Algoritmo Concurrente por Conjuntos de Pilas con Multiplicidad: SetStackLogic

José Damián López*
Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México 04510, México.
(Dated: 27 de julio de 2023)

El presente artículo tiene como objetivo describir y explicar los fundamentos teóricos de algoritmo concurrente y concurrentes por conjuntos, considerando un sistema de memoria compartida asincrónica donde cualquier número de procesos puede colapsar. La verificación de los algoritmos concurrentes se describe a menudo a partir de su condición de progreso, la cual garantiza que eventualmente algo bueno sucederá, también llamada la seguridad de los algoritmos, y la correctitud, la cual garantiza que nada malo sucederá, también llamada viveza de los algoritmos. Se explica a detalle el significado de corrección de un algoritmo concurrente, centrándonos en la linealizabilidad, y se aborda una generalización, la concurrencia por conjuntos; la cual es mucho más reciente y menos conocida. Se muestra el algoritmo SetStackLogic, el cual es un algoritmo concurrente por conjuntos y además es una implementación de una pila con multiplicidad. Se demuestran, de una manera formal y detallada, las propiedades del algoritmo SetStackLogic, esto con el fin de presentar un esquema riguroso en la formalización de este tipo de algoritmo; mismo que podría ser utilizado para otros algoritmos. Además, se explica el funcionamiento del algoritmo mediante ejemplos de escenarios que ilustran su dinámica en algunas posibles ejecuciones.

I. INTRODUCCIÓN

A. Contexto

El estudio de la teoría de la computación determina si un problema es o no computable; es decir, ser resuelto por medio de un algoritmo, así como su eficiencia. El estudio de los algoritmos comenzó con Turing, cuyos resultados llevaron a formalizar el concepto de algoritmo y de máquina de Turing, lo cual llevo hasta la tesis de Church-Turing. Aún más, las Máquinas de Turing pueden ser descritas por medio de modelos multicinta y estas son equivalentes, en su poder computacional, a las máquinas secuenciales. Dicho en otras palabras, ambos modelos son equivalentes en cuanto a los problemas que pueden resolver. Sin embargo, eventualmente fue necesario desarrollar un concepto formal sobre la eficiencia de los algoritmos, la complejidad. Con lo cual se busca desarrollar y estudiar algoritmos que puedan resolver los problemas en un tiempo razonable, y si bien diferentes modelos de cómputo sean equivalentes, estos pueden llegar poseen un desempeño considerablemente diferente. Una de las soluciones, para disminuir la complejidad, han sido los algoritmos que puedan ejecutar procesos de forma simultánea.

Por otro lado, las arquitecturas multinúcleo han experimentado un gran auge, pues este diseño evita el sobrecalentamiento generado en un solo núcleo o procesador que trabaja a altas velocidades. Estas arquitecturas multinúcleo son descritas por medio de modelos de cómputo concurrente [1]. Lo cual permite que, para aumentar la eficiencia, el objetivo cambie a explotar el paralelismo, siendo este uno de los desafíos más destacados en cómputo moderno.

^{*} damian13.03@ciencias.unam.mx

B. La Relajación de Multiplicidad

Recientemente, se ha buscado mejorar el rendimiento de objetos concurrente relajando su semántica. En particular, varios estudios se han centrado en la relajación de colas y pilas, logrando mejoras significativas en el rendimiento [2–4]. Una relajación de estas estructuras es la multiplicidad [5–7]. Intuitivamente, en una estructura con multiplicidad ciertos conjuntos de operaciones simultáneas actúan de modo que el estado del objeto cambie como si solo una sola operación hubiera sido ejecutada. Dicho de otro modo, múltiples operaciones actúan como una misma [8]. Estos objetos concurrentes, como contadores, colas, pilas, conjuntos y otros objetos, son implementados en sistemas asincrónicos, donde los procesos simultáneos se comunican accediendo a una memoria compartida y estos son propensos a fallas.

C. Organización

En la sección II se dan los fundamentos teóricos así como un modelo de computación concurrente, se describen las nociones formales de operaciones y concurrencia de operaciones. En la sección III se explica y se describe formalmente la noción de correctitud para un algoritmo concurrente. En la sección IV se muestra el algoritmo SetStackLogic, el cual es un algoritmo concurrente por conjuntos que es una implementación de pila con multiplicidad; en la literatura se pueden encontrar diversos objetos concurrentes, así como otro tipo de semánticas relajadas, como objetos concurrentes por intervalos. En la sección V se da una demostración formal y rigurosa sobre las propiedades del algoritmo SetStackLogic, la cual tiene como propósito explicar el enfoque formal de una manera clara y precisa, mismo que puede ser empleado en otros objetos concurrentes. Por otro lado, en la sección VI se explica, por medio de ejemplos, el funcionamiento del algoritmo SetStackLogic.

II. FUNDAMENTOS

En un algoritmo concurrente, varios hilos se coordinan para modificar de manera simultánea la información que se encuentran almacenados en una memoria compartida. Uno de los retos más difíciles de solucionar en este tipo de algoritmos es el de coordinar las modificaciones concurrentes de forma tal que los datos en la memoria compartida siempre estén en un estado consistente, de forma que no ocurran fallas inesperadas que no se llegan a encontrar en el cómputo secuencial.

Formalmente, se puede entender un proceso como la transición de estados de una máquina de estado, donde estas transiciones de estado las denominamos eventos. Se le denota a las transiciones de estados como:

$$\delta(\hat{q}, e) = \hat{p},$$

donde e es un evento, \hat{q} es el estado del proceso antes del evento, e y \hat{p} el estado del proceso después del evento e. Esto tiene una interpretación clara, un proceso concurrente es una máquina de estado y los eventos son transiciones de estado (ejecuciones de instrucciones, las cuales podrían dejar invariante el estado de la máquina).

Los eventos son instantáneos: ocurren en un solo instante de tiempo. Es conveniente exigir que los eventos nunca sean simultáneos, es decir, eventos distintos ocurren en momentos distintos, esto nos permitirá inducir un orden total en el conjunto de eventos de la ejecución de los algoritmos concurrentes.

Un hilo A, produce una secuencia de eventos $a_0, a_1...a_n$. Vamos a denotar la j-esíma ocurrencia de un evento a_i como a_i^j . Se dice que un evento a precede otro evento b, cuando, a ocurre antes que b, lo denotamos como $a \to b$. La relación de precedencia \to es un orden total de eventos. También podemos dar una noción del tiempo que ocurre entre dos eventos. Sean a_0, a_1 eventos tal que $a_0 \to a_1$, se define el intervalo $I(a_0, a_1)$, como la duración entre a_0, a_1 . Se dice que un intervalo $I_A(a_0, a_1)$ precede a otro intervalo $I_B(b_0, b_1)$, cuando $a_1 \to b_0$, lo denotamos como $I_A \to I_B$. Esta relación es un orden parcial en los intervalos. Se definen como intervalos concurrentes a aquellos que no están relacionados, es decir si $\neg (I_A \to I_B \land I_B \to I_A)$.

Estas definiciones permiten describir, de manera clara, las operaciones y/o métodos de cualquier algoritmo, incluso describir cuando estas son concurrentes. Aún más, bajo este esquema una operación es un intervalo, donde la invocación o llamada a la operación es un evento, y posteriormente la finalización de dicha operación o retorno es el evento que marca el fin de la operación.

A. Modelo de Computación

Vamos a considerar el modelo estándar de sistemas concurrentes, el cual ha sido usado en [6, 7], con n procesos asíncronos, $p_1, ..., p_n$ los cuales, pueden llegar a fallar durante una ejecución; formalmente un proceso falla cuando deja de dar pasos. El *índice* del proceso p_i es i. Los procesos se comunican entre sí invocando operaciones atómicas en objetos base compartidos. Un *objeto base* puede proporcionar operaciones atómicas de lectura/escritura, a partir de ahora, dicho objeto se denomina registro, u operaciones atómicas más potentes de lectura, modificación y escritura.

Un objeto concurrente, T, se define como una máquina de estado que consta de: un conjunto de estados, un conjunto finito de operaciones y un conjunto de transiciones entre estados. Esta especificación no necesariamente tiene que ser secuencial, es decir:

- Un estado puede tener operaciones pendientes
- Las transiciones de estado pueden involucrar varias invocaciones

La noción de objeto concurrente se formaliza en las siguientes subsecciones.

Una implementación de un objeto concurrente T es un algoritmo distribuido A que consta de máquinas de estados locales $A_1, ..., A_n$. Cada máquina local A_i especifica qué operaciones en los objetos base, p_i ejecuta para devolver una respuesta cuando invoca una operación de alto nivel de T. Cada una de estas invocaciones de operación en los objetos base es un paso.

Una ejecución de A es una secuencia (posiblemente infinita) de pasos, es decir, ejecuciones de operaciones de objetos base, más invocaciones y respuestas a operaciones del objeto concurrente T, con las siguientes propiedades:

- 1. Cada proceso es secuencial. Primero invoca una operación, y solo cuando tiene su respuesta correspondiente, puede invocar otra operación, es decir, las ejecuciones están bien formadas.
- 2. Para cualquier invocación a una operación op, denotada inv(op), de un proceso p_i , los pasos de p_i entre esa invocación y su respuesta correspondiente (si la hay), denotada res(op), son pasos especificados por A cuando p_i invoca op.

Se dice que una operación op es completa si su invocación y su respuesta aparecen en la ejecución. Una operación está pendiente si en la ejecución solo aparece su invocación. Un proceso es correcto en una ejecución, si toma infinitos pasos. Por simplicidad, y sin pérdida de generalidad, identificamos la invocación de una operación con su primer paso y su respuesta con su último paso.

B. Condiciones de progreso

El comportamiento de los objetos concurrentes se describe por medio de propiedades de seguridad y viveza, a menudo denominadas condiciones de progreso [1]. La verificación de los algoritmos concurrentes se puede analizar a partir de dos aspectos fundamentales:

- Condición de progreso: La cual garantiza que eventualmente algo bueno sucederá, también llamada la seguridad de los algoritmos.
- Correctitud: La cual garantiza que nada malo sucederá, también llamada viveza de los algoritmos

La correctitud la detallaremos en la siguiente sección. Por otro lado, existen diferentes especificaciones o condiciones de progreso, las cuales pueden ser bloqueantes o no bloqueantes. Las condiciones de progreso bloqueantes se puede llegar a producir un el retraso inesperado en cualquier proceso, esto puede retrasar la ejecución de otras instrucciones o el completo impedimento de que los demás procesos continúen.

C. Condiciones de progreso bloqueantes

Los métodos que tienen una condición de progreso bloqueante suelen estar basados en candados (en lenguaje Java son los Lock), cuyo funcionamiento se basa en hacer cumplir la exclusión mutua; más precisamente, los candados se usan para indicar que un hilo está ejecutando la sección crítica y estos bloquean la entrada a los demás hilos, de modo que se satisface la exclusión mutua. De tal forma que un candado es usado para aislar una sección crítica, de modo que cualquier hilo puede adquirir y liberar la sección crítica siempre y cuando otro hilo no se encuentre en ejecución. En lenguaje Java, cuando dos hilos ejecutan una sección crítica, uno la adquiere, y la bloquea, mientras que el otro hilo espera la respuesta de la solicitud para adquirir acceso a la sección crítica. Sin embargo, cabe mencionar que ante el fallo o suspensión del primer hilo, se producirá un bloqueo, ya que el segundo hilo podría nunca recibir respuesta del candado (Java posee infraestructura para capturar estas excepciones), pero cabe tenerlo en cuenta. Formalicemos un poco la exclusión mutua en los algoritmos.

Sea SC_A el intervalo durante el cual un hilo A ejecuta una sección crítica SC. Formalmente, para que un algoritmo satisfaga la exclusión mutua debe cumplir que las secciones críticas de diferentes hilos no se superponen, es decir, para los hilos A y B, consideremos los intervalos SC_A y SC_B en los cuales se ejecutan las secciones críticas, entonces sucede $SC_A \to SC_B$ o $SC_B \to SC_A$.

Se puede mencionar dos condiciones de progreso bloqueantes, las cuales recurren al uso de candados: Deadlock-Free: Si algún hilo \boldsymbol{A} intenta adquirir el candado, entonces existe algún hilo \boldsymbol{B} , puede ser el mismo hilo \boldsymbol{A} , que tendrá éxito en adquirir el candado (entrar a la sección

crítica). Starvation-free: Todo hilo que intenta adquirir el candado tiene éxito en algún momento. También se puede decir que toda adquisición de candado eventualmente lo libera.

Nótese que la condición Starvation-free implica la condición Deadlock-Free. Además, la condición Deadlock-Free es importante, pues nos asegura que el sistema nunca se va a bloquear, ya que aunque los hilos individuales pueden atascarse, esperando la adquisición de un candado, para siempre (lo que se denomina inanición o starvation), pero entonces deben existir algunos hilos que sigan ejecutando la sección crítica.

D. Condiciones de progreso no-bloqueantes

Como hemos visto, las condiciones de progreso bloqueantes recurren al uso de candados para satisfacer la exclusión mutua, sin embargo, es posible definir otro tipo de condiciones de progreso, sin la necesidad de recurrir a los candados, estas son conocidas como condiciones de progreso no-bloqueantes, en las cuales el retraso inesperado de un proceso no retrasa a los demás procesos.

Dos condiciones no-bloqueantes muy importantes son las siguientes. La condición wait-free: Un método u operación termina de ejecutarse en número finito de pasos, se dice que un algoritmo es wait-free si todos los métodos u operaciones que lo componen lo son. La condición non-blocking o lock-free: Un método u operación es non-blocking si se garantiza que en una ejecución infinita de esta, existen infinitas operaciones que se completan en un número finito de pasos.

En otras palabras, la condición wait-free garantiza que todo proceso, siempre no haya fallado súbitamente, eventualmente progresa. Cualquier método wait-free es también non-blocking pero no al revés. Los métodos wait-free pueden llegar a ser ineficientes, es por ello que una propiedad menos restrictiva como non-blocking es muy útil. Además, se podría decir que estas condiciones de progreso son la versión de las condiciones Deadlock-Free y Starvation-free que no recurren a la definición de candados. Esto es sumamente útil, pues en el modelo de computación concurrente que se presentó se consideran posibles fallas en los procesos. Aún más, el algoritmo que se muestra como principal contribución no recurre al uso de candados; sin embargo, más adelante se discute esto.

III. CORRECTITUD

Diversas nociones de corrección para objetos concurrentes han sido propuestas; sin embargo, la mayoría se basan en alguna noción de equivalencia con el comportamiento secuencial. En [1] se presentan varias condiciones de corrección como la consistencia inactiva (Quiescent consistency), la consistencia secuencial (Sequential consistency) o la linealizabilidad. Una propiedad importante de la linealizabilidad es la de ser modular (también llamada local) [9]; esta misma propiedad hace de la linealizabilidad una condición de corrección más fuerte que las primeras dos.

A. Condición de correctitud: Linealizabilidad

La linealizabilidad es la noción estándar utilizada para definir una implementación concurrente correcta de un objeto definido por una especificación secuencial. Intuitivamente, una ejecución es linealizable si las operaciones pueden ordenarse secuencialmente, sin reordenar operaciones que no se superpongan, de modo que sus respuestas satisfagan la especificación del

objeto implementado.

Se define una especificación secuencial de un objeto concurrente T es una máquina de estados especificada a través de una función de transición δ . Dado un estado q y una invocación inv(op), $\delta(q,inv(op))$ devuelve la tupla (q',res(op)) (o un conjunto de tuplas si la máquina no es determinista) indicando que la máquina pasa al estado q' y la respuesta a op es res(op). En nuestras especificaciones, res(op) se escribe como un salto de tupla $\langle op:r\rangle$, donde r es el valor de salida de la operación. Las secuencias de tuplas invocación-respuesta, $\langle inv(op):res(op)\rangle$, producidas por la máquina de estado, se denominan ejecuciones secuenciales.

Para formalizar la linealizabilidad debemos definir un orden parcial $<_{\alpha}$ en las operaciones completadas de una ejecución α , por lo que denotamos $op <_{\alpha} op'$ si y solo si $res(op) \to inv(op')$ en α . Decimos que dos operaciones son concurrentes si son incomparables por $<_{\alpha}$, usamos $op||_{\alpha}op'$ para denotar que dos operaciones son concurrentes.

Definición III.1 Linealizabilidad: Sea A una implementación de un objeto concurrente T. Una ejecución α de A es linealizable si existe una ejecución secuencial S de T tal que

- S contiene todas las operaciones completadas de α y puede contener algunas operaciones pendientes. Las entradas y salidas de invocaciones y respuestas en S concuerdan con las entradas y salidas en α.
- Para cualesquiera operaciones completadas op y op' en α , si sucede que op $<_{\alpha}$ op', entonces op aparece antes que op' en S.

Decimos que A es linealizable si cada una de sus ejecuciones es linealizable.

Decir que un objeto concurrente es correcto, lleva a tratar de encontrar una forma de extender el orden parcial a un orden total. La condición de corrección de linealizabilidad busca justamente esto. Como se ha mencionado anteriormente, dada una ejecución α , la relación $<_{\alpha}$ es un orden parcial, cuando la ejecución es linealizable la relación $<_{\alpha}$ se convierte en un orden total.

Podemos explicar el concepto de linealizabilidad por medio de un ejemplo. Si consideramos, dos hilos A y B, cada vez que se ejecute el programa obtendremos una secuencia de llamadas y respuestas de operaciones. Denotemos por simplicidad la i-esíma llamadas en el hilo A (o B) como IA - i (la cual hemos llamado anteriormente inv(op)), y la respuesta como RA - i (res(op)). Claramente, se pueden dar superposiciones entre las llamadas a métodos, llamadas hechas por el hilo A o B. Pero cada evento (es decir, invocaciones y respuestas) tiene un orden en tiempo real. Entonces, las invocaciones y respuestas de todos los métodos llamados por A y B se pueden asignar a un orden secuencial, el orden puede como se muestra a continuación.

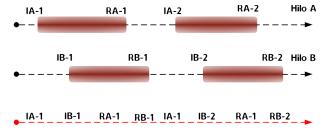


Figura 1: Secuencia de eventos en una ejecución en dos hilos A, B

Una ordenación en tiempo real de los eventos se muestra en la flecha punteada roja. El orden de los eventos mostrado es:

$$IA - 1$$
, $IB - 1$, $RA - 1$, $RB - 1$, $IA - 2$, $IB - 2$, $RA - 2$, $RB - 2$,

Esta secuencia de eventos representa una ejecución α , en [1] se define de forma distinta y se le llama historial; sin embargo, son equivalentes. Los dos puntos de la definición de linealizabilidad informalmente significan que podemos dar una reordenación de los eventos siempre y cuando se respete el orden para las operaciones que cumplen $op <_{\alpha} op'$. Esto significa que, si el evento respuesta de una operación ocurrió antes que el evento de llamada de otra operación, entonces en la reordenación se debe preservar este orden.

Por ejemplo, las reordenaciones validas para la ejecución mostrada en la figura 1, son:

1.
$$IA - 1$$
, $RA - 1$, $IB - 1$, $RB - 1$, $IB - 2$, $RB - 2$, $IA - 2$, $RA - 2$

2.
$$IB - 1$$
, $RB - 1$, $IA - 1$, $RA - 1$, $IB - 2$, $RB - 2$, $IA - 2$, $RA - 2$

3.
$$IB - 1$$
, $RB - 1$, $IA - 1$, $RA - 1$, $IA - 2$, $RA - 2$, $IB - 2$, $RB - 2$

4.
$$IA - 1$$
, $RA - 1$, $IB - 1$, $RB - 1$, $IA - 2$, $RA - 2$, $IB - 2$, $RB - 2$

Formalmente, estas reordenaciones son ejecuciones secuenciales. Observemos que solo estamos permutando el orden de los eventos de llamada y respuesta de los métodos que son concurrentes. Debemos remarcar que esto es natural, ya que en métodos concurrentes no sabemos qué método se ejecuta primero, pues la duración de su ejecución es paralela.

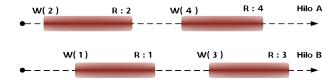


Figura 2: Ejecución de un método de lectura (W), escritura (R)

Sin embargo, de estas ejecuciones secuenciales, ¿cómo podemos confirmar si nuestra ejecución es correcta? Aquí nos estamos refiriendo a la ejecución α de la definición III.1. La definición formal nos dice que, si al menos una ejecución secuencial es consistente con la ejecución α , entonces la ejecución es linealizable. Podemos ver esto con un ejemplo sencillo. Considerando el ejemplo anterior, pensemos que las operaciones se refieren a invocaciones, un método que primero es escritura (denotada como evento Writte: W) y finaliza con lectura (evento Read: R), como que muestra en la siguiente figura 2. De esta ejecución basta con tomar la ejecución secuencial 2), donde la secuencia es:

La secuencia es válida, ya que sigue la especificación secuencial de un registro, es decir, los read obtienen el valor del write más reciente.

B. Condición de correctitud: Linealizabilidad por conjuntos

La linealización de conjuntos nos permite linealizar varias operaciones en el mismo punto, es decir, todas estas operaciones se ejecutan simultáneamente. Se sabe que la linealización de

conjuntos tiene estrictamente más poder de expresividad que la linealización; existe otro tipo denominado linealización de intervalos, la cual es estrictamente más poderosa que la linealización de conjuntos [7]. Además, la linealizabilidad y la linealización de conjuntos son propiedades composicionales[10].

Una especificación conjunto-concurrente de un objeto concurrente difiere de una ejecución secuencial en que δ recibe como entrada el estado actual q de la máquina y un conjunto $Inv = \{inv(op_1), ..., inv(op_t)\}$ de invocaciones de operaciones, y $\delta(q, Inv)$ retorna $\delta(q', Res)$, donde q' es el siguiente estado y $Res = \{res(op_1), ..., res(op_t)\}$ son las respuestas de las invocaciones en Inv. Los conjuntos Inv y Res son llamados clases de concurrencia. Debemos mencionar que una especificación de conjunto-concurrente donde las clases de concurrencia tenga un único elemento corresponde a una especificación secuencial.

Definición III.2 Linealizabilidad por conjuntos: Sea A una implementación de un objeto concurrente T. Una ejecución α de A es linealizable por conjuntos si existe una ejecución de conjunto-concurrente S de T tal que

- S contiene todas las operaciones completadas de α y puede contener algunas operaciones pendientes. Las entradas y salidas de invocaciones y respuestas en S concuerdan con las entradas y salidas en α.
- Para cualesquiera operaciones completadas op y op' en α , si sucede que op $<_{\alpha}$ op', entonces op aparece antes que op' en S.

Decimos que A es linealizable por conjuntos si cada una de sus ejecuciones es linealizable por conjuntos.

Debemos resaltar que estos conjuntos son de hecho las clases de equivalencia de la relación $||_{\alpha}$, es decir, son las clases de equivalencia de las operaciones concurrentes. La interpretación es la misma que en la linealizabilidad, pero en este caso estamos considerando un conjunto de llamadas y un conjunto de respuestas.

IV. PILAS CONCURRENTES POR CONJUNTOS CON MULTIPLICIDAD

En términos generales, una pila con semántica relajada, que se denomina multiplicidad, permite a las operaciones simultáneas Pop (quitar) obtengan el mismo elemento, pero todos los elementos se devuelven en orden LIFO y no se pierde ningún elemento. Formalmente, nuestra pila de conjuntos concurrentes se especifica de la siguiente manera:

Definición IV.1 El conjunto de elementos que se pueden poner (Push) es $N = \{1, 2, ...\}$, y el conjunto de estados Q es el conjunto infinito de cadenas N^* . El estado inicial es la cadena vacía, indicada como ϵ . En el estado \mathbf{q} , el primer elemento en \mathbf{q} representa la parte superior de la pila, que podría estar vacía si \mathbf{q} es la cadena vacía. Las transiciones son las siguientes:

 \blacksquare Para $\hat{q} \in Q$:

$$\delta(\hat{q}, Push(a)) = (\hat{q} * a, \langle Push(a) : True \rangle) \tag{.1}$$

■ Para $\hat{q} * a \in Q$, donde $a \in N$ y t procesos:

$$\delta(\hat{q}*a, \{Pop_1(), ..., Pop_t()\}) = (\hat{q}, \{\langle Pop_1():a\rangle, ..., \langle Pop_t():a\rangle\})$$
 (.2)

■ Para una pila vacía $\epsilon \in Q$:

$$\delta(\epsilon, \mathbf{Pop}(\)) = (\epsilon, \langle \mathbf{Pop}(\) : \epsilon \rangle) \tag{.3}$$

Un lema de [7], muestra que cualquier algoritmo que implemente la pila concurrente por conjuntos mantiene el comportamiento de una pila secuencial en ciertos casos. De hecho, la única razón por la que la implementación no proporciona capacidad de linealización se debe únicamente a las operaciones Pop que son concurrentes. Aún más, una pila secuencial puede ser descrita por la definición IV.1 si en el segundo punto se restringe a t=1 procesos.

A. Algoritmo: SetStackLogic

Con el fin de describir un algoritmo linealizable por conjuntos que sea una implementación de la pila con multiplicidad, primero se describe la estructura de los nodos que forman la pila. Es usual que las estructuras de datos, tipo cola o pila, estén formadas por listas de nodos, los cuales contienen elementos de tipos primitivos. Sin embargo, debido a la concurrencia y a la multiplicidad, es necesario definir una estructura más compleja en los nodos.

Además, para definir cierto tipo de operaciones es útil recurrir a los objetos de tipo AtomicReference, los cuales se proveen en Java. Las variables de tipo AtomicReference proporciona una referencia (a algún objeto) que se puede leer y escribir atómicamente. Es decir, que múltiples hilos que intentan modificar la misma referencia almacenada en la variable de tipo AtomicReference lo hacen de manera atómica, de modo que el estado de la referencia será consistente a las modificaciones. Supongamos por el momento que las referencias de una instancia dada de AtomicReference son objetos $nodo_i$ (más adelante se definirá la estructura de los nodos), los métodos principales de cualquier instancia son:

- **get**(): Este método permite que la referencia almacenada en la variable de tipo **AtomicReference** se pueda leer atómicamente.
- CompareAndSet(nodo₁, nodo₂): Este método comparar la referencia almacenada en la instancia de AtomicReference, llamémosle nodo₀, contra una referencia esperada nodo₁, y si las dos referencias son iguales (es decir nodo₀ == nodo₁) entonces el método inserta la nueva referencia nodo₂ en la instancia de AtomicReference. Cuando el método CompareAndSet cambia la referencia en la instancia de AtomicReference este retorna True (regurlarmente nos referimos a este caso diciendo que el método CompareAndSet fue exitoso). En caso contrario, la referencia no sufre de ningún cambio y el método retorna False (nos referiremos a este caso diciendo que el método fue fallido o no exitoso).

Algorithm 1 Nodo(x)

Nodo

1: value: Entero de valor x

2: next : Nodo

3: elim: Variable booleana

Los nodos están definidos como la estructura que se muestra en el algoritmo 1. Cada nodo contiene tres atributos, uno llamado value, es cual es el valor de tipo primitivo almacenado en el nodo, supondremos que estos son enteros por simplicidad y concordancia con la definición IV.1, el atributo next es un objeto de tipo Nodo cuya función es la de una referencia, y el

atributo *elim* el cual es una variable booleana. El atributo *next* es una referencia al nodo siguiente de la lista de nodos. Por otro lado, cada nodo posee un atributo booleano *elim* cuya función es indicar si el nodo se encuentra o no en la pila; más adelante se formalizará esta noción, la cual se ha denominado *estado lógico*.

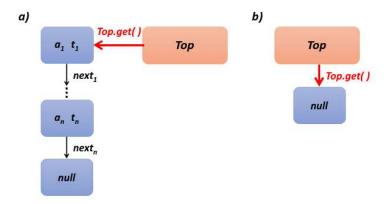


Figura 3: $Panel\ a)$ Representación de una estructura de pilas, junto con la referencia atómica Top. $Panel\ b)$ Representación de una estructura de pilas sin elementos en la pila, es decir, la pila vacía ϵ .

La estructura de pila se representa como una lista de nodos, véase figura 3. Es estas listas cada nodo posee una referencia, next, la cual hace referencia al siguiente nodo de la lista, mientras que el valor de cada nodo es value. La referencia del último nodo siempre apunta a un null. Tengamos en cuenta el problema ABA al usar CompareAnSet, para nuestro caso se puede evitar el problema ABA (y por claridad) suponiendo que cada nodo nuevo tiene una referencia distinta. Los nodos cuya variable booleana elim es True no son tomados en cuenta como parte de la pila, de modo que esta variable nos indica si el nodo forma parte de la pila. Además, el algoritmo consta de una variable de tipo AtomicReference < Nodo >:

■ **Top**: Contiene la referencia al primer nodo de la lista; **Top.get()** es la referencia que apunta al primer nodo. Regularmente, llamaremos cabezal a la referencia atómica **Top**, la cual se puede decir que encapsula a toda la pila.

En la figura 3 panel a) se representa una pila del algoritmo SetStackLogic 2, en donde la referencia atómica Top apunta al primer nodo de la lista. Podemos decir que la lista de nodos está conformada por los pares de valores enteros y booleanos: $[(a_1,t_1),(a_2,t_2),...,(a_n,t_n)]$, y los nodos que pertenecen a la pila son aquellos cuya variable booleana es $t_i = False$. En el panel b) se representa una pila vacía donde no hay ningún nodo y Top apunta a una referencia nula. Nótese que se puede representar perfectamente una pila vacía con una lista de nodos como en el panel a), en donde todos los nodos posean a0 es tínico.

El algoritmo 2: SetStackLogic, que se presenta a continuación, está inspirado en el algoritmo LockFreeStack de [1], el cual es un algoritmo linealizable de pilas Lock Free.

Algorithm 2 SetStackLogic

```
Shared Variables : Top
 1: procedure Push(x)
 2:
       while True do
 3:
           t = \text{Top.get}()
 4:
           if t.elim == False then
               x.\text{next} = t
 5:
              if Top.CompareAndSet(t, x) then
 6:
                  {f return}\ True
 7:
               end if
 8:
           else
 9:
               Top.CompareAndSet(t, t.next)
10:
           end if
11:
       end while
12:
13: end procedure
14: procedure Pop
       while True do
15:
16:
           t = \text{Top.get}()
           if t = \epsilon then
17:
18:
              return \epsilon
19:
           end if
20:
           if t.elim == false then
               t.elim = True
21:
              Top.CompareAndSet(t, t.next)
22:
23:
               return t.value
24:
25:
              Top.CompareAndSet(t, t.next)
26:
           end if
27:
       end while
28: end procedure
```

Después de discutir la estructura y representación de las pilas, podemos pasar a describir las operaciones del algoritmo SetStackLogic. Las operaciones son las usuales (claro que ahora cumplirán multiplicidad): Push y Pop.

- Push(x): Añade un nodo x en orden LIFO. La operación inicia un ciclo While, en donde cada iteración es un intento para insertar el nodo x en la pila. En cada iteración se extrae el nodo t en la referencia del cabezal Top. Si el nodo t ya fue lógicamente eliminado (línea 4, cuando t.elim == True), entonces avanza el cabezal Top al siguiente nodo por medio de un CompareAndSet, en caso de que el nodo al que apunta el cabezal no haya sido lógicamente eliminado t.elim == False, conecta por medio de su referencia el nodo t al nodo t. Después hace un cambio en el cabezal top por medio del top comparetop en caso de un exitoso el nodo t fue insertado correctamente y retorna en la línea t, en caso contrario vuelve a iterar para otro intento.
- Pop: Remueve un nodo en orden LIFO de la pila. La operación inicia un ciclo While, en donde cada iteración es un intento para remover el primer nodo en la pila. En cada iteración se extrae el nodo t en la referencia del cabezal Top. Si el nodo t es ϵ la operación retorna un valor nulo, líneas 17 y 18, indicando que la pila está vacía. En caso contrario, cuando el nodo no es nulo, evalúa la línea 20, si $elim \neq False$, el nodo está lógicamente eliminado y pasa el cabezal al siguiente nodo en la línea 25 (Nótese que si la pila consta solamente de nodos eliminados lógicamente el cabezal avanza hasta llegar a la referencia nula). Cuando el nodo si está en la pila lógicamente elim == False para a las líneas

21 a 23, primero elimina lógicamente el nodo en la línea 21 y después la referencia Top avanza al siguiente nodo en 22, finalmente retorna el valor del nodo eliminado t.value en la línea 23.

El siguiente teorema enuncia las propiedades que el algoritmo SetStackLogic cumple. Con esto se podrá apreciar y mostrar formalmente la noción del estado lógico de la pila y la correctitud del algoritmo.

Teorema IV.1 El algoritmo SetStackLogic es una implementación linealizable por conjuntos de la pila con multiplicidad y es non-blocking.

La siguiente sección demuestra el teorema IV.1. La demostración esta divida de la siguiente forma, en la subsección V A se demuestra que el algoritmo 2 satisface non-blocking, en la subsección V B se describe la forma en la que se construye la linealización por conjuntos, también en esta subsección se definen los puntos de linealización. En la subsección V C se muestra que usando los puntos de linealización de la subsección V B se obtiene efectivamente una linealización por conjuntos y en la subsección V D se demuestra que la linealización por conjuntos, dada por la subsección V C, es una implementación de la pila con multiplicidad, o más formalmente, se cumplen las transiciones de estado que corresponden a la pila, dada por la definición IV.1.

Denotamos una operación Pop que devuelve el valor x por $\langle Pop():x\rangle$, mientras que una operación Push que inserta un valor x la denotamos por $\langle Push(x):True\rangle$.

V. DEMOSTRACIÓN FORMAL

A. Prueba de non-blocking: Set-Stack-Logic

Veamos que el algoritmo es *non-blocking*. Supongamos una ejecución infinita del algoritmo Set-Stack-Logic, sea **op** una operación cualquiera.

- Supongamos que op es una operación Push, veamos que es non-blocking. Para que la operación no sea completada, las evaluaciones de las líneas 4 y 6 deben fallar una cantidad infinita de veces. Si la línea 4 falla, entonces debe existir una operación Pop la cual altero el valor de la variable elim del nodo t, ejecutando la línea 21 (ya que por defecto todos los nodos poseen t.elim = False). Notemos que cualquier Pop que ejecuta la línea 21 retorna en dos instrucciones, y, por lo tanto, se completa. En resumen: Si la línea 4 falla, entonces debe existir una operación Pop completada.
 - Por otro lado, si la línea 6 falla siempre, sígnica que el método compareAndSet en la línea 6 falla en toda iteración, por lo que existe una operación op', ya sea Pop o Push la cual ejecute con éxito una operación compareAndSet para cada iteración. Veamos que debe existir una operación completada, si op' se completa es trivial. Supongamos que op' no está completada para toda iteración, entonces compareAndSet debió de ejecutarse en la línea 10, en caso de ser un Push o en la línea 25, en caso de ser un Pop, sin embargo, dado que el estado inicial de la pila es ϵ no pueden existir una cantidad infinita de nodos, alguna operación Push debe poner un nodo (lo cual implica que se completó) en algún momento para que la pila no se vacíe, y, por lo tanto, existe una operación completada siempre.
- Para las operaciones **pop** es análogo, ya que si una operación **Pop** no se completa, entonces la línea 17 o 20 fallan infinitas veces. Si la línea 17 falla infinitas veces, el argumento es similar a lo visto, debe existir una operación *Push* que ponga nodos. Para la línea 20 el argumento es el mismo que en el caso de la línea 4: Si la línea 20 falla, entonces debe existir una operación **Pop** completada.

B. Procedimiento de linealización por Conjuntos: SetStackLogic

Dado que el algoritmo es non-blocking, cualquier operación pendiente no bloquea al algoritmo, es decir, el algoritmo en si mismo se mantiene completando una infinidad de operaciones por cada operación que no se completa. Por lo que se puede suponer, sin perdida de generalidad, que cualquier ejecución finita E no tiene operaciones pendientes, pues si las tuviera estas no bloquean a las demás. Sea E una ejecución finita sin operaciones pendientes del algoritmo 2: SetStackLogic.

En la linealización por conjuntos, el estado del objeto está codificado en la variable Top y en los valores de la etiqueta booleana elim de los nodos de la pila. Es decir, los elementos de la pila son los nodos cuyo valor booleano elim es False, llamaremos a esto el estado lógico de la pila (más adelante se define formalmente).

Para linealizar la ejecución E, procederemos a construir una linealización S de E asignando un punto de linealización a cada operación op de E. El punto de linealización de op, denotado LinPt(op), es un evento primitivo e entre la invocación inv(op) y la respuesta res(op). Tengamos en cuenta que varias operaciones pueden tener el mismo punto de linealización. Por lo tanto, la linealización S también se proporciona explícitamente. Finalmente, veremos que esta linealización S induce una relación de orden total $<_S$ en las clases de concurrencia y que S cumple con la especificación de pila (IV.1).

Sea op en E, daremos las instrucciones de linealización definiendo primero el punto de linealización LinPt(op), en el cual op pareciera tener efecto. Recordemos que LinPt(op) es un evento primitivo, lo cual significa que es la ejecución de alguna línea del algoritmo 2, no una operación.

- 1. Si op es una operación Push en E: Consideremos la última iteración de su ciclo While, llamémosle e_{CAS} al paso que ejecuta la instrucción CompareAndSet de la línea 6 (este sería el único CompareAndSet exitoso). Linealizamos por conjuntos la operación Push en el punto e_{CAS} , de modo es una clase de concurrencia por sí misma.
- 2. Si op es una operación Pop en E, tenemos dos casos.
 - a) Retorna la cadena vacía $\langle Pop() : \epsilon \rangle$: Sea op cualquier operación Pop en E tal que retorne en la línea 18 (Esto corresponde a las operaciones Pop que retornen la cadena vacía). Consideremos la última iteración en el ciclo while, llamémosle e_{get} al paso correspondiente a la línea 16 de esta iteración, este paso es donde se extrae el nodo t almacenado de la variable Top por medio del método get(). La condición en la línea 17 es verdadera, pues estamos en la última iteración y la operación retorna en la línea 18, es decir, el nodo t tiene valor ϵ en el paso e_{get} . Linealizamos por conjuntos las operaciones Pop que retornan ϵ , en el punto e_{get} , de modo es una clase de concurrencia por sí misma.
 - b) Retorna un elemento no nulo $\langle Pop() : x \rangle$: Sea op cualquier operación Pop en E tal que retorne en la línea 23 (Esto corresponde a las operaciones Pop que retornen t.value tal que el valor de esta cadena es x).

Consideremos el conjunto U_x , tal que contiene todas las operaciones Pop en E que devuelven el mismo elemento x. Por suposición, cada elemento se coloca en la pila como máximo una sola vez, por lo tanto, cada operación $\operatorname{Pop} \in U_x$ extrae al mismo nodo en su última ejecución de la línea 16. Denotemos por t_x a este nodo, cuyo valor

es \boldsymbol{x} .

Observemos que todas las operaciones de U_x extraen el nodo t_x , lo cual corresponde a la ejecución de la línea 16. Consideremos el primer evento (de todas las operaciones Pop en U_x) que escribe en la variable booleana elim de t correspondiente a la línea 21, llamemos e^x_{elim} a este paso. Notemos que e^x_{elim} es el único paso en U_x que realmente cambia el estado de la variable elim, de modo que se elimina lógicamente el nodo t_x en el paso e^x_{elim} . Linealizamos todas las operaciones en U_x en el paso e^x_{elim} , es decir, las operaciones en U_x forman una clase de concurrencia ubicada en e^x_{elim} .

Por simplicidad, llamémosle op a una clase de concurrencia de S. Observemos que podemos clasificar las clases de concurrencia de la siguiente manera:

- 1. Se tiene op es una clase de concurrencia correspondiente a una operación Push(a) en E.
- 2. Se tiene op es una clase de concurrencia correspondiente a un conjunto operaciones Pop() en E, tenemos dos subcasos:
 - a) La clase de concurrencia op corresponde a una sola operación Pop() tal que $\langle Pop($ $):\epsilon \rangle.$
 - b) La clase de concurrencia op corresponde a un conjunto de operaciones $U_x = \{Pop_1(), ..., Pop_t()\}$ tal que para toda operación $Pop_i()$ devuelve: $\langle Pop_i() : x \rangle$ con x un elemento no nulo.

Estas clases de concurrencia que hemos definido dan la ejecución por conjuntos secuencial S. Observe que cada clase de concurrencia op de S tiene un punto de linealización por construcción LinPt(op), el cual es a su vez un punto de linealización para una o varias operaciones de E.

Ahora definamos $<_S$ para las clases de concurrencia, dadas dos clases de concurrencia op, op' en S, se define $op <_S op'$ si y solo si $LinPt(op) \to LinPt(op')$. Esta relación es de orden total sobre las clases de concurrencia de S.

C. linealización de la ejecución E

Estas clases de concurrencia que hemos definido dan la ejecución secuencial por conjuntos S. Para mostrarlo primero veamos que dada una clase de concurrencia op de S, su punto de linealización LinPt(op) siempre está entre los eventos de invocación y de respuesta de su conjunto de operaciones op_E , es decir que cumple

$$inv(\mathbf{op_E}) \to LinPt(\mathbf{op}) \to res(\mathbf{op_E}).$$
 (C.1)

Sea op en S, y LinPt(op) su punto de linealización dado por las instrucciones en la subsección 3.2.1, probemos que se cumple (C.1).

1. Si op es una clase de concurrencia correspondiente a una operación Push(a) de E.

Dado que $LinPt(op) = e_{CAS}$, donde e_{CAS} es la ejecución de la instrucción CompareAndSet de la línea 6 de Push(a), de la última iteración de su ciclo While. Claramente

 $inv(\boldsymbol{Push(a)}) \rightarrow \boldsymbol{e_{CAS}}$, pues la invocación precede a cualquier evento en las iteraciones del ciclo \boldsymbol{While} , y $\boldsymbol{e_{CAS}} \rightarrow res(\boldsymbol{Push(a)})$, pues la respuesta de la operación $\boldsymbol{Push(a)}$ corresponde al evento asociado a la ejecución de la línea 7.

- 2. Si op es una clase de concurrencia correspondiente a un conjunto operaciones Pop() en E, tenemos dos subcasos:
 - a) La clase de concurrencia op corresponde a una sola operación Pop() tal que $\langle Pop():\epsilon\rangle$.

El punto de linealización es $LinPt(op) = e_{get}$, al igual que antes $inv(Pop()) \rightarrow e_{get}$, pues la invocación precede a cualquier evento en las iteraciones del ciclo While y $e_{get} \rightarrow res(Pop())$, pues la respuesta de la operación Pop() corresponde al evento asociado a la ejecución de la línea 18.

b) La clase de concurrencia op corresponde a un conjunto de operaciones $U_x = \{Pop_1(), ..., Pop_t()\}$ tal que para toda operación $Pop_i()$ devuelve: $\langle Pop_i() : x \rangle$ con x un elemento no nulo.

En este caso, dado que estamos linealizando un conjunto de operaciones, debemos probar que, para toda operación $\mathbf{Pop_i} \in U_x$ se tiene

$$inv(\boldsymbol{Pop_i}) \rightarrow LinPt(\boldsymbol{op}) \rightarrow res(\boldsymbol{Pop_i}),$$

donde U_x es el conjunto de todas las operaciones \boldsymbol{Pop} en E que devuelven el mismo elemento \boldsymbol{x} .

Recordemos que $LinPt(op) = e^x_{elim}$, con e^x_{elim} el evento descrito en la instrucción 2.b) del Procedimiento V B. Dado que e^x_{elim} es el primer evento que cambia el estado de t.elim de False a True, debe pasar que $inv(Pop_i) \rightarrow e^x_{elim}$, ya que en caso contrario $e^x_{elim} \rightarrow inv(Pop_i)$, pero entonces la ejecución de la $t_x = False$ resultaría fallida lo que haría que pasara a la línea 25 alterando el valor de Top y en la siguiente iteración el nodo t tendría un valor distinto t0 y t1, ya que el elemento t2 se inserta una única vez, contradiciendo el hecho de que t2 y t3, retorna t4.

Por lo tanto, debe pasar que $inv(Pop_i) \rightarrow e^x_{elim}$ para toda Pop_i en U_x .

Para ver que $e^x_{elim} \to res(Pop_i)$ es más fácil, ya que e^x_{elim} es el primer evento que cambia el estado de t.elim, por lo que para cualquier $Pop_i \in U_x$ se tiene que $e^x_{elim} \to e_{elim}$ donde e_{elim} es la ejecución de la línea 21 de Pop_i en la última iteración. Pero $e_{elim} \to res(Pop_i)$ y por transitividad de la precedencia $e^x_{elim} \to res(Pop_i)$.

Se concluye que: Para toda operación Pop_i en U_x se tiene

$$inv(\boldsymbol{Pop_i}) \rightarrow LinPt(\boldsymbol{op}) \rightarrow res(\boldsymbol{Pop_i}),$$

donde U_x es el conjunto de todas las operaciones \boldsymbol{Pop} en E que devuelven el mismo elemento \boldsymbol{x} .

Para concluir que S una linealización por conjuntos de E veamos lo siguiente. Por construcción, E y S tienen las mismas operaciones con las mismas respuestas. Considere las operaciones op_1 y op_2 de E tal que $op_1 <_E op_2$, por lo que $res(op_1) \to inv(op_2)$. En S, cada operación se linealiza en un paso que se encuentra entre la invocación y la respuesta de la operación. Por

lo tanto, la clase de concurrencia de op_1 aparece antes que la clase de concurrencia de op_2 en S, pues se tiene

$$LinPt(m{op_1})
ightarrow res(m{op_1})
ightarrow inv(m{op_2})
ightarrow LinPt(m{op_2})$$

por transitividad $LinPt(op_1) \to LinPt(op_2)$, y por definición $o\tilde{p}_1 <_S o\tilde{p}_2$, donde $o\tilde{p}_1$, $o\tilde{p}_1$ son las clases de concurrencia de op_1 y op_2 respectivamente. Concluimos que S es una linealización por conjunto de E. Ahora falta ver que S cumple con la especificación de pila.

D. Especificación de pila con multiplicidad: Algoritmo SetStackLogic

En esta sección demostramos que el algoritmo SetStackLogic satisface la especificación de pila con multiplicidad. Para la demostración primero definiremos el estado lógico de la pila formalmente, lo cual nos facilitara la demostración:

Definición V.1 Sea $\hat{q} \in \mathbb{N}^*$, el cual es de la forma

$$\hat{q} = a_1 a_2 ... a_k$$

con $a_i \in \mathbb{N}$ para $i \in \{1,...,k\}$. Decimos que \hat{q} es el estado lógico que representa a la pila $t_1,...,t_m$, si para cada elemento a_i existe un nodo t_j del algoritmo 2 tal que t_j .elim = False y su valor es a_i con t_1 .nex $t = \epsilon$ y $t_1 = Top.get()$

Observemos que el estado de la memoria está representado por los nodos $\epsilon, t_1, ..., t_m$, mientras que el estado lógico esta representado por los nodos que están lógicamente en la pila; es decir, aquellos que cumplen $t_i.elim = False$, los nodos que no cumplen esta condición no participan en la pila de modo lógico.

SetStackLogic satisface la especificación de pila con multiplicidad. Demostración:

Sea E una ejecución finita sin operaciones pendientes del Algoritmo 1: SetStackLogic. Demostremos que cumple con la especificación de pila IV.1. Donde el estado de la pila está dado por el estado lógico V.1.

Sea S la linealización por conjuntos de E obtenida por el procedimiento de linealización V B. Tenemos que las clases de concurrencia están ordenadas como

$$op_1 <_S op_2 <_S \dots <_S op_M$$

Donde op_i es la clase de concurrencia de alguna operación de E y M es el número de clases de concurrencia definidas por $<_S$. Sea E_m el prefijo de E con las operaciones $\{op_1...op_m\}$ y S_m su correspondiente linealización por conjuntos, la cual de hecho induce el orden $op_1 <_S ... <_S op_m$.

Demostremos que S_m satisface la especificación de pila IV.1 para toda $m \leq M$, cuyo estado está dado por T_m , por inducción sobre m.

El caso base es trivial, pues $E=\emptyset$, por lo que $S=\emptyset$, y el estado de la pila es el mismo después de ejecutar S o E.

Como hipótesis de inducción supongamos que la ejecución secuencial por conjuntos S_m de E_m cumple con la especificación de pila, cuyo estado está dado por el estado lógico T_m .

Para el paso inductivo demostremos que se cumple para E_{m+1} cuya linealización por conjuntos es S_{m+1} , dada por el procedimiento VB. Induce un orden total en las clases de equivalencia y podemos ordenarlas como:

$$op_0 <_S op_1 <_S ... <_S op_{m+1}$$

Por hipótesis de inducción el prefijo E_m cumple con lo requerido, basta mostrar que al ejecutar la operación op_{m+1} la transición de estados corresponde a la especificación de pila IV.1.

Sea Top la variable compartida antes de ejecutar op_{m+1} , observemos que por hipótesis de inducción el estado de Top es el mismo que se obtiene de ejecutar S_m , por lo que se ejecutar las clases de concurrencia en orden: $op_0 <_S op_1 <_S ... <_S op_m$.

Sea $\hat{q} \in \mathbb{N}^*$ el estado lógico de la pila después de ejecutar la clase de concurrencia op_m , el cual representa el estado lógico de la pila $t_1, ..., t_m$.

1. Si op_{m+1} es una clase de concurrencia correspondiente a una operación Push(a) en E_m : El punto de linealización de op es $LinPt(Push(a)) = e_{CAS}$, el cual corresponde a la ejecución de la línea 6 con un CompareAndSet exitoso en la última iteración. Este punto también es el único evento en Push en el cual el estado lógico de la pila cambia, de \hat{q} a $\hat{q} * a$.

Basta ver que si el estado en op_m es \hat{q} , con $\hat{q} \in \mathbb{N}^*$, el estado después de ejecutar Push(a) es $\hat{q} * a$. De este modo se cumpliría formalmente la transición:

$$\delta(\hat{q}, Push(a)) = (\hat{q} * a, \langle Push(a) : True \rangle).$$

Dado que $op_m <_S op_{m+1}$, podemos asegurar que el estado de la pila en el evento e_{CAS} cambian de \hat{q} a $\hat{q} * a$, pues si él estado de la pila es diferente de \hat{q} , entonces algún evento lo modifico entre op_m y op_{m+1} .

Podemos asegurar que no existe ningún evento que modifique el estado lógico de la pila \hat{q} , pues los únicos eventos que cambian el estado lógico son las ejecuciones de la línea 6 o 21 (en caso de un CompareAndSet exitoso, el cual añada un nodo, para la línea 6) pero justo estos eventos corresponderían a puntos de linealización de alguna operación op', de modo que $op_m <_S op' <_S op_{m+1}$, contradiciendo que el orden que induce la linealización por conjuntos S_{m+1} .

Por lo tanto, el estado lógico después del evento $LinPt(op_m)$ y antes del evento e_{CAS} es \hat{q} , pero en e_{CAS} el método CompareAndSet es exitoso, cambiando el estado lógico de la pila a $\hat{q}*a$, ya que inserta el nodo t con valor a tal que t.elim = False. Ahora el estado en memoria es $t_1, ..., t_m, t$ cuyo estado lógico es $\hat{q}*a$, pues el orden lo fija la lista $t_1, ..., t_m, t$. Entonces, para la operación op_{m+1} se cumple la transición:

$$\delta(\hat{q}, Push(a)) = (\hat{q} * a, \langle Push(a) : True \rangle)$$

Por lo que concluimos que S_{m+1} produce una ejecución secuencial por conjuntos de pila válida que es consistente con (IV.1), donde estado de la pila está representado por el estado lógico codificado en $\hat{q} * a$, representado en la variable Top

- 2. Si op_{m+1} es una clase de concurrencia correspondiente a un conjunto operaciones Pop() en E_m , tenemos dos casos:
 - a) La clase de concurrencia op_{m+1} corresponde a una sola operación Pop() tal que $\langle Pop() : \epsilon \rangle$.

El punto de linealización es e_{get} , correspondiente a la línea 16 de la última iteración. Además, la operación Pop() retorna en la línea 18. Por suposición

$$LinPt(op_m) \rightarrow e_{qet}$$
.

Por lo que el estado lógico de la pila después de ejecutar $LinPt(op_m)$ debe de ser ϵ , pues en caso contrario en el evento e_{get} se obtendría un nodo $t \neq \epsilon$, y no se ejecutaría la línea 4 satisfactoriamente, contradiciendo $\langle Pop() : \epsilon \rangle$.

Además, observemos que las operaciones Pop que devuelven una cadena nula: $\langle Pop() : \epsilon \rangle$, en realidad no alteran el estado lógico de la pila, pues nunca ejecutan la línea 21. Por lo que se ejecute o no op el estado lógico permanece invariante, y es ϵ . Dicho en otras palabras, para la operación op_{m+1} se cumple la transición:

$$\delta(\epsilon, \mathbf{Pop}(\cdot)) = (\epsilon, \langle \mathbf{Pop}(\cdot) : \epsilon \rangle).$$

Concluimos que S_{m+1} produce una ejecución secuencial por conjuntos de pila válida que es consistente con (IV.1), donde estado de la pila está representado por el estado lógico codificado en ϵ , representado en la variable Top

b) La clase de concurrencia op_{m+1} corresponde a un conjunto de operaciones $U_x = \{Pop_1(), ..., Pop_t()\}$ tal que para toda operación $Pop_i()$ devuelve: $\langle Pop_i() : x \rangle$ con x un elemento no nulo. Recordemos que el conjunto U_x es tal que contiene todas las operaciones Pop en E_{m+1} que devuelven el mismo elemento x.

El punto de linealización es $LinPt(op) = e_{elim}^x$, el cual corresponde a la primera ejecución de la línea 21 de todas las operaciones Pop_x en U_x , este punto también es el único evento en el cual el estado lógico de la pila cambia (cambiando $t_x.elim = False$ a $t_x.elim = True$ en el evento e_{elim}^x para t_x el nodo que contiene el valor de x).

Basta ver que si el estado en op_m es $\hat{q} = \hat{p} * a$, con $\hat{p} \in \mathbb{N}^*$ y $a \in \mathbb{N}$, el estado después de ejecutar op_{m+1} es \hat{p} . Dado que $op_m <_S op_{m+1}$, podemos asegurar que el estado de la pila en el evento e^x_{elim} cambian de $\hat{p} * a$ a \hat{p} , pues si el estado la pila cambia entre op_m y op_{m+1} , entonces algún evento lo cambio. Podemos asegurar que no existe ningún evento que cambie el estado lógico de la pila $\hat{p} * a$, pues los únicos eventos que cambian el estado lógico son las ejecuciones de la línea 6 o 21 (en caso de un CompareAndSet exitoso, el cual añada un nodo, para la línea 6) pero justo estos eventos corresponderían a puntos de linealización de alguna operación cuya, con clase de concurrencia op', de modo que $op_m <_S op' <_S op_{m+1}$, contradiciendo el orden dado por S_{m+1} .

Por lo tanto, antes del evento e^x_{elim} el estado lógico es $\hat{p}*a$. Además, podemos asegurar que para el nodo $t_m = Top.get()$ se tiene que $t_m.elim == False$, por la linea 20. Entonces, dado que es el ultimo nodo, por definición, su valor es a. Entonces, e^x_{elim} cambia $t_m.elim = True$ con t_m , cambiando el estado lógico de la pila a \hat{p} , pues ahora no esite nodo alguno cuyo valor sea a y este logicamente en la pila. También se tiene que x = a, pues la línea 23 devuelve $t_a.value$ el cual es a. Dicho en otras palabras, para la operación op_{m+1} se cumple la transición:

$$\delta(\boldsymbol{\hat{p}}*\boldsymbol{a}, \{\boldsymbol{Pop_1}(\), ..., \boldsymbol{Pop_t}(\)\}) = (\boldsymbol{\hat{p}}, \{\langle \boldsymbol{Pop_1}(\) : \boldsymbol{a}\rangle\ , ..., \langle \boldsymbol{Pop_t}(\) : \boldsymbol{a}\rangle\}).$$

Por lo que concluimos que S_{m+1} produce una ejecución secuencial de pila válida que es consistente con (IV.1), donde estado de la pila está representado por el estado lógico codificado en \hat{q} , representado en la variable Top.

Por lo que concluimos que S_m produce una ejecución secuencial de pila válida que es consistente con (IV.1) para toda $m \le n$. Por consiguiente es válido para $E \setminus S$.

VI. FUNCIONAMIENTO

Esta sección está destinada para explicar el funcionamiento del algoritmo SetStackLogic bajo algunos posibles escenarios, así como mostrar la transición de estados de forma explicita. Principalmente, para dar ejemplos de como se puede llegar a comportar la memoria del sistema durante una ejecución concurrente. Cada hilo se representará por medio de una línea negra punteada, los eventos se representan como \boldsymbol{e} más algunos índices.

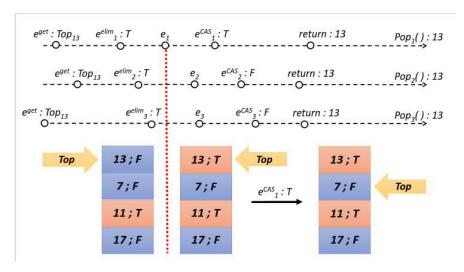


Figura 4: Representación de un conjunto dado de operaciones Pop_i que retornan todas el mismo valor. En este caso el conjunto es la clase de concurrencia de las operaciones.

Para los siguientes dos ejemplos consideremos tres hilos que se ejecutan concurrentemente. El primer ejemplo está representado en la figura 4, donde cada hilo ejecuta una operación Pop_i , además consideraremos el caso donde todas las operaciones retornan el mismo elemento. Como se puede apreciar durante las demostraciones, la iteración más relevante en las operaciones es siempre la última, en este ejemplo consideremos que estamos en la última iteración de cada Pop_i . Consideremos que las operaciones ocurren de la siguiente forma:

La pila está constituida por la lista de nodos

$$[(17, False), (11, True), (7, False), (13, False)].$$

El estado lógico de la pila es (17, 7, 13), siendo el nodo con valor 13 el primero en la pila.

- La instrucción de la línea 3 se representa por medio de e^{get} , donde cada operación extra al nodo de la referencia por medio de Top.get(). Dado que en esta iteración todas las operaciones Pop_i finalizaron en valor de dicho nodo es 13, y su valor booleano False.
- \blacksquare Todas las operaciones encuentran un nodo distinto de ϵ , línea 17 a 19.

- Cada operación ejecuta la línea 20 (evento representado por e_i^{elim}) y dado que el primer nodo es (13, False) todas las operaciones pasan a la línea 21.
- Llamémosle e_i a la ejecución de la línea 21. Consideremos, sin perdida de generalidad, que la operación Pop_1 es la primera en ejecutar dicha línea. Por lo tanto, e_1 es el punto de linealización de este conjunto de operaciones y en este evento es donde se produce un cambio en el estado lógico de la pila, esto se representa por la línea punteada roja.
- Después del evento e_1 el estado lógico de la pila cambio a (17,7), pero veamos que la referencia Top aún apunta al nodo (13,True). Todas las operaciones ejecutan ahora la línea 22 (evento e_i^{CAS}), el primer CompareAndSet es el que cambia la referencia de Top (no tiene mucha relevancia cuál es el primero). Finalmente, todas las operaciones retornan 13.
- En este último evento e_i^{CAS} la referencia atómica Top cambia, de modo que la memoria real de la pila cambia tal como se representa por medio de la flecha negra en la figura 4; sin embargo, el verdadero cambio del estado lógico se encuentra en la línea roja puntead, el cual es también el punto de linealización por conjuntos.

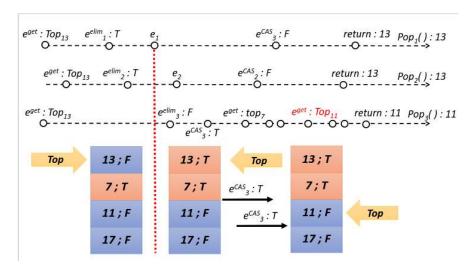


Figura 5: Representación de un conjunto dado de operaciones Pop_i que retornan diferentes valores. En este caso se tendrían dos clases de concurrencia.

Como siguiente ejemplo consideremos un conjunto de operaciones Pop_i , representado en la figura 5, las operaciones ocurren de la siguiente manera:

■ La pila está constituida por la lista de nodos

$$\left[(17,False),(11,False),(7,True),(13,False)\right].$$

El estado lógico de la pila es (17, 11, 13).

■ La instrucción de la línea 3 se representa por medio de e^{get} . Todas las operaciones extraen la misma referencia al nodo (13, False).

- Usando la misma notación donde, la línea 20 es el evento representado por e_i^{elim} y e_i a la ejecución de la línea 21. En este caso los eventos e_i^{elim} las operaciones Pop_1 y Pop_2 ocurren antes del evento e_1 , en donde el estado lógico de la pila cambia. Pero el evento e_3^{elim} ocurre después, de modo que el if no permite ejecutar la línea 21 para Pop_3 .
- Las operaciones Pop_1 y Pop_2 se completan de una forma similar al caso anterior. En el evento e_3^{CAS} la referencia Top cambia de apuntar al nodo (13, True) al nodo (7, True) (instrucción de la línea 25). Observemos que el nodo (7, True) no está lógicamente en la pila.
- La operación Pop_3 vuelve a iterar para otro intento de remover el nodo al inicio de la pila. Dado que el nodo (7, True) no está lógicamente en la instrucción 20, falla y pasa otra vez a la línea 25, donde se realiza otro e_3^{CAS} para cambiar la referencia de Top del nodo (7, True) al nodo (11, False).
- La operación Pop_3 vuelve a iterar, extrayendo el nodo e^{get} del cabezal y después se ejecutan las líneas 20 a 23 retornando el valor 11.

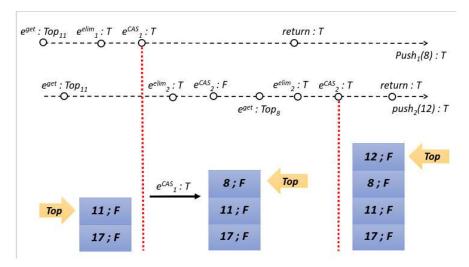


Figura 6: Representación de la interacción entre dos operaciones concurrentes: $Push_1((8, False))$ y $Push_2((12, False))$.

Consideremos ahora un conjunto de operaciones $Push_1((8, False))$ y $Push_2((12, False))$, representado en la figura 6 ,por simplicidad ejemplificaremos solo un par de operaciones, las cuales ocurren de la siguiente manera:

■ La pila está constituida por la lista de nodos

$$[(17, False), (11, False)]$$
.

El estado lógico de la pila es (17, 11).

■ La instrucción de la línea 3 se representa por medio de e^{get} . Ambas operaciones extraen la misma referencia al nodo (11, False).

- En la línea 5 la operación $Push_1$ conecta el nuevo nodo (8, False) al primero nodo, en el evento y después en la línea 6 se realiza un CompareAndSet el cual cambia la referencia hacia el nuevo nodo, esto en el evento e_1^{CAS} . En este último evento el estado lógico y la memoria real cambian, tan como se muestra en la figura. Después de este cambio de estado lógico, la operación $Push_2$ ejecuta un CompareAndSet en el evento e_2^{CAS} ; sin embargo, falla, pues la referencia ya cambio.
- La operación $Push_2$ vuelve a iterar siguiente un comportamiento similar al de la operación $Push_1$, insertando el nuevo nodo (12, False) en el evento e_2^{CAS} .
- \blacksquare El estado final de la pila después de la ejecución de las operaciones $Push_1$ y $Push_2$ es

$$[(17, False), (11, False), (8, False), (12, False)].$$

Observemos que en este caso existen dos puntos de linealización distintos, cada uno en la última iteración de su respectiva operación $Push_i$, la cual es una clase de concurrencia por sí misma.

Observemos que una vez que ocurre el punto de linealización de la primera operación, la segunda operación inevitablemente fallara en el CompareAndSet; es decir, en el evento e_2^{CAS} se retorna False. Esto es debido a que cambia el estado lógico de la pila en el punto de linealizacion. Esta propiedad nos permite linealizar por conjunto las operaciones Push en clases de concurrencia de un único elemento. Mientras que las operaciones Pop poseen un punto de linealización que permite que un conjunto dado de operaciones puedan ser linealizadas en un mismo punto de linelizacion.

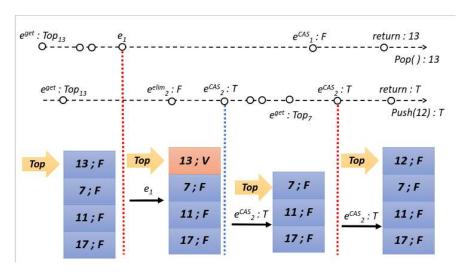


Figura 7: Representación de la interacción entre dos operaciones concurrentes: Push((12, False)) y Pop().

Como último ejemplo consideremos una operación Push((12, False)) y otra Pop, representado en la figura 7, con el siguiente comportamiento:

■ La pila está constituida por la lista de nodos

$$[(17, False), (11, False), (7, False), (13, False)]$$
.

El estado lógico de la pila es (17, 11, 7, 13).

- La instrucción de la línea 3 y 16 se representa por medio de e^{get} . Ambas operaciones extraen la misma referencia al nodo (13, False).
- La operación Pop ejecuta primero la instrucción de la línea 21, en donde ocurre el punto de linealización e_1 . La pila cambia su estado lógico como se muestra en la primera transición, pero la referencia continúa apuntando al nodo (13, True).
- La operación Push((12, False)) ejecuta la línea 4 (fallando, pues (13, True).elim == True), y después la línea 10, donde hace un cambio de referencia de Top al nodo (7, False).
- La ejecución del *CompareAndSet* en la línea 22 falla, independientemente de esto la operación se completa retornando el valor del nodo en la línea 23.
- En la operación Push inicia otra iteración y obtiene de Top la referencia al nodo (7, False). Después de ejecutar los debidos eventos llega a la línea 6 y en el evento e_2^{CAS} ejecuta un CompareAndSet exitoso, por lo que cambia la referencia al nuevo nodo añadido a la pila, el estado de la pila cambia en e_2^{CAS} y termina en (17,11,7,12).

Observemos que no hay problema si en lugar de una operación Pop consideramos un conjunto de operaciones: ya sea de 3 operaciones, como en el ejemplo de la figura 4, o un conjunto arbitrario de operaciones pero todas pertenecientes a la misma clase de concurrencia. Esto es gracias a que la única operación que cambia el estado lógico en la pila es aquella que contiene el punto de linealización del conjunto de operaciones Pop_i (siempre y cuando retornen el mismo elemento).

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado por el programa de Becas Nacionales para Estudio de Posgrado 2021 de CONACyT. Se agradecen los comentarios y discusiones al Dr. Armando Castañeda Rojano, quien brindo de sus conocimientos y experiencia que ayudaron en gran medida a la realización de este trabajo, el cual es resultado parcial de Tesis de Maestría.

^[1] M. Herlihy and N. Shavit, The Art of Multiprocessor Programming (Morgan Kaufmann, 2008).

^[2] A. Haas, M. Lippautz, T. A. Henzinger, H. Payer, A. Sokolova, C. M. Kirsch, and A. Sezgin CF '13, 10.1145/2482767.2482789 (2013).

^[3] T. A. Henzinger, C. M. Kirsch, H. Payer, A. Sezgin, and A. Sokolova, SIGPLAN Not. 48, 317–328 (2013).

^[4] C. M. Kirsch, H. Payer, H. Röck, and A. Sokolova, in *Algorithms and Architectures for Parallel Processing*, edited by Y. Xiang, I. Stojmenovic, B. O. Apduhan, G. Wang, K. Nakano, and A. Zomaya (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2012) pp. 273–287.

^[5] A. Castañeda, S. Rajsbaum, and M. Raynal, Distributed Computing 10.1007/s00446-022-00440-y (2022).

^[6] A. Castañeda and M. Piña, DISC Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), 16:1 (2021).

^[7] A. Castañeda, S. Rajsbaum, and M. Raynal, OPODIS Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), 13:1 (2020).

^[8] M. M. Michael, M. T. Vechev, and V. A. Saraswat, Idempotent work stealing, Vol. 44 (ACM, 2009).

^[9] M. P. Herlihy and J. M. Wing, ACM Trans. Program. Lang. Syst. 12, 463–492 (1990).

^[10] A. Castañeda, S. Rajsbaum, and M. Raynal, J. ACM 65, 10.1145/3266457 (2018).