PEP 1 - Física Computacional III

Astrofísica con mención en ciencia de datos

Profesor: *Omar Fernández Olguín* – omar.fernandez.o@usach.cl

Ayudante: *Nicolás Campos Álvarez* – nicolas.campos.a@usach.cl

Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Santiago de Chile

15 de Mayo, 2024

Indicaciones

- Esta prueba consta de dos problemas. Su calificación será calculada como: Nota $= 10 + P_1 + P_2$.
- El tiempo estimado para el desarrollo de esta prueba es de 60 minutos.
- Su procedimiento debe ser claro y ordenado, indicando el problema e inciso que está respondiendo.
- Utilice 4 decimales en sus cálculos.

Problema 1. (30 Puntos)

Responda y justifique brevemente las siguientes preguntas:

(a) ¿En qué situaciones el método de *Newton-Raphson* puede fallar o no converger a una raíz, incluso si la función es continua y derivable? Dé un ejemplo o situación que lo justifique. (8 puntos)

(b) Considere el siguiente fragmento de código en Python:

```python
import numpy as np

a = np.float32(1.0)
b = np.float32(1.0) + np.float32(1.0e-10)

print(a==b)
```

¿Qué imprime este código y por qué? (8 puntos)

(c) Demuestre que la derivada de $f(x) = x^3$ es exactamente igual a la derivada analítica cuando se utiliza el método *extrapolated difference* definido como:

$$f'_{\text{ed}}(x) = \frac{4f'_{\text{cd}}(x, h/2) - f'_{\text{cd}}(x, h)}{3}$$

donde $f'_{\text{cd}}(x, h/2)$ corresponde al método *central difference* de paso $h/2$ y $f'_{\text{cd}}(x, h)$ corresponde al método *central difference* de paso h. Podría ser de utilidad la fórmula: $(x \pm a)^3 = x^3 \pm 3x^2a + 3xa^2 \pm a^3$ (14 puntos)

Problema 2. (30 Puntos)

Un meteoroide entra en la atmósfera terrestre, en $t = 0$ s, a gran velocidad. Su altura $y_m(t)$ en kilómetros y en función del tiempo t (en segundos), se modela considerando resistencia atmosférica como $y_m(t) = y_0 e^{-kt}$, donde $y_0 = 80$ km es su altura inicial y $k = 0.1\ \text{s}^{-1}$ es el coeficiente de resistencia atmosférica. Al mismo tiempo se lanza una bomba interceptora desde el suelo con velocidad constante $v_b =\ 0.53$km/s cuya posición está dada por $y_b(t) = v_b t$.

(a) Determine el instante t^* en que la bomba intercepta al meteoroide, es decir, cuando $y_m(t^*) = y_b(t^*)$. Para ello aplique el método de bisección con 3 iteraciones sobre la función $f(t) = y_m(t) - y_b(t)$, comience analizando el intervalo $t \in [0, 30]$ s. (12 puntos)

(b) Calcule el error estimado de la solución obtenida en (a) usando la fórmula de error

$$\epsilon = \left| \frac{f(c)}{f'(c)} \right|$$

donde c es la última aproximación obtenida. Determine $f'(c)$ de forma analítica. Exprese su resultado como $t^* = (c \pm \epsilon)$. (8 puntos)

(c) Suponga que desea estimar la velocidad de entrada a la atmósfera del meteoroide usando *forward difference* y también *central difference*. Si la máquina utilizada para el cálculo tiene una precisión de máquina $\epsilon_m = 10^{-16}$, determine cuál es el valor óptimo de h para minimizar el error total en cada caso. (10 puntos)

Error de Aproximación fd	Error de Aproximación cd	Error de Redondeo
$\epsilon^{\text{fd}}_{\text{aprox}} = \dfrac{h\lvert f''(x)\rvert}{2}$	$\epsilon^{\text{cd}}_{\text{aprox}} = \dfrac{h^2\lvert f'''(x)\rvert}{24}$	$\epsilon_{\text{round}} = \dfrac{\epsilon_m}{h}$