Problema de inverso: tasa de interés

Carlos Augusto Arellano Muro

3 de julio de 2019

Contenido

Problema directo vs problema inverso

El problema directo tiene como objetivo predecir

Teniendo

$$
\begin{array}{ccll}
x & \in & X & \qquad entrada \\
y & \in & Y & \qquad salida \\
F & : & X \to Y &
\end{array}
$$

Predecir significa que teniendo los valores de entrada x, se calcula los valores de salida $y = F(x)$.

Problema directo vs problema inverso

El problema inverso tiene como objetivo identificar

Teniendo el valor de y, obtener $x = F^{-1}(y)$.

$$\begin{array}{lcll} x & \in & X & \qquad \textit{entrada} \\ y & \in & Y & \qquad \textit{salida} \\ F^{-1} & : & Y \to X & \end{array}$$

Problemas de planteamiento:

- ¿F es inyectiva o sobreyectiva?
- ¿F^{-1} es continua?

Un problema interesante es predecir el capital $C(t)$ después de un tiempo dado a partir de un monto inicial C_0 y una tasa de interés $r(t)$. Esto es, resolviendo la ecuación diferencial

$$\dot{C}(t) = r(t)C(t),$$

resultando

$$C(t) = C_0 e^{\int_0^t r(s)ds}.$$

Estimar la tasa de interés $r(t)$ a partir del capital $C(t)$ significa, que de la ecuación diferencial

$$\dot{C}(t) = r(t)C(t),$$

la solución es

$$r(t) = \frac{\dot{C}(t)}{C(t)}.$$

Donde la derivada se estima de la siguiente forma

$$\dot{C}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} \approx \frac{C(t) - C(t - \Delta t)}{\Delta t}.$$

Estimación de la tasa de interés

- Obteniendo datos...

Tasa de interés en el mercado a tres meses en los últimos diez años:

```
start = datetime.datetime(2009,6,1)
end = datetime.datetime.now()

data = quandl.get("FRED/TB3MS", start_date=start,
                                end_date=end)
```

Estimación de la tasa de interés

```
data.plot(grid = True, legend=False)
```

Figura 1: Tasa de interés trimestral en 10 años.

Estimación de la tasa de interés

- Obtención del capital...

Integrando a través del método trapezoidal:

```
trap=lambda rate,money,time:
    0.5*(rate[time-1,0]*money[time-1]+
    rate[time,0]*money[time])/100
p0=10
p=[p0,np.zeros(shape=np.shape(data))] # simplificado
for t in np.linspace(1,np.size(data)-1,np.size(data)):
    p[t]=p[t-1]+trap(data.values,p,t)
```

Estimación de la tasa de interés

- Se obtiene la tasa de interés a partir del capital aproximando la derivada:

$$r(t) = \frac{\dot{C}(t)}{C(t)}.$$

Con la aproximación

$$\dot{C}(t) \approx \frac{C(t) - C(t - \Delta t)}{\Delta t}.$$

```
estimrate=np.zeros(shape=np.shape(data.values[:,0]))
meses=np.linspace(1,np.size(data)-1,np.size(data),
                                        dtype='int')
for t in meses:
    estimrate[t-1]=100*(p[t]-p[t-1])/p[t-1]
```

Estimación de la tasa de interés

```
plt.plot(meses[:-2],estimrate[:-2],'r-',meses,
                                        data.values[:,0],'b-')
plt.grid()
```

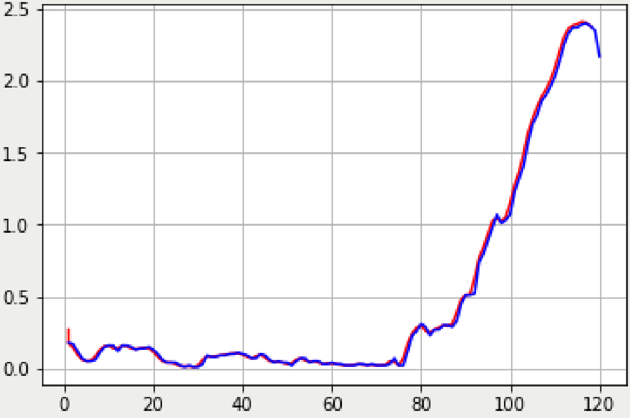

Figura 2: Tasa de interes trimestral en 10 años.

Estimación de la tasa de interés

- Agregando una pequeña variación al capital

```
delta=1
pr=p+0.01*np.random.rand(np.size(p)) # Simplificado
meses=np.linspace(delta,size(data)+delta,size(data))
estimrate2=np.zeros(shape=(np.size(meses),))
for t in meses:
    estimrate2[t-delta]=100*(pr[t]-pr[t-delta])/
                                         (pr[t]*delta)

plot([linspace(0,delta),meses[:-delta]],estimrate2,'r-',
    linspace(1,size(data)),data.values[:,0],'b-')
```

Estimación de la tasa de interés

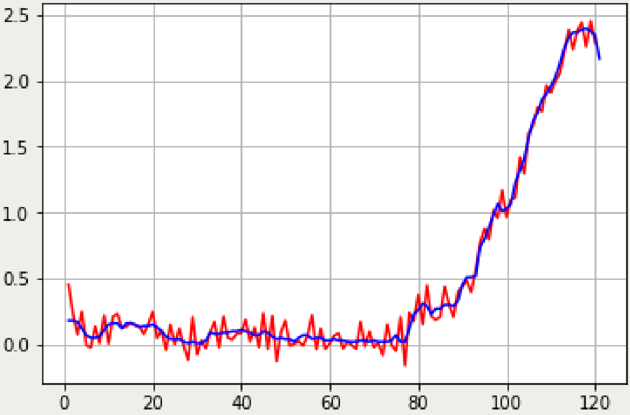

Figura 3: Estimación de la tasa de interés con una pequeña variación en el capital.

Regularización

- Problema de planteamiento.
  Obteniendo la derivada del capital con incertidumbre

$$\widetilde{C}(t) = C(t) + \epsilon(t)$$

$$\dot{\widetilde{C}}(t) \approx \frac{C(t) - C(t - \Delta t)}{\Delta t} + \frac{\epsilon(t) - \epsilon(t - \Delta t)}{\Delta t}.$$

F^{-1} es no continua.

Regularización

- Minimizando para $d(t) \approx \dot{C}(t)$ el error entre éste y $\dot{\widetilde{C}}$ mediante la funcional de costo J, se tiene:

$$J = \int_0^t \|d(\tau) - \frac{\widetilde{C}(\tau) - \widetilde{C}(\tau - \Delta\tau)}{\Delta\tau}\|^2 d\tau,$$

sin embargo el mínimo ocurre cuando $d = \dot{\widetilde{C}}$, el mismo valor obtenido con anterioridad.

Regularización

- Se agrega a J un término que penalice las variaciones en $d(t)$:

$$J = \int_0^t \|d(\tau) - \frac{\widetilde{C}(\tau) - \widetilde{C}(\tau - \Delta\tau)}{\Delta\tau}\|^2 + \alpha \|\frac{d(\tau) - d(\tau - \Delta\tau)}{\Delta\tau}\|^2 d\tau$$

a este término se le llama **término de regularización** ajustado a través del parámetro α.

Regularización

```
num_points = np.size(data)
Tx = np.linspace(1, num_points, num_points,dtype='int')

fitfunc=lambda x:100*(x[1]-x[0])/(x[0]*delta)
errfunc=lambda d,d_,x:d-fitfunc(x)+1.5*(d-d_)/delta
d1 = 0.2
d0 = 0.2
estimReg=np.zeros(shape=(np.size(meses),))
for k in meses:
    d1, success=optimize.leastsq(errfunc,d0,
                              args=(d1,[pr[k-delta],pr[k]]))
    estimReg[k-delta]=d1

plot(Tx,data[:,0], "b-",
    [linspace(0,delta),meses[:-delta]], estimReg, "r-")
```

Regularización

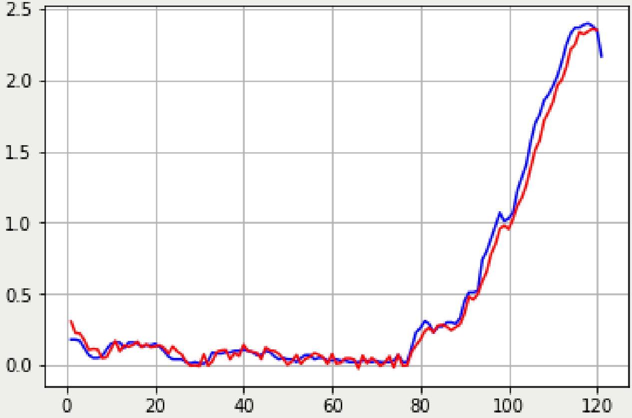

Figura 4: Estimación de la tasa de interés trimestral en 10 años.