Théorie des graphes – Partie 01
Introduction à la théorie des graphes

Génie Informatique – 1

Pr. Abdelmajid Dargham

Définitions générales

Introduction

- Historiquement, la recherche en **théorie des graphes** a commencé en 1736 avec le mathématicien suisse **Leonhard Euler**.
- Le premier livre sur cette théorie a vu le jour en 1936. Celui-ci a été écrit par **Dénies König**.
- Au départ, les **graphes** ont été utilisé en mathématiques comme un **outil** pour résoudre certains problèmes de **jeux logiques**.
- L'étude systématique de la **théorie des graphes** a commencé à partir de la seconde moitié du 20ème siècle.
- Aujourd'hui c'est une **théorie** foisonnante aux frontières de domaines plus classiques tels que la topologie, l'algèbre, la géométrie, l'algorithmique et ses applications.

Introduction

- D’une manière générale, un **graphe** est un concept mathématique qui représente un **ensemble d’objets** (plus ou moins complexes) en exprimant des **relations** entre les éléments de cet ensemble.
- Tous les objets du monde réel sont liés les uns aux autres, d’une manière ou d’autres :
  - Les villes sont liées par des routes, des chemins de fer, des lignes de TGV ou des réseaux aériens.
  - Les pages Web sur Internet sont liées par des hyperliens.
  - Les téléphones portables sont interconnectés aux réseaux de communication.
  - Les composants d’un ordinateur sont liés par des circuits électriques.

Introduction

- Les ingénieurs et les scientifiques ont besoin :
  - de découvrir les objets et leurs liens;
  - d’analyser ces liens;
  - d’optimiser ces liens.
- La **théorie des graphes** fournit le cadre théorique pour atteindre ces besoins, avec d’énormes résultats et algorithmes.

Graphes non orientés

- Un **graphe non orienté**, ou simplement **graphe**, est un couple G = (V, E), où :
  - V $\neq \emptyset$ est l'ensemble des **sommets**.
  - E est un ensemble de **paires de sommets** et appelé ensemble des **arêtes**.

$$E \subseteq \{\{x, y\} \mid (x, y) \in V^2\}$$

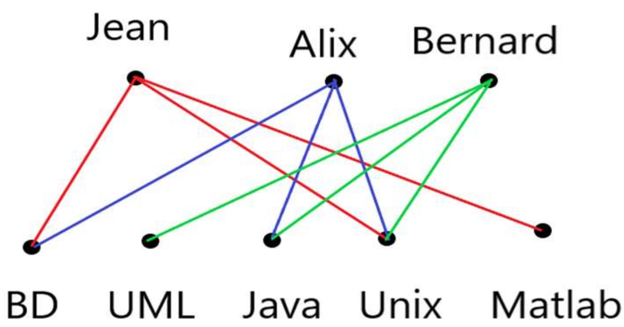
- Dans ce cours, on suppose que V et E sont **finis**.
- Le **graphe** est dit **vide** si E = $\emptyset$.
- Pour un graphe G, on note **V(G)** l'ensemble de ses sommets et **E(G)** l'ensemble de ses arêtes.

Graphes non orientés

- Un **sommet** modélise un **objet**, alors qu'une **arête** modélise une **relation sémantique** entre deux objets.
- **Exemple** 1 :
  - Trois professeurs « Alix », « Bernard » et « Jean » doivent choisir trois modules à enseigner parmi cinq : « BD », « UML », « Java », « Unix » et « Matlab ».
  - « Alix » a choisi « BD », « Java » et « Unix ».
  - « Bernard » a choisi « UML », « Java » et « Unix ».
  - « Jean » a choisi « BD », « Unix » et « Matlab ».

Graphes non orientés

- Le graphe suivant modélise bien les choix des trois professeurs :

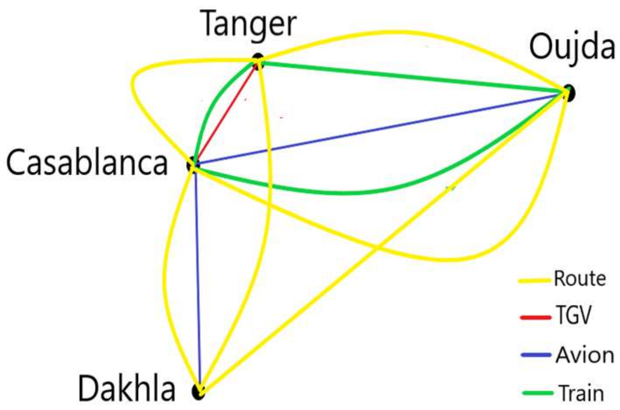


- Ce graphe est bien remarquable : il s'agit d'un graphe **biparti**.

Graphes non orientés

- **Exemple** 2 :
  - Les quatre villes du Maroc Tanger, Casablanca, Oujda et Dakhla sont reliées par les quatre moyens de transport Avion, Route, TGV et Train.
  - Seules les villes Tanger et Casablanca ont une liaison par TGV.
  - D'autre part, il y a deux liaisons aériennes : Casablanca-Dakhla et Casablanca-Oujda.
  - Il n'y a pas de train qui relie à la ville de Dakhla.
  - Cette situation peut être représentée par le graphe suivant :

Graphes non orientés



- Ce graphe est aussi remarquable : il s'agit d'un **multi-graphe**.

Graphes non orientés

- L'**ordre** d'un **graphe** G = (V, E) est le nombre n = |V| de ses **sommets**.
- Ainsi, l'ensemble V est en bijection avec l'ensemble {1, 2, …, n}.
- La **taille** d'un **graphe** G = (V, E) est le nombre m = |E| de ses **arêtes**.
- Un **graphe** est souvent **représenté visuellement** par un ensemble de **points** dont certains sont **connectés** par des **lignes**, où :
  - chaque **point** représente un **sommet** du **graphe**.
  - chaque **ligne** représente une **arête** du **graphe**.

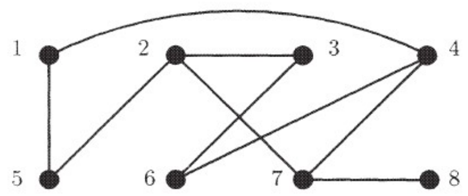
Exemple

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$E = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 6\}, \{4, 7\}, \{7, 8\}\}$

Le **graphe** G est d'**ordre** 8 et de **taille** 9.

Une **représentation visuelle** du **graphe** G :



Graphes non orientés

- Dans ce qui suit, nous présentons une large **vocabulaire** des **graphes**.

Voisinage, degré

Soient $G = (V,\ E)$ un **graphe** et x, y deux sommets de G.

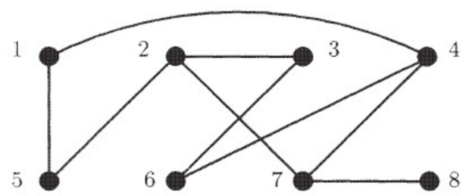
On dit que x et y sont **adjacents** ou **voisins**, si $\{x,\ y\} \in E$.

On dit aussi que l'arête $\{x,\ y\}$ est **incidente** à x et à y, et que x et y sont les **extrémités** de l'arête $\{x,\ y\}$.

Le **degré** d'un sommet x, noté $\delta(x)$, est le nombre d'**arêtes incidentes** à x.

Le **voisinage** d'un sommet x, noté $\mathcal{N}(x)$, est l'ensemble de ses **voisins**.

Exemple



$$\delta(1) = 2 \qquad \mathcal{N}(1) = \{4, 5\}$$

$$\delta(2) = 3 \qquad \mathcal{N}(2) = \{3, 5, 7\}$$

$$\delta(8) = 1 \qquad \mathcal{N}(8) = \{7\}$$

Graphe simple, multigraphe

Un **sommet** x est dit **isolé**, si $\delta(x) = 0$ (ou $\mathcal{N}(x) = \emptyset$).

Une **boucle** est une **arête** de la forme $\{x,\ x\}$.

On dit que $\{x,\ y\}$ est une **multi-arête**, si $\{x,\ y\}$ apparaît au moins deux fois dans G.

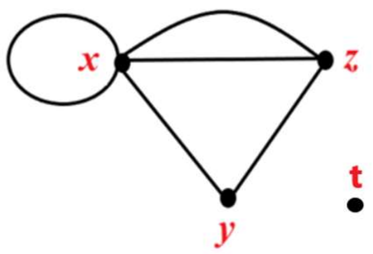
Un **multigraphe** est un graphe qui contient au moins une multi-arête.

Un graphe est **simple** s'il ne contient ni boucles, ni multi-arêtes.

Dans un graphe **simple**, on a : $\delta(x) = |\mathcal{N}(x)|$, $(\forall x \in V)$.

Exemple

On dit que les arêtes $\{x,\ y\}$ et $\{y,\ z\}$ sont **adjacentes** car elles ont un sommet commun y.



$\delta(t) = 0 \qquad \mathcal{N}(t) = \emptyset$

t est un sommet **isolé**

$\{x,\ x\}$ est une **boucle** : $\delta(x) = 5$

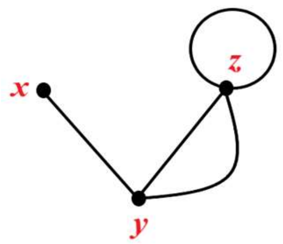
$\{x,\ z\}$ est une **multi-arête**

Le graphe est un **multigraphe**

Sommet pendant, arrête pendante

Un sommet **pendant** est un sommet x de degré 1.

Une arête **pendante** est une arête incidente à un sommet pendant.



Le sommet x est **pendant**

L'arête $\{x,\ y\}$ est **pendante**

Degré minimum, maximum & moyen

Degré minimum d'un graphe G :

$$\delta(G) = \inf_{x \in V(G)} \delta(x)$$

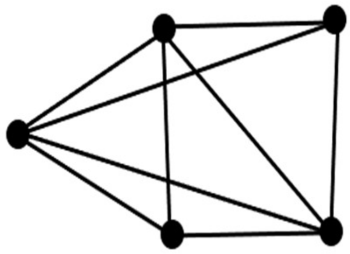
Degré maximum d'un graphe G :

$$\Delta(G) = \sup_{x \in V(G)} \delta(x)$$

Degré moyen d'un graphe G :

$$d(G) = \frac{\sum_{x \in V(G)} \delta(x)}{|V|}$$

Exemple



$\delta(G) = 3$

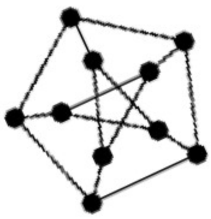
$\Delta(G) = 4$

$$d(G) = \frac{4+4+3+4+3}{5} = \frac{18}{5} = 3.6$$

Graphe régulier

Un graphe est **régulier** si tous ses sommets sont de même degré.

Un graphe est k-**régulier** si le degré de chaque sommet est k.



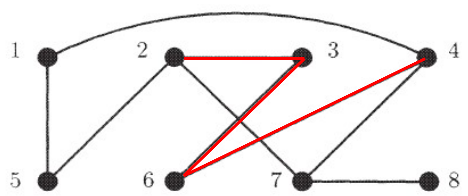
Un graphe 3-**régulier**

Chaîne

Une **chaine** de longueur k est une suite de sommets x_0, x_1, ..., x_k tels que $\{x_i,\ x_{i+1}\} \in E$, pour tout i, $0 \leq i \leq k-1$.

Une telle **chaine** est notée $(x_0,\ x_1,\ ...,\ x_k)$.

x_0 et x_k sont les **extrémités** de la chaîne $(x_0,\ x_2,\ ...,\ x_k)$.



(2, 3, 6, 4) est une chaine de longueur 3

Chaîne simple, élémentaire, fermée et cycle

Une **chaîne** est dite **simple** si elle ne contient pas deux fois une même arête.

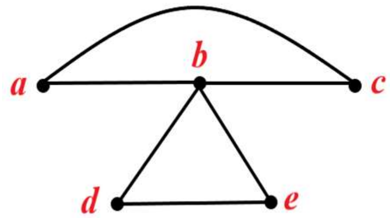
Une **chaîne** est dite **élémentaire** si elle ne contient pas deux fois le même sommet.

Notons qu'une **chaîne élémentaire** est **simple**.

Une **chaîne** est dite **fermée** si ses deux extrémintés coïncident.

Un **cycle** est une **chaîne simple fermée**.

Exemples



(a, b, d, e) est une **chaîne élémentaire**

(a, b, d, e, b, c) est une **chaîne simple non élémentaire**

(a, b, d, e, b, a, c) est une **chaîne non simple**

(a, b, d, b, a) est une **chaîne fermée simple** qui n'est pas un **cycle**.

(a, b, c, a) est un **cycle**.

Sous-graphe, graphe partiel et sous-graphe induit

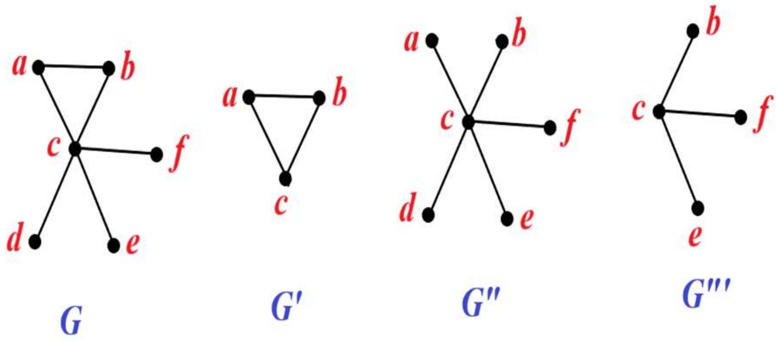
Un graphe $G' = (V',\ E')$ est un **sous-graphe** d'un graphe $G = (V,\ E)$ si $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$.

Un graphe $G' = (V',\ E')$ est un **graphe partiel** d'un graphe $G = (V,\ E)$ si G' est un sous-graphe de G, avec $V' = V$.

Un graphe **partiel** est donc obtenu à partir d'un graphe en effaçant quelques une de ces arêtes.

Lorsqu'on garde toutes les arêtes de G entre les sommets de $V' \subseteq V$, on dit que le graphe $G' = (V',\ E')$ est le **sous-graphe induit** par V'.

Exemple



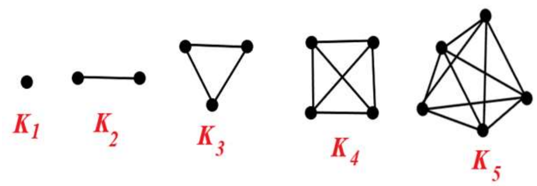
Un **graphe** G, avec un **sous-graphe** (G'), un **graphe partiel** $(G")$ et le **sous-graphe induit** par $\{b, c, e, f\}$ $(G"')$

Graphe complet

Un **graphe simple** est dit **complet** si :

$$\{x, y\} \in E,\ (\forall x, y \in V),\ \text{tels que } x \neq y$$

On note K_n le **graphe complet** d'ordre n.

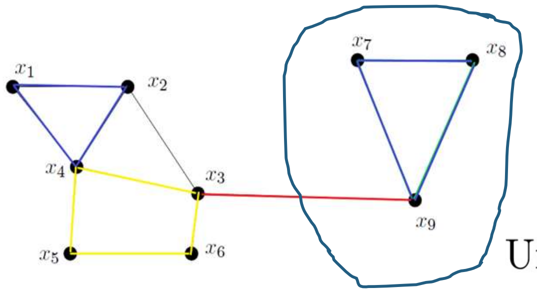


Les **graphes complets** K_1, K_2, K_3, K_4 et K_5.

Clique

Une **clique** dans un graphe G est un **sous-graphe complet** de G.

L'**ordre maximal** d'une **clique** dans un graphe G est noté $\omega(G)$.



$\omega(G) = 3$

Une clique de G

Graphe connexe, composantes connexes

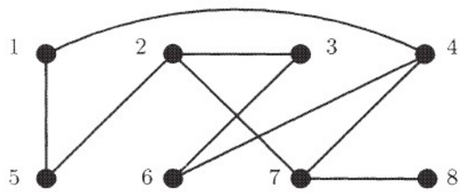
Un graphe est dit **connexe**, si pour toute paire de sommets x, $y \in V$, il existe une **chaîne** entre x et y : on dit alors que les sommets x et y sont **connectés**.

La relation binaire R définie sur V par : $x\ R\ y$, si et seulement si : $x = y$ ou bien il existe une chaîne entre x et y est une **relation d'équivalence** sur V.

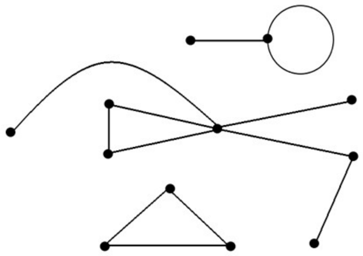
Les classes d'équivalences modulo R sont appelées les **composantes connexes** du graphe.

Un graphe G est dit **connexe** si G ne possède qu'une seule composante connexe.

Exemples



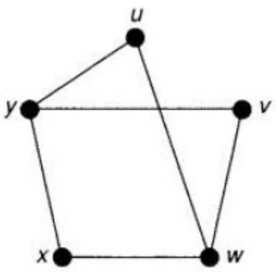
Un graphe **connexe**.



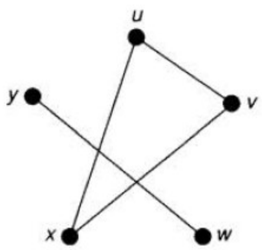
Un graphe non **connexe** ayant 3 **composantes connexes**

Complément d'un graphe

Le **complément** d'un graphe $G = (V,\ E)$ est le graphe $G' = (V',\ E')$ tel que : $V' = V$ et $a \in E'$, si et seulement si $a \notin E$.



Un graphe

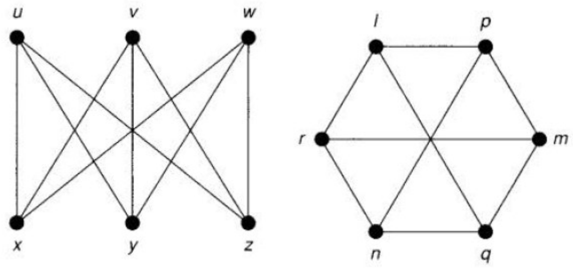


Son **complément**

Graphes isomorphes

Deux graphes $G_1 = (V_1,\, E_1)$ et $G_2 = (V_2,\, E_2)$ sont dits **isomorphes**, s'il existe une bijection ϕ de V_1 vers V_2 telle que :

$$(\forall (x, y) \in V_1^2) : [\{x,\ y\} \in E_1 \iff \{\phi(x),\ \phi(y)\} \in E_2]$$



$$\phi(u) = l \qquad \phi(x) = p$$
$$\phi(v) = m \qquad \phi(y) = q$$
$$\phi(w) = n \qquad \phi(z) = r$$

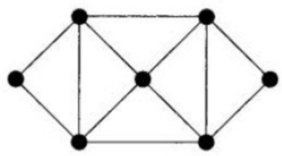
Deux graphes **isomorphes**

Graphe Eulérien

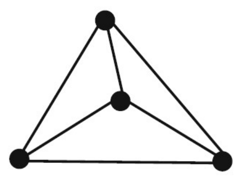
Une **chaîne Eulérienne** est une **chaîne** qui passe une et une seule fois par chaque **arête** du graphe.

Si cette **chaîne** est un **cycle**, on parle de **cycle Eulérien**.

Un **graphe Eulérien** est un graphe qui contient au moins un **cycle Eulérien**.



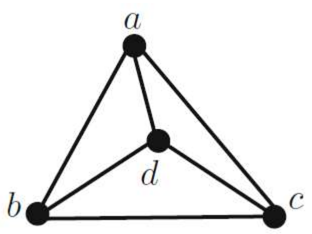
Un graphe **Eulérien**



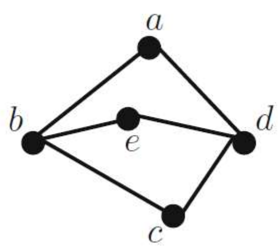
Un graphe non **Eulérien**

Graphe Hamiltonien

Un **cycle Hamiltonien** est un **cycle** passant une fois et une seule par **chaque sommet** du graphe.



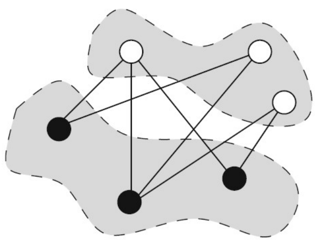
Un graphe **Hamiltonien**



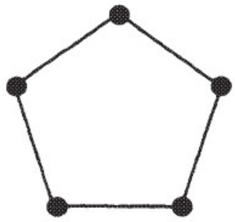
Un graphe non **Hamiltonien**

Graphe biparti

Un graphe $G = (V, E)$ est **biparti**, s'il existe une partition de V en deux sous-ensembles V_1 et V_2, telle qu'il n'y a aucune arête entre deux sommets quelconques de V_1 et V_2.



Un graphe **biparti**

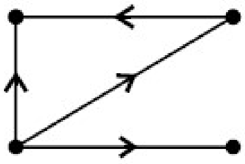


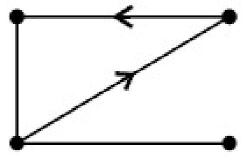
Un graphe non **biparti**

Graphes orientés, graphes mixtes

- Un **graphe orienté** (ou **digraphe**) est un graphe pour lequel il y a une orientation pour ses arêtes.
- Formellement, un **digraphe** est un couple G = (V, E), où :
  - $V \neq \emptyset$ est l'ensemble des **sommets**.
  - $E \subseteq \{(x, y) \mid x, y \in V\}$ est un ensemble de **couples de sommets**.
- Les éléments de E s'appellent des **arcs**.
- Dans un **graphe non orienté**, les sommets d'une arête jouent des rôles **symétriques**, et ce n'est pas le cas pour un graphe orienté.
- Un **graphe mixte** est un graphe dans lequel certaines arêtes sont orientées, alors que d'autres sont non orientées.

Exemples

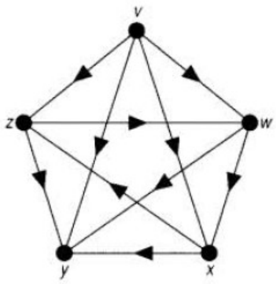

Un graphe **orienté**


Un graphe **mixte**

Graphe tournoi

Un graphe **tournoi** est un graphe **orienté** dans lequel chaque pair de sommets sont reliés exactement par un **seul arc**.

Un tel graphe est **complet** et peut être utilisé pour modéliser des tournois (un tournoi de tennis par exemple).



Un graphe **tournoi**

Terminologie des graphes orientés

Dans un **arc** (x, y), le sommet x est l'**origine** de l'arc, et y est l'**extréminté** de l'arc.

Une **chaîne** $\Rightarrow$ un **chemin**.

Une **chaîne élémentaire** $\Rightarrow$ un **chemin élémentaire**.

Une **chaîne simple** $\Rightarrow$ un **chemin simple**.

Une **chaîne fermée** $\Rightarrow$ un **chemin fermé**.

Un **cycle** $\Rightarrow$ un **circuit**.

Un **cycle Eulérien** $\Rightarrow$ un **circuit Eulérien**.

Un **cycle Hamiltonien** $\Rightarrow$ un **circuit Hamiltonien**.

Terminologie des graphes orientés

Si (x, y) est un **arc**, on dit que x est un **prédécesseur** de y, et y est un **successeur** de x.

On note $\Gamma^+(x)$ l'ensemble de tous les **successeurs** de x.

On note $\Gamma^-(x)$ l'ensemble de tous les **prédécesseurs** de x.

$$\Gamma^+(x) = \{y \in V \mid (x,\ y) \in E\}$$

$$\Gamma^-(x) = \{y \in V \mid (y,\ x) \in E\}$$

Un **voisin** de x est soit un prédécesseur de x ou un successeur de x.

On note $\mathcal{N}(x)$ l'ensembe des **voisins** de x : $\mathcal{N}(x) = \Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)$.

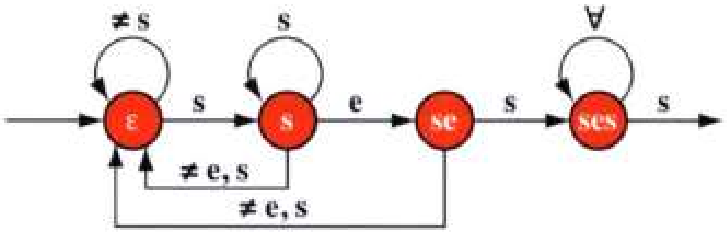
Graphe étiqueté, graphe pondéré

Un graphe **étiqueté** est un graphe où chaque **arête** (ou **arc**) porte une **étiquette** (ou label).

Un graphe **pondéré** (ou **valué**) est un graphe où à chaque **arête** (ou **arc**) est attribuée une **valeur** (poids ou coût).

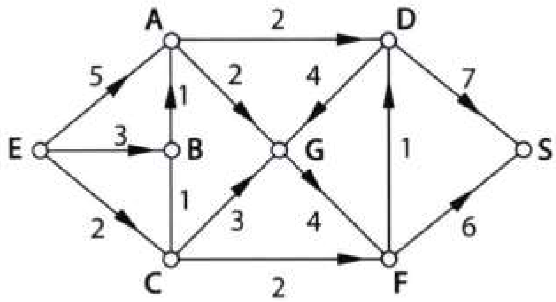
Une **pondération** (ou **fonction de coût**) est une fonction qui associe à chaque **arête** (ou **arc**) une **valeur**.

Exemples



Un graphe orienté **étiqueté** (un automate d'états finis)

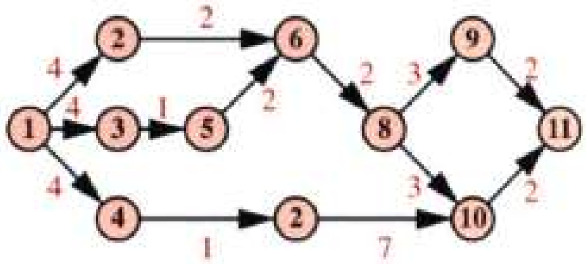
Exemples



Un graphe orienté **pondéré**

Graphe orienté acyclique

Un graphe **orienté acyclique** est un graphe orienté sans cycle (*Directed Acyclic Graph*).



Un graphe **orienté aycylique**

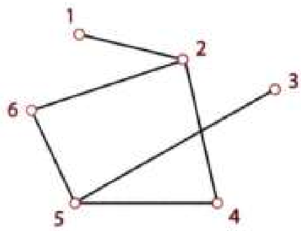
Représentation mémoire

Matrice d'adjacence

- Cas d'un **graphe non orienté** :

$$A_{ij} = 1 \Longleftrightarrow \{i,\ j\} \in E$$
$$A_{ij} = 0 \Longleftrightarrow \{i,\ j\} \notin E$$

Si le graphe est **connexe**, la **matrice d'adjacence** M est **symétrique**.



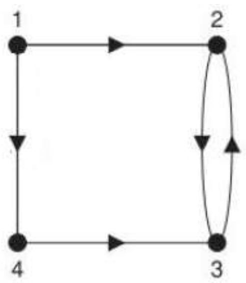
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice d'adjacence

- Cas d'un **graphe orienté** :

$$A_{ij} = 1 \Longleftrightarrow (i,\ j) \in E$$
$$A_{ij} = 0 \Longleftrightarrow (i,\ j) \notin E$$

En général, la **matrice d'adjacence** M n'est pas symétrique.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Avantages de la représentation matricielle

- **Facilité** d'**implémentation** et d'**utilisation**.
- **Accès direct** aux **arêtes** (ou **arcs**) : la recherche, l'ajout et la suppression d'une arête se font alors en temps constant **O(1)**.
- L'**écriture** des **algorithmes** est généralement **simplifiée** : l'accès aux successeurs (ou prédécesseurs) d'un sommet est aisé (**parcours** d'une **ligne** ou d'une **colonne** de la matrice).

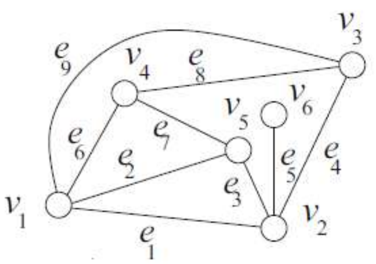
Inconvénients de la représentation matricielle

- **Encombrement maximal** de la **mémoire** : quelque soit le nombre d'arêtes figurant dans le graphe, la place mémoire nécessaire est en **$O(n^2)$**, où « n » est l'ordre du graphe.
- Il y a un **cas gênant** : lorsque la **taille** du graphe est **négligeable** devant son **ordre**.
- Nécessite un coût **$O(n^2)$** de l'**initialisation**.
- Coût de la recherche des successeurs d'un sommet en **O(n)** : même s'il n'a pas de successeurs.

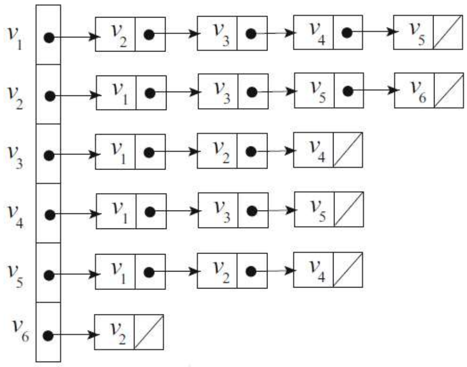
Liste d'adjacence

- La **représentation matricielle** s'adapte mal aux problèmes **dynamiques**.
- Dans ce cas, on peut choisir une **représentation** à l'aide de « n » **listes chaînées**, où « n » est l'ordre du graphe.
- Chaque **liste** stocke les **successeurs** d'un sommet particulier du graphe.
- Le graphe sera alors représenté par un **tableau** de « n » cases, où chaque case est une **liste chaînée**.
- C'est la représentation par **listes d'adjacence**.

Liste d'adjacence



Un graphe **non orienté**

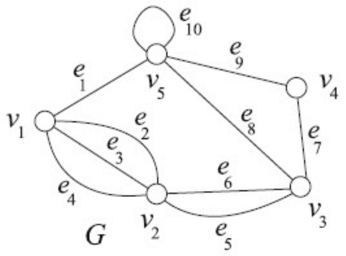


Sa représentation par **listes d'adjacence**

Matrice d'incidence pour un graphe non orienté

$$I_{ij} = 1 \Longleftrightarrow \text{le sommet } i \text{ est incident à l'arête } j$$

$$I_{ij} = 0 \Longleftrightarrow \text{le sommet } i \text{ n'est pas incident à l'arête } j$$



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Avantages de la représentation par listes

- Nécessite un **espace mémoire** en **O(n + m)** (au lieu de **O(n^2)**), où n est **l'ordre** de G et m est la **taille** de G.
- La **recherche** des **successeurs** d'un sommet x s'effectue en temps **O(δ(x))** uniquement.

Inconvénient de la représentation par listes

- La **recherche** des **prédécesseurs** d'un sommet x, nécessite un espace **O(n + m)** (il faut parcourir toutes les listes).

Connexité

Problème de connexité

- Le problème de **connexité** est très important dans la vie courante.
- En particulier, dans les **réseaux d'interconnexion**, on souhaite savoir si deux nœuds sont **reliées** ou non (sans connaître comment).
- La suppression d'un sommet ou d'une arête signifie l'existence d'un panne de liaison.
- La **connexité** est une notion très importante en théorie des graphes : il est essentiel de savoir si un graphe est **connexe**, ou de déterminer ses **parties connexes**.

Connexité dans les graphes non orientés

Considérons sur V la relation binaire R définie par :

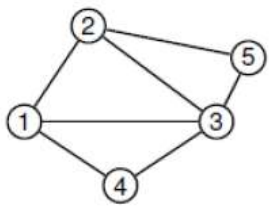
$$x \; R \; y \; x \iff x \text{ et } y \text{ sont reliés par une chaîne}$$

R est une **relation d'équivalence** sur V.

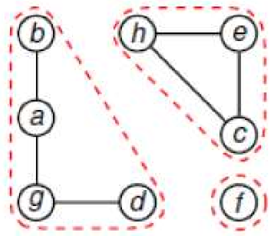
Les éléments de l'ensemble quotient V/R est appelé **composantes connexes** de G.

Un graphe est dit **connexe**, si $|V/R| = 1$, c'est-à-dire si G contient une seule **composante connexe** $(V/R = V)$.

Exemples



Un graphe **connexe**



Un graphe non **connexe**

Connexité dans les graphes orientés

Considérons sur V la relation binaire R définie par :

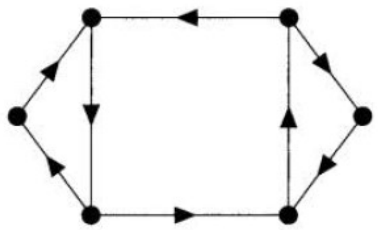
$$x \; R \; y \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{il existe un chemin de } x \text{ vers } y \text{ est un chemin de } y \text{ vers } x \end{cases}$$

R est une **relation d'équivalence** sur V.

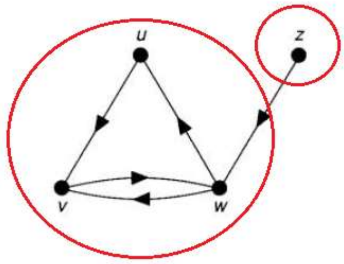
Les éléments de l'ensemble quotient V/R est appelé **composantes fortement connexes** de G.

Un graphe orienté G est dit **fortement connexe**, si G ne possède qu'une **seule composante fortement connexe**.

Exemples



Un graphe **fortement connexe**



Un graphe non **fortement connexe**