Дискретная математика и математическая логика
3 семестр

Данил Заблоцкий

24 сентября 2023 г.

Оглавление

Введение

В прошлом году изучались:

1. Основы
   - Булевы функции
   - Формулы логики высказываний
   - Эквивалентные преобразования
   - Нормальные формы
     - ДНФ/КНФ
     - СДНФ/СКНФ
     - Полином Жегалкина
   - Минимальная ДНФ
2. Теория булевых функций
   - Основной объект – булевы функции
   - Суперпозиция и подстановка переменных
   - Замкнутые классы булевых функций
   - Замыкание
   - Полные системы булевых функций и базисы
   - Теорема Поста о полноте системы булевых функций
     - Классы Поста
     - Леммы о немонотонных, несамодвойственных, нелинейных функциях
     - Теорема
     - Теорема о максимально замкнутых классах
3. Логика высказываний
   - Основной объект – формулы
   - Основы теории доказательств
     - Логическое следование

- Вывод в форматных системах
- Исчисление высказываний
- Теорема Геделя о полноте исчисления высказываний
- Исчисление высказываний Генцена
- Метод резолции для логики высказываний

В этом году будет изучаться **язык логики предикатов**.

Пример Аристотеля: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Все люди – смертные} \\ \text{Сократ – человек} \end{array} \right. \implies$ Сократ – смертный

x: Все люди – смертные

y: Сократ – человек

z: Сократ – смертный

$$x, y \not\models z$$

Вывод: ЛВ обладает слабой выразительной силой по сравнению с естественным языком.

Глава 1

Основные понятия

Определение 1.0.1 (n-местный предикант)**.** **n-местный предикант** на множестве A – это отображение вида:

$$P: \ A^n \to \{0, 1\},$$

при этом n-местность – P.

Формально, предикант – это высказывание, зависящее от параметров.

Пример 1. 1. $A = \mathbb{Z}$.

$P(x) = 1 \iff x$ – простое число.

$Q(x, y) = 1 \iff x + y = 1$

$R(x, y) = 1 \iff x < y$

$T(x, y, z) = 1 \iff z = \text{НОД}(x, y)$

2. A – множество людей.

   Примеры предикатов на A:

   $P(x) = 1 \iff x$ – женщина

   $Q(x, y) = 1 \iff x$ – родитель y

   $R(x, y) = 1 \iff x$ и y – братья

Определение 1.0.2 (n-местная операция)**.** **n-местная операция** на множестве A – это отображение вида $f: \ A^n \to A$.

Пример 2. $A = \mathbb{Z}$.

1. $f_1(x) = x + 1$;

2. $f_2(x) = 2x$;

3. $f_3(x) = 0$;

4. $f_4(x) = x^2$;

5. $g_1(x,y) = \begin{cases} x^y, & y > 0; \\ 0, & y \leqslant \text{иначе} \end{cases};$

6. $g_2(x,y) = x + y$;

7. $g_3(x,y) =$ сумма последних цифр чисел x и y.

$$\forall x (P(x) \& Q(x) \to R(f(x)))$$

Замечание. Чтобы писать формулы, достаточно иметь только обозначение предикатов и операций и знать их местность.

Определение 1.0.3 (Сигнатура)**. Сигнатура** – набор трех непересекающихся множеств: $\mathfrak{R} \cup \mathfrak{F} \cup \mathfrak{C}$, где элементы множества $\mathfrak{R}$ назовем предикатные символы, элементы $\mathfrak{F}$ - функциональные символы, элементы $\mathfrak{C}$ - константные символы. Так же должна быть определена функция $\mathfrak{M}: \ \mathfrak{R} \cup \mathfrak{F} \to \mathbb{N}$ - местность символов.

Сигнатура – это набор предикатных, функциональных и константных символов с указанием их местности.

Пример 3. $\Sigma = \{P^{(1)},\ Q^{(2)},\ f^{(1)},\ g^{(2)},\ c\}$, где $P^{(1)},\ Q^{(2)}$ – предикат, $f^{(1)},\ g^{(2)}$ – функциональные символы, а c – константный.

Символы $P, Q, R, \ldots$ считаем предикатными, символы $f, g, h, \ldots$ – функциональными, $a, b, c, \ldots$ – константами.

Сигнатуры Σ и Γ – равны, если есть содержание и одинаковые количества символов каждого сорта, и местности символов попарно равны.

$$\Sigma = \{P^{(1)},\ Q^{(2)},\ f^{(1)},\ g^{(2)},\ a,\ b\} =$$
$$\Gamma = \{P_1^{(1)},\ P_2^{(2)},\ f_1^{(1)},\ f_2^{(2)},\ c_1,\ c_2\}$$

Иногда элементы сигнатуры представляются общепринятыми символами $(+,\ \cdot,\ \ldots)$.

Пример 4. Имеем формулу: $\forall x\ (P(x) \to Q(f(x)))$. Эта формула истинна или ложна?

Для ответа не хватает:

- множества, из которого берутся значения переменных;
- расшифровки того, что обозначают символы $P,\ Q,\ f$.

Определение 1.0.4 (Интерпретация сигнатуры)**. Интепретация сигнатуры** Σ на множестве A – это отображение I, которое:

- каждый предикатный символ $P^{(n)} \in \Sigma$ отображает в n-местный предикат на множестве A;
- каждый функциональный символ $f^{(n)} \subset \Sigma$ отображает в n-местную операцию на A;

- каждый константный символ отображает в элемент множество A.

Определение 1.0.5 (Алгебраическая система)**. Алгебраическая система** – это набор, состоящий из множества A, сигнатуры Σ и интепретации сигнатуры Σ на множестве A. Множество A называется **основным множеством системы**.

$$\phi =< A, \Sigma, \mathfrak{I} >$$

1.1 Язык логики предикатов (1-го порядка)

Пусть Σ – сигнатура. Алфавит языка логики предикатов сигнатуры Σ – это

$$A_\Sigma = \Sigma \cup \{x_1, x_2, \ldots, \wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \iff, (,), \forall, \exists, , \}$$

Определение 1.1.1 (Терм)**. Терм** сигнатуры Σ – это слово, построенное по правилам:

1. Символ переменной – терм.
2. Константный символ – терм.
3. Если $f^{(n)} \in \Sigma$ – функциональный символ и $t_1, \ldots, t_n$ – термы, то слово $f(t_1, \ldots, t_n)$ – тоже терм.

Пример 5. $\Sigma = \{+^{(2)}, \cdot^{(2)}, <^{(2)}, 0, 1\}$
Термы: $x, y, z, 0, 1, x + y, z \cdot x, 0 < 1, x \cdot 1, z(x + y), x \cdot 1 + y, \ldots$

Определение 1.1.2 (Атомарные формулы)**. Атомарные формулы** сигнатуры Σ – слово одного из двух видов:

- $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 – термы;
- $P(t_1, t_2)$, где $P^{(n)} \in \Sigma$ – предикатный символ, $t_1, \ldots, t_n$ – термы.

Определение 1.1.3 (Формула языка логики предикатов)**. Формула языка логики предикатов** – это слово, построенное по правилам:

1. Атомарная формула – формула.
2. Если ϕ_1 и ϕ_2 – формулы, то слова $(\phi_1 \wedge \phi_2)$, $(\phi_1 \vee \phi_2)$, $(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$, $(\phi_1 \iff \phi_2)$, $\neg\phi_1$ – тоже формулы.
3. Если ϕ – формула, x – переменная, то $(\forall x\ \phi)$ и $(\exists x\ \phi)$ – тоже формулы.

Пример 6. $x = y \wedge y = 1,\ x < y \wedge y < z \vee z = 0,\ x + y < 1 \vee x + y < 0 \vee x = y,\ \forall x, y\ (x < y \vee y < x \vee x \leqslant y)$.

Для уменьшения количества скобок в формулах используется соглашение о приоритетах:

$$(\forall, \exists) \rightarrow \neg \rightarrow \wedge \rightarrow \text{остальные операции}$$

Определение 1.1.4 (Связное и свободное вхождение)**.** Вхождение переменной x в формуле вида $(\forall x\ \phi)$ и $(\exists x\ \phi)$ назовем **связным**. В противном случае вхождение переменной **свободное**.

Переменная x **свободная** в формуле ϕ, если есть хотя бы одно ее свободное вхождение в ϕ. Иначе переменная **связная**.

Запись $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ означает, что все свободные переменные формулы и содержатся в строке $x_1, \ldots, x_n$.

Определение 1.1.5 (Замкнутая формула (предложение))**. Замкнутая формула (предложение)** – это формула без свободных переменных.

Пример 7. $\forall x \exists y \quad (Q(x, y) \vee \neg P(x))$

Язык = синтаксис + семантика
Синтаксис – правила написания слов
Семантика – смысл слов

1.2 Семантика языка логики предикатов

Пусть $A =< A, \Sigma >$ – алгебраическая система. Терм $t(x_1, \ldots, x_n)$ определяет в системе A функцию $t_A : \ \ A^n \to A$ по следующему правилу: заменяя в терме t все функции, константные знаки на все интепретации, получаем суперпозицию функций.

Пример 8. $\Sigma = \{P^{(1)}, Q^{(2)}, f^{(1)}, g^{(2)}, a, b\}$

$$t_1(x, y) = g(f(x), y), \quad t_2(x, y) = f(g(a, g(b, f(x))))$$

Определение 1.2.1. Пусть $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ – формула, $A =< A, \Sigma >$ – алгебраическая система, $a_1, \ldots, a_n \in A$. Истинность формулы ϕ в алгебраической системе A на элементах $a_1, \ldots, a_n$ $(A \vDash \phi(a_1, \ldots, a_n))$ определяется по следующим правилам:

1. Пусть ϕ имеет вид $t_1(x_1, \ldots, x_n) = t_2(x_1, \ldots, x_n)$, где t_1 и t_2 – формулы:
$$A \vDash \phi(a_1, \ldots, a_n) \iff t_{1_A}(a_1, \ldots, a_n) = t_{2_A}(a_1, \ldots, a_n).$$
2. Пусть ϕ имеет вид $P(t_1, \ldots, t_k)$, где $P^{(k)} \in \Sigma$ – предикатный символ, $t_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, t_k(x_1, \ldots, x_n)$ – термы.
$$A \vDash \phi(a_1, \ldots, a_n) \iff P_A(t_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_k(x_1, \ldots, x_n)) = 1$$
3. Пусть $\phi = (\phi_1 \wedge \phi_2)$ $[(\phi_1 \vee \phi_2),\ (\phi_1 \to \phi_2),\ (\phi_1 \iff \phi_2),\ \neg\phi_1]$. Истинность определяется из значений формул по таблицам истинности логических связок.
4. Пусть $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ имеет вид $\exists x\ \phi(x, x_1, \ldots, x_n)$. Тогда $A \vDash \phi(a_1, \ldots, a_n) \iff$ для некоторого $b \in A \quad A \vDash \phi(b, a_1, \ldots, a_n)$.

5. Пусть $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ имеет вид $\forall x\, \phi(x, x_1, \ldots, x_n)$. Тогда $A \vDash \phi(a_1, \ldots, a_n) \iff$ для всех $b \in A \quad A \vDash \phi(b, a_1, \ldots, a_n)$.

Определение 1.2.2 (Тождественно истинная (ложная), выполнимая формула)**.** Формула $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ **тождественно истинна (ложна)** в системе A, если $a_1, \ldots, a_n \in A,\ A \vDash \phi(a_1, \ldots, a_n)$ $(A \nvDash \phi(a_1, \ldots, a_n))$.

Формула ϕ тождественно **истинна (ложна)**, если ϕ тождественно истинна (ложна) в любой системе сигнатуры Σ.

Формула $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ **выполнима** в системе A, если $\exists a_1, \ldots, a_n :\ A \vDash \phi(a_1, \ldots, a_n)$.

Формула ϕ **выполнима**, если она выполнима хотя бы в одной системе сигнатуры Σ.