac{y}{x} + dy) + (3x^2dx + \frac{x^3}{y}dy) = 0$$

$\frac{y}{x} + dy = 0$	$\frac{y}{x} + dy = 0$
$\mu_1 = x$	$\mu_1 = x$
$ydx + xdy = 0$	$ydx + xdy = 0$
$d(xy) = 0 \implies xy = C_1$	$d(xy) = 0 \implies xy = C_1$
$V_1 = xy$	$V_1 = xy$

ДОПИСАТЬ НАДО

Рассмотрим окрестность точки (x_0, y_0, y_0')

1. По теореме о неявной функции

$$f(x, y, g(x, y)) = 0 \quad (*)$$

   $\exists$ непрерывная функция $g(x, y),\ g(x_0, y_0) = y_0',\ g \in C^1$

2. По теореме существования и единственности

$$y' = g(x, y)$$

   $\exists y(x)$ – решение на $[x_0 - h,\ x_0 + h]$ и удовлетворяющее $y(x_0) = y_0$

$$y'(x) = g(x, y(x))$$

   Из $(*) \implies f(x, y, y') = 0,\ y(x)$ – решение удовлетворяет уравнению $f(x, y, y') = 0$ и удовлетворяет условиям $\begin{matrix} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{matrix}$

$$y'(x_0) = g(x_0, y(x_0)) = y_0'$$

Интегрирование уравнений, не разрешенных относительно производной

1. Выразить, если это возможно, явно y' : $(y')_{1,2} = \dots$
2. Метод параметра: $y' = p$

$$x = \Phi(y, y') \quad (3)$$
$$y = \Psi(x, y') \quad (4)$$

Из $(3): \; y' = p \implies dy = pdx, \quad x = \Phi(y, p)$

$$dx = \frac{\delta\Phi}{\delta y}dy + \frac{\delta\Phi}{\delta p}dp$$
$$\frac{dy}{p} = \frac{\delta\Phi}{\delta y}dy + \frac{\delta\Phi}{\delta p}dp$$

$$\left[\begin{array}{l} p = 0 \\ p \neq 0: \quad \frac{dy}{p} = \frac{\delta\Phi}{\delta y}dy + \frac{\delta\Phi}{\delta p}dp \implies \begin{cases} y = y(p, c) \\ x = \Phi(y(p, c), p) \end{cases} \end{array}\right.$$

Из $(4): \; y = \Psi(x, p)$

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\delta\Psi}{\delta x}dx + \frac{\delta\Psi}{\delta p}dp \\ pdx &= \frac{\delta\Psi}{\delta x}dx + \frac{\delta\Psi}{\delta p}dp \implies \begin{cases} x = x(p, c) \\ y = \Psi(x(p, c), p) \end{cases} \end{aligned}$$

Уравнение Лагранжа

$$y = x \cdot F(y') + G(y')$$
$$y' = p \implies y = x \cdot F(p) + G(p)$$
$$\underset{=pdx}{dy} = F(p)dx + x \cdot F'(p)dp + g'(p)dp$$
$$(p - F(p))dx - F'(p)dp \cdot x = G'(p)dp : \; dp \neq 0, \; p - F(p) \neq 0$$
$$\tfrac{dx}{dp} - \tfrac{F'(p)}{p - f(p)} \cdot x = \tfrac{G'(p)}{p - F(p)},$$

где $\frac{dx}{dp} - \frac{F'(p)}{p - f(p)} \cdot x = \frac{G'(p)}{p - F(p)}$ – линейное уравнение относительно x.

$$p - F(p) = 0 \implies p = p_0 \implies y = x \cdot \underbrace{F(p_0)}_{=c_1} + \underbrace{G(p_0)}_{=c_2} \implies y = c_1 \cdot x + c_2$$

$$\begin{cases} p - F(p) \neq 0 \\ \frac{dx}{dp} - \frac{F'(p)}{p - F(p)} \cdot x = \frac{G'(p)}{p - F(p)} \end{cases} \implies \begin{cases} x = \phi(p, c) \\ y = \phi(p, c) \cdot F(p) + G(p) \end{cases}$$
$$dp = 0 \implies p = c \implies y = x \cdot F(c) + G(c)$$

Уравнение Клеро

МНЕ СТАЛО ВПАДЛУ НАДО ДОПИСАТЬ

1.7 Линейные уравнения высших порядков

Определение 1.7.1 (линейное неоднородное уравнение порядка n, однородное уравнение)**.** Уравнение вида:

$$a_0(x)\cdot y^{(n)}+a_1(x)\cdot y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)\cdot y'+a_n(x)\cdot y=f(x),\quad a_0(x)\neq 0 \quad (1)$$

называется **линейным неоднородным порядка** n,

$$a_j(x)\in C(\alpha,\beta),\quad j=\overline{0,n},\quad f(x)\in C(\alpha,\beta),\quad -\infty\leqslant\alpha<\beta\leqslant+\infty$$

Если $f(x)=0$, то уравнение называется **однородным**.
Пусть $L[y]=Ly\equiv a_0(x)\cdot y^{(n)}+\ldots+a_n(x)\cdot y$,

$$Ly=f \quad (2)$$

$$Ly=0 \quad (3)$$

$$y^{(n)}=-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\cdot y^{(n-1)}-\ldots-\frac{a_{n-1}(x)}{a_0(x)}\cdot y'-\frac{a_n(x)}{a_0(x)}\cdot y+\frac{f(x)}{a_0(x)} \quad (1')$$

Теорема 1.7.1 (о существовании и единственности)**.** Пусть для уравнения $(1')$ выполняются условия: $a_0(x)\neq 0,\ a_j(x)\in C(\alpha,\beta),\ f(x)\in C(\alpha,\beta)$. Тогда решение задачи Коши для уравнения $(1')$ существует и единственно на (α,β).

Свойства оператора Ly

1. $L(\alpha y)=\alpha Ly,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$ (свойство однородности);
2. $L(y_1+y_2)=Ly_1=Ly_2$ (свойство аддитивности).

Свойства решений однородного линейного уравнения (3) или $Ly=0$

1. $y=0$ является решением (3);
2. Если $y_1(x)$ – решение (3), то $y(x)-\alpha y_1(x),\ \alpha\in\mathbb{R}$ также ялвяется решением,
$$Ly=L(\alpha y_1)=\alpha\underbrace{Ly_1}_{=0}=0$$

3. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения (3), то $y(x) = y_1(x)+y_2(x)$ также является решением
$$Ly = L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2 = 0 + 0 = 0$$

4. Если $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – решения (3), то $\forall c_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,n}$ $y(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)$ так же является решением.

   $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – линейно независимая система функций $\implies \forall y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot y_i(x)$ – решение (3).

Определение 1.7.2 (линейная зависимая система функций)**.** Система функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ называется **линейной зависимой**, если $\exists$ такой набор $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}:\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0$, что линейная комбинация

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

Определение 1.7.3 (линейная независимая система функций)**.** Система функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ называется **линейной независимой**, если линейная комбинация этих функций равна 0 в случае, когда

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0,$$

$$\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0 \iff \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Определение 1.7.4. Определителем Вронского (вронскианом) системы функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, имеющих производные до порядка $(n-1)$ включительно, называется определитель:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

1.8 Линейные уравнения высших порядков

Теорема 1.8.1. Если система функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависима, то определитель Вронского равен 0, то есть $W(x) = 0$.

Доказательство. Из линейной зависимости $y_1(x), \ldots, y_n(x) \implies \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$:
$$\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0.$$

Пусть $\alpha_n \neq 0$, тогда:

$$\begin{aligned}
&y_n(x) = -\tfrac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1(x) - \tfrac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2(x) - \ldots - \tfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}(x) \\
&y_n'(x) = -\tfrac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1'(x) - \tfrac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2'(x) - \ldots - \tfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}'(x) \\
&\vdots \\
&y_n^{(n-1)}(x) = -\tfrac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1^{(n-1)}(x) - \tfrac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2^{(n-1)}(x) - \ldots - \tfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}^{(n-1)}(x)
\end{aligned}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_{n-1}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_n} y_k(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_{n-1}'(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_n} y_k'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_n} y_k^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0$$

□

Замечание. $W(x) = 0 \;\not\Longrightarrow\; y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – линейно зависима.

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad y_2(x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$$

$$W(x) = \begin{cases} \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 0, & x \geqslant 0 \\ \\ \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 0, & x < 0 \end{cases} \equiv 0$$

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \begin{cases} \infty, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = const \ (linearly\ dependent)$$

$$\alpha_1 \cdot y_1 + \alpha_2 \cdot y_2 = 0, \quad y_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot y_2$$

Теорема 1.8.2. Пусть $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – система линейно независимых на (α, β) решений уравнения $Ly = 0$. Тогда $W(x) \neq 0$ ни в какой точке интеграла (α, β)?

Доказательство. От противного. Предположим, что $\exists x_0 \in (\alpha, \beta)$. $W(x_0) = 0$,

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{cases} c_1 y_1(x_0) + \ldots + c_n y_n(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + \ldots + c_n y_n'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Однородная система линейно алгебраических уравнений, $\det = W(x_0) = 0$, $\Longrightarrow$ система (4) имеет нетривиальное решение: $\overrightarrow{c^0} - (c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0)$, $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – линейно зависимая?

$$y(x) = c_1^0 \cdot y_1(x) + \ldots + c_n^0 \cdot y_n(x)$$

1. $y(x)$ – решение $Ly = 0$;

2. $$\begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = c_1^0 y_1'(x) + \ldots + c_n^0 y_n'(x) \Big|_{x=x_0} = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = c_1^0 y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n^0 y_n^{(n-1)}(x) \Big|_{x=x_0} = 0 \end{cases}$$

1. $y \equiv 0 \implies Ly = 0 \implies$ из теоремы существования и единственности $\implies y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k^0 y_k(x) \equiv 0 \implies y_1, \ldots, y_n$ – линейно зависимые $\implies$ противоречие.

$\square$