Plan de l'exposé

L'équation de Poisson

Approche numérique

- résolution par différences finies
- généralisation des méthodes d'Euler ou RK
- remplacement des dérivées partielles par développements de Taylor

▷ Maillage limité à une portion du plan xy

$$\begin{cases} x_i = x_0 + i\Delta x & 0 \leq i < I \\ y_j = y_0 + j\Delta y & 0 \leq j < J \end{cases}$$

▷ Conditions aux bords du domaine ?

L'équation de Poisson

Développement de Taylor à l'ordre 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \simeq \dfrac{u(x+\Delta x, y) + u(x-\Delta x, y) - 2u(x,y)}{\Delta x^2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \simeq \dfrac{u(x, y+\Delta y) + u(x, y-\Delta y) - 2u(x,y)}{\Delta y^2} \end{array} \right.$$

▷ en notation discrète

$$\frac{1}{\Delta x^2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}) + \frac{1}{\Delta y^2}(u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}) = \rho_{i,j}$$

L'équation de Poisson

Réindexation 2D $\Longrightarrow$ 1D

$$\begin{cases} 0 \leq i < I \\ 0 \leq j < J \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad k = iJ + j, \; 0 \leq k < IJ$$

▷ nouvelle formulation de la solution ($\varepsilon_x = \Delta x^{-2}, \; \varepsilon_y = \Delta y^{-2}$)

$$\varepsilon_x(u_{k+J+1} + u_{k-J-1}) + \varepsilon_y(u_{k+1} + u_{k-1}) - 2(\varepsilon_x + \varepsilon_y)u_k = \rho_k$$

Attention : relations différentes sur les frontières du domaine

- conditions aux limites sur la solution ou ses dérivées
- lié directement au problème physique que l'on résoud

L'équation de Poisson

Condition de Dirichlet : la solution est nulle en dehors du domaine

$$\frac{1}{\Delta x^2}(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}-2u_{i,j})+\frac{1}{\Delta y^2}(u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-2u_{i,j})=\rho_{i,j}$$

▷ sur le côté gauche ($i=0$)

$$\Longrightarrow \frac{1}{\Delta x^2}(u_{1,j}-2u_{0,j})+\frac{1}{\Delta y^2}(u_{0,j+1}+u_{0,j-1}-2u_{0,j})=\rho_{0,j}$$

▷ sur le côté droit ($i=I-1$)

$$\Longrightarrow \frac{1}{\Delta x^2}(u_{I-2,j}-2u_{I-1,j})+\frac{1}{\Delta y^2}(u_{I-1,j+1}+u_{I-1,j-1}-2u_{I-1,j})=\rho_{I-1,j}$$

▷ idem en bas ($j=0$) et en haut ($j=J-1$)

L'équation de Poisson

Condition de Neumann : la dérivée normale est nulle aux bords

$$\frac{1}{\Delta x^2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}) + \frac{1}{\Delta y^2}(u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}) = \rho_{i,j}$$

▷ sur le côté gauche ($i = 0$)

$$\frac{1}{\Delta x^2}(u_{1,j} - u_{0,j}) + \frac{1}{\Delta y^2}(u_{0,j+1} + u_{0,j-1} - 2u_{0,j}) = \rho_{0,j}$$

▷ sur le côté droit ($i = I - 1$)

$$\frac{1}{\Delta x^2}(u_{I-2,j} - u_{I-1,j}) + \frac{1}{\Delta y^2}(u_{I-1,j+1} + u_{I-1,j-1} - 2u_{I-1,j}) = \rho_{I-1,j}$$

▷ idem en bas ($j = 0$) et en haut ($j = J - 1$)

L'équation de Poisson - exemple

Potentiel électrostatique en présence de lignes de charge

$$\frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^2}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- $\rho =$ densité volumique de charges
- $\varepsilon_0 =$ permissivité électrique du vide

- condensateur, domaine $0 \leq x \leq 1$ u.a., $0 \leq y \leq 1$ u.a.
- ligne de charges $+$: $0.25 \leq x \leq 0.75$ u.a., $y = 0.4$ u.a.
- ligne de charges $-$: $0.25 \leq x \leq 0.75$ u.a., $y = 0.6$ u.a.
- conditions de Dirichlet
- maillage de l'espace avec $N = 65$ points

$\Longrightarrow$ inversion d'une matrice 4225×4225

L'équation de Poisson - exemple

Matrice très creuse (sparse matrix)

- nombre de termes : 17 850 625 (env. 136 Mo)
- termes non nuls : 20 865 (rapport 855)

Méthodes d'inversion

- pivot de Gauss si on a la place en mémoire
- Jacobi ou Gauss-Seidel + stockage sparse
- avec éventuellement sur-relaxation

$$x_{i,k+1} = (1-\omega)x_{i,k} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_{j,k+1} - \sum_{j>i} a_{ij}x_{j,k}\right)$$

ω : facteur de relaxation à choisir de manière optimale