

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT

RAPPORT DU PROJET DE MATHÉMATIQUES ET
D'INFORMATIQUE

DOUBLE LICENCE MATHÉMATIQUES-INFORMATIQUE

Systèmes de racines et carquois de Dynkin

Auteurs :

Aldakar Omar

Méjane Pierre

Professeur encadrant :

Keller Bernhard

Meilleur posteur facebook :

Mneimné Rached

2 juin 2019

Table des matières

1	Classification des systèmes de racines	2
1.1	Symétries	2
1.2	Systèmes de racines	2
1.3	Le groupe de Weyl	3
1.4	Formes quadratiques et système dual	6
1.5	Position relative entre deux racines	6
1.6	Bases	7
1.7	Propriétés des bases	9
1.8	Relations avec les groupes de Weyl	11
1.9	Matrice de Cartan	12
1.10	Graphe de Coxeter	14
1.11	Systèmes de racines irréductibles	14
1.12	Classification des graphes de Coxeter connexes	15
1.13	Diagrammes de Dynkin	16
1.14	Construction des systèmes de racines irréductibles	18
2	Démonstration de la classification	20
3	Description de l'algorithme de Gabriel	24
3.1	Carquois valués acycliques	24
3.2	Répétition d'un carquois valué	25
3.3	Description de l'algorithme de Gabriel	26

1 Classification des systèmes de racines

Dans cet écrit, les espaces vectoriels considérés sont tous des \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie.

1.1 Symétries

Définition 1.1. Soient V un espace vectoriel et $\alpha \in V \setminus \{0\}$. On appelle symétrie de vecteur α tout $s \in \text{Aut}(V)$ satisfaisant

- $s(\alpha) = -\alpha$
- L'ensemble $H := \{h \in V | s(h) = h\}$ est un hyperplan de V .

Remarque : Les sous-espaces H et $\mathbb{R}\alpha$ sont supplémentaires. Il est alors clair que s est déterminé par le choix de $\mathbb{R}\alpha$ et H . En effet, soit $\alpha^* \in V^*$ l'unique forme linéaire telle que

$$\alpha^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in H \\ 2 & \text{si } x = \alpha. \end{cases}$$

Alors on a :

$$s(x) = x - \langle \alpha^*, x \rangle \alpha \text{ pour tout } x \in V.$$

Cette égalité s'écrit aussi comme suit

$$s = 1 - \alpha \otimes \alpha^*$$

Lemme 1.1. Soient $\alpha \in V \setminus \{0\}$ et R un sous ensemble fini qui engendre V . Il existe au plus une symétrie de vecteur α telle que $s(R) = R$.

1.2 Systèmes de racines

Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

Définition 1.2. Soit $R \subseteq V$. On dit que R est un système de racines dans V si

- R est fini, engendre V , et $0 \notin R$;
- pour tout $\alpha \in R$, il existe une symétrie s_α de vecteur α laissant R invariant (cette symétrie est unique par le Lemme 1) ;
- pour tous $\alpha, \beta \in R$, le vecteur $s_\alpha(\beta) - \beta$ est un multiple entier de α .

On a vu que pour tout $\alpha \in R$, on a

$$s_\alpha = 1 - \alpha \otimes \alpha^*.$$

On appelle α^* la racine duale de α . On remarque alors que la troisième propriété est équivalente à

$$\text{pour tous } \alpha, \beta \in R, \text{ on a } \langle \alpha^*, \beta \rangle \in \mathbb{Z}.$$

Définition 1.3. Soient (V, R) et (V', R') deux systèmes de racines. Un isomorphisme de (V, R) sur (V', R') est un isomorphisme linéaire $f : V \rightarrow V'$ tel que $f(R) = R'$.

Définition 1.4. Un système de racines R est dit réduit lorsque pour tout $\alpha \in R$, les seules racines proportionnelles à α sont α et $-\alpha$.

Remarque : Soit R un système de racines non réduit et $\alpha \in R$ une racine telle que $t\alpha$ est également racine pour un $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que t appartient à $]0, 1[$. Alors on a

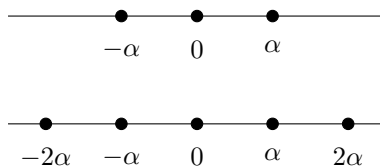
$$\langle \alpha^*, t\alpha \rangle = t\langle \alpha^*, \alpha \rangle = 2t \in \mathbb{Z}.$$

On en déduit que $t = \frac{1}{2}$ et donc que les seules racines proportionnelles à α sont

$$-\alpha, -\frac{\alpha}{2}, \alpha, \frac{\alpha}{2}.$$

Exemples :

Pour $V = \mathbb{R}$, à isomorphisme près, il existe exactement deux systèmes de racines $R \subseteq V$, à savoir

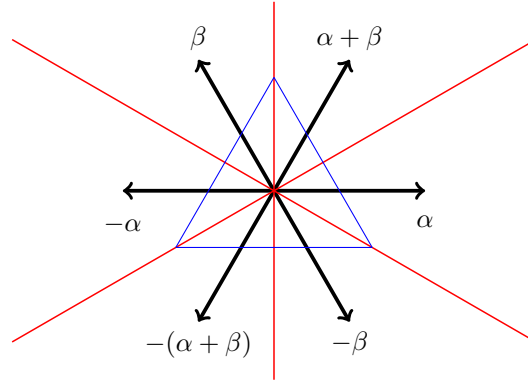


Le premier système de racines est réduit.

1.3 Le groupe de Weyl

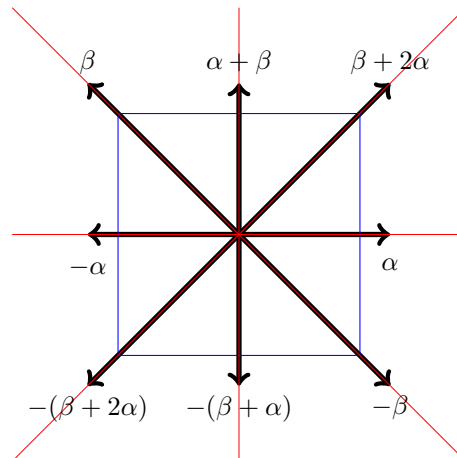
Définition 1.5. Soit R un système de racines. Le groupe de Weyl associé à R est le sous-groupe de $\text{GL}(V)$ engendré par l'ensemble des s_α tels que $\alpha \in R$.

Exemple : On considère $V = \mathbb{R}^2$. Etudions les groupes de Weyl associés aux systèmes de racines réduits dans V (La classification sera démontrée plus tard). Nous avons le système A_2



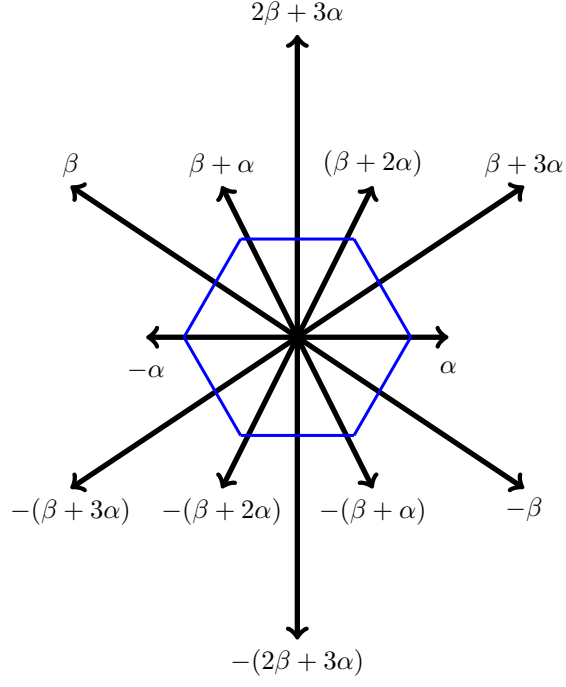
On vérifie aussitôt que le groupe de Weyl est égal au groupe des symétries du triangle de la figure, c'est-à-dire au groupe diédral D_3 .

On a le système B_2



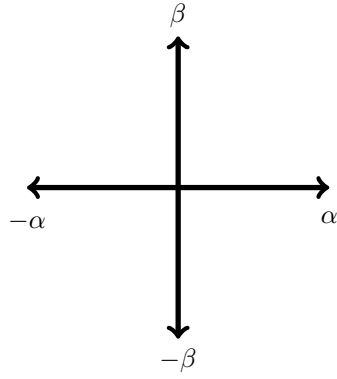
Ici le groupe de Weyl est égal au groupe des symétries du carré.

Nous avons le système G_2



Ici le groupe de Weyl est égal au groupe diédral D_6 .

Finalement nous avons le système $A_1 \times A_1$



Clairement ici le groupe de Weyl est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Proposition 1.1. *Soit R un système de racines. Le groupe de Weyl associé à R est un sous-groupe distingué (ou normal) du groupe des automorphismes de V laissant R invariant (c'est-à-dire du groupe des automorphismes du système de racines (V, R)).*

En effet, pour $g \in \text{Aut}(V)$ tel que $g(R) = R$ et pour $\alpha \in R$, on a :

$$gs_\alpha g^{-1} = s_{g(\alpha)}.$$

Voici la liste des groupes d'automorphismes des systèmes de racines de rang 2 :

Système	A_2	B_2	G_2	$A_1 \times A_1$
W	D_3	D_4	D_6	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$\text{Aut}(V, R)$	D_6	D_4	D_6	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

1.4 Formes quadratiques et système dual

Proposition 1.2. *Soit R un système de racines dans V . Il existe une forme bilinéaire symétrique définie positive $(,)$ sur V qui est invariante par le groupe de Weyl W de R .*

Cette propriété tient du fait que W est fini. En effet, si $B(x, y)$ est une quelconque forme bilinéaire symétrique définie positive sur V , alors la forme

$$(x, y) = \sum_{w \in W} B(wx, wy)$$

est invariante, et $(x, x) > 0$ pour tout x non nul.

Par la suite, nous noterons $(,)$ la forme bilinéaire définie ci-dessus. Le choix de cette forme bilinéaire nous donne une structure d'espace euclidien. Comme s_α est maintenant la symétrie *orthogonale* par rapport à l'hyperplan $\text{Ker}(\alpha)$, on a

$$s_\alpha(x) = x - 2 \frac{(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha \text{ pour tout } x \in V.$$

Soit α' un élément de V correspondant à α^* sous l'isomorphisme $V \rightarrow V^*$ déterminé par la forme bilinéaire choisie précédemment. Par définition, on a

$$s_\alpha(x) = x - (\alpha', x) \alpha \text{ pour tout } x \in V.$$

On déduit de la formule précédente que $\alpha' = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$.

Proposition 1.3. *L'ensemble R^* des racines duales α^* , $\alpha \in R$, est un système de racines dans V^* . De plus, on a $\alpha^{**} = \alpha$ pour tout α appartenant à R .*

1.5 Position relative entre deux racines

On introduit pour la suite une nouvelle notation

$$n(\beta, \alpha) := \langle \alpha^*, \beta \rangle = 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}.$$

Soient α et β deux racines. Notons $|\alpha|$ la longueur de α et ϕ l'angle entre α

et β . On a donc $(\alpha, \beta) = |\alpha| \cdot |\beta| \cdot \cos(\phi)$. On en déduit aisément que

$$n(\beta, \alpha) = 2 \frac{|\alpha|}{|\beta|} \cos \phi.$$

De cette formule, on déduit

$$n(\beta, \alpha)n(\alpha, \beta) = 4 \cos^2 \phi.$$

Or $n(\beta, \alpha)$ est un entier, et $|4 \cos^2 \phi| \leq 4$, donc $n(\beta, \alpha)n(\alpha, \beta)$ vaut 0, 1, 2, 3 ou 4 (le dernier cas étant celui où α et β sont proportionnels). Voici la liste complète des configurations possibles (quitte à échanger α et β).

$n(\alpha, \beta) = 0$	$n(\beta, \alpha) = 0$	$\phi = \pi/2$	
$n(\alpha, \beta) = 1$	$n(\beta, \alpha) = 1$	$\phi = \pi/3$	$ \beta = \alpha $
$n(\alpha, \beta) = -1$	$n(\beta, \alpha) = -1$	$\phi = 2\pi/3$	$ \beta = \alpha $
$n(\alpha, \beta) = 1$	$n(\beta, \alpha) = 2$	$\phi = \pi/4$	$ \beta = \sqrt{2} \alpha $
$n(\alpha, \beta) = -1$	$n(\beta, \alpha) = -2$	$\phi = 3\pi/4$	$ \beta = \sqrt{2} \alpha $
$n(\alpha, \beta) = 1$	$n(\beta, \alpha) = 3$	$\phi = \pi/6$	$ \beta = \sqrt{3} \alpha $
$n(\alpha, \beta) = -1$	$n(\beta, \alpha) = -3$	$\phi = 5\pi/6$	$ \beta = \sqrt{3} \alpha $

Proposition 1.4. *Soient α et β deux racines non proportionnelles. Si $n(\beta, \alpha) > 0$, alors $\alpha - \beta$ est une racine.*

Démonstration. On examine le tableau des configurations. □

1.6 Bases

Soit R un système de racines de V .

Définition 1.6. *Un sous-ensemble S de R est appelé une base de R si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- *Le sous-ensemble S est une base de l'espace vectoriel V .*
- *Tout β appartenant à R peut être écrit comme une combinaison linéaire*

$$\beta = \sum_{\alpha \in S} m_{\alpha} \alpha,$$

où les coefficients m_{α} sont des entiers de même signe.

Théorème 1.1. *Il existe une base.*

Soit $t \in V^*$ un élément tel que $\langle t, \alpha \rangle \neq 0$ pour tout α dans R . En effet, l'ensemble des $t \in V^*$ tels que il existe un α dans R pour lequel $\langle t, \alpha \rangle = 0$ est une réunion finie d'hyperplans. Son complémentaire est donc dense en tant qu'intersection finie de complémentaires d'hyperplans (qui sont denses). Notons R_t^+ l'ensemble des racines α telles que $t(\alpha) > 0$. On a alors $R = R_t^+ \cup (-R_t^+)$. On appelle *racines positives* les éléments de R_t^+ .

Définition 1.7. Une racine α est dite décomposable s'il existe $\beta, \gamma \in R_t^+$ tels que $\alpha = \beta + \gamma$. Sinon, α est dite indécomposable.

Soit S_t l'ensemble des racines indécomposables positives.

Proposition 1.5. L'ensemble S_t est une base de R . Inversement, si S est une base de R et t appartient à V^* tel que $\langle t, \alpha \rangle > 0$ pour tout α dans S , alors $S = S_t$.

Nous allons maintenant montrer que S_t est une base de R .

Lemme 1.2. Toute racine de R_t^+ est combinaison linéaire, à coefficients entiers positifs, des racines de S (S engendre R_t^+).

Démonstration. Soit I l'ensemble des α dans R_t^+ qui ne satisfont pas la propriété ci-dessus. On suppose que I est non vide, alors il existe $\alpha \in I$ tel que $\langle t, \alpha \rangle$ soit minimal. De plus, la racine α est décomposable car elle n'appartient pas à S . On peut donc l'écrire $\alpha = \beta + \gamma$ où β et γ appartiennent à R_t^+ . On a alors

$$\langle t, \alpha \rangle = \langle t, \beta \rangle + \langle t, \gamma \rangle,$$

et comme $\langle t, \beta \rangle$ et $\langle t, \gamma \rangle$ sont strictement positifs (par choix de t), ils sont alors strictement inférieurs à $\langle t, \alpha \rangle$. Par choix de α , on conclut que β et γ n'appartiennent pas à I , ce qui implique que α n'appartient pas à I , contradiction. \square

Lemme 1.3. On a $(\alpha, \beta) \leq 0$ si α et β appartiennent à S_t .

Démonstration. D'après la proposition 1.4, si $(\alpha, \beta) > 0$ alors $\gamma = \alpha - \beta$ est une racine. On aurait alors, $\alpha = \beta + \gamma$ et $\beta = \alpha + (-\gamma)$ et γ ou $-\gamma$ appartiendrait à R_t^+ et α ou β serait décomposable. \square

Lemme 1.4. Soient $t \in V^*$ et $A \subseteq V$ tels que :

- $\langle t, \alpha \rangle > 0$ pour tout $\alpha \in A$.
- $(\alpha, \beta) \leq 0$ pour $\alpha, \beta \in A$.

Les éléments de A sont alors linéairement indépendants.

Démonstration. Toute relation entre les éléments de A peut s'écrire sous la forme

$$\sum y_\beta \beta = z_\gamma \gamma,$$

où les y_β et les z_γ sont tous supérieurs ou égaux à 0 (s'ils ne le sont pas il suffit de les passer de l'autre côté de l'équation), et où β et γ parcourent des parties

finies disjointes de A . Soit λ appartenant à V l'élément $\sum y_\beta \beta$. On a

$$(\lambda, \lambda) = \sum y_\beta (\beta, \gamma),$$

d'où $(\lambda, \lambda) \leq 0$, par (b).

On en conclut que $\lambda = 0$. Mais alors on a

$$0 = \langle t, \lambda \rangle = \sum y_\beta \langle t, \beta \rangle$$

et on en déduit que $y_\beta = 0$ pour tout β et de même $z_\gamma = 0$ pour tout γ . \square

Les lemmes 1.2, 1.3, 1.4 montrent que S_t est une base de R . Inversement, soit S une base de R , et soit $t \in V^*$ tel que $\langle t, \alpha \rangle > 0$ pour tout α dans S . Si l'on désigne par R^+ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers positifs (non strictement) des éléments de S , on a $R^+ \subseteq R_t^+$, $(-R^+) \subseteq (-R_t^+)$, d'où $R_t^+ = R^+$ puisque R est réunion de R^+ et de $-R^+$.

On en déduit que les éléments de S sont indécomposables dans R_t^+ , c'est-à-dire que $S \subseteq S_t$. Comme S et S_t ont le même nombre d'éléments (à savoir la dimension de V), on a $S = S_t$, ce qui achève la démonstration de la proposition 1.5.

1.7 Propriétés des bases

Dans la suite du chapitre, on note S une base pour un système de racines R . On note R^+ l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires à coefficients dans \mathbb{N} des éléments de S . Un élément de R^+ est appelé racine positive.

Proposition 1.6. *Toute racine positive β peut être écrite comme*

$$\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_k \text{ avec } \alpha_i \in S,$$

de telle sorte que toutes les sommes partielles

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_h, \quad 1 \leq h \leq k,$$

soient des racines.

Démonstration. Soit t appartenant à V^* tel que $\langle t, \alpha \rangle = 1$ pour tout $\alpha \in S$. Puisque β est une racine positive, $\langle t, \beta \rangle$ est un entier supérieur ou égal à 1. Démontrons la proposition par récurrence sur $k = \langle t, \beta \rangle$. Notons d'abord que les (α, β) , avec β dans S , ne peuvent pas être tous strictement inférieurs à 0. En effet, sinon le lemme 1.4 montrerait que β et les éléments de S sont linéairement indépendants, ce qui est absurde. Il existe donc un $\alpha \in S$ tel que $(\alpha, \beta) > 0$. On observe deux cas distincts.

Cas 1 : Les racines α et β sont proportionnelles. On a alors $\beta = \alpha$ ou $\beta = 2\alpha$, et la proposition ci-dessus est alors vraie.

Cas 2 : Les racines α et β ne sont pas proportionnelles. On a alors d'après la proposition 1.4, que $\gamma = \beta - \alpha$ est une racine. Si $\gamma \in -R^+$ alors $\alpha = \beta + (-\gamma)$ serait décomposable, ce qui est absurde. On a que γ appartient à R^+ et $\langle t, \gamma \rangle = k - 1$. L'hypothèse de récurrence s'applique à γ , on a donc la proposition en prenant $\alpha_k = \alpha$.

□

Proposition 1.7. *Supposons R réduit et $\alpha \in S$. La symétrie s_α de vecteur α laisse $R^+ \setminus \{\alpha\}$ invariant.*

Démonstration. Soit $\beta \in R^+ \setminus \{\alpha\}$. On a

$$\beta = \sum_{\gamma \in S} m_\gamma \gamma, \text{ avec } m_\gamma \geq 0.$$

On se rappelle que R est réduit, et $\beta \neq \alpha$. Donc β n'est pas proportionnelle à α , et il existe $\gamma \neq \alpha$ telle que $m_\gamma \neq 0$. Comme $s_\alpha(\beta) = \beta - n(\beta, \alpha)\alpha$, on voit que le coefficient de γ dans $s_\alpha(\beta)$ est égal à m_γ . D'où $s_\alpha(\beta) \in R^+$, ce qui démontre la proposition. □

Corollaire 1.1. *Soit ρ la demi-somme des racines positives. Nous avons*

$$s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$$

pour tout α dans S .

Démonstration. Soit ρ_α la demi-somme des éléments de $R^+ \setminus \alpha$. On a évidemment $s_\alpha(\rho_\alpha) = \rho_\alpha$ (par la proposition précédente). De plus, $\rho = \rho_\alpha + \alpha/2$, et on sait que $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$. On en déduit que

$$\begin{aligned} s_\alpha(\rho) &= s_\alpha(\rho_\alpha + \alpha/2) \\ &= s_\alpha(\rho_\alpha) + s_\alpha(\alpha/2) \\ &= \rho_\alpha - \alpha/2 \\ &= \rho - \alpha. \end{aligned}$$

□

Proposition 1.8. *Supposons que R est réduit. L'ensemble S^* des racines duales des éléments de S est une base de R^* .*

Démonstration. Soit R' le système de racines formé de $\alpha' = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$, pour α appartenant à R . Il suffit (transport de structure) de prouver que $\alpha', \alpha \in S$, forment une base de R' . Si t appartenant à V^* est tel que $\langle t, \alpha \rangle > 0$ pour tout α dans S , alors $(R')_t^+$ est formé des α' avec α dans R^+ . Le cône convexe C engendré par $(R')_t^+$ est le même que celui engendré par R^+ . Soit S'_t la base correspondante de R' . Les demi-droites engendrées par les éléments de S'_t sont les *génératrices extrémales* de C (ce sont les demi-droites $R^+ \alpha$ avec $\alpha \in S$). Comme R est réduit, une telle demi-droite contient une seule racine de R' , à savoir α' . On a démontré que $S'_t = S'$, et par conséquent, la proposition. □

Remarque : Dans le cas général, soit S_1 (resp. S_2) la partie formée des racines α dont le double n'est pas une racine (resp. dont le double est une racine). On obtient une base de R^* en prenant les α^* , $\alpha \in S_1$ et les $\alpha^*/2$, $\alpha \in S_2$.

1.8 Relations avec les groupes de Weyl

On suppose R réduit.

Théorème 1.2. *Soit W le groupe de Weyl de R .*

- (a) *Pour tout t dans V^* , il existe w dans W tel que $\langle w(t), \alpha \rangle$ soit positif ou nul pour tout α dans S .*
- (b) *Si S' est une base de R , il existe w dans W tel que $w(S') = S$.*
- (c) *Pour tout β dans R , il existe w dans W tel que $w(\beta)$ appartienne à S .*
- (d) *Le groupe W est engendré par les s_α , $\alpha \in S$.*

Démonstration. Soit W_S le sous-groupe de W engendré par les s_α , $\alpha \in S$. Tout d'abord, nous allons montrer (a), (b) et (c) pour W_S . Ensuite, nous montrerons que $W_S = W$, c'est-à-dire (d).

- (a) Soit $t \in V^*$, et soit ρ la demi-somme des racines positives. Choisissons un élément w de W_S tel que $\langle w(t), \rho \rangle$ soit maximum. On aura en particulier

$$\langle w(t), \rho \rangle \geq \langle s_\alpha(w(t)), \rho \rangle \text{ si } \alpha \in S.$$

Mais on a aussi

$$\begin{aligned} \langle s_\alpha(w(t)), \rho \rangle &= \langle w(t), s_\alpha^{-1}(\rho) \rangle \\ &= \langle w(t), s_\alpha(\rho) \rangle && \text{(car } s_\alpha \text{ est une symétrie)} \\ &= \langle w(t), \rho - \alpha \rangle && \text{(d'après le cor. de la prop. 1.7)} \\ &= \langle w(t), \rho \rangle - \langle w(t), \alpha \rangle. \end{aligned}$$

On en conclut que $\langle w(t), \alpha \rangle \geq 0$ ce qui démontre notre assertion.

- (b) Soit t' un élément de V^* tel que $\langle t', \alpha' \rangle$ soit strictement positif pour tout α' dans S' . D'après (a), il existe $w \in W_S$ tel que, si on pose $t = w(t')$, on ait $\langle t, \alpha \rangle \geq 0$ pour tout $\alpha \in S$. Comme $\langle t, \alpha \rangle = \langle w(t'), \alpha \rangle = \langle t', w^{-1}(\alpha) \rangle$ et que t' n'est orthogonal à aucune racine, on a que $\langle t, \alpha \rangle$ est aussi strictement positif pour tout $\alpha \in S$. D'après la prop. 1.5 on a $S = S_t$ et $S' = S_{t'}$. Comme w envoie t' sur t , alors il envoie aussi S' sur S .
- (c) Soient β appartenant à R , et L l'hyperplan de V^* orthogonal à β . Les hyperplans associés aux racines différentes de $\pm\beta$ sont distincts de L , et en nombre fini. On en conclut qu'il existe un élément t_0 de L qui n'est contenu dans aucun de ces hyperplans. On a

$$\langle t_0, \beta \rangle = 0$$

et

$$\langle t_0, \gamma \rangle \neq 0 \text{ pour } \gamma \in R, \gamma \neq \pm\beta.$$

On peut trouver un élément t proche de t_0 pour que $\langle t, \beta \rangle = \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$, et $|\langle t, \gamma \rangle| > \varepsilon$ pour tout $\gamma \neq \pm\beta$. Soit S_t la base de R associée à t (par

le procédé la section 1.6 sur les bases), alors il est clair que β appartient à S_t . Or, il existe w appartenant à W_S tel que $w(S_t) = S$ (d'après (b)), alors on a $w(\beta) \in S$.

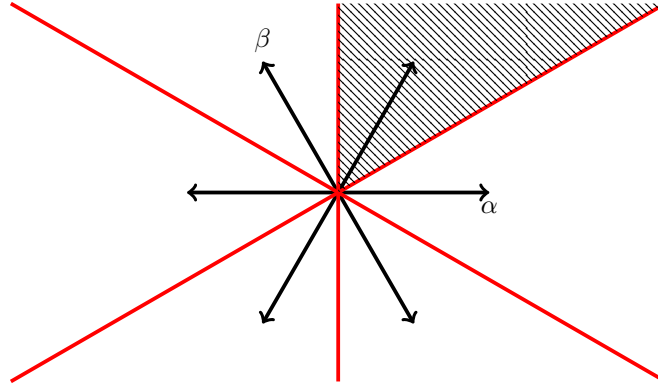
Il nous reste à montrer que $W_S = W$. Comme W est engendré par les symétries s_β , avec $\beta \in R$, il suffit de voir que s_β appartient à W_S . D'après (c), il existe $w \in W_S$ tel que $\alpha = w(\beta)$ appartienne à S . On a

$$s_\alpha = s_{w(\beta)} = w.s_\beta.w^{-1},$$

d'où $s_\beta = w^{-1}.s_\alpha.w$, ce qui induit que s_β appartient à W_S . \square

Remarque :

- (1) On peut montrer que l'élément w donné par (b) est unique.
- (2) L'ensemble des éléments $t \in V^*$ tel que $\langle t, \alpha \rangle > 0$ pour tout $\alpha \in S$ s'appelle la *chambre de Weyl* associé à S . D'après (a) et (b), les chambres de Weyl sont les *composantes connexes* de V^* privé des hyperplans orthogonaux aux racines. Le groupe W les permute transitivement et même simplement transitivement d'après la remarque (1).



Exemple de chambre de Weyl de A_2 .

- (3) On peut affiner (d) en montrant que les relations entre les générateurs s_α ($\alpha \in S$) de W sont des conséquences des relations

$$s_\alpha^2 = 1 \text{ et } (s_\alpha.s_\beta)^{m(\alpha,\beta)} = 1$$

avec $m(\alpha, \beta)$ valant 2, 3, 4 ou 6 suivant que l'angle entre α et β vaille $\pi/2$, $2\pi/3$, $3\pi/4$ ou $5\pi/6$.

1.9 Matrice de Cartan

Définition 1.8. On appelle *matrice de Cartan* de R (respectivement à la base S choisie) la matrice $(n(\alpha, \beta))_{\alpha, \beta \in S}$.

Exemple : On étudie les matrices de Cartan des systèmes de racines réduits dans \mathbb{R}^2 .

La matrice de Cartan de A_2 est $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

La matrice de Cartan de B_2 est $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

La matrice de Cartan de G_2 est $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

La matrice de Cartan de $A_1 \times A_1$ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Théorème 1.3. *Un système de racine réduit est déterminé à isomorphisme près par sa matrice de Cartan.*

Proposition 1.9. *Soient R' un système de racines réduit dans l'espace vectoriel V' , et S' une base de R' , et φ une bijection de S dans S' telle que $n(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = n(\alpha, \beta)$ pour tout α, β dans S . Si R est réduit, alors il existe un unique isomorphisme f de V dans V' qui soit l'extension de φ et envoie R sur R' .*

Démonstration. On définit f par linéarité à partir de φ . Si $\alpha, \beta \in S$ on a

$$s_{\varphi(\alpha)} \circ f(\beta) = s_{\varphi(\alpha)}(\varphi(\beta)) = \varphi(\beta) - n(\varphi(\beta), \varphi(\alpha))\varphi(\alpha)$$

et

$$f \circ s_\alpha(\beta) = f(\beta - n(\beta, \alpha)\alpha) = \varphi(\beta) - n(\beta, \alpha)\alpha.$$

En comparant, on déduit que $s_{\varphi(\alpha)} \circ f(\beta) = f \circ s_\alpha(\beta)$ pour tout α dans S . Si W (resp. W') désigne le groupe de Weyl de R (resp. R'), on voit que $W' = fWf^{-1}$. Comme $R = W(S)$ et $R' = W'(S')$, on tire que $f(R) = R'$. \square

Remarque : En particulier, soit E le groupe des permutations de S qui laissent la matrice de Cartan invariante. D'après ce qui précède, E s'identifie au groupe des automorphismes de R laissant la base S stable.

Proposition 1.10. *Le groupe des automorphismes de R est produit semi-direct de E et de W .*

Démonstration. Si $w \in W \cap E$, on a $w(S) = S$, ce qui implique que $w = 1$ (car W opère de façon simplement transitive¹). De plus, si $u \in \text{Aut}(R)$, $u(S)$ est une base de R , donc il existe $w \in W$ tel que $w(u(S)) = S$ (d'après le théorème 1.2). On a alors $wu \in E$, ce qui montre que $\text{Aut}(R) = W.E$. Comme on l'a vu dans la proposition 1.1, le groupe de Weyl W est distingué dans $\text{Aut}(R)$. \square

Corollaire 1.2. *Le groupe $\text{Aut}(R)/W$ est isomorphe à E .*

1. Voir [5, section 7.5]

1.10 Graphe de Coxeter

Définition 1.9. On appelle graphe de Coxeter de R (relativement à la base S choisie) le graphe dont les sommets sont les éléments de S , et qui, pour tous $\alpha, \beta \in S$ distincts, possède $n(\alpha, \beta).n(\beta, \alpha) \in \{0, 1, 2, 3\}$ arêtes entre α et β .

On rappelle que pour tous $\alpha, \beta \in R$,

$$n(\alpha, \beta).n(\beta, \alpha) = 4 \cos^2 \phi$$

avec ϕ l'angle de α et β .

Exemple : On étudie les graphes de Coxeter des systèmes de racines réduits dans \mathbb{R}^2 .

- type A_1
- • type $A_1 \times A_1$
- — • type A_2
- ═ • type B_2
- ══ • type G_2

1.11 Systèmes de racines irréductibles

Proposition 1.11. Supposons que V soit somme directe de deux sous-espaces V_1 et V_2 , et que R soit contenu dans $V_1 \cup V_2$. Soit $R_i = R \cap V_i$, $i = 1, 2$. Alors,

- (a) V_1 et V_2 sont orthogonaux.
- (b) R_i est un système de racines dans V_i .

Démonstration.

- Soient $\alpha \in R_1$ et $\beta \in R_2$. Alors $\alpha - \beta$ n'appartient pas à $V_1 \cup V_2$ donc n'est pas une racine. D'après la prop. 1.4, on sait que $(\alpha, \beta) \leq 0$. Comme ceci s'applique aussi à α et à $-\beta$, on en déduit que $(\alpha, \beta) = 0$. Comme R_i engendrent V_i , on en déduit (a).
- D'après (a), on remarque que la symétrie définie par un élément de R_1 laisse stable V_2 , donc aussi V_1 . Donc R_1 est un système de racines par sa définition. De même pour R_2 . On a démontré (b).

□

Définition 1.10. On dit que le système R est somme des sous-systèmes R_i . Si cela n'est possible qu'avec V_1 ou V_2 réduit à 0, et $V \neq 0$, alors le système est dit irréductible.

Proposition 1.12. Tout système de racines est somme de système irréductibles.

Cela est clair par récurrence sur le rang. On peut montrer qu'en outre cette décomposition est unique² : Si on a

$$R = R_1 \bigoplus \dots \bigoplus R_s = R'_1 \bigoplus \dots \bigoplus R'_t$$

alors $s = t$ et $R'_i = R_{\pi(i)}$ pour une permutation $\pi \in \mathfrak{S}_s$.

Proposition 1.13. *Pour que R soit irréductible, il faut et il suffit que son graphe de Coxeter soit connexe et non vide.*

Démonstration. Si R est somme de deux sous-systèmes non triviaux R_1 et R_2 , on peut prendre pour base S de R la réunion de deux bases S_1 et S_2 de R_1 et R_2 . Si $\alpha \in S_1$ et $\beta \in S_2$, alors α et β sont orthogonaux, donc ne sont joints par aucune arête dans le graphe de Coxeter de S . On en déduit que ce dernier est la réunion disjointe des graphes de Coxeter des S_i , et il n'est donc pas connexe. Réciproquement, si S admet une partition non triviale $S = S_1 \cup S_2$ telle que S_1 et S_2 soient orthogonaux, alors les sous-espaces vectoriels V_1 et V_2 engendrés par S_1 et S_2 sont orthogonaux. De plus, ils sont stables par symétries s_α , $\alpha \in S$. On en déduit que R est contenu dans $V_1 \cup V_2$, donc réductible. \square

1.12 Classification des graphes de Coxeter connexes

Théorème 1.4. *Tout graphe de Coxeter connexe non vide est isomorphe à l'un des suivants :*

$$A_n : \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \quad (n \text{ sommets } n \geq 1)$$

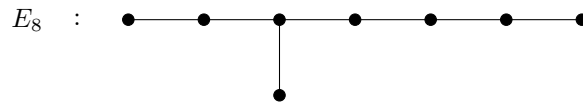
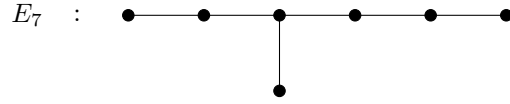
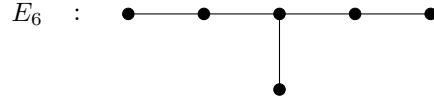
$$B_n : \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{=} \bullet \quad (n \text{ sommets } n \geq 2)$$

$$D_n : \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \begin{array}{l} \nearrow \bullet \\ \searrow \bullet \end{array} \quad (n \text{ sommets } n \geq 4)$$

$$G_4 : \bullet \text{=} \bullet$$

$$F_4 : \bullet \text{---} \bullet \text{=} \bullet \text{---} \bullet$$

2. Voir [1, Chapitre IV, section 1.2] pour la démonstration.



Ce théorème sera démontré en partie 2.

1.13 Diagrammes de Dynkin

Nous nous bornons, par souci de simplicité, aux systèmes de racines qui sont à la fois réduits et irréductibles.

Le graphe de Coxeter ne suffit pas à déterminer la matrice de Cartan, donc le système de racines. Il ne fournit en effet que les angles des couples de racines de la base, sans indiquer laquelle est la plus longue. Deux systèmes inverses l'un de l'autre (par exemple B_n et C_n que nous verrons en section 1.14) ont le même graphe de Coxeter.

La matrice de Cartan pourra être déterminée à partir d'un graphe de Coxeter si l'on y ajoute les rapports de longueur des racines. Pour pallier ce problème, on va tout simplement munir les sommets du graphe de Coxeter de coefficients représentant le carré de la longueur de la racine. Le graphe de Coxeter ainsi complété est appelé *diagramme de Dynkin* de R .

Proposition 1.14. *Les données du diagramme de Dynkin ou de la matrice de Cartan sont équivalentes. Elles déterminent le système de racines à isomorphisme près.*

Démonstration. Explicitons la façon dont on détermine la matrice de Cartan à partir du diagramme de Dynkin. Soient α et β deux racines de R .

- Si $\alpha = \beta$, on a $n(\alpha, \beta) = 2$.
- Si $\alpha \neq \beta$, et α et β ne sont pas liés par une arête, on a $n(\alpha, \beta) = 0$.
- Si $\alpha \neq \beta$, et α et β sont liés par au moins une arête, et si le coefficient de α est inférieur à celui de β , on a $n(\alpha, \beta) = -1$.
- Si $\alpha \neq \beta$, et α et β sont liés par i arêtes ($1 \leq i \leq 3$), et si le coefficient de α est supérieur à celui de β , on a $n(\alpha, \beta) = -i$.

Dans le dernier cas, le coefficient de α est égal à i fois celui de β , on pourrait donc se dispenser de tracer plusieurs traits. \square

Théorème 1.5. *Tout diagramme de Dynkin connexe non vide est isomorphe à l'un des suivants :*

$$A_n : \begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad 1 \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array} \quad (n \text{ sommets } n \geq 1)$$

$$B_n : \begin{array}{c} 2 \quad 2 \quad \dots \quad 2 \quad 1 \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{=} \bullet \end{array} \quad (n \text{ sommets } n \geq 2)$$

$$C_n : \begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad 2 \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{=} \bullet \end{array} \quad (n \text{ sommets } n \geq 3)$$

$$D_n : \begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad 1 \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \bullet \end{array} \quad (n \text{ sommets } n \geq 4)$$

$$G_6 : \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \bullet \text{=} \bullet \end{array}$$

$$F_4 : \begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \\ \bullet \text{---} \bullet \text{=} \bullet \text{---} \bullet \end{array}$$

$$E_6 : \begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \bullet \end{array}$$

$$E_7 : \begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \bullet \end{array}$$

$$E_8 : \begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \bullet \end{array}$$

Ce théorème est immédiat à partir du théorème 1.4.

Remarque :

- (1) Inversement, les diagrammes de Dynkin ci-dessus correspondent effectivement à des systèmes de racines. Cela peut se voir en construisant explicitement ces systèmes (nous le ferons dans la section suivante).
- (2) Il résulte de la proposition 1.13 que le groupe E des automorphismes de la matrice de Cartan est celui des automorphismes du diagramme de Dynkin. Un simple coup d'oeil sur la liste du théorème 1.5 montre alors que $E = \{1\}$ pour les types $A_1, B_n, C_n, G_2, F_4, E_7, E_8$.
 E est un groupe à deux éléments pour $A_n (n \geq 2), D_n (n \geq 5), E_6$.
 E est isomorphe au groupe des permutations de trois symboles pour le type D_4 .
- (3) Un diagramme de Dynkin est souvent représenté par un symbole comme

$$B_n : \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \rightrightarrows \bullet$$

où le signe $>$ sur l'arête multiple indique laquelle des deux racines est la plus longue (il indique l'inégalité entre les longueurs). On a avec cette notation

$$C_n : \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \leftrightsquigarrow \bullet$$

$$G_2 : \bullet \rightrightarrows \bullet$$

$$F_4 : \bullet \text{---} \bullet \rightrightarrows \bullet \text{---} \bullet$$

1.14 Construction des systèmes de racines irréductibles

Dans cette section, on note e_1, \dots, e_n la base canonique de \mathbb{R}^n , et l'on munit \mathbb{R}^n de la forme bilinéaire $(,)$ telle que $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. On note L_n le sous-groupe engendré par les e_i .

Construction de A_n ($n \geq 1$) :

On prend pour V l'hyperplan de \mathbb{R}^{n+1} orthogonal à $e_1 + \dots + e_{n+1}$. Le système de racines R est formé des éléments $\alpha \in V \cap L_{n+1}$ tels que $(\alpha, \alpha) = 2$. La symétrie s_α associée à un tel élément s'écrit $\beta \mapsto \beta - (\alpha, \beta)\alpha$.

Le fait que R soit un système de racines en résulte immédiatement.

Les éléments de R sont les $e_i - e_j$, $i \neq j$. On peut prendre pour base de S la famille des $e_i - e_{i+1}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Le groupe de Weyl s'identifie au groupe des permutations de e_1, \dots, e_n .

Construction de B_n ($n \geq 1$) :

Dans l'espace $V = \mathbb{R}^n$, on prend pour R l'ensemble des $\alpha \in L_n$ tels que $(\alpha, \alpha) \in \{1, 2\}$. Ce sont les $\pm e_i$ et les $\pm e_i \pm e_j$ ($i \neq j$).
 Une base est $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_n$, et le groupe de Weyl est l'ensemble des permutations et changements de signe des e_i .

Remarque : Pour $n = 1$, ce système est isomorphe à A_1 .

Construction de C_n ($n \geq 1$) :

On prend le système de racines dual de B_n , il est formé des $\pm e_i \pm e_j$ ($i \neq j$) et des $\pm 2e_i$.
 Une base est $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, 2e_n$, et le groupe de Weyl est le même que celui de B_n .

Remarque : Pour $n \leq 2$, ce système est isomorphe à B_n .

Construction de D_n ($n \geq 2$) :

On prend l'ensemble $V = \mathbb{R}^n$, avec R l'ensemble des α dans L_n tels que $(\alpha, \alpha) = 2$. Ce sont les $\pm e_i \pm e_j$ ($i \neq j$).
 Une base est $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_{n-1} + e_n$, et le groupe de Weyl est le groupe des permutations et changements de signe en nombre pair des e_i ($W \leq \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$).

Remarque : Pour $n = 2$, ce système est isomorphe à $A_1 \times A_1$, et pour $n = 3$, il est isomorphe à A_2 .

Construction de G_2 :

La construction a été faite en section 1.3.

Construction de F_4 :

Dans $V = \mathbb{R}^4$, soit L'_4 le sous-groupe engendré par L_4 et $\frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$.
 On prend pour R l'ensemble des $\alpha \in L'_4$ tels que $(\alpha, \alpha) = 1$ ou $(\alpha, \alpha) = 2$. Ce sont les $\pm e_i$, les $\pm e_i \pm e_j$ ($i \neq j$), et les $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$.
 Une base est $e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4, \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$.
 Plus d'informations dans [1, Chapitre IV, section 4.3].

Construction de E_8 :

Dans $V = \mathbb{R}^8$, soit L'_8 le sous-groupe engendré par L_8 et $\frac{1}{2}(e_1 + \dots + e_8)$, et soit L''_8 le sous-groupe de L'_8 formé des éléments dont la somme des coordonnées est un entier pair. On prend pour R l'ensemble des $\alpha \in L''_8$ tels que $(\alpha, \alpha) = 2$.

Ce sont les

$$\pm e_i \pm e_j, \text{ avec } (i \neq j)$$

et les

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 (-1)^{m(i)} e_i \text{ avec } \sum m(i) \text{ pair.}$$

Une base est $\frac{1}{2}(e_1 + e_8 - \sum_{i=2}^7 e_i), e_1 + e_2, e_2 - e_1, e_3 - e_2, e_4 - e_3, e_5 - e_4, e_6 - e_5, e_7 - e_6$.

Plus d'informations dans [1, Chapitre IV, section 4.3].

Construction de E_6 et E_7

On prend l'intersection du système E_8 (construit ci-dessus) avec le sous-espace vectoriel engendré par les 6 premiers (respectivement les 7 premiers) éléments de la base pour obtenir E_6 (respectivement E_7).

Systèmes de racines non réduits

On peut montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe un unique (à isomorphisme près) système de racines irréductible non réduit. Il s'agit du système BC_n obtenu par réunion des systèmes B_n et C_n .

2 Démonstration de la classification

On a montré dans la section 1.9 que tout système de racines réduit est déterminé à isomorphisme près par sa matrice de Cartan et dans la section 1.11 que tout système de racines est somme de systèmes de racines irréductibles. Le problème est alors réduit à déterminer les matrices de Cartan des systèmes de racines irréductibles.

Tout ensemble fini $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ de vecteurs linéairement indépendants sera appelé *configuration autorisée* (c.a.) s'ils vérifient $n(\alpha_i, \alpha_j)n(\alpha_j, \alpha_i) = 4 \cos^2 \theta_{ij} = 0, 1, 2$ ou 3 et $\cos \theta_{ij} \leq 0$ avec θ_{ij} l'angle entre α_i et α_j pour tout $i, j, i \neq j$. On peut remplacer α_i par le vecteur unité u_i qui est un multiple positif de α_i .

Proposition 2.1. *Si S est un graphe de Coxeter, le graphe obtenu en supprimant un nombre de sommets et les arêtes incidentes avec ceux-ci est le graphe associé à la configuration obtenue en enlevant les vecteurs correspondants aux sommets.*

Proposition 2.2. *Si l est le nombre de sommets d'un graphe de Coxeter, alors le nombre de paires de sommets connectés est strictement inférieur à l .*

Démonstration. Soit $u = \sum_{i=1}^l u_i$. Alors

$$0 < (u, u) = l + 2 \sum_{i < j} (u_i, u_j).$$

Si $(u_i, u_j) \neq 0$, alors $2(u_i, u_j) \leq -1$. L'inégalité montre que le nombre de paires u_i, u_j avec $(u_i, u_j) \neq 0$ est inférieur à l . \square

Proposition 2.3. *Un graphe de Coxeter d'une c.a. ne contient pas de cycles.*

Démonstration. Un graphe contenant un cycle ne respecte pas la proposition 2.2. \square

Proposition 2.4. *Le nombre d'arêtes (en comptant les multiplicités) reliées à un même point ne peut pas dépasser trois.*

Démonstration. Soient u un sommet, et v_1, v_2, \dots, v_k les sommets connectés à u . Il n'y a pas deux v_i connectés car il n'y a pas de cycles. Ainsi, on a $(v_i, v_j) = 0$, $i \neq j$. Dans l'espace $E = \text{Vect}(\{u, v_1, v_2, \dots, v_k\})$ on peut choisir un vecteur v_0 tel que $(v_0, v_0) = 1$ et v_0, v_1, \dots, v_k sont mutuellement orthogonaux. C'est pourquoi u et les v_i , $v \geq 1$, sont linéairement indépendants, u n'est pas orthogonal à v_0 et donc $(u, v_0) \neq 0$. On a alors $u = \sum_0^k (u, v_j) v_j$,

$$(u, u) = (u, v_0)^2 + (u, v_1)^2 + \dots + (u, v_k)^2 = 1.$$

D'où $\sum_1^k (u, v_i)^2 < 1$ et $\sum_1^k 4(u, v_i)^2 < 4$. Or, $4(u, v_i)^2$ est le nombre d'arêtes entre u et v_i . Donc nous avons notre résultat. \square

Proposition 2.5. *Le seul graphe de Coxeter connexe contenant une arête triple entre deux sommets est G_2 .*

Démonstration. Cette proposition découle directement de la proposition 2.4. \square

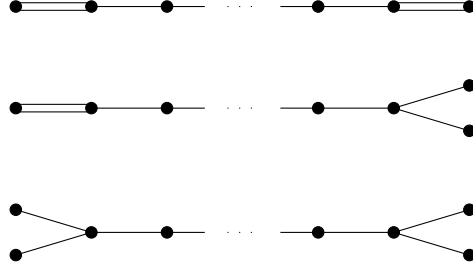
Proposition 2.6. *Soient π une c.a. et v_1, v_2, \dots, v_k des vecteurs de π tels que les sommets correspondant du graphe forment une chaîne simple dans le sens que chaque sommet est connecté au suivant par une unique arête. Soit π' l'ensemble formé des vecteurs de π qui ne sont pas dans la chaîne simple ci-dessus et du vecteur $v = v_1 + \dots + v_k$. Alors π' est une c.a.*

Démonstration. Nous avons $2(v_i, v_{i+1}) = -1$, $i = 1, \dots, k-1$. En outre, on a $(v, v) = k + 2 \sum_{i < j} (v_i, v_j)$. Puisqu'il n'y a pas de cycle, $(v_i, v_j) = 0$ si $i < j$ à moins que $j = i+1$. D'où $(v, v) = k - (k-1) = 1$ et v est un vecteur unitaire. Maintenant, prenons u dans π , avec $u \neq v$, alors u est connecté avec au plus un des v_i , qu'on va noter v_j , parce qu'il n'y a pas de cycles. De plus, on a

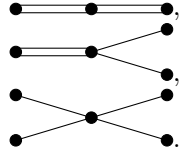
$(u, v_1 + \dots + v_k) = (u, v_j)$ et $4(u, v)^2 = 4(u, v_j)^2 = 0, 1, 2$ ou 3 .

Le graphe de π' est obtenu à partir de π en rétrécissant la chaîne simple en un sommet. Ainsi, on remplace les sommets v_i par l'unique sommet v que l'on joint à tous les sommets u dans π n'appartenant pas à la chaîne par la somme totale des arêtes entre u et l'ensemble des v_i dans la configuration original. \square

Proposition 2.7. *Aucun graphe de Coxeter ne contient de sous-graphes des formes suivantes :*

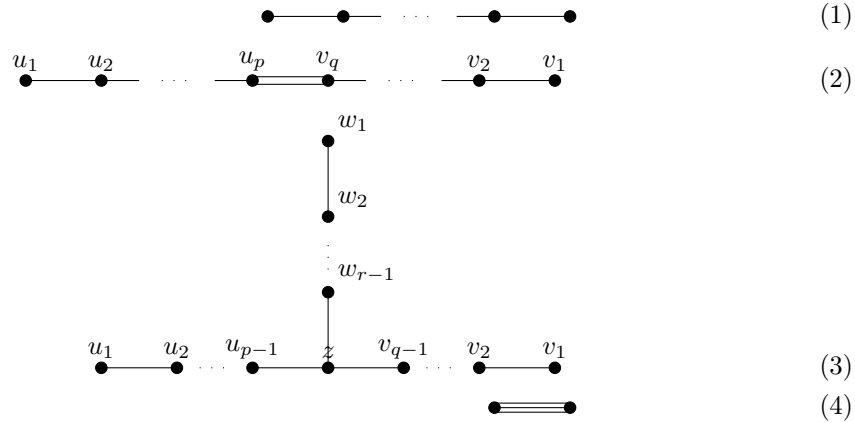


Démonstration. D'après la proposition 2.6, si un des graphes ci-dessus est un graphe de Coxeter, alors, un des graphes suivants aussi :

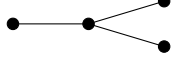


Or, d'après la proposition 2.4, aucun des graphes présentés ne peut être une c.a. \square

Proposition 2.8. *Les seuls graphes de Coxeter connexes ont une des formes suivantes :*



Démonstration. Si un graphe de Coxeter connexe S contient une arête triple, alors il s'agit de (4) par la proposition 2.5. Si S contient une arête double, alors il en contient une seule et ne contient pas de sommets qui sont de la forme



C'est clair par la proposition 2.7. \square

Proposition 2.9. *Les seuls graphes de Coxeter connexes du type (2) sont B_n ($= C_n$) et F_4 .*

Démonstration. Pour commencer, on prend $u = \sum_{i=1}^p iu_i$, $v = \sum_{j=1}^q jv_j$. Ainsi, comme nous avons $2(u_i, u_{i+1}) = -1$ et $2(v_j, v_{j+1}) = -1$, nous avons aussi

$$\begin{aligned} (u, u) &= \sum_{i=1}^p i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i+1) \\ &= p^2 - p(p-1)/2 \\ &= p(p+1)/2 \end{aligned}$$

et

$$(v, v) = q(q+1)/2.$$

De plus, on a $(u, v) = pq(u_p, v_q) = (pq/2) \cdot 2(u_p, v_q)$ et $(u, v)^2 = p^2q^2/2$. Ainsi, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on remarque que

$$\frac{p^2q^2}{2} < \frac{p(p+1)}{2} \frac{q(q+1)}{2}.$$

De plus on sait que $pq > 0$, ce qui donne $(p+1)(q+1) > 2pq$, ce qui est équivalent à $(p-1)(q-1) < 2$. Donc, les seuls possibilités en prenant p, q des entiers positives sont $p = 1$ avec q quelconque, $q = 1$ avec p quelconque, et $p = 2 = q$. Or, les deux premiers cas diffèrent seulement en notation. \square

Proposition 2.10. *Les seuls graphes de Coxeter connexes du type (3) sont D_n , E_4 , E_7 , E_8 .*

Démonstration. On commence par prendre $u = \sum_{i=1}^{p-1} iu_i$, $v = \sum_{j=1}^{q-1} jv_j$ et $w = \sum_{k=1}^{r-1} kw_k$. Les vecteurs u, v et w sont orthogonaux entre eux et z n'est pas dans l'espace engendré par ces vecteurs. Par conséquence, si θ_1 , θ_2 et θ_3 sont respectivement les angles entre z et u, v et w alors $\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 < 1$. On

a aussi

$$\begin{aligned}
\cos^2 \theta_1 &= (u, z)^2 / (u, u) \\
&= \frac{1}{4} (p-1)^2 / (p(p-1)/2) \text{ voir la démonstration ci-dessus} \\
&= (p-1)/2p \\
&= \frac{1}{2} (1 - 1/p).
\end{aligned}$$

De même, on a $\cos^2 \theta_2 = \frac{1}{2} (1 - 1/q)$ et $\cos^2 \theta_3 = \frac{1}{2} (1 - 1/r)$. On en déduit que

$$\frac{1}{2} (1 - 1/p + 1 - 1/q + 1 - 1/r) < 1$$

ou

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1. \quad (5)$$

On peut supposer $p \geq q \geq r (\geq 2)$. Dans ce cas, $p^{-1} \leq q^{-1} \leq r^{-1}$ et l'inégalité (5) impliquent que $3r^{-1} > 1$. Comme on a aussi $r \geq 2$, on déduit que $r = 2$. Ensuite, l'inégalité (5) donne $p^{-1} + q^{-1} > 1/2$. C'est pourquoi on a $2q^{-1} > 1/2$ et $q < 4$. Ainsi, q appartient à $[2, 4[$.

Si $q = 2$, alors il faut que $p^{-1} > 0$. Or, cette condition est vérifiée pour tout p .

Si $q = 3$, alors il faut que $p^{-1} > 1/6$. Or, cette condition est vérifiée si $p < 6$ donc $p \in \{3, 4, 5\}$.

On a lors $r = q = 2$ avec un p quelconque ou bien $r = 2$, $q = 3$ et $p \in \{2, 3, 4\}$. \square

Avec ça, nous avons terminé la classification des systèmes de racines.

3 Description de l'algorithme de Gabriel

Pour classifier les systèmes de racines réduits et irréductibles, il a fallu trouver les diagrammes de Dynkin susceptibles de provenir d'un système de racines, puis pour chaque diagramme de Dynkin ainsi obtenu, trouver un système de racines associé.

On se propose de décrire un algorithme (l'algorithme de Gabriel) qui facilite la seconde partie de la classification en trouvant un système de racines pour chaque diagrammes de Dynkin.

3.1 Carquois valués acycliques

La notion de carquois valués acycliques est importante dans l'algorithme de Gabriel, nous la définissons donc dans cette section.

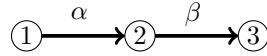
Définition 3.1. *Un carquois Q est un quadruplet (Q_0, Q_1, s, b) avec*

— Q_0 un ensemble qu'on appelle ensemble de sommets,

- Q_1 un ensemble qu'on appelle ensemble de flèches,
- s et b deux applications de Q_1 dans Q_0 qui à chaque flèche associe respectivement les sommets de départ et d'arrivée de la dite flèche.

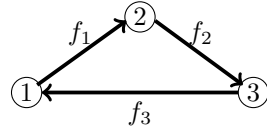
Exemple : Voici une représentation du carquois défini par

- $Q_0 = \{1, 2, 3\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta\}$,
- $s(\alpha) = 1$, $s(\beta) = 2$,
- $b(\alpha) = 2$ et $b(\beta) = 3$.



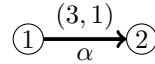
Définition 3.2. Un carquois est dit *acyclique* s'il n'existe pas de suite f_1, f_2, \dots, f_n de flèches (d'éléments de Q_1) avec $s(f_1) = b(f_n)$ et $b(f_i) = s(f_{i+1})$ pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Exemple : Le carquois suivant n'est pas acyclique.



Définition 3.3. Un carquois *valué* est la donnée d'un carquois Q et d'une application v de l'ensemble des flèches (Q_1) dans E , avec E un ensemble quelconque.

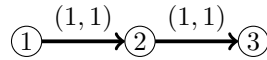
Exemple :



Ici, v est une application de l'ensemble des flèches (Q_1) dans \mathbb{N}^2 tel que $v(\alpha) = (3, 1)$.

Définition 3.4. Un carquois Q *valué à valeur dans \mathbb{N}^2* est appelé *orientation* d'un diagramme de Dynkin si son *graphe valué sous-jacent* (le graphe obtenu en ignorant les directions des flèches) est un diagramme de Dynkin.

Exemple : Le carquois suivant est une orientation de A_2 .



3.2 Répétition d'un carquois valué

Soit (Q, v) un carquois valué à valeur dans \mathbb{N}^2 , c'est-à-dire que pour toute flèche $\alpha \in Q_1$

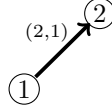
$$v(\alpha) = (v(\alpha)_1, v(\alpha)_2)$$

avec $v(\alpha)_1$ et $v(\alpha)_2 \in \mathbb{N}$.

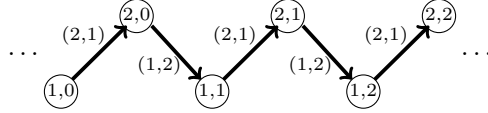
Définition 3.5. La répétition du carquois (Q, v) est le carquois $(\mathbb{Z}Q, v')$ défini par

- $\mathbb{Z}Q_0 = \{(i, p) \in Q_0 \times \mathbb{Z}\}$,
- pour $p \in \mathbb{Z}$, β_p est une flèche de (i, p) vers (j, p) si α est une flèche de i vers j et dans ce cas $v'(\beta_p) = v(\alpha)$,
- pour $p \in \mathbb{Z}$, β_p est une flèche de $(j, p-1)$ vers (i, p) si α est une flèche de i vers j et dans ce cas $v'(\beta_p) = (v(\alpha)_2, v(\alpha)_1)$.

Exemple :



Voici la répétition du carquois ci dessus :



3.3 Description de l'algorithme de Gabriel

Cet algorithme prend en argument un carquois Q valué et acyclique à valeurs dans \mathbb{N}^2 et renvoie des vecteurs de \mathbb{Z}^{Q_0} qu'on appelle *vecteurs dimensions*. Ces vecteurs dimensions respectent la propriété ci-dessous.

Proposition 3.1. Soit Q une orientation d'un diagramme de Dynkin Δ . On a alors que les vecteurs dimensions fournis sont les racines du système de racines réduit et irréductible associé à Q . Ceux-ci sont exprimés dans la base des racines simples.

Algorithme de Gabriel

Cet algorithme associe à chaque sommet (x, p) de la répétition $\mathbb{Z}Q$ un vecteur qu'on appelle vecteur dimension et que l'on note $d(x, p)$.

- On effectue un tri topologique sur les sommets du carquois Q , et on note x_1, x_2, \dots, x_n les sommets de Q ainsi triés.
- On définit la matrice carrée M de taille n ayant pour coefficient M_{ij}
 - $v(\alpha)_1$ si il existe une flèche α dans Q_1 de x_i vers x_j (c'est-à-dire que $s(\alpha) = x_i$ et $b(\alpha) = x_j$),
 - 0 sinon.

Enfin, on pose $B = (I_n - M)^{-1}$ et la i -ième colonne de B est le vecteur dimension de $(x_i, 0)$.

- Pour trouver les vecteurs dimensions suivants, on utilise la formule de récurrence

$$d(x, p+1) = -d(x, p) + \sum_{i=1}^s v(\alpha_i)_2 d(b(\alpha_i))$$

en prenant $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ les flèches de sources (x, p) .

Remarques :

- La matrice M est la matrice d'adjacence de Q , on vérifie facilement que $(M^k)_{ij}$ correspond au nombre de chemins de longueur k de i vers j en comptant la multiplicité des flèches. On a alors que M est une matrice nilpotente (car acyclique), donc $I_n - M$ est inversible.
- On a défini la répétition $\mathbb{Z}Q$ comme un carquois ayant un nombre infini de sommets, or le nombre de racines d'un système de racines est fini, on a donc uniquement besoin d'un nombre fini de sommets de la répétition. En fait, on arrête l'algorithme lorsque l'on retrouve un vecteur dimension déjà rencontré. L'algorithme termine si et seulement si le carquois donné en paramètre est une orientation d'un diagramme de Dynkin.

Références

- [1] Nicolas Bourbaki, *Lie groups and Lie algebras, Chapters 4-6*, Elements of Mathematics (Berlin), Springer-Verlag, Berlin, 2002, Translated from the 1968 French original by Andrew Pressley.
- [2] Peter Gabriel, *Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras*, Representation theory, I (Proc. Workshop, Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979), Springer, Berlin, 1980, pp. 1–71.
- [3] Dieter Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [4] Nathan Jacobson, *Lie algebras*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 10, Interscience Publishers (a division of John Wiley Sons), New York-London, 1962.
- [5] Jean-Pierre Serre, *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, W.A. Benjamin, inc., New York-Amsterdam, 1966.