Дифференциальные уравнения
3 семестр

Данил Заблоцкий

15 сентября 2023 г.

Оглавление

1 Основные понятия **2**

1.1 Уравнение 1-го порядка 2

1.2 Уравнения с разделяющимися переменными 4

Глава 1

Основные понятия

1.1 Уравнение 1-го порядка

Определение 1.1.1 (Дифференциальное уравнение n-го порядка)**. Дифференциальным уравнением n-го порядка** называется уравнение вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

$$x \in (a, b) \subset \mathbb{R}, \quad -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$$

$$[a, b), \quad [a, b], \quad (a, b]$$

Определение 1.1.2 (Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно старшей производной)**. Дифференциальным уравнением, разрешенным относительно старшей производной** называется уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad x \in (a, b) \tag{1.2}$$

Определение 1.1.3 (Решение дифференциального уравнения)**. Решением дифференциального уравнения** (1.1) или (1.2) называется n раз дифференцируемая функция $y = \phi(x)$ на интервале (a, b), если при подстановке она обращает уравнение в тождество на этом интервале.

Замечание.

$$y = \frac{1}{x+1}, \quad (-\infty, -1) \cup (-1, -\infty)$$

Предмет дифференциального уравнения:

1. Решение дифференциального уравнения.
2. Существует ли решение на (a, b)?
3. Единственность, $y(x_0) = y_0$ (задача Коши).
4. О продолжении.

5. Свойства решения:

   - ограниченность
   - монотонность
   - поведение решения вблизи границ ($x \to +\infty$)
   - нули функции на (a, b)

Определение 1.1.4 (Дифференциальное уравнение 1-го порядка)**. Дифференциальным уравнением 1-го порядка** называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0, \quad x \in (a, b) \tag{1.3}$$

(неразрешенное относительно y')

Определение 1.1.5 (Дифференциальное уравнение, разрешеноое относительно первой производной)**. Дифференциальным уравнением 1-го порядка, разрешенным относительно первой производной**, называется уравнение вида

$$y' = f(x, y), \quad x \in (a, b) \tag{1.4}$$

Определение 1.1.6 (Решение дифференциального уравнения (1.3) и (1.4))**. Решением дифференциального уравнения** (1.3) и (1.4) называется дифференцируемая функция $y = \phi(x)$, обращающая уравнение в тождество на этом интервале.

Пример 1. $y' = -\frac{x}{y}$ имеет решение $x^2 + y^2 = c$, где c - произвольная константа, $c > 0$.

Определение 1.1.7 (Поле направлений)**.** Сопоставим любой точке $(x_0, y_0) \to y'(x_0) = f(x_0, y_0) = \tan\alpha$ направления l. Семейство (совокупность) направлений l дает **поле направлений**.

Определение 1.1.8 (Интегральная кривая)**.** Кривая, касающаяся в каждой своей точке поля направлений, называется **интегральной кривой**.

$$y = \phi(x, c) \quad \text{интегральная кривая} \equiv \text{график решений}$$

Определение 1.1.9 (Изоклины)**.** Кривые, вдоль которых поле направлений постоянно, называется **изоклинами**.

Пример 2. $y' = y - x^2$ Напишем уравнение изоклин: $y - x^2 = c$ (заменяем y' на c)

1. $c = 0 \implies y - x^2 = 0 \implies y = x^2$
   $\tan\alpha = 0 \implies \alpha = 0; \quad y\ const.$
2. $c = 1 \implies y - x^2 = 1 \implies y = x^2 + 1$
   $\tan\alpha = 1 \implies \alpha = 45°; \quad y \uparrow$

3. $c = 2 \implies y - x^2 = 2 \implies y = x^2 + 2$
   $\tan\alpha = 2 \implies \alpha = \arctan 2; \quad y\uparrow$

4. $c = -1 \implies y - x^2 = -1 \implies y = x^2 - 1$
   $\tan\alpha = -1 \implies \alpha = -45°; \quad y\downarrow$

5. $c = -2 \implies y - x^2 = -2 \implies y = x^2 - 2$
   $\tan\alpha = -2 \implies \alpha = -\arctan 2; \quad y\downarrow$

$$y' = 0$$
$$y' > 0, \quad y > x^2$$
$$y' < 0, \quad y < x^2$$

Определение 1.1.10 (Общее решение)**. Общее решение** - совокупность функций, которая содержит все решения уравнения.

Если решение задается функцией $y = \phi(x, c)$ или $\psi(x, y, c) = 0$, то общее решение должно удовлетворять условиям:

1. При любом c формула дает решение уравнение.

2. Любое решение уравнения находится по формуле при некотором $c = c_0$.

Определение 1.1.11 (Частное решение)**. Частное решение** определяется из общего при некотором $c = c_0$.

Пример 3. $y' = x \implies y = \frac{x^2}{2} + c$ - общее решение
при $c = 0: \ y = \frac{x^2}{2}$, при $c = 1: \ y = \frac{x^2}{2} + 1$ - частное решение

1.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 1.2.1 (Уравнения с разделяющимися переменными)**. Уравнениями с разделяющимися переменными** называются уравнения вида:

$$y' = f(x) \cdot g(y), \quad f_1(x) \cdot g_1(y) \cdot dx + f_2(x) \cdot g_2(y) \cdot dy = 0,$$

$f, \ f_1, \ f_2$ зависят от x, $g, \ g_1, \ g_2$ зависят от y.

Алгоритм:

$$\left[\begin{array}{l} g(y) = 0 \implies y = c \\ \begin{cases} g(y) \neq 0 \\ \frac{y'}{g(y)} = f(x) \end{cases} \end{array}\right. \implies \int \frac{y'dx}{g(y)} = \int f(x)dx \implies \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \implies$$

$$\left[\begin{array}{l} y = \phi(x, c) \\ \psi(x, y, c) = 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} y = c_1 \\ \left[\begin{array}{l} y = \phi(y, c_2) \\ \psi(x, y, c_2) = 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Пример 4. $y' = xy^2$

$$\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ \left\{\begin{array}{l} \frac{dy}{y^2} = xdx \\ y \neq 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \iff \int \frac{dy}{y^2} = \int xdx \implies -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\left[\begin{array}{l} y = -\frac{2}{x^2+2C},\ C \in \mathbb{R} \\ y = 0 \end{array}\right.$$

Теорема 1.2.1 (Задача Коши)**.** $\left\{\begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right.$

$f(x,y) \in C(D), \quad (x_0, y_0) \in D$ (РИСУНКИ)

Пример 5. $y' = \sqrt{y}$

$$\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ \left\{\begin{array}{l} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx \\ y \neq 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \iff 2\sqrt{y} = x + C \implies y = (\tfrac{x+c}{2})^2 \text{ при } x + c \geqslant 0.$$

1. $y = 0 \cup$ парабола AB_1D_1;
2. x_0 на кривой $y = 0$ $\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ ABD \\ AB_1D_1 \\ AB_2D_2 \end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = (\frac{x+c}{2})^2, \quad x + c \geqslant 0 \end{array}\right.$

Определение 1.2.2 (Точка единственности решения)**.** Точка (x_0, y_0) называется **точкой единственности решения** $y = \phi(x)$, если через нее не проходит другое решение, не совпадающее с решением $y = \phi(x)$ ни в какой окрестности этой точки.

Остальные точки называются **точками неединственности**.

Решение, которое содержит точки неединственности, называется **особым решением**.

Теорема 1.2.2 ($\exists$ и !-ть решения задачи Коши)**.** Пусть

$$f(x,y) \text{ в } \left\{\begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right.$$

1. Определена и непрерывна в прямоугольнике в прямоугольнике $\Pi = \{(x,y) :\ |x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b\}$
2. Удовлетворяет условию Липшица по y в Π ($f'_y(x,y)$ непрерывна в Π)

Тогда $\exists!$ решение задачи $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ в окрестности точки x_0 $(x_0 - h,\ x_0 + h)$, где $h = \min(a, \frac{b}{M}),\ M = \max|f(x,y)|,\ (x,y) \in \Pi$. (РИСУНОК)

Определение 1.2.3. $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y, если $\exists L > 0$ такая, что $\forall (x,y_1)$ и (x,y_2) имеет место $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant L \cdot |y_1 - y_2|$.

Если $f'_y(x,y)$ - непрерывна в Π, то выполняется условие Липшица.

$\forall (x,y_1),\ (x,y_2) \in \Pi,\ \exists \widetilde{y} \in [y_1, y_2]$.

$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant |f'_y(x,\widetilde{y}) \cdot (y_1 - y_2)| \leqslant |f'_y(x,\widetilde{y})||y_1 - y_2| = L|y_1 - y_2|$.

Пример 6. $y' = \frac{1}{y^2},\ f(x,y) = \frac{1}{y^2},\ f'_y = \frac{2}{y^3},\quad \int y^2 dy = \int y dx \implies \frac{y^3}{3} = x + c \implies \begin{cases} y = \sqrt[3]{3(x+c)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \implies y = \sqrt[3]{3(x - x_0) + y_0^3}$

Пример 7. $y' = signx = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

Пример 8. $y' = y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2$

$$\left[\begin{array}{l} y = 1 \\ \begin{cases} y \neq 1 \\ \frac{dy}{(y-1)^2} = \int dx \end{cases} \end{array}\right. \iff \frac{1}{y-1} = x + C \implies y = 1 - \frac{1}{x+C}$$