

Дискретная математика и математическая
логика
3 семестр

Данил Заблоцкий

15 сентября 2023 г.

Оглавление

1	Основные понятия	4
----------	-------------------------	----------

Введение

В прошлом году изучались:

1. Основы

- Булевы функции
- Формулы логики высказываний
- Эквивалентные преобразования
- Нормальные формы
 - ДНФ/КНФ
 - СДНФ/СКНФ
 - Полином Жегалкина
- Минимальная ДНФ

2. Теория булевых функций

- Основной объект - булевы функции
- Суперпозиция и подстановка переменных
- Замкнутые классы булевых функций
- Замыкание
- Полные системы булевых функций и базисы
- Теорема Поста о полноте системы булевых функций
 - Классы Поста
 - Леммы о немонотонных, несамодвойственных, нелинейных функциях
 - Теорема
 - Теорема о максимально замкнутых классах

3. Логика высказываний

- Основной объект - формулы
- Основы теории доказательств
 - Логическое следование

- Вывод в форматных системах
- Исчисление высказываний
- Теорема Геделя о полноте исчисления высказываний
- Исчисление высказываний Генцена
- Метод резолюции для логики высказываний

В этом году будет изучаться **язык логики предикатов**.

Пример Аристотеля: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Все люди - смертные} \\ \text{Сократ - человек} \end{array} \right. \implies \text{Сократ - смертный}$

x : Все люди - смертные

y : Сократ - человек

z : Сократ - смертный

$$x, y \not\models z$$

Вывод: ЛВ обладает слабой выразительной силой по сравнению с естественным языком.

Глава 1

Основные понятия

Определение 1.0.1. n -местный предикант на множестве A - это отображение вида:

$$P : A^n \rightarrow \{0, 1\},$$

при этом n -местность - P .

Формально, предикант - это высказывание, зависящее от параметров.

Пример 1. 1. $A = \mathbb{Z}$.

$$P(x) = 1 \iff x \text{ - простое число.}$$

$$Q(x, y) = 1 \iff x + y = 1$$

$$R(x, y) = 1 \iff x < y$$

$$T(x, y, z) = 1 \iff z = \text{НОД}(x, y)$$

2. A - множество людей.

Примеры предикатов на A :

$$P(x) = 1 \iff x \text{ - женщина}$$

$$Q(x, y) = 1 \iff x \text{ - родитель } y$$

$$R(x, y) = 1 \iff x \text{ и } y \text{ - братья}$$

Определение 1.0.2. n -местная операция на множестве A - это отображение вида $f : A^n \rightarrow A$.

Пример 2. $A = \mathbb{Z}$.

1. $f_1(x) = x + 1$;

2. $f_2(x) = 2x$;

3. $f_3(x) = 0$;

4. $f_4(x) = x^2$;

5. $g_1(x, y) = \begin{cases} x^y, & y > 0; \\ 0, & y \leq \text{иначе} \end{cases}$;
6. $g_2(x, y) = x + y$;
7. $g_3(x, y) = \text{сумма последних цифр чисел } x \text{ и } y$.

$$\forall x(P(x) \& Q(x) \rightarrow R(f(x)))$$

Замечание. Чтобы писать формулы, достаточно иметь только обозначение предикатов и операций и знать их местность.

Определение 1.0.3. Сигнатура - набор трех непересекающихся множеств: $\mathfrak{R} \cup \mathfrak{F} \cup \mathfrak{C}$, где элементы множества \mathfrak{R} назовем предикатные символы, элементы \mathfrak{F} - функциональные символы, элементы \mathfrak{C} - константные символы. Так же должна быть определена функция $\mathfrak{M} : \mathfrak{R} \cup \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{N}$ - местность символов.

Сигнатура - это набор предикатных, функциональных и константных символов с указанием их местности.

Пример 3. $\Sigma = \{P^{(1)}, Q^{(2)}, f^{(1)}, g^{(2)}, c\}$, где $P^{(1)}, Q^{(2)}$ - предикат, $f^{(1)}, g^{(2)}$ - функциональные символы, а c - константный.

Символы P, Q, R, \dots считаем предикатными, символы f, g, h, \dots - функциональными, a, b, c, \dots - константами.

Сигнатуры Σ и Γ - равны, если есть содержание и одинаковые количества символов каждого сорта, и местности символов попарно равны.

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{P^{(1)}, Q^{(2)}, f^{(1)}, g^{(2)}, a, b\} = \\ \Gamma &= \{P_1^{(1)}, P_2^{(2)}, f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, c_1, c_2\} \end{aligned}$$

Иногда элементы сигнатуры представляются общепринятыми символами $(+, \cdot, \dots)$.

Пример 4. Имеем формулу: $\forall x (P(x) \rightarrow Q(f(x)))$. Эта формула истинна или ложна?

Для ответа не хватает:

- множества, из которого берутся значения переменных;
- расшифровки того, что обозначают символы P, Q, f .

Определение 1.0.4. Интерпретация сигнатуры Σ на множестве A - это отображение I , которое:

- каждый предикатный символ $P^{(n)} \in \Sigma$ отображает в n -местный предикат на множестве A ;
- каждый функциональный символ $f^{(n)} \in \Sigma$ отображает в n -местную операцию на A ;
- каждый константный символ отображает в элемент множества A .

Определение 1.0.5. Алгебраическая система - это набор, состоящий из множества A , сигнатуры Σ и интерпретации сигнатуры Σ на множестве