V404 のデータ解析

森井幹雄

平成 29 年 5 月 26 日

概 要

V404 のデータ解析のまとめ。

1 データ

V404 の Light curve を図 1 に示す。Light curve の詳細を 表 1 に示す。
(file 置場: /home/morii/work/v404/data/170412/)
Term1, Term2 について、optical, X-ray の light curve をそれぞれ、規格化すると、図 2, 3 のようになる。

2 解析方法

Fourier 変換の式は (Numerical Recipes[Press *et al.*(2007)] の (12.0.1) 式):

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(2\pi i f t) dt, \tag{1}$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(-2\pi i f t) df. \tag{2}$$

$h(t)$ が実数関数ならば $h(t)^* = h(t)$ なので、式 (1) より、

$$\begin{aligned} [H(f)]^* &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(2\pi i f t) dt\right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} [h(t)\exp(2\pi i f t)]^* \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} [h(t)]^* \exp(-2\pi i f t) dt & (3) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-2\pi i f t) dt = H(-f). & (4) \end{aligned}$$

よって、$H(f)$ の実部、虚部をそれぞれ $H_R(f)$, $H_I(f)$ とおくと、$H_R(-f) + iH_I(-f) = H(-f) = [H(f)]^* = H_R(f) - iH_I(f)$ より、$H_R(-f) = H_R(f)$, $H_I(-f) = -H_I(f)$ となるので、$H_R(f)$, $H_I(f)$ はそれぞれ、偶関数、奇関数となる。よって、式 (2) は、

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(-2\pi i f t) df = \int_{-\infty}^{\infty} [H_R(f) + iH_I(f)] [\cos(2\pi f t) - i \sin(2\pi f t)] \, df & (5) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [H_R(f)\cos(2\pi f t) + H_I(f)\sin(2\pi f t)] \, df + i \int_{-\infty}^{\infty} [H_I(f)\cos(2\pi f t) - H_R(f)\sin(2\pi f t)] \, df & \\ &= 2\int_{0}^{\infty} [H_R(f)\cos(2\pi f t) + H_I(f)\sin(2\pi f t)] \, df. & (6) \end{aligned}$$

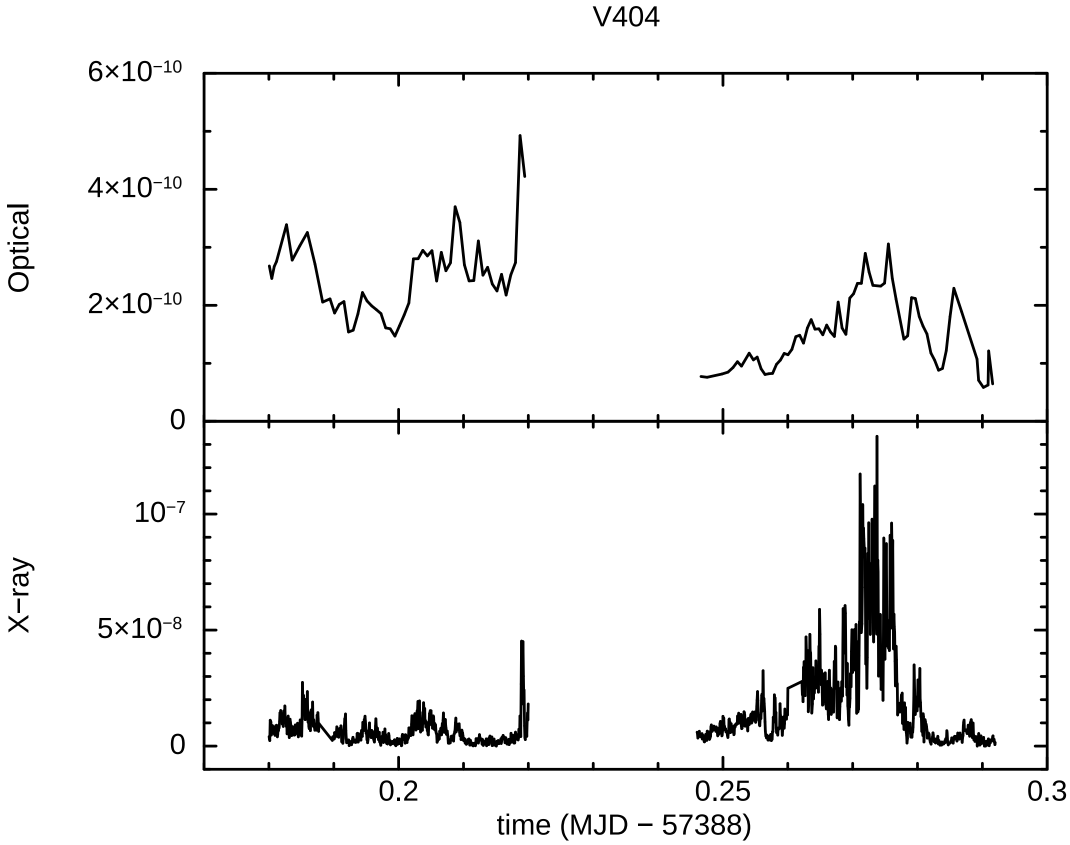

図 1: V404 の Light curve: term1 + term2

となる。観測される時系列のデータは、$h(t)$ に相当する。この観測量から、周波数空間の関数 $H_R(f)$ と $H_I(f)$ を推定する問題を考える。

ある物理量 $h(t)$ が、時刻 $t = t_{\rm st}$ から $t_{\rm ed}$ までの間に N 点観測されているとする。つまり、観測時刻は、$t = t_1, t_2, \cdots, t_N$。但し、観測時刻は必ずしも等間隔ではないとする。また、この物理量を周波数空間で観た場合、周波数空間上で $f_{\rm lo}$ から $f_{\rm up}$ の間だけに値があり、それ以外の周波数成分は無視できるほど小さいと仮定する。観測データ量が N で、H_R と H_I の二つの関数の値を決めたいので、周波数空間を $N/2$ 個に分割しておくのが一般的であろう。しかし、本解析では、LASSO を用いるので、周波数空間の分割数はこれよりずっと大きくても構わない。そこで、周波数空間を $M/2$ 個に分割するものとする。周波数空間の分解能を、$\Delta f = 2(f_{\rm up} - f_{\rm lo})/M$ とおき、$M/2$ 個の周波数 $f_j = f_{\rm lo} + \Delta f \times (j - 1/2)$ $(j = 1, 2, \cdots, M/2)$ における $H_R(f_j)$ と $H_I(f_j)$ の値を推定することにする。

このとき、式 (6) を近似すると、

$$h(t) \approx 2\Delta f \sum_{j=1}^{M/2} \left[H_R(f_j) \cos(2\pi f_j t) + H_I(f_j) \sin(2\pi f_j t) \right]. \tag{7}$$

表 1: Summary of data

term 1		
	optical	X-ray
$t_{\rm st}$ (MJD)	57388.18	57388.18
$t_{\rm ed}$ (MJD)	57388.22	57388.22
$t_{\rm ed} - t_{\rm st}$ (d)	0.039	0.040
$f_{\rm min}$ ($\rm d^{-1}$)	2.5e+01	2.5e+01
$f_{\rm max}$ ($\rm d^{-1}$)	2.9e+03	1.8e+04
$f_{\rm main}$ ($\rm d^{-1}$)	1.4e+03	1.7e+04
$N_{\rm f,main}$	55	692
file	optlc-vband-term1.bjd	xraylc-5sec-term1.bjd
term 2		
	optical	X-ray
$t_{\rm st}$ (MJD)	57388.25	57388.25
$t_{\rm ed}$ (MJD)	57388.29	57388.29
$t_{\rm ed} - t_{\rm st}$ (d)	0.045	0.046
$f_{\rm min}$ ($\rm d^{-1}$)	2.2e+01	2.2e+01
$f_{\rm max}$ ($\rm d^{-1}$)	1.1e+04	1.8e+04
$f_{\rm main}$ ($\rm d^{-1}$)	1.7e+03	1.7e+04
$N_{\rm f,main}$	75	796
file	optlc-iband-term2.bjd	xraylc-5sec-term2.bjd

観測時刻が t_i なので、

$$h(t_i) \approx 2\Delta f \sum_{j=1}^{M/2} \left[H_R(f_j) \cos(2\pi f_j t_i) + H_I(f_j) \sin(2\pi f_j t_i) \right] \tag{8}$$

となる $(i = 1, 2, \cdots, N)$。

ベクトル $\mathbf{x}$ を $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_R, \mathbf{x}_I)^T$, $(\mathbf{x}_R)_j = H_R(f_j)$, $(\mathbf{x}_I)_j = H_I(f_j)$ で定義する。行列 A を

$$(A)_{i,j} = 2\Delta f \cos(2\pi f_j t_i) \tag{9}$$

$$(A)_{i,M/2+j} = 2\Delta f \sin(2\pi f_j t_i) \tag{10}$$

として定義する $(i = 1, 2, \cdots, N; j = 1, 2, \cdots, M/2)$。観測値のベクトル $\mathbf{h}$ を、$\mathbf{h} = \mathbf{b}$ とおくと、

$$\mathbf{b} \approx A\mathbf{x} \tag{11}$$

とかける。これは、$\mathbf{b}$, A が既知で、$\mathbf{x}$ を推定する問題である。

観測データの点数 N より、推定したい周波数成分のベクトルの要素の数 M が大きい場合、不良設定問題となる。この問題を解くために、$\mathbf{x}$ の解がスパースであると仮定し、LASSO を用いることにする。ただし、

$\mathbf{x}$ の $H_R(f_j)$ と $H_I(f_j)$ は同じ周波数に対応する成分であり、両方同時にゼロまたは、非ゼロの値にならなければならない。そこで、group LASSO を用いる。

3 定式化

3.1 時系列データが一つの場合

以下の cost function を最小化すればよい。

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) = ||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||^2 + \lambda \sum_{j=1}^{M/2} \sqrt{x_j^2 + x_{M/2+j}^2} \tag{12}$$

この問題を解くために、FISTA を用いる。具体的には、[Beck & Teboulle(2009)] の p194 の FISTA with backtracking のアルゴリズムで計算した。このアルゴリズム中に出てくる式を書き下すと、

$$Q_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) + < \mathbf{x} - \mathbf{y}, \nabla f(\mathbf{y}) > + \frac{L}{2}||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2 + g(\mathbf{x}), \tag{13}$$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \nabla ||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||^2 = 2A^T(A\mathbf{x} - \mathbf{b}), \tag{14}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} - \frac{1}{L}\nabla f(\mathbf{y}) = y - \frac{2}{L}A^T(A\mathbf{x} - \mathbf{b}), \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
p_L(\mathbf{y}) &= \arg\min_{\mathrm{x}} \left\{ g(\mathbf{x}) + \frac{L}{2} \left|\left| \mathbf{x} - \left(\mathbf{y} - \frac{1}{L}\nabla f(\mathbf{y}) \right) \right|\right|^2 \right\} && (16) \\
&= \arg\min_{\mathrm{x}} \left\{ g(\mathbf{x}) + \frac{L}{2}||\mathbf{x} - \mathbf{z}||^2 \right\} && (17) \\
&= \arg\min_{\mathrm{x}} \sum_{j=1}^{M/2} \left\{ \frac{L}{2} \left[(x_j - z_j)^2 + (x_{M/2+j} - z_{M/2+j})^2 \right] + \lambda \sqrt{x_j^2 + x_{M/2+j}^2} \right\} && (18) \\
&= \arg\min_{\mathrm{x}} \sum_{j=1}^{M/2} l(x_j, x_{M/2+j}, z_j, z_{M/2+j}), && (19)
\end{aligned}$$

ここで、

$$l(x, y, a, b) = \frac{L}{2} \left[(x-a)^2 + (y-b)^2 \right] + \lambda \sqrt{x^2 + y^2} \tag{20}$$

とおく。これを、x, y について最小化すると、

$$\arg\min_{x,y} l(x, y, a, b) = \frac{S_\lambda(L\sqrt{a^2 + b^2})}{L\sqrt{a^2 + b^2}}(a, b)^T \tag{21}$$

となる。ここで、S_λ は soft thresholding operator で、

$$S_\lambda(x) = \begin{cases} x - \lambda & (\lambda < x) \\ 0 & (|x| \leq \lambda) \\ x + \lambda & (x < -\lambda) \end{cases} \tag{22}$$

なので、

$$S_\lambda(x)/x = \begin{cases} 1-\lambda/x & (\lambda < x) \\ 0 & (|x| \le \lambda) \\ 1+\lambda/x & (x < -\lambda) \end{cases} . \tag{23}$$

これを使えば、ゼロで割る心配はない。

3.2 時系列データが二つの場合

Optical と X-ray の時系列データがあるとする。それぞれ、周波数成分を推定したい。Optical、X-ray の時系列データをそれぞれ、$\mathbf{b}^{(1)}$、$\mathbf{b}^{(2)}$ とする。それぞれのデータ数を、N_1, N_2 とおく。Optical、X-ray の周波数成分ベクトルをそれぞれ $\mathbf{x}^{(1)}$、$\mathbf{x}^{(2)}$ とおくと、解きたい問題は、$\mathbf{b}^{(1)} \approx A^{(1)}\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{b}^{(2)} \approx A^{(2)}\mathbf{x}^{(2)}$ である。また、$\mathbf{x} = (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})^T$ とまとめておく。

Optical と X-ray で共通に存在する周波数成分を抽出したいので、group LASSO を用いる。以下の const function を最小化すればよさそうである。

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) + g(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + g(x) & (24)\\ &= ||A^{(1)}\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{b}^{(1)}||^2 + ||A^{(2)}\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{b}^{(2)}||^2 + \lambda \sum_{j=1}^{M/2} \sqrt{x_j^2 + x_{M/2+j}^2 + x_{M+j}^2 + x_{3M/2+j}^2}. & (25) \end{aligned}$$

しかし、これだと、Optical と X-ray のデータ点の数が大きく異なる場合、データ点数が大きい方に重みがかかった解が得られるため良くない。データ点数の重み補正を行い、以下の cost function を最小化することにする。

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) + g(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + g(x) & (26)\\ &= N_2||A_1\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1||^2 + N_1||A_2\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}_2||^2 + \lambda \sum_{j=1}^{M/2} \sqrt{x_j^2 + x_{M/2+j}^2 + x_{M+j}^2 + x_{3M/2+j}^2}. & (27) \end{aligned}$$

4 Simulation

5 Cross Validation

6 term1

Cross Validation より、$\lambda = XX$ を採用する。

7 Reconstructed light curve

7.1 component, term1

7.2 component, term2

7.3 Reconstructed light curve with lag plus/minus

7.3.1 term1

7.3.2 term2

7.3.3 lag plus/ minus

7.4 Time variation of weight of Lag

参考文献

[Press *et al.*(2007)] W. H. Press *et al.* (2007) "Numerical Recipes", Third Edition, Cambridge Univ. Press.

[Beck & Teboulle(2009)] A. Beck & M. Teboulle (2009) SIAM J. Image Sciences, Vol.2, No.1, p183

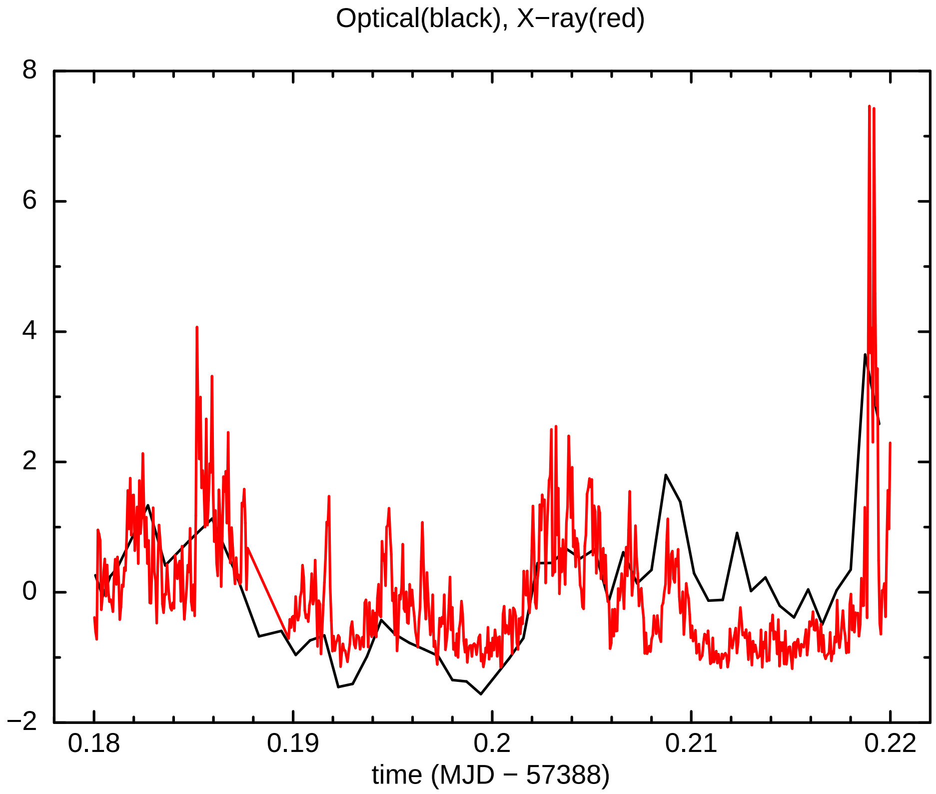

図 2: term1, standardized light curve

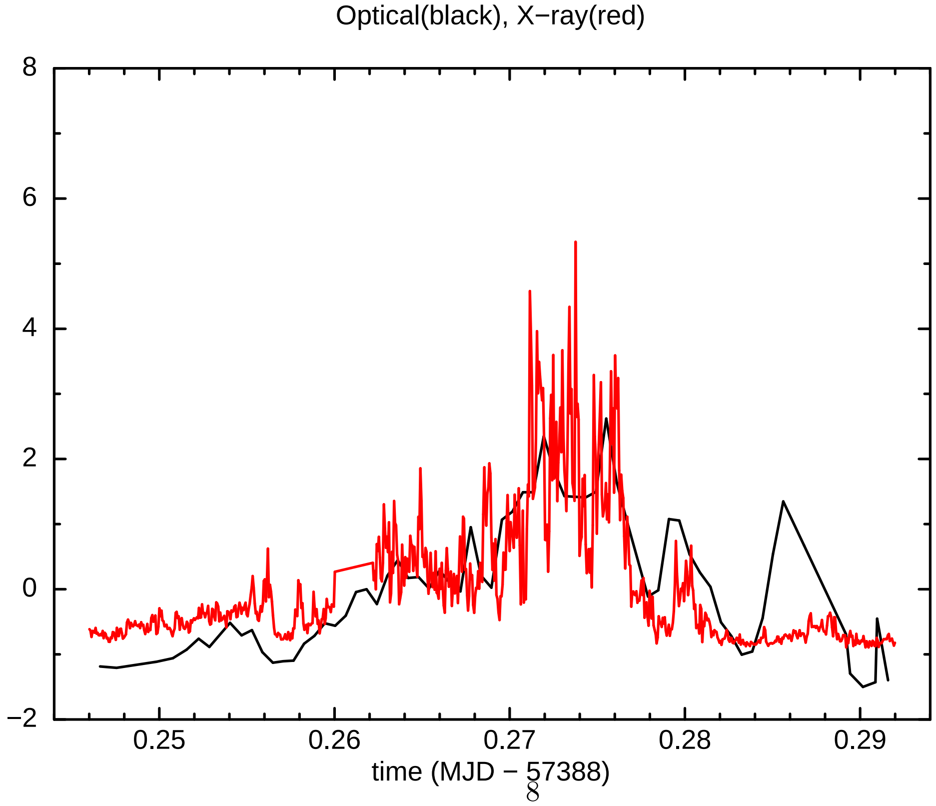

図 3: term2, standardized light curve

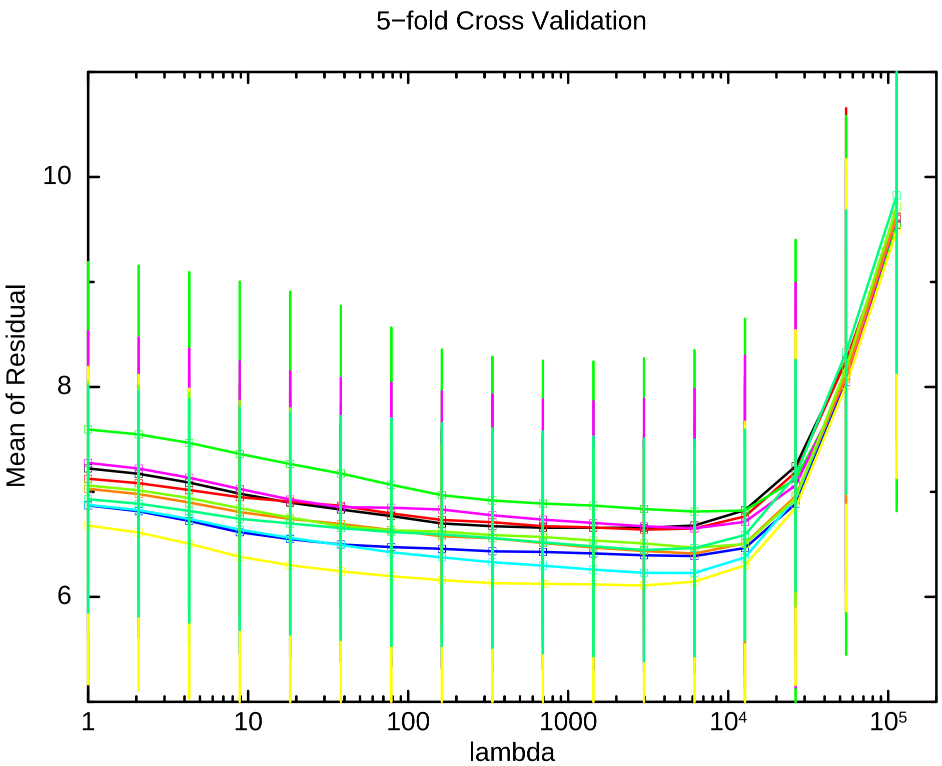

図 4: term1, cross validation

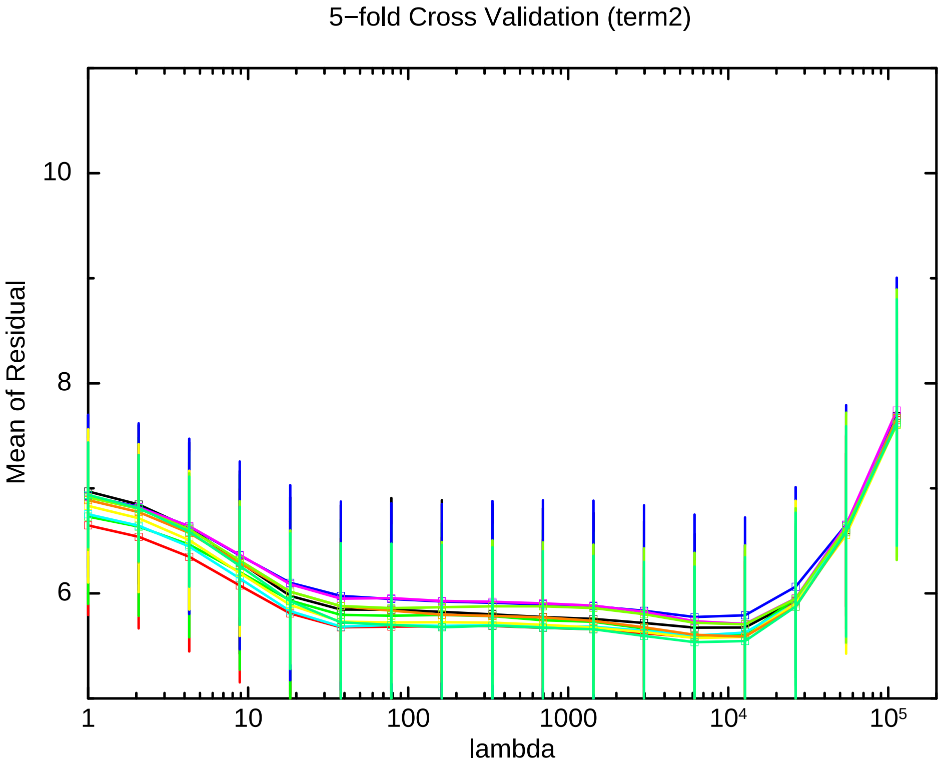

図 5: term2, cross validation

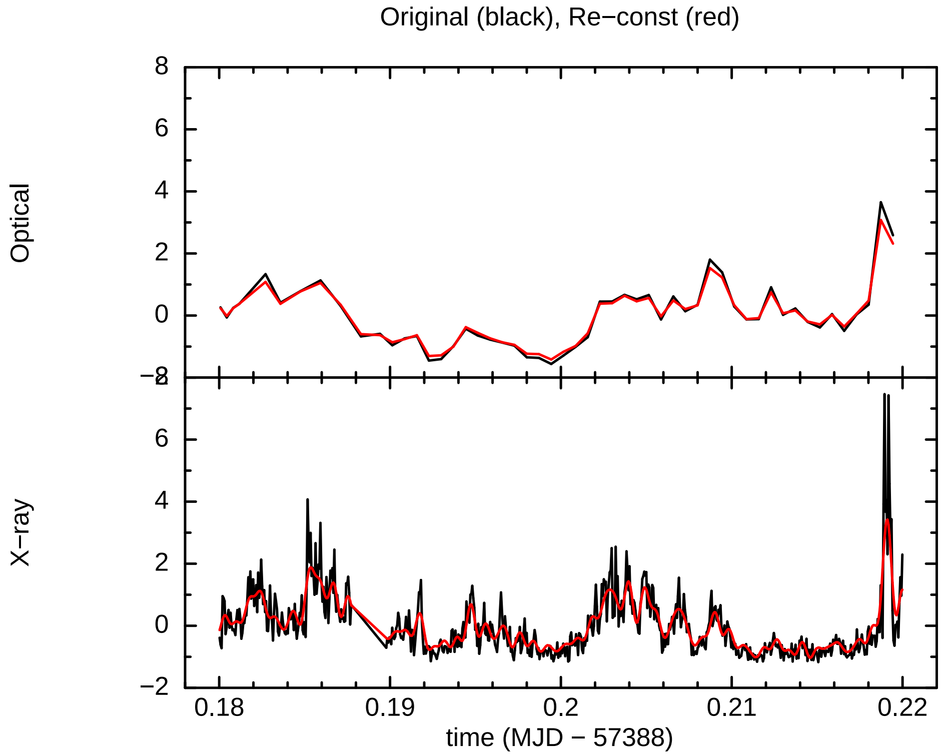

図 6: term1, comparison between original and re-constructed light curves

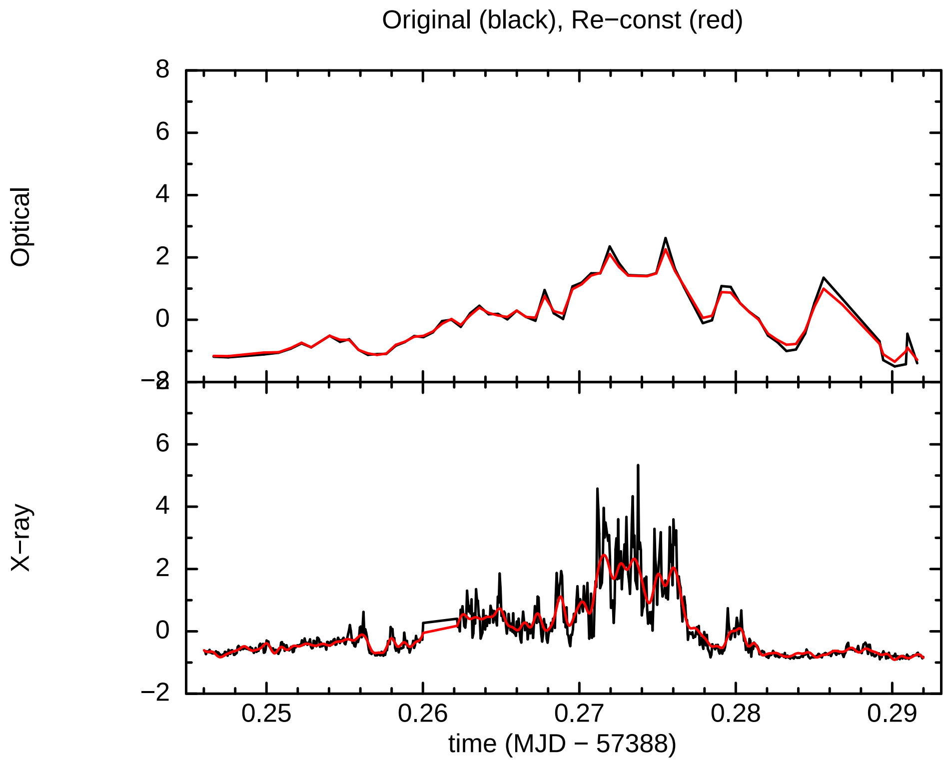

図 7: term2, comparison between original and re-constructed light curves

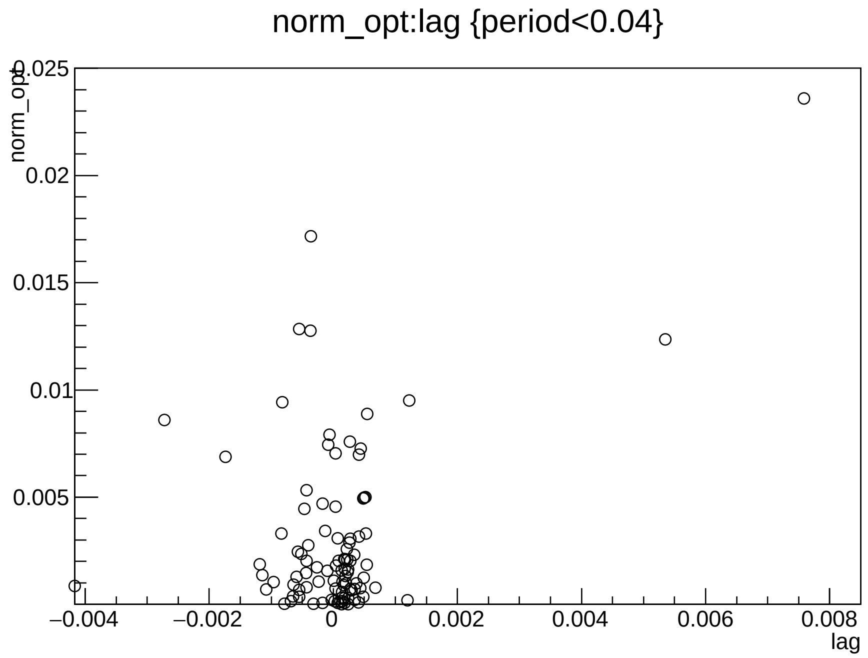

図 8: term1, power of components v.s. lag (optical)

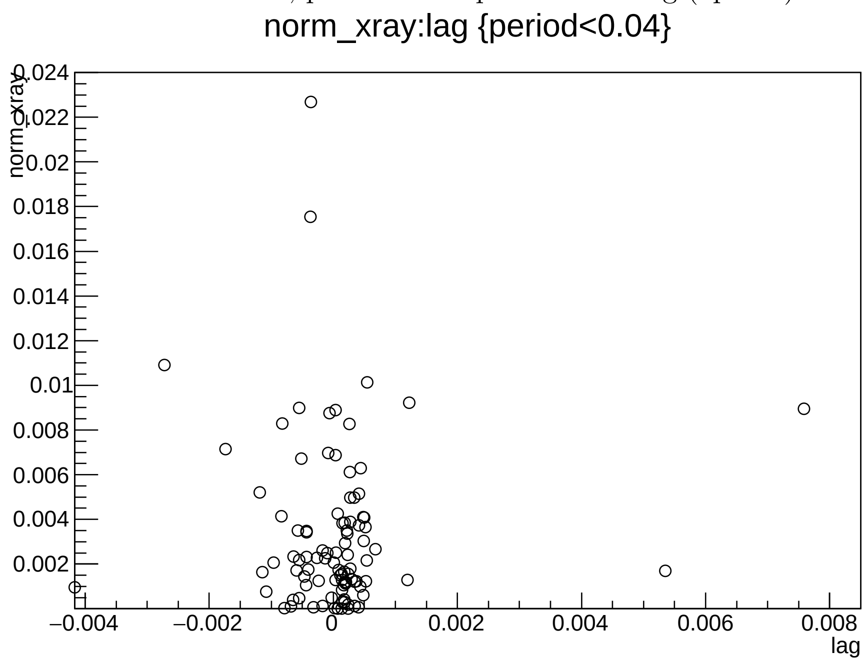

図 9: term1, power of components v.s. lag (x-ray)

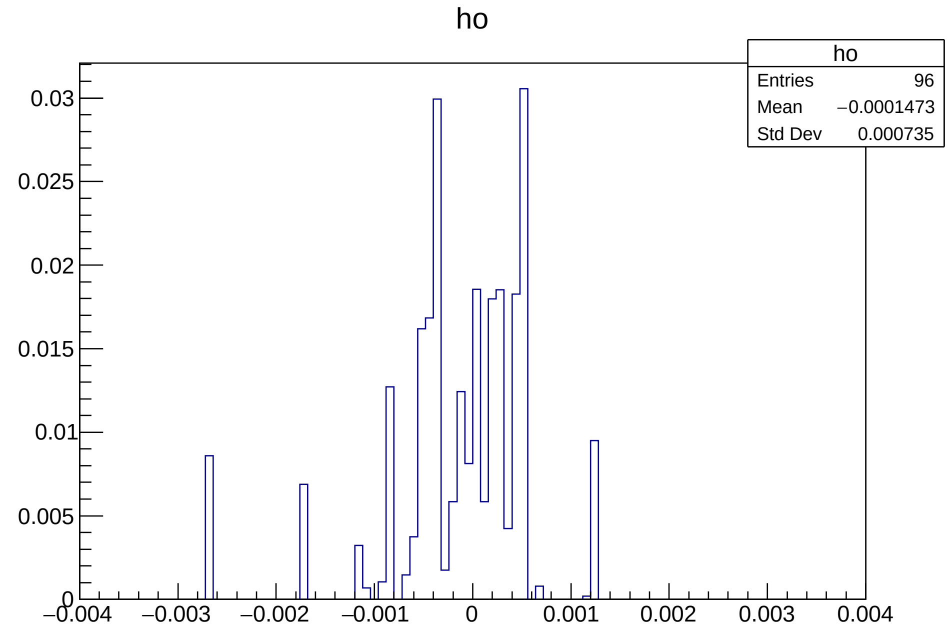

図 10: term1, histogram of lag weighted by power of components (optical)

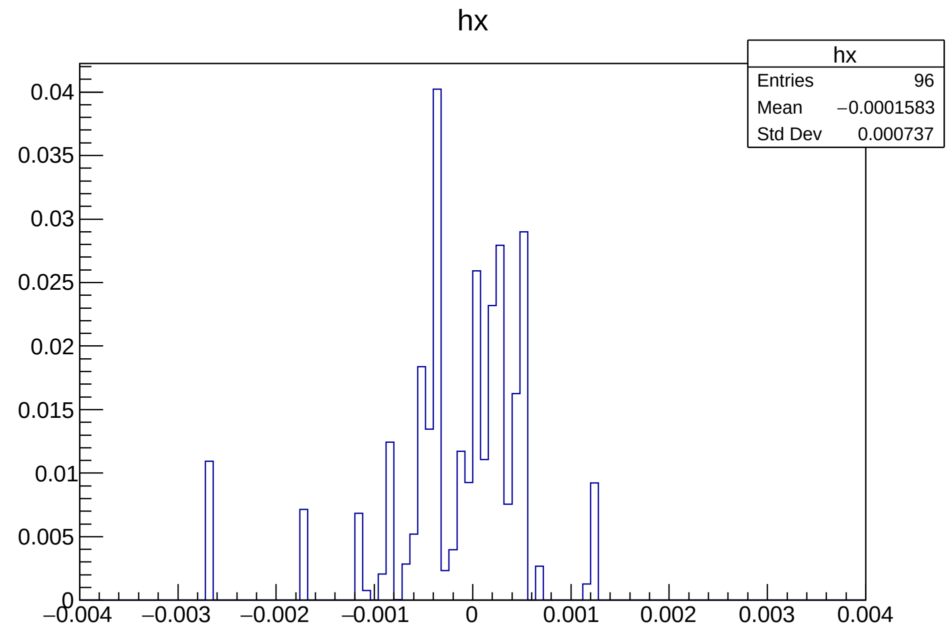

図 11: term1, histogram of lag weighted by power of components (X-ray)

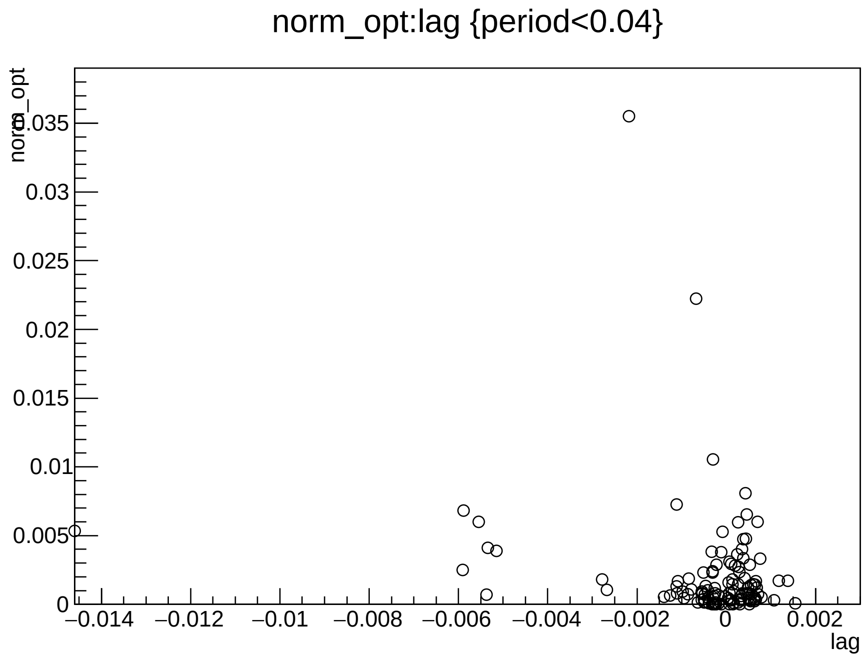

図 12: term2, power of components v.s. lag (optical)

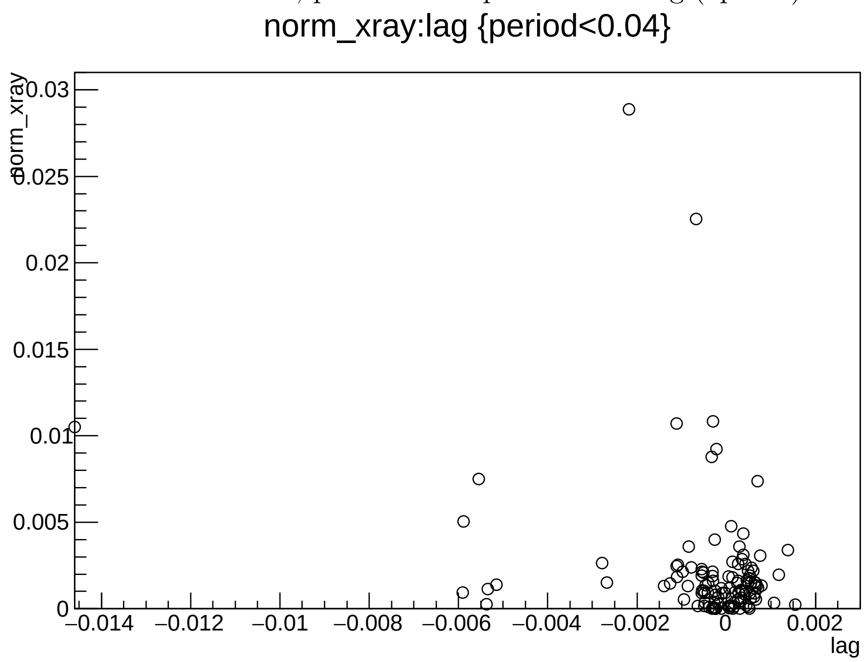

図 13: term2, power of components v.s. lag (x-ray)

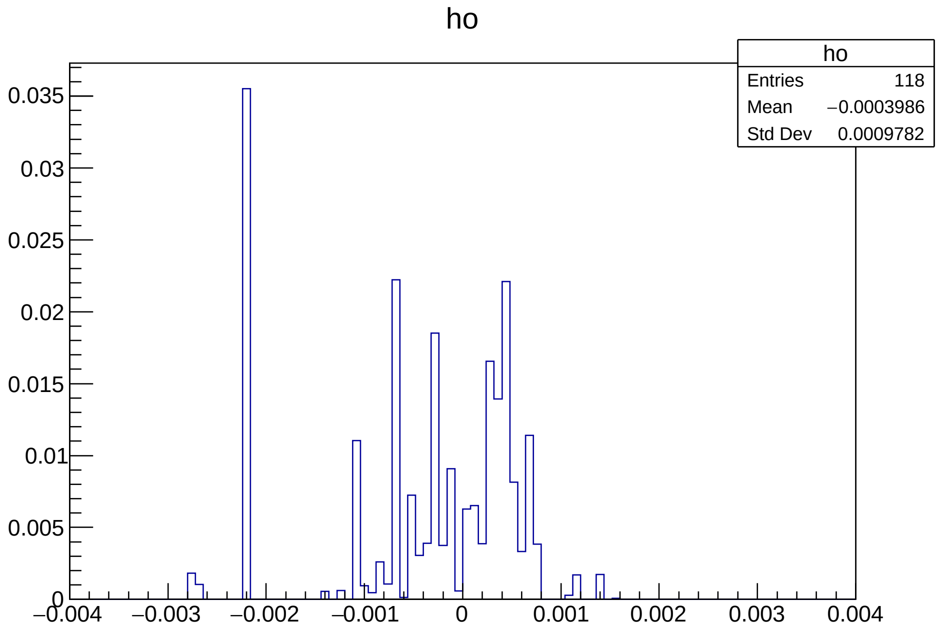

図 14: term2, histogram of lag weighted by power of components (optical)

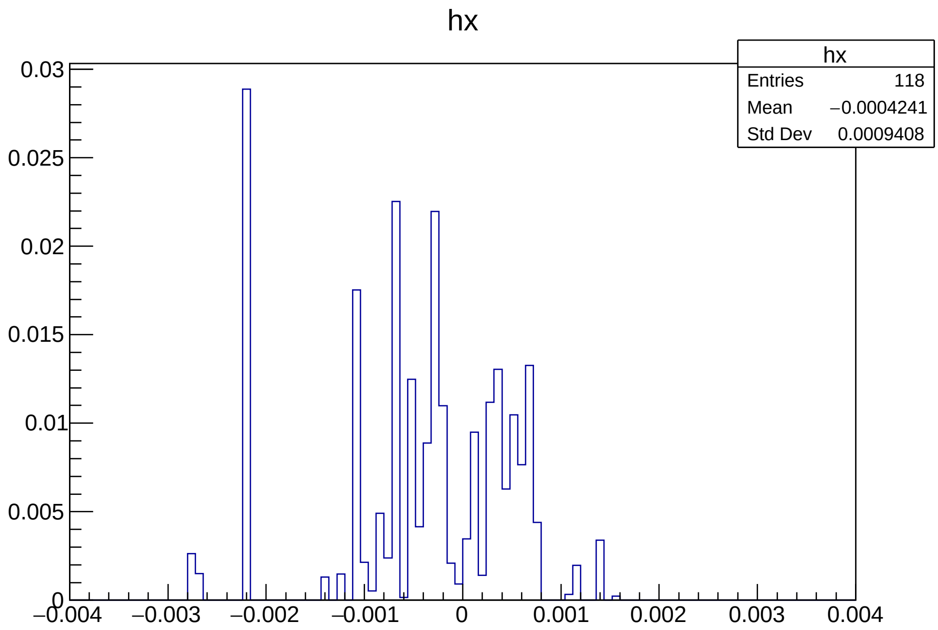

図 15: term2, histogram of lag weighted by power of components (X-ray)

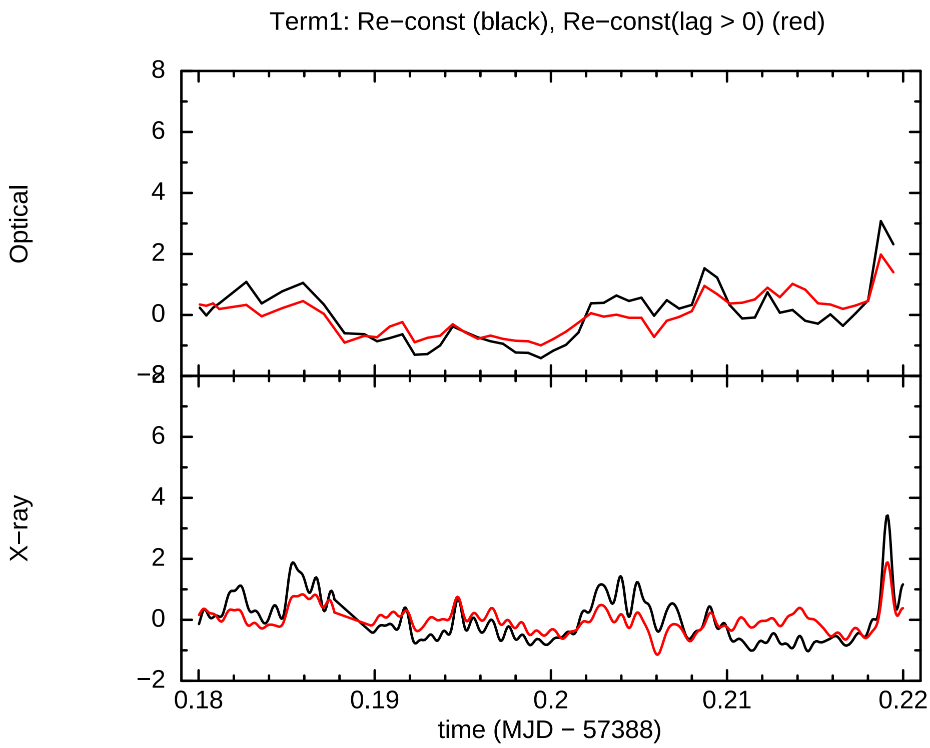

図 16: term1, comparison between re-constructed and re-constructed light curves only using lag plus component

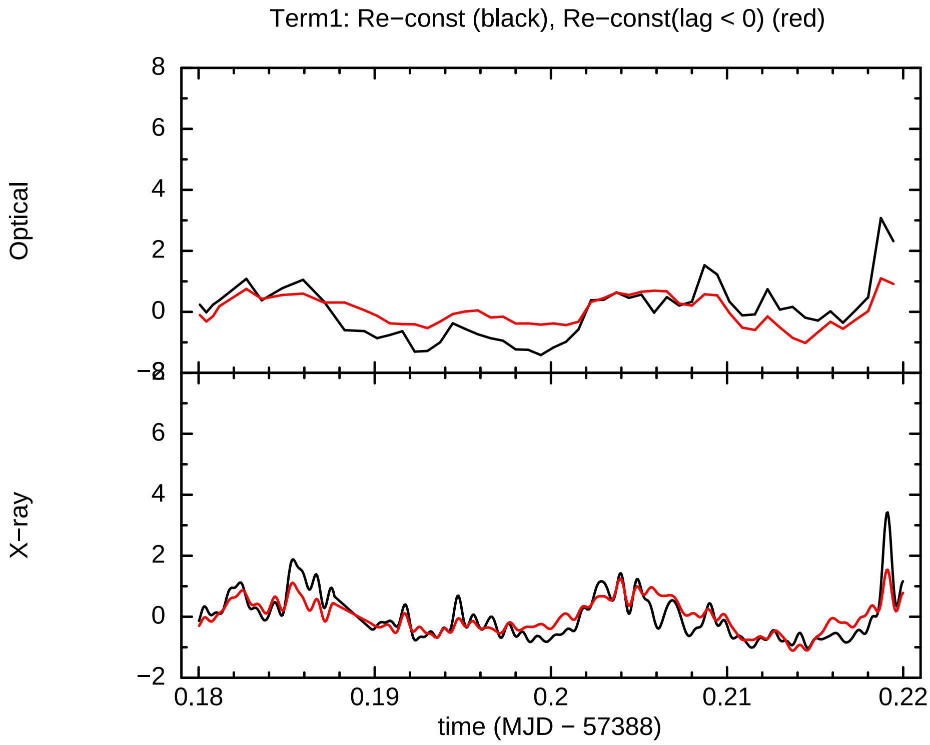

図 17: term1, comparison between re-constructed and re-constructed light curves only using lag minus component

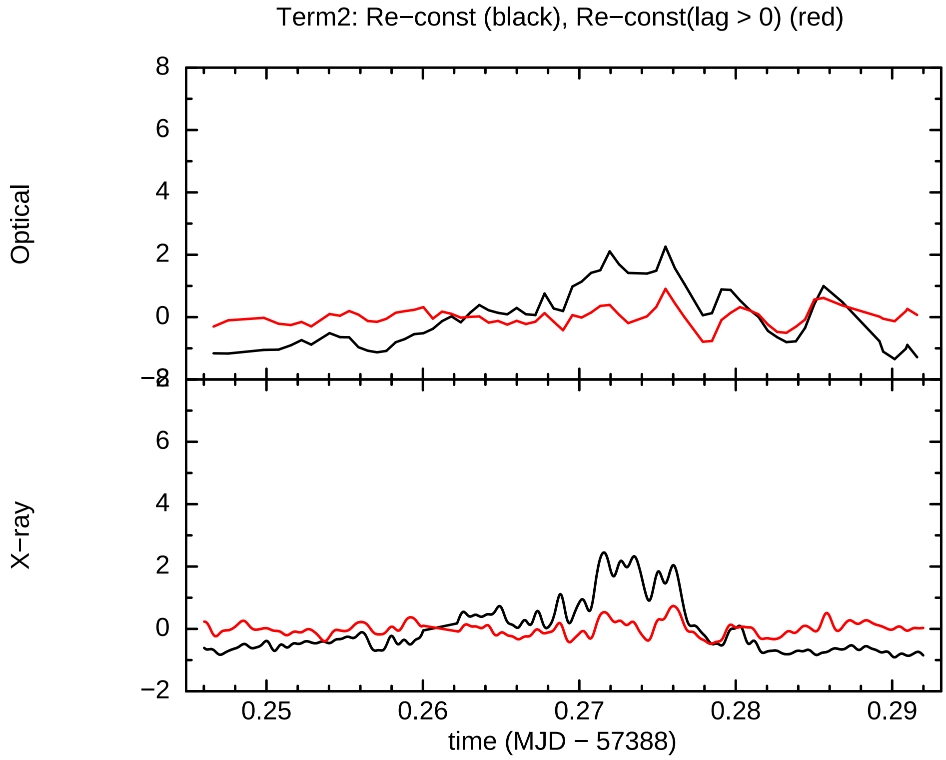

図 18: term2, comparison between re-constructed and re-constructed light curves only using lag plus component

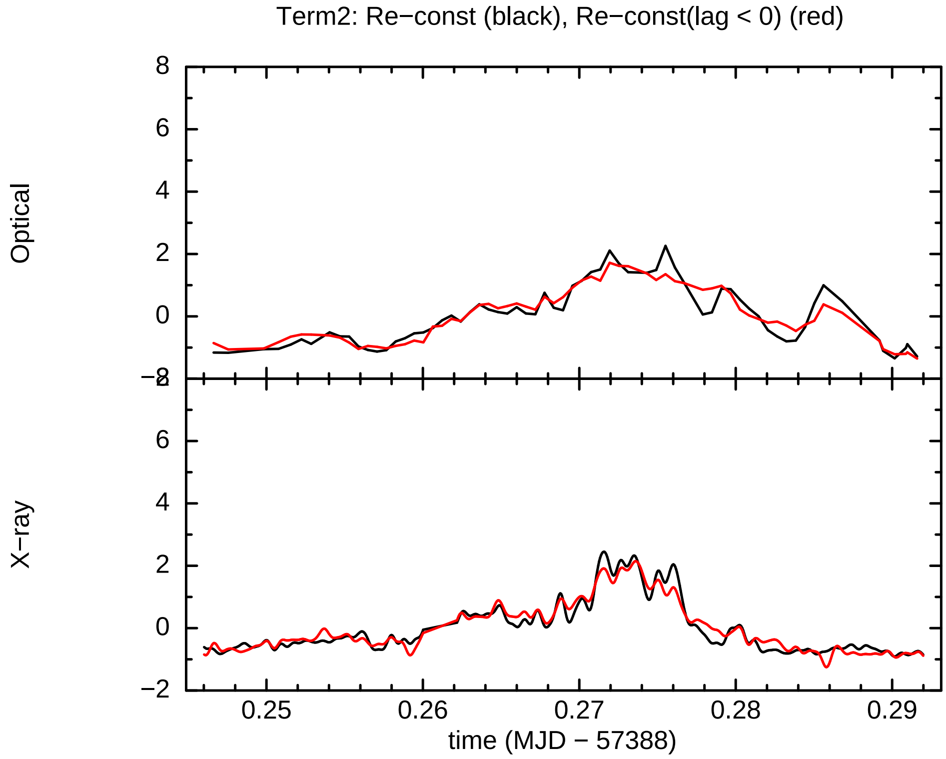

図 19: term2, comparison between re-constructed and re-constructed light curves only using lag minus component

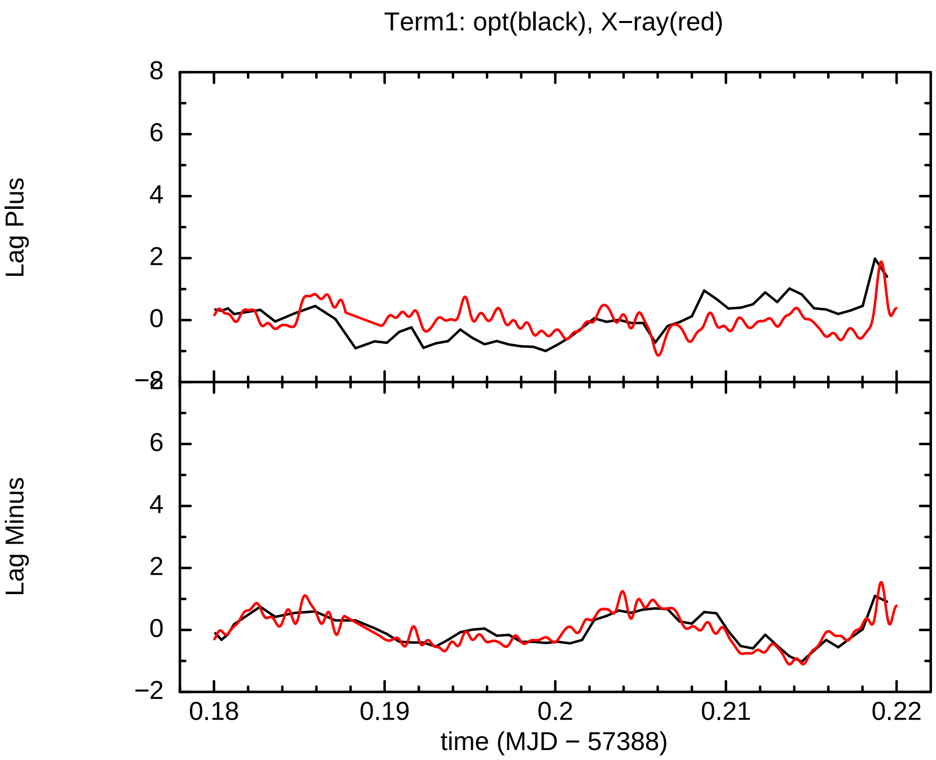

図 20: term1, comparison of optical and X-ray light curve for lag plus component and lag minus component

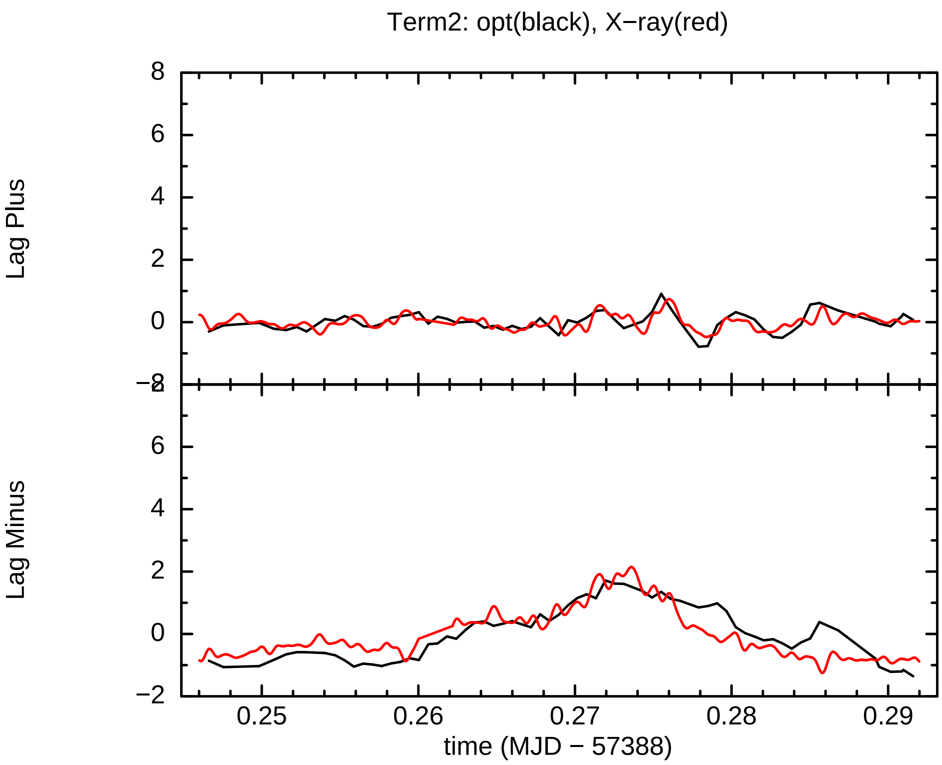

図 21: term2, comparison of optical and X-ray light curve for lag plus component and lag minus component

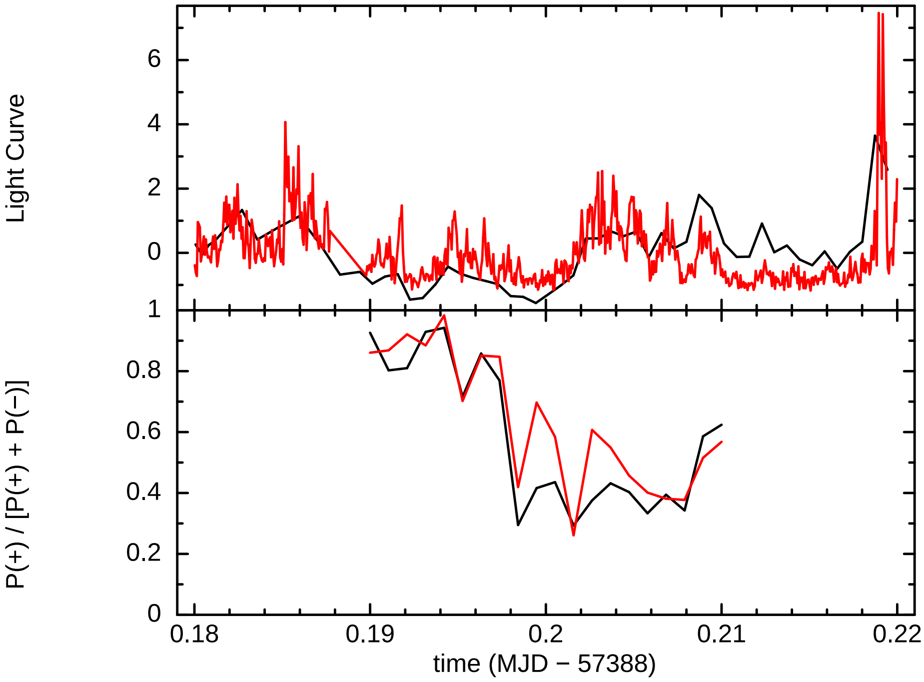

図 22: term1, Ratio of power of lag plus in all power. Black: optical, Red: X-ray

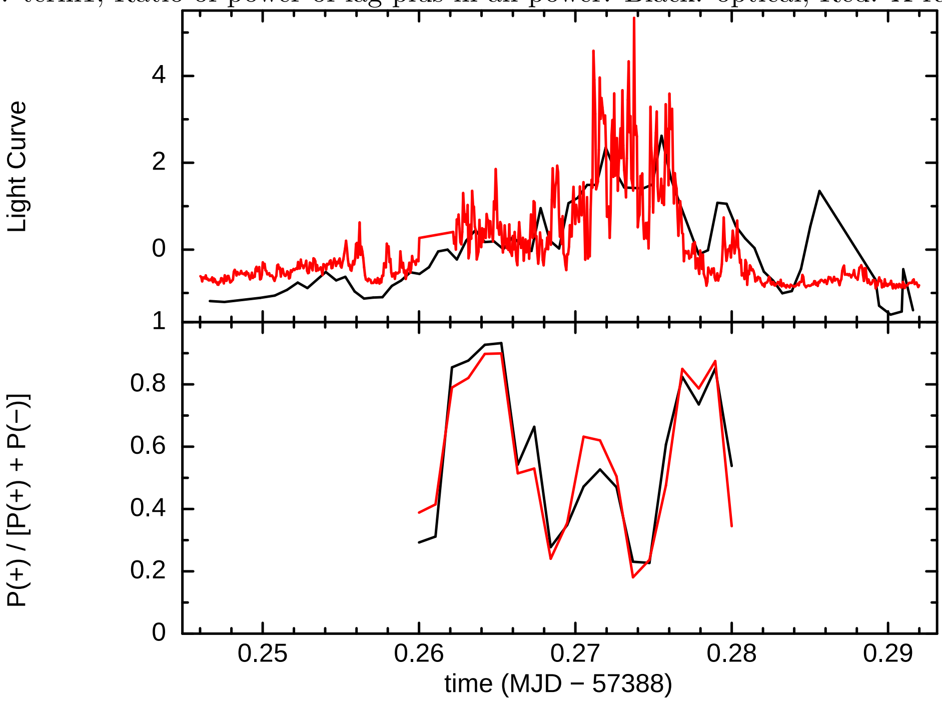

図 23: term2, Ratio of power of lag plus in all power. Black: optical, Red: X-ray