LA CURVA DE FARGUES-FONTAINE: UNA MOTIVACIÓN AL ESTUDIO DE LA TEORÍA DE REPRESENTACIONES DE GALOIS p-ÁDICAS

JORGE ALBERTO ROBLES HERNANDEZ JESÚS ROGELIO PÉREZ BUENDÍA

RESUMEN. Este artículo proporciona una revisión comprensiva sobre la curva de Fargues-Fontaine, una pieza central en la teoría de Hodge p-ádica, y su papel crucial en la clasificación de las representaciones de Galois p-ádicas. Nos enfocamos en sintetizar los desarrollos fundamentales en torno a esta curva, subrayando cómo conecta conceptos avanzados de geometría aritmética con la teoría práctica de representaciones. Analizamos en detalle los anillos de periodos de Fontaine $(B_{cris}, B_{st}, B_{dR})$, abordando sus propiedades algebraicas y aritméticas esenciales, y cómo estos anillos contribuyen a la construcción y definición de la curva. Además, exploramos la teoría de las representaciones de Galois p-ádicas admisibles y discutimos cómo, una vez definida la curva, esta se relaciona con la teoría de Harder-Narasimhan.

1. Introducción

La geometría aritmética ha experimentado un impulso significativo en los últimos años gracias al uso de métodos p-ádicos. Uno de sus grandes avances ha sido el descubrimiento de la curva de Fargues—Fontaine que ha generado gran interés debido a las diversas relaciones que tiene con distintas áreas de las matemáticas [10].

Fue descubierta en el año 2009 por los matemáticos franceses Laurent Fargues y Jean Marc-Fontaine mediante una serie de correos electrónicos y en el transcurso de una semana de conferencias en Trieste, Italia. Pierre Colmez documenta este intercambio de mensajes y nos aporta el contexto mediante el cual se realizó dicho descubrimiento [7]. Fargues y Fontaine discutían un artículo de Berger [2] donde aseguraba que el anillo de periodos B_e era un anillo de Bezout. Fontaine, incrédulo de esta afirmación, indaga aún más llegando a una conclusión inesperada, el hecho que es de ideales principales. Fascinado por este anillo, Fontaine plantea a Colmez y Fargues una serie de preguntas cuyas respuestas desembocarían en relaciones con la teoría de filtraciones de Harder-Narasimhan en el contexto p-ádico. Estas relaciones darían pié al descubrimiento de la curva de Fargues-Fontaine revelándonos una conexión importante, la relación de las fibras vectoriales de la curva con la teoría de Harder-Narasimhan, que a su vez, tiene relación con las representaciones de Galois p-ádicas y los llamados anillos de periodos de Fontaine.

La teoría de Hodge p-ádica provee una forma de clasificar representaciones de Galois p-ádicas de campos locales de característica cero con campo residual de característica p (también llamados campos de característica mixta). Esta teoría tiene sus inicios en los trabajos de Serre y Tate quienes estudiaban los módulos de Tate sobre variedades abelianas y las representaciones de Hodge-Tate. Estas representaciones están relacionadas a ciertas descomposiciones de cohomologías p-ádicas, análogas a la descomposición de Hodge. Futuros avances en el área se inspiraron por las representaciones de Galois p-ádicas que nacen de la cohomología étale de variedades. Es en este contexto donde Jean-Marc Fontaine introduce los anillos de periods.

 $^{2020\} Mathematics\ Subject\ Classification.\ 11F85,\ 11S15,\ 11S20,\ 11F80.$

 $Key\ words\ and\ phrases.$ Curva de Fargues-Fontaine, Geometría Aritmética, Representaciones de Galois p-ádicas, Anillos de Peridos, Teor \tilde{A} a de Hodge p-ádica.

La estructura del artículo es el siguiente: En la sección 2 presentamos notación e información preliminar que se usará a lo largo del texto. En la sección 3 se plantea una introducción a la idea de Fontaine sobre la clasificación de representaciones de Galois p-ádicas para dar paso en la sección 4 a la definición de los anillos periodos y mencionar sus propiedades algebraicas y aritméticas más importantes. En la sección 5 retomamos lo comentado en la sección 3 con más detalle para explicar de manera más precisa el papel que toman los anillos de periodos en la clasificación de las representaciones de Galois p-ádicas. En la sección 6 presentamos la construcción de la curva de Fargues-Fontaine usando como analogía las ideas para la construcción de la esfera de Riemann. Finalmente, en la sección 7 describimos la conexión entre las fibras vectoriales de la curva de Fargues-Fontaine con las representaciones de Galois p-ádicas mediante el teorema de Harder-Narasimhan.

2. Notación y Preliminares

Sea p un primo fijo. El campo de los números p-ádicos (denotado como \mathbb{Q}_p) se puede definir como sigue: Para $a \in \mathbb{Z}$ sea $v_p(a)$ la máxima potencia de p que divide al entero a. Extendiendo esto a \mathbb{Q} definimos $v_p(\frac{a}{b}) = v_p(a) - v_p(b)$. Así podemos definir una norma en \mathbb{Q} como

$$\left| \frac{a}{b} \right|_p = \frac{1}{p^{v_p} \left(\frac{a}{b} \right)}.$$

Dicha norma induce una distancia en \mathbb{Q} la cual no es completa (no toda sucesión de Cauchy converge). A la completación de \mathbb{Q} respecto a esta distancia es lo llamados el campo de los número p-ádicos.

Denotamos por K a una extensión finita de \mathbb{Q}_p , \mathcal{O}_K su anillo de enteros, m_K su único ideal maximal y $k:=\mathcal{O}_K/m_K$ su campo residual. Denotamos por $K_0=K\cap\mathbb{Q}_p^{nr}$ a la máxima extensión no ramificada [20] de \mathbb{Q}_p dentro de K. Fijamos una cerradura algebraica \overline{K} de K y sea $G_K=Gal(\overline{K}/K)$ su grupo de Galois absoluto. Notar que \overline{K} es también una cerradura algebraica de \mathbb{Q}_p y por lo tanto no depende K. Sea K_0^{nr} la extensión maximal no ramificada de K_0 en \overline{K} . Análogamente definimos a $K^{nr}\subseteq\overline{K}$. Como K_0 es no ramificado sobre \mathbb{Q}_p , K_0^{nr} es la extensión máxima no ramificada de \mathbb{Q}_p en \overline{K} y por lo tanto también es independiente de K.

Denotemos por \mathbb{C}_p a la completación p-ádica de \overline{K} y por $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ a su anillo de enteros. Fijamos $\pi \in m_K$ al parámetro uniformizador de K, es decir, un generador del ideal principal m_K .

Se dirá que un campo K de característica p es perfecto si el morfismo de Frobenius es un isomorfismo.

3. La idea de Fontaine.

Desde finales de la década de 1970, J.M. Fontaine desarrolló un programa destinado a clasificar y describir las \mathbb{Q}_p -representaciones del grupo de Galois absoluto, G_K , de una extensión finita de los racionales p-ádicos \mathbb{Q}_p , i.e., los \mathbb{Q}_p espacios vectoriales de dimensión finita dotados de una acción \mathbb{Q}_p -lineal continua de G_K [1].

La estrategia de Fontaine parte de la siguiente observación: si tenemos un anillo topológico B, dotado de una acción continua de G_K y estructuras adicionales estables bajo la acción de G_K , podemos asociar a cualquier representación de G_K un invariante $D_B(V) := (B \otimes V)^{G_K}$ de $B \otimes V$.

Entonces $D_B(V)$ es un B^{G_K} -módulo equipado con estructuras adicionales heredadas de B, y que es a menudo más fácil de describir que la representación V de la que partimos. El anillo B permite descomponer la sub-categoría de B-representaciones admisibles (aquellas para los cuales $B \otimes V$ es trivial, i.e., isomorfa a $B^{\dim V}$, como G_{K^-} representación). Tales anillos topológicos B son los llamados anillos de periodos de Fontaine. A continuación presentamos la construcción de dichos anillos así como de algunas de sus propiedades.

4. Teoría de Hodge p-ádica

La teoría de Hodge p-ádica, como lo describe [13], puede verse desde dos puntos de vista: el aritmético y el geométrico.

Desde el punto de vista aritmético, es el estudio de las representaciones de Galois p-ádicas, es decir, representaciones continuas $G_K \to Gl_n(\mathbb{Q}_p)$ donde K es extensión finita de \mathbb{Q}_p . Específicamente, esta teoría busca construir un diccionario que relacione buenas categorías de representaciones de G_K con categorías de objetos algebraicos semilineales. Un ejemplo de esto es el estudio de los módulos de Tate de una curva elíptica sobre K (que son representaciones de G_K) con buena reducción junto con los llamados isocristales (es decir, \mathbb{Q}_p -espacios vectoriales de dimensión finita equipados con un automofismo de Frobenius semilineal).

Desde el punto de vista geométrico, la teoría de Hodge p-ádica es el estudio de la geometría de una variedad (suave) X sobre un campo p-ádico K. En particular estamos interesados es varias teorías de cohomología relacionadas a X como la cohomología étale $(H_{et}^n(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$, la cohomología de DeRham $(H_{dR}^n(X, K))$ y la cohomología cristalina $(H_{cris}^n(X, K))$. Uno de los resultados mas relevantes de esta teoría es derivado del caso clásico en \mathbb{C} sobre la descomposición de Hodge de una variedad suave Y:

$$H^n(Y(\mathbb{C},\mathbb{Q})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}\cong \oplus_{i+j=n}H^i(Y,\Omega_Y^j).$$

Tate observó que existía una descomposición análoga para la cohomología étale de una variedad abeliana sobre K con buena reducción, lo que lo llevo a conjeturar (y tiempo después Faltings lo demostraría) la descomposición de Hodge-Tate [6]:

$$H^n_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K \cong \bigoplus_{i+j=n} H^i(X, \Omega^j_{X/K}) \otimes_K \mathbb{C}_K(-j),$$

donde X es una variedad suave sobre K y es un isomorfismo de representaciones de Galois p-ádicas $Rep_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$.

En este sentido, Fontaine realiza una serie de conjeturas, ahora teoremas, conocidos como "teoremas de comparación" en donde relaciona a las distintas cohomologías de la variedad, siendo necesario extender los coeficientes a los llamados anillos de periodos de Fontaine.

Teorema 1. [6] Sea K una extensión finita de \mathbb{Q}_p y X una variedad proyectiva lisa definida sobre K. Existen isomorfismos naturales:

- $\blacksquare H_{et}^n(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris} \cong H_{cris}^i(X) \otimes_{K_0} B_{cris}.$
- $\blacksquare H^n_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{st} \cong H^i_{HK}(X) \otimes_{K_0} B_{st}.$
- $\blacksquare H_{et}^n(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{dR} \cong H_{dR}^i(X) \otimes_K B_{dR}.$

que conmutan con las acciones de G_K , Frobenius, N (monodromía) y respectivas filtraciones. Aquí H^i_{HK} denota la cohomología de Hyodo-Kato [21].

En esta sección nos centraremos en estudiar los anillos de periodos, en particular, mostraremos sus construcciones y las propiedades aritméticas y algebraicas que nos servirán para la construcción de la curva de Fargues-Fontaine. En el presente texto no se estudiará la relación con las cohomologías como en el teorema 4.1. Para el lector interesado en este aspecto puede consultar [1].

4.1. Anillos de Periodos. En geometría algebraica la palabra "periodo" se suele referir a un número complejo que puede ser expresado como integral de una función algebraica sobre un dominio algebraico [14]. Uno de ellos es $2i\pi = \int_{\gamma} \frac{dt}{t}$, donde γ es el círculo unitario en el plano complejo. La teoría de Hodge p-ádica nos permite diseñar un análogo p-ádico de los periodos, trabajo que realizó Fontaine creando anillos específicos [11, 9, 8, 10], los cuales además están estrechamente relacionados con distintos tipos de cohomologías. Estos anillos forman parte fundamental en la construcción de la curva de Fargues-Fontaine y las representaciones de Galois p-ádicas.

En esta sección se dará una introducción a los anillos de periodos como en [3], en particular estudiaremos a los anillos B_{cris} , B_{st} y B_{dR} , sus respectivas construcciones y algunas de sus propiedades algebraicas y analíticas.

4.1.1. El anillo B_{inf} . Denotemos como ϕ el morfismo de Frobenius $x \mapsto x^p$ actuando en el cociente $\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}$ y notemos que ϕ es un homomorfismo de anillos. Sea R el límite del sistema proyectivo de anillos:

$$\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \lessdot \frac{\phi}{} \quad \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \lessdot \frac{\phi}{} \quad \cdots \lessdot \frac{\phi}{} \quad \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \cdots,$$

Específicamente, un elemento de R es una sucesión $(\zeta_n)_{n\geq 0}$ de elementos en $\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}$, que satisfacen la propiedad de compatibilidad $\zeta_{n+1}^p = \zeta_n, \ \forall n \geq 0. \ R$ es un anillo perfecto de característica p.

El anillo R esta equipado con una valuación v_b que se definirá a continuación: notemos que si $x \in \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \setminus \{0\}$, la valuación p-ádica de $\widehat{x} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ no depende del levantamiento \widehat{x} de x. La valuación $v_p : \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ induce una función bien definida en el cociente $v_p : \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \to \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$ donde $v_p(0) = +\infty$. Así, para $\zeta = (\zeta_n)_{n \geq 0}$ en R definimos

$$v_b(\zeta) := \lim_{n \to \infty} p^n v_p(\zeta_n).$$

La condición de compatibilidad $\zeta_{n+1}^p = \zeta_n$ Implica que la sucesión $(p^n v_p(\zeta_n))_{n\geq 0}$ es eventualmente constante y el límite está bien definido.

A continuación se hará uso de una estructura algebraica conocida como el anillo de vectores de Witt y cuya idea es la de construir extensiones no ramificadas.

Definición 2. Definimos como $A_{inf} = W(R)$ donde W(-) es el funtor de vectores de Witt y $B_{inf}^+ = A_{inf} \begin{bmatrix} \frac{1}{p} \end{bmatrix} = W(R) \begin{bmatrix} \frac{1}{p} \end{bmatrix}$, la localización en A_{inf} en p.

Para $x \in R$, definimos el representante de Techmüller en A_{inf} como $[x] = (x, 0, \dots, 0, \dots)$. Dado que R es de valuación discreta, todo elemento de A_{inf} puede ser escrito de manera única como

$$\sum_{i>0} [\zeta_i] p^i, \quad \zeta_i \in R.$$

De manera similar, todo elemento de B_{inf}^+ se puede escribir de manera única de la forma

$$\sum_{i > i} [\zeta_i] p^i, \quad \zeta_i \in R,$$

donde i_0 puede ser negativo y depende de x.

Además, B_{inf}^+ cuenta con estructuras adicionales:

• B_{inf}^+ tiene una acción de Frobenius φ dado por:

$$\varphi\left(\sum_{i=i_0}^{\infty} [\zeta_i] p^i\right) = \sum_{i=i_0}^{\infty} [\zeta_i^p] p^i, \quad \zeta_i \in \mathbb{R}, \ i_0 \in \mathbb{Z}.$$

• B_{inf}^+ está equipado con una acción de G_K dado por:

$$g\left(\sum_{i=i_0}^{\infty} [\zeta_i] p^i\right) = \sum_{i=i_0}^{\infty} [g\zeta_i] p^i, \quad \zeta_i \in \mathbb{R}, \ i_0 \in \mathbb{Z}, \ \forall g \in G_K.$$

Fijamos ϵ_1 una raíz primitiva p-ésima de la unidad en $\mathcal{O}_{\overline{K}}$. Escojamos a ϵ_2 como raíz primitiva p-ésima de ϵ_1 . Entonces ϵ_2 es raíz primitiva p^2 -ésima de la unidad. Repitiendo este proceso, construimos elementos $\epsilon_3, \epsilon_4, \ldots \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$ tales que $\epsilon_{n+1}^p = \epsilon_n, \ \forall n \geq 0$. Sea $\overline{\epsilon}_n \in \frac{\mathcal{O}_{\overline{K}}}{p\mathcal{O}_{\overline{K}}}$ la clase de ϵ_n . Por la propiedad de compatibilidad, $\underline{\epsilon} = (1, \overline{\epsilon}_1, \overline{\epsilon}_2, \ldots) \in R$.

Definición 3. Para $\zeta = (c_0, c_1, ...) \in R$, definimos $\zeta^{\sharp} = \lim_{n \to \infty} \widehat{c_n}^{p^n}$, donde $\widehat{c_n}$ es un levantamiento de c_n en $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$.

La función $\sharp: R \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}, \ \zeta \mapsto \zeta^\sharp$ es inyectiva y multiplicativa. Por las propiedades de los vectores de Witt, la función "sharp" se extiende a un homomorfismo inyectivo de \widehat{K}_0^{ur} -álgebras $\theta: B_{inf}^+ \to \mathbb{C}_p$ que conmuta con la acción de G_K . Está dado por

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} [\zeta_i] p^i \longmapsto \sum_{i=i_0}^{\infty} \zeta_i^{\sharp} p^i, \ i_0 \in \mathbb{Z}, \ \zeta_i \in R.$$

La siguiente proposición nos dice que el kernel de θ es principal y nos muestra explícitamente a un generador del mismo.

Proposición 4 ([3], Lema:3.1.5). Sea $z \in A_{inf}$ elemento tal que $\theta(z) = 0$ y $v_b(z)$ (m'od p))=1. Entonces z genera $A_{inf}\cap \ker\theta$ como ideal de A_{inf} . En particular, el elemento

 $\omega = \frac{\left[\underline{\epsilon}\right] - 1}{\left[\epsilon^{\frac{1}{p}}\right] - 1} = \left[\underline{\epsilon}^{\frac{1}{p}}\right] + \left[\underline{\epsilon}^{\frac{1}{p}}\right]^2 + \dots + \left[\underline{\epsilon}^{\frac{1}{p}}\right]^{p-1},$

satisface las condiciones.

4.1.2. El anillo B_{cris} . Para definir el anillo B_{cris} necesitamos tener la noción de elementos de la forma $\frac{x^n}{n!}$ y para ello daremos un breve preámbulo a las llamadas potencias divididas. Se considerará 0! = 1.

Definición 5. Sea A un anillo (conmutativo con unidad), I un ideal A. Una colección de aplicaciones $\gamma_n: I \to I, n \geq 0$ y $\gamma_0: A \to I$ definido como $\gamma_0(x) = 1$, es llamado una estructura de potencias divididas en I si para todos $n \geq 0, m > 0, x, y \in I$ y $a \in A$ se tiene:

- 1) $\gamma_1(x) = x$
- 2) $\gamma_n(x)\gamma_m(x) = \frac{(n+m)!}{n!m!}\gamma_{n+m}(x).$ 3) $\gamma_n(ax) = a^n\gamma_n(x).$ 4) $\gamma_n(x+y) = \sum_{i=0}^n \gamma_i(x)\gamma_{n-i}(y).$ 5) $\gamma_n(\gamma_m(x)) = \frac{(nm)!}{n!(m!)^n}\gamma_{nm}(x).$

Notemos que $\frac{(n+m)!}{n!m!}=\binom{n+m}{n}\in\mathbb{Z}$ y además, $\frac{(nm)!}{n!(m!)^n}\in\mathbb{Z}$ ya que cuenta el número de maneras de dividir un grupo de nm objetos en n grupos de m elementos.

Lema 6. Sea A un anillo, I un ideal de A. Si γ es una estructura de potencias divididas en I, entonces $n!\gamma_n(x)=x^n$ para todo $n\geq 1$ y $x\in I$.

Este lema se puede demostrar por inducción. Así, en el anillo A tendríamos la noción de dividir entre n!, cuestión que no siempre es posible si char(A) > 0.

Volviendo a los anillos de periodos, dado $x \in A_{inf} = W(R)$ denotamos como $A_{inf}\langle x\rangle$ la sub A_{inf} –álgebra de B_{inf}^+ generada por las potencias divididas.

Definición 7. Definimos A_{cris} como la completación p-ádica de $A_{inf}\langle z \rangle$, donde z es un generador de $A_{inf} \cap \ker \theta$. Denotamos por $B_{cris}^+ = A_{cris} \left[\frac{1}{p} \right]$ a la localización en p $de A_{cris}$.

Como ω es un generador de $A_{inf} \cap \ker \theta$, se tiene que $A_{cris} = \widehat{A}_{inf} \langle \omega \rangle$, donde denota la completación p-ádica. Otro generador de $A_{inf} \cap \ker \theta$ también es el elemento $[p^b]-p.$

El siguiente lema nos da una condición sobre cuándo cualesquiera dos elementos en A_{inf} producen la misma sub A_{inf} -álgebra generada por las potencias divididas.

Lema 8. Si $x, y \in A_{inf}, x \equiv y \pmod{pA_{inf}}$ entonces $A_{inf}\langle x \rangle = A_{inf}\langle y \rangle$.

Usando el lema, se tendría que $A_{cris} = A_{inf} \langle [p^b] \rangle$.

Como A_{cris} está definida como completación p-ádica es natural equipar A_{cris} y B_{cris}^+ con la topología p-ádica. Con esta topología, la inclusión $A_{inf} \hookrightarrow A_{cris}$ es continua al igual que la inclusión $B_{inf}^+ \hookrightarrow B_{cris}^+$.

Frobenius se extiende canónicamente a un endomorfismo $A_{cris} \to A_{cris}$, ya que $A_{inf}\langle [p^b]\rangle$ es estable bajo Frobenius. En efecto,

$$\varphi\bigg(\frac{[p^b]^n}{n!}\bigg) = [p^b]^{np-n}\varphi\bigg(\frac{[p^b]^n}{n!}\bigg).$$

Invirtiendo p se obtiene Frobenius para B_{cris}^+ . Análogamente, G_K extiende la acción a B_{cris}^+ .

 A_{cris} contiene un periodo para el caracter ciclotómico, i.e., un elemento en el cuál Galois actúa por multiplicación por χ , el caracter ciclotómico. Este elemento es

$$t = log([\underline{\epsilon}]) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{([\underline{\epsilon}] - 1)^i}{i}.$$

Frobenius actúa como $[\underline{\epsilon}] \mapsto [\underline{\epsilon}]^p$ y G_K actúa como $g[\underline{\epsilon}] = [\underline{\epsilon}]^{\chi(g)}, \ g \in G_K$. Tomando logaritmos, $\varphi(t) = pt$ y $gt = \chi(g)t, \ \forall g \in G_K$. Así, t es un periodo del caracter ciclotómico.

4.1.3. El anillo B_{dR} .

Definición 9. Definimos B_{dR}^+ como la completación de B_{inf}^+ respecto a la topología $(\ker \theta)$ -ádica, es decir

$$B_{dR}^{+} = \varprojlim_{m} \frac{B_{inf}^{+}}{(\ker \theta)^{m}}.$$

Como B_{dR}^+ está definido como una completación, la topología natural en este anillo es la topología $(\ker \theta)$ -ádica. Una sucesión de elementos $(x_n)_{n\geq 0}$ de elementos en B_{dR}^+ converge a $x\in B_{dR}^+$ si y sólo si para todo m, la sucesión $\{x_n \pmod{Fil^m B_{dR}^+}\}$ es eventualmente constante.

Definición 10. Definimos el anillo $B_{dR} = B_{dR}^{+}[\frac{1}{t}].$

Como B_{dR}^+ es un anillo de valuación discreta con uniformizador t, se tiene que B_{dR} es el campo de fracciones de B_{dR}^+ , es decir, este anillo es de hecho un campo.

La filtración de De Rham se extiende a $B_{dR}: Fil^m B_{dR} = t^m B_{dR}^+, m \in \mathbb{Z}$. Para más información se recomienda consultar al lector [9], [8], [3].

5. Representaciones de Galois p-ádicas

Una vez que hemos construído los anillos de periodos, regresamos a la idea de Fontaine para clasificar las representaciones de Galois p-ádicas. En esta sección se hablará primero de la B-admisibilidad de una representación para luego dar paso a un ejemplo concreto: como el anillo de periodo B_{dR} nos dará más información sobre la representación. La bibliografía que se seguirá en esta sección es [1].

5.1. Representaciones admisibles. Sea F un campo y G un grupo. Sea B una F–álgebra, dominio equipado con una G–acción (como F–álgebra) y asuma que la sub F–álgebra $E=B^G$ es un campo.

No se imponen estructuras topológicas en B, F o G. El objetivo en usar a B para construir un funtor de representaciones de G F-lineales de dimensión finita a E-espacios vectoriales de dimensión finita equipados con estructuras adicionales que dependen de B.

Sea C = Frac(B) y G actúa en C de manera natural, i.e., $g(\frac{a}{b}) = g(a)g(b^{-1})$.

Definición 11. Decimos que B es (F,G)-regular si $C^G = B^G (=E)$ y si para todo $b \in B \setminus \{0\}$ cuyo espacio generado F-lineal Fb es G-estable se tiene que b es unidad en B.

Notemos que si B es un campo, entonces es (F, G)-regular.

Definición 12. Si B es un dominio (F,G)-regular y E denóta el campo $C^G = B^G$, entonces para cualquier objeto $V \in Rep_F(G)$ de G representaciones F-lineales de dimensión finita definimos

$$D_B(V) := (B \otimes_F V)^G,$$

es decir, $D_B(V)$ es un E-espacio vectorial equipado con un mapeo canónico

$$\alpha_V: B \otimes_E D_B(V) \to B \otimes_E (B \otimes_F V) = (B \otimes_E B) \otimes_F V \to B \otimes_F V.$$

Definición 13. Si se tiene la igualdad $\dim_E D_B(V) = \dim_F(V)$ se dirá que V es una representación B-admisible.

El siguiente teorema nos indica que el E-espacio vectorial $D_B(V)$ es de hecho de dimensión finita y que al restringirnos a las representaciones B-admisibles, se tiene un funtor exacto y fiel.

Teorema 14. Fijamos V como antes.

- i) El mapeo α_v es siempre inyectivo $y \dim_E D_B(V) \leq \dim_F V$. La igualdad se da y si sólo si α_V es un isomorfismo.
- ii) Sea $Rep_F^B(G) \subseteq Rep_F(G)$ la subcategoría de representaciones B-admisibles. El funtor contravariante $D_B : Rep_F^B(G) \to Vec_E$ es exacto y fiel.

En particular, considerando a K un campo p-ádico, i.e., extensión finita de \mathbb{Q}_p , $F = \mathbb{Q}_p$ y $G = Gal(\overline{K}, K)$ tenemos que:

- Si $B = B_{dR}$, se dice que la representación es de DeRham.
- Si $B = B_{cris}$, se dice que la representación es cristalina.
- Si $B = B_{st}$, se dice que la representación es semiestable.
- **5.2.** Representaciones de deRham. Analizaremos un poco más a detalle las representaciones de DeRham. Como B_{dR} es (\mathbb{Q}_p, G_K) -regular con $B_{dR}^{G_K} = K$, la formalización general de representaciones admisibles provee de una buena clase de representaciones p-ádicas, los que son B_{dR} -admisibles.

Definición 15. Definimos el funtor covariante $D_{dR}: Rep_{\mathbb{Q}_p}(G_K) \to Vec_K$ a la categoría de K-espacios vectoriales de dimensión finita como $D_{dR}(V) = (B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$. En el caso que $dim_{B_{dR}}(V) = dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$ diremos que V es una representación de deRham.

El codominio del funtor anterior tiene estructuras K-lineales adicionales (que vienen de la estructura adicional de la K-álgebra B_{dR}), específicamente una filtración K-lineal que surge de la filtración K-lineal en el campo de fracciones B_{dR} del anillo de valuación discreto completo B_{dR}^+ sobre K.

Para $V \in Rep_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$, el K-espacio vectorial $D_{dR}(V) = (B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \in Vec_K$ tiene estructura natural de objeto en Fil_K : Como B_{dR} tiene una filtración K-lineal, G_K estable dado por $Fil^i(B_{dR}) = t^i B_{dR}^+$, obtenemos una filtración K-lineal, G_K -estable $\{Fil^i(B_{dR}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\}$ en $B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ y este induce una filtración en $D_{dR}(V)$ de elementos G_K -invariantes, explícitamente

$$Fil^{i}(D_{dR}(V)) = (t^{i}B_{dR}^{+} \otimes_{\mathbb{Q}_{p}} V)^{G_{K}}.$$

6. Construcción de la Curva de Fargues-Fontaine.

La curva de Fargues–Fontaine es un objeto de la teoría de números descubierta en 2009 por Laurent Fargues y Jean Marc–Fontaine, donde en su geometría codifica mucha información sobre la aritmética de los números p–ádicos. Se ha convertido rápidamente en un tema de investigación en la teoría de Hodge p-ádica y el programa de Langlands.

En esta sección motivamos la definición de la curva usando una analogía con la esfera de Riemann. Luego, construimos la curva desde dos puntos de vista distintos, uno desde el punto de vista del álgebra conmutativa y otro desde los espacios de "Tilts y Untilts" [16, 5].

- **6.1.** La esfera de Riemann. Para motivar la definición de la curva, analizaremos una curva más familiar, la esfera de Riemann $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, a la cual le podemos asociar anillos $\mathbb{C}[z] \subseteq \mathbb{C}((\frac{1}{z}))$.
 - Primero, el anillo de funciones meromorfas sobre $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ sin polos fuera del punto al infinito es el álgebra de polinomios $\mathbb{C}[z]$, donde z denota el parámetro local habitual en el origen.
 - Mirando los desarrollos de Laurent en el punto al infinito de todas las funciones meromórficas en $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ encontramos el anillo $\mathbb{C}((\frac{1}{z}))$, donde $\frac{1}{z}$ es un parámetro local para el punto al infinito.

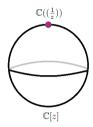


FIGURA 1. Esfera de Riemann.

Recíprocamente, podemos reconstruir la esfera de Riemann a partir de los anillos $\mathbb{C}[z] \subseteq \mathbb{C}((\frac{1}{z}))$.

$$x\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \leftrightsquigarrow l_x\in\{f\in\mathbb{C}[z]\ |\ \deg f\leq 1\}=\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}z.$$
 Más aún, si $S=\bigoplus_{k\geq 0}\{f\in\mathbb{C}[z]\ |\ \deg f\leq k\},$ entonces $Proj(S)=\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}.$

La idea de la curva de Fargues–Fontaine es emular la construcción de la esfera de Riemann con los anillos $\mathbb{C}[z] \subseteq \mathbb{C}((\frac{1}{z}))$; pero en los números p-ádicos y usando a los anillos $B_e \subseteq B_{dR}$, donde $B_e := B_{cris}^{\varphi=1}$.



FIGURA 2. Representación artística de la curva de Fargues-Fontaine [16].

A esta curva la denotaremos como X^{FF} . Concretamente, Fargues y Fontaine demostraron que [7]:

Teorema 16 (FF). Existe un esquema regular, noetheriano, conexo, separado de dimensión uno, X^{FF} , sobre \mathbb{Q}_p ; tal que tiene un punto al infinito y, el anillo de funciones meromorfas sin polos fuera del infinito es el anillo B_e .

En este caso, si $S = \bigoplus_{k \geq 0} \{f \in B_e \mid \deg f \leq k\}$, entonces la curva de FF se define como $X^{FF} = Proj(S)$. Además, de manera análoga al caso de la esfera de Riemann, tenemos que:

$$x \in X^{FF} \iff \{f \in B_e \mid \deg f \le 1\} = l_x.$$

6.2. Otro punto de vista: Tilts y Untilts. A continuación presentamos otra forma de construir la curva de Fargues-Fontaine mediante lo llamados tilts y untilts. Esta sección está basado en la sección 2.1 de [15].

Sea C un campo algebraicamente cerrado que contiene a \mathbb{Q}_p y es completo respecto a un valor absoluto no arquimediano $|\cdot|_C:C\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ que extiende el valor absoluto p-ádico en \mathbb{Q}_p . (Un ejemplo es \mathbb{C}_p , los complejos p-ádicos).

Definición 17. El "tilt " $F = C^{\flat}$ de C es un campo algebraicamente cerrado que contiene a \mathbb{F}_p y es completo respecto a un valor absoluto no arquimediano no trivial $|\cdot|_F : F \to \mathbb{R}_{>0}$.

Como conjunto,

$$C^{\flat} = \{(a_0, a_1, \dots) \mid a_i \in C \text{ y } a_i^p = a_{i-1}\}$$

La multiplicación se define término a término y la suma como $(a_0, a_1, ...) + (b_0, b_1, ...) = (c_0, c_1, ...)$, donde

$$c_i := \lim_{i \le n \to \infty} (a_n + b_n)^{p^{n-i}}.$$

Recíprocamente, sea F con los hipótesis de la definición de tilt.

Definición 18. Un "untilt" de F es un par (C,i), donde C es un campo algebraicamente cerrado que contiene a \mathbb{Q}_p y es completo respecto a un valor absoluto no arquimediano $|\cdot|_C: C \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que extiende el valor absoluto p-ádico en \mathbb{Q}_p y $i: F \to C^{\flat}$ es un isomorfismo de campos valuados.

Decimos que dos untilts (C, i), (C', i') son equivalentes si existe un isomorfismo $C \cong C'$ tal que el isomorfismo inducido entre sus tilts es compatible con i y i', es decir, si existe $\psi: C \to C'$ isomorfismo tal que el diagrama conmuta:



donde $\psi^{\flat}(a_0, a_1, ...) = (\psi(a_0), \psi(a_1), ...).$

Definición 19. Sea $|Y_F|$ el conjunto de clases de equivalencia de untilts de F.

Dado un untilt (C, i) de F podemos construir nuevos untilts $(C, i \circ \varphi^m)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, donde φ es el automorfismo de Fronbenius.

Definición 20. Decimos que dos untilts (C,i), (C',i') son Frobenius equivalentes si existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que (C,i) y $(C',i') \circ \varphi^m$ son equivalentes.

Al conjunto de clases de equivalencia de untilts Frobenius equivalentes está dado por el cociente

$$|Y_F|/\varphi^{\mathbb{Z}},$$

donde el grupo cíclico infinito $\varphi^{\mathbb{Z}}$ actúa en $|Y_F|$ via

$$\varphi^m \cdot (C, i) = (C, i \circ \varphi^m).$$

El siguiente resultado cuya demostración puede ser consultado en [15] nos dá la relación entre este conjunto de clase de equivalencia y las curva de Fargues-Fontaine.

Teorema 21. Existe una curva X_F^{FF} cuyos puntos están en biyección con $|Y_F|/\varphi^{\mathbb{Z}}$.

7. LA CURVA Y LAS REPRESENTACIONES DE GALOIS p-ÁDICAS.

En esta última sección se muestra la relación de la curva de Fargues-Fontaine, específicamente sus fibrados vectoriales, con las representaciones de Galois p-ádicas, haciendo uso del teorema de Harder-Narasimhan. En los fibrados vectoriales se tiene lo siguiente:

Definición 22. Sea X una superficie de Riemann. Para cualquier fibrado vectorial E de X asociamos dos invariantes:

- $Su\ rango,\ rk(E) \in \mathbb{N}.$
- Su grado, $\deg(E) \in \mathbb{Z}$, definido como el grado de su "determinant line bundle". El grado de un fibrado lineal L se define identificando a L con un divisor de Weil $\sum_{x \in X} n_x[x]$ y definimos $\deg(L) = \sum_{x \in X} n_x$.

De los dos invariantes anteriores se define un tercero, su pendiente

$$\mu(E) = \frac{\deg(E)}{rk(E)} \in \mathbb{Q}.$$

Se dice que E es semiestable si $\mu(E') \leq \mu(E)$ para todo E' subfibrado vectorial de E.

Enunciaremos ahora el teorema principal de este sección cuya demostración puede ser consultada en [15].

Teorema 23 (Harder-Narasimhan (H-N)). Sea E un fibrado vectorial de X. Entonces E tiene una única filtración de sub-fibrados

$$0 = E_0 \subseteq E_1 \subseteq \cdots \subseteq E_m = E,$$

tales que:

- El fibrado cociente $\frac{E_i}{E_{i-1}}$ es semiestable para todo i=1,...,m.
- $\mu(\frac{E_1}{E_0}) > \dots > \mu(\frac{E_m}{E_{m-1}}).$

En general hay otras categorías en las cuales existe un análogo al teorema de H-N. Mencionaremos alguna de estas.

- Fibrados vectoriales de una curva X.
 Sea X una superficie de Riemann. Sea Vect(X) la categoría de fibrados en X. Equipado con las nociones definidas anteriormente de rango y grado, dicha categoría satisface el teorema H-N.
- Los pares P¹-algebraicos completos. Antes de definir estos objetos necesitaremos la definición de una función casi euclidiana.

Definición 24. Una función casi euclidiana de un dominio entero B es una función $\nu: B \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ que cumple las siguientes propiedades:

- 1. $\nu(f) = -\infty \iff f = 0$.
- 2. Para $f, g \in B \{0\}$ se tiene que $\nu(f) \le \nu(fg)$.
- 3. Si $\nu(f) = 0$, entonces f es unidad.
- 4. Si $f, g \in B$ con $\nu(g) \ge 1$, entonces existen $q, r \in B$ tales que f = gq + r y $\nu(r) \le \nu(g)$.

Definición 25. Un par \mathbb{P}^1 -algebraico es un par (B, ν) que consiste es un anillo de ideales principales B y una valuación $\nu : Frac(B) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ tal que $-\nu$ es una función casi euclidiana en B. Decimos que el par el completo si

$$\nu(f) + \sum_{\mathfrak{p} \subseteq B} ord_{\mathfrak{p}}(f) = 0,$$

para todo $f \in B$, donde $\mathfrak p$ corre sobre todos los ideales primos distintos del cero de B y ord $\mathfrak p$ denota la valuación $\mathfrak p$ -ádica asociada en B.

Sea (B, ν) un par \mathbb{P}^1 -algebraico completo. Un "fibrado vectorial en (B, ν) " se define como un par (M, M_{∞}) , donde M es un B-módulo libre de rango finito y M_{∞} es un \mathcal{O}_{ν} -retículo dentro del espacio vectorial de dimensión finita $M \otimes_B k_{\nu}$, donde k_{ν} es la completación de k = Frac(B) respecto a ν y \mathcal{O}_{ν} es el anillo de enteros.

- El rango de (M, M_{∞}) es el rango del módulo M.
- El grado se define comparando bases de M y M_{∞} .

Así, la categoría de fibrados vectoriales de un par \mathbb{P}^1 -algebraico (B, ν) cumple el teorema H-N.

En particular, para el par \mathbb{P}^1 -algebraico completo (B_e, ν_{dR}) de la curva de Fargues-Fontaine, los (B, ν) -pares solo son llamados B-pares. Aquí un fibrado vectorial es un par (M, M_{dR}) tal que

- M es un B_e -módulo libre de rango finito.
- M_{dR} es un B_{dR}^+ -retículo dentro de $M \otimes_{B_e} B_{dR}$.

La siguiente proposición relaciona las dos categorías antes mencionadas. Su demostración puede ser consultada en [15].

Proposición 26. La categoría de (B_e, ν_{dR}) -pares se identifica con la categoría $Vect(X^{FF})$ de fibrados vectoriales de la curva de Fargues-Fontaine.

Espacios vectoriales con filtraciones.

Dada una extensión de campos L/F, sea $VectFil_{L/F}$ la categoría de pares $(V, Fil^{\bullet}V_{L})$, donde V es un F-espacio vectorial de dimensión finita y Fil^{\bullet} es una filtración en $V_{L} = V \otimes_{F} L$ separada y exhaustiva.

- $rk(V, Fil^{\bullet}V_L) = \dim_F V$.
- $\deg(V, Fil^{\bullet}V_L) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \dim_L(gr^iV_L)$

Así, esta categoría cumple con el teorema H-N.

Isocristales.

Sea K campo perfecto de característica p y $K_0 = Frac(W(K))$. Un isocristal sobre K es un par (D, φ_D) , donde D es un K_0 -espacio vectorial de dimensión finita y $\varphi_D: D \to D$ es un isomorfismo φ -semilineal (esto es, $\varphi_D(ad) = \varphi(a)\varphi_D(d)$ para todo $a \in K_0$ y $d \in D$.)

- $rk(D, \varphi_D) = \dim_{K_0} D$.
- $\deg(D, \varphi_D) = -\deg^+ \det(D, \varphi_D)$, donde \deg^+ de un isocristal de rango uno (L, φ_L) se define escogiendo un elemento básico $e \in L$, luego $\varphi_L(e) = ae$ para algún $a \in K_0$ y $\det^+(L, \varphi_L) := \nu_p(a)$, ya que K_0 es campo de valuación discreta.

Así, esa categoría cumple con el teorema de H-N. A esta categoría se le suele denotar como $\varphi-Mod_{K_0}$.

Se
a $\lambda=\frac{d}{h}\in\mathbb{Q},$ donde(d,h)=1y h>0.Podemos definir un isocrista
l $(D_\lambda,\varphi_\lambda)\in\varphi-Mod_{K_0}$ como

- $D_{\lambda} = K_0^h$, con elementos básicos $e_1, ..., e_h$.
- $\varphi_{\lambda}: D_{\lambda} \to D_{\lambda}$ como el único endomorfismo semilineal que satisface:

$$\varphi_{\lambda}(e_i) = \begin{cases} e_{i+1}, & si \quad i = 1, ..., h - 1, \\ p^{-d}e_1, & si \quad i = h. \end{cases}$$

El isocristal $(D_{\lambda}, \varphi_{\lambda})$ tiene rango h, grado d y pendiente λ .

Lema 27. Sea $(D, \varphi_D) \in \varphi - Mod_{\mathbb{Q}_p}$ isocristal sobre \mathbb{F}_p . Entonces el par

$$((B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} D)^{\varphi=1}, B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} D)$$

es un fibrado vectorial (B_e, ν_{dR}) con rango y grado dado por el rango y grado del isocristal.

Este lema asocia a un isocristal fibrado un fibrado vectorial en X^{FF} , denotado por $\xi(D,\varphi_D)$. En particular, en el caso del isocristal $(D_\lambda,\varphi_\lambda)$ con $\lambda\in\mathbb{Q}$, escribimos $\mathcal{O}_{X^{FF}}(\lambda) := \xi(D_{\lambda}, \varphi_{\lambda})$. Por el lema, $\mathcal{O}_{X^{FF}}(\lambda)$ tiene rango h, grado d y pendiente λ si $\lambda = \frac{d}{h}$ con (d, h) = 1 y h > 0.

Teorema 28 (De clasificación de fibrados vectoriales en X^{FF} .). Sea E un fibrado vectorial en X^{FF}. Entonces existe una única sucesión de racionales $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m$ tales que E es isomorfo a

$$\bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{X^{FF}}(\lambda_{i}) = \bigoplus_{i=1}^{m} \xi(D_{\lambda_{i}}, \varphi_{\lambda_{i}}).$$

Corolario 29.

- El funtor ξ(-): φ Mod_{K0} → Vect(X^{FF}) es esencialmente sobreyectivo.
 Sea E un fibrado vectorial de X^{FF} y λ ∈ Q. Entonces E es semiestable de pendiente λ si y sólo si E es isomorfo a $\mathcal{O}_{X^{FF}}(\lambda)^m$ para algún $m \geq 1$.
- La categoría de fibrados vectoriales de X^{FF} semiestables y de pendiente cero equivalente a la categoría de \mathbb{Q}_p -espacios vectoriales de dimensión finita vía $V \mapsto V \otimes_{\mathbb{O}_n} \mathcal{O}_{X^{FF}}.$
- $\bullet \varphi ModFil_{K/K_0}$.

Esta es la categoría de los tripletes $(D, \varphi_D, Fil^{\bullet}D_K)$ donde

- D es un K_0 -espacio vectorial de dimensión finita.
- $\varphi_D: D \to D$, isomorfismo φ -lineal.
- Fil^{\bullet} es una filtración en $D_K := D \otimes_{K_0} K$ separada y exhaustiva.

Es decir, $(D, \varphi) \in \varphi - Mod_{K_0}$ y $(D, Fil^{\bullet}D_K) \in VectFil_{K_0/K}$. Definimos:

- $rk(D, \varphi_D, Fil^{\bullet}D_K) := \dim_{K_0} D.$
- $\deg(D, \varphi_D, Fil^{\bullet}D_K) := \deg(D, \varphi_D) + \deg(D, Fil^{\bullet}D_K).$

De esta forma, esta categoría cumple con el teorema de H-N.

Como $B_{cris} \subseteq B_{dR}$, si V es representación cristalina entonces V es de deRham y $D_{B_{dR}}(V) = D_{B_{cris}}(V) \otimes_{K_0} K$. Así el funtor

$$D_{cris}: Rep_{cris}(G_K) \to \varphi - ModFil_{K/K_0}$$

es completamente fiel.

Fontaine conjeturó que todo isocristal filtrado estaba en la imagen esencial de $Rep_{cris}(G_K)$ si y sólo si era débilmente admisible [7, Capítulo 8: classification des fibrés vectoriels: le cas F algébriquement clos], que en este caso, es equivalente a pedir que sea semiestable y de pendiente cero. Esto demuestra que

$$D_{cris}: Rep_{cris}(G_K) \to \varphi - ModFil_{K/K_0}^{w.a.},$$

donde w.a. denota "weakly admissible" (débilmente admisible) es una equivalencia de categorías. También es posible demostrar que la categoría de representaciones semiestables se puede describir como isocristales filtrados débilmente admisibles con operador de monodromía [7].

Finalmente, hemos llegado a uno de los objetivos de la teoría de Hodge p-ádica, describir clases de representaciones de Galois p-ádicas en términos de pura álgebra lineal.

Epílogo

El estudio de la curva de Fargues-Fontaine es actualmente un tema de investigación muy activo dentro del área de la geometría aritmética. Trabajos como los de Peter Scholze de perfectoides [19] o de Fargues respecto al programa de Langlands [12] son muestra del actual avance en este tópico. Otro punto de vista que particularmente estamos estudiando son los sistemas dinámicos de funciones racionales sobre la curva: estudiar puntos periódicos o los conjuntos de Fatou y Julia podrían llevarnos a descubrir aún más información acerca de este objeto matemático tan importante.

AGRADECIMIENTOS. El primer autor expresa su gratitud a CONAHCyT por la beca obtenida para estudiar el doctorado en el CIMAT y con el cual fue posible el desarrollo del presente artículo.

Referencias

- [1] Olivier Brinon and Brian Conrad. Cmi summer school notes on p-adic hodge theory. (2009).
- [2] Laurent Berger. Construction de (phi, gamma)-modules: représentations p-adiques et b-paires. Algebra and Number Theory, 2(1):91-120, (2008).
- [3] Xavier Caruso. An introduction to p-adic period rings. (2019).
- [4] CIMPA. Research school on hodge theory and p-adic hodge theory, (2021).
- [5] Pierre Colmez. Le programme de fontaine. L'Enseignement Mathématique, 65(3/4):487-531, (2019).
- [6] Gerd Faltings. p-adic hodge theory. J. Amer. Math. Soc, 1(1):255-299, (1988).
- [7] Laurent Fargues and Jean Marc Fontaine. Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge padique. Société mathématique de France, (2018).
- [8] Jean Marc Fontaine and Luc Illusie. p-adic periods: A survey. Université de Paris-sud, Département de mathématiques, (1990).
- [9] J-M Fontaine. p-adic periods and p-adic étale cohomology. In Current trends in arithmetical algebraic geometry, Proceedings of the AMS-IMS-SIAM joint summer research conference, Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1985, pages 179-207. Amer. Math. Soc., (1987).
- [10] Jean-Marc Fontaine. Le corps des périodes p-adiques. Astérisque, 223:59-111, (1994).
- [11] Jean-Marc Fontaine. Représentations p-adiques semi-stables. Astérisque, 223:113-184, (1994).
- [12] Laurent Fargues and Peter Scholze. Geometrization of the local langlands correspondence. arXiv preprint arXiv:2102.13459, (2021).
- [13] Serin Hong. Notes on p-adic hodge theory. (2020).
- [14] Maxim Kontsevich and Don Zagier. Periods. Springer, (2001).
- [15] Matthew Morrow. The Fargues-Fontaine curve and diamonds. Séminaire BOURBAKI, (1150), (2018).
- [16] Matthew Morrow. Raconte moi. . . la courbe de Fargues-Fontaine. Gazette des Mathematiciens, (163):36-41, (2020).
- [17] Jesus Rogelio Perez Buendia. A crystalline criterion for good reduction on semi-stable k3surfaces over a p-adic field. PhD thesis, Concordia University, (2014).
- [18] J. Rogelio. Pérez-Buendía. Curse: p-adic galois representations. https://youtu.be/-KoXxop6X1Y?feature=shared, CIMPA Research School on Hodge Theory and p-adic Hodge Theory. Online, CIMAT-Gto, México, (2021)
- [19] Peter Scholze. Perfectoid spaces and their applications. In Proceedings of the ICM, volume 2014, (2014).
- [20] Jean-Pierre Serre. Local Fields. Graduate Texts in Mathematics;67. Springer Verlag New York Inc, (1979).
- [21] O. Hyodo and K. Kato, "Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles," $Ast\tilde{A}$ @risque, vol. 223, pp. 221–268, 1994, [Paris: Soci \tilde{A} @t \tilde{A} @ Math \tilde{A} @matique de France, 1973-].

Dirección del autor:

Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT),

Unidad Mérida,

Parque Científico y Tecnológico de Yucatán Km 5.5 Carretera Sierra Papacal Chuburná Puerto Sierra Papacal; CP 97302, Mérida, Yucatán.

e-mail: jorge.robles@cimat.mx

Dirección del coautor:

Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT),

Unidad Mérida,

Parque Científico y Tecnológico de Yucatán Km 5.5 Carretera Sierra Papacal Chuburná Puerto Sierra Papacal; CP 97302, Mérida, Yucatán.

e-mail: rogelio.perez@cimat.mx