

Exploración sobre las dinámicas en una familia de mapeos afines a trozo en el plano.

Omar Guerra.*

Práctica Profesional IMAT612.

Supervisor: Prof. Arnaud Meyroneinc.

Ingeniería Civil Matemática.

Instituto de Ingeniería Matemática.

Universidad de Valparaíso.

Valparaíso, Chile.

22 de mayo de 2024

* *Afiliación actual:* Estudiante de la Universidad de Valparaíso, Valparaíso, Chile. Email: `omar.guerra@alumnos.uv.cl`.

Índice

A.0.	Introducción	2
A.1.	Sobre el Instituto de Ingeniería Matemática	3
A.2.	Entender la tarea	4
A.2.1.	Ejemplo en libro: Modelo de ciclo económico	4
A.2.2.	Artículo de Devaney, R. [3]	6
A.2.3.	La tarea a realizar	9
A.3.	Revisión Bibliográfica	10
A.3.1.	Sobre mapas lineales a trozos	11
A.3.2.	Sobre modelos de ciclos económicos	12
A.4.	Programación	13
A.5.	Simulaciones	14
A.5.1.	Simulaciones deterministas	14
A.5.2.	Simulaciones con perturbaciones estocásticas	18
A.6.	Dinámica determinista conservativa ($b = 1$)	23
A.6.1.	Estudio de la dinámica entorno a órbitas periódicas robustas estables	25
A.6.2.	Ubicación de una órbita periódica robusta inestable	30
A.7.	Exploración estocástica disipativa/contractiva con ($b < 1$)	32
A.8.	Informe final	34

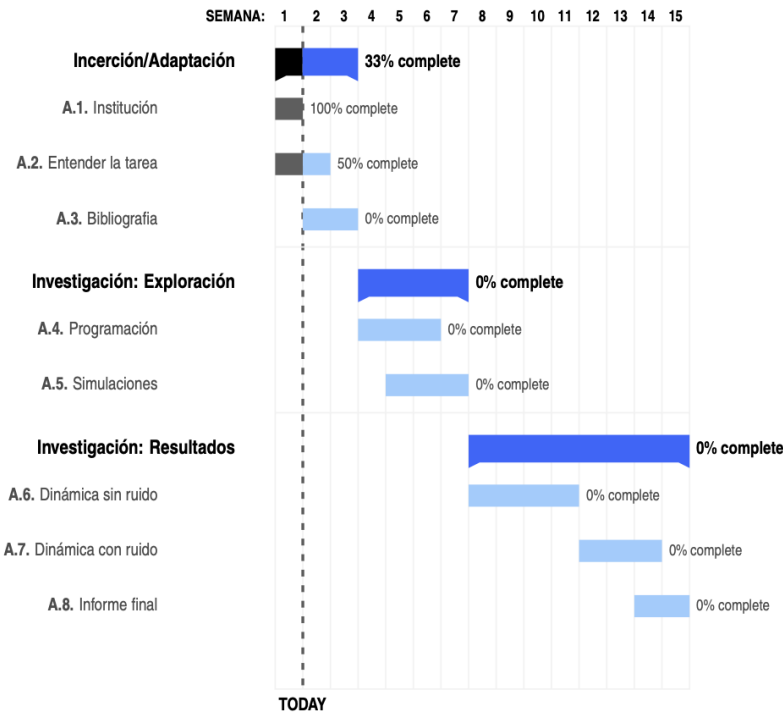
A.0. Introducción

El siguiente documento, contempla las tareas, resultados, conclusiones y comentarios sobre el trabajo durante la realización de la Práctica Profesional. Donde detallamos los objetivos y metas a continuación:

- Iniciarse a la actividad de investigación en matemática aplicada a través de un proyecto corto, en el campo de la teoría de los Sistemas Dinámicos, con un enfoque ingenieril.
- Adoptar la metodología de investigación: Revisión bibliográfica, síntesis de las preguntas actuales sobre/alrededor de un tema particular, motivación para seguir estudiando este problema/esta pregunta particular.
- Entender y criticar la modelización matemática de un proceso ingenieril de interés.
- Realizar exploraciones numéricas de la fenomenología de una familia parametrizada de sistemas, aquí definidos afín a trozos, propuesta como modelos.
- Buscar a demostrar un resultado nuevo, o validar rigurosamente observaciones empíricas, sobre propiedades del sistema elegido, y contextualizar este resultado en cuanto a una posible aplicación al proceso ingenieril de interés.

- Demostrar compromiso, capacidad de organización de ideas y tareas, e iniciativas en la actividad de investigación. Mantener retroalimentación continua con el responsable a lo largo de la práctica.

El trabajo de la práctica se realizó bajo la siguiente carta Gantt. Luego en cada sección se detalla de que trata cada una de estas.



A.1. Sobre el Instituto de Ingeniería Matemática

Historia del Instituto.

En 2004, se estableció el Centro de Investigación y Modelamiento de Fenómenos Aleatorios de Valparaíso (CIMFAV) como un proyecto de la Dirección de Investigación de la Universidad de Valparaíso. En 2012, el CIMFAV se consolidó y se convirtió en una unidad de la recién creada Facultad de Ingeniería de la misma universidad. En 2013, en colaboración con el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Valparaíso, la Universidad Técnica Federico Santa María y la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, se lanzó el Doctorado en Matemática en consorcio. En 2018, el CIMFAV inauguró la carrera de Ingeniería Civil Matemática con 16 estudiantes matriculados. Finalmente, en marzo de 2019, se aprobó la creación del Instituto de Ingeniería Matemática de la Universidad de Valparaíso. Actualmente, el Instituto de Ingeniería Matemática cuenta con 12 académicos con doctorado y alberga la dirección del Doctorado en Matemática en consorcio, la carrera de Ingeniería Civil Matemática y el proyecto CIMFAV.

Misión.

La misión del Instituto de Ingeniería Civil Matemática de la Universidad de Valparaíso,

como parte de una institución estatal, pública y autónoma, es generar y difundir el conocimiento en ciencias matemáticas a través de la enseñanza de pregrado y posgrado, la investigación interdisciplinaria, y la promoción de valores. Busca formar graduados, profesionales e investigadores de alta calidad con un compromiso hacia el desarrollo regional y nacional, promoviendo la sostenibilidad.

Visión

El Instituto tiene como objetivo ser una institución de excelencia en la formación, la innovación y la generación de conocimiento. Busca estar estrechamente relacionado con su entorno, influir en las ciencias y la ingeniería, y convertirse en un referente a nivel nacional e internacional, aprovechando su ubicación en la Región de Valparaíso.

A.2. Entender la tarea

Entrando en materia de dar un contexto de lo que se realizará durante esta pasantía, comenzamos por presentar un modelo de ciclo económico para luego sintetizar los resultados que describen la dinámica de una realización de este. Después se introducirá una síntesis de un artículo que estudia un mapa lineal a trozos que va a guardar relación a nivel estructural con el modelo de ciclo económico.

A.2.1. Ejemplo en libro: Modelo de ciclo económico

Comenzamos estudiando el Ejemplo 1.2 del libro *Introduction to Mathematical System Theory* [6], recopilando todos los resultados que fueron presentados en el texto.

Sean las variables:

- C el gasto de consumo.
- Y la renta nacional.
- I la inversión.
- G el gasto de gobierno.

Luego el modelo de *ciclo económico* es de dinámica en tiempo discreto de la forma:

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= \alpha + \beta Y_n \\ I_{n+1} &= \gamma + \delta (C_{n+1} - C_n) \\ Y_{n+1} &= C_{n+1} + I_{n+1} + G_{n+1}, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $n \geq 0$ representa el año n -ésimo. Desde el punto de vista de la política macroeconómica, esto deja a la variable G como variable de política o de control. En econometría se denomina variable exógena, y en teoría de sistemas, variable de entrada. Las otras variables Y , C e I son los objetivos de la política. En econometría se denominan variables endógenas, en teoría de sistemas variables de salida.

En el modelo, a través del de contexto economía nacional podemos suponer que $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. Además, naturalmente la renta nacional Y se define a través del total de lo que el

gobierno puede gastar, el gasto de consumo C se explica a través de un gasto fijo más un factor de la renta nacional, es decir una parte de los fondos se destinan al gasto de consumo; por otro lado las inversiones se describen a través de la diferencia de gastos de consumos donde si en el siguiente año se gasta más, entonces el gobierno debe invertir positivamente para aumentar la renta nacional.

El modelo (1), para un valor fijo de gastos de gobierno \bar{G} , tiene por puntos de equilibrio:

$$\bar{C} = \frac{\alpha + \beta\gamma + \beta\bar{G}}{1 - \beta}, \quad \bar{I} = \gamma, \quad \bar{Y} = \frac{\alpha + \gamma + \bar{G}}{1 - \beta}.$$

Definimos, $c_{n+1} = C_{n+1} - \bar{C}$, $i_{n+1} = I_{n+1} - \bar{I}$, $y_{n+1} = Y_{n+1} - \bar{Y}$ y $g_{n+1} = G_{n+1} - \bar{G}$ para obtener el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \beta y_n \\ i_{n+1} &= \delta (c_{n+1} - c_n) \\ y_{n+1} &= c_{n+1} + i_{n+1} + g_{n+1}. \end{aligned}$$

Un sistema causal input-output puede obtenerse, por ejemplo, tomando el gasto público como input. Esto puede ser visto de la siguiente relación:

$$y_{n+1} = \beta(1 + \delta)y_n - \beta\delta y_{n-1} + g_{n+1} \quad \forall n \geq 0,$$

aquí podemos pensar en y como la salida y en g como la entrada del sistema.

Ahora, sea el vector de estado:

$$x_n = \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \end{pmatrix},$$

que describe el estado de la economía en el próximo año. Luego el mapa input-output es descrito por el siguiente sistema de ecuaciones de espacio de estado.

$$\begin{cases} x_{n+1} &= \begin{pmatrix} \beta(1 + \delta) & -\beta\delta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_n + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} g_n \\ y_n &= \begin{pmatrix} \beta(1 + \delta) & -\beta\delta \end{pmatrix} x_n + g_n. \end{cases} \quad (2)$$

donde denominamos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \beta(1 + \delta) & -\beta\delta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \beta(1 + \delta) & -\beta\delta \end{pmatrix}, \quad D = 1,$$

lo que nos lleva a escribir el sistema (2) como sigue:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= Ax_n + Bg_n \\ y_n &= Cx_n + Dg_n. \end{cases}$$

Introducimos $\Theta = (A, B, C, D)$ una *realización* de nuestro sistema, que desde el Teorema 3.1.1 [6], obtenemos que (considerando A y B) la realización es *controlable* y por tanto *alcanzable*.

Ahora, desde el Teorema 3.2.1 [6] (usando A y C), tenemos que la realización es *observable* si y sólo si $\beta\delta \neq 0$. Pero en nuestro caso de ciclo económico, tenemos que $\beta > 0$ y $\delta > 0$, y así es observable.

Desde la ilustración en el Capítulo 4: Estabilidad [6], obtenemos que hay *estabilidad asintótica* si y sólo si $\beta\delta < 1$ y $\beta < 1$. La última restricción es plausible por razones económicas, mientras que la primera significa que los inversores no deberían reaccionar con demasiada fuerza al aumento del consumo. Por último, la senda hacia el equilibrio mostrará oscilaciones si $\beta < \frac{4\delta}{(1+\delta)^2}$.

Supongamos ahora, que $\beta\delta \geq 1$. Como el sistema es controlable es ciertamente estabilizable. Sea $g_{n+1} = f_1 y_n + f_2 y_{n-1}$, entonces el sistema de bucle cerrado queda de la forma:

$$y_{n+1} = (\beta(1 + \delta) + f_1)y_n + (-\beta\delta + f_2)y_{n-1} \quad \forall n \geq 0,$$

en particular, si $\beta\delta \geq 1$, entonces el sistema no puede ser estabilizado con $f_2 = 0$, es decir, el gobierno no puede estabilizar el sistema si sólo tiene en cuenta la desviación del equilibrio ocurrida en el último año. Si, por ejemplo, tomamos $f_2 = \beta\delta$ y $f_1 = -\beta(1 + \delta)$, entonces obtenemos un controlador *dead-beat* que devuelve la economía al equilibrio en dos periodos de tiempo (dos años).

A.2.2. Artículo de Devaney, R. [3]

En este apartado, presentamos una síntesis de un artículo que nos será útil a la hora de estudiar las propiedades del modelo de ciclo económico, donde veremos que el mapa presentado en este artículo es un caso particular del modelo que estamos estudiando en este informe.

El sistema dinámico discreto que consideramos viene dado por

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + |x_n| - y_n \\ y_{n+1} = x_n. \end{cases} \quad (3)$$

Denotaremos este mapa por $F(x_n, y_n)$. F es lineal a trozos y continuo, y cada uno de sus dos trozos preserva el área. El mapa tiene un único punto fijo en $(1, 1)$ y este punto fijo es elíptico.

Dado que la restricción de F al semiplano derecho es afín, el comportamiento de F cerca de este punto fijo es lineal. En efecto, F es conjugado con su parte lineal dada por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

en un vecindario de $(1, 1)$. Como $A^6 = Id$ se tiene que $F^6 = Id$ en un vecindario de $(1, 1)$. Sea H la región maximal sobre $(1, 1)$, donde los vértices de H forman un hexágono en los puntos $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(1, 2)$, y $(0, 1)$.

Todos los puntos de H , excepto el punto fijo, tienen periodo mínimo 6. Una forma de visualizar todos los puntos de H es como si estuvieran en un hexágono invariante que rodean al punto fijo.

Las órbitas de los puntos en H se encuentran en el semiplano derecho. Todas las demás órbitas visitan ambos semiplanos bajo la iteración de F y, por lo tanto, estos puntos reciben la acción de ambos mapas lineales afines que componen F . Este fenómeno introduce el caos en la dinámica de F .

Remarcamos que F es equivalente a cada mapa de la familia de mapas de un parámetro dada por:

$$\begin{cases} X_{n+1} = \alpha - Y_n + |X_n| \\ Y_{n+1} = X_n, \end{cases}$$

con $X = \alpha x$ e $Y = \alpha y$.

Se va a demostrar en [3] que existen infinitos anillos invariantes alrededor de H y que los puntos periódicos de F son densos en el plano.

Sea S un sector acotado por las rectas $y = x + 1$ e $y = \frac{1}{2}x + 2$ con $x \geq 2$.

Lemma A.2.1. *Sea $(x, y) \in S$. Entonces $F^i(x, y) \in S$ para $1 \leq i \leq 9$. Más aún $F^9(x, y) = (x + 4, y)$.*

Lemma A.2.2. *Supongamos que $\frac{1}{2}x < y \leq \frac{1}{2}x + 1$ y $x, y \geq 2$. Entonces $F^i(x, y) \notin S$ para $1 \leq i < 5$ y $F^5(x, y) = (4 + 2x - 3y, 1 + x - y)$.*

Lemma A.2.3. *Supongamos que $\frac{1}{2}x + 1 \leq y \leq \frac{1}{2}x + 2$ y $x \geq 2$. Entonces $F^i(x, y) \notin S$ para $1 \leq i < 5$ y $F^5(x, y) = (y, -3 - x - 3y)$.*

Sea $k \geq 1$ un entero. Para $0 \leq t \leq 1$, sea $v_k(t)$ el segmento de recta vertical $(uk, uk + t)$. Afirmamos que las imágenes sucesivas de $v_k(t)$ forman un polígono invariante.

Lemma A.2.4. *Si $p \in v_k(t)$, entonces p es periódico con periodo $27k - 3$.*

Denotemos por α_k el polígono resultante de $27k - 3$ lados.

Proposition A.2.5. *Para cada entero $k \geq 1$, hay un polígono α_k F -invariante de periodo $27k - 3$ atravesando $(4k, 4k)$.*

Sea β_ℓ el polígono resultante de $27\ell + 6$ lados.

Proposition A.2.6. *Para cada entero $\ell \geq 0$, hay un polígono β_ℓ F -invariante de periodo $27\ell + 6$ que atraviesa $(4\ell + 2, 4\ell + 2)$.*

Notemos que β_0 es la frontera del hexágono invariante alrededor de $(1, 1)$.

Los α_k y β_ℓ se sitúan alternativamente en el plano. Denotamos la región anular entre $\alpha_{\ell+1}$ y β_ℓ y la región entre α_ℓ y β_ℓ por A_ℓ . Cada una de estas regiones es anular y proporciona modelos para las zonas de inestabilidad.

Proposition A.2.7. *Los puntos periódicos de F son densos en el plano.*

Las regiones anulares A_i y B_i son nuestros modelos para las zonas de inestabilidad de un mapa que preserva el área. Hay un número finito de islas elípticas en cada una junto con un "mar" ergódico.

Sea Γ_i la región en B_i entre $y = \frac{1}{2}x$ y $y = \frac{1}{2}x + 2$. Sea Λ_i la región en B_i entre $y = x + 1$ y $y = \frac{1}{2}x$. Desde los lemmas A.2.1-A.2.3 se tiene que las 9 primeras imágenes de Λ_i cubren B_i .

Definimos $\phi_i : \Gamma_i \rightarrow \Gamma_i$, por $\phi_i(p) = F^k(p)$ donde k es el último entero positivo para el cual $F^k(p)$ pertenece a Γ_i , ϕ_i es la primera aplicación de retorno a Γ_i . Sea $D : \Gamma_i \rightarrow \Gamma_{i+1}$ dada por $D(x, y) = (x + 8, y + 4)$, entonces, se prueba fácil que $D\Phi_i = \Phi_{i+1}D$, por tanto todos los Φ_i son conjugados.

Sea e_0 el triángulo en e acotado por arriba por $y = 6$. Sea h_0 el triángulo en h acotado por abajo por $5y = 2x + 14$. Sea $e_1 = e - e_0$ y $h_1 = h - h_0$.

Proposition A.2.8. *Sea $(x, y) \in \Gamma$.*

- 1) *Si $(x, y) \in e_0$, entonces $\Phi(x, y) = F^5(x, y) = (4 + 2x - 3y, 1 + x - y)$.*
- 2) *Si $(x, y) \in h_0$, entonces $\Phi(x, y) = F^{23}(x, y) = (y + 8, -3 - x + 3y)$.*
- 3) *Si $(x, y) \in e_1$, entonces $\Phi(x, y) = F^{14}(x, y) = (8 + 2x - 3y, 1 + x - y)$.*
- 4) *Si $(x, y) \in h_1$, entonces $\Phi(x, y) = F^{14}(x, y) = (y + 4, -3 - x + 3y)$.*

Notamos que Φ tiene dos puntos fijos: uno en $(13, 7)$ al cual llamamos p_e y otro en $(11, 7)$ el cual llamamos p_h . El punto p_e es elíptico. Este tiene F - periodo 14 ya que está en e_1 . Este es rodeado por una isla hexagonal de estabilidad con vértices en $(11, 6)$, $(12, 6)$, $(14, 7)$, $(15, 8)$, $(14, 8)$ y $(12, 7)$. Llamemos a esta región U . Todos los puntos en U excepto por p_e tienen Φ - periodo 6 y por tanto F - periodo 84.

El punto p_h es hiperbólico con F - periodo 14. Desde que $p_h \in \text{int}(h_1)$, las variedades estable e inestable pueden calcularse exactamente.

Afirmamos que Φ es ergódica en $\Gamma - U$. Esto implica que F es ergódica en las zonas anulares de B_i menos las F - imágenes de la isla hexagonal U .

Basta con probar que Φ es hiperbólica en $\Gamma - U$. Esto se sigue de la existencia de un par de sectores $S^u(p)$ y $S^s(p)$ en el plano tangente a cada $p \in \Gamma$, el cual preserva las siguientes propiedades:

- $D\Phi$ preserva y expande vectores en $S^u(p)$.
- $D\Phi^{-1}$ preserva y expande vectores en $S^s(p)$.

Definimos los sectores en dos regiones triangulares de Γ . Sea Δ_1 el triángulo de vértices $(14, 7)$, $(16, 8)$ y $(16, 9)$. y sea Δ_2 el triángulo de vértices $(10, 5)$, $(12, 7)$ y $(10, 6)$; luego $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$. Para algún $p \in \Delta$, sea $S^u(p)$ el sector en el plano tangente determinado por $y > x > 0$ o $y < x < 0$. Sea $S^s(p)$ el sector determinado por $x > y > 0$ o $x < y < 0$.

Afirmamos que S^u y S^s satisfacen el criterio de hiperbolicidad. Sea H la linealización de Φ en h y sea E la linealización de Φ en e . Ahora, la proposición A.2.8 nos da:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sea Ψ una aplicación de retorno definida sobre Δ , la proposición A.2.8 puede ser usada para verificar que la linealización de Ψ asume una de las dos posibles formas $H^k E^2$ donde

$k \geq 1$ o $H^k E$ con $k \geq 2$. Se puede chequear que HE^2 , $H^2 E$ y H^k , todas expanden y preservan S^u , mientras que sus inversas tienen la misma propiedad sobre S^s .

Por los resultados de Pesin, esto implica que hay una región de medida positiva en $\Gamma - U$ en la cual Φ es ergódica.

Nuestro mapa lineal a trozos difiere claramente en varios aspectos significativos del caso suave. Por un lado, la restricción de nuestro mapa a los polígonos invariantes es periódica. En los círculos invariantes que delimitan una zona de inestabilidad, un mapa suave suele ser equivalente a una rotación irracional. En segundo lugar, para nuestro mapa sólo hay un número finito de islas elípticas en las zonas B_i .

Y lo que es más importante, los mapas lineales a trozos pueden modelizar el caso no lineal. Además proporcionan modelos adecuados para la dinámica no lineal de estos mapas en un número significativo de casos.

Estos últimos párrafos relatados por el autor del artículo, además de dar conclusiones, nos sirve como motivación para estudiar, en lo que seguirá, una parametrización del sistema (3).

A.2.3. La tarea a realizar

Nuevamente consideremos el modelo de ciclo económico (1), donde ahora proponemos una actualización de la variable gasto de gobierno G como sigue:

$$G_{n+1} = \begin{cases} \mu Y_{n-1}, & \text{si } Y_n \geq 0 \\ -2\beta(1 + \delta)Y_n + \mu Y_{n-1}, & \text{si } Y_n < 0, \end{cases} \quad (4)$$

donde hemos introducido un nuevo parámetro $\mu > 0$ (idealmente pequeño), el cual nos va representar que si la renta nacional Y del año actual es positiva, entonces el próximo gasto de gobierno G va a tomar una parte de la renta del año anterior; por otro lado, si en el año actual la renta es negativa, entonces el próximo gasto de gobierno para el siguiente año tiene que tomar una parte positiva de la renta actual más un porcentaje de la renta del año anterior.

Ahora escribimos Y_{n+1} desde (1),

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= \alpha + \beta Y_n + \gamma + \delta(\alpha + \beta Y_n - \alpha - \beta Y_{n-1}) + G_{n+1} \\ &= \alpha + \gamma + \beta(1 + \delta)Y_n - \beta\delta Y_{n-1} + G_{n+1}, \end{aligned}$$

ahora utilizando (4), obtenemos dos casos:

Caso 1: Si $Y_n \geq 0$.

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= \alpha + \gamma + \beta(1 + \delta)Y_n - \beta\delta Y_{n-1} + \mu Y_{n-1} \\ &= \alpha + \gamma + \beta(1 + \delta)Y_n + (\mu - \beta\delta)Y_{n-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Caso 2: Si $Y_n \leq 0$.

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= \alpha + \gamma + \beta(1 + \delta)Y_n - \beta\delta Y_{n-1} - 2\beta(1 + \delta)Y_n + \mu Y_{n-1} \\ &= \alpha + \gamma - \beta(1 + \delta)Y_n + (\mu - \beta\delta)Y_{n-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Así, tomando las Ecs. (5) y (6), reformulamos Y_n como una relación de recurrencia de orden 2:

$$Y_{n+1} = \alpha + \gamma + \beta(1 + \delta)|Y_n| + (\mu - \beta\delta)Y_{n-1} \quad \forall n \geq 0. \quad (7)$$

Sea, recordando que $\alpha, \gamma > 0$

$$X_n = \frac{Y_n}{\alpha + \gamma},$$

luego reemplazando este cambio de variable en la Ec. (7), obtenemos:

$$X_{n+1} = 1 + \beta(1 + \delta)|X_n| + (\mu - \beta\delta)X_{n-1}. \quad (8)$$

Sea $2a = \beta(1 + \delta)$ y $b = \beta\delta - \mu$, entonces la Ec. (8) nos queda de la forma:

$$X_{n+1} = 1 + 2a|X_n| - bX_{n-1}. \quad (9)$$

Es sencillo ver que el sistema (3) estudiado por Devaney [3], es equivalente a la relación de diferencias de orden 2:

$$x_{n+1} = 1 + |x_n| - x_{n-1}, \quad (10)$$

por tanto, si queremos realizar una semejanza entre las Ecs. (9) y (10), necesitamos que:

$$a = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad b = 1, \quad (11)$$

donde tenemos la condición de $\beta\delta < 1$ y $\beta < 1$, para tener estabilidad asintótica en términos de la realización Θ .

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} 2a = \beta + \beta\delta < 1 + 1 = 2 &\Rightarrow a < 1 \quad \text{y} \\ b = \beta\delta - \mu < 1 \quad \text{si} \quad \mu \geq 0 &\Rightarrow b < 1 \end{aligned}$$

Finalmente la Ec. (9) nos queda (en forma de sistema) de la forma:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + 2a|x_n| - y_n \\ y_{n+1} = bx_n. \end{cases} \quad (12)$$

La familia a dos parámetros dada por (12) es lo que se va a estudiar en adelante de este trabajo considerando $(a, b) \in [-1, 1]^2$, donde imponiendo (11), recuperamos el sistema estudiado por Devaney [3], el cual tiene un único punto fijo en $(1, 1)$.

A.3. Revisión Bibliográfica

En esta sección hacemos un compilado de algunos artículos que forman parte del estado del arte asociado tanto a los mapas lineales a trozos y los modelos de ciclos económicos.

A.3.1. Sobre mapas lineales a trozos

- Aharonov *et al.* [1], estudia el mapa

$$F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 - y - |x| \\ x \end{pmatrix},$$

que en relación a nuestro caso toma $a = -1/2$, el cual puede representarse en nuestra notación como:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - |x_n| - y_n \\ y_{n+1} = x_n, \end{cases}$$

con la motivación de dar una discusión más detallada y rigurosa sobre mapas lineales a trozos que la que se da en Devaney [3], además de describir la dinámica que persiste cuando el mapa F se perturba mediante el mapa:

$$F_\epsilon : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 - y - f_\epsilon(x) \\ x \end{pmatrix},$$

donde $f_\epsilon(x)$ es una función real, analítica, cercana a la función $|x|$ para valores pequeños de ϵ .

Esto se justifica debido a la estructura rica e interesante del mapa F_ϵ , en el cual prefieren estudiar este mapa en vez de el mapa de Devaney [3], ya que, se tratan con los mismos métodos, pero algunos cálculos son más cortos.

Ahora, entrando en materia de los resultados de este artículo.

Theorem A.3.1. *El mapa F tiene dos familias de polígonos invariantes anidados.*

Theorem A.3.2) *F es mapa lineal en el triángulo y $F^3 \equiv Id$.*

- b) *En F_k , $k = 0, 1, \dots$, hay un ciclo de puntos elípticos periódicos, con periodo $9k + 4$. Cada uno de estos es rodeado por islas hexagonales.*
- c) *En G_k , $k = 1, 2, \dots$, hay tres familias de puntos periódicos elípticos e islas hexagonales,*

donde G_k es el anillo delimitado por los polígonos Γ_k de $21 + 27(k - 1)$ lados y Λ_k de $30 + 27(k - 1)$ lados.

- Gardini *et al.* [5], se enfocan en estudiar una bifurcación particular en mapas bidimensionales continuos lineales a trozos. Se analiza la naturaleza de esta bifurcación, determinando si es supercrítica o subcrítica. Se encontró que el punto fijo virtual y ciertos ciclos tipo silla son factores clave en esta caracterización.

Para ello se considera un mapa dos dimensional continuo PWL (piecewise linear map) denotado por:

$$T : \begin{cases} x' = |x| - ay \\ y' = x - cy + d, \end{cases}$$

con a, c y $d \neq 0$ reales.

Ahora, en lo que atañe a nuestra tarea, si $c = 0$, $a = 1$ y discretizamos el mapa, encontramos un sistema del tipo Aharonov *et al.* [1] y Devaney [3]. Escribimos T en base a nuestro interés, como una relación de recurrencia de orden dos como sigue:

$$z_{n+1} = -1 + |z_n| - z_{n-1} \quad \text{con} \quad z_n = -x_n/ad, \quad a = -1/2 \quad \text{y} \quad b = -1$$

donde encuentra el *gingerbreadman* en otra orientación con cabeza triangular en vez de hexagonal.

- Botella-Soler *et al.* [2] en este artículo estudian la presencia en el mapa de Lozi de un tipo de transiciones abruptas de orden a orden y de orden a caos que están mediadas por un atractor formado por un continuo de ciclos límite neutralmente estables, todos con el mismo periodo.

El mapa estudiado, puede ser descrito a través de la siguiente ecuación:

$$x_{n+1} = 1 - a|x_n| + bx_{n-1},$$

donde si a y b son iguales a -1 tenemos el mismo mapa estudiado por Devaney [3], pero si $a > 1$ se tiene el *gingerbreadman* de cabeza triangular estudiado por Ahonorov *et al.* [1] pero rotado.

A.3.2. Sobre modelos de ciclos económicos

- Dohtani y Matsuyana [4] construyen un modelo de ciclo económico de tipo Keynesiano en el que se incorpora la heterogeneidad de los comportamientos de microinversión.

Denotando Y_n el ingreso en el año n , I_n la inversión en el año n y C_n el consumo en el año n . Se adopta la función de consumo $C_n = \alpha Y_n + A$ con $\alpha \in (0, 1)$ y $A > 0$. También, se considera la función de macro-inversión $I_n = iY_n - lK_n$, con i y j mayores estrictos a cero, donde K_n representa el capital social. Por simplicidad en este artículo se asume $j = 0$ para tener un modelo simple sin capital social.

Dentro de su motivación es dar un modelo económico simple que incorpora los efectos de los *espíritus animales* (un impulso espontáneo a la acción y no a la inacción) en la inversión. Estos espíritus animales varían en función de cambios en la demanda, siendo más fuertes en momentos de auge económico. Este enfoque introduce no linealidades en la inversión y genera ciclos económicos persistentes. También identificamos una bifurcación de Hopf en el modelo.

Entonces, al considerar el espíritu animal, se re-define las inversiones como $I_n = i_n Y_n$. Así el modelo resultante es:

$$\begin{cases} I_n = i_n Y_n \\ C_n = \alpha Y_n + A, \end{cases}$$

el cual, es bastante más sencillo que el modelo del libro [6]; que además apunta a una filosofía distinta, ya que este artículo se centra más en el factor sociológico.

- Orlando [7] propone un nuevo modelo discretizado de Kaldor, que también es útil para explicar lo que parece aleatorio e imprevisible, como las perturbaciones económicas. Además, mediante análisis numérico, se estudia la caoticidad del modelo.

El modelo de Kaldor discreto se escribe:

$$\begin{cases} Y_{t+1} - Y_t = \alpha(I_t - S_t) = \alpha(I_t - (Y_t - C_t)) \\ K_{t+1} - K_t = I_t - \delta K_t, \end{cases}$$

donde Y , I , S , K son el ingreso, las inversiones, los fondos y el capital respectivamente, α es la velocidad por la cual la salida responde al exceso de inversiones y δ representa la tasa de depreciación del capital.

Ahora notemos que tenemos variables en común en los distintos modelos en los diferentes artículos. Las variables que siempre están presentes son Y , I , C , donde estas representan siempre los ingresos, las inversiones y el consumo respectivamente. Ahora como hemos visto, hay distintas filosofías donde se toma en consideración el capital K por ejemplo, y donde las demás variables en común se relacionan de forma similar. Además que algunos parámetros se tienen en común como α y γ en el libro de Heij [6] y el artículo de Orlando [7].

A.4. Programación

En esta sección nos adentraremos en las simulaciones que nos permitan estudiar a nivel gráfico las cualidades de los retratos de fase del modelo (12) a medida que hacemos variar los parámetros a y $b \in [-1, 1]$.

Desde un *Jupyter Notebook* de *Python3*, damos nuestros primeros pasos recreando el “*Gingerbreadman*” [3]. Recordamos el modelo (12) tomando $a = 1/2$ y $b = 1$, con dos condiciones iniciales (una para el punto fijo) y 32000 iteraciones, obtenemos el retrato de fase presentado en la Figura 1.

Para ello utilizamos el siguiente código:

```

import numpy as np
import random
import matplotlib.pyplot as plt
import time
import pandas as pd

#Iterations
NN = 32000

#Generate an orbit

def orbita(x0,y0,a,b,sigma2,e):
    X = np.zeros(NN)
    Y = np.zeros(NN)
    X[0] = x0
    Y[0] = y0
    epsi = np.zeros((2, NN))
    for i in range(NN):
        random.seed(int(time.time()) + i)
        epsi[0, i] = random.gauss(0, sigma2)
        random.seed(i + NN)
        epsi[1, i] = random.gauss(0, sigma2)
    for i in range(NN - 1):
        X[i + 1] = 1 - Y[i] + 2 * a * abs(X[i]) + e * epsi[0, i]
        Y[i + 1] = b * X[i] + e * epsi[1, i]
    return X, Y

```

```

X1, Y1 = orbita(1,1,0.5,1,0,0)
X2, Y2 = orbita(2.1,2.1,0.5,1,0,0)

#Phase Portrait
plt.scatter(X1, Y1, s=50, c='red')
plt.scatter(X2, Y2, s=20, c='black')

# Initial condition
plt.scatter(X1[0], Y1[0], s=50, c='red', label='Initial Condition')
plt.scatter(X2[0], Y2[0], s=50, c='green', label='Initial Condition')

plt.xlabel('x[n]')
plt.ylabel('y[n]')

plt.title('a=0.5, b=1')
plt.legend()
plt.grid(False)

plt.show()

```

[3] ✓ 1.8s Python

Nota: en la función que genera la órbita, los últimos dos parámetros de entrada σa^2 y e , hacen referencia a las simulaciones en un caso estocástico que se verán más adelante y por ahora estos dos parámetros de entrada son cero.

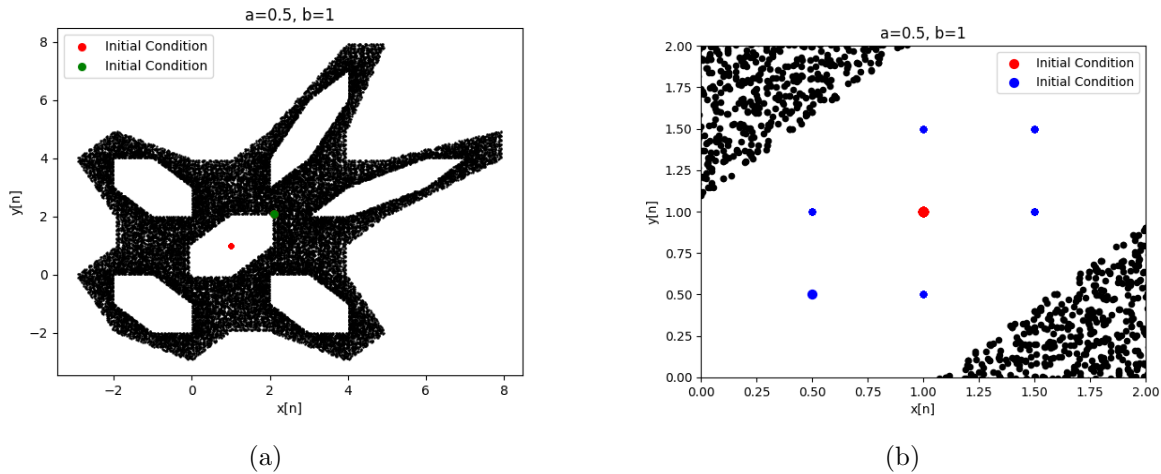


Figura 1: En (a), presentamos dos órbitas, cada una con su color, rojo para la que tiene condición inicial en (1,1) y negro para la condición inicial en (2.1,2.1). Se observa que la órbita negra está confinada a una región acotada, donde se observan 6 hexágonos los cuales si vemos en su interior observamos el zoom en (b) los cuáles tienen en su interior puntos de periodo 6 (hexágono central), por ejemplo una condición inicial en (0.5,0.5) se aprecia claramente una órbita periódica de periodo mínimo 6 en color azul.

A.5. Simulaciones

A.5.1. Simulaciones deterministas

En esta sección comenzamos con variar un poco el parámetro a . Ahora, al igual que en el caso anterior usamos el mismo modelo, el mismo número de iteraciones, las mismas condiciones iniciales; agregando una condición inicial en (3,5.3), para observar qué ocurre

dentro de los hexágonos exteriores. Ocupamos mismo $b = 1$ pero fijamos $a = 0.999/2$ y el mismo código en esencia simplemente cambiando el valor de a .

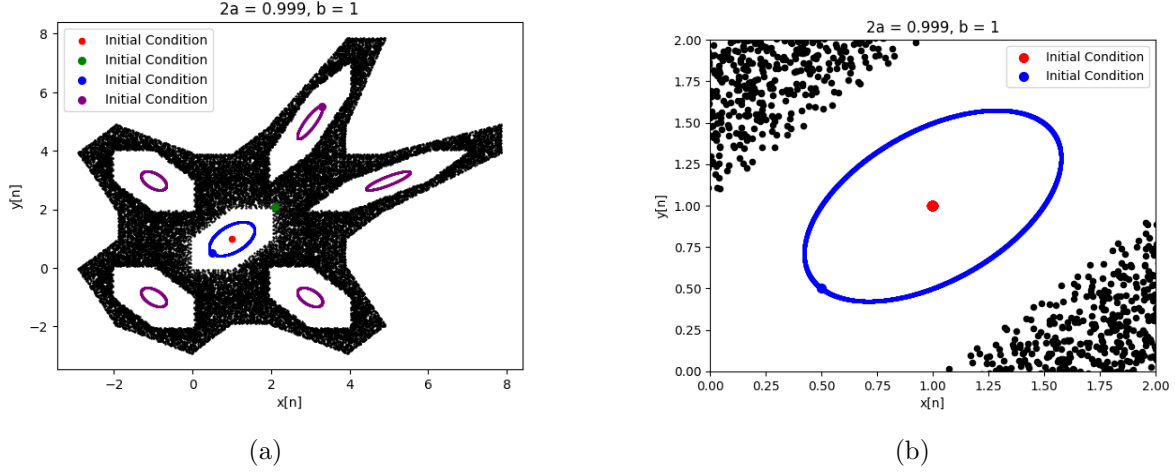


Figura 2: En (a) la condición inicial para el mar de puntos negros es $(2.1, 2.1)$; para las elipses azules exteriores es el punto $(3, 5.3)$; la elipse del hexágono central en el punto $(0.5, 0.5)$ y el ex punto fijo en $(1, 1)$ que ya no lo es. En (b) hacemos un acercamiento al hexágono central.

En la Figura 2, observamos que bajo una pequeña perturbación en el parámetro a nos induce un cambio en nuestros puntos periódicos, los cuales se convierten en “casi” periódicos, ya que estos comienzan a formar elipses a medida que aumentamos las iteraciones.

Si observamos los 12 primeros iterados con condición inicial en $(1, 1)$ vemos que el punto fijo, ya no lo es más.

$$\begin{pmatrix} 1. & 1. \\ 0.999 & 1. \\ 0.998001 & 0.999 \\ 0.998003 & 0.998001 \\ 0.999004 & 0.998003 \\ 1. & 0.999004 \\ 0.999998 & 1. \\ 0.998996 & 0.999998 \\ 0.997999 & 0.998996 \\ 0.998005 & 0.997999 \\ 0.999008 & 0.998005 \\ 1. & 0.999008 \end{pmatrix}$$

Ahora vemos que pasa si reducimos el valor de a para ir viendo como se transforma el retrato de fase.

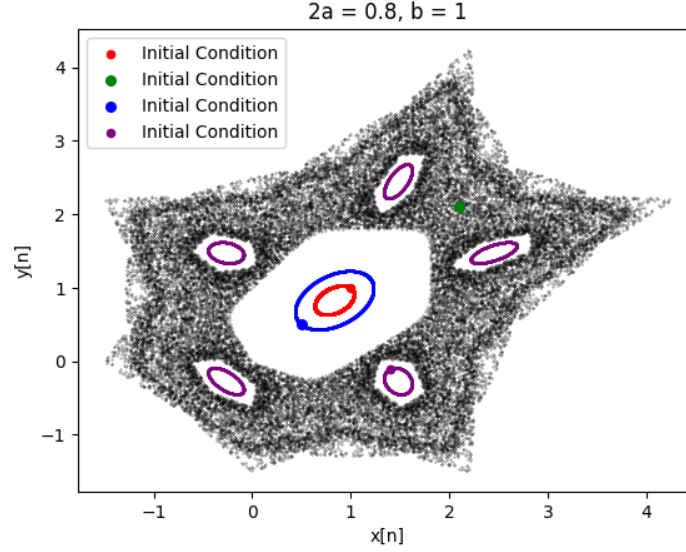


Figura 3: El mar de puntos negros tiene por condición inicial el punto $(2.1, 2.1)$; la elipse roja (ex punto fijo) en $(1, 1)$; la elipse azul central en $(0.5, 0.5)$ y ahora tuvimos que cambiar la condición inicial, en $(1.4, -0.1)$ para obtener elipses dentro de lo que ahora son pentágonos.

Notamos que en la Figura 3, ya el punto fijo cuando $a = 1/2$ se transforma en una elipse, el mar de puntos negros se ha degenerado haciendo que las elipses dentro de los hexágonos, estén afuera además de que ahora son 9 en vez de las 5 anteriores, ya que el área del mar negro se a reducido y finalmente los hexágonos se han transformado en pentágonos. Esto nos induce a un acercamiento a una bifurcación.

Otro caso muy interesante es cuando hacemos $a = 0.73$.

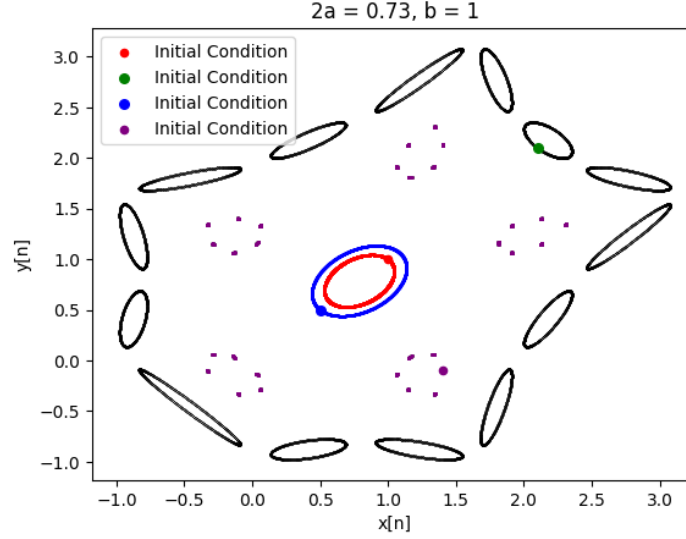
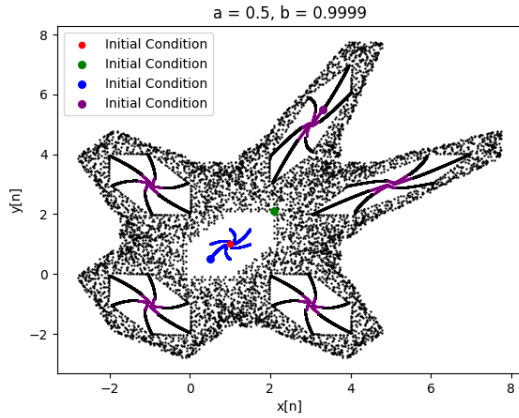
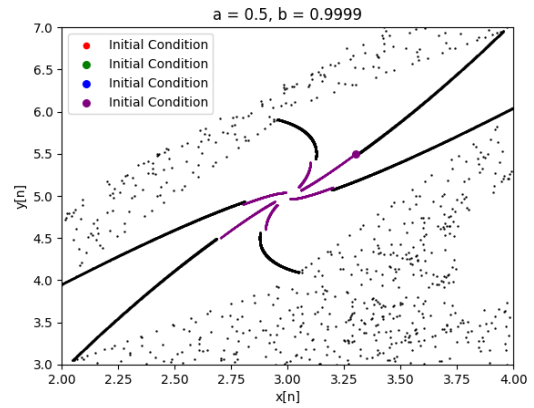


Figura 4: Pasado el punto de bifurcación, ya no vemos el mar negro de puntos debido a la condición inicial que hemos tomado, ahora son las elipses negras que tienen por condición inicial el punto $(2.1, 2.1)$; la elipse roja (ex punto fijo) en $(1, 1)$; la elipse azul central en $(0.5, 0.5)$ y las elipses moradas en $(1.4, -0.1)$.

Estudiemos ahora cuando perturbamos el parámetro b en un entorno cercano a 1. Para $a = 1/2$ y $b = 0.9999$



(a)



(b)

Figura 5: En (a) los puntos negros tienen como condición inicial el punto $(2.1, 2.1)$; la “espiral” azul en $(0.5, 0.5)$ y el ex punto fijo en $(1, 1)$. En (b) hacemos el acercamiento sobre la órbita que tiene por condición inicial el punto $(3, 5.3)$

Notamos que en la figura anterior, con sólo perturbar muy poco el parámetro b observamos que el mar de puntos negros deja de acumularse densamente formando los 6 hexágonos como en el caso $b = 1$ y mismo a , ahora muchos puntos negros hacen una incursión dentro de los

hexágonos exteriores formando “espirales”, lo que motiva a conjeturar sobre las cuencas de atracción ubicadas en los bordes de los 5 hexágonos exteriores donde la realización viene a acumularse en el centro de estos.

A.5.2. Simulaciones con perturbaciones estocásticas

En este apartado, comenzamos agregando un ruido al modelo (12), el cual siempre hemos utilizado y lo perturbamos de la forma:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + 2a|x_n| - y_n + \epsilon_n^{(1)} \\ y_{n+1} = bx_n + \epsilon_n^{(2)}, \end{cases} \quad (13)$$

donde el vector

$$\begin{pmatrix} \epsilon_n^{(1)} \\ \epsilon_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

representa un ruido blanco, i.e. una variable aleatoria de distribución normal con media cero y una varianza que representa el nivel de ruido que mas adelante lo fijaremos.

Ahora modificamos un poco el código de la dinámica determinista para realizar retratos de fase correspondientes al modelo (13). Desde el código proporcionado anteriormente en la entrada de la función *orbita*, fijamos por ahora $\text{sigma2} = 0.001$ y $e = 1$. Además agregamos una simple evolución en términos de colores bajo el siguiente patrón, azul, negro, naranja y morado, esto para poder distinguir si hay ciertos patrones en nuestra realización donde los puntos estén acotados en un área mas pequeña o se expandan a un área más grande. Este orden lo seguiremos fielmente en lo que sigue de este estudio.

Por ahora estudiamos el caso Devaney ($a = 1/2$, $b = 1$) para ver el comportamiento de sus principales estructuras de puntos, Punto Fijo, Puntos Periódicos en Hexágonos y el mar que bosqueja el “Gingerbreadman”.

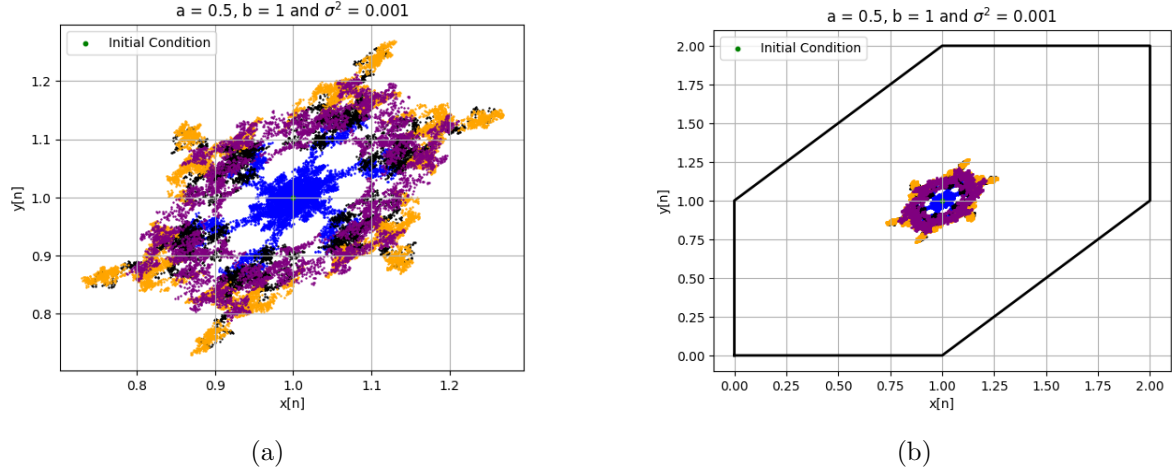


Figura 6: En (a) para la condición inicial en $(1, 1)$, representamos una realización del modelo perturbado de lo que fue el punto fijo en el caso determinista. Además notamos cierta simetría que nos motiva a hacernos preguntas del tipo, qué nivel de ruido será necesario para perder esta característica. En (b) observamos el confinamiento dentro del hexágono central para el caso determinista.

Notemos que bajo el nivel de ruido que hemos tomado, la nube de puntos en torno a $(1, 1)$ no se aleja demasiado de este.

Ahora si nos centramos dentro del hexágono que contiene al punto fijo observado en el caso determinista, utilizando la misma condición inicial que en este caso obtenemos

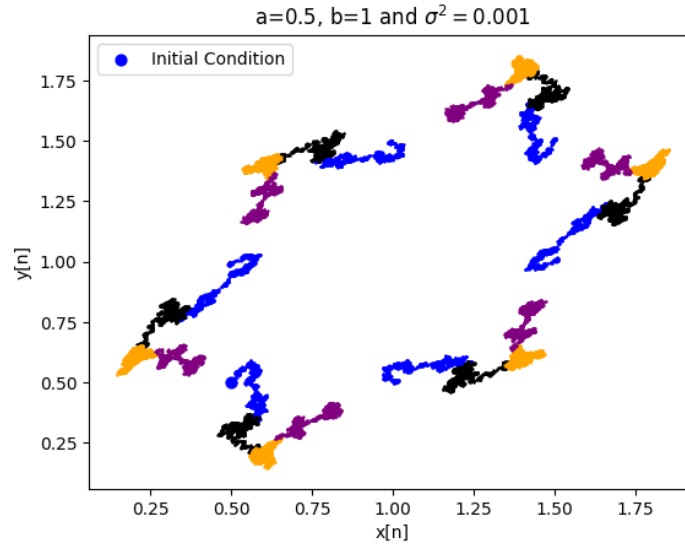


Figura 7: Una realización con condición inicial en $(0.5, 0.5)$ donde se tenían puntos periódicos de periodo 6 en el caso determinista.

En la figura anterior podemos aún rescatar la estructura donde se dan saltos y se forman

estas 6 nubes.

Si continuamos haciendo una exploración de las distintas estructuras, podemos centrarnos en los puntos de periodo 5 que se ubicaban en el centro de los hexágonos en el caso determinista y ver

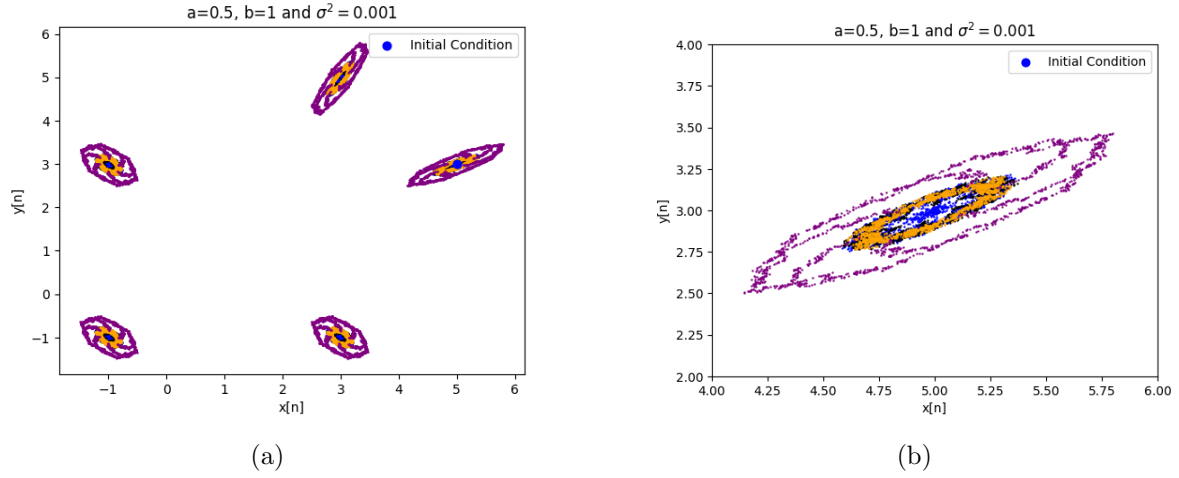


Figura 8: Una realización con condición inicial ubicada en $(5, 3)$. En (a) observamos las nubes centradas en los puntos periódicos (determinista) de periodo 5 y en (b) realizamos un acercamiento para observar la evolución según nuestro orden de colores.

Finalmente vemos el mar de puntos que bosquejan el “Gingerbreadman”

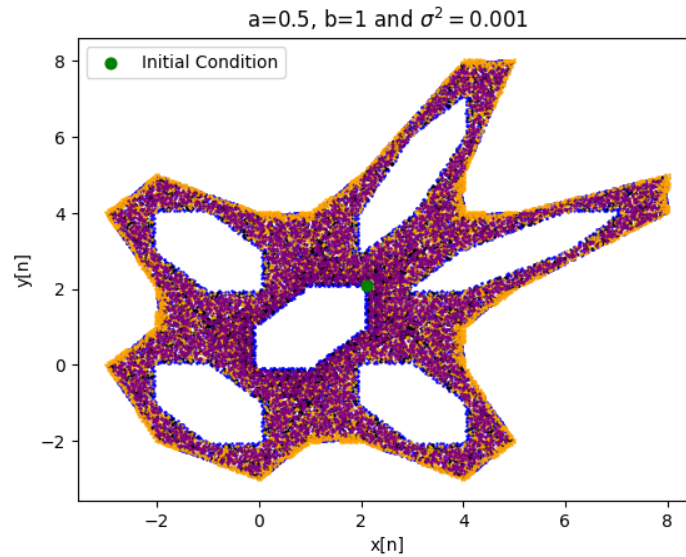


Figura 9: Con condición inicial en $(2.1, 2.1)$ vemos que una realización del mar de puntos que según nuestros colores de evolución no se observa ningún patrón.

Llama la atención que nuestra última ilustración a conservado la forma bastante bien,

similar al caso determinista.

Ahora estudiemos el caso cuando $2a = 0.999$ donde observábamos elipses en la Figura 2 bajo el mismo nivel de ruido 0.001.

Al igual que antes, bajo 32000 iteraciones y utilizando el mismo patrón de colores, estudiamos primeramente el punto fijo (en el caso determinista).

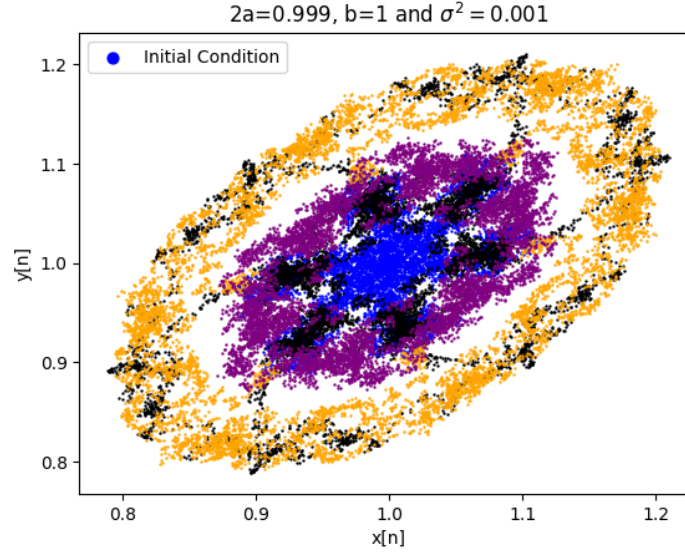


Figura 10: Una realización con condición inicial en $(1,1)$ vemos un patrón más elíptico que cuando $2a = 1$ (Figura 6).

Continuamos con los puntos que inducían elipses en un entorno del punto $(1,1)$ (ver Figura 2b).

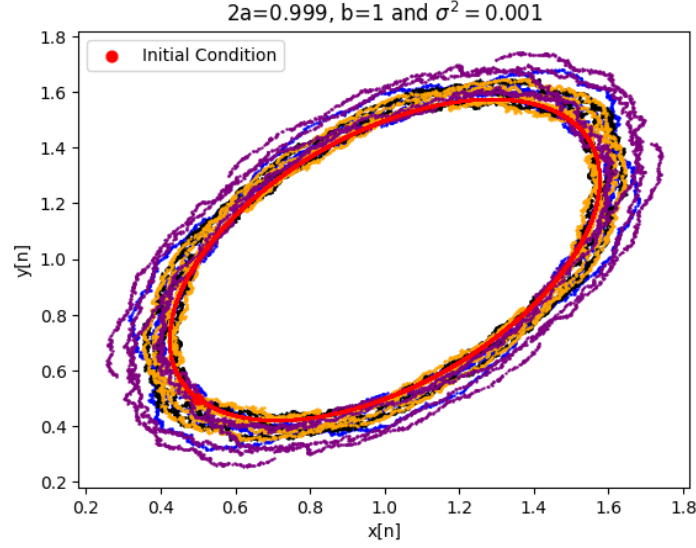


Figura 11: Para una condición inicial en $(0.5, 0.5)$ contrastado con la elipse roja de este mismo modelo en su versión determinista.

Notamos que no se observa un patrón de constante acercamiento o alejamiento de la elipse original roja.

Al igual que para el caso determinista el mar de puntos que bosquejan el “Gingerbread-man” no cambia mucho para este valor de a y para el ruido utilizado.

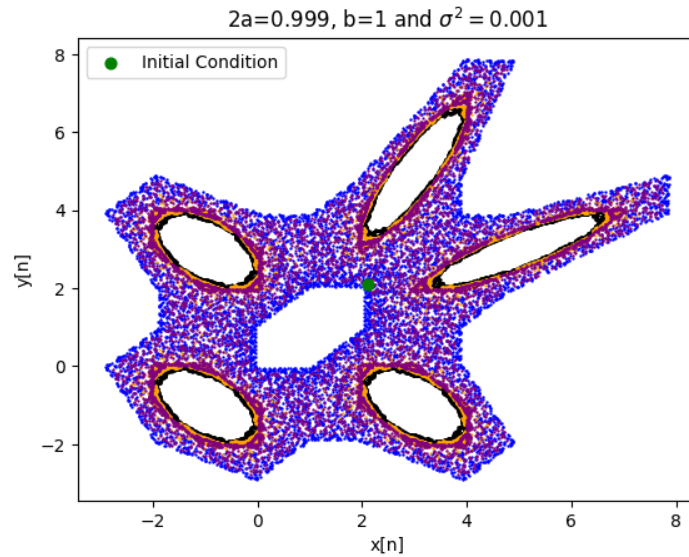


Figura 12: Para una condición inicial en $(2.1, 2.1)$ visualizamos el mar de puntos donde se comienzan a perder los 5 hexágonos exteriores y se tornan más elípticos.

Finalmente visualizamos los puntos que tenían periodo 30 en el caso determinista para $2a = 1$, los cuales están dentro de los hexágonos exteriores.

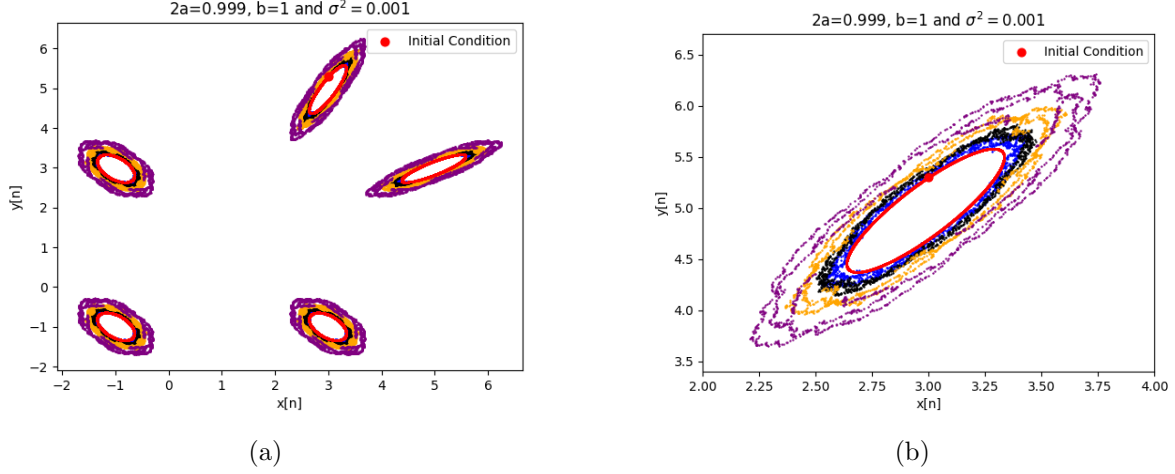


Figura 13: Una realización con condición inicial ubicada en $(3, 5.3)$. En (a) observamos las nubes contrastadas con las elipses (determinista) y en (b) realizamos un acercamiento para observar la evolución según nuestro orden de colores.

Notamos que se forman estas “elipses gruesas” donde en su centro se van a ubicar los puntos que tenían periodo 5 correspondientes al caso determinista.

A.6. Dinámica determinista conservativa ($b = 1$)

En esta sección nos centraremos primeramente en la representación del modelo (12) que es afín a trozo en \mathbb{R}^2 como una representación matricial en \mathbb{R}^3 que es lineal a trozo. El modelo (12) lo podemos descomponer en \mathbb{R}^3 con dos matrices: La primera,

$$F_r := \begin{pmatrix} 2a & -1 & 1 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde F_r representa las transiciones en los puntos donde $x_n \geq 0$; y la segunda,

$$F_\ell := \begin{pmatrix} -2a & -1 & 1 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

acá la matriz F_ℓ se la va aplicar cuando $x_n < 0$. En esta representación la coordenada z siempre es 1 o equivalentemente

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + 2a|x_n| - y_n \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases} \quad \text{transformado a} \quad \begin{pmatrix} \pm 2a & -1 & 1 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (1 + 2a|x| - y, bx, 1).$$

Notemos que hacemos una representación de la dinámica del modelo (12) mediante composiciones de las matrices F_r y F_ℓ sobre el vector $(x, y, 1)^T$, que además el plano $\{z = 1\}$

corresponde al plano \mathbb{R}^2 del modelo original, pues el plano $\{z = 1\}$ en \mathbb{R}^3 es invariante bajo las composiciones de las matrices anteriores.

Primeramente queremos establecer un resultado sobre la dependencia del punto fijo en $a \in (-1, 1)$ fijando $b = 1$.

Para lo siguiente primero recordamos la definición de punto fijo: Dado un mapeo $f : X \rightarrow X$, un punto $x \in X$ es punto fijo si cumple con que $f(x) = x$. Aquí, $x \in \mathbb{R}^2$.

Ahora, recordamos el modelo (12) con $b = 1$,

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + 2a|x_n| - y_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}.$$

El valor absoluto del modelo, indica que necesitamos emplear dos casos:

Caso 1: $x \geq 0 \implies |x| = x$.

Desde la definición de punto fijo tenemos que :

$$x = 1 + 2ax - x \implies x - 2ax + x = 1 \implies x(2 - 2a) = 1 \implies x_r(a) = \frac{1}{(2 - 2a)} > 0.$$

Caso 2: $x \leq 0 \implies |x| = -x$.

Desde la definición de punto fijo tenemos que :

$$x = 1 - 2ax - x \implies x + 2ax + x = 1 \implies x(2 + 2a) = 1 \implies x_\ell(a) = \frac{1}{(2 + 2a)} > 0.$$

Así hemos probado que para $b = 1$ nuestro modelo siempre posee un punto fijo x_r y además depende continuamente de $a \in (-1, 1)$. Acá se debe tener cuidado en que el punto $x_\ell(a)$ para la curva roja (punteada) $\{(a, x_\ell(a), a \in (-1, 1))\}$ (ver siguiente figura), nunca lo vemos explícitamente en el retrato de fase, porque, este hace referencia a la aplicación (dado a) que está a la izquierda de la recta $\{x = 1\}$ en el plano, pero su ubicación está a la derecha, en cambio el punto fijo que vemos es para la curva azul, ya que esta es para la aplicación (dado a) a la derecha de la recta $\{x = 1\}$ y su ubicación también está a la derecha.

Entonces para $x \geq 0$. Tenemos que para todo $a \in (-1, 1)$, las coordenadas del punto fijo son:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1}{(2 - 2a)}, \frac{1}{(2 - 2a)} \right),$$

mientras que para el otro punto

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{1}{(2 + 2a)}, \frac{1}{(2 + 2a)} \right).$$

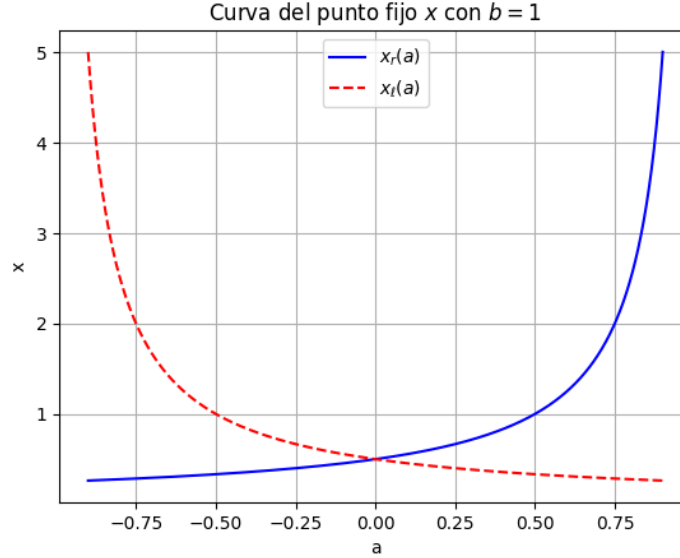


Figura 14: Curva ilustrativa de la ubicación del punto fijo en función de a para $b = 1$.

A.6.1. Estudio de la dinámica entorno a órbitas periódicas robustas estables

Ahora, para comenzar a caracterizar las dinámicas sobre órbitas periódicas robustas y estables introduciremos ahora una miscelánea del ángulo de rotación.

Recordamos la definición de estabilidad (Lyapunov): Sea (X, d) un espacio métrico y un mapeo $f : X \rightarrow X$ continuo. Un punto $x \in X$ se dice Lyapunov estable, si

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in X : [d(x, y) < \delta \implies \forall n \in \mathbb{N} d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon].$$

También la definición de robustez o estructuralmente estable: Un mapeo C^r f es C^m estructuralmente estable ($1 \leq m \leq r$) si existe una vecindad U de f en la topología C^m tal que cada mapeo $g \in U$ esté topológicamente conjugado con f . Es decir son aquellos que preservan su naturaleza a pesar de perturbaciones pequeñas (en el sentido de órbitas).

Sobre el ángulo de rotación

Sea $R_\rho \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ una matriz de rotación de la forma

$$R_\rho = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\rho) & -\sin(2\pi\rho) & 0 \\ \sin(2\pi\rho) & \cos(2\pi\rho) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Buscamos $\rho = \rho(a)$ con $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, para a en el modelo (12).

Ahora procedemos primero a estudiar la dinámica entorno al único punto fijo, cuyas órbitas al rededor de este tendrán asociado un ángulo de rotación ρ_1 fijando $b = 1$. Entonces procedemos a descomponer la matriz F_r en sus valores y vectores propios para relacionar en este caso F_r con la matriz de rotación para ρ_1 , donde encontramos la siguiente descomposición:

Vector propio de valores propios

$$\begin{pmatrix} a - \sqrt{a^2 - 1}, & a + \sqrt{a^2 - 1}, & 1 \end{pmatrix},$$

Vectores propios

$$\begin{pmatrix} a - \sqrt{a^2 - 1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a + \sqrt{a^2 - 1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{-1}{2(a-1)} \\ \frac{-1}{2(a-1)} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego la matriz diagonal de la descomposición es:

$$J = \begin{pmatrix} a + \sqrt{a^2 - 1} & 0 & 0 \\ 0 & a - \sqrt{a^2 - 1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pero resulta que por los resultados provenientes del modelo de ciclo económico en [6], para garantizar estabilidad se requiere que $a \in (-1, 1)$, luego necesitamos trabajar solo con la parte real de la matriz J que es el bloque de Jordan real, que es equivalente al bloque de Jordan complejo, donde la definimos como:

$$J_* = \begin{pmatrix} a & -\sqrt{1 - a^2} & 0 \\ \sqrt{1 - a^2} & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora podemos relacionar con la matriz de rotación, ya que el ángulo de rotación es invariante bajo conjugación, entonces:

$$J_* = \begin{pmatrix} a & -\sqrt{1 - a^2} & 0 \\ \sqrt{1 - a^2} & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\rho_1) & -\sin(2\pi\rho_1) & 0 \\ \sin(2\pi\rho_1) & \cos(2\pi\rho_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

lo cual nos permite establecer una relación entre ρ_1 y a .

Entonces

$$\cos(2\pi\rho_1) = a \iff \rho_1(a) = \frac{\arccos(a)}{2\pi}, \quad (14)$$

así $\rho_1 \in (0, 1)$.

Ahora vemos desde desde (14) que podemos ver escoger a de tal forma (racional o irracional) a obtener entorno al punto fijo $(x_r(a), x_r(a))$ órbitas periódicas si $\rho_1(a)$ es racional y casi-periódicas si $\rho_1(a)$ es irracional. Por ser $\rho_1(a)$ estrictamente decreciente, estas órbitas (casi-) no son robustas.

Sigamos ahora con la búsqueda de posibles combinaciones entre las matrices F_r y F_ℓ para establecer otro ángulo de rotación para órbitas de periodo mínimo más alto.

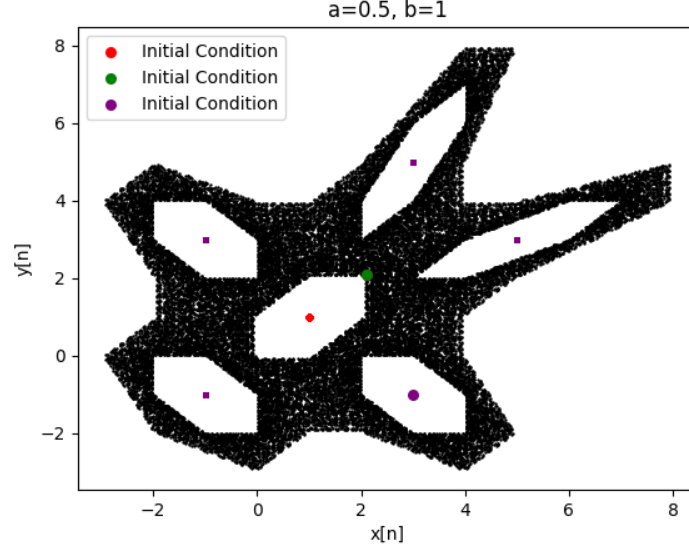


Figura 15: Órbita de periodo 5 robusta estable a caracterizar por el ángulo de rotación.

Basándonos en la Figura (15), si nos centramos en los hexágonos exteriores podemos generar 5 posibles combinaciones, según el hexágono en el cual se tomó la condición inicial, sean estas:

$$\begin{aligned}
 F_{3,2}^5 &:= F_\ell^2 F_r^3 \\
 F_{2,2,1}^5 &:= F_r F_\ell^2 F_r^2 \\
 F_{1,2,2}^5 &:= F_r^2 F_\ell^2 F_r \\
 F_{2,3}^5 &:= F_r^3 F_\ell^2 \\
 F_{1,3,1}^5 &:= F_\ell F_r^3 F_\ell.
 \end{aligned}$$

Adentrémonos en la dinámica utilizando las matrices anteriores para $a \in (-1, 1)$ y $b = 1$, con la intención de caracterizar la dinámica en torno a órbitas robustas estables de periodo mínimo 5 a través del ángulo de rotación.

Se tiene que:

$$F_{3,2}^5 = F_\ell^2 F_r^3 = \begin{pmatrix} 2a(1 - 4a^2)^2 & -1 + 4a^2 - 16a^4 & 1 - 2a + 8a^3 + 16a^4 \\ 1 + 4a^2 - 16a^4 & 8a^3 & -2a(1 + 2a + 4a^2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora tomamos la matriz diagonal de su descomposición de Jordan,

$$J = \begin{pmatrix} a - 4a^3 + 16a^5 + \phi(a) & 0 & 0 \\ 0 & a - 4a^3 + 16a^5 - \phi(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con

$$\phi(a) = \sqrt{-1 + a^2 - 8a^4 + 48a^6 - 128a^8 + 256a^{10}},$$

nuevamente utilizaremos la forma de Jordan para el caso de valores reales,

$$J_* = \begin{pmatrix} a - 4a^3 + 16a^5 & -\phi(a) & 0 \\ \phi(a) & a - 4a^3 + 16a^5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\rho_5) & -\sin(2\pi\rho_5) & 0 \\ \sin(2\pi\rho_5) & \cos(2\pi\rho_5) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

desde la cual

$$\cos(2\pi\rho_5) = a - 4a^3 + 16a^5 \iff \rho_5(a) = \frac{\arccos(a - 4a^3 + 16a^5)}{2\pi}.$$

Así tenemos una nueva función $\rho_5(a)$, la cual nos permite determinar el valor de a para tener un ángulo de rotación racional o irracional.

Para las demás matrices seguimos con el mismo procedimiento.

$$F_{2,2,1}^5 = \begin{pmatrix} 2(a + 16a^5) & 1 - 4a^2 - 16a^4 & 1 + 2a + 8a^3 + 16a^4 \\ 1 - 4a^2 + 16a^4 & -8a^3 & 2a(-12a4a^2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

luego

$$J_* = \begin{pmatrix} a - 4a^3 + 16a^5 & -\phi(a) & 0 \\ \phi(a) & a - 4a^3 + 16a^5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resulta que en este caso la matriz J_* es la misma que para el caso anterior, luego obtendremos el mismo ángulo de rotación. Esto se debe a que al buscar órbitas de periodo 5, bajo las combinaciones de las matrices F_r y F_ℓ que describimos arriba, lo que realmente estamos haciendo es trasladar el la condición inicial bajo la regla de aplicar 3 veces F_r y 2 veces F_ℓ según corresponda, como sabemos que el ángulo de rotación es invariante bajo traslaciones, este no va cambiar.

Este procedimiento lo podemos realizar para periodos más grandes, donde las combinaciones crecerán claramente.

Si queremos dar con ubicación de la condición inicial de la órbita, el método se basa en la definición de punto fijo y la definición de valor y vector propio, es decir, primero tenemos que para $F_{3,2}^5 := F_\ell^2 F_r^3$,

$$F_{3,2}^5 x_1 = \lambda_1 x_1,$$

con λ_1 valor propio y x_1 su vector propio asociado, luego si tomamos como $\lambda_1 = 1$, tenemos que,

$$F_{3,2}^5 x_1 = x_1,$$

es decir, ahora tenemos que x_1 es un punto fijo para nuestra aplicación $F_{3,2}^5$. Luego como la última entrada de x_1 es 1 aludiendo al eje z , se tiene que las dos primeras entradas del vector

nos dan la posición de la condición inicial para una órbita periódica, ya que esta se vuelve un punto fijo para la aplicación $F_{3,2}^5$.

Ahora para la aplicación $F_{3,2}^5$ tenemos que el vector propio asociado al valor propio 1 es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-(1+2a+4a^2)}{2(-1-a+2a^2+4a^3)} \\ \frac{-(1-2a-4a^2)}{2(-1-a+2a^2+4a^3)} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cómo nuestra condición inicial está para $x > 0$ e $y < 0$ necesitamos establecer un intervalo de admisibilidad de esta órbita según nuestra Figura 15. Para eso nos ayudamos primeramente del gráfico de las funciones de las entradas del vector propio.

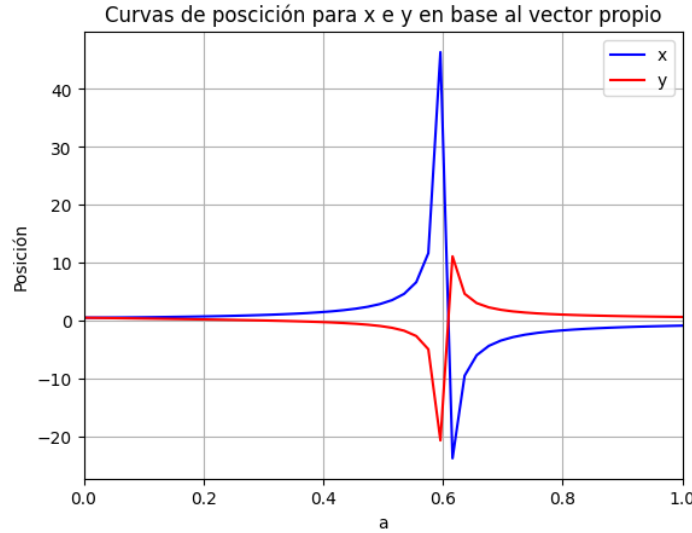


Figura 16: Las funciones de las entradas del vector propio para x e y .

Así es claro que el intervalo de definición es donde la curva roja es negativa y la azul positiva, entonces, con la ayuda de *Wolfram Mathematica*, utilizando el comando $Reduce[x > a, a]$ y $Reduce[y < a, y]$, tomando las definiciones en términos de a para x e y correspondientes al vector propio y sus respectivas restricciones acordes a la posición de la condición inicial. Luego tenemos que el intervalo donde es admisible la órbita de periodo 5 es:

$$0.309 \simeq \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) < a < \left(\frac{1}{12} \left(-2 + \sqrt[3]{172 - 12\sqrt{177}} + \sqrt[3]{172 + 12\sqrt{177}} \right) \right) \simeq 0.602,$$

la cuál ilustra la Figura 17, donde entorno al punto fijo, el ángulo de rotación está definido para todo a en el intervalo $(-1, 1)$.

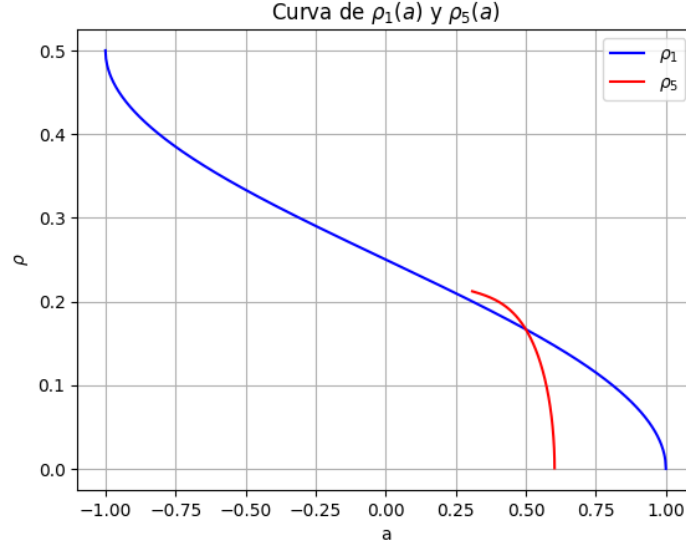


Figura 17: Ángulo de rotación ρ_1 y ρ_5 en función de a .

A.6.2. Ubicación de una órbita periódica robusta inestable

Supongamos que queremos ubicar una órbita que pase 4 veces para $x \geq 0$ y una vez en $x < 0$, entonces necesitamos la siguiente composición:

$$F_\ell F_r^4 = \begin{pmatrix} 2a + 16a^3 - 32a^5 & -1 - 4a^2 + 16a^4 & 1 - 2a - 8a^3 - 16a^4 \\ 1 - 12a^2 + 16a^4 & 4a - 8a^3 & 2a(-1 + 2a + 4a^2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si vemos su descomposición en valores propios obtenemos:

$$\left(3a + 4a^3 - 16a^5 - \psi(a), \quad 3a + 4a^3 - 16a^5 + \psi(a), \quad 1 \right).$$

Donde nos interesa el vector propio asociado al valor propio 1,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1-2a+4a^2}{2(-1+a-2a^2+4a^3)} \\ -\frac{1-2a-4a^2}{2(-1+a-2a^2+4a^3)} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Al igual que antes, nuestra condición inicial la estamos tomando para $x > 0$ e $y < 0$, luego necesitamos un intervalo de admisibilidad para obtener estas órbitas, así nos ayudamos primeramente con la siguiente figura:

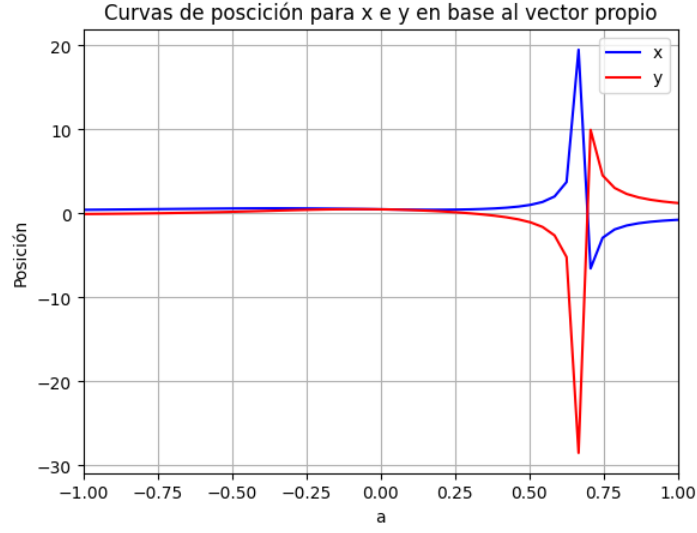


Figura 18: Funciones de las entradas del vector propio para x e y .

Así es claro que el intervalo de admisibilidad es donde la curva roja es negativa y la azul positiva, nuevamente con el mismo comando de *Wolfram Mathematica* utilizado anteriormente, encontramos el siguiente intervalo:

$$0.309 \simeq \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) < a < \frac{1}{6} \left(1 - 2\sqrt[3]{\frac{2}{47 + 3\sqrt{249}}} + \sqrt[3]{\frac{47 + 3\sqrt{249}}{2}} \right) \simeq 0.667,$$

acorde con la figura (18).

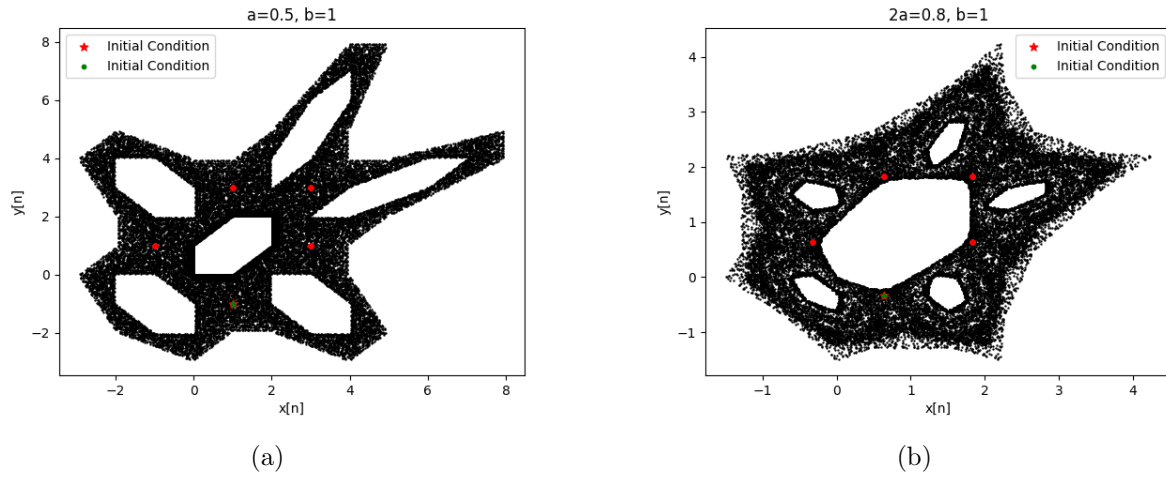


Figura 19: Reemplazando a en las dos primeras entradas del vector propio tenemos que en (a) la condición inicial para la órbita periódica es $(1, -1)$; luego en (b) la condición inicial es $(0.632..., -0.331)$. Además para evidenciar la inestabilidad presentamos otra órbita para una condición inicial en $(1.000001, -1)$ en (a), y realizamos lo mismo en (b) utilizando una condición inicial muy cercana en $(0.633..., -0.331...)$.

Debido al límite de tiempo de esta pasantía concluimos el estudio de la dinámica enunciando las siguientes preguntas para el futuro:

Caso $b = 1$:

- ¿Cómo caracterizar la dinámica en general (con $a \neq 1/2$) entorno a órbitas periódicas robustas estables (Lyapunov)?
- ¿Cómo caracterizar la dinámica entorno a órbitas periódicas robustas inestables?
- ¿Existe este tipo de caracterización?

Caso $b < 1$:

- ¿Existe una infinidad de órbitas periódicas?
- ¿Qué podemos conjeturar sobre las cuencas de atracción de sumideros periódicos?

A.7. Exploración estocástica disipativa/contractiva con $(b < 1)$

Sabemos que en el caso $b < 1$ tenemos contracción y atracción a sumideros periódicos, entonces, nuevamente bajo 32000 iteraciones y el mismo patrón de colores para la evolución tenemos el siguiente retrato de fase:

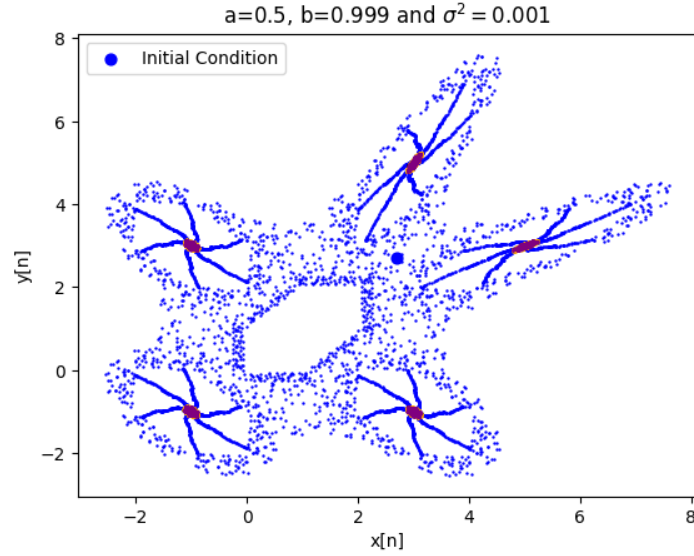


Figura 20: Para una condición inicial en $(2.7, 2.7)$ hay regiones de atracción pese al ruido.

Ahora que ocurre si disminuimos b y aumentamos el ruido

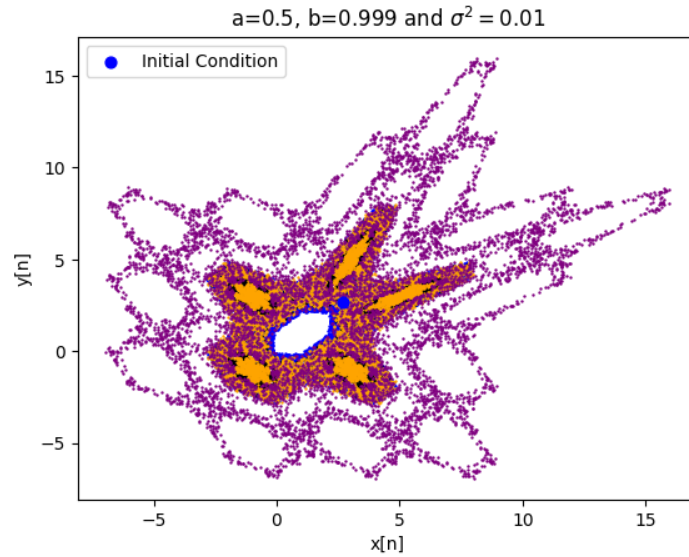


Figura 21: Para una condición inicial en $(2.7, 2.7)$ la órbita puede escapar de las previas regiones.

Estas representaciones nos motivan a realizarnos las siguientes preguntas:

- ¿Qué nivel de ruido se necesita para perder la propiedad de confinamiento en un área cuando $b < 1$?
- ¿Cuál es el tiempo esperado para escapar de ciertas regiones? Condicionado a que la condición inicial esté dentro de estas regiones.

A.8. Informe final

Bajo lo documentado en este escrito se realizará un informe final acorde a los estándares de la carrera para el curso de Práctica Profesional.

Anexo de código

El siguiente enlace conduce al repositorio de GitHub donde el código está a libre descarga.

- <https://github.com/OmarElCorralero/Linear-Piecewise-Map-Under-Stochastic-Perturbations>

Referencias

- [1] D. Aharonov, R.L. Devaney, and U. Elias. The dynamics of a piecewise linear map and its smooth approximation. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 7(2):351 – 372, 1997.
- [2] V Botella-Soler, J M Castelo, J A Oteo, and J Ros. Bifurcación in the lozi map. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 44(30):305101, 2011.
- [3] Robert L. Devaney. A piecewise linear model for the zones of instability of an area-preserving map. *Physica D. Nonlinear Phenomena*, 10(3):387–393, 1984.
- [4] Akitaka Dohtani and Jun Matsuyama. A business-cycle model connecting heterogeneous micro investment behaviors with macro dynamics. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 117:106903, 2023.
- [5] Laura Gardini and Wirot Tikjha. Role of the virtual fixed point in the center bifurcations in a family of piecewise linear maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 29(14), 2019.
- [6] Christiaan Heij, André C. M. Ran, and Frederik van Schagen. *Introduction to mathematical systems theory—discrete time linear systems, control and identification*. Birkhäuser/Springer, Cham, segunda edición edition, 2021.
- [7] Giuseppe Orlando. A discrete mathematical model for chaotic dynamicz in economics: Kaldor’s model on business cycle. *Mathematics and Computer in Simulation*, 125:83–98, 2016.