# Chapitre-5: Dualité

## Introduction

- Exemple: Problème de production.

Une entreprise fabrique deux produits $P_1$ et $P_2$. La fabrication de chaque produit nécessite trois ressources A, B et C disponibles en quantités données. L'entreprise cherche à maximiser le bénéfice total provenant de la vente des deux produits.

| | Produit $P_1$ | Produit $P_2$ | Disponibilité |
|---|---|---|---|
| Ressource A | 3 | 9 | 81 |
| Ressource B | 4 | 5 | 55 |
| Ressource C | 2 | 1 | 20 |
| Bénéfice | 6 | 4 | |

Le programme linéaire correspondant est:

$$Max \ \ z = 6x_1 + 4x_2$$

$$(P) \begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + \ \ x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

# Introduction

- Supposons à présent qu'un acheteur se présente pour acheter toutes les ressources de l'entreprise. Il propose à l'entreprise les prix unitaires $y_1$, $y_2$, $y_3$ pour chacune des ressources.

- L'entreprise acceptera de lui vendre toutes ses ressources uniquement si elle obtient, pour chaque produit, un prix de vente supérieur ou égal au profit qu'elle ferait en vendant ses produits.

- Quels prix unitaires $y_1$, $y_2$, $y_3$, l'acheteur doit-il proposer à l'entreprise en question pour qu'elle accepte de vendre toutes ses ressources ?

# Introduction

- [ ] Pour le produit $P_1$:

- La valeur du paquet des RESSOURCES qui entre dans la production d'une unité du produit $P_1$ ?

  ✓ La production d'une unité du produit $P_1$ nécessite:

  3 unités de la ressource A,

  4 unités de la ressource B,

  2 unités de la ressource C.

  ✓ L'acheteur propose:

  $y_1$ pour acheter 1 unité de A,

  $y_2$ pour acheter 1 unité de B,

  $y_3$ pour acheter 1 unité de C.

La valeur de ce paquet des ressources consommées par le produit $P_1$ est donc:

$$3y_1 + 4y_2 + 2y_3$$

# Introduction

- Pour le produit $P_1$:

- Le bénéfice provenant d'une unité du PRODUIT $P_1$ ?

  Ce bénéfice est: 6

- L'entreprise n'acceptera pas de céder ce paquet de ressources pour moins de 6. L'acheteur devra donc fixer les prix offerts pour les ressources de l'entreprise de façon à ce que

$$3y_1+4y_2+2y_3 \geq 6$$

- Pour le produit $P_2$:

- Similairement à ce qui précède, on écrit:

$$9y_1+5y_2+y_3 \geq 4$$

- Il raisonnable de penser que:

$$y_i \geq 0, \ i=1,2,3.$$

# Introduction

- De son coté, l'acheteur cherche à minimiser le prix total d'achat des ressources A (81), B (55), C (20):

$$\text{Min } w=81y_1+55y_2+20y_3$$

- Finalement, pour déterminer les prix unitaires minimaux qu'il proposera à l'entreprise, l'acheteur devrait résoudre le programme linéaire suivant:

$$Min \ \ w = 81y_1 + 55y_2 + 20y_3$$

$$(D) \quad \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 6 \\ 9y_1 + 5y_2 + 1y_3 \geq 4 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

- La dualité associe à tout programme linéaire est un autre programme linéaire qui est appelé programme dual du programme initial; par opposition le programme initial est appelé programme primal.

# Règles de dualisation

➤ Considérons un PL sous la forme canonique:

$$Max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$(P)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1,\ldots,m \\ x_j \geq 0 & j = 1,\ldots,n \end{cases}$$

Le programme dual est le suivant:

$$Min\ w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$(D)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & j = 1,\ldots,n \\ y_i \geq 0 & i = 1,\ldots,m \end{cases}$$

# Règles de dualisation

➤ Dualisation d'un PL sous la forme canonique:

| Primal (P) | Dual (D)=dual(P) |
|---|---|
| Max(z)<br>A matrice des containtes (m,n)<br>Second membre des contraintes<br>Coefficient de la fonction objectif<br>Nombre de contraintes<br>Nombre de variables de décision<br>Variable $x_j \geq 0$<br>Contrainte i de type ≤ | Min(w)<br>$A^T$ matrice des containtes (n,m)<br>Coefficient de la fonction objectif<br>Second membre des contraintes<br>Nombre de variables de décision<br>Nombre de contraintes<br>Contrainte j de type ≥<br>Variable $y_i \geq 0$ |

➤ Le dual du programme dual est le programme primal.

# Propriétés de la Dualité

- Dualité forte:

- Le primal possède une solution optimale ($x_1$*,... , $x_n$*)
  si et seulement si
  le dual possède une solution optimale ($y_1$*, . . ., $y_m$*).

- Dans ce cas, les fonctions objectifs z et w ont la même valeur optimale,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

# Propriétés de la Dualité

- Théorème des écarts complémentaires:

- Soit ($x_1$*,... , $x_n$*) une solution réalisable d'un programme primal.
  ($x_1$*,... , $x_n$*) est optimale
  si et seulement si
  il existe ($y_1$*, . . ., $y_m$*) tel que

($y_1$*, . . ., $y_m$*) est une solution <u>réalisable</u> du dual. De plus,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j^* < b_i \Rightarrow y_i^* = 0 \quad \text{et} \quad x_j^* > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i^* = c_j$$

Autrement dit:

- La ième contrainte primale n'est pas saturée $\Longrightarrow$ la ième variable (de décision) duale est nulle.
- La jème variable (de décision) primale est non nulle $\Longrightarrow$ la jème contrainte duale est saturée.

# Propriétés de la Dualité

- Exemple: Appliquons le TEC au programme linéaire suivant:

$$(P)\quad \begin{cases} \max\ 15x_1 + 25x_2 \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 96 \\ x_1 + x_2 \leqslant 40 \\ 7x_1 + 4x_2 \leqslant 238 \\ x_1\ ,\ x_2 \geqq 0 \end{cases}$$

Soit la solution: $x_1=0$, $x_2=32$. Cette solution est elle optimale ?
Le problème linéaire dual de (P) est:

$$(D)\quad \begin{cases} \text{Min } w = 96y_1 + 40y_2 + 238y_3 \\ y_1 + y_2 + 7y_3 \geqslant 15 \\ 3y_1 + y_2 + 4y_3 \geqslant 25 \\ y_1\ ,\ y_2\ ,\ y_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

# Propriétés de la Dualité

- Cherchons $y_1$, $y_2$ et $y_3$ vérifiant le théorème des écarts complémentaires. S'ils existent alors la solution primale proposée est optimale. Sinon alors la solution primale proposée n'est pas optimale.

- On a
  - ✓ La 2ème contrainte primale n'est pas saturée $\Longrightarrow$ la 2ème variable duale est nulle.

    $\Longrightarrow y_2=0$.
  - ✓ La 3ème contrainte primale n'est pas saturée $\Longrightarrow$ la 3ème variable duale est nulle.

    $\Longrightarrow y_3=0$.

## Propriétés de la Dualité

- Et on a,
  - ✓ La $2^{ème}$ variable primale n'est pas nulle $\Rightarrow$ la $2^{ème}$ contrainte duale est saturée.

$$\Rightarrow 3y_1+y_2+4y_3=25$$
$$\Rightarrow 3y_1=25 \text{ car } y_2=y_3=0$$
$$\Rightarrow y_1=25/3.$$

- Cependant, cette solution ($y_1=25/3$, $y_2=y_3=0$) ne satisfait pas la $1^{ère}$ contrainte duale ($y_1+y_2+7y_3 \geq 15$). Par suite, elle n'est pas réalisable.

- La solution primale précédente ($x_1=0$, $x_2=32$) n'est donc pas optimale.

## Propriétés de la Dualité

- Le tableau optimal contient non seulement la solution (optimale) du programme initial mais également celle de son dual.

- Les fonctions objectifs z et w ont la même valeur optimale.

- Le coefficient d'une variable d'écart dans la ligne objective d'un programme est égale à l'opposé de la valeur optimale de la variable de base associée dans l'autre programme et réciproquement.

## Exercices

- Execice (Résolution du dual en utilisant le tableau final du primal):

Résoudre (implicitement) le programme dual de (P) suivant:

$$Max \;\; z = 6x_1 + 4x_2$$

$$(P) \quad \begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + \;\; x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

par la méthode du simplexe (mais en travaillant sur le tableau primal !).

- Correction…

## Exercices

- Execice:

Vérifier que $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(3,0,7,0)$ est une solution réalisable optimale en appliquant le théorème des écarts complémentaires.

$$\text{Max } z = 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 \leq 42 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 17 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 24 \\ x_i \geq 0. \end{cases}$$

- Correction…