Acerca del Algoritmo de Dijkstra

Alvaro H. Salas S.*

Resumen

In this paper we prove the correctness of Dijkstra's algorithm. We also discuss it and at the end we show an application.

En este artículo realizamos una descripción detallada del algoritmo de Dijkstra, justificando su correctitud, discutiéndolo y mostrando algunas de sus aplicaciones.

Palabras claves: grafo, digrafo ponderado, digrafo pesado, peso de un camino, camino de coste mínimo, camino minimal.

1. Introduccción

Dado un grafo con etiquetas no negativas, se trata de calcular el coste del camino mínimo desde un vértice dado al resto (ing., single-source shortest paths). La utilidad de un procedimiento que solucione esta cuestión es clara: el caso más habitual es disponer de un grafo que represente una distribución geográfica, donde las aristas den el coste (en precio, en distancia o similares) de la conexión entre dos lugares y sea necesario averiguar el camino más corto para llegar a un punto partiendo de otro (es decir, determinar la secuencia de aristas para llegar a un nodo a partir del otro con un coste mínimo). La solución más eficiente a este problema es el denominado algoritmo de Dijkstra, en honor a su creador, E.W. Dijkstra. Formulado en 1959 en .^A note on two problems in connexion with graphs", Numerical Mathematica, 1, pp. 269-271, sobre grafos dirigidos, el algoritmo de Dijkstra es un algoritmo voraz (algoritmo goloso) que genera uno a uno los caminos de un nodo a al resto por orden creciente de longitud; usa un conjunto S de vértices donde, a cada paso del algoritmo, se guardan los nodos para los que ya se sabe el camino mínimo y devuelve un vector indexado por vértices, de modo que para cada uno de estos vértices podemos determinar el coste de un camino más económico (de peso mínimo) de a a tales vértices. Cada vez que se incorpora un nodo a la solución, se comprueba si los caminos todavía no definitivos se pueden acortar pasando por él.

 $^{^*}$ Departamento de Matemáticas, Universidad de Caldas, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Manizales. email: asalash2002@yahoo.com

2. Preliminares

Recordemos que un digrafo (eng. directed graph) es una pareja G = (V, E), en donde V es un conjunto y E es una relación binaria irreflexiva sobre V, es decir, un subconjunto de $V \times V$ tal que $(x,x) \notin E$ para todo $x \in E$. Decimos que V es el conjunto de vértices y que E es el conjunto de aristas (eng. edges). En los sucesivo supondremos que V es finito. Dada una arista (u,v), decimos que los vértices u y v son adyacentes y que la arista es incidente en ellos (u,v). Se llama camino de u a v, denotado por u-v, a toda sucesión finita de vértices

$$u = x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{m-1}, x_m = v,$$
(2.1)

de modo que (x_i, x_{i+1}) es una arista para cada $i = 0, 1, \dots, m-1$. Por definición, (2.1) es un camino

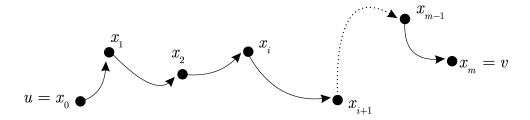


Figura 1: Un camino u - v

de longitud m, u es su vértice inicial, v es su vértice terminal y x_1 , x_2 ,..., x_{m-1} son sus vértices internos.

Un digrafo es ponderado o pesado, si a cada arista (u, v) se le asigna un número real, denotado por p(u, v) y llamado su peso. En lo sucesivo consideraremos un digrafo ponderado G con pesos positivos : p(u, v) > 0 para toda arista $(u, v) \in E$. El peso del camino (2.1) se define como la suma de los pesos de sus aristas :

$$p(u-v) = p(x_0, x_1) + p(x_1, x_2) + \dots + p(x_{m-1}, x_m).$$
(2.2)

Un camino es de coste mínimo si no es posible encontrar ningún camino de u a v cuyo peso sea menor que p(u-v). En otras palabras, dado cualquier camino de u a v

$$u = y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k = v,$$

se debe tener

$$p(u, y_1) + p(y_1, y_2) + \dots + p(y_{k-1}, v) \ge p(u - v).$$

3. El algoritmo de Dijkstra. Descripción y sustentación de su correctitud.

Sea G=(V,E) un digrafo ponderado con pesos positivos de n vértices. Supongamos que a y z son dos vértices en V, de modo que $z \neq a$ y existe al menos un camino de a a z. Nuestro principal objetivo consiste en hallar un camino a-z de coste mínimo. Este problema se resuelve de manera eficiente mediante el algoritmo de Dijkstra. El algoritmo inicia en el vértice a y construye un camino de coste mínimo

$$a = u_0, u_1, \dots, u_{m-1}, u_m = z,$$

tal que $a - u_i$ es un camino de coste mínimo para cada $i = 0, 1, \dots, m$.

3.1. Algoritmo de Dijkstra

Entrada: Grafo ponderado dirigido de n vértices con pesos positivos; a y z vértices distintos tales que existe algún camino de a a z.

Salida: Peso de un camino de coste mínimo de a a z.

- **Paso 1**: Definimos $S_0 = \emptyset$, $T_0 = V$. Asignamos a cada vértice v en V una etiqueta (eng. label) como sigue: L(v) = 0 si v = a y $L(v) = \infty$ para $v \neq a$.
- Paso 2 : Para i=1,2,...,n : Supongamos que hemos construido los conjuntos S_0 , S_1 ,..., S_{i-1} . Hacemos $T_{i-1}=V\setminus S_{i-1}$. Si $z\in S_{i-1}$, definimos $S=S_{i-1}$ y detenemos la construcción. En caso contrario, escogemos el primer vértice u en T_{i-1} con la menor eqtiqueta, es decir,

$$L(u) = \min\{L(v) \mid v \in T_{i-1}\}.$$

Definimos $u_{i-1} = u$, $S_i = S_{i-1} \cup \{u_{i-1}\} = \{u_0, u_1, \dots, u_{i-1}\}$ (decimos que u entra), $T_i = V \setminus S_i$ y para cada vértice v en T_i adyacente a u cambiamos su etiqueta L(v) por la nueva etiqueta $\min\{L(v), L(u) + p(u, v)\}$:

$$L(v) \leftarrow \min\{L(v), L(u) + p(u, v)\},\$$

es decir, actualizamos la etiqueta de los "vecinos" de u por fuera de S_i .

■ Paso 3: Si i = n, definimos $S = S_n$ y nos detenemos. Si i < n, hacemos i = i + 1 y vamos al Paso 2.

El algoritmo de Dijkstra termina en el momento en que encontramos el primer índice m para el cual $z \in S_m$. En ese momento, $S = S_m$.

3.2. Correctitud del algoritmo de Dijktra

La justificación de la correctitud de este notable algoritmo se basa en el siguiente

Teorema 1 Al finalizar la ejecución del algoritmo de Dijkstra tenemos que, para todo $u \in S$ con $u \neq a$,

- **A.** Cualquier camino a-u tiene peso al menos $L(u):L(u)\leq p(a-u)$
- **B.** Existe un camino de a a u de peso iqual a L(u). En particular, L(u) es finita: $L(u) < \infty$.

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre $i \geq 1$. Sea i = 1. Inicialmente (esto es, antes del Paso 2) $S_0 = \emptyset$, $T_0 = V$. Es claro que $z \notin S_0$. De acuerdo al Paso 2, escogemos el vértice a por cuanto su etiqueta es la menor (los demás vértices tienen etiqueta $\infty > 0$), así que el vértice $a = u_0$ entra y $S_1 = \{u_0\}$. Entonces $T_1 = V \setminus S_1$. Por hipótesis, existe al menos un camino de a a z. Sea

$$a = x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m = z \tag{3.3}$$

dicho camino. Entonces $x_1 \in T_1$ es un vecino de u_0 , así que el conjunto de los vecinos de u_0 por fuera de S_0 es no vacío. De acuerdo al Paso 2, actualizamos las etiquetas de estos vecinos. Sea v cualquiera de ellos. Su nueva etiqueta es

$$\min\{L(v), L(a) + p(a, v)\} = \min\{\infty, 0 + p(a, v)\} = p(a, v).$$

Según esto, la etiqueta de v (que en este momento es ∞) se cambia por el peso de la arista (a, v). Supongamos que u_1 es un vecino con la menor etiqueta (el vecino más económico o más cercano a $u_0 = a$; puede haber más de uno, en cuyo caso podemos escoger *cualquiera* de ellos), esto es,

$$L(u_1) = \min\{p(a, v) \mid v \in T_1, \text{ siendo } v \text{ un vecino de } a\} = p(a, u_1).$$

Sea (3.3) cualquier camino a-z. Tenemos:

$$L(u_1) \le p(a, x_1) \le p(a, x_1) + p(x_1, x_2) + \dots + p(x_{m-1}, z) = p(a - z),$$

de modo que la condición **A** se cumple para i=1. De otro lado, **B** es verdadera, ya que a, u_1 es un camino $a-u_1$ de peso $p(a-u_1)=p(a,u_1)=L(u_1)$.

De acuerdo con los anteriores argumentos, el teorema es válido para i = 1.

Supongamos que este teorema se cumple para todos los vértices $u_i \in S$ con $1 \le i \le k$. Veamos que este teorema también es válido para el vértice u_{k+1} .

Consideremos cualquier camino de a a $v = u_{k+1}$ (ver Figura 2). Veamos que $L(v) \le p(a-v)$. Si esto fuera falso, se tendría L(v) > p(a-v). Supongamos que y es el primer vértice de este camino por

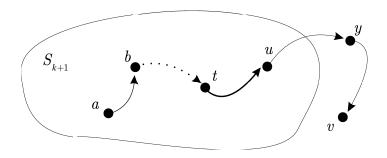


Figura 2: Un camino arbitrario u-v

fuera de S_{k+1} y sea u el predecesor de y en dicho camino. Entonces $u \in S_{k+1} = \{u_0, u_1, \dots, u_k\}$. De acuerdo con nuestra hipótesis inductiva, $L(u) \le p(a-u)$. Además, $L(v) = L(u_{k+1}) \le L(y)$, luego

$$L(v) \le L(y) \le L(u) + p(u, y) \le p(a - u) + p(u, y) = p(a - y) \le p(a - v) < L(v),$$

lo cual es una contradicción. En consecuencia, la parte **A** del teorema se cumple para i = k + 1. Supongamos que en el camino (3.3) el vértice $y = x_j$ es el primero que se encuentra por fuera de $S_{k+1} = \{u_0, u_1, \dots, u_k\}$. Ver Figura 3. Entonces $y = x_j$ es vecino de $u = x_{j-1} \in S_{k+1}$. Por hipótesis

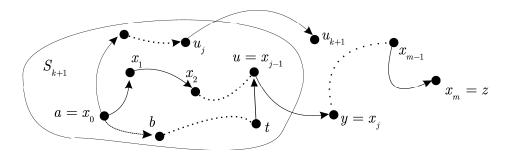


Figura 3: Existencia de un camino de a hacia u_{k+1} de peso $L(u_{k+1})$

inductiva, existe un camino a, b, \ldots, t, u de a a u de peso L(u), luego L(u) es finito. Cuando u entró a S, la etiqueta de su vecino y fue actualizada, de modo que $L(y) \leq L(u) + p(u, y) < \infty$. Ahora, ambos, y y u_{k+1} , están por fuera de S_{k+1} , así que $L(u_{k+1}) \leq L(y) < \infty$. Inicialmente (esto es, antes del Paso 2), el vértice u_{k+1} tenía etiqueta ∞ (observemos que $u_{k+1} \neq a$, ya que $a = u_0$ y $k+1 \neq 0$). En el momento actual, por lo que acabamos de demostrar, este vértice tiene etiqueta finita. Esto significa que en algún momento fue actualizada y cambió de ∞ a $L(u_j) + p(u_j, u_{k+1})$ para algún j con $j \leq k$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que este es el valor actual de $L(u_{k+1})$, es decir,

$$L(u_{k+1}) = L(u_j) + p(u_j, u_{k+1}). (3.4)$$

De acuerdo a nuestra hipótesis inductiva, existe un camino de $a - u_j$ de peso $L(u_j)$. Agregando a este camino la arista (u_j, u_{k+1}) obtenemos un camino de peso $L(u_j) + p(u_j, u_{k+1}) = L(u_{k+1})$, de modo que **B** también se satisface para i = k + 1. Teorema demostrado. \blacklozenge

Del teorema antwerior se sigue que:

a. El algoritmo termina.

En efecto, probemos por inducción sobre $i \ge 1$ que los elementos de S_i son distintos.

Para $i=1,\ S_1=\{u_0\}$ y en este caso no hay nada que demostrar. Supongamos que todos los elementos de S_i son distintos para algún $i\geq 1$, de modo que $z\notin S_i$. Sea x el último vértice en $S_i\subseteq S$ de un camino u-z y y su vecino. Cuando x entró a S, la etiqueat de y se actualizó, luego $L(y)\leq L(x)<\infty$. Por lo tanto, es posible escoger en $T_i=V\setminus S_i$ un elemento con etiqueta mínima finita $\leq L(y)$. Uno de ellos es precisamente el elemento u_i . Entonces definimos $S_{i+1}=\{u_0,u_1,\ldots,u_{i-1},u_i\}$. Es claro que todos los elementos de S_{i+1} son distintos. Por consiguiente, $i\leq n$ y el algoritmo debe terminar.

- **b.** L(u) es el peso de un camino de coste mínimo de a a u para todo $u \in S \setminus \{a\}$.
 - En efecto, puede haber más de un camino de coste mínimo. Sin embargo, es fácil ver que todos ellos tienen el mismo peso. Si consideramos uno de estos caminos, su peso q es menor o igual que el peso del camino de a a u cuya existencia se garantiza en la parte \mathbf{B} del teorema, esto es, $q \leq L(u)$. De otro lado, según la parte \mathbf{A} de este teorema, todo camino a-u tiene peso al menos L(u), esto es, $q \geq L(u)$. Concluimos que q = L(u). En particular, tomando $u = z \in S$, obtenemos que L(z) es el peso de un camino de coste mínimo de a hacia z.
- **c.** Si $u_m = z$, entonces

$$L(u_0) \le L(u_1) \le \cdots \le L(u_j) \le L(u_{j+1}) \le \cdots \le L(u_m).$$

En efecto, antes de que los elementos u_j y u_{j+1} entren a $S = S_m$, éstos se encuentran en $T_j = V \setminus S_j$. Se escoge u_j por cuanto este es uno de los elementos con etiqueta mínima, luego $L(u_j) \leq L(u_{j+1})$.

4. Discusión

Supongamos que aplicamos el algoritmo de Dijkstra empezando en un vértice arbitrario a. En calidad de z tomamos cualquier vértice distinto de a. Si existe un camino de a a z, el algoritmo funciona. Supongamos que no existe tal camino. En este caso, z no pertenece a ninguno de los conjuntos S_i . Al aplicar los pasos del algoritmo, nos detenemos en el momento en que todas las

etiquetas de los vértices que aún no han entrado sea ∞ . Por lo tanto, dados dos vértices arbitrarios distintos a y z, al tomar a como vértice inicial, si ejecutamos los pasos del algoritmo, deteniéndonos en el momento en que

$$\min\{L(v) \mid v \in T_i\} = \infty,$$

En el caso en que en el grafo G = (V, E) sea una relación simetrica, decimos que el grafo es no dirigido y las aristas son bidireccionales (sobre las aristas no colocamos ninguna flecha) y en este caso L(a) = L(z) para cualquier par de vértices del grafo.

5. Algoritmo de Dijkstra modificado

En algunas ocasiones nos interesa conocer no solamente el peso de un camino de coste mínimo entre dos vértices dados, sino también la ruta a seguir para llegar de uno de estos dos vértices al otro. En este caso a cada vértice distinto de a le agregamos una etiqueta adicional, es decir, a cada vértice $v \neq a$ le asociamos una pareja $\overline{L}(v)$ de la siguiente manera. En el Paso 1, $\overline{L}(v) = (\infty, \star)$. Si al ejecutar el Paso 2 éste vértice es vecino de a, entonces su nueva etiqueta es $\overline{L}(v) = (p(u,v),u)$. En caso contrario, esta etiqueta inicial es (∞, \star) . Supongamos que en determinado momento la etiqueta de cierto vértice $v \notin S$ se actualiza, es decir que v es un vecino de un vértice u que acaba de entrar a S, de modo que L(u) + p(u,v) < L(v). Entonces la etiqueta de v se cambia por $\overline{L}(v) = (L(u) + p(u,v),u)$. El vértice u es predecesor de un camino de coste mínimo de a a v. De esta manera, si al terminar el algoritmo la etiqueta de v es $\overline{L}(v) = (L(v),u)$, entonces observamos la etiqueta de u. Sea $\overline{L}(u) = (L(u),t)$. Entonces un camino de coste mínimo de a a v debe ser de la forma a, \ldots, t, u, v . Al observar la etiqueta de t, obtenemos otro predecesor. Procedemos de esta manera hasta llegar a un vértice b cuya etiqueta sea $\overline{L}(b) = (L(b),a)$. En ese momento habremos obtenido un camino a, b, \ldots, t, u, v de coste mínimo igual a L(v).

6. Aplicación

En esta sección mostraremos una aplicación del algoritmo de Dijkstra en un caso concreto. La Figura 4 muestra un grafo no dirigido ponderado. Hallemos un camino de coste mínimo de a a z.

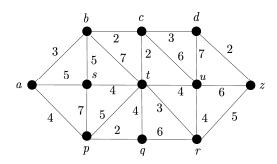
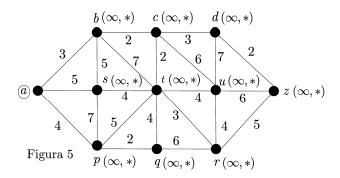
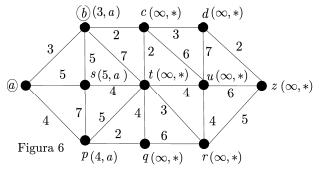


Figura 4: Grafo ponderado.

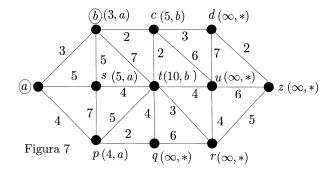
La ejecución del algoritmo se ilustra a continuación :



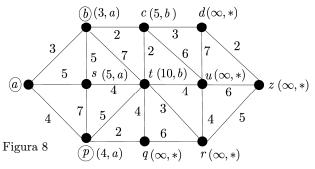
Fase inicial



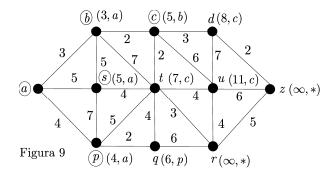
Actualizamos las etiquetas de b, s y p. Entra b, porque $L(b)=3=\min(L(b),L(s),l(p)$

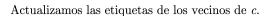


Actualizamos las etiquetas de los vecinos de \boldsymbol{b}

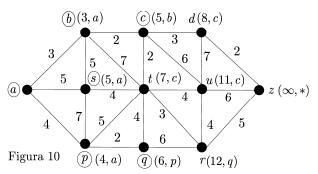


Entra p porque tiene la menor etiqueta.



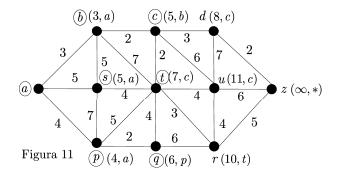


Entra q por tener la menor etiqueta.



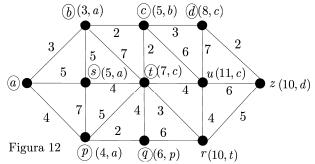
Actualizamos la etiqueta del vértice r.

Entra t por tener la menor etiqueta.



Actualizamos las etiquetas de los vecinos de t.

Entra d por tener la menor etiqueta



Actualizamos las etiquetas de los vecinos de d.

Entra z por tener la menor etiqueta. Fin del algoritmo.

De acuerdo a la Figura 12, un camino de coste mínimo de a a z es a, b, c, d, z. Este camino tiene peso igual a 10.

Referencias

[1] R. JOHNSONBAUGH, Matemáticas Discretas, Prentice Hall, Cuarta Edición, pag. 338–343.