

# FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE TEORÍAS SOBRE ESPACIOS NOCONMUTATIVOS\*

Valeri V. Dvoeglazov

Universidad de Zacatecas

Apartado Postal 636, Suc. UAZ

Zacatecas 98062, Zac., México

E-mail: [valeri@ahobon.reduaz.mx](mailto:valeri@ahobon.reduaz.mx)

URL: <http://ahobon.reduaz.mx/~valeri/valeri.htm>

(May 13, 2002)

**RESUMEN1.** (Para ArXivos de LANL) En la plática investigamos la cuestión de conmutación de derivadas parciales cuando la función sujeta a diferenciación tiene dependencia tanto explícita como implícita. Aplicamos los resultados a teorías cuánticas.

**RESUMEN2.** Recientemente se han encontrado problemas en la definición de la derivada parcial en el caso de presencia de dependencia, tanto explícita como implícita, de la función sujeta a diferenciación en el análisis clásico. En la presente plática investigamos la influencia de este descubrimiento a la mecánica cuántica y teorías de campos clásicos y cuánticos. Sorprendentemente, ciertos conmutadores de los operadores de las coordenadas de espacio-tiempo *no* son iguales a cero. Entonces, proveemos la base para modernas teorías noconmutativas.

Es muy conocido que la idea que los operadores de 4-coordenadas *no* conmutan  $[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu]_- \neq 0$  ha sido propuesta por H. Snyder [1]. En algunas teorías basadas en este postulado, la simetría de Lorentz aparece ser rota. Recientemente, mucho interés ha sido atraído a esta idea [2,3] en el ámbito de teorías “brane”.

Además, el famoso procedimiento de la derivación de dos ecuaciones de Maxwell ( $\text{div}\mathbf{H} = 0$  y  $\partial\mathbf{H}/\partial t + \text{curl}\mathbf{E} = 0$ ) por Feynman y Dyson [4] contiene intrínsecamente la noconmutatividad de velocidades  $[\dot{x}_i(t), \dot{x}_j(t)]_- = \frac{i\hbar}{m^2}\epsilon_{ijk}B_k$  que también puede ser considerada como una contradicción con las teorías bien aceptadas. Dyson escribe muy inteligentemente: “Feynman en 1948 no fue la única persona que trató de construir teorías fuera de la rama de física convencional... Todos estos programas radicales, incluyendo aquel de Feynman, fracasaron...Yo estoy en desacuerdo con Feynman ahora, como frecuentemente fui cuando él estaba vivo...”

De otro modo, se ha descubierto que el concepto de derivada parcial *no* es bien definido en el caso de la dependencia, tanto explícita como implícita, de la función correspondiente, en la que las derivadas actúan [5,7] (véase también la discusión en [6]). El muy conocido ejemplo de esta situación es el problema del campo de carga acelerada [8].<sup>1</sup>

---

\*Será publicado en las Memorias del VII Reunión Nacional Académica de Física y Matemáticas, ESFM IPN, D. F., México, 13-17 de Mayo, 2002

<sup>1</sup>Primero de todo, Landau y Lifshitz escribieron que las funciones dependan de  $t'$  y solo por

Las propiedades de una derivada entera-parcial son sorprendentes. Nos permitimos estudiar el caso cuando hay dependencias explícita e implícita  $f(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}))$ . Es muy conocido que la energía en relativismo está conectada con el 3-momento como  $E = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ ; se utiliza el sistema de unidades  $c = \hbar = 1$ . En otras palabras, debemos escoger el hiperboloido 3-dimensional de todo espacio de Minkowski, y la energía ya *no* es una cantidad independiente. Entonces, las soluciones de las ecuaciones relativistas son, de hecho, las funciones que contienen ambos tipos de dependencia, explícita e implícita. Nos permitimos calcular el conmutador de la derivada entera-parcial  $\hat{\partial}/\hat{\partial}p_i$  y  $\hat{\partial}/\hat{\partial}E$ .<sup>2</sup> En el caso general, uno tiene

$$\frac{\hat{\partial}f(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}))}{\hat{\partial}p_i} \equiv \frac{\partial f(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}))}{\partial p_i} + \frac{\partial f(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}))}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial p_i}. \quad (1)$$

Aplicando esta regla, encontramos sorprendentemente que

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\hat{\partial}}{\hat{\partial}p_i}, \frac{\hat{\partial}}{\hat{\partial}E} \right] f(\mathbf{p}, E(\mathbf{p})) &= \frac{\hat{\partial}}{\hat{\partial}p_i} \frac{\partial f}{\partial E} - \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial p_i} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial E \partial p_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial E^2} \frac{\partial E}{\partial p_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial E} - \frac{\partial^2 f}{\partial E^2} \frac{\partial E}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial E} \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{\partial E}{\partial p_i} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Entonces, si  $E = \pm\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$  y  $\partial E/\partial p_i = p_i/E$  uno tiene que la expresión (2) ha de ser igual a  $(p_i/E^2) \frac{\partial f(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}))}{\partial E}$ .<sup>3</sup> Con la libertad de elección de la normalización, el coeficiente es el campo eléctrico longitudinal en el base de helicidad (los campos eléctricos y magnéticos

---

$t' + R(t')/c = t$  las dependan implícitamente de  $x, y, z, t$ . Sin embargo, mas adelante (cuando calcularon la formula (63.7)) utilizaron la dependencia explicita de  $R$  de los coordenadas espaciales del punto de observación. Chubykalo y Vlayev declararon que la derivada en tiempo y *curl* *no* conmutan en su caso de consideración del problema. De hecho, Jackson fue desacuerdo con esta declaración, basando su opinión en las definiciones (“las ecuaciones que representan ley de Faraday y la ausencia de cargas magneticas ...se satisfacen automaticamente”; véase su Introducción en [6c]). Sin embargo, el esta de acuerdo con [8] que uno tiene que encontrar “una contribución al derivada parcial para tiempo fijado  $t$  de dependencia explicita de las coordenadas espaciales (del punto de observación).” Škovrlj y Ivezić [6d] nombraron esta derivada parcial como ‘derivada parcial *completa*’; Chubykalo y Vlayev [6a], como ‘derivada *total* con respeto de dada variable’; el termino sugerido por Brownstein [7] es ‘la derivada *entera-parcial*’. De hecho, Chubykalo y Vlayev declararon que sin tomar en cuenta la dependencia explícita de los campos electromagnéticos las ecuaciones de Maxwell *no* satisfacen. No esta bien claro para mi que intentaba dudar Prof. Jackson en su trabajo [6c]. Las funciones de campo y potenciales aparecen ser las funciones del tipo  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t'(\mathbf{x}, t))$

<sup>2</sup>Para hacer una distinción entre derivando la función explícita y aquella que contiene como dependencia explícita tanto implícita, la derivada entera-parcial puede ser denotada como  $\hat{\partial}$ .

<sup>3</sup>Recuerda que suponemos que la dependencia de  $\partial E/\partial p_i$  es la misma que la de función  $f$  sujeta de derivación.

pueden ser derivados de los 4-potenciales que se presentaron en [9]).<sup>4</sup> De otro modo, el conmutador

$$[\frac{\hat{\partial}}{\hat{\partial}p_i}, \frac{\hat{\partial}}{\hat{\partial}p_j}]_- f(\mathbf{p}, E(\mathbf{p})) = \frac{1}{E^3} \frac{\partial f(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}))}{\partial E} [p_i, p_j]_- . \quad (5)$$

Esto puede ser considerado que sea igual a zero si nosotros no vamos a creer en el genio de Feynman. El ha postulado que el conmutador de las velocidades (o, claro, de los 3-momentos) es igual a  $[p_i, p_j] \sim i\hbar\epsilon_{ijk}B^k$ , i.e., al campo magnético.<sup>5</sup>

Además, por razón de que la derivada en energía corresponde al operador de tiempo y la derivada en  $i$ -componente de momento, a  $\hat{x}_i$ , vamos a proponer el siguiente *ansatz* en la representación de momento lineal:

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu]_- = \omega(\mathbf{p}, E(\mathbf{p})) F_{||}^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial E} , \quad (6)$$

con cierta función del peso  $\omega$  que sea diferente por elecciones diferentes del base de spin para un campo antisimétrico tensorial. La ecuación (6) puede sustituir el *ansatz* de H. Snyder.

En la literatura moderna, la idea de la rota invariancia de Lorentz por este método es concurrente con la idea de *la longitud fundamental*, por primera vez introducida por V. G.

<sup>4</sup>Recuerda que en el base escogida tenemos:

$$\epsilon_\mu(\mathbf{p}, \lambda = +1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{i\phi}}{p} \left( 0, \frac{p_x p_z - i p_y p}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}, \frac{p_y p_z + i p_x p}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}, -\sqrt{p_x^2 + p_y^2} \right) , \quad (3a)$$

$$\epsilon_\mu(\mathbf{p}, \lambda = -1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{-i\phi}}{p} \left( 0, \frac{-p_x p_z - i p_y p}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}, \frac{-p_y p_z + i p_x p}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}, +\sqrt{p_x^2 + p_y^2} \right) , \quad (3b)$$

$$\epsilon_\mu(\mathbf{p}, \lambda = 0) = \frac{1}{m} \left( p, -\frac{E}{p} p_x, -\frac{E}{p} p_y, -\frac{E}{p} p_z \right) , \quad (3c)$$

$$\epsilon_\mu(\mathbf{p}, \lambda = 0_t) = \frac{1}{m} \left( E, -p_x, -p_y, -p_z \right) . \quad (3d)$$

Y,

$$\mathbf{E}(\mathbf{p}, \lambda = +1) = -\frac{iE p_z}{\sqrt{2} p p_l} \mathbf{p} - \frac{E}{\sqrt{2} p_l} \tilde{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{p}, \lambda = +1) = -\frac{p_z}{\sqrt{2} p_l} \mathbf{p} + \frac{i p}{\sqrt{2} p_l} \tilde{\mathbf{p}}, \quad (4a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{p}, \lambda = -1) = +\frac{iE p_z}{\sqrt{2} p p_r} \mathbf{p} - \frac{E}{\sqrt{2} p_r} \tilde{\mathbf{p}}^*, \quad \mathbf{B}(\mathbf{p}, \lambda = -1) = -\frac{p_z}{\sqrt{2} p_r} \mathbf{p} - \frac{i p}{\sqrt{2} p_r} \tilde{\mathbf{p}}^*, \quad (4b)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{p}, \lambda = 0) = \frac{i m}{p} \mathbf{p}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{p}, \lambda = 0) = 0, \quad (4c)$$

with  $\tilde{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} p_y \\ -p_x \\ -ip \end{pmatrix}$ .

<sup>5</sup>De hecho, si vamos a poner en correspondencia a los momentos sus operadores de mecánica cuántica (claro, con las clarificaciones apropiadas  $\partial \rightarrow \hat{\partial}$ ), nosotros obtenemos otra vez que, en general, las derivadas *no* conmutan  $[\frac{\hat{\partial}}{\partial x_\mu}, \frac{\hat{\partial}}{\partial x_\nu}]_- \neq 0$ .

Kadyshevsky [10] (véase también Apéndice A) a la física moderna en base a los antiguos artículos de M. Markov. Ambas ideas y teorías correspondientes están discutidos mucho, véase, por ejemplo, [11] (véase, también Apéndice B). Personalmente, para mí la pregunta principal es: qué es la escala espacial cuando la teoría de relatividad empieza a ser incorrecta.

## CONCLUSIÓN

Nosotros encontramos que el conmutator de dos derivadas puede ser *no* igual a zero. Como consecuencia, por ejemplo, la pregunta sigue, si la derivada  $\hat{\partial}^2 f / \hat{\partial} p^\nu \hat{\partial} p^\mu$  es igual a la derivada  $\hat{\partial}^2 f / \hat{\partial} p^\mu \hat{\partial} p^\nu$  en todos los casos?<sup>6</sup> La consideración presentada nos permite dar unos fundamentos a las teorías sobre espacios noconmutativas y induce a ver hacia el desarrollo futuro del análisis clásico para proveer una base matemática rigurosa de operaciones con funciones que tienen ambos tipos de dependencia, explícita e implícita.

## AGRADECIMIENTOS

Estoy agradecido a los profesores Dr. A. Chubykalo, Dr. L. M. Gaggero Sager, Dr. S. Vlayev, Lic. R. Flores Alvarado y los participantes del Seminario de la FF-UAZ, donde esta idea apareció, por discusiones. Los artículos viejos (que aquí han sido citados) y discusiones viejas con sus autores fueron muy útiles para mi entendimiento de nuevas direcciones en física moderna.

## APÉNDICE A. LA LONGITUD FUNDAMENTAL (INVARIANTE).

Pienso que este concepto es equivalente a la consideración de la teoría de campos en el espacio de (anti) de Sitter.

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - M^2 p_4^2 = -M^2 = -\frac{1}{\ell^2}, \quad (7)$$

donde  $c = \hbar = 1$ ,  $M$  es arbitrario (por el momento) y está conectado con el radio de *curvatura*. El nuevo potencial electromagnético parece ser 5-vector que está asociado con el grupo de Sitter  $SO(4, 1)$ . Nuevas transformaciones de norma intrínsecamente dependen de la longitud fundamental  $\ell$ . Nuevas interacciones están mediadas por  $\tau$ -photon (que es análogo al concepto de Horwitz [12]). Existen fermiones exóticos gracias al doblamiento del número de componentes de la función de campo (espinores de ocho componentes):

---

<sup>6</sup>La misma pregunta también aparece cuando tengamos diferenciación con respecto de los coordenadas, que puede tener impacto a los calculos verdaderos del problema de una carga acelerada en electrodinámica clasica.

$$\left[2 \sinh \mu/2 - p_\mu \gamma^\mu - (p_4 - 1) \gamma^5\right] \Psi(p, p_4) = 0 \quad (8a)$$

$$\left[2 \sinh \mu/2 - p_\mu \gamma^\mu + (p_4 - 1) \gamma^5\right] \Psi^R(p, p_4) = 0. \quad (8b)$$

Estas ecuaciones tienen algo en común con las que fueron propuestas por Tokuoka, Sen-Gupta, Raspini y Dvoeglazov [13],  $m = \sinh \mu$ ,  $\sqrt{1 + m^2} = \cosh \mu = m_4$ . En mis trabajos, las ecuaciones fueron derivadas en base a los primeros principios (a la Sakurai). El procedimiento para obtener el desplazamiento  $e - \mu$  esta parecido al método de Bogoliubov de rompimiento de simetría en superconductividad.

## APÉNDICE B. NO-CONMUTATIVIDAD.

Existen dos tipos de teorías noconmutativas:

- El espacio-tiempo noconmutativo *canónico*  $[x_\mu, x_\nu] = i\theta_{\mu\nu}$ ;
- El espacio noconmutativo con álgebra de Lie:  $[x_\mu, x_\nu] = iC_{\mu\nu}^\beta x_\beta$ .

Entre más estudiados está el espacio  $\kappa$ -deformado de Minkowski:

$$[x_m, t] = \frac{i}{\kappa} x_m, \quad [x_m, x_l] = 0. \quad (9)$$

De otro modo fue demostrado que esta relacionado a las teorías basadas en

$$E^2 - c^2 \mathbf{p}^2 - c^4 m^2 + f(E, p, m, L_p) = 0, \quad (10)$$

donde  $L_p \sim \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sim 1.6 \cdot 10^{-35} m$ . Entonces, tenemos la escala de longitud que es independiente del observador (sic!) J. Kowalski-Glikman y G. Amelino-Camelia establecieron este mapeo y analizaron las conductas asintóticas de momento lineal y energía. En la escala de Planck, el mundo puede ser *no*-relativista.

- [1] H. Snyder, Phys. Rev. **71**, 38 (1947); ibid. **72**, 68 (1947).
- [2] S. Doplicher *et al.*, Phys. Lett. B **331**, 39 (1994); S. Majid y H. Ruegg, Phys. Lett. B **334**, 348 (1994); J. Lukierski, H. Ruegg y W. J. Zakrzewski, Ann. Phys. **243**, 90 (1995); N. Seiberg y E. Witten, JHEP **9909**, 032 (1999), hep-th/9908142; I. F. Riad y M. M. Sheikh-Jabbari, JHEP **08**, 045 (2000), hep-th/0008132; M. M. Sheikh-Jabbari, Phys. Rev. Lett. **84**, 5265 (2000), hep-th/0001167; J. Madore *et al.*, Eur. Phys. J. C **16**, 161 (2000).
- [3] S. I. Kruglov, hep-th/0110059 [Sera publicado en el número especial de "Ann. Fond. Broglie" sobre Electrodinámica Contemporánea]; B. G. Sidharth, physics/0110040 [Sera publicado en el número especial de "Ann. Fond. Broglie" sobre Electrodinámica Contemporánea].
- [4] F. Dyson, Am. J. Phys. **58**, 209 (1990). S. Tanimura, Ann. Phys. **220**, 229 (1992); M. Land, N. Shnerb y L. Horwitz, hep-th/9308003.

- [5] A. E. Chubykalo y R. Smirnov-Rueda, Mod. Phys. Lett. A**12**, 1 (1997), hep-th/9608038; A. E. Chubykalo y R. Alvarado Flores, Hadronic J. [Sera publicado], math.CA/9906079.
- [6] A. E. Chubykalo y S. Vlayev, Int. J. Mod. Phys. A**14**, 3789 (1999), physics/9803037; physics/0205041; J. D. Jackson, hep-ph/0203076, L. Škovrlj y T. Ivezić, hep-ph/0203116.
- [7] K. R. Brownstein, Am. J. Phys. **67**, 639 (1999).
- [8] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Teoría de Campos*. 4a Edición Revisada (Pergamon Press, 1979). 402p., §63.
- [9] M. Jacob y G. C. Wick, Ann. Phys. **7**, 404 (1959); H. M. Ruck y W. Greiner, J. Phys. G: Nucl. Phys. **3**, 657 (1977).
- [10] V. G. Kadyshevsky, Nucl. Phys. B**141**, 477 (1978); V. G. Kadyshevsky, M. D. Mateev, R. M. Mir-Kasimov y I. P. Volobuev, Theor. Math. Phys. **40**, 800 (1979) [Teor. Mat. Fiz. **40**, 363 (1979)]; V. G. Kadyshevsky y M. D. Mateev, Phys. Lett. B**106**, 139 (1981); V. G. Kadyshevsky y M. D. Mateev, Nuovo Cim. A**87**, 324 (1985); A. D. Donkov, R. M. Ibadov, V. G. Kadyshevsky, M. D. Mateev y M. V. Chizhov, ibid. **87**, 350 (1985); ibid. **87**, 373 (1985). Véase también el trabajo antiguo: V. G. Kadyshevsky, R. M. Mir-Kasimov y N. B. Skachkov, Yad. Fiz. **9**, 212 (1969). Véase también referencias a los trabajos antiguos de M. Markov en los artículos antes citados.
- [11] A. Kempf, G. Mangano y R. B. Mann, Phys. Rev. D**52**, 1108 (1995); G. Amelino-Camelia, Nature **408**, 661 (2000); gr-qc/0012051; hep-th/0012238; gr-qc/0106004; J. Kowalski-Glikman, hep-th/0102098; G. Amelino-Camelia y M. Arzano, hep-th/0105120; N. R. Bruno, G. Amelino-Camelia y J. Kowalski-Glikman, hep-th/0107039.
- [12] L. P. Horwitz, *Dynamical Relativistic Systems and the Generalized Gauge Fields of Manifestly Covariant Theories*. En *Photon and Poincaré Group*. Ed. V. Dvoeglazov. Serie *Contemporary Fundamental Physics* (Nova Science Publishers, Commack, 1999), p. 205.
- [13] Z. Tokuoka, Prog. Theor. Phys. **37**, 603 (1967); N. D. S. Gupta, Nucl. Phys. B**4**, 147 (1967); A. Raspini, Int. J. Theor. Phys. **33**, 1503 (1994); Fizika B**5**, 159 (1996); ibid. **6**, 123 (1997); ibid. **7**, 83 (1998); *A Review of Some Alternative Descriptions of Neutrino*. En *Photon and Poincaré Group*. Ed. V. Dvoeglazov. Serie *Contemporary Fundamental Physics* (Nova Science Publishers, Commack, 1999), p. 181; V. V. Dvoeglazov, Ann. Fond. Broglie **25** (2000) 81; *Generalized Maxwell and Weyl Equations for Massless Particles*. sera publicado en las *Memorias de IV Escuela Mexicana de Gravitacion, Huatulco, México, 2000*, math-ph/0102001.