

Výrokovologické vyplývanie

3. prednáška · Matematika (4): Logika pre informatikov

Ján Klúka, Jozef Šiška

Letný semester 2020/2021

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej informatiky

Výrokovologické vyplývanie

Teórie a ich modely

Výrokovologické teórie a ohodnotenia

Vyplývanie, nezávislosť a nesplniteľnosť

Minulý týždeň sme hovorili o tom,

- čo sú výrokovologické spojky,
- ako zodpovedajú slovenským spojkám,
- čo sú symboly jazyka výrokovologickej časti logiky prvého rádu,
- čo sú formuly tohto jazyka,
- kedy sú formuly pravdivé v danej štruktúre.

Výrokovologické vyplývanie

Na 1. prednáške:

- Hovorili sme o tom, že logiku zaujíma, čo a prečo sú zákonitosti správneho usudzovania.
- Správne úsudky odvodzujú z predpokladov (teórií) závery, ktoré sú ich logickými dôsledkami.
- *Logickými dôsledkami* teórie sú tvrdenia, ktoré sú pravdivé vo *všetkých modeloch* teórie.

Minulý týždeň sme začali pracovať s *výrokovologickou* časťou logiky prvého rádu.

Čo sú v nej: teórie, modely, logické dôsledky?

Výrokovologické vyplývanie

Teórie a ich modely

Neformálne je teória súbor tvrdení, ktoré pokladáme za pravdivé.

Zvyčajne popisujú našu predstavu o zákonitostiach platných v nejakej časti sveta a pozorovania o jej stave.

Príklad 3.1

Máme troch nových známych — Kim, Jima a Sarah.

Organizujeme párty a **P0**: chceme, aby na ňu prišiel niekto z nich.

Od spoločných kamarátov sme sa ale dozvedeli o ich požiadavkách:

P1: Sarah nepríde na párty, ak príde Kim.

P2: Jim príde na párty, len ak príde Kim.

P3: Sarah nepríde bez Jima.

V logike prvého rádu tvrdenia zapisujeme formulami.

Príklad 3.2

$$T_{\text{party}} = \{((\text{príde}(\text{Kim}) \vee \text{príde}(\text{Jim})) \vee \text{príde}(\text{Sarah})), \\ (\text{príde}(\text{Kim}) \rightarrow \neg \text{príde}(\text{Sarah})), \\ (\text{príde}(\text{Jim}) \rightarrow \text{príde}(\text{Kim})), \\ (\text{príde}(\text{Sarah}) \rightarrow \text{príde}(\text{Jim}))\}$$

Definícia 3.3

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Každú množinu formúl jazyka \mathcal{L} budeme nazývať **teóriou** v jazyku \mathcal{L} .

Modely teórií

Neformálne je *modelom* teórie stav vybranej časti sveta.

Pre logiku prvého rádu stavu sveta vyjadrujú štruktúry.

Príklad 3.4 (Model teórie o party)

$$\mathcal{M} = (\{k, j, s, e, h\}, i),$$

$$i(\text{Kim}) = k, \quad i(\text{Jim}) = j, \quad i(\text{Sarah}) = s,$$

$$i(\text{príde}) = \{k, j, e\};$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{M} \models ((\text{príde}(\text{Kim}) \vee \text{príde}(\text{Jim})) \vee \text{príde}(\text{Sarah})) \\ \mathcal{M} \models (\text{príde}(\text{Kim}) \rightarrow \neg \text{príde}(\text{Sarah})) \\ \mathcal{M} \models (\text{príde}(\text{Jim}) \rightarrow \text{príde}(\text{Kim})) \\ \mathcal{M} \models (\text{príde}(\text{Sarah}) \rightarrow \text{príde}(\text{Jim})) \end{array} \right\} \mathcal{M} \models T_{\text{party}}$$

Definícia 3.5 (Model)

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech T je teória v jazyku \mathcal{L} a \mathcal{M} je štruktúra pre jazyk \mathcal{L} .

Teória T je **pravdivá** v \mathcal{M} , skrátené $\mathcal{M} \models T$, vtt **každá** formula X z T je pravdivá v \mathcal{M} (teda $\mathcal{M} \models X$).

Hovoríme tiež, že \mathcal{M} je **modelom** T .

Teória T je **nepravdivá** v \mathcal{M} , skrátené $\mathcal{M} \not\models T$, vtt T nie je pravdivá v \mathcal{M} .

Výrokovologické vyplývanie

Výrokovologické teórie a ohodnotenia

Nekonečne veľa štruktúr

Logickými dôsledkami teórie sú tvrdenia,
ktoré sú pravdivé vo všetkých modeloch teórie.

Ale štruktúr je nekonečne veľa a ak má teória jeden model,
má aj nekonečne veľa ďalších:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M}_1 = (\{k, j, s\}, i_1) & \mathcal{M}'_1 = (\{k, j, s, 0\}, i'_1) & \mathcal{M}''_1 = (\{k, j, s, 0, 1\}, i''_1) \quad \dots \\ i_1(\text{Kim}) = k & i'_1(\text{Kim}) = k & i''_1(\text{Kim}) = k \\ i_1(\text{Jim}) = j & i'_1(\text{Jim}) = j & i''_1(\text{Jim}) = j \\ i_1(\text{Sarah}) = s & i'_1(\text{Sarah}) = s & i''_1(\text{Sarah}) = s \\ i_1(\text{príde}) = \{k, j\} & i'_1(\text{príde}) = \{k, j\} & i''_1(\text{príde}) = \{k, j\} \end{array}$$

Rozdiely modelov

V čom sa líšia a čo majú spoločné nasledujúce modely T_{party} ?

$$\mathcal{M}_1 = (\{k, j, s, e, h\}, i_1)$$

$$i_1(\text{Kim}) = k$$

$$i_1(\text{Jim}) = j$$

$$i_1(\text{Sarah}) = s$$

$$i_1(\text{príde}) = \{k, j, e\}$$

$$\mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2)$$

$$i_2(\text{Kim}) = 1$$

$$i_2(\text{Jim}) = 2$$

$$i_2(\text{Sarah}) = 3$$

$$i_2(\text{príde}) = \{1, 2\}$$

$$\mathcal{M}_3 = (\{kj, s\}, i_3)$$

$$i_3(\text{Kim}) = kj$$

$$i_3(\text{Jim}) = kj$$

$$i_3(\text{Sarah}) = s$$

$$i_3(\text{príde}) = \{kj\}$$

Rozdiely modelov

V čom sa líšia a čo majú spoločné nasledujúce modely T_{party} ?

$$\mathcal{M}_1 = (\{k, j, s, e, h\}, i_1)$$

$$\mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2)$$

$$\mathcal{M}_3 = (\{kj, s\}, i_3)$$

$$i_1(\text{Kim}) = k$$

$$i_2(\text{Kim}) = 1$$

$$i_3(\text{Kim}) = kj$$

$$i_1(\text{Jim}) = j$$

$$i_2(\text{Jim}) = 2$$

$$i_3(\text{Jim}) = kj$$

$$i_1(\text{Sarah}) = s$$

$$i_2(\text{Sarah}) = 3$$

$$i_3(\text{Sarah}) = s$$

$$i_1(\text{príde}) = \{k, j, e\}$$

$$i_2(\text{príde}) = \{1, 2\}$$

$$i_3(\text{príde}) = \{kj\}$$

Líšia sa doménami aj v interpretáciách.

Rozdiely modelov

V čom sa líšia a čo majú spoločné nasledujúce modely T_{party} ?

$$\mathcal{M}_1 = (\{k, j, s, e, h\}, i_1)$$

$$\mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2)$$

$$\mathcal{M}_3 = (\{kj, s\}, i_3)$$

$$i_1(\text{Kim}) = k$$

$$i_2(\text{Kim}) = 1$$

$$i_3(\text{Kim}) = kj$$

$$i_1(\text{Jim}) = j$$

$$i_2(\text{Jim}) = 2$$

$$i_3(\text{Jim}) = kj$$

$$i_1(\text{Sarah}) = s$$

$$i_2(\text{Sarah}) = 3$$

$$i_3(\text{Sarah}) = s$$

$$i_1(\text{príde}) = \{k, j, e\}$$

$$i_2(\text{príde}) = \{1, 2\}$$

$$i_3(\text{príde}) = \{kj\}$$

Líšia sa doménami aj v interpretáciách.

Líšia sa v pravdivosti rovnostných atómov, napr. $\text{Kim} \doteq \text{Jim}$.

Rozdiely modelov

V čom sa líšia a čo majú spoločné nasledujúce modely T_{party} ?

$$\mathcal{M}_1 = (\{k, j, s, e, h\}, i_1) \quad \mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2) \quad \mathcal{M}_3 = (\{kj, s\}, i_3)$$

$$i_1(\text{Kim}) = k \quad i_2(\text{Kim}) = 1 \quad i_3(\text{Kim}) = kj$$

$$i_1(\text{Jim}) = j \quad i_2(\text{Jim}) = 2 \quad i_3(\text{Jim}) = kj$$

$$i_1(\text{Sarah}) = s \quad i_2(\text{Sarah}) = 3 \quad i_3(\text{Sarah}) = s$$

$$i_1(\text{príde}) = \{k, j, e\} \quad i_2(\text{príde}) = \{1, 2\} \quad i_3(\text{príde}) = \{kj\}$$

Líšia sa doménami aj v interpretáciách.

Líšia sa v pravdivosti rovnostných atómov, napr. $\text{Kim} \doteq \text{Jim}$.

Zhodujú sa na pravdivosti **všetkých predikátových** atómov $\text{príde}(\text{Kim})$, $\text{príde}(\text{Jim})$, $\text{príde}(\text{Sarah})$.



V T_{party} **na ničom inom nezáleží**.

Ohodnotenie atómov

Z každej zo štruktúr

$$\mathcal{M}_1 = (\{k, j, s, e, h\}, i_1)$$

$$i_1(\text{Kim}) = k$$

$$i_1(\text{Jim}) = j$$

$$i_1(\text{Sarah}) = s$$

$$i_1(\text{príde}) = \{k, j, e\}$$

$$\mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2)$$

$$i_2(\text{Kim}) = 1$$

$$i_2(\text{Jim}) = 2$$

$$i_2(\text{Sarah}) = 3$$

$$i_2(\text{príde}) = \{1, 2\}$$

$$\mathcal{M}_3 = (\{kj, s\}, i_3)$$

$$i_3(\text{Kim}) = kj$$

$$i_3(\text{Jim}) = kj$$

$$i_3(\text{Sarah}) = s$$

$$i_3(\text{príde}) = \{kj\}$$

môžeme skonštruovať to isté **ohodnotenie predikátových atómov**:

$$v(\text{príde}(\text{Kim})) = t \quad \text{lebo } \mathcal{M}_j \models \text{príde}(\text{Kim}),$$

$$v(\text{príde}(\text{Jim})) = t \quad \text{lebo } \mathcal{M}_j \models \text{príde}(\text{Jim}),$$

$$v(\text{príde}(\text{Sarah})) = f \quad \text{lebo } \mathcal{M}_j \not\models \text{príde}(\text{Sarah}).$$

Všetky tieto štruktúry (a nekonečne veľa ďalších) vieme pri vyhodnocovaní formúl jazyka $\mathcal{L}_{\text{party}}$ nahradiť týmto ohodnotením.

Definícia 3.6

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Množinu predikátových atómov jazyka \mathcal{L} označujeme $\mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$.

Výrokovologickými formulami jazyka \mathcal{L} nazveme všetky formuly jazyka \mathcal{L} , ktoré neobsahujú symbol rovnosti. Množinu všetkých výrokovologických formúl jazyka \mathcal{L} označujeme $\mathcal{PE}_{\mathcal{L}}$.

Definícia 3.7

Nech (f, t) je usporiadaná dvojica **pravdivostných hodnôt**, $f \neq t$, kde f predstavuje **nepravdu** a t predstavuje **pravdu**.

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Výrokovologickým ohodnotením pre \mathcal{L} , skrátene **ohodnotením**, nazveme každé zobrazenie $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \rightarrow \{f, t\}$.

Pravdivé formuly v ohodnotení

Ako vyhodnotíme, či je formula pravdivá v nejakom ohodnotení?

Definícia 3.8

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, nech (f, t) sú pravdivostné hodnoty a nech $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \rightarrow \{f, t\}$ je výrokovologické ohodnotenie pre \mathcal{L} . Reláciu **výrokovologická formula A je pravdivá v ohodnotení v** ($v \models_p A$) definujeme **induktívne** pre všetky predikátové atómy a a všetky výrokovologické formuly A, B jazyka \mathcal{L} nasledovne:

- $v \models_p a$ vtt $v(a) = t$,
- $v \models_p \neg A$ vtt $v \not\models_p A$,
- $v \models_p (A \wedge B)$ vtt $v \models_p A$ a zároveň $v \models_p B$,
- $v \models_p (A \vee B)$ vtt $v \models_p A$ alebo $v \models_p B$,
- $v \models_p (A \rightarrow B)$ vtt $v \not\models_p A$ alebo $v \models_p B$,

kde **vtt** skrakuje *vtedy a len vtedy* a $v \not\models_p A$ skrakuje *A nie je pravdivá vo v* .

Vyhodnotenie formuly v ohodnotení

Príklad 3.9

Vyhodnoťme formulu

$$X = ((\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg \text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \text{príde}(\text{Sarah}))$$

vo výrokovologickom ohodnotení

$$v = \{\text{príde}(\text{Kim}) \mapsto t, \text{príde}(\text{Jim}) \mapsto t, \text{príde}(\text{Sarah}) \mapsto f\}$$

zdola nahor:

	p(Kim)	p(Jim)	p(Sarah)	$\neg p(\text{Kim})$	$(p(\text{Jim}) \vee \neg p(\text{Kim}))$	X
v	\models_p	\models_p	$\not\models_p$	$\not\models_p$	\models_p	$\not\models_p$

príde sme skrátili na p.

Definícia 3.10

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, nech \mathcal{M} je štruktúra pre \mathcal{L} , nech (f, t) sú pravdivostné hodnoty, $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \rightarrow \{f, t\}$ je výrokovologické ohodnotenie pre \mathcal{L} a $S \subseteq \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ je množina predikátových atómov.

Ohodnotenie v a štruktúra \mathcal{M} sú navzájom **zhodné na S** vtt pre každý predikátový atóm $A \in S$ platí

$$v(A) = t \text{ vtt } \mathcal{M} \models A.$$

Ohodnotenie v a štruktúra \mathcal{M} sú navzájom **zhodné** vtt sú zhodné na $\mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$.

Konstruktia ohodnotenia zhodného so štruktúrou

Ohodnotenie zhodné so štruktúrou zostrojíme ľahko:

Tvrdenie 3.11

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, nech \mathcal{M} je štruktúra pre \mathcal{L} a (f, t) sú pravdivostné hodnoty. Zobrazenie $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \rightarrow \{f, t\}$ definované pre každý atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ nasledovne:

$$v(A) = \begin{cases} t, & \text{ak } \mathcal{M} \models A, \\ f, & \text{ak } \mathcal{M} \not\models A \end{cases}$$

je výrokovologické ohodnotenie zhodné s \mathcal{M} .

Dôkaz.

Pre každý atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ musíme dokázať, že $v(A) = t$ vtt $\mathcal{M} \models A$:

(\Leftarrow) Priamo: Ak $\mathcal{M} \models A$, tak $v(A) = t$ podľa jeho definície v leme.

(\Rightarrow) Nepriamo: Ak $\mathcal{M} \not\models A$, tak $v(A) = f$ podľa jeho definície v leme, a pretože $t \neq f$, tak $v(A) \neq t$. □

Dokážeme zostrojiť aj štruktúru z ohodnotenia, aby boli zhodné?

Príklad 3.12 (Konštrukcia štruktúry zhodnej s ohodnotením)

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu,
kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Kim}, \text{Jim}, \text{Sarah}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{príde}\}$.

Nech v je výrokovologické ohodnotenie pre \mathcal{L} , kde

$$v(\text{príde}(\text{Kim})) = t \quad v(\text{príde}(\text{Jim})) = t \quad v(\text{príde}(\text{Sarah})) = f$$

Zostrojme štruktúru pre \mathcal{L} zhodnú s v .

Dokážeme zostrojiť aj štruktúru z ohodnotenia, aby boli zhodné?

Príklad 3.12 (Konštrukcia štruktúry zhodnej s ohodnotením)

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Kim}, \text{Jim}, \text{Sarah}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{príde}\}$.

Nech v je výrokovologické ohodnotenie pre \mathcal{L} , kde

$$v(\text{príde}(\text{Kim})) = t \quad v(\text{príde}(\text{Jim})) = t \quad v(\text{príde}(\text{Sarah})) = f$$

Zostrojme štruktúru pre \mathcal{L} zhodnú s v .

Možnosťou, ktorú ľahko zovšeobecníme na všetky jazyky, je použiť ako doménu množinu konštánt:

$$\mathcal{M} = (\underbrace{\{\text{Kim}, \text{Jim}, \text{Sarah}\}}_{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}}, i)$$

Každú konštantu interpretujeme ňou samou:

$$i(\text{Kim}) = \text{Kim} \quad i(\text{Jim}) = \text{Jim} \quad i(\text{Sarah}) = \text{Sarah}$$

predikát príde ako množinu tých c , pre ktoré $v(\text{príde}(c)) = t$:

$$i(\text{príde}) = \{\text{Kim}, \text{Jim}\}$$

Konstruktia štruktúry zhodnej s ohodnotením

Dokážeme zostrojiť aj štruktúru z ohodnotenia tak, aby boli zhodné, pre hocijaký jazyk?

Tvrdenie 3.13

*Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu,
nech (f, t) sú pravdivostné hodnoty
a $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \rightarrow \{f, t\}$ je výrokovologické ohodnotenie pre \mathcal{L} .*

*Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre \mathcal{L} s doménou $D = \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$
a interpretačnou funkciou definovanou pre všetky $n > 0$, všetky
konštanty c a všetky predikátové symboly $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ s aritou n takto:*

$$i(c) = c$$

$$i(P) = \{ (c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}^n \mid v(P(c_1, \dots, c_n)) = t \}$$

Potom \mathcal{M} je zhodná s v .

Zhoda na **všetkých** výrokovologických formulách

Tvrdenie 3.14

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, \mathcal{M} je štruktúra pre \mathcal{L} a v je výrokovologické ohodnotenie pre \mathcal{L} zhodné s \mathcal{M} .
Potom **pre každú výrokovologickú formulu** $X \in \mathcal{PE}_{\mathcal{L}}$ platí,
že $v \models_p X$ vtt $\mathcal{M} \models X$.

Zhoda na **všetkých** výrokovologických formulách

Tvrdenie 3.14

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, \mathcal{M} je štruktúra pre \mathcal{L} a v je výrokovologické ohodnotenie pre \mathcal{L} zhodné s \mathcal{M} . Potom **pre každú výrokovologickú formulu** $X \in \mathcal{PE}_{\mathcal{L}}$ platí, že $v \models_p X$ vtt $\mathcal{M} \models X$.

Dôkaz indukciou na konštrukciu formuly.

1.1: Nech X je rovnostný atóm. Potom nie je výrokovologickou formulou a tvrdenie preň triviálne platí.

1.2: Nech X je predikátový atóm. Potom $v \models_p X$ vtt $v(X) = t$ vtt $\mathcal{M} \models A$.

2.1: Indukčný predpoklad: Nech tvrdenie platí pre formulu X .

Dokážme tvrdenie pre $\neg X$. Ak X neobsahuje symbol rovnosti \doteq , potom $v \models_p \neg X$ vtt $v \not\models_p X$ vtt (podľa IP) $\mathcal{M} \not\models X$ vtt $\mathcal{M} \models \neg X$. Ak X obsahuje \doteq , $\neg X$ ho obsahuje tiež, teda nie je výrokovologická a tvrdenie pre ňu platí triviálne.

2.2: IP: Nech tvrdenie platí pre formuly X a Y . Ak X alebo Y obsahuje \doteq , tvrdenie platí pre $(X \wedge Y)$, $(X \vee Y)$, $(X \rightarrow Y)$ triviálne, lebo nie sú výrokovologické. Nech teda X ani Y neobsahuje \doteq . Potom platí $v \models_p (X \rightarrow Y)$ vtt $v \not\models_p X$ alebo $v \models_p Y$ vtt (podľa IP) vtt $\mathcal{M} \not\models X$ alebo $\mathcal{M} \models Y$ vtt $\mathcal{M} \models (X \rightarrow Y)$. Podobne pre ďalšie spojky. \square

Výrokovologické vyplývanie

Vyplývanie, nezávislosť a nesplniteľnosť

Vráťme sa naspäť k teóriám, modelom a vyplývaniu.

Definícia 3.15

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Každú množinu výrokovologických formúl jazyka \mathcal{L} budeme nazývať *výrokovologickou teóriou* v jazyku \mathcal{L} .

Príklad 3.16

Výrokovologickou teóriou je

$$\begin{aligned} T_{\text{party}} = \{ & ((\text{príde}(\text{Kim}) \vee \text{príde}(\text{Jim})) \vee \text{príde}(\text{Sarah})), \\ & (\text{príde}(\text{Kim}) \rightarrow \neg \text{príde}(\text{Sarah})), \\ & (\text{príde}(\text{Jim}) \rightarrow \text{príde}(\text{Kim})), \\ & (\text{príde}(\text{Sarah}) \rightarrow \text{príde}(\text{Jim})) \}, \end{aligned}$$

ale nie

$$T_{\text{party}} \cup \{\text{Kim} \doteq \text{Sarah}\}.$$

Príklad 3.17 (Výrokovologický model teórie o party)

$$v = \{\text{príde}(\text{Kim}) \mapsto t, \text{príde}(\text{Jim}) \mapsto t, \text{príde}(\text{Sarah}) \mapsto f\}$$

$$\left. \begin{array}{l} v \models_p ((\text{príde}(\text{Kim}) \vee \text{príde}(\text{Jim})) \vee \text{príde}(\text{Sarah})) \\ v \models_p (\text{príde}(\text{Kim}) \rightarrow \neg \text{príde}(\text{Sarah})) \\ v \models_p (\text{príde}(\text{Jim}) \rightarrow \text{príde}(\text{Kim})) \\ v \models_p (\text{príde}(\text{Sarah}) \rightarrow \text{príde}(\text{Jim})) \end{array} \right\} v \models_p T_{\text{party}}$$

Definícia 3.18 (Výrokovologický model)

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech T je teória v jazyku \mathcal{L} a v je výrokovologické ohodnotenie pre jazyk \mathcal{L} .

Teória T je **pravdivá** v ohodnotení v , skrátené $v \models_p T$, vtt **každá** formula X z T je pravdivá vo v (teda $v \models_p X$ pre každú $X \in T$).

Hovoríme tiež, že v je **výrokovologickým modelom** T .

Teória T je **nepravdivá** vo v , skrátené $v \not\models_p T$, vtt T nie je pravdivá vo v .

Zrejme $v \not\models_p T$ vtt $v \not\models_p X$ pre **nejakú** $X \in T$.

Definícia 3.19 (Splniteľnosť a nespľniteľnosť)

Teória je *výrokovologicky splniteľná* vtt
má aspoň jeden výrokovologický model.

Teória je *výrokovologicky nespľniteľná* vtt
nemá žiaden výrokovologický model.

Zrejme teória nie je splniteľná vtt keď je nespľniteľná.

Príklad 3.20

T_{party} je evidentne splniteľná.

Výrokovologické vyplývanie

Ak sú množiny konštánt a predikátových symbolov jazyka konečné, jazyk má konečne veľa predikátových atómov a teda aj **konečne veľa** ohodnotení.

Uvažovať o všetkých ohodnoteniach a modeloch teórie nie je také odstrašujúce. Napríklad si ľahšie predstavíme logický dôsledok:

Definícia 3.21

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech T je výrokovologická teória a X je výrokovologická formula, obe v jazyku \mathcal{L} .

Formula X je **výrokovologickým dôsledkom** teórie T vtt pre každé ohodnotenie v pre jazyk \mathcal{L} platí, že ak $v \models_p T$, tak $v \models_p X$.

Hovoríme tiež, že X **vyplýva** z T a píšeme $T \models_p X$.

Ak X **nevyplýva** z T , píšeme $T \not\models_p X$.

Príklad výrokovologického vyplývania

Príklad 3.22

Vyplyva príde(Kim) výrokovologicky z T_{party} ?

Pretože vieme vymenovať všetky ohodnotenia pre $\mathcal{L}_{\text{party}}$, zistíme to ľahko:

	v_i			$((p(K) \vee p(J)) \vee p(S))$	$(p(K) \rightarrow \neg p(S))$	$(p(J) \rightarrow p(K))$	$(p(S) \rightarrow p(J))$	T_{party}	$p(K)$
	$p(K)$	$p(J)$	$p(S)$						
v_0	f	f	f	$\not\models_p$				$\not\models_p$	
v_1	f	f	t	\models_p	\models_p	\models_p	$\not\models_p$	$\not\models_p$	
v_2	f	t	f	\models_p	\models_p	$\not\models_p$		$\not\models_p$	
v_3	f	t	t	\models_p	\models_p	$\not\models_p$		$\not\models_p$	
v_4	t	f	f	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p
v_5	t	f	t	\models_p	$\not\models_p$			$\not\models_p$	
v_6	t	t	f	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p
v_7	t	t	t	\models_p	$\not\models_p$			$\not\models_p$	

Skrátili sme príde na p, Kim na K, Jim na J, Sarah na S.

Logický záver: Formula príde(Kim) výrokovologicky vyplýva z T_{party} .

Praktický záver: Aby boli všetky požiadavky splnené, Kim **musí** prísť na party.

Príklad nezávislosti

Príklad 3.23

Vyplyva $\text{príde}(\text{Jim})$ výrokovologicky z T_{party} ?

	u_i			$((p(K) \vee p(J)) \vee p(S))$	$(p(K) \rightarrow \neg p(S))$	$(p(J) \rightarrow p(K))$	$(p(S) \rightarrow p(J))$	T_{party}	$p(J)$
	$p(K)$	$p(J)$	$p(S)$						
v_0	f	f	f	$\not\vdash_p$				$\not\vdash_p$	
v_1	f	f	t	\vdash_p	\vdash_p	\vdash_p	$\not\vdash_p$	$\not\vdash_p$	
v_2	f	t	f	\vdash_p	\vdash_p	$\not\vdash_p$		$\not\vdash_p$	
v_3	f	t	t	\vdash_p	\vdash_p	$\not\vdash_p$		$\not\vdash_p$	
v_4	t	f	f	\vdash_p	\vdash_p	\vdash_p	\vdash_p	\vdash_p	$\not\vdash_p$
v_5	t	f	t	\vdash_p	$\not\vdash_p$			$\not\vdash_p$	
v_6	t	t	f	\vdash_p	\vdash_p	\vdash_p	\vdash_p	\vdash_p	\vdash_p
v_7	t	t	t	\vdash_p	$\not\vdash_p$			$\not\vdash_p$	

Logický záver: Formula $\text{príde}(\text{Jim})$ **nevyplýva** z T_{party} .

Výrokovologická nezávislosť

Vzťahu medzi $\text{príde}(\text{Jim})$ a T_{party} hovoríme **nezávislosť**.

Definícia 3.24

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech T je výrokovologická teória a X je výrokovologická formula, obe v jazyku \mathcal{L} .

Formula X je **výrokovologicky nezávislá** od teórie T vtt existujú také ohodnotenia v_0 a v_1 pre jazyk \mathcal{L} , že $v_0 \models_p T$ aj $v_1 \models_p T$, ale $v_0 \not\models_p X$ a $v_1 \models_p X$.

Príklad 3.25 (pokračovanie príkladu 3.23)

Logický záver: Formula $\text{príde}(\text{Jim})$ je **nezávislá** od T_{party} .

Praktický záver: Všetky požiadavky budú naplnené **bez ohľadu na to**, či Jim príde alebo nepríde na párty. **Nie je nutné**, aby bol prítomný ani aby bol neprítomný. **Môže, ale nemusí** prísť. Jeho prítomnosť od požiadaviek **nezávisí**.

Príklad vyplývania negácie

Príklad 3.26

Je $\text{príde}(\text{Sarah})$ výrokovologickým dôsledkom T_{party} alebo nezávislá od T_{party} ?

	v_i			$((p(K) \vee p(J)) \vee p(S))$	$(p(K) \rightarrow \neg p(S))$	$(p(J) \rightarrow p(K))$	$(p(S) \rightarrow p(J))$	T_{party}	$p(S)$
	$p(K)$	$p(J)$	$p(S)$						
v_0	f	f	f	$\not\models_p$				$\not\models_p$	
v_1	f	f	t	\models_p	\models_p	\models_p	$\not\models_p$	$\not\models_p$	
v_2	f	t	f	\models_p	\models_p	$\not\models_p$		$\not\models_p$	
v_3	f	t	t	\models_p	\models_p	$\not\models_p$		$\not\models_p$	
v_4	t	f	f	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p	$\not\models_p$
v_5	t	f	t	\models_p	$\not\models_p$			$\not\models_p$	
v_6	t	t	f	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p	$\not\models_p$
v_7	t	t	t	\models_p	$\not\models_p$			$\not\models_p$	

Logický záver: Formula $\text{príde}(\text{Sarah})$ **nevyplýva** z T_{party} , ale ani **nie je nezávislá** od T_{party} .

Tvrdenie 3.27

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech T je splniteľná výrokovologická teória a X je výrokovologická formula, obe v jazyku \mathcal{L} .

Formula X nevyplýva z teórie T a nie je výrokovologicky nezávislá od T vtt $\neg X$ vyplýva z T .

Príklad 3.28 (pokračovanie príkladu 3.26)

Logický záver: Z T_{party} vyplýva $\neg \text{príde}(\text{Sarah})$.

Praktický záver: Aby boli všetky požiadavky naplnené, Sarah **nesmie** prísť na party.

Vzťahy teórií a formúl

Medzi **ohodnotením a formulou** sú iba **dva vzájomne výlučné** vzťahy:

Buď $v \models_p X$, alebo $v \not\models_p X$.

Medzi **teóriou a formulou** je **viac** možných vzťahov:

	existuje v také, že $v \models_p T$ a $v \models_p X$	pre všetky v , ak $v \models_p T$, tak $v \not\models_p X$
existuje v také, že $v \models_p T$ a $v \not\models_p X$	X je nezávislá od T $T \not\models_p X$ a $T \not\models_p \neg X$	$T \models_p \neg X$
pre všetky v , ak $v \models_p T$, tak $v \models_p X$	$T \models_p X$	

Vzťahy teórií a formúl

Medzi **ohodnotením a formulou** sú iba **dva vzájomne výlučné** vzťahy:

Buď $v \models_p X$, alebo $v \not\models_p X$.

Medzi **teóriou a formulou** je **viac** možných vzťahov:

	existuje v také, že $v \models_p T$ a $v \models_p X$	pre všetky v , ak $v \models_p T$, tak $v \not\models_p X$
existuje v také, že $v \models_p T$ a $v \not\models_p X$	X je nezávislá od T $T \not\models_p X$ a $T \not\models_p \neg X$	$T \models_p \neg X$ a $T \not\models_p X$
pre všetky v , ak $v \models_p T$, tak $v \models_p X$	$T \models_p X$	

Vzťahy teórií a formúl

Medzi **ohodnotením a formulou** sú iba **dva vzájomne výlučné** vzťahy:

Buď $v \models_p X$, alebo $v \not\models_p X$.

Medzi **teóriou a formulou** je **viac** možných vzťahov:

	existuje v také, že $v \models_p T$ a $v \models_p X$	pre všetky v , ak $v \models_p T$, tak $v \not\models_p X$
existuje v také, že $v \models_p T$ a $v \not\models_p X$	X je nezávislá od T $T \not\models_p X$ a $T \not\models_p \neg X$	$T \models_p \neg X$ a $T \not\models_p X$
pre všetky v , ak $v \models_p T$, tak $v \models_p X$	$T \models_p X$ a $T \not\models_p \neg X$	

Vzťahy teórií a formúl

Medzi **ohodnotením a formulou** sú iba **dva vzájomne výlučné** vzťahy:

Buď $v \models_p X$, alebo $v \not\models_p X$.

Medzi **teóriou a formulou** je **viac** možných vzťahov:

	existuje v také, že $v \models_p T$ a $v \models_p X$	pre všetky v , ak $v \models_p T$, tak $v \not\models_p X$
existuje v také, že $v \models_p T$ a $v \not\models_p X$	X je nezávislá od T $T \not\models_p X$ a $T \not\models_p \neg X$	$T \models_p \neg X$ a $T \not\models_p X$
pre všetky v , ak $v \models_p T$, tak $v \models_p X$	$T \models_p X$ a $T \not\models_p \neg X$	T je nesplniteľná $T \models_p X$ aj $T \models_p \neg X$

Príklad 3.29

Je teória $T'_{\text{party}} = T_{\text{party}} \cup \{(\neg \text{príde}(\text{Sarah}) \rightarrow \neg \text{príde}(\text{Kim}))\}$ splniteľná?

	v_i			$((p(K) \vee p(J)) \vee p(S))$	$(p(K) \rightarrow \neg p(S))$	$(p(J) \rightarrow p(K))$	$(p(S) \rightarrow p(J))$	$(\neg p(S) \rightarrow \neg p(K))$	T'_{party}
	$p(K)$	$p(J)$	$p(S)$						
v_0	f	f	f	$\not\models_p$					$\not\models_p$
v_1	f	f	t	\models_p	\models_p	\models_p	$\not\models_p$		$\not\models_p$
v_2	f	t	f	\models_p	\models_p	$\not\models_p$			$\not\models_p$
v_3	f	t	t	\models_p	\models_p	$\not\models_p$			$\not\models_p$
v_4	t	f	f	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p	$\not\models_p$	$\not\models_p$
v_5	t	f	t	\models_p	$\not\models_p$				$\not\models_p$
v_6	t	t	f	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p	$\not\models_p$	$\not\models_p$
v_7	t	t	t	\models_p	$\not\models_p$				$\not\models_p$

Logický záver: T'_{party} je nesplniteľná, vyplýva z nej každá formula.

Praktický záver: T'_{party} nemá praktické dôsledky, lebo **nevypovedá o žiadnom stave sveta**. Na jej základe **nevieme rozhodnúť**, kto musí alebo nesmie prísť na párty.

Nesplniteľnosť ale nie neužitočná vlastnosť.

Tvrdenie 3.30

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech T je splniteľná výrokovologická teória a X je výrokovologická formula, obe v jazyku \mathcal{L} .

Formula X výrokovologicky vyplýva z teórie T vtt $T \cup \{\neg X\}$ je výrokovologicky nesplniteľná.

Podľa tohto tvrdenia sa rozhodnutie vyplývania dá **zredukovať** na rozhodnutie splniteľnosti.

Výrokovologickú splniteľnosť rozhoduje SAT solver.

Definícia 3.31

Množinu atómov $\text{atoms}(X)$ formuly $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ definujeme pre všetky formuly $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nasledovne:

- $\text{atoms}(A) = \{A\}$, ak A je atóm,
- $\text{atoms}(\neg A) = \text{atoms}(A)$,
- $\text{atoms}((A \wedge B)) = \text{atoms}((A \vee B)) = \text{atoms}((A \rightarrow B)) = \text{atoms}(A) \cup \text{atoms}(B)$.

Množinou atómov teórie T je

$$\text{atoms}(T) = \bigcup_{X \in T} \text{atoms}(X).$$

Definícia 3.32

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, nech $M \subseteq \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$. Ohodnotenia v_1 a v_2 sa **zhodujú** na množine M vtt $v_1(A) = v_2(A)$ pre každý atóm $A \in M$.

Tvrdenie 3.33

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Pre každú výrokovologickú teóriu T a formulu X jazyka \mathcal{L} a všetky ohodnotenia v_1 a v_2 , ktoré zhodujú na množine $\text{atoms}(T) \cup \text{atoms}(X)$ platí

- $v_1 \models_p T$ vtt $v_2 \models_p T$,
- $v_1 \models_p X$ vtt $v_2 \models_p X$.

Ohodnotenia postačujúce na skúmanie teórií

Inak povedané: Pravdivosť formuly/teórie v ohodnotení závisí **iba** od pravdivostných hodnôt ohodnotenia tých atómov, ktoré sa v nej vyskytujú.

Takže na zistenie vyplývania, nezávislosti, splniteľnosti stačí preskúmať všetky ohodnotenia, ktoré sa **líšia** na atómoch **vyskytujúcich** sa vo formule a teórii.

Pokiaľ je teória je konečná, stačí skúmať konečne veľa ohodnotení, aj keby bol jazyk nekonečný.

Výrokovologické vyplývanie

Rekapitulácia

Dnes sme sa naučili:

- ako zjednodušiť štruktúry na výrokovologické ohodnotenia,
- čo je logické vyplývanie z teórie a logický dôsledok teórie,
- čo je nezávislosť formuly od teórie,
- štyri situácie vo vzťahoch teórií a formúl a ich praktické dôsledky,
- čo sú splniteľné a nespľniteľné teórie,
- ako súvisí nespľniteľnosť a vyplývanie.