

La Probabilidad de la Mecánica Cuántica:
 Una Introducción en noventa minutos
 Stephen Bruce Sontz
 Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.
 (CIMAT)
 Guanajuato, Gto., México
 email: sontz@cimat.mx

Resumen

Einstein decía en referencia a la mecánica cuántica: “The old one does not play dice” - y es cierto, porque la probabilidad que se usa en la mecánica cuántica no es la probabilidad clásica de juegos como los dados. Es el primer ejemplo históricamente hablando de una probabilidad que se llama no clásica o no conmutativa. Vamos a presentar lo básico de esta probabilidad cuántica a un nivel introductorio para estudiantes de licenciatura con conocimiento de álgebra lineal. Usamos la teoría de probabilidad con un espacio finito como analogía para el caso de dimensión finita de la probabilidad cuántica. Además hay un apéndice breve sobre un tema relacionado (qubits) para indicar que las ideas presentadas aquí tienen otras aplicaciones. Conocimiento de la mecánica cuántica no es necesario.

1 Probabilidad Clásica - Caso Finito

Antes de empezar notamos que no demostramos todo porque el artículo está basado en una conferencia de noventa minutos. Entonces, cada afirmación sin demostración o con demostración incompleta es un ejercicio para el lector. Un caso especial de la Probabilidad Clásica consta de:

1. un conjunto Ω que es *finito* y *no vacío*,
2. *todos* los subconjuntos $E \subset \Omega$ que se llaman *Eventos*,
3. una *Función de Probabilidad* $P : E \mapsto P(E) \in [0, 1]$ es decir,
 $0 \leq P(E) \leq 1$ para cada evento $E \subset \Omega$.

Se dice que $P(E)$ es la *Probabilidad del Evento* E , si las propiedades siguientes se cumplen:

1. $P(\emptyset) = 0$ (donde \emptyset es el conjunto vacío),
2. $P(\Omega) = 1$,
3. $P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_k)$ donde E_1, \dots, E_k son *Eventos Disjuntos*, o sea, $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Así es la teoría (Fermat, Pascal; 1600's) desarrollada para estudiar juegos como las cartas. Hoy día tiene muchas aplicaciones en ciencias como biología, ingeniería, física, y por cierto matemáticas entre otras.

No vamos a ver en este artículo la teoría de *Probabilidad Clásica* debida a Kolmogorov (1933, véase [7]) para el caso cuando Ω es *infinito*, dado que tiene un nivel más avanzado con muchos detalles técnicos.

Un comentario clave aquí es que hay experimentos y observaciones con la propiedad de que cuando están hechos bajo condiciones iniciales iguales (o esencialmente iguales) no siempre dan el mismo resultado. Es decir, hay un conjunto de dos o más resultados que son las mediciones posibles. Son los casos para los cuales hay necesidad de una teoría que no sea *determinista* (que describe una teoría que predice exactamente un solo resultado para cada experimento u observación). En cambio una teoría que describe situaciones donde hay más de un resultado posible se llama una *Teoría de Probabilidad* que sea la teoría clásica de Kolmogorov u otra.

Entonces son importantes las estructuras matemáticas en una teoría de probabilidad que corresponden a los números reales *medidos* (u *observados*) en experimentos. En la probabilidad clásica, esta estructura se llama una *Variable Aleatoria* y es por definición una función con valores reales:

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

La idea detrás de esta definición es que los números reales en el rango (o imagen) de X , $\text{Ran}(X) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega, \lambda = X(\omega)\}$, son todos los valores medibles posibles de la cantidad experimental correspondiente a X .

Se define el *Valor Esperado* (o más bien el *Valor Promedio*) de X con respecto a P por

$$\langle X \rangle := \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) X(\omega) \quad \text{donde} \quad P(\omega) \equiv P(\{\omega\}).$$

Notamos que el conjunto $\{X \mid X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}$ de todas las variables aleatorias es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} de dimensión finita $n = \text{card}(\Omega) \geq 1$. También tiene un producto conmutativo dado por la multiplicación usual de funciones:

$$XY(\omega) = X \cdot Y(\omega) := X(\omega)Y(\omega)$$

para cada $\omega \in \Omega$ donde X, Y son variables aleatorias.

2 Mecánica Cuántica en Dimensión Finita

La *Mecánica Cuántica* de Pauli y Wigner (~ 1930) empieza con el espacio vectorial

$$\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \mid z_j \in \mathbb{C} \text{ para } 1 \leq j \leq n\}$$

de *dimensión finita* $n \geq 1$ sobre los números complejos \mathbb{C} con su *producto interior*

$$\langle z, w \rangle := \sum_{j=1}^n z_j^* w_j.$$

Aquí $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$, β^* es la *conjugada compleja* de $\beta \in \mathbb{C}$. También, \mathbb{C}^n tiene una *norma* $\|\cdot\|$ dada por

$$\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = \sum_{j=1}^n z_j^* z_j = \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}^n.$$

No vamos a ver en este artículo la teoría de la *Mecánica Cuántica* de Heisenberg y Schrödinger (1925-26) para el caso de dimensión *infinita*, dado que tiene un nivel más avanzado con muchos detalles técnicos. Al igual que la probabilidad clásica general de Kolmogorov, es importante pero no tenemos que estudiarla por lo pronto para nuestras metas. Por cierto, el estudiante interesado tiene que aprender tarde o temprano en el caso general la probabilidad clásica, la mecánica cuántica y la probabilidad cuántica (entre otros temas). Por lo tanto recomendamos fuertemente la *lectura*.

Para definir las estructuras matemáticas en la mecánica cuántica que corresponden a cantidades medidas en experimento, introducimos el conjunto de *matrices* complejas $n \times n$ (con n entero, $n \geq 1$)

$$\text{MAT}(n; \mathbb{C}) := \{A = (A_{jk}), \text{ matriz } n \times n, A_{jk} \in \mathbb{C}, 1 \leq j, k \leq n\}.$$

N.B. Cada matriz A define un mapeo lineal $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ en esta manera: $(Az)_j = \sum_{k=1}^n A_{jk} z_k$. (Usamos un abuso común de notación; el símbolo A denota a la matriz y al mapeo lineal correspondiente.) Recíprocamente cada mapeo lineal $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ viene en la manera indicada de una matriz única en $\text{MAT}(n; \mathbb{C})$. Resulta que $\text{MAT}(n; \mathbb{C})$ es un espacio vectorial de dimensión n^2 sobre \mathbb{C} . Cuenta con el producto usual de matrices que es *no conmutativo* si $n \geq 2$. Por ser un espacio vectorial con producto compatible, resulta que $\text{MAT}(n; \mathbb{C})$ es un *álgebra* sobre \mathbb{C} .

Toda matriz A tiene una *matriz adjunta* A^* donde $(A^*)_{jk} := (A_{kj})^*$ para $1 \leq j, k \leq n$. Es la matriz transpuesta conjugada. Resulta que A^* es la matriz única tal que $\langle A^*z, w \rangle = \langle z, Aw \rangle$ para todos vectores $z, w \in \mathbb{C}^n$.

Si $A = A^*$ se dice que A es *Auto-Adjunta* (o *Hermitiana*). Notación:

$$\text{HERM}(n) := \{A \in \text{MAT}(n; \mathbb{C}) \mid A = A^*\}.$$

Las matrices auto-adjuntas corresponden a muchas de las cantidades medidas en experimentos con sistemas cuánticos. Vamos a ver más adelante con todo detalle la correspondencia, pero por lo pronto cabe subrayar que es por eso que las matrices auto-adjuntas son importantes en física cuántica.

Ejercicio: $\text{HERM}(n)$ es un espacio vectorial sobre los números reales \mathbb{R} y *no* lo es sobre los números complejos \mathbb{C} . No es una subálgebra de $\text{MAT}(n; \mathbb{C})$ si $n \geq 2$. Además: $\dim_{\mathbb{R}} \text{HERM}(n) = n^2$. ■

Ejemplo: $\text{HERM}(2)$ tiene dimensión $2^2 = 4$ y una base está dada por las tres *Matrices de Pauli*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y la identidad, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (Aquí $i = \sqrt{-1}$.) Unas propiedades de ellas:

$$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 = -\sigma_2\sigma_1, \quad \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1 = -\sigma_3\sigma_2, \quad \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2 = -\sigma_1\sigma_3.$$

3 Teoría Espectral

Vamos a usar un teorema fundamental del álgebra lineal: cada matriz auto-adjunta tiene una *diagonalización*. La siguiente es una manera para enunciar este teorema. Una referencia para esta sección es el texto [4] por Halmos.

Sea A una matriz en $\text{MAT}(n; \mathbb{C})$. Se define su *Polinomio Característico* por

$$p_A(\lambda) := \det(\lambda I - A).$$

Es un polinomio de grado $n \geq 1$ en λ con coeficientes complejos, donde λ es una variable compleja. (Aquí $I \in \text{MAT}(n; \mathbb{C})$ es la matriz identidad y \det es el determinante.) Podemos escribir el conjunto de las raíces complejas *distintas* de $p_A(\lambda)$ como

$$\text{SPEC}(A) := \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\} \subset \mathbb{C}$$

con $1 \leq k \leq n$ (por el Teorema Fundamental de Álgebra). Decimos que $\text{SPEC}(A)$ es el *Espectro* de A y que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ son los *Eigenvalores* de A . Hay varias caracterizaciones de un eigenvalor. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\beta \in \mathbb{C}$ es un eigenvalor de A .
- $p_A(\beta) = 0$.
- $\det(\beta I - A) = 0$.
- La matriz $\beta I - A$ no es invertible.
- El subespacio $\ker(\beta I - A)$ no es cero.
(Aquí $\ker(B) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid Bz = 0\}$ para $B : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ lineal.)
- Existe $z \in \mathbb{C}^n$ con $z \neq 0$ y $Az = \beta z$.
(En tal caso z se llama un *eigenvector de A asociado a β* .)

Quizás la última afirmación sea la propiedad más familiar para el lector. Sin embargo, usaremos la penúltima. Explícitamente, definimos los subespacios

$$V_j := \ker(\lambda_j I - A) \neq 0 \quad \text{para } 1 \leq j \leq k.$$

Entonces: $z \in V_j \iff (\lambda_j I - A)z = 0 \iff Az = \lambda_j z$, o sea, la acción de A en el subespacio V_j es igual a la acción de multiplicación por λ_j . Se dice que A tiene el valor λ_j en el subespacio V_j .

Si además A es auto-adjunta, entonces tenemos:

- Todos sus eigenvalores son reales.
- Los subespacios V_j son ortogonales, o sea,
 $\langle z_i, z_j \rangle = 0$ si $z_i \in V_i, z_j \in V_j$ para $i \neq j$.
- $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$. (*Suma Directa*)

Dejamos la tercera afirmación como ejercicio. Para probar las dos primeras afirmaciones, tomamos $z_i \in V_i, z_j \in V_j$. Entonces para $1 \leq i, j \leq k$ tenemos

$$\lambda_j \langle z_i, z_j \rangle = \langle z_i, \lambda_j z_j \rangle = \langle z_i, Az_j \rangle = \langle Az_i, z_j \rangle = \langle \lambda_i z_i, z_j \rangle = \lambda_i^* \langle z_i, z_j \rangle.$$

Tomando $i = j$ y $z_i \neq 0$ y usando $\langle z_i, z_i \rangle \neq 0$, concluimos que $\lambda_i = \lambda_i^*$, es decir λ_i es real. Luego tomando $i \neq j$, tenemos que $(\lambda_i - \lambda_j) \langle z_i, z_j \rangle = 0$, que implica $\langle z_i, z_j \rangle = 0$ porque $\lambda_i \neq \lambda_j$.

Entonces, al formar la unión de una base ortonormal de V_1 , de una base ortonormal de V_2 , \dots , de una base ortonormal de V_k , obtenemos una base ortonormal de \mathbb{C}^n con la propiedad que el mapeo lineal

$$A = A^* : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

tiene una matriz diagonal en esta base ortonormal nueva. Esto se llama la *diagonalización* de la matriz auto-adjunta A . Se encuentran a lo largo de la diagonal $\dim V_1 \geq 1$ ocurrencias de λ_1 , $\dim V_2 \geq 1$ ocurrencias de λ_2, \dots , $\dim V_k \geq 1$ ocurrencias de λ_k .

Vamos a seguir un paso más adelante. En lugar de usar subespacios de \mathbb{C}^n vamos a usar proyectores ortogonales. Sea $W \subset \mathbb{C}^n$ un subespacio de \mathbb{C}^n . Resulta que podemos *descomponer* \mathbb{C}^n como una *suma directa*,

$$\mathbb{C}^n = W \oplus W^\perp,$$

donde el subespacio

$$W^\perp := \{v \in \mathbb{C}^n \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ para todo } w \in W\}$$

se llama el *complemento ortogonal* de W en \mathbb{C}^n .

Entonces, al subespacio W asociamos el mapeo lineal $E_W : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ definido por

$$E_W z := w$$

para $z \in \mathbb{C}^n$ con $z = w + v$ su descomposición única con $w \in W$, $v \in W^\perp$. Resulta que

$$E_W = E_W^* = E_W^2 \quad \text{y} \quad \text{Ran}(E_W) = W.$$

(Aquí el rango de $B : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es $\text{Ran}(B) := \{\tilde{z} \in \mathbb{C}^n \mid \exists z \in \mathbb{C}^n, \tilde{z} = Bz\}$.) Si $E : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es un mapeo lineal que satisface $E = E^* = E^2$, se llama un *Proyector Ortogonal*. Y se dice que E_W es el *Proyector Ortogonal sobre W* .

Recíprocamente, para cada proyector ortogonal E tenemos que $E = E_W$ para un subespacio único, a saber, $W = \text{Ran}(E)$. En fin de cuentas, hemos obtenido una correspondencia uno-a-uno y sobre (es decir, una *biyección*) entre el conjunto de todos los subespacios W de \mathbb{C}^n y el conjunto de todos los proyectores ortogonales en $\text{MAT}(n; \mathbb{C})$: $W \longleftrightarrow E_W$.

Por fin, podemos enunciar el teorema de diagonalización. Este teorema usa el concepto de proyector ortonormal para expresar los resultados que ya hemos visto anteriormente.

Teorema: Si $A \in \text{MAT}(n, \mathbb{C})$ es una matriz auto-adjunta, entonces existe un entero k con $1 \leq k \leq n$ y existen proyectores ortogonales $E_1 \neq 0, \dots, E_k \neq 0$ en $\text{MAT}(n, \mathbb{C})$ y números reales *distintos* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tales que

$$\begin{aligned} E_i E_j &= 0 \quad \text{si } i \neq j, \\ I &= E_1 + E_2 + \dots + E_k, \\ A &= \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_k E_k. \end{aligned}$$

Además, el entero k , los proyectores ortogonales y los números reales (con las propiedades indicadas) son únicos. ■

Se llama *Teorema Espectral* para matrices auto-adjuntas. Recíprocamente, si tenemos un entero $k \geq 1$ y proyectores ortogonales y números reales con las propiedades indicadas y luego definimos

$$A := \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_k E_k,$$

resulta que A es una matriz auto-adjunta. Esta representación de A se conoce como su *resolución espectral*. Es una *forma canónica* de A .

Es importante notar que hay una biyección: $\lambda_j \longleftrightarrow E_j$.

4 Más del Mundo Clásico

Vamos a considerar nuevamente la teoría clásica de Ω finito y no vacío con $n = \text{card}(\Omega) \geq 1$, pero ahora sin función de probabilidad P .

Para cada evento $\Lambda \subset \Omega$ definimos su *función característica* χ_Λ por

$$\chi_\Lambda(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in \Lambda, \\ 0 & \text{si } \omega \in \Omega, \omega \notin \Lambda. \end{cases}$$

Se sigue que $\chi_\Lambda = \chi_\Lambda^* = \chi_\Lambda^2$ y además $\Lambda = \chi_\Lambda^{-1}(1)$. (Aquí $\chi_\Lambda^2 = \chi_\Lambda \cdot \chi_\Lambda$, el producto conmutativo usual de funciones como ya hemos definido.)

Además resulta que cada función $\chi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ que satisface $\chi = \chi^* = \chi^2$ es la función característica de un evento único Λ , a saber, $\chi = \chi_\Lambda$ donde $\Lambda = \chi^{-1}(1)$. En fin de cuentas tenemos una correspondencia uno-a-uno y sobre (o sea, una biyección) entre el conjunto de eventos Λ en Ω y el conjunto de las funciones características con dominio Ω : $\Lambda \longleftrightarrow \chi_\Lambda$.

Además supongamos que $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función arbitraria (variable aleatoria). Entonces su rango satisface $\text{Ran}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ para un entero k tal que $1 \leq k \leq n$ y para $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ *números reales distintos*.

N.B. Si definimos el espectro de la función A (notación: $\text{SPEC}(A)$) como el conjunto de números reales λ tal que la función $\lambda - A$ no tiene inversa multiplicativa, entonces $\text{SPEC}(A) = \text{Ran}(A)$.

Para cada “eigenvalor” $\lambda_j \in \text{SPEC}(A)$ definimos el evento

$$\Lambda_j := \ker(\lambda_j - A) = \{\omega \in \Omega \mid A(\omega) = \lambda_j\} = A^{-1}(\lambda_j) \neq \emptyset.$$

Se dice que Λ_j es el evento donde (o cuando) A *tiene el valor* λ_j . (Se tiene que $A^{-1}(\lambda) = \emptyset$ si $\lambda \notin \text{SPEC}(A)$.) Se sigue que son *eventos disjuntos* con

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^k \Lambda_j.$$

Entonces, $E_j := \chi_{\Lambda_j} \neq 0$ para cada $j = 1, 2, \dots, k$. Otra vez hay una biyección importante: $\lambda_j \longleftrightarrow E_j$. Además,

$$\begin{aligned} E_i E_j &= 0 \quad \text{si } i \neq j, \\ 1 &= E_1 + E_2 + \dots + E_k, \\ A &= \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_k E_k. \end{aligned}$$

Se llama la *forma canónica* de la función simple A . Es un lema básico en un curso introductorio de la medida. Hay que recordar que una *función simple* es una función (medible) cuyo rango tiene un número finito de valores. Por cierto, este lema no dice nada sobre medidas, como el teorema espectral para matrices auto-adjuntas no dice nada sobre medidas de probabilidad cuántica.

Entonces hay la misma estructura algebraica en este caso conmutativo de funciones como en el caso no conmutativo de matrices. (A veces se dice que “*Cuantización es Operadores en lugar de Funciones*”. No es un teorema tal cual. Resulta que hay muchas cuantizaciones. Pero es una idea que puede ser muy útil, aún más útil que unos teoremas.)

5 Regresando al Mundo Cuántico

Sabiendo como interpretar la forma canónica de una función simple, podemos dar por analogía la interpretación física en la mecánica cuántica de una matriz auto-adjunta $A = A^*$. Primero, cada eigenvalor λ_j de A es un *resultado posible* de un experimento que mide la cantidad física correspondiente a A , y no hay otros resultados posibles.

También el proyector ortogonal asociado E_j debe ser el evento cuántico que corresponde a la medición de λ_j . Por lo tanto, definimos un *Evento (Cuántico)* como un proyector ortogonal E en $\text{MAT}(n; \mathbb{C})$, o más bien, un subespacio V de \mathbb{C}^n .

Ejemplo: Las matrices $\frac{1}{2}\sigma_1, \frac{1}{2}\sigma_2, \frac{1}{2}\sigma_3$ corresponden a los tres componentes en direcciones ortogonales en el espacio euclideo \mathbb{R}^3 del *spin* de un sistema físico con spin $1/2$. (Para aprender la *física* de spin, hay que leer un texto de física cuántica. Aquí hablamos solamente de la *matemática* de spin.)

Ejercicio: Encontrar la resolución espectral para estas tres matrices.

Si E es un evento con $\dim_{\mathbb{C}} \text{Ran}(E) = 1$, se dice que es un *Estado* o un *Estado Cuántico (Puro)*. Equivalentemente, un estado es un subespacio $V \subset \mathbb{C}^n$ de dimensión uno. (Es difícil explicar esta definición sin mencionar la evolución temporal de un sistema cuántico, cosa que no haremos.)

En física se dice que un estado es un vector $z \in \mathbb{C}^n$ con $\|z\| = 1$, porque este vector define el subespacio $\mathbb{C}z \subset \mathbb{C}^n$ de dimensión uno. Por cierto, hay que *identificar* vectores $w, z \in \mathbb{C}^n$ con $\|w\| = \|z\| = 1 \iff \mathbb{C}w = \mathbb{C}z \iff$ existe $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$ tal que $w = \alpha z$. (Aquí $\mathbb{C}z := \{\lambda z \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$.)

Los expertos ya saben que el conjunto de los estados cuánticos puros es el *espacio proyectivo complejo* de dimensión $n - 1$ sobre los complejos: $\mathbb{C}P^{n-1}$. Para los que todavía no son expertos recomendamos nuevamente la *lectura*.

Ya tenemos el lenguaje suficiente para describir la Probabilidad Cuántica.

Un Principio de la Mecánica Cuántica:

Si un sistema cuántico empieza en un estado $z \in \mathbb{C}^n$ con $\|z\| = 1$ y se mide la cantidad física asociada a la matriz auto-adjunta

$$A = A^* = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_k E_k,$$

escrita en su resolución espectral, entonces el experimento da el valor λ_j con *Frecuencia Relativa*

$$\langle z, E_j z \rangle = \|E_j z\|^2.$$

(Después de la medición de λ_j , el estado final es $E_j z / \|E_j z\|$, un cambio que se llama: *el colapso de la función de onda*. Pero no usaremos esto.) ■

Primero, debemos notar que los números $\langle z, E_j z \rangle$ para $j = 1, \dots, k$ satisfacen de hecho las propiedades siguientes de frecuencias relativas:

$$0 \leq \langle z, E_j z \rangle \leq 1 \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^k \langle z, E_j z \rangle = 1.$$

Si se mide λ_j se dice que el evento cuántico E_j ha *sucedido*. Pero cada evento cuántico E se encuentra en la resolución espectral de alguna matriz auto-adjunta, digamos la matriz $E = E^*$ misma. Entonces, tenemos que definir la probabilidad para cada evento, no meramente para los eventos en la resolución espectral de A . Por lo tanto, definimos la *Probabilidad Cuántica* para que suceda el evento cuántico E (arbitrario) en el estado $z \in \mathbb{C}^n$ con $\|z\| = 1$ por

$$\text{Prob}(E; z) := \langle z, Ez \rangle = \|Ez\|^2.$$

Es importantísimo notar que el mapeo $E \rightarrow \langle z, Ez \rangle \in [0, 1]$ (con el estado z fijo) *no* es una función de probabilidad clásica (de Kolmogorov) si $n \geq 2$. Supongamos que tenemos una matriz auto-adjunta $A = A^* = \sum_{j=1}^k \lambda_j E_j$ (en la resolución espectral) y un estado $z \in \mathbb{C}^n$, o sea, $\|z\| = 1$. Entonces el *Valor Esperado de A en el estado z* está definido por

$$\langle A \rangle_z := \sum_{j=1}^k \lambda_j \langle z, E_j z \rangle = \langle z, \sum_{j=1}^k \lambda_j E_j z \rangle = \langle z, Az \rangle.$$

Esto nos da otra manera de pensar en que es un estado z . Se define el mapeo lineal $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ donde $\mathcal{A} = \text{MAT}(n; \mathbb{C})$ con un estado z fijo por

$$\rho(M) := \langle z, Mz \rangle \quad \text{para } M \in \mathcal{A}.$$

Entonces, tenemos las dos propiedades siguientes.

ρ es *positivo*: $\rho(M^*M) \geq 0$ para toda $M \in \mathcal{A}$.

ρ es *normalizado*: $\rho(I) = 1$.

Así se puede generalizar la idea de un estado al contexto de una *-álgebra \mathcal{A} sobre \mathbb{C} con unidad I que es un álgebra sobre los complejos \mathbb{C} con un mapeo $A \mapsto A^* \in \mathcal{A}$ para cada $A \in \mathcal{A}$ tal que para $A, B \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos

1. $(A + B)^* = A^* + B^*$,
2. $(\lambda A)^* = \lambda^* A^*$,
3. $(AB)^* = B^* A^*$,
4. $A^{**} = A$.

Un *Estado* de una *-álgebra \mathcal{A} (de dimensión finita, digamos) sobre \mathbb{C} es un mapeo lineal $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ que es positivo y normalizado (como arriba). Los

elementos $A \in \mathcal{A}$ tal que $A = A^*$ (que se llaman los elementos *Hermitianos* o *Auto-Adjuntos*) corresponden a las matrices auto-adjuntas en la mecánica cuántica y, como veremos al rato, a las variables aleatorias en la probabilidad clásica. (A veces se dice que cada elemento $A \in \mathcal{A}$ es una variable aleatoria.)

La probabilidad clásica (Ω, P) es el caso cuando $\mathcal{A} = \{Y \mid Y : \Omega \rightarrow \mathbb{C}\}$ es la *-álgebra sobre \mathbb{C} y $\rho(Y) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega)Y(\omega)$ es el estado. Entonces los elementos auto-adjuntos en \mathcal{A} son las variables aleatorias. Además se suele decir que P es el estado, debido que ρ determina P únicamente.

6 Conclusión

Entonces la *Probabilidad Cuántica* (que empezó con los trabajos de Murray y von Neumann en los 1930's) en nuestro caso de dimensión finita consta de:

- El espacio vectorial \mathbb{C}^n con su producto interior.
- Los eventos cuánticos.
- Los estados cuánticos.
- Las matrices auto-adjuntas.
- Las fórmulas para calcular las probabilidades cuánticas, valores esperados, etcétera.

7 El Porvenir

La finalidad de este artículo es darle al lector las ganas para seguir adelante con estudios de la probabilidad cuántica y temas relacionados. Damos ahora unas referencias, pero es una lista pequeña. Son nuestras preferencias. Hay muchas otras referencias buenas.

Antes que nada vale la pena aprender un poco de la física cuántica. Una introducción muy intuitiva es [3].

Unas referencias para la probabilidad cuántica son [2], [6], [8] y [12]. La última referencia muestra claramente que hay muchas probabilidades no clásicas.

Luego hay que estudiar la teoría espectral en dimensión infinita. Para eso uno puede leer [9] o volumen I de [13].

Para la ecuación de Schrödinger, véase [15] para un nivel introductorio y los volúmenes II, III y IV de Reed y Simon [13] para un nivel avanzado. Para otros modelos de evolución temporal, incluyendo los procesos cuánticos estocásticos, véase [1].

Para una introducción a spin (y bosones y fermiones), véase [15].

Para el cálculo cuántico estocástico, hay el texto [10].

Para la probabilidad libre, que es una teoría de probabilidad no clásica muy estudiada, recomendamos [5] y [16],

Por cierto, hay aún más temas interesantes como independencia, álgebras de von Neumann, teoremas de límite central, espacios de Fock, movimiento Browniano, etcétera. Pero el lector debe descubrir el placer de buscar por su propia cuenta en bibliotecas, librerías e Internet.

8 Apéndice: Qubits

Un caso interesante de la mecánica cuántica es $n = 2$, donde tenemos que el espacio de estados cuánticos puros es $\mathbb{C}P^1 \cong S^3/S^1 \cong S^2$. (Aquí S^n es la esfera de dimensión n de vectores de norma uno en \mathbb{R}^{n+1} .)

Un estado tal se llama *Qubit* en la *Computación Cuántica* y en la *Información Cuántica*. Entonces hay una esfera de qubits.

En el caso $n = 2$ de probabilidad clásica, tenemos $\Omega = \{\uparrow, \downarrow\}$, digamos, que tiene dos estados puros que son $\{\uparrow\}$ y $\{\downarrow\}$; cada uno se llama un *Bit*. Entonces hay solamente dos bits.

Por eso hay una diferencia muy grande entre la *computación cuántica* basada en qubits y la *computación clásica* basada en bits. Por ejemplo hay *algoritmos cuánticos* muchísimo más rápidos que los correspondientes *algoritmos clásicos* conocidos. Hay mucha investigación en estas áreas con muchos problemas abiertos. Véase [11] y [14].

9 Agradecimientos

Este artículo empezó como una conferencia que impartí en el evento “Métodos Estocásticos en Sistemas Dinámicos, La Probabilidad y su interacción con otras áreas de la Matemática”. Tuvo lugar en el Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), Guanajuato, Gto., México, 26-30 de enero de 2009.

Quiero agradecer a los organizadores (Xavier Gómez Mont, Renato Iturriaga, José Alfredo López Mimbela, Joaquín Ortega y Ekaterina Todorova) por su invitación tan amable a participar en ese evento. Por su ayuda con el uso del español, le doy muchas gracias a Lenin Echavarría Cepeda. También quiero subrayar que el entusiasmo, interés y apoyo de Luigi Accardi son cosas sin las cuales nunca habría yo empezado a aprender las maravillas de la probabilidad cuántica. Molte grazie, Gigi.

References

- [1] A.M. Chebotarev, Lectures on Quantum Probability, Textos Nivel Avanzado 14, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 2000.
- [2] E.B. Davies, Quantum Theory of Open Systems, Academic Press, 1976.
- [3] R. Feynman, R.B. Leighton y M. Sands, The Feynman Lectures on Physics, Vol. III, Addison Wesley, 1965.
- [4] P. Halmos, Finite-Dimensional Vector Spaces, Springer, 1974.
- [5] F. Hiai y D. Petz, The Semicircle Law, Free Random Variables and Entropy, Math. Surveys and Monographs, Vol. 77, American Mathematical Society, 2000.
- [6] A.S. Holevo, Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory, North-Holland, 1982.
- [7] A. Kolmogorov, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer, 1933; Traducción en inglés: Foundations of the Theory of Probability, Chelsea, 1956.
- [8] P.-A. Meyer, Quantum Probability for Probabilists, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1538, Springer, 1993.
- [9] J. von Neumann, Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, Princeton University Press, 1955.

- [10] K.R. Parthasarathy, An Introduction to Quantum Stochastic Calculus, Birkhäuser, 1992.
- [11] D. Petz, Quantum Information Theory and Quantum Statistics, Springer, 2007.
- [12] M. Rédei y S.J. Summers, Quantum Probability Theory, preprint, 2006. arXiv:quant-ph/0601158 v3
- [13] M. Reed y B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, Vols. I–IV, Academic Press, 1972–1979.
- [14] M.B. Ruskai, Open Problems in Quantum Information Theory, preprint, 2007. arXiv:0708.1902v1 [quant-ph]
- [15] A. Sudbery, Quantum Mechanics and the Particles of Nature: An Outline for Mathematicians, Cambridge University Press, 1986.
- [16] D.V. Voiculescu, K.J. Dykema y A. Nica, Free Random Variables, American Mathematical Society, 1992.