

# **Tesis de Licenciatura**

## **Generando Entrelazamiento en una cadena XY**

Christian Tomás Schmiegelow

**Director**

Raúl Dante Rossignoli

Presentada 30/06/2006

Última Revisión 22/12/2006

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



# Agradecimientos

- ◇ A Mamá, Pato y Clara. Por haberme acompañado con amor en este camino como lo hubieran hecho en cualquier otro que hubiera elegido.
- ☞ A Papá.
- ♣ A mis Amigos. Por ser un inconmesurable apoyo emocional. En especial a Mateo con quien aprendí mucha de la física que sé, tratando de explicársela como si fuese un niño.
- ♡ A Maik.
- ★ A todos mis Compañeros. No sólo porque no podría haber aprendido física sólo, sino porque son también mis amigos. En especial a Pablo con quien cursé los primeros años, a Patricia por su visión escéptica de la física, a Carlos y a Mauricio con quienes cursé casi toda la carrera y al Zeke por ser tan insoportablemente Zeke.
- ⊙ A mis compañeros de militancia de El Pelo de Einstein.
- ✕ A mis compañeros de casa Nati y Zaki.
- ⌘ A mis Profesores. Tanto a tres profesores muy especiales del secundario que me guiaron hacia aquí, como los docentes-investigadores de esta casa que fueron una guía incondicional desde que ingresé a la carrera en el 2001.
- ℞ A Raul Rossignoli. Por su calma cada vez que me equivoqué, por los dolores de cabeza que le debo haber dado, por su apoyo a pesar de mis idas y vueltas, por haber dictado la materia optativa “Intro. a la Comp. Cuántica y Teoría de la Información” y por el infinito esfuerzo revisando y corrigiendo errores en este trabajo.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>VII</b>
<b>I Nociones Preliminares</b>	<b>1</b>
<b>1. Entrelazamiento y Computación Cuántica</b>	<b>3</b>
1.1. Entrelazamiento y Correlaciones Clásicas . . . . .	3
1.2. Computación Cuántica . . . . .	5
1.2.1. Bits y qubits y compuertas . . . . .	5
1.2.2. Algoritmos . . . . .	8
1.3. Entrelazamiento y Computación Cuántica . . . . .	9
1.3.1. Separabilidad . . . . .	9
1.3.2. Estados de Bell . . . . .	10
1.3.3. Entrelazamiento y Computación Cuántica . . .	12
<b>2. Medidas de entrelazamiento</b>	<b>13</b>
2.1. Entropía - Estados Puros . . . . .	13
2.1.1. Definiciones . . . . .	14
2.1.2. Propiedades/Justificación . . . . .	15
2.1.3. Entropía de un qubit . . . . .	16
2.2. Entrelazamiento de Formación - Estados Mixtos . . . .	16
2.2.1. Definición . . . . .	17
2.2.2. Propiedades/Justificación . . . . .	17
2.3. Concurrencia . . . . .	18
2.3.1. Definición . . . . .	18
2.3.2. Propiedades/Justificación . . . . .	18
2.3.3. Cadena cíclica con paridad de espín . . . . .	19
2.3.4. Concurrencia de estados de Bell . . . . .	19
2.3.5. Concurrencia de uno con el Resto . . . . .	20

<b>II</b>	<b>Entrelazamiento en una Cadena XY</b>	<b>23</b>
<b>3.</b>	<b>Computación Cuántica en una cadena XY</b>	<b>25</b>
3.0.6.	El Hamiltoniano . . . . .	25
3.0.7.	La condición inicial . . . . .	26
3.0.8.	Paridad de espín . . . . .	26
3.1.	Cadenas XY Cortas . . . . .	27
3.1.1.	Dos qubits . . . . .	27
3.1.2.	Tres qubits . . . . .	30
<b>4.</b>	<b>Cadenas XY largas</b>	<b>35</b>
4.0.3.	Introducción . . . . .	35
4.1.	Diagonalización . . . . .	36
4.1.1.	Transformación de Jordan-Wigner . . . . .	36
4.1.2.	Transformación de Fourier Discreta . . . . .	38
4.1.3.	Transformación de Bogoliubov . . . . .	39
4.1.4.	Evolución Temporal y Valores Medios . . . . .	39
4.2.	Entrelazamiento . . . . .	41
4.2.1.	Generalidades . . . . .	41
4.2.2.	Entrelazamiento y Decoherencia . . . . .	43
4.2.3.	Resonancias . . . . .	47
4.2.4.	Tiempos cortos . . . . .	49
	<b>Conclusión</b>	<b>51</b>
<b>III</b>	<b>Apéndices</b>	<b>53</b>
<b>A.</b>	<b>La descomposición de Schmidt</b>	<b>55</b>
<b>B.</b>	<b>Paridad</b>	<b>57</b>
B.1.	Paridad y Subsistemas . . . . .	57
B.2.	Paridad de espín . . . . .	59
<b>C.</b>	<b>Transformada especial de Bogoliubov - BCS</b>	<b>61</b>
<b>D.</b>	<b>Decoherencia</b>	<b>63</b>

# Introducción

Desde 1935, cuando Einstein, Podolsky y Rosen presentaron un trabajo cuestionando la completitud de la mecánica cuántica, se reconoce que el entrelazamiento de sistemas cuánticos es una de las propiedades más intrigantes de la mecánica cuántica. En los últimos 20 años se han desarrollado técnicas, tanto experimentales como teóricas, que permiten utilizar esta propiedad como recurso para resolver problemas computacionales con eficiencias muy superiores a las que clásicamente se habían demostrado insuperables. En años recientes se han logrado también avances muy importantes en la comprensión y clasificación del entrelazamiento cuántico, aunque subsisten aun muchos puntos importantes por resolver e investigar.

Estudio en este trabajo la capacidad de generar entrelazamiento de una cadena de espines con acoplamiento de Heisenberg XY y un campo magnético uniforme a partir de un estado inicial en el que los espines están completamente alineados. Se encuentra que la capacidad de generar estados entrelazados no muestra un comportamiento monótono con el campo presentando, en cambio, “plateaus” y resonancias. También se muestra que, a pesar de que la anisotropía es necesaria para que se generen estados entrelazados, una mayor anisotropía no implica necesariamente mejores condiciones para generar entrelazamiento que sirva para usarse en una computadora cuántica.

Este trabajo está dividido en tres partes. En la primera se exponen nociones preliminares sobre entrelazamiento y computación cuántica necesarias para comprender el estudio específico de la cadena XY que se realiza en la segunda. La primeras dos partes están divididas en dos capítulos cada una. En el Capítulo 1 se da una introducción al concepto de entrelazamiento, una noción del formalismo de la computación cuántica y finalmente se discute la relación entre

estos dos. En el Capítulo 2 se presentan y discuten distintas medidas de entrelazamiento. La segunda parte empieza en el Capítulo 3 donde se presenta la cadena XY como una posible realización de una computadora cuántica, se comenta sobre las simetrías relevantes, se lo resuelve para dos casos simples y se muestra la capacidad de este sistema para generar entrelazamiento en estos casos. En el Capítulo 4 se resuelve la evolución temporal de la cadena XY en un caso mucho más general y se realizan diversas aproximaciones que permiten describir de manera simple su capacidad para generar entrelazamiento en distintos casos. Finalmente en la tercer parte se incluyen cuatro apéndices con el objetivo de ampliar algunos temas relevantes.

Los resultados obtenidos en este trabajo han sido aceptados para su publicación en la revista *Physical Review A* en un trabajo conjunto con Raul Rossignoli. En la publicación aparecen además resultados que incluyen: cadenas con cantidad par e impar de qubits, resonancia de pares entrelazados de paridad positiva, un estudio detallado del comportamiento para  $v = g$  y  $b = 0$  donde la evolución es estrictamente periódica y resultados de diagonalización directa para  $n = 4$ .



**Parte I**

**Nociones Preliminares**



# Capítulo 1

## Entrelazamiento y Computación Cuántica

La idea de hacer máquinas que calculen que se basen en las reglas de la Mecánica cuántica muchas veces se le atribuye a Richard Feynman. Sin embargo no fue hasta algunos años después de su muerte que, basados en los trabajos de Deutsch, independientemente Shor y Grover descubren algoritmos que permiten resolver más eficientemente algunos problemas que una computadora clásica. Estos trabajos fueron el puntapié inicial que llevó a armar un esquema en el que la Computación Cuántica resulta una opción viable. La computación cuántica explota un aspecto fundamental de la mecánica cuántica: el *entrelazamiento*.

### 1.1. Entrelazamiento y Correlaciones Clásicas

El día a día del mundo que percibimos puede ser bien descripto mediante la física clásica. En él observamos continuamente correlaciones entre eventos: el FMI impone, por medio del Gobierno local, una nefasta ley de educación superior - los estudiantes manifiestan, los estudiantes manifiestan - sale la policía a reprimir, etc; o pongo un disco de *Pixies* en el minicomponente - escucho *Where is my Mind*. De todos estos eventos hay algunos que está más correlacionados que otros. Tomemos el ejemplo del disco de *Pixies*. Si tengo 3 álbumes de esta banda pero en sólo uno está ese tema entonces hay una correla-

ción de 1/3 de escuchar el tema (suponiendo que el equipo anda bien y ninguna otra cosa sale mal). Si en cambio estoy escuchando *Where is my Mind* hay una correlación máxima, de valor 1, de que el disco que puse en el minicomponente sea el de *Pixies* y no otro porque sé que ese tema no lo tengo en ningún otro disco. Dos eventos clásicos están máximamente correlacionados cuando la existencia de uno implica la del otro y viceversa. Clásicamente este límite no puede superarse.

La mecánica cuántica es un conjunto de reglas que fueron desarrolladas para describir el comportamiento de objetos microscópicos que, como decía Heisenberg, funciona; es decir describe adecuadamente la realidad. Desde sus comienzos y hasta hoy en día la interpretación de estas reglas es tema de discusión. La interpretación de Copenhagen, a grande rasgos, dice: Un sistema cuántico evoluciona en una superposición de estados y cuando es medido por un objeto clásico *colapsa* a uno de los estados permitidos por el objeto clásico. Volviendo al caso de la música: supongamos que yo y el minicomponente somos sistemas cuánticos. Esto es que podemos estar en superposiciones de escuchar/no-escuchar *Where is my Mind* y de estar/no-estar puesto el disco correcto. Podemos estar, si nadie nos mide, realmente en ambos estados al mismo tiempo y no solamente en uno u otro. Ahora, supongamos que mi novio es un objeto clásico y me pregunta -¿Escuchaste *Where is my Mind*?-. Al hacerlo me está midiendo y yo *colapso* a uno de los estados clásicos que él me permite y le digo si o no. Lo mismo pasa si va a revisar el minicomponente: el ve o no ve el disco, pero no ve una superposición disco/no-disco porque el sólo permite disco o no-disco pero no superposiciones.

Siguiendo con este ejemplo y volviendo al tema de las correlaciones. Si yo y el minicomponente estuviésemos máximamente correlacionados en el sentido clásico estaríamos con certeza absoluta en alguno de los estados “disco y escucho”, “disco y no-escucho”, “no-disco y escucho” o “no-disco y no-escucho”, pero cuánticamente podemos estar con certeza absoluta en algún estado que sea una superposición entre, por ejemplo, “disco y escucho” y “no-disco y no-escucho”. Este tipo de estados está más correlacionado que los anteriores y no son admisibles en una interpretación clásica del mundo. A este tipo de correlaciones que van más allá de los límites de la física clásica las llamamos *Entrelazamiento*.

Para que todo esto tenga sentido tiene que haber algún objeto clásico que pueda medir o reconocer este tipo de superposiciones. Continuando con el ejemplo esto podría ser un amigo especial que no

pueda reconocer si estoy escuchando o no sino que reconozca si estoy en un estado escuchando/no-escuchando y que al ser medido colapse a este. El principio de incerteza aplicado a este ejemplo implica que no puede haber un aparato que mida simultaneamente superposiciones y estados “normales”. Es decir que si mi amigo tiene como estado permitido la superposición escucho/no-escucho le son prohibidos los estados escuchando y no escuchando por separado. Esto último por más raro que parezca en el contexto de este ejemplo, en física atómica puede involucrar simplemente rotar un instrumento de medida.

Esta intrigante propiedad de la mecánica cuántica fue señalada como una paradoja por Schrödinger, como una razón para decir que la mecánica cuántica no era completa por Einstein y sus “secuaces”<sup>1</sup>, y finalmente por muchos otros físicos como una de las propiedades fundamentales de la mecánica cuántica. En 1964 Bell[Bel87] estableció criterios matemáticos estrictos para los límites que pueden tener las correlaciones clásicas y propuso varios experimentos que se realizaron con éxito [AGR82][ADR82], en los que se miden correlaciones que superan las clásicamente permitidas, demostrando que eran incorrectas las suposiciones en las que se basaban las observaciones de “los reaccionarios” Einstein, Podolsky y Rosen. El tema del gato de Schrödinger fue recién totalmente comprendido cuando se desarrolló la teoría de la decoherencia<sup>2</sup>.

## 1.2. Computación Cuántica

Doy a continuación una breve descripción de algunos aspectos fundamentales de la Computación Cuántica que creo fundamentales para entender el contexto en el que fue pensado este trabajo. Para una exposición mucho más completa ver el libro *Quantum Computation and Quantum Information* de Nielsen Y Chuang [NC00] o las *Lecture Notes* de John Preskil [Pre].

### 1.2.1. Bits y qubits y compuertas

El mundo descrito por la mecánica cuántica admite estados que son superposición de los estados clásicamente permitidos. En este

---

<sup>1</sup>Einsten, Podolsky, Rosen[EPR35]

<sup>2</sup>Ver apéndice D.

sentido es natural pensar que una computadora cuántica tendrá entonces como variables estados que son superposición de los estados permitidos de una computadora clásica, esto es superposiciones de los valores que puede tener un bit: 0 o 1. A estas nuevas variables las llamamos qubits.

Los posibles estados de un bit clásico se rotulan simplemente con los números 0 y 1. En computación cuántica para indicar como se encuentra un qubit se debe indicar en que estado está el sistema cuántico que guarda esta variable. Una de las notaciones más comunes para indicar estados cuánticos es la notación de *bra-kets* de Dirac. En esta un sistema que está en estado  $x$  se lo rotula  $|x\rangle$ . Un qubit  $|Q\rangle$  que es una superposición de los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  de una computadora clásica se escribe cómo:

$$|Q\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \quad \text{donde} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (1.1)$$

Así como para sistemas cuánticos se generalizó la noción de bit a qubit, se generaliza la idea de compuertas lógicas.

### Compuertas de un qubit

La única compuerta lógica clásica de un bit no trivial que se puede definir es la NOT, que cambia el estado del bit. En computación cuántica se la generaliza diciendo que actúa linealmente sobre el estado. Si llamamos  $X$  a esta compuerta se tiene:

$$X |Q\rangle = X(\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) = \alpha |1\rangle + \beta |0\rangle \quad (1.2)$$

Si en vez de usar la notación de bra-kets utilizamos una matricial en la base computacional (la de los kets  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ ) la compuerta NOT se escribe como:

$$X \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{de modo que} \quad X \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Visto de esta manera es evidente que en computación cuántica podemos hacer otras compuertas de un qubit no triviales. En general como la compuerta, físicamente, es la evolución del sistema dada por un Hamiltoniano estas podrán ser todas las matrices unitarias de  $2 \times 2$ . Cualquiera de ellas que puede ser descompuesta en tres rotaciones y una fase.

En particular una compuerta muy relevante para la computación cuántica es la Hadamard  $H$ .

$$H \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ de modo que } H \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

o bien

$$H(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + \beta \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.5)$$

### Compuertas de varios qubits

Las compuertas de más de un qubit clásicas suelen tomar una cierta cantidad de bits de entrada y dar como resultado de una operación lógica una cantidad menor de bits. Estas no son reversibles en el sentido que al hacer la operación hay información que se pierde y la entropía del sistema aumenta<sup>3</sup>. Las compuertas cuánticas son, por lo general, definidas como la extensión reversible y lineal de su correspondiente clásico.

En particular presento una compuerta de dos qubits relevante: la *controlled not* (CNOT) es la extensión lineal de una compuerta que toma dos qubits y niega el segundo sólo si el primero esta en el estado  $|1\rangle$  y no cambia el primer qubit. Su representación matricial en la base computacional es:

$$U_{CN} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

### Compuertas Universales

La relevancia de la CNOT viene de que, al igual que con la compuertas clásicas AND OR y NOT puede construirse cualquier compuerta clásica, con una composición finita de CNOT y compuertas de un qubit puede aproximarse tanto como se desee cualquier compuerta cuántica. La demostración de lo enunciado esta didácticamente expuesta en el libro de Nielsen y Chuang [NC00] donde además se señalan las referencias a los trabajos en los cuales se demostró esto originalmente.

---

<sup>3</sup>Existen también lógicas clásicas reversibles pero las usuales no lo son.

### 1.2.2. Algoritmos

A groso modo hay tres casos de algoritmos eficientes en computación cuántica. Por un lado los basados en la transformada de Fourier discreta entre los cuales están el famoso algoritmo de factorización de Shor, algoritmos que encuentran periodos de funciones, estimadores de fases, etc. Por otro lado algoritmos de búsqueda como el de Grover y finalmente algoritmos de simulación de sistemas físicos complicados. Presentaré aquí la versión más simple de un algoritmo del primer tipo - el algoritmo de Deutsch - que no tiene ninguna importancia real en el sentido de la eficiencia pero es fácil de entender y muestra algunas de las ideas fundamentales<sup>4</sup>. A los tipos de algoritmos mencionados deben sumarse los, para nada menos importantes, códigos de teleportación cuántica mediante los cuales se pasa *toda* la información de un cierto estado a otro separado espacialmente del primero.

#### Procesamiento en paralelo

Como mencioné anteriormente el primer trabajo que propuso un algoritmo que una computadora cuántica puede resolver más eficientemente que una clásica fue el de Deutsch. Este es en realidad un algoritmo algo inútil pero igualmente significativo. Describo a continuación una versión simplificada y mejorada. La idea es tratar de encontrar si una función  $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$  es constante o no. Es decir si  $f(1) = f(0)$  o  $f(1) \neq f(0)$ . Clásicamente se requeriría “preguntarle” a  $f$  dos veces cual es su imagen. Osea calcular  $f(0)$  y luego  $f(1)$ . Cuánticamente veremos que con sólo “preguntarle” una vez basta. El algoritmo parte de un estado inicial de dos qubits.

$$|Q_0\rangle = |0\rangle |1\rangle \quad (1.7)$$

Se le aplica una compuerta Hadamard a cada uno de los qubits.

$$H_1 \otimes H_2 |Q_0\rangle = |Q_1\rangle = \left[ \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \left[ \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \quad (1.8)$$

Luego se aplica una compuerta  $U_f$  que evalúa una función<sup>5</sup> que al segundo qubit lo lleva a  $y \oplus f(x)$  y al primero no lo modifica (donde  $y$  es el valor del primer qubit y  $x$  del segundo y  $\oplus$  es la suma módulo 2).

<sup>4</sup>Para más detalle y otros algoritmos ver el libro de Nielsen y Chuang [NC00].

<sup>5</sup>Debe entenderse que esta función es lineal en la superposición de estados.



$$U_f |Q_1\rangle = |Q_2\rangle = \begin{cases} \pm \left[ \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \left[ \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \right] & \text{si } f(1) = f(0) \\ \pm \left[ \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \left[ \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \right] & \text{si } f(1) \neq f(0) \end{cases} \quad (1.9)$$

Por último se le aplica una compuerta Hadamard al primer qubit.

$$H_1 |Q_2\rangle = |Q_3\rangle = \begin{cases} \pm |0\rangle \left[ \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \right] & \text{si } f(1) = f(0) \\ \pm |1\rangle \left[ \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \right] & \text{si } f(1) \neq f(0) \end{cases} \quad (1.10)$$

Y ya está: midiendo el primer qubit se sabe si la función es constante o no. El argumento en contra de este procedimiento como computadora cuántica eficiente es que, a pesar de que uno sólo tiene que “preguntarle” a  $f$  cuanto vale sólo una vez, se deben usar dos qubits y aplicar Hadamards antes y después. Es cierto, este no es un circuito muy eficiente pero fue el primero e ilustra claramente la idea de procesamiento en paralelo de una computadora cuántica.

## 1.3. Entrelazamiento y Computación Cuántica

He dado hasta ahora una noción de lo que es el entrelazamiento y de problemas que la computación cuántica se propone resolver. El objetivo de esta sección es formalizar la idea de entrelazamiento y finalmente relacionarlo con computación cuántica.

### 1.3.1. Separabilidad

Cómo primera instancia en la formalización de las ideas sobre el entrelazamiento es fundamental introducir el concepto de estado separable. Un estado es no entrelazado cuando es separable y viceversa. Para hablar de entrelazamiento y separabilidad es obviamente necesario pensar en sistemas constituidos por más de una parte - subsistemas- ya que sino no habría entre que generar entrelazamiento o que separar de que. Es decir algo no puede estar entrelazado consigo mismo o separado de si mismo.

Un sistema de objetos distinguibles<sup>6</sup> es separable si su estado, descrito por un ket  $|\psi\rangle$ , puede ser escrito como un producto directo de los kets que describen cada subsistema<sup>7</sup>. De modo que un estado separable puede ser escrito en alguna base de la forma.

$$|\psi\rangle = |m_1\rangle_1 |m_2\rangle_2 \dots |m_n\rangle_n \quad (1.11)$$

$$= |m_1 m_2 \dots m_n\rangle \quad (1.12)$$

Un estado es no separable o entrelazado si no puede escribirse de esta manera.

## Separabilidad - Matrices densidad

La definición anterior anterior de estados separables es válida sólo para estados puros. Para describir estados mixtos es necesario introducir el formalismo de la *matriz densidad*. En términos de matrices densidad un sistema de dos componentes  $A$  y  $B$  descrito por una matriz densidad  $\rho$  es separable si [Wer89]

$$\rho = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \rho_A^{\alpha} \otimes \rho_B^{\alpha} \quad ; \quad q_{\alpha} > 0 \quad (1.13)$$

Esto implica que un estado general (puro o mixto) es separable si puede ser escrito como una superposición estadística de estados puros separables. Es decir si existe alguna base en la cual puede ser escrito de esta manera.

### 1.3.2. Estados de Bell

Un caso muy importante de estados entrelazados son los que se llaman estados de Bell, que a veces se esconden bajo los seudónimos de pares o estados EPR<sup>8</sup>. Los estados de Bell son estados de un sistema compuesto por dos subsistemas *-sistema bipartito-* de dimensión

<sup>6</sup>Siempre consideraremos que los objetos que se describen son distinguibles. Esta suposición tiene sentido en el marco de la computación cuántica donde se requiere poder distinguir un qubit de otro. Por más que usualmente se piensa en usar algún grado de libertad de partículas idénticas como qubit se considera que cada una está confinada espacialmente. La definición de estado separable para un sistema de partículas indistinguibles es distinta a la que se da aquí.

<sup>7</sup>El subsistema  $i$  en el estado  $m_i$  es descrito por el ket  $|m_i\rangle_i$ . En el caso de qubits los  $m_i$  pueden valer sólo 0 o 1.

<sup>8</sup>Nombre debido a los “reaccionarios” Einstein, Podolsky y Rosen

dos. Estos son:

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.14a)$$

$$|\beta_{01}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.14b)$$

$$|\beta_{10}\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.14c)$$

$$|\beta_{11}\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.14d)$$

Los estados de Bell son de gran importancia ya que, como veremos en la sección 2.1, estos son máximamente entrelazados en el sentido que en un sistema bipartito de dimensión dos no hay estados que tengan mayor entrelazamiento que estos. Además son cuatro y son ortonormales de modo que son una buena base para este sistema. Por último menciono que se los usa como unidad de medida de entrelazamiento: un estado de Bell tiene un *ebit* de entrelazamiento.

### Estados de Bell y compuertas

Es fácil generar estados entrelazados de Bell a partir estados no entrelazados usando las compuertas descritas en la sección 1.2. Por ejemplo si partimos del estado  $|11\rangle$  y aplicamos una Hadamard al primer qubit se obtiene  $(|0\rangle - |1\rangle)|0\rangle/\sqrt{2}$ , que todavía es separable. Si a continuación se aplica una CNOT se obtiene  $(|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$  que es el estado entrelazado de Bell  $|\beta_{11}\rangle$ . De este mismo modo, cambiando los estados iniciales, se pueden generar todos los estados de Bell.

Del procedimiento anterior se ve que quien realmente “genera” el entrelazamiento es la compuerta CNOT. Sin embargo la aplicación de la compuerta CNOT directamente sobre el estado  $|11\rangle$  lo lleva al  $|10\rangle$  que tampoco es entrelazado. Volviendo a las ideas de la introducción esto puede explicarse de la siguiente manera. El estado  $|11\rangle$  tiene correlaciones clásicas entre el valor de cada qubit. La compuerta CNOT sobre este cambia las correlaciones entre un qubit y el otro. Es decir, al alimentar la CNOT con estados de la base computacional esta los hace interactuar como sistemas clásicos y no genera entrelazamiento. En cambio si alimentamos a la CNOT con un estado que es superposición de estados en la base computacional esta reconoce las características cuánticas del sistema y, al hacerlos interactuar, gene-

ra entrelazamiento. El entrelazamiento se genera en la interacción de sistemas cuánticos.

### 1.3.3. Entrelazamiento y Computación Cuántica

El algoritmo de procesamiento paralelo presentado en la sección 1.2 puede parecer un ejemplo bastante malo a los fines de mostrar cómo la computación cuántica usa el entrelazamiento como recurso. Explicaré ahora porque no es tan así y de este modo trato de dar una idea del rol que cumple el entrelazamiento en los algoritmos de computación cuántica. Las bases de la observación mencionada se basa en que en todos los pasos del algoritmo los estados son separables (ver ecuaciones 1.7, 1.8, 1.9, 1.10). Sin embargo examinando la forma que tiene  $U_f$  por ejemplo para el caso en que  $f(1) = 1$  y  $f(0) = 0$  se encuentra que es exactamente una compuerta CNOT y que en los otros casos no es más que composiciones CNOTs con Hadamards. Más aún los estados a los que se les aplica  $U_f$  no le son propios de modo que  $U_f$  los hace interactuar como objetos cuánticos y no clásicos. A pesar de que no se genera entrelazamiento en ninguna etapa del proceso la interacción entre los qubits es de origen cuántico y es esta la que permite realizar la tarea del modo que se hace. Es más, es posible que este algoritmo no sea realmente eficiente debido a no hay estados entrelazados de por medio.

Finalmente hago énfasis en que cualquier algoritmo puede descomponerse en CNOTs y compuertas de un qubit y, en particular, prácticamente todos los algoritmos eficientes de computación cuántica usan los CNOTs para generar estados entrelazados. El rol que cumple el entrelazamiento en la computación cuántica ha sido muy discutido en particular en torno a las realizaciones que se basan en técnicas de NMR -resonancia magnética nuclear-[LP01]. Contrariamente el rol del entrelazamiento en los códigos de teleportación es fundamental.

## Capítulo 2

# Medidas de entrelazamiento

### **¿Que se espera de una medida de entrelazamiento?**

Una medida de correlaciones puramente cuánticas. Es decir que distinga entre correlaciones cuánticas y clásicas y sólo considere las de origen cuántico. Una medida que distinga entre estados separables y no separables. En este camino se han dado grandes avances en los últimos 10 años. No se ha llegado a encontrar una medida universal de entrelazamiento aún. Por ejemplo Peres[Per96] encontró un criterio de separabilidad que es necesario pero no suficiente. Se han propuesto varias medidas aditivas y no aditivas[GG01]. En este trabajo me concentraré en dos medidas aditivas: la entropía de von Neumann que sirve sólo para estados puros, y el entrelazamiento de formación que sirve para estados mixtos[BDSW96] y coincide con la anterior para estados puros. A pesar de que el entrelazamiento de formación es muy difícil de calcular para un caso general Hill y Wootters [HW97] encontraron una forma explícita de calcularla para un par de qubits como función de una cantidad que llamaron Concurrencia. En pos de unificar medidas simples de entrelazamiento damos aquí un paso más proponiendo una medida equivalente a la entropía de un qubit que sea comparable a la Concurrencia.

### **2.1. Entropía - Estados Puros**

La entropía de von Neumann de un subsistema es una buena medida de entrelazamiento para estados puros. Mide el entrelazamiento entre dos subsistemas sin importar su dimensión. Daremos a conti-

nuación la definición, luego justificaremos porque ésta es adecuada y finalmente estudiaremos algunos ejemplos.

### 2.1.1. Definiciones

La entropía de von Neumann adimensional<sup>1</sup> de un sistema cuántico caracterizado por una matriz densidad  $\rho$  se define como:

$$S(\rho) = -Tr[\rho \log_2 \rho] \quad (2.1)$$

La matriz densidad reducida de un subsistema se define como traza parcial sobre todas las variables que no pertenecen al subsistema.

$$\rho_{sub} = Tr_{\notin sub}[\rho] \quad (2.2)$$

Supongamos un sistema bipartito, que puede ser dividido en dos subsistemas disjuntos  $A$  y  $B$ . Toda la información del estado de cada subsistema está en las matrices densidad reducidas ( $\rho_A$  y  $\rho_B$ ) de cada subsistema.

$$\rho_A = Tr_B[\rho_{AB}] \quad ; \quad \rho_B = Tr_A[\rho_{AB}] \quad (2.3)$$

La entropía de un subsistema  $A$  se define análogamente a la entropía para el sistema entero pero con la matriz reducida  $\rho_A$  en vez de la matriz densidad entera  $\rho$ .

$$S(\rho_A) = -Tr[\rho_A \log_2 \rho_A] \quad ; \quad S(\rho_B) = -Tr[\rho_B \log_2 \rho_B] \quad (2.4)$$

Además es inmediato ver, usando las propiedades de la descomposición de Schmidt (el apéndice A) que los autovalores no nulos de  $\rho_A$  y  $\rho_B$  son iguales de modo que sus entropías son iguales  $S(\rho_A) = S(\rho_B)$ . Se puede definir una buena medida de entrelazamiento  $E(\rho_{AB})$  entre dos subsistemas  $A$  y  $B$ , que forman un estado puro, como la entropía de cualquiera de los subsistemas.

$$E(\rho_{AB}) = S(\rho_A) = S(\rho_B) \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup>En el contexto de Teoría de la Información Cuántica se la suele definir adimensional y en base 2 para que, como medida de desorden, valga 1 para un qubit completamente desordenado y 0 para uno completamente ordenado.

### 2.1.2. Propiedades/Justificación

Doy a continuación una serie de propiedades de la entropía de un subsistema, que justifican su elección como medida de entrelazamiento entre subsistemas de un estado puro. Algunas de estas las ideas salen de un resumen hecho por Bennett et. al. [BDSW96].

**El entrelazamiento de  $A$  con  $B$  es igual al de  $B$  con  $A$ .** Esto se desprende directamente de la definición que considera un sistema bipartito puro y de la observación hecha anteriormente sobre los autovalores de los subsistemas. Osea  $S(\rho_A) = S(\rho_B)$ .

**Para estados separables  $E(\rho_{AB}) = 0$ .** Si un estado puro es separable  $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ , donde  $\rho_A$  y  $\rho_B$  son estados puros, de modo que  $E(\rho_{AB}) = S(\rho_A) = S(\rho_B) = 0$  dado que la entropía de un estado puro es cero (ver apéndice A).

**Los estados de Bell están máximamente entrelazados.** Un cálculo directo conduce a  $E(|\beta_{ij}\rangle \langle \beta_{ij}|) = 1, \forall i, j$

**Es aditiva  $E(\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \dots \rho_n) = E(\rho_1) + E(\rho_2) + \dots E(\rho_n)$ .** El entrelazamiento de sistemas un conjunto de sistemas independientes es la suma del entrelazamiento de cada sistema.<sup>2</sup>

**$E(\rho_{AB})$  se conserva frente a operaciones locales unitarias.** Transformaciones locales del tipo  $U = U_A \otimes U_B$  no cambian el entrelazamiento entre los subsistemas [BBPS96].

**$E(\rho_{AB})$  no se incrementa con operaciones locales no unitarias.** Transformaciones locales no unitarias, como mediciones, sólo pueden disminuir el entrelazamiento pero no incrementarlo.

**El entrelazamiento puede diluirse o concentrarse<sup>3</sup>** Esto es: realizando solamente operaciones locales en cada subsistema y permitiendo comunicación clásica entre ellos -LOCC<sup>4</sup>- se puede, a partir de  $n$  copias de  $\rho_{AB}$ , preparar  $m$  sistemas idénticos  $\rho'_{AB}$  con eficiencia  $m/n \approx E(\rho_{AB})/E(\rho'_{AB})$  en el sentido asintótico de  $n$  grande.[BBPS96]

<sup>2</sup>Algunos autores[GG01] argumentan que no es necesario exigir aditividad para una medida de entrelazamiento.

<sup>3</sup>Esta propiedad es la base teórica utilizada para construir otras medidas de entrelazamiento como entropía de formación y la herramienta fundamental de diversos códigos corrección de errores.

<sup>4</sup>LOCC - Por sus siglas en inglés *Local Operations and Classical Communication*

### 2.1.3. Entropía de un qubit

La entropía de un qubit es una medida del entrelazamiento de ese qubit con el resto del sistema, por eso la llamaré entrelazamiento de uno con el resto.

La matriz reducida de un qubit siempre puede escribirse en la base computacional como:

$$\rho_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ b^* & 1-a \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

y tiene por autovalores  $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{(1-2a)^2 + |2b|^2} \right)$  de modo que la entropía de un subsistema arbitrario de un qubit es

$$\begin{aligned} S(\rho_1) &= -\lambda_+ \log \lambda_+ - \lambda_- \log \lambda_- \\ &= -\lambda_+ \log \lambda_+ - (1 - \lambda_+) \log (1 - \lambda_+) \end{aligned} \quad (2.7)$$

En el caso que el sistema completo tenga paridad de espín definida (ver apéndice B) se tiene que  $b = 0$  y la entropía sólo depende sólo de  $a$  y es simplemente

$$S(\rho_1) = -a \log a - (1-a) \log(1-a) \quad (2.8)$$

Además  $a = \langle S_z \rangle + 1/2$  de modo que si  $\rho_1$  conmuta con  $P$  alcanza con conocer  $\langle S_z \rangle$  para obtener una medida de la entropía.

## 2.2. Entrelazamiento de Formación - Estados Mixtos

El entrelazamiento de Formación es una buena medida de entrelazamiento para estados mixtos[BDSW96]. Mide el entrelazamiento entre dos subsistemas sin importar su dimensión. Tiene la inconveniencia de ser muy difícil de calcular. Es una extensión de la entropía, como medida de entrelazamiento, para estados mixtos.

La idea detrás de la definición se basa en los mecanismos de destilación y dilución mencionados en la sección anterior y la idea egipcia elegir una unidad estandar de referencia, así como el kilogramo o el metro patrón. Se toma como unidad estándar de referencia de entrelazamiento el entrelazamiento de un singlete puro. Por mecanismos de destilación se pueden generar  $n$  singletes puros a partir de  $m$  copias de un estado mixto o bien diluyendo se generan  $m$  estados



mixtos a partir de  $n$  singletes puros. El entrelazamiento de formación de un estado es el cociente  $m/n$  en el sentido asintótico de  $n$  grande.

### 2.2.1. Definición

Para un sistema bipartito puro el entrelazamiento de formación  $E(\rho_{AB})$  es la entropía de von Neumann de uno de los subsistemas.

$$E(\rho_{AB}) = S(\rho_A) = S(\rho_B) \quad (2.9)$$

Para un ensamble de sistemas bipartitos puros  $\mathcal{E} = \{p_i, \rho_{AB}^i\}$  el entrelazamiento de formación  $E(\mathcal{E})$  se define como el promedio de los entrelazamientos de formación de cada estado  $\rho_{AB}^i$  pesadas con la probabilidad  $p_i$  del estado.

$$E(\mathcal{E}) = \sum_i p_i E(\rho_{AB}^i) \quad (2.10)$$

Para un sistema bipartito mixto  $\rho_{AB}$  el entrelazamiento de formación  $E(\rho_{AB})$  se define como el mínimo de los  $E(\mathcal{E})$  sobre todos los posibles ensambles  $\mathcal{E} = \{p_i, \rho_{AB}^i\}$  que representen al estado mixto  $\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_{AB}^i$ .

$$E(\rho_{AB}) = \min_{\mathcal{E}} \sum_i p_i E(\rho_{AB}^i) \quad (2.11)$$

### 2.2.2. Propiedades/Justificación

En el trabajo de Bennett et. al.[BDSW96] en el que proponen al entrelazamiento de formación como medida de entrelazamiento demuestran que para generar un estado bipartito  $\rho_{AB}$  sólo a partir de operaciones locales y comunicación clásica entre los subsistemas estos deben compartir el equivalente a  $E(\rho_{AB})$  singletes puros. El entrelazamiento de formación  $E(\rho_{AB})$  es la cantidad de entrelazamiento necesaria para *formar*  $\rho_{AB}$ . Además demuestran que  $E(\rho_{AB})$  no puede incrementarse con ningún tipo de operaciones locales y comunicación clásica. Es decir el entrelazamiento de formación tiene las mismas propiedades (ver sección 2.1.2) que la entropía pero para estados mixtos.

## 2.3. Concurrency

La concurrency es una medida de entrelazamiento derivada a partir del Entrelazamiento de Formación entre un par de subsistemas de dimensión 2 cada uno. Tiene la bondad de que es fácil de calcular. Fue originalmente propuesta por S. Hill y W.K. Wootters [HW97] y refinada por W.K. Wootters [Woo98].

### 2.3.1. Definición

La concurrency  $C$  de un sistema arbitrario de dos qubits  $i, j$  se define como:

$$C = \text{Max}[2\lambda_m - \text{Tr}R, 0] \quad ; \quad R = [\rho_2^{1/2} \tilde{\rho} \rho_2^{1/2}]^{1/2} \quad (2.12)$$

Donde  $\rho_2 = \text{Tr}_{\{i,j\}}[\rho]$  (traza parcial sobre todas las variables que no son  $i, j$ );  $\lambda_m$  es la máximo autovalor de  $R$ ; y  $\tilde{\rho} = 4S_i^y S_j^y \rho_2^* S_i^y S_j^y$  (matriz densidad  $\rho_2$  con los espines invertidos).

A los efectos del cálculo de la concurrency es equivalente usar la raíz de los autovalores de la matriz *no* hermítica  $\tilde{\rho} \rho_2$  ya que las cuentas son más simples y los resultados los mismos. En este sentido, si  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  son las raíces de estos autovalores en orden decreciente la concurrency es simplemente<sup>5</sup>

$$C = \text{Max}[\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0] \quad (2.13)$$

### 2.3.2. Propiedades/Justificación

En los trabajos [HW97],[Woo98] Hill y Wootters demuestran que la entropía de formación para un estado arbitrario de 2 qubits es una función monótonamente creciente de la concurrency y por ende proponen usarla como medida de entrelazamiento. Explicitamente el resultado que obtienen es que la entropía de formación es

$$\begin{aligned} E(M) &= h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right) \\ h(a) &= -a \log a - (1 - a) \log(1 - a) \end{aligned} \quad (2.14)$$

---

<sup>5</sup>Esta ecuación también vale para los autovalores de  $R$ .

### 2.3.3. Cadena cíclica con paridad de espín

Más adelante estudiaremos una cadena cíclica cuyo estado tiene paridad definida. En este caso la matriz densidad de dos qubits en la base computacional se escribe<sup>6</sup>:

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d^* \\ 0 & b & e & 0 \\ 0 & e & b & 0 \\ d & 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Un cálculo directo conduce al resultado:

$$C = 2 \text{ Max}[|e| - \sqrt{ac}, |d| - b, 0] \quad (2.16)$$

Donde sólo uno de los valores puede ser positivo ya que la positividad de  $\rho_2$  implica que  $|e| \leq b$  y  $|d| \leq \sqrt{ac}$ .

Es importante también tener en cuenta como reconstruir  $\rho_2$  a partir de los valores medios de los operadores relevantes. En este sentido se calculan directamente como  $\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}[\hat{O}\rho_2]$  los valores medios.

$$\begin{aligned} \langle S_i^z \rangle &= \frac{1}{2}(a - c) \quad ; \quad \langle S_i^z S_j^z \rangle = \frac{1}{4}(a - 2b + c) \\ \langle S_i^+ S_j^- \rangle &= e \quad ; \quad \langle S_i^+ S_j^+ \rangle = d \end{aligned} \quad (2.17)$$

La ecuación que falta sale de la condición  $\text{Tr}[\rho_2] = 1$ ; de este modo  $1 = a + 2b + c$ . Estas son todas las herramientas necesarias para reconstruir  $\rho_2$  y de este modo la concurrencia de pares.

### 2.3.4. Concurrencia de estados de Bell

Los estados de Bell tienen todos máxima concurrencia  $C = 1$ . Para los estados mixtos que conmutan con la paridad de espín (ver apéndice B) vemos que si el término de 2.16 que da a lugar a la concurrencia es  $|d| - b$  entonces el entrelazamiento corresponde a un estado par mientras que si el término relevante es  $|e| - \sqrt{ac}$  corresponde a uno impar. La paridad de espín resulta muy útil para clasificar los estados y el tipo de entrelazamiento de pares en los sistemas a estudiar.

<sup>6</sup>Que haya términos iguales en la diagonal de la matriz es debido a la simetría cíclica de la cadena, los términos nulos son debido a la simetría de paridad (ver apéndice B).

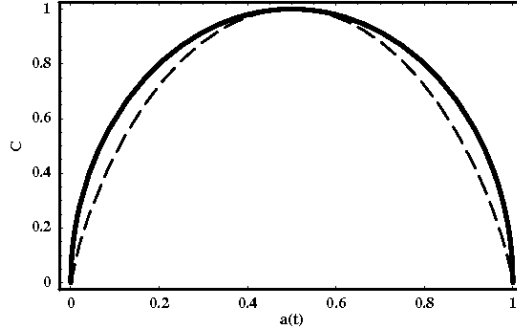


Figura 2.1: Concurrencia  $2\sqrt{a(1-a)}$  (línea sólida) y entrelazamiento de formación  $h(a) = -a \log a - (1-a) \log(1-a)$  (línea punteada) como función de  $a$

### 2.3.5. Concurrencia de uno con el Resto

Tanto el entrelazamiento de formación de un par como el de uno con el resto se escriben como:

$$h(a) = -a \log a - (1-a) \log(1-a) \quad (2.18)$$

donde para el entrelazamiento de un par  $a = (1 + \sqrt{1-C^2})/2$  y para el entrelazamiento de uno con el resto  $a = \lambda_+$  o  $a = \lambda_-$ . El entrelazamiento de formación de un par se reduce a la entropía de un qubit en el caso en que el par es un estado puro. En este sentido ambas medidas son comparables pero tienen la desventaja de que haya logaritmos de por medio.

Debido a que  $C = 2\sqrt{a(1-a)}$  y que como fue señalado anteriormente  $C$  y  $h(a)$  son funciones monótonamente crecientes una de la otra puede definirse la concurrencia de uno con el resto de este modo pero usando  $a = \lambda_+$ .

$$C_1(M) = 2\sqrt{a(1-a)} = 2\sqrt{\lambda_+(1-\lambda_+)} \quad (2.19)$$

$$C_2(M) = 2\sqrt{a(1-a)} = C \quad (2.20)$$

Donde hemos acuñado los símbolos  $C_1$  y  $C_2$  para referirnos a las medidas de entrelazamiento de uno con el resto y de pares respectivamente. En lo que continúa usaré los términos entrelazamiento y concurrencia indiscriminadamente para referirme siempre a estas medidas.

Un último comentario que merece la atención es la forma de la función  $2\sqrt{a(1-a)}$ . En la figura 2.1 se muestra esta función como la

---

alternativa a  $h(a)$ . Ambas están definidas en el intervalo  $0 \leq a \leq 1$  y tienen un máximo en  $a = 1/2$  donde valen 1.



**Parte II**

**Entrelazamiento en una  
Cadena XY**





## Capítulo 3

# Computación cuántica en una cadena XY

De los muchos posibles sistemas que se podrían elegir para hacer computación cuántica, y sobre los cuales se esta investigando actualmente [roa02][NC00] , algunos pueden ser descriptos aproximadamente con Hamiltonianos XY. En particular estos podrían ser de NMR(resonancia magnetica nuclear), de Estado Sólido (basados en espín cómo en “Quantum dots”) o superconductores. En este sentido se ha estudiado el entrelazamiento de estados térmicos para este tipo de cadenas [RC05]. También se han propuesto esquemas mediante los cuales se podrían implementar compuertas cuánticas en cadenas de este tipo de sistemas[BB03].

### 3.0.6. El Hamiltoniano

El sistema que estudié es una cadena cíclica de  $n$  espines interactuando por medio de acoplamientos de Heisenberg del tipo XY a primeros vecinos en presencia de un campo magnético uniforme y constante perpendicular a la dirección de las interacciones. El Hamiltoniano para este sistema es

$$H = \sum_{i=1}^n [bS_i^z - v_x S_i^x S_{i+1}^x - v_y S_i^y S_{i+1}^y] \quad (3.1)$$

donde  $n+1 \equiv 1$ . Definiendo los operadores usuales de subida  $S^+$  y de bajada  $S^-$  como:

$$S_i^+ = S_i^x + iS_i^y \quad ; \quad S_i^- = S_i^x - iS_i^y \quad (3.2)$$

el Hamiltoniano queda expresado como:

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{i=1}^n [bS_i^z - v(S_i^+ S_{i+1}^- + S_{i+1}^+ S_i^-) - g(S_i^+ S_{i+1}^+ + S_{i+1}^- S_i^-)] \\
 &= \sum_{i=1}^n [bS_i^z - (vS_i^+ S_{i+1}^- + gS_i^+ S_{i+1}^+ + h.c.)]
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Donde  $(v, g) = (v_x \pm v_y)/4$ . A  $v$  lo llamaré parámetro de “hopping” y a  $g$  anisotropía.

### 3.0.7. La condición inicial

En todos los casos estudiaré la evolución temporal del entrelazamiento de un sistema que inicialmente tiene todos los espines alineados antiparalelos al campo magnético. Tiene sentido estudiar esta condición inicial ya que es experimentalmente muy fácil de generar. Un campo magnético suficientemente fuerte siempre va a alinear los espines en una misma dirección. La función de onda a  $t = 0$  es

$$|\Psi(0)\rangle = |\downarrow\downarrow \dots \downarrow\rangle \tag{3.4}$$

el estado del sistema como función de  $t$  es (se asume en lo sucesivo  $\hbar = 1$ )

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\downarrow\downarrow \dots \downarrow\rangle \tag{3.5}$$

### 3.0.8. Paridad de espín

#### Paridad y Hamiltoniano

Es simple ver que Hamiltoniano conmuta con el operador paridad definido en el apéndice B.2.

$$P = e^{i\pi(\sum_i S_i^z + n/2)} \tag{3.6}$$

Recordemos que este operador distingue la paridad de un estado si hay una cantidad par o impar de espines para “arriba”. El Hamiltoniano tiene términos  $S_i^z$  es evidente que conmutan con  $P$ . Tiene también términos tipo  $S_i^+ S_{i+1}^-$  y  $S_i^+ S_{i+1}^+$ . Los primeros tampoco cambian la paridad ya que “suben” un espín y “bajan” otro sin alterar la cantidad de espines que hay “arriba”. Osea, sin modificar la paridad.

Los segundos “suben” dos espines por lo que tampoco cambia la paridad. Como ningún término del Hamiltoniano cambia la paridad de una función de onda dada se tiene que:

$$[P, H] = 0 \quad (3.7)$$

### Paridad y la evolución temporal

El estado inicial conmuta con  $P$  (tiene paridad definida). Esto se ve directamente de su definición 3.4. Como  $P$  conmuta con  $H$  y con  $\rho(0)$  se obtiene inmediatamente que  $\rho(t)$  tiene paridad definida para cualquier  $t$ .

## 3.1. Diagonalización directa: Entrelazamiento en cadenas cortas

### 3.1.1. Dos qubits

Empezaremos estudiando el caso simple de 2 qubits. Por las razones mencionadas en la sección 3.0.8 el sistema evolucionará dentro del subespacio de paridad definida que contiene al estado inicial  $|\downarrow\downarrow\rangle$ . Este es el subespacio de paridad positiva. En la base normal de autovalores de  $S_z$  ( $|\uparrow\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\downarrow\rangle$ ) el Hamiltoniano en forma matricial es:

$$H = \begin{pmatrix} b & -g \\ -g & -b \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

que tiene autovalores  $E_{\pm} = \pm\lambda$  con

$$\lambda = \sqrt{b^2 + g^2} \quad (3.9)$$

de modo que la evolución temporal del sistema, dada por la ecuación 3.5, es

$$|\Psi(t)\rangle = i\frac{g}{\lambda} \sin(\lambda t) |\uparrow\uparrow\rangle + \left[ \cos(\lambda t) + i\frac{b}{\lambda} \sin(\lambda t) \right] |\downarrow\downarrow\rangle \quad (3.10)$$

En este caso al haber sólo dos qubits el entrelazamiento de pares es el mismo que el de uno con el resto:  $C_1 = C_2$ . Para calcularlo es necesario

conocer la función  $a(t)$  (ver sección 2.3.5). Esta es simplemente una lorenziana modulada con centro en  $b = 0$ .

$$a(t) = \frac{g^2}{b^2 + g^2} \sin^2(\lambda t) \quad (3.11)$$

y su máximo se da para  $t = \frac{(2m+1)\pi}{2\lambda}$ ,  $m \in \mathcal{R}$

$$a_m = \frac{g^2}{b^2 + g^2} \quad (3.12)$$

El estado máximamente entrelazado de dos qubits (se da cuando  $a(t) = 1/2$ ). Si  $a_m > 1/2$  siempre se logra un estado de Bell para  $t_m = \lambda^{-1} \arcsin((2a_m)^{-1/2})$ ; este caso se da cuando  $|b|/g < 1$ . Si  $a_m < 1/2$  nunca se llega a generar un estado de Bell perfecto (sin ruido), el entrelazamiento máximo se da para  $t_m = \pi/2\lambda$  cuando  $a(t) = a_m$ . La figura 3.1.1 muestra el entrelazamiento máximo  $2\sqrt{a(1-a)}$  alcanzado en función de  $b/g$ . Se observa una meseta estricta *-plateau-* para  $|b|/g < 1$  y un comportamiento asintótico para  $|b|/g \gg 1$  de la forma  $2g/|b|$ . El entrelazamiento en este caso no depende del parámetro de “hopping”  $v$  sino que sólo depende de la relación entre la anisotropía de la interacción  $g$  y el campo magnético  $b$ .

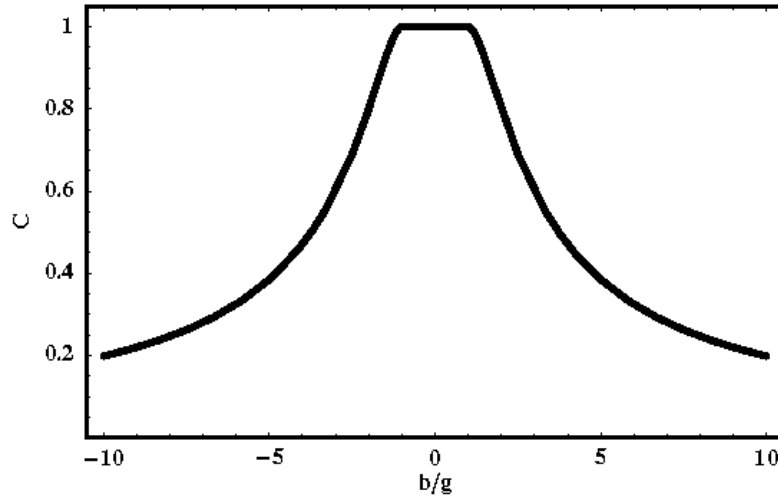


Figura 3.1: Entrelazamiento  $C_{1,2}$  máximo como función de  $b/g$  para dos qubits.

Veamos las características más importantes de la evolución temporal para distintos rangos de  $b/g$ . De la ecuación 3.10, que rige la evolución temporal de este sistema y de la condición  $a(t) = 1/2$  se ve

que los estados máximamente entrelazados que se pueden obtener son

$$\pm \frac{i}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\rangle + e^{\pm i\phi} |\downarrow\downarrow\rangle) \quad ; \quad \cos \phi = \frac{b}{g} \quad (3.13)$$

Este estado no es ninguno de los estados de Bell en la base normal (1.14) pero tiene el mismo entrelazamiento que un estado normal de Bell y tiene paridad positiva, no es más que un estado de Bell rotado y con una fase. Además se ve claramente, y puede verificarse con las figuras 3.2, que para  $b/g \gg 1$  el término relevante es el que tiene al estado inicial  $|\downarrow\downarrow\rangle$  y por lo tanto el entrelazamiento es pequeño; mientras que para  $b/g < 1$  los términos relevantes son los que tienen los senos, que multiplican tanto a  $|\downarrow\downarrow\rangle$  como a  $|\uparrow\uparrow\rangle$ , de modo que efectivamente se genera un estado de Bell.

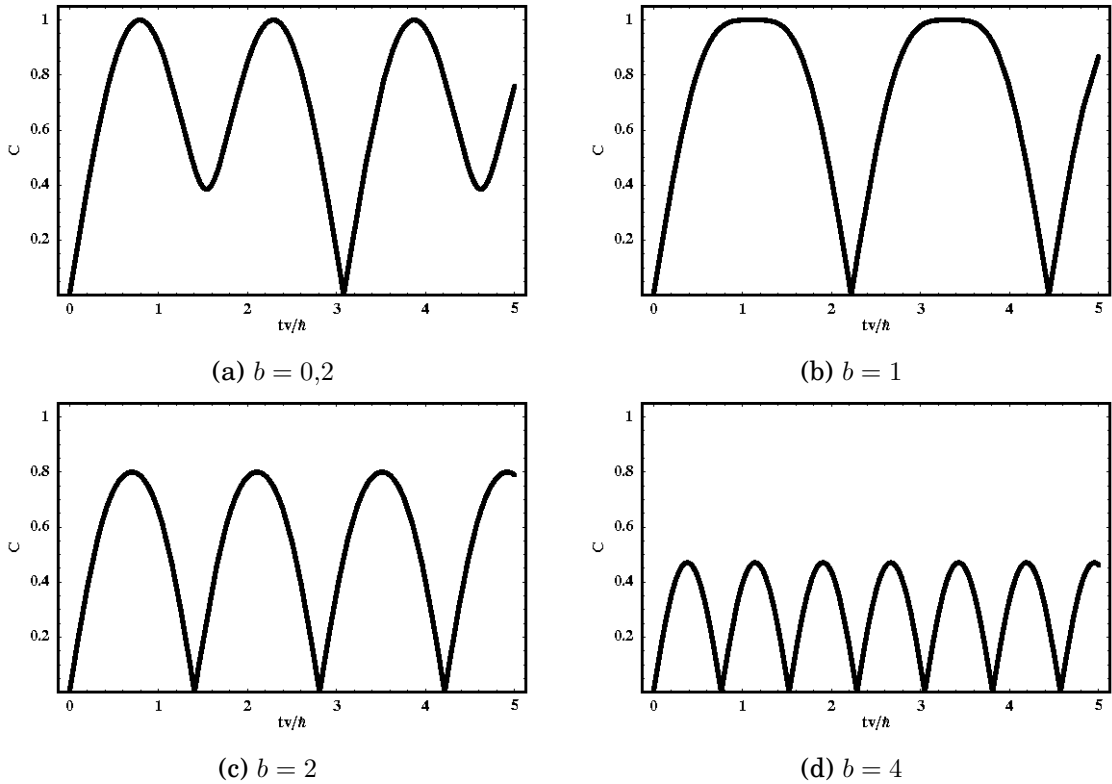


Figura 3.2: Entrelazamiento  $C_{1,2}$  en función del tiempo en unidades de  $\hbar/v$  para dos qubits y distintos valores de  $b/g$ .

Una particularidad interesante para notar, en vistas de aplicar esto a sistemas reales que funcionen como computadoras cuánticas, es que el tiempo que permanece el sistema con  $C_{1,2} \approx 1$  es mucho

mayor cuando  $b/g = 1$  (fig 3.2(b)). Es decir que no por agrandar la anisotropía se tienen mejores condiciones de formación de entrelazamiento ya que para  $b/g < 1$  el tiempo que permanece el sistema en  $C_{1,2} \approx 1$  es menor (fig 3.2(a)). En sistemas de “Quantum dots”, por ejemplo, se han reportado[IAB<sup>+</sup>99] valores de  $g \approx 0,1\text{meV}$  que implican una escala de tiempo del orden de las decenas de pico segundos ( $10^{-11}\text{s}$ ).

### 3.1.2. Tres qubits

Seguimos estudiando el caso un poco más complejo de 3 qubits. En este caso el estado inicial es  $|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle$  por lo que el subespacio relevante es el generado por los vectores  $|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle$  y  $|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle$ . De los últimos tres estados, debido a la simetría cíclica del Hamiltoniano, sólo se puebla la combinación simétrica de ellos y por lo tanto el espacio relevante tiene, todavía, dimensión 2. Elegimos para este subespacio la base que contiene al estado inicial  $|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle$  y al estado de Werner[Wer89]  $|\mathcal{W}\rangle = (|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle) / \sqrt{3}$ . El Hamiltoniano es en esta base

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b - 2v & -\sqrt{3}g \\ -\sqrt{3}g & -\frac{3}{2}b \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

que tiene autovalores  $E_{\pm} = E_0 \pm \lambda$  con

$$E_0 = -\frac{b}{2} - v \quad ; \quad \lambda = \sqrt{(b-v)^2 + 3g^2} \quad (3.15)$$

de modo que la evolución temporal del sistema, que viene dada por la ecuación 3.5, es

$$|\Psi(t)\rangle = e^{iE_0 t} \left[ \cos(\lambda t) + i \frac{b-v}{\lambda} \sin(\lambda t) \right] |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + \frac{\sqrt{3}g}{\lambda} \sin(\lambda t) |\mathcal{W}\rangle \quad (3.16)$$

En este caso, al haber tres qubits, hay diferencia entre el entrelazamiento de uno con el resto y de pares, sin embargo veremos que están íntimamente relacionados y que los resultados que se obtienen pueden entenderse muy bien en términos intuitivos de entrelazamiento. La función  $a(t)$  es, como antes, una lorenziana modulada pero con centro en  $b = v$ , ancho  $g$  y valor máximo  $2/3$ .

$$a(t) = \frac{2g^2}{(b-v)^2 + 3g^2} \sin^2(\lambda t) \quad (3.17)$$

y su máximo se da para  $t = \frac{(2m+1)\pi}{2\lambda}$ ,  $m \in \mathcal{R}$

$$a_m = \frac{2g^2}{(b-v)^2 + 3g^2} \quad (3.18)$$

Haciendo un análisis similar al que se hizo para dos qubits (sección 3.1.1) se ve que  $a_m \geq 1/2$  para  $(b-v)^2/g^2 < 1$  y por ende existe un tiempo ( $t_m = \lambda^{-1} \arcsin((2a_m)^{-1/2})$ ) para el cual se llega a un estado máximamente entrelazado. En cambio cuando  $(b-v)^2/g^2 > 1$  nunca se llega a generar un estado máximamente entrelazado dado que  $a(t) < 1/2$  para todo  $t$ . El comportamiento del entrelazamiento de uno con el resto es por lo tanto igual que en el caso de dos qubits (fig 3.1.1) pero la meseta esta desplazada en  $v$  (limites dados por  $(b-v)^2/g^2 < 1$ ) y cae asintóticamente para  $b \gg (v, g)$  como  $C_1 \approx 2\sqrt{2}g/b$ .

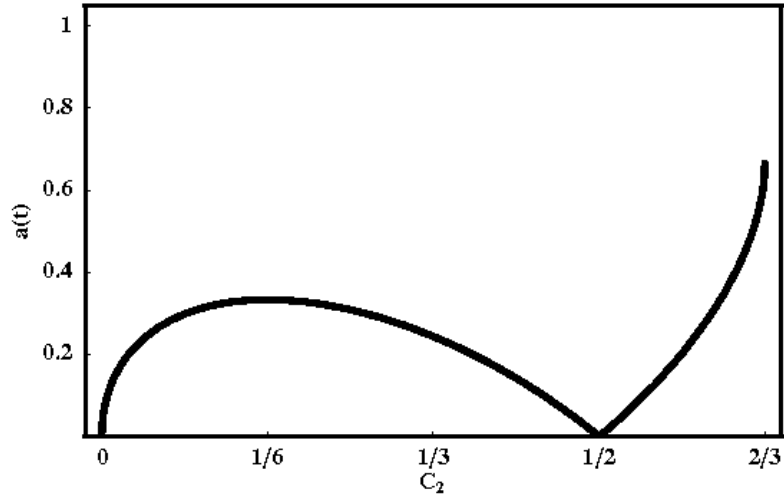


Figura 3.3: Entrelazamiento de pares  $C_2$  como función de  $a(t)$  para tres qubits.

El entrelazamiento de pares, al tratarse de más de dos qubits, difiere del de uno con el resto. Expresado como función de  $a(t)$  el entrelazamiento de pares para este sistema es

$$C_2 = \left| a(t) - \sqrt{[2 - 3a(t)]a(t)} \right| \quad (3.19)$$

La figura 3.3 muestra esta función para  $0 < a(t) \leq 2/3$ , que es el rango de valores que puede tomar  $a(t)$ . Obsérvese primero que nunca llegan a haber estados máximamente entrelazados  $C_2 < 1 \forall a(t)$ . Hay dos regiones que se distinguen por la anulación de  $C_2$  en  $a(t) = 1/2$ .

Para  $a(t)$  por debajo de este límite los estados de Bell responsables del entrelazamiento (ver sección 2.3) son los que tienen la misma paridad que el estado inicial y el máximo de esta parte se da cuando  $a(t) = 1/6$  donde  $C_2 = 1/3$ . Para valores de  $a(t) > 1/2$  hay tiempos en los cuales se generan estados entrelazados con paridad opuesta a la del estado inicial, aquí el máximo se da para  $a(t) = 2/3$  donde  $C_2 = 2/3$  que es justamente el entrelazamiento de pares del estado de Werner. Es posible generar estos estados de paridad opuesta sólo cuando se está cerca de la resonancia, es decir cuando  $(b - v)^2/g^2 < 1$ . En la figura 3.4 se muestran los entrelazamientos mencionados. El entrelazamiento de uno con el resto, que tiene la misma forma que para el caso de dos qubits, el entrelazamiento de pares con paridad positiva que tiene una meseta para  $|(b - v)/g| < 3$  y luego cae asintóticamente para  $b \gg (v, g)$  como  $C_2 \approx \sqrt{2g}/|b|$  y el entrelazamiento de pares con paridad negativa que tiene un pico pronunciado centrado en  $b = v$  de altura  $2/3$  y se anula para  $|(b - v)/g| > 1$ .

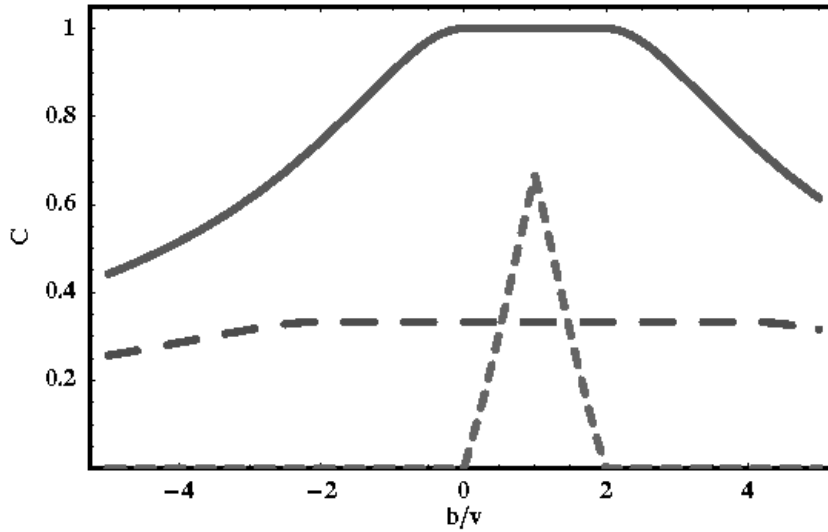


Figura 3.4: Entrelazamiento máximo de uno con el resto  $C_1$  (línea sólida), de pares  $C_2$  con paridad positiva (línea a trazos largos) y de pares  $C_2$  con paridad negativa (línea a trazos cortos) como función de  $b/v$  para  $g = 1$ .

A continuación mostramos la evolución temporal (fig 3.5) para cada una de las zonas. En la resonancia (fig 3.5(a)) se ven las características más relevantes del sistema: los picos de la concurrencia que corresponden a estados con paridad positiva (picos suaves) y negativa (picos agudos) y el entrelazamiento de uno con el resto que llega a la saturación en tiempos distintos a los que aparecen los picos de la concurrencia. En el punto crítico (fig 3.5(b)) , es decir donde  $(b - v)/g = 1$ ,



el entrelazamiento “se queda” saturado por un tiempo (como en el caso de dos qubits) pero desaparece el pico de la concurrencia para estados con paridad negativa. A medida que los parámetros se alejan de la resonancia los picos de la concurrencia colapsan (fig 3.5(c)) y finalmente el comportamiento es similar al caso de dos qubits, el entrelazamiento de uno con el resto sigue a la concurrencia (fig 3.5(d)), pero siempre la concurrencia es menor.

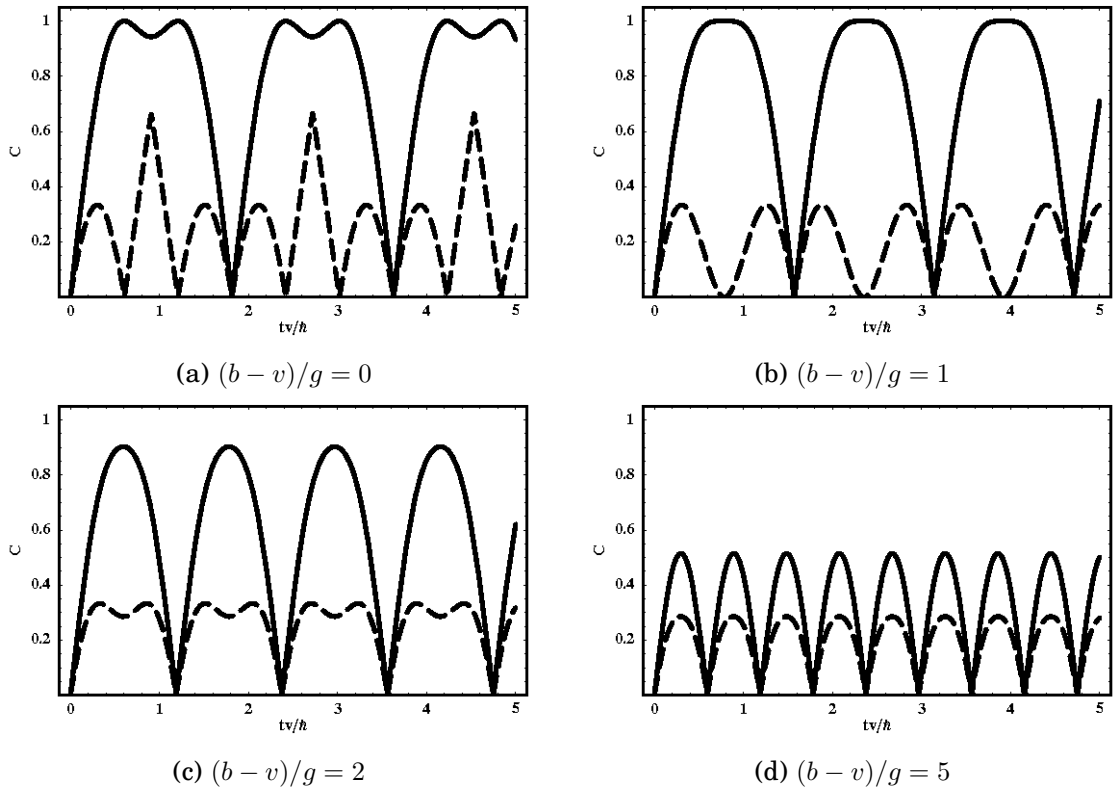


Figura 3.5: Entrelazamiento de uno con el resto (líneas sólidas) y entre pares (líneas punteadas) en función del tiempo en unidades de  $\hbar/v$  para tres qubits y distintos valores de  $(b - v)/g$ .



## Capítulo 4

# Transformaciones Canónicas: Entrelazamiento en cadenas XY largas

### 4.0.3. Introducción

En este capítulo resolvemos el problema de la evolución temporal de la concurrencia de pares y de uno con el resto para el sistema descrito por el Hamiltoniano del capítulo 3 para una cantidad *impar* arbitraria de qubits.

El procedimiento[LSM61] consiste en hacer una transformada de Jordan-Wigner[JW28] que mapea los operadores de espín  $S_i^+$ ,  $S_i^-$  a operadores puramente fermiónicos  $c_i^\dagger, c_i$  y luego diagonalizar el Hamiltoniano mediante una Transformación Canónica, que conserva las relaciones de conmutación. Una transformación canónica puede ser descompuesta en tres partes[RS41]: una transformación unitaria que mapea los operadores  $c_i$  en operadores  $d_i$  del tipo  $d_i = \sum_j M_{ij}c_j$ , una transformada especial de Bogoliubov (o transformada BCS) que mapea los operadores  $d_i$  en operadores de cuasipartículas  $a_i$  y una última transformación unitaria entre los operadores  $a_i$ . La primera transformación unitaria la descompongo en dos partes: un cambio de fase dependiente de la paridad elegida para eliminar el término no cuadrático que introduce la transformada de Jordan-Wigner con condiciones cíclicas y una transformada de Fourier discreta que lleva al Hamiltoniano a una forma canónica. Finalmente hago la transfor-

mada BCS que deja el Hamiltoniano en una forma diagonal de modo que la última transformación unitaria no es necesaria. Una vez diagonalizado el Hamiltoniano calculo exactamente los valores medios en función del tiempo necesarios para dar las formas explícitas de las concurrencias (ver ecuaciones 2.17).

Para el caso de tres qubits los resultados obtenidos coinciden exactamente con los de la sección 3.1.2.

Finalmente se hace un análisis de la dependencia funcional del máximo de las concurrencias con el campo magnético  $b$  para distintos rangos de  $v, g$  (parámetro de “hopping”, anisotropía de la interacción).

## 4.1. Diagonalización

### 4.1.1. Transformación de Jordan-Wigner

Partimos del mismo Hamiltoniano de espines 1/2 en un campo magnético que usamos en la sección anterior.

$$H = \sum_{i=1}^n [bS_i^z - (vS_i^+ S_{i+1}^- + gS_i^+ S_{i+1}^+ + h.c.)] \quad (4.1)$$

Las relaciones de conmutación de los operadores de subida y bajada ( $S_i^+, S_i^-$ ) son en parte fermiónicas

$$\{S_i^-, S_i^+\} = 1 ; (S_i^+)^2 = (S_i^-)^2 = 0 \quad (4.2)$$

y en parte bosónicas

$$[S_i^+, S_j^-] = [S_i^+, S_j^+] = [S_i^-, S_j^-] = 0 ; i \neq j \quad (4.3)$$

Para poder diagonalizar el Hamiltoniano con transformaciones canónicas (Fourier y Bogoliubov) como haremos luego es preciso que las relaciones de conmutación de los operadores sean fermiónicos o bosónicas, pero no una mezcla como es el caso de  $S_i^+, S_i^-$ . Para llevar estos operadores a una forma puramente fermiónica hacemos ahora una transformación de Jordan-Wigner [JW28] que mapea los operadores

$S^+$  y  $S^-$  en operadores  $c_i^\dagger, c_i$  puramente fermiónicos.

$$c_i = \exp\left[\pi i \sum_{j=1}^{i-1} S_j^+ S_j^-\right] S_i^- \quad S_i^- = \exp\left[-\pi i \sum_{j=1}^{i-1} c_j^\dagger c_j\right] c_i \quad (4.4)$$

$$c_i^\dagger = S_i^+ \exp\left[-\pi i \sum_{j=1}^{i-1} S_j^+ S_j^-\right] \quad S_i^+ = c_i^\dagger \exp\left[\pi i \sum_{j=1}^{i-1} c_j^\dagger c_j\right] \quad (4.5)$$

donde se tiene que:

$$\{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij}, \quad \{c_i, c_j\} = \{c_i^\dagger, c_j^\dagger\} = 0 \quad (4.6)$$

Para poder escribir el Hamiltoniano en términos de estos nuevos operadores vemos que de las definiciones de las transformaciones se desprende que:

$$c_i^\dagger c_i = S_i^+ S_i^- \quad (4.7)$$

Además, dado que  $c_i^\dagger c_i$  es un número de ocupación que puede ser 0 o 1 se tiene que:

$$\exp[\pi i c_i^\dagger c_i] = \exp[-\pi i c_i^\dagger c_i] \quad (4.8)$$

Además para  $i = 1, 2, \dots, N-1$  se tiene que:

$$c_i^\dagger c_{i+1} = S_i^+ S_{i+1}^- \quad ; \quad c_i^\dagger c_{i+1}^\dagger = S_i^+ S_{i+1}^+ \quad (4.9)$$

de modo que, para el caso de extremos libres, el Hamiltoniano es

$$H = \sum_{i=1}^{n-1} \left[ b(c_i^\dagger c_i - \frac{1}{2}) - (v c_i^\dagger c_{i+1} + g c_i^\dagger c_{i+1}^\dagger + h.c.) \right] \quad (4.10)$$

El caso que nos interesa resolver, sin embargo, es el de la cadena cíclica. Debemos entonces tener en cuenta los términos

$$S_n^+ S_1^- = -c_n^\dagger c_1 P \neq c_n^\dagger c_1 \quad (4.11a)$$

$$S_n^+ S_1^+ = -c_n^\dagger c_1^\dagger P \neq c_n^\dagger c_1^\dagger \quad (4.11b)$$

donde  $P$  es el operador paridad de espín (apéndice B). De este modo se obtiene el Hamiltoniano para el caso cíclico.

$$H = \sum_{i=1}^n \left[ b(c_i^\dagger c_i - \frac{1}{2}) - (v c_i^\dagger c_{i+1} + g c_i^\dagger c_{i+1}^\dagger + h.c.) \right] + [v c_n^\dagger c_1 + g c_n^\dagger c_1^\dagger + h.c.](P + 1) \quad (4.12)$$

El desarrollo hasta aquí es general. De ahora en adelante empezaré a hacer suposiciones sobre el sistema que voy a estudiar.

Como se mencionó en la sección 3.0.8 tanto el estado inicial como el Hamiltoniano conmutan con  $P$  y el estado inicial tiene paridad positiva entonces se puede reemplazar  $P$  por su valor ya que este permanecerá invariante. Se tiene entonces:

$$H = \sum_{i=1}^n \left[ b(c_i^\dagger c_i - \frac{1}{2}) - (vc_i^\dagger c_{i+1} + gc_i^\dagger c_{i+1}^\dagger + h.c.) \right] + 2[vc_n^\dagger c_1 + gc_n^\dagger c_1^\dagger + h.c.)] \quad (4.13)$$

El término que no está en la sumatoria tiene signo opuesto a los términos de interacción en la sumatoria. En pos de llevar este Hamiltoniano a una forma más simple, que se pueda escribir como una simple sumatoria, hago la primer transformación lineal  $c_i \rightarrow (-1)^i c_i$  que cambia los signos de las interacciones. En la figura 4.1 se muestra esquemáticamente como quedan las interacciones de los términos de la sumatoria. Para  $n$  par cambian todos los términos de signo pero para  $n$  impar el término que tiene las interacciones entre el el primer y el último espín no cambia. En este último caso - $n$  impar- puede escribirse entonces el Hamiltoniano<sup>1</sup>

$$H = \sum_{i=1}^n \left[ b(c_i^\dagger c_i - \frac{1}{2}) + (vc_i^\dagger c_{i+1} + gc_i^\dagger c_{i+1}^\dagger + h.c.) \right] \quad (4.14)$$

### 4.1.2. Transformación de Fourier Discreta

Para diagonalizar este Hamiltoniano se realiza primero una transformada de Fourier discreta de los operadores  $c_i^\dagger, c_i$  dada por

$$c_j^\dagger = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n d_k^\dagger e^{iw_k j} \quad ; \quad w_k = 2\pi k/n \quad (4.15)$$

Se obtiene entonces, para el caso de una cantidad impar de qubits:

$$H = \sum_{i=1}^n \left[ (b + 2v \cos w_i) d_i^\dagger d_i + g \sin w_i (d_i^\dagger d_{n-i}^\dagger + h.c.) \right] - \frac{nb}{2} \quad (4.16)$$

---

<sup>1</sup>Este Hamiltoniano también describe adecuadamente cadenas con  $n$  par pero estado inicial impar.

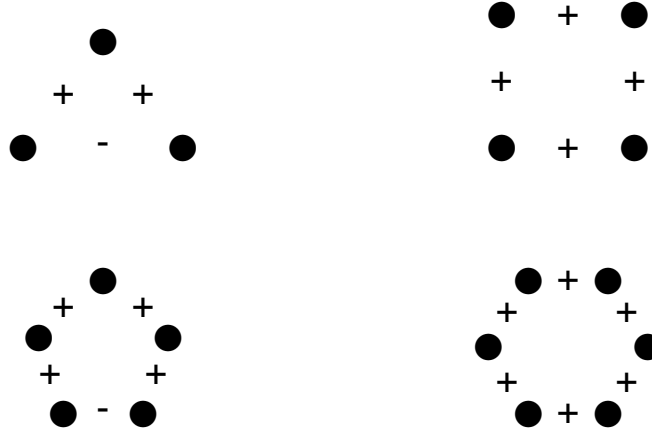


Figura 4.1: Signo de la integración entre espines para sistemas de 3, 4, 5 y 6 espines. En los casos impares queda una interacción con signo distinto.

### 4.1.3. Transformación de Bogoliubov

Para terminar la diagonalización se propone una transformada especial de Bogoliubov de la forma:

$$d_j^\dagger = u_j a_j^\dagger + v_j a_{n-j} \quad (4.17a)$$

$$d_{n-j}^\dagger = u_j a_{n-j}^\dagger - v_j a_j \quad (4.17b)$$

y se lleva a  $H$  a la forma diagonal (ver apéndice C)

$$H = \sum_j \left[ \lambda_j (a_j^\dagger a_j - \frac{1}{2}) \right] + cte \quad (4.18a)$$

$$\lambda_j = \sqrt{(b + 2v \cos w_j)^2 + 4g^2 \sin^2 w_j} \quad (4.18b)$$

esto se logra eligiendo  $(u_j^2, v_j^2) = \frac{1}{2}[1 \pm (b + 2v \cos w_j)/\lambda_j]$ . La constante aditiva en el Hamiltoniano no juega ningún papel en el resultado final.

### 4.1.4. Evolución Temporal y Valores Medios

Dado que el Hamiltoniano es diagonal en la base de operadores de cuasipartículas de Bogoliubov es fácil calcular la evolución temporal de los valores medios en la representación de Heisenberg. Esto es

$$\langle O(t) \rangle = Tr(\rho_0 O(t)) \quad ; \quad \frac{dO(t)}{dt} = i[H, O(t)] \quad (4.19)$$

De modo que usando 4.18a y teniendo en cuenta que los  $a_i, a_i^\dagger$  son fermiónicos, para  $a_j$  se tiene

$$\begin{aligned}\frac{da_j}{dt} &= i[H, a_j] \\ &= -i\lambda_j a_j\end{aligned}\quad (4.20)$$

y análogamente para  $a_j^\dagger$ . Integrando elementalmente se tiene

$$a_j^\dagger(t) = e^{i\lambda_j t} a_j^\dagger(0) \quad \text{y} \quad a_j(t) = e^{-i\lambda_j t} a_j(0) \quad (4.21)$$

Para poder construir las medidas de entrelazamiento es necesario conocer los valores medios de  $S_i^z$ ,  $S_i^+ S_{i+1}^-$ ,  $S_i^+ S_{i+1}^+$  y  $S_i^z S_{i+1}^z$ .

Los primeros tres operadores pueden ser escritos como función de los operadores de cuasipartículas de Bogoliubov (dejando su dependencia temporal implícita) aplicando las transformadas y considerando que como la cadena es cíclica  $O_j = \sum_{i=1}^n O_i/n$ .

$$\begin{aligned}S_i^z + \frac{1}{2} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left[ u_j^2 a_j^\dagger a_j + v_j^2 a_{n-j} a_{n-j}^\dagger + u_j v_j (a_j^\dagger a_{n-j}^\dagger + a_{n-j} a_j) \right] \\ S_i^+ S_{i+1}^- &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{-iw_j} \left[ u_j^2 a_j^\dagger a_j + v_j^2 a_{n-j} a_{n-j}^\dagger + u_j v_j (a_j^\dagger a_{n-j}^\dagger + a_{n-j} a_n) \right] \\ S_i^+ S_{i+1}^+ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{-iw_{n-j}} \left[ u_j^2 a_j^\dagger a_{n-j}^\dagger - v_j^2 a_{n-j} a_j + u_j v_j (a_{n-j} a_{n-j}^\dagger - a_j^\dagger a_j) \right]\end{aligned}\quad (4.22)$$

El valor medio operador restante puede ser escrito en función de los primeros (Teorema de Wick[RS41]) como:

$$\langle S_i^z S_{i+1}^z \rangle = \langle S_i^z \rangle^2 + |\langle S_i^+ S_{i+1}^+ \rangle|^2 - |\langle S_i^+ S_{i+1}^- \rangle|^2 \quad (4.23)$$

Para construir los valores medios  $\langle S_i^z \rangle$ ,  $\langle S_i^+ S_{i+1}^- \rangle$  y  $\langle S_i^+ S_{i+1}^+ \rangle$ , como se ve en las ecuaciones 4.22, es necesario primero conocer  $\langle a_j^\dagger a_j \rangle$ ,  $\langle a_{n-j} a_{n-j}^\dagger \rangle$  y  $\langle a_j^\dagger a_{n-j}^\dagger \rangle$ . Cómo la dependencia temporal de los operadores de cuasipartículas es simplemente una fase (ec. 4.21) se puede hacer el cálculo de estos valores medios a  $t = 0$  y luego multiplicar por la fase al resumir para armar las expresiones 4.22. Además, es crucial notar que estos son valores medios de operadores de cuasipartículas medidos con respecto al estado inicial, que no es más que el vacío de los



operadores fermiónicos de Jordan-Wigner ( $c_i^\dagger, c_i$ ). Para poder calcularlos es necesario expresar los operadores de Bogoliubov como función de los de Jordan-Wigner mediante las transformaciones inversas de Fourier y de Bogoliubov. Estas son

$$a_j^\dagger = u_j d_j^\dagger - v_j d_{n-j} \quad ; \quad a_{n-j}^\dagger = u d_{n-j}^\dagger + v d_j \quad (4.24)$$

y

$$d_j^\dagger = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n c_k^\dagger e^{-i w_k j} \quad (4.25)$$

De modo que se obtiene:

$$\langle a_j^\dagger a_j \rangle = v_j^2 \quad (4.26a)$$

$$\langle a_{n-j} a_{n-j}^\dagger \rangle = u_j^2 \quad (4.26b)$$

$$\langle a_j^\dagger a_{n-j}^\dagger \rangle = -u_j v_j e^{2i\lambda_j t} = \langle a_{n-j} a_j \rangle^* \quad (4.26c)$$

Juntando todo se obtienen los valores medios deseados.

$$\langle S_i^z \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{4g^2 \sin^2 w_j}{\lambda_j^2} \sin^2 \lambda_j t - 1/2 \quad (4.27a)$$

$$\langle S_i^+ S_{i+1}^- \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{4g^2 \sin^2 w_j \cos w_j}{\lambda_j^2} \sin^2 \lambda_j t \quad (4.27b)$$

$$\langle S_i^+ S_{i+1}^+ \rangle = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{g \sin^2 w_j}{\lambda_j} \left[ 2 \frac{b + 2v \cos w_j}{\lambda_j} \sin^2 \lambda_j t + i \sin 2\lambda_j t \right] \quad (4.27c)$$

$$\langle S_i^z S_{i+1}^z \rangle = \langle S_i^z \rangle^2 + |\langle S_i^+ S_{i+1}^+ \rangle|^2 - |\langle S_i^+ S_{i+1}^- \rangle|^2 \quad (4.27d)$$

## 4.2. Entrelazamiento

### 4.2.1. Generalidades

En este caso la función  $a(t)$  que determina el entrelazamiento de uno con el resto es simplemente  $\langle S_i^z \rangle + 1/2$  (ver ecuación 4.27a). Analizaremos primero la forma de esta y daremos resultados generales

y luego indicaremos generalidades sobre el entrelazamiento de pares que es una función mucho más complicada de la ecuaciones 4.27.

La envolvente superior de  $a(t)$  se obtiene haciendo<sup>2</sup>  $\sin^2 \lambda_j t = 1 \forall j$  y es

$$a_m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{4g^2 \sin^2 w_j}{(b + 2v \cos w_j)^2 + 4g^2 \sin^2 w_j} \quad (4.28)$$

Este resultado es una generalización natural de los anteriores. Es una suma de gaussianas con centros en  $b = -2v \cos w_j$  y de ancho  $2g|\sin w_j|$ . Para  $n$  par la cantidad de picos distintos es  $n/2+1$ , mientras que para  $n$  impar, lo que nos interesa ahora, hay  $(n-1)/2$  picos. Como siempre, nos interesa saber cuando esta función es menor o mayor a  $1/2$  ya que esto determina si se llega al entrelazamiento máximo o no.

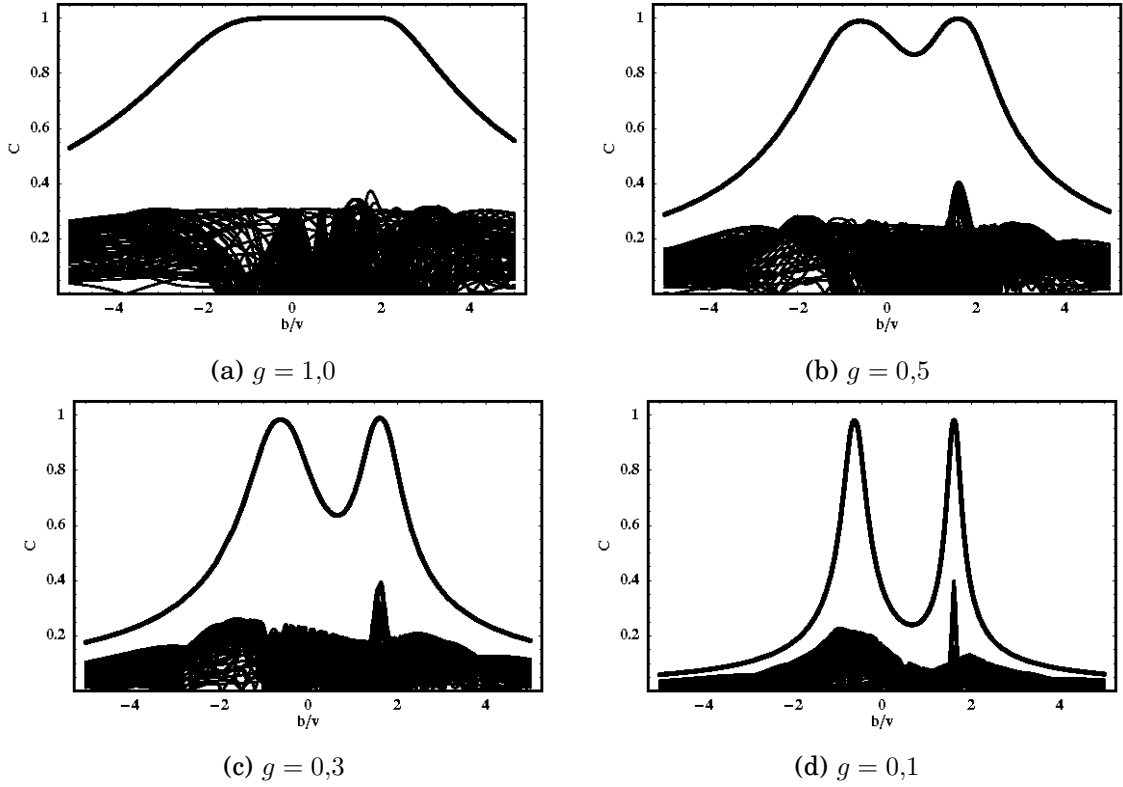
La condición para que un pico  $j$  aislado llegue a un valor mayor a  $1/2$  es  $(b + 2v \cos w_j)^2 < 4g^2 \sin^2 w_j$  de lo que se puede deducir que si  $v \lesssim g$  y  $b \lesssim 2v$  se tiene  $a(t) > 1/2$ . Estos resultados pueden constatare comparando las figuras 4.2(a) y 4.3(a) con las 4.2(b) y 4.3(b) donde se muestra el entrelazamiento de uno con el resto para  $g = v = 1$  (hay saturación) y  $g = v/2 = 1$  (no hay saturación) correspondientemente, para dos sistemas de distinta cantidad de qubits.

Si  $g \lesssim v$  no sólo se deja de llegar a la saturación sino que a medida que  $g$  se hace más chico que  $v$  se empiezan a distinguir los picos. La distancia entre dos picos consecutivos es  $\delta b = 2v|\cos w_j - \cos w_{j+1}| \approx 2v|\frac{d \cos w_j}{dw_j}| \delta w_j = \frac{4\pi v}{n} |\sin w_j|$  y el ancho de un pico es  $2g|\sin w_j|$ . Podemos estimar que se verán picos claros cuando la separación entre ellos sea mayor que sus anchos; eso es  $g \lesssim 2\pi v/n$ . Esto puede constatare con los gráficos 4.2 y 4.3. Para el caso de  $n = 5$  se tiene  $2\pi v/n \approx 1,26$  por lo que en todos los casos mostrados se deberían distinguir picos sin embargo no es así porque para  $v = 1$  la saturación borra los picos. Para  $n = 15$  se tiene  $2\pi v/n \approx 0,42$  y como se ve sólo se resuelven los picos en los gráficos 4.3(c) y 4.3(d) que corresponden a  $v = 0,3$  y  $v = 0,1$  respectivamente; en 4.3(a) y 4.3(b) que corresponden a  $v = 1$  y  $v = 0,5$  no se resuelven picos.

En el límite asintótico de  $b \gg (v, g)$  se obtiene  $a_m \approx 2g^2/b^2$  que es el mismo resultado que para tres qubits y por ende para cualquier  $n$  impar, en este límite,  $C_1 \approx 2\sqrt{2}g/|b|$ .

---

<sup>2</sup>Sólo es posible que se de esta situación si las razones entre las frecuencias no son números racionales.



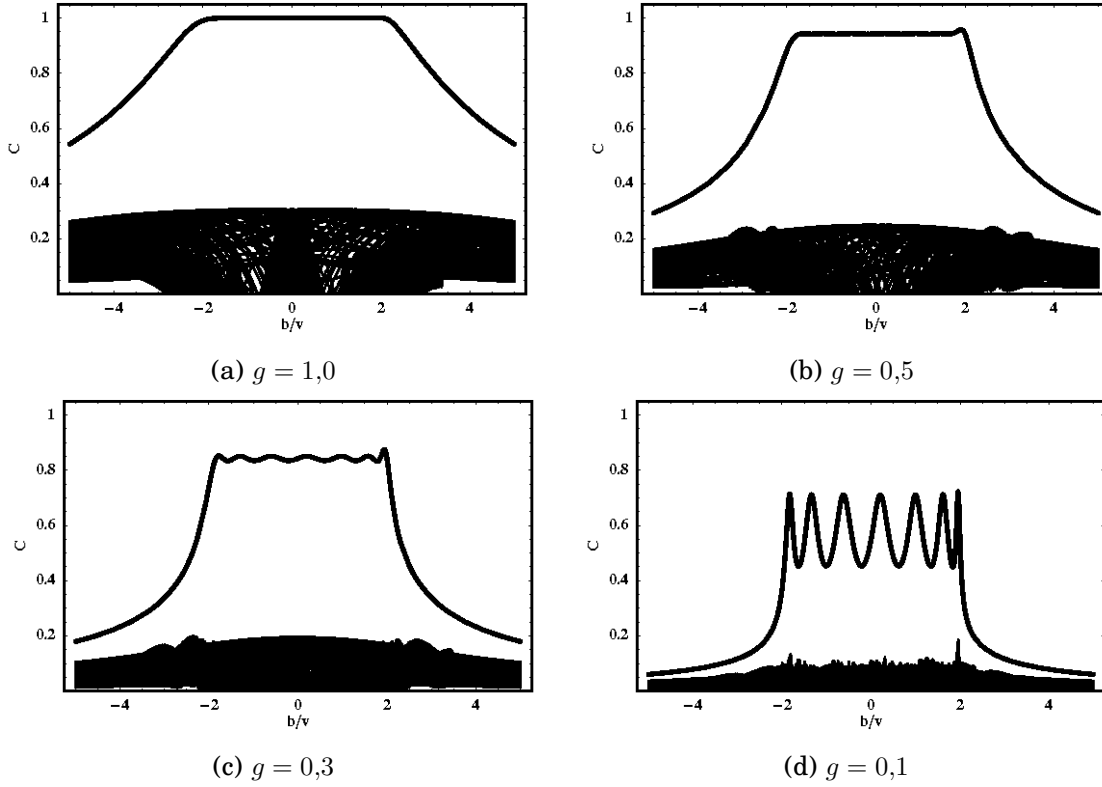
**Figura 4.2:** Entrelazamiento máximo de uno con el resto  $C_1$  y de a pares  $C_2$  para  $n = 5$  en función de  $b/v$  para distintos valores de  $g$  (en unidades de  $v$ ). La línea gruesa es el entrelazamiento de uno con el resto  $C_1$ . Lo que se ve por debajo de esta es el entrelazamiento de pares  $C_2$  para muchos tiempos distintos.

En general el entrelazamiento de pares está muy por debajo del entrelazamiento de uno con el resto y lejos de la resonancia es prácticamente una función monótonamente decreciente del campo  $b$ ; en el limite asintótico de  $b \gg (v, g)$  se tiene  $C_2 \approx 2g/b$ . Sin embargo, para los casos en que hay resonancia la concurrencia también resuena y veremos más adelante que se pueden encontrar resultados interesantes.

### 4.2.2. Entrelazamiento y Decoherencia

La evolución temporal para sistemas de muchos espines es en general bastante complicada, pero hay casos para los que se pueden encontrar resultados relevantes, en los otros indicaremos generalidades.

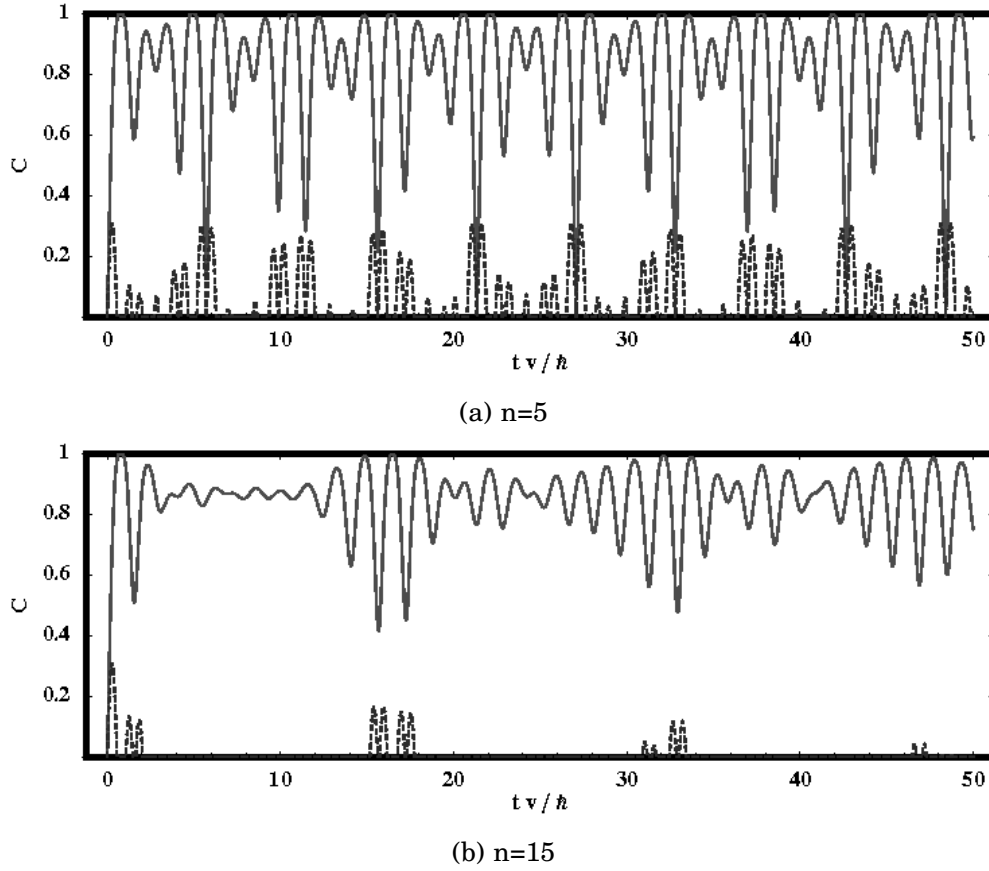
Empezamos con los complicados. La figura 4.4 muestra la evolución temporal del entrelazamiento en cadenas de 5 y 15 qubits pa-



**Figura 4.3:** Entrelazamiento máximo de uno con el resto  $C_1$  y de a pares  $C_2$  para  $n = 15$  en función de  $b/v$  para distintos valores de  $g$ . La línea gruesa es el entrelazamiento de uno con el resto  $C_1$ . Lo que se ve por debajo de esta es el entrelazamiento de pares  $C_2$  para muchos tiempos distintos.

ra un campo magnético con el que se llega a la saturación  $b = 0,5$ ;  $v = g = 1$  (ver figs 4.2(a) y 4.3(a)). Se observa que para 5 qubits la dependencia temporal del entrelazamiento de uno con el resto es cuasi-periódica y recorre continuamente todos los valores desde cero hasta la saturación mientras que para 15 qubits esta periodicidad parece desaparecer y el sistema no recorre todos los valores posibles del entrelazamiento de uno con el resto sino que oscila entre la saturación y una cota mínima. En realidad, ambos comportamientos son cuasi-periódicos y a un tiempo suficientemente largo es natural esperar que, para cualquiera de los casos, se de un momento en que el entrelazamiento de uno con el resto se anule. Sin embargo, para  $n = 15$  el entrelazamiento de uno con el resto permanece principalmente por arriba de una cota. El entrelazamiento de pares, en cambio, es menor y ocurre para tiempos más esporádicos cuando crece la cantidad de qubits en la cadena.

El entrelazamiento de pares, de algún modo, es un indicador de

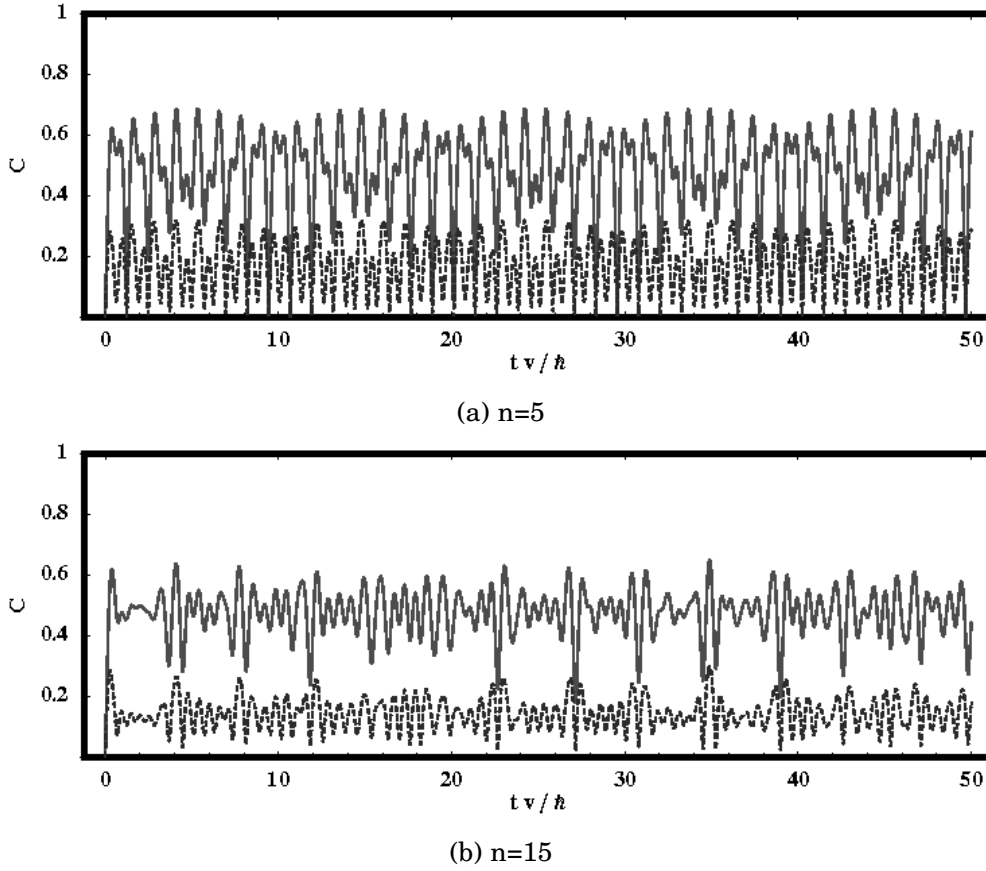


**Figura 4.4:** Entrelazamiento de uno con el resto  $C_1$  (línea roja sólida) y de pares  $C_2$  (línea azul a trazos) en función del tiempo en unidades de  $\hbar/v$  con  $b = 0,5$ ,  $g = 1$  (saturan  $C_1$  y  $C_2$ ) para  $n = 5$  y  $n = 15$ .

que “tan cuántico” es un subsistema. Al agrandarse la cadena la cantidad de espines que está monitoreando<sup>3</sup> a los dos espines estudiados se ve que la probabilidad de que se genere entrelazamiento en el subsistema es menor, es decir el sistema es “menos cuántico”. Resumiendo, y a groso modo, se puede decir que, al agrandar el tamaño del sistema, un subsistema de un tamaño dado pierde la capacidad de que sus partes esten entrelazadas entre sí, pero estas permanecen constantemente entrelazadas con el resto del sistema<sup>4</sup>. Esta observación es una de las ideas que dio a lugar a la teoría de la decoherencia que da un gran paso en la explicación de cómo, a pesar de que el mundo responde a las leyes de la mecánica cuántica, lo percibimos cómo clásico (ver apéndice D).

<sup>3</sup>Interactuando con, haciéndoles de baño térmico u observando constantemente.

<sup>4</sup>El resto del sistema viene a estar haciendo de medio ambiente o baño térmico para el subsistema que se está estudiando.



**Figura 4.5:** Entrelazamiento de uno con el resto  $C_1$  (línea roja sólida) y de a pares  $C_2$  (línea azul a trazos) en función del tiempo en unidades de  $\hbar/v$  con  $b = 4$ ,  $g = 1$  (no satura  $C_1$  ni  $C_2$ ) para  $n = 5$  y  $n = 15$ .

La figura 4.5 muestra la evolución temporal del entrelazamiento para sistemas con la misma cantidad que qubits que antes pero con un campo magnético más fuerte que hace que el comportamiento este fuera de la saturación  $b = 4$ ;  $v = g = 1$  (ver figs 4.2(a) y 4.3(a)). El comportamiento, para el entrelazamiento de uno con el resto, es similar al anterior, pero en este caso el máximo alcanzado no llega a saturar. El entrelazamiento de pares también disminuye al agrandar la cadena, sin embargo, es mayor<sup>5</sup> que en el caso anterior. El incremento en campo magnético disminuye el entrelazamiento global (de uno con el resto) impidiendo que las interacciones locales tengan influencia a largo rango. Contrariamente se hacen más significativas las características que solo dependen del corto rango. Para un campo magnético suficientemente grande el entrelazamiento de pares pácti-

<sup>5</sup>Es mayor en el sentido de que, en promedio, hay más tiempos en el que el entrelazamiento de pares está por encima de una cota.

camente “sigue” al entrelazamiento de uno con el resto<sup>6</sup> del mismo modo que se había observado para el caso de solo tres espines (ver figura 3.5(d)).

### 4.2.3. Resonancias

En el caso en que hay resonancia, ver figuras 4.2(d) y 4.3(d), la dependencia temporal es muy simple. La resonancia se da cuando la anisotropía de la interacción es muy chica  $g \ll v$ . Los campos para los cuales el sistema resuena cumplen  $b = -2v \cos w_j$  de modo que los únicos términos relevantes en  $a(t)$  son justamente el  $j$  y el  $n - j$ , que corresponden ambos al mismo pico. En tal caso se puede aproximar  $a(t)$  como:

$$a(t) = \frac{2}{n} \sin^2 \lambda_j t \quad ; \quad \lambda_j = 2g |\sin w_j| \quad (4.29)$$

La figura 4.6(a) muestra la evolución temporal del entrelazamiento para un sistema de 15 qubits con  $v = 1$  y  $g = 0,1$ . Se muestran resultados para el campo  $b$  justo en la resonancia del pico de  $j = 7$ , a  $1/10$  de la distancia entre este pico y el anterior y justo en el medio de estos dos picos<sup>7</sup>. Es notable la sensibilidad a pequeñas variaciones de campo. Por más que en este caso el entrelazamiento no llegue a saturar, a los fines prácticos de construir una computadora cuántica este caso es de gran importancia ya que no sólo la dependencia temporal es simple sino que con pequeñas variaciones de campo puede “prenderse” o “apagarse” fácilmente la formación de entrelazamiento. También es importante notar que el único autovalor relevante del sistema  $\lambda_j = 2g |\sin w_j|$  se hace muy pequeño de modo que el tiempo necesario para llegar al máximo se hace muy grande en comparación con los tiempos naturales del sistema fuera de la resonancia.

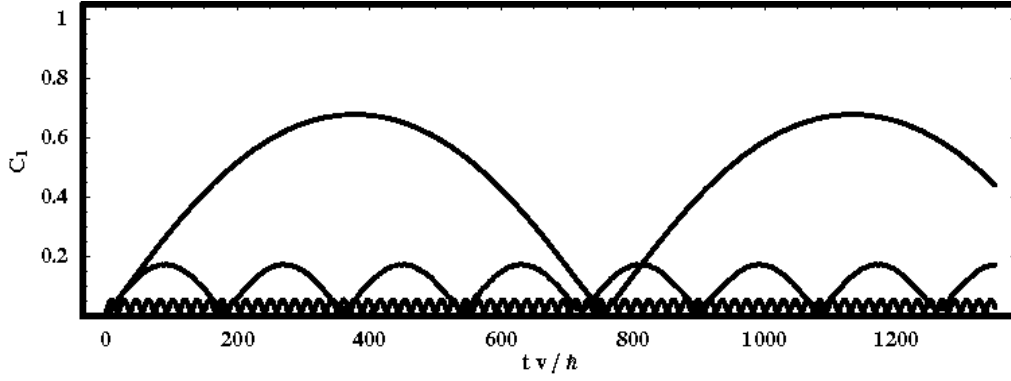
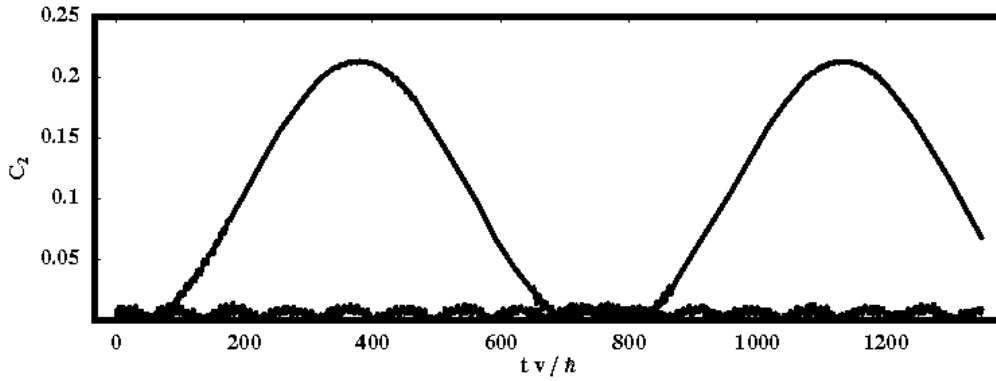
Cerca de la resonancia la concurrencia de pares para estados con paridad negativa tampoco es difícil de calcular. En particular se tiene que en este límite las ecuaciones 4.27 pueden aproximarse como:

$$\langle S_i^+ S_{i+1}^- \rangle \approx \frac{2}{n} |\cos w_j| \sin^2 \lambda_j t \quad (4.30)$$

$$\langle S_i^+ S_{i+1}^+ \rangle \approx -\frac{1}{n} |\sin w_j \sin 2\lambda_j t| \quad (4.31)$$

<sup>6</sup>En estos casos de muchos qubits, sin embargo, aparecen comportamientos más complicados como saturaciones y “revivals”.

<sup>7</sup>El pico  $j = 7$  es el pico de más a la derecha en la figura 4.3(a); el anterior  $j = 6$  es el segundo de derecha a izquierda.

(a) Entrelazamiento de uno con el resto  $C_1$ .(b) Entrelazamiento de pares  $C_2$ .

**Figura 4.6:** Entrelazamientos  $C_1$  y  $C_2$  en función del tiempo en unidades de  $\hbar/v$  en resonancia para el pico  $j = 7$  de un sistema de 15 qubits con  $g = 0,1$ . (a)  $C_1$  para campo resonante, a  $1/10$  de la distancia entre picos y justo entre picos. (b)  $C_2$  para campo resonante y a  $1/10$  de la distancia entre picos (ver texto).

de modo que los picos aparecen para algunos de los campos resonante en los tiempos en que  $\sin \lambda_j t = 1$  en los cuales la altura de estos es

$$C_2 = \frac{4}{n} \left[ |\cos w_j| - |\sin w_j| \sqrt{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^2 - \frac{2}{n^2} \cos^2 w_j} \right] \quad (4.32)$$

Estos picos son de un valor mucho menor al del entrelazamiento de uno con el resto y aparecen adyacentes a los tiempos en los que este se anula y son de paridad opuesta al estado inicial. Se muestran en la figura 4.6(b) los resultados para el campo  $b$  justo en la resonancia, a  $1/10$  de la distancia entre picos se ve que la sensibilidad del entrelazamiento de pares frente a pequeñas desviaciones de la resonancia es aún mayor que para el entrelazamiento de uno con el resto.



### 4.2.4. Tiempos cortos

Por último analizo el extremo  $v = 0$ . En este caso todos los picos colapsan en el origen. Para  $b = 0$  se tiene además que  $a_m = (n - 1)/n$  de modo que hay un tiempo para el cual se llega a la saturación. Lo interesante de este caso en particular es que es fácil hallar este valor de tiempo. El procedimiento consiste simplemente en hacer un desarrollo en serie de  $a(t)$  de un orden suficientemente grande tal que siga a la función hasta que esta vale  $1/2$ . El orden necesario del desarrollo para que cumpla esta condición es 10 (como puede verse en la fig 4.7) y el desarrollo que se obtiene, curiosamente, no depende de  $n$ .

$$a(t) \approx 2g^2t^2 - 2g^4t^4 + \frac{8}{9}g^6t^6 - \frac{2}{9}g^8t^8 + \frac{8}{255}g^{10}t^{10} \quad (4.33)$$

El tiempo en el que se alcanza la saturación  $a(t) = 1/2$  es  $t \approx 0,6012/g$ .

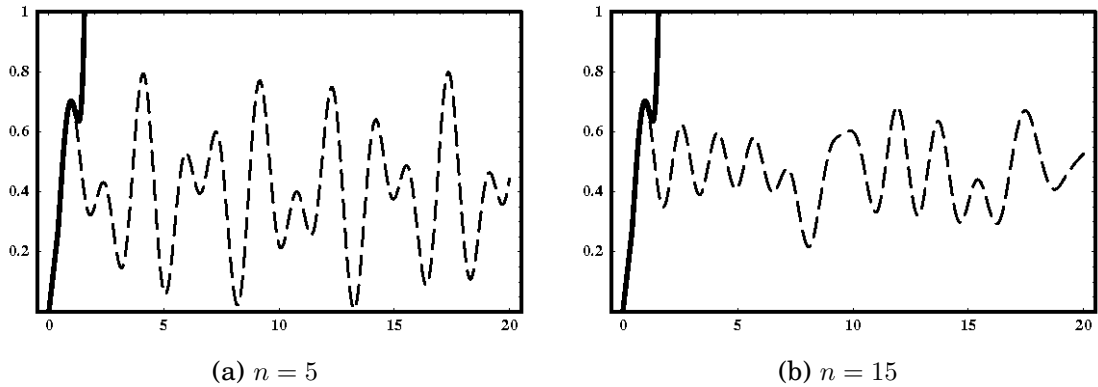


Figura 4.7: Entrelazamientos de uno con el resto  $C_1$  en función del tiempo en unidades de  $\hbar/g$  y serie de Taylor en el caso que  $b = v = 0$  para  $n = 5$  y  $n = 15$ .



# Conclusión

Se examinó la formación de entrelazamiento a partir de un estado completamente alineado en una cadena XY con un campo magnético uniforme. Contrariamente a lo que se podría haber esperado, el comportamiento no es monótono con el campo magnético. El máximo entrelazamiento alcanzado presenta resonancias y “plateaus”.

Los “plateaus” ocurren para anisotropías que son del mismo orden o mayor que el parámetro de “hopping” y saturan cuando es mayor. Se mostró, además, que un aumento de la anisotropía no necesariamente garantiza una prolongación del tiempo durante el cual el sistema permanece máximamente entrelazado.

Las resonancias ocurren cuando la anisotropía es pequeña en comparación con el parámetro de “hopping”. Son muy marcadas para el entrelazamiento de uno con el resto y más aun para el entrelazamiento de pares. Se encontró, además, que estas tienen un valor finito para anisotropías arbitrariamente chicas pero no nulas. Las resonancias permiten identificar configuraciones aptas para generar o no generar entrelazamiento en circuitos cuánticos con pequeñas variaciones del campo magnético.

Estos resultados y otros han sido aceptados para su publicación en la revista *Physical Review A* en un trabajo conjunto con Raul Rosignoli. Entre los resultados que se incluyen figuran además: cadenas con cantidad par e impar de qubits, resonancia de pares entrelazados de paridad positiva, un estudio detallado del comportamiento para  $v = g$  y  $b = 0$  donde la evolución es estrictamente periódica y resultados de diagonalización directa para  $n = 4$ .



# **Parte III**

# **Apéndices**



# Apéndice A

## La descomposición de Schmidt

El teorema de Schmidt es una herramienta muy poderosa para el análisis de sistemas bipartitos. Explico el teorema sin demostración<sup>1</sup>, menciono algunos corolarios inmediatos y hago un comentario.

### Teorema

Sea un estado de un sistema bipartito de dimensión arbitraria descrito por un ket  $|\psi\rangle$ . Existen estados ortonormales  $|i_A\rangle$  para el sistema  $A$  y estados ortonormales  $|i_B\rangle$  para el sistema  $B$  tales que:

$$|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i |i_A\rangle |i_B\rangle \quad (\text{A.1})$$

donde los  $\lambda_i$  son números reales no negativos que satisfacen  $\sum_i \lambda_i^2 = 1$  conocidos como *coeficientes de Schmidt*. La cantidad de coeficientes de Schmidt no nulos se denomina *número de Schmidt*.

### Corolarios

Algunos corolarios que pueden demostrarse inmediatamente son:

- Los autovalores de las matrices reducidas de cada subsistema son iguales.
- Si un estado es separable su número de Schmidt es 1.

---

<sup>1</sup>La demostración se basa en la Descomposición en Valores Singulares (DVS) y puede verse en el libro de Nielsen y Chuang [NC00].

- El numero de Schmidt no cambia si se hacen operaciones unitarias sobre alguno de los subsistemas.

### Comentario

A pesar de su potencia para revolver problemas la descomposición de Schmidt vale sólo para un par de subsistemas de dimensión arbitraria. Es decir, cada subsistema puede estar compuesto por más de un elemento pero no pueden siempre realizarse descomposiciones del tipo de Schmidt. Por ejemplo, para un sistema de tres componentes  $A, B, C$  pueden realizarse descomposiciones del tipo  $\sum_i \lambda_i |i_{AB}\rangle |i_C\rangle$ ,  $\sum_i \lambda_i |i_A\rangle |i_{BC}\rangle$  o  $\sum_i \lambda_i |i_{AC}\rangle |i_B\rangle$  donde los kets de cada subespacio son ortonormales y los  $\lambda_i$  números reales positivos. En cambio no necesariamente pueden realizarse descomposiciones del tipo  $\sum_i \lambda_i |i_A\rangle |i_B\rangle |i_C\rangle$  que cumplan que los kets de cada subespacio sean ortonormales y los  $\lambda_i$  sean números reales no negativos.



# Apéndice B

## Paridad

### B.1. Paridad y Subsistemas

Demostraré que si un estado tiene paridad definida, la matriz densidad reducida de cualquier subsistema conmuta con el operador paridad.  $P|\psi_{AB}\rangle = \pm|\psi\rangle \Rightarrow [P, \text{Tr}_B \rho_{AB}] = 0$ .

#### Definiciones

Defino el operador paridad general  $P$  con autovectores  $|+\rangle, |-\rangle$  de manera tal que  $P|+\rangle = |+\rangle$  y  $P|-\rangle = -|-\rangle$ .  
Un estado tiene paridad definida si es autoestado de  $P$ .

#### Demostración

En general podrá haber varios vectores ( $|+_i\rangle, |-_i\rangle$ ) en una base que sean autovectores de  $P$ . En particular, si estos vectores forman una base completa del espacio del Hilbert, cualquier estado podrá ser escrito como:

$$|\Psi\rangle = \sum_i a_i |+_i\rangle + \sum_i b_i |-_i\rangle \quad (\text{B.1})$$

Para un sistema bipartito esto se extiende a:

$$\begin{aligned} |\Psi_{AB}\rangle = & \sum_{ij} a_i b_j |+_i\rangle |+_j\rangle + \sum_{ij} g_i h_j |-_i\rangle |-_j\rangle \\ & + \sum_{ij} c_i d_j |+_i\rangle |-_j\rangle + \sum_{ij} e_i f_j |-_i\rangle |+_j\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Es claro que los dos primeros términos tienen paridad positiva y los restantes negativa. Construyo entonces dos autovectores con paridad definida y veré si al tomar la traza parcial sobre un subsistema se conserva la paridad. Estos son (juntado las sumas):

$$\begin{aligned} |\Psi_{AB}^+\rangle &= \sum_{ijkl} \{a_i b_j | +i+j\rangle + g_k h_l | -k-l\rangle\} \\ |\Psi_{AB}^-\rangle &= \sum_{ijkl} \{c_i d_j | +i-j\rangle + e_k f_l | -k+l\rangle\} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

La matriz densidad para paridad positiva  $\rho_{AB}^+ \equiv |\Psi_{AB}^+\rangle \langle \Psi_{AB}^+|$  es

$$\begin{aligned} \rho_{AB}^+ &= \sum_{ijklmnop} \{a_i b_j a_m^* b_n^* | +i+j\rangle \langle +m+n| + g_k h_l g_o^* h_p^* | -k-l\rangle \langle -o-p| \\ &\quad + a_i b_j g_o^* h_p^* | +i+j\rangle \langle -m-n| + g_k h_l a_m^* b_n^* | -k-l\rangle \langle +m+n|\} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Al tomar la traza parcial sobre un subsistema ( $B$ ) se obtiene la matriz reducida:

$$\rho_A^+ = \sum_{ijklmnop} \{a_i b_j a_m^* b_n^* | +i\rangle \langle +m| + g_k h_l g_o^* h_p^* | -k\rangle \langle -o|\} \quad (\text{B.5})$$

Se ve claramente que  $[\rho_A^+, P] = 0$ . La demostración para paridad negativa es exactamente igual. QED.

En realidad podría haberse demostrado lo anterior simplemente diciendo que cómo la traza parcial implica una reducción que deja solamente elementos que son diagonales en las partes trazeadas si la matriz densidad del sistema conmuta con  $P$  también tiene que hacerlo la matriz reducida. Estos resultados también son válidos si  $\rho_{AB}$  es un estado mixto.

### Caso $n = 1$ ; un subsistema de dos niveles de distinta paridad

En este caso, por ser 2 la dimensión del subsistema que se desea estudiar, la matriz reducida es la ecuación. B.5 pero sin las sumas.

$$\rho_A^\pm = |+\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -| \quad (\text{B.6})$$

$$(\text{B.7})$$

o bien en forma matricial (teniendo en cuenta que  $\text{Tr} \rho_1 = 1$ ):

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

### Caso $n = 2$ ; dos subsistemas de dos niveles de distinta paridad

En este caso la dimensión del subespacio es 4. Los autoestados de  $P$  son:

$$\begin{aligned} |+_i\rangle &\rightarrow |++\rangle, |--\rangle \\ |-_i\rangle &\rightarrow |+-\rangle, |-+\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

de modo que la matriz densidad será (directamente en forma matricial):

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d^* \\ 0 & b & e^* & 0 \\ 0 & e & c & 0 \\ d & 0 & 0 & f \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

con  $f = 1 - a - b - c$  debido a que  $\text{Tr}\rho_2 = 1$ .

## B.2. Paridad de espín

En un sistema de espines  $1/2$  puede definirse un operador *-paridad de espín*<sup>1</sup>- que es un buen operador paridad asociado a la orientación de los espines.

$$P = e^{i\pi(\sum_i S_i^z + n/2)} = \prod_i e^{i\pi(S_i^z + n/2)} \quad (\text{B.11})$$

donde  $n$  es la cantidad de espines totales en el sistema.

Así definido este será un buen operador paridad definido sobre la base de  $S^z$ . Esto es la base  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$  donde  $S^z |\uparrow\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow\rangle, S^z |\downarrow\rangle = -\frac{1}{2} |\downarrow\rangle$ .

Se ve que éste es efectivamente un buen operador paridad estudiando como actúa sobre algunos estados. En particular sobre el estado  $|\uparrow\rangle^{\otimes n_\uparrow} |\downarrow\rangle^{\otimes n_\downarrow}$  es inmeditado ver que:

$$P |\uparrow\rangle^{\otimes n_\uparrow} |\downarrow\rangle^{\otimes n_\downarrow} = (-1)^{n_\uparrow} |\uparrow\rangle^{\otimes n_\uparrow} |\downarrow\rangle^{\otimes n_\downarrow} \quad (\text{B.12})$$

Puesto en palabras: el operador paridad distingue si hay una cantidad par o impar de espines para “arriba”.

---

<sup>1</sup>En inglés se los suele llamar *phase flip symmetry*.



## Apéndice C

# Transformada especial de Bogoliubov - BCS

En este apéndice mostro como diagonalizar un Hamiltoniano específico utilizando una transformada especial de Bogoliubov, también llamada transformada de BCS por Bardeen, Cooper y Shrieffer, que la usaron en su famoso paper de 1957 en el cual presentaron la primera teoría puramente cuántica de la superconductividad.

Sea un sistema de fermiones cuyos operadores de creación y aniquilación son  $d_i$  y  $d_i^\dagger$  descrito por un Hamiltoniano del tipo

$$H = \sum_{i=1}^n \left[ x_i \left( d_i^\dagger d_i + d_{n-i}^\dagger d_{n-i} \right) + y_i \left( d_i^\dagger d_{n-i}^\dagger + d_{n-i} d_i \right) \right] \quad (\text{C.1})$$

Una transformación especial de Bogoliubov de operadores de cuasipartículas fermiónicas  $a_i$  y  $a_i^\dagger$  viene dada por

$$\begin{aligned} d_i^\dagger &= u_i a_i^\dagger + v_i a_{n-i} \\ d_{n-i}^\dagger &= u_i a_{n-i}^\dagger - v_i a_i \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

donde se debe tener que  $u_i$  y  $v_i$  reales y  $u_i^2 + v_i^2 = 1$  para que los operadores de cuasipartículas sean fermiónicos. Haciendo los reemplazos correspondientes y agrupando términos con iguales operadores se ob-

tiene:

$$\begin{aligned}
 H = \sum_{i=1}^n & a_i^\dagger a_i [x_i (u_i^2 - v_i^2) - 2y_i u_i v_i] \\
 & + a_{n-i}^\dagger a_{n-i} [x_i (u_i^2 - v_i^2) - 2y_i u_i v_i] \\
 & + a_{n-i}^\dagger a_i^\dagger [2x_i u_i v_i + y_i (u_i^2 - v_i^2)] \\
 & + a_i a_{n-i} [2x_i u_i v_i + y_i (u_i^2 - v_i^2)] \\
 & + - y_i u_i v_i + x_i v_i^2
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

Como se desea lleva el Hamiltoniano a una forma diagonal se debe exigir que  $2x_i u_i v_i + y_i (u_i^2 - v_i^2)$  se anule. Esta ecuación junto con la exigencia de que los operadores de cuasipartículas sean fermiones ( $u_i^2 + v_i^2 = 1$ ) tiene como posibles soluciones

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \pm \sqrt{\frac{\lambda_i \pm x_i}{2\lambda_i}} \quad ; \quad \lambda_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \tag{C.4}$$

de modo que el Hamiltoniano se escribe como:

$$H = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( a_i^\dagger a_i + a_{n-i}^\dagger a_{n-i} \right) + \frac{x_i - \lambda_i}{2} \tag{C.5}$$

# Apéndice D

## Decoherencia

Con el fin de dar alguna idea sobre la decoherencia incluyo en este apéndice una traducción que hice de la introducción a un curso [PZ00] que dieron Paz y Zurek sobre Decoherencia inducida por el medio ambiente y la transición cuántico-clásica.

El origen cuántico del mundo clásico ha sido tan difícil de imaginar por los padres de la mecánica cuántica que llegaron a postular su existencia independiente, como lo hizo Niels Bohr, o trataron de buscar explicaciones más complejas con fundamentos clásicos, como lo hicieron de Broglie y Einstein. El problema radica en el principio cuántico de superposición que, en efecto, expande el posible espectro de estados posibles a una infinita superposición de ellos. Por ende superposiciones coherentes de gatos muertos y vivos tienen - dentro del formalismo cuántico - el mismo derecho de existir que cualquiera de sus dos alternativas clásicas (vivo o muerto). Dentro de todos los estados cuánticos posibles, los clásicamente permitidos son excepcionales. La cantidad de estados posibles para un sistema cuántico es enorme comparado con la cantidad que uno encuentra en sistemas clásicos. Sin embargo es un hecho verídico que sólo encontramos objetos clásicos en un subgrupo muy pequeño de todos los estados posibles (en principio permitidos). Debe uno explicar el origen de esta aparente regla de “super-selección” que previene la existencia de la mayoría de los estados posibles de un dado sistema. La *decoherencia* y su principal consecuencia, la super-selección inducida por el medio ambiente -einselección-, dan cuenta de este hecho experimental del mundo físico.

La causa de la decoherencia es la interacción entre el sistema y su medio ambiente. Bajo una variedad de condiciones, que son muy fáciles de satisfacer para un objeto macroscópico, se da la einselec-

ción, de un pequeño subgrupo de estados cuasi-clásicos dentro de la enorme cantidad de estados cuánticos posibles. La clasicidad es, entonces, una propiedad emergente inducida por el sistema y su interacción con el medio ambiente. Las superposiciones arbitrarias de estados permitidos son dejadas de lado en boga de un subgrupo preferido de “estados punteros” que emerge. Estos estados preferidos son los candidatos a los estados clásicos.

El rol de los procesos de decoherencia en inducir la clasicidad se ha aclarado sólo recién en la últimas tres décadas. La idea central es simple: El medio ambiente de un sistema cuántico puede, en efecto, monitorear sus estados mediante una continua interacción. La marca que los estados dejan en el medio ambiente contendrá la información de cuales serán los elegidos. Los estados que prevalecen son los que puedan interactuar con el medio ambiente sin ser perturbados. La propiedad clave que estos estados cuasi-clásicos tendrán es, entonces, su insensitividad al monitoreo y consecuentemente su resistencia al entrelazamiento causado por la interacción con el medio ambiente. Estos son también, casi por definición, los únicos estados que describen al sistema por sí sólo y no conjuntamente con el medio ambiente. Los otros estados son superposiciones entre el sistema y medio ambiente y sólo conservan su pureza cuando ambos son analizados conjuntamente en un mayor “super-sistema”.

El hecho que la interacción entre sistemas cuánticos produce entrelazamiento es bien conocido desde los principios de la mecánica cuántica. En efecto como las ideas de la decoherencia y la einselección se basan en la teoría cuántica, y solamente en la teoría cuántica, es lícito preguntarnos porque se tardó tanto en llegar a una explicación natural de los orígenes cuánticos de la clasicidad. Hay varias posibles explicaciones para esta demora. El prejuicio que parece haber demorado más el estudio de sistemas cuánticos abiertos (que interactúan con un medio ambiente) esta basado en un modo clásico de pensar sobre el Universo. Dentro del contexto de la física clásica todas las preguntas siempre se han podido responder pensando en un sistema cerrado (sin interacción con el medio ambiente). La estrategia básica consiste en asegurar la aislación del sistema involucrado agrandando el sistema a estudiar (incluyendo su medio ambiente más próximo). La expectativa era que de este modo uno podía reducir cualquier sistema abierto a uno más grande pero cerrado. Esta estrategia funciona en la física clásica donde el entrelazamiento puede ayudar a satisfacer leyes de conservación como la de la energía.



Falla en el caso cuántico bajo consideración ya que en este caso es la información la que se desea que no se esparza. Es mucho más difícil contener información cuando un sistema se vuelve más grande. En fin, el único sistema macroscópico verdaderamente aislado es el Universo. Y nosotros, los observadores, ciertamente no estamos en condiciones de estudiarlo desde afuera.



# Bibliografía

- [ADR82] Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. Experimental test of bell's inequalities using time- varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49(25):1804–1807, Dec 1982.
- [AGR82] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger. Experimental realization of einstein-podolsky-rosen-bohm gedankenexperiment: A new violation of bell's inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 49(2):91–94, Jul 1982.
- [BB03] Simon C. Benjamin and Sougato Bose. Quantum computing with an always-on heisenberg interaction. *Phys. Rev. Lett.*, 90(24):247901, 2003.
- [BBPS96] Charles H. Bennett, Herbert J. Bernstein, Sandu Popescu, and Benjamin Schumacher. Concentrating partial entanglement by local operations. *Phys. Rev. A*, 53(4):2046–2052, Apr 1996.
- [BDSW96] Charles H. Bennett, David P. DiVincenzo, John A. Smolin, and William K. Wootters. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Phys. Rev. A*, 54(5):3824–3851, Nov 1996.
- [Bel87] J. S. Bell. *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*. Cambridge University Press, 1987.
- [EPR35] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47(10):777–780, May 1935.
- [GG01] Filippo Giraldi and Paolo Grigolini. Quantum entanglement and entropy. *Phys. Rev. A*, 64(3):032310, Aug 2001.
- [HW97] Scott Hill and William K. Wootters. Entanglement of a pair of quantum bits. *Phys. Rev. Lett.*, 78(26):5022–5025, Jun 1997.
- [IAB<sup>+</sup>99] A. Imamog, D. D. Awschalom, G. Burkard, D. P. DiVincenzo, D. Loss, M. Sherwin, and A. Small. Quantum information processing using quantum dot spins and cavity qed. *Phys. Rev. Lett.*, 83(20):4204–4207, Nov 1999.
- [JW28] P. Jordan and E. Wigner. Ueber das paulische aequivalenzverbot. *Z. Physik*, (47):631, 1928.
- [LP01] Noah Linden and Sandu Popescu. Good dynamics versus bad kinematics. is entanglement needed for quantum computation? *Phys. Rev. Lett.*, 87:047901, 2001.

- [LSM61] E. Lieb, T. Schultz, and D. Mattis. Two soluble models of an antiferromagnetic chain. *Ann. Phys.*, 16:407–466, 1961.
- [NC00] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000.
- [Per96] Asher Peres. Separability criterion for density matrices. *Phys. Rev. Lett.*, 77(8):1413–1415, Aug 1996.
- [Pre] J. Preskill. Lecture notes.
- [PZ00] Juan Pablo Paz and Wojciech Hubert Zurek. Environment-induced decoherence and the transition from quantum to classical, 2000.
- [RC05] R. Rossignoli and N. Canosa. Global thermal entanglement in n-qubit systems. *Phys. Rev. A*, 72(1):012335, 2005.
- [roa02] Quantum information science and technology roadmap, 2002.
- [RS41] P. Ring and P. Schuck. *The Nuclear Many-Body Problem*. Springer, 1941.
- [Wer89] Reinhard F. Werner. Quantum states with einstein-podolsky-rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Phys. Rev. A*, 40(8):4277–4281, Oct 1989.
- [Woo98] William K. Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 80(10):2245–2248, Mar 1998.