# EL POLINOMIO DE JONES Y LA MECÁNICA CUÁNTICA

# RĂZVAN GELCA

ABSTRACT. From the moment of its discovery, the Jones polynomial of a knot has been linked to quantum physics. The main discovery, made by E. Witten, was that it is related to quantum field theory, which unfortunately lacks a mathematical foundation. But already in Witten's work it was noted that the Jones polynomial is related to quantum mechanics.

In this paper we discuss progress made in the study of the Jones polynomial from the point of view of quantum mechanics. This study reduces to the understanding of the quantization of the moduli space of flat SU(2)-connections on a surface with the Chern-Simons lagrangian. We outline some background material, then present the particular example of the torus, in which case it is known that the quantization in question is the Weyl quantization. The paper concludes with a possible application of this theory to the study of the fractional quantum Hall effect, an idea originating in the works of Moore and Read.

### 1. Resumen

En este artículo de exposición se presenta una introducción al estudio del polinomio de Jones de un nudo desde un punto de vista físico basado en la  $mec\'anica~cu\'antica.^1$ 

El polinomio de Jones de un nudo fue descubierto por V.F.R. Jones [14] como una consecuencia de sus investigaciones en la teoría de álgebras de operadores. La definición del polinomio es muy sencilla y nos permite calcularlo facilmente, pero para entender y estudiar sus propiedades se necesita un punto de vista mas profundo y mas geométrico. Witten explicó [24] que el polinomio de Jones esta relacionado a la teoría de campos cuánticos. Pero la teoría de campos cuánticos requerida no tiene un fundamento matemático riguroso al momento de escribir esto.

<sup>1991</sup> Mathematics Subject Classification. 81S10, 81R50, 57R56, 81T45, 57M25.

Key words and phrases. Jones polynomial, topological quantum field theory, moduli spaces of flat connections, quantization.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Éste artículo ha sido publicado en Aportaciones Mat. Comun., 36, Soc. Mat. Mexicana, 2006, 85–99.

En su artículo, Witten explicó que el estudio del polinomio de Jones se puede reducir a un problema de mecánica cuántica. El problema es de cuantizar el espacio de campos con simetría interior SU(2) en una superficie modulo cambios locales de coordenadas, que es el mismo que el espacio de moduli de conexiones planas de su(2) en la superficie. El espacio de Hilbert de esta cuantización se entiende bien, y consiste de las secciones holomórficas del haz en líneas de Chern-Simons (que se llaman funciones theta generalizadas) [9]. Por otro lado, aunque hay varios trabajos en esta dirección [1] [2], [12], los operadores de la cuantización (los observables cuánticos) son un misterio. Todavía no hay una respuesta a la pregunta principal: ¿Que procedimiento de cuantización corresponde al polinomio de Jones?

En lo que sigue presentaremos la definición del polinomio de Jones y su relación con la teoría de campos cuánticos. Luego explicaremos la reducción de esta teoría de campos cuánticos al problema de cuantización del espacio de moduli de conexiones planas de su(2) en una supeficie y revisamos las cuestiones básicas de mecánica cuántica. El artículo sigue con una sección que discute la estructura del espacio de moduli de conexiones planas de su(2) en una superficie y presenta el progreso realizado para entender su cuantización. Como caso particular discutiremos el ejemplo del toro que es de los más estudiados, para el cual presentamos las relaciones con el toro no conmutativo y con la cuantización de H. Weyl. El artículo concluye con una posible aplicación de la teoría física del polinomio de Jones a la teoría del efecto Hall cuántico fraccionario.

El autor quiere agradecer a Ernesto Lupercioy a Lourdes Juan por ayudalo mejorar el estilo de esta exposición.

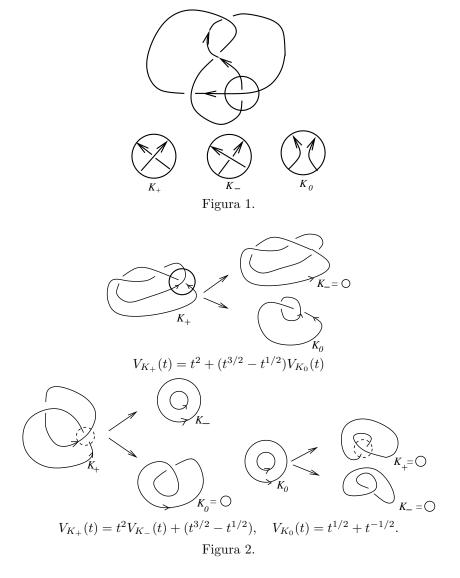
# 2. El polinomio de Jones y la teoría de los campos cuánticos

El polinomio de Jones es un invariante de nudos descubierto por V.F.R. Jones [14]. Este invariante esta definido por la relación recurrente

$$t^{-1}V_{K_{+}}(t) - tV_{K_{-}}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{K_{0}}(t),$$

en la cual los diagramas de los nudos  $K_+$ ,  $K_-$  y  $K_0$  son los mismos salvo por un cruzamiento como es represantado en la Figura 1. Esta relación nos permite calcular el polinomio de Jones  $V_K(t)$  de cualquier nudo K sabiendo el polinomio de nudos mas sencillos. Cambiando cruzamientos como se muestra cada nudo se puede transformar en el nudo trivial, cuyo polinomio es  $V_0(t)=1$ . La Figura 2 ejemplifica el cálculo del polynomio de Jones para el nudo trébol. Al final de este cálculo se obtiene  $V_{\rm trébol}(t)=t+t^3-t^4$ .

Esta definición es muy útil para calcular el polinomio, pero no permite el estudio de sus propiedades. Los topólogos desean una definición mas geométrica, de cual se pueden deducir algunas de las propriedades geométricas y topológicas del nudo.



Cinco años despues de Jones, E. Witten [24] descubrió que el polinomio de Jones aparece en la teoría de campos cuánticos. Witten tuvo la idea siguente. Se consideran los campos con grupo de simetría interna

$$SU(2) = \left\{ \left[ \begin{array}{cc} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{array} \right], \, a,b \in \mathbb{C}, a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \right\}$$

en una variedad M de dimension tres. Cada campo tiene un potencial, que desde el punto de vista matemático es una conexión A de su(2) en M. La presencia del campo se puede determinar por su acción en una partícula que se mueve en el espacio. La fase de la partícula, que es un vector en  $\mathbb{R}^2$  (ver la Figura 3), que cambia de acuerdo con

$$\left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right].$$

La matriz de rotación se llama matriz de holonomía.

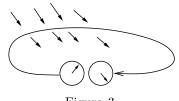


Figura 3.

El lagrangiano de la teoría de campo es el lagrangiano de Chern-Simons

$$L(A) = \frac{1}{4\pi} \int_{M} tr(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A).$$

De los observables físicos, nos interesa la traza de la holonomía, que se denota  $W_K(A)$ . Como observable clásico este es una función de la conexión, como observable cuántico este es un operador lineal. Para cuantizar esta teoría de campos introducimos la constante de Planck  $\hbar$  que satisface la condición de cuantización geometrica  $\hbar = 1/N$  con N un entero positivo, y además pedimos que N sea par: N = 2r.

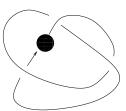


Figura 4.

Para una partícula que se mueve por un nudo como el mostrado en la Figura 4, se toma la media de la traza de la holonomía sobre todos los campos. Si la variedad M es la esfera de dimension tres, el resultado es el polinomio de Jones

del nudo evaluado en una raíz r-ésima de la unidad. Formalmente, esta media es la integral de Feynman

$$\int e^{2irL(A)}W_K(A)\mathcal{D}A.$$

Porque ambas cantidades  $e^{2irL(A)}$  y  $W_K(A)$  se mantienen invariantes con el cambio de sistema de coordenadas, la media se toma sobre clases de campos equivalentes por cambios de coordenadas. En conclusión, el polinomio de Jones es un objecto de la teoría de campos cuánticos.

Desafortunadamente, la teoría general de campos cuánticos no tiene un fundamento matemático, pues la integral de Feynman no se puede definir desde un punto de vista matemático. El problema es que un campo tiene una infinitud de grados de libertad, y en este momento comprendemos solamente quantizaciones de sistemas con un numero finito de grados de libertad.

Para el polinomio de Jones hay una teoría desarrollada por Reshetikhin y Turaev [18] que imita la teoria de Witten, pero que pierde el sabor físico y geométrico. Su teoría usa los grupos cuánticos de Drinfeld [7], con cálculos combinatorios muy complicados.

Por otro lado, en nuestro caso los campos se identifican por cambios locales de coordenadas (un procedimiento llamado gauging o normalización), obteniendo los campos físicos en la variedad. Ademas, la teoría en 3 dimensiones se puede reducir a una teoría en 2 dimensiones usando la descomposición Heegaard de variedades de dimension tres. Afortunadamente los campos físicos en una superficie tienen un numero finito de grados de libertad, pues se pueden cuantizar con técnicas bien entendidas de mecánica cuántica. Esto nos entrega un problema de mecánica cuántica: hay que cuántizar el espacio de los campos con simetria SU(2) en una superficie modulo cambios locales de coordenadas. La pregunta principal es, de los varios modelos de cuántizacion cual corresponde al polinomio de Jones.

### 3. Que es cuantización

En esta sección explicamos algunas cuestiones básicas de mecánica clásica y cuántica. En la formulación Hamiltoniana de la mecánica clásica, cada sistema tiene un espacio fase, que es el haz cotangente  $T^*N$  de la variedad de configuraciones N, o mas general, una variedad simpléctica  $(M,\omega)$ . Los observables físicos son funciones  $f \in C^{\infty}(M)$ . Por ejemplo si  $N = \mathbb{R}$ , entonces  $M = T^*N = \mathbb{R}^2$  con coordenadas q (posición) y p (momento) y forma simpléctica  $dp \wedge dq$ . Los observables son funciones f(p,q), como por ejemplo la energía total  $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2$ .

La forma simpléctica asocia a cada observable f un campo vectorial  $X_f$  definido por la ecuación  $df = \omega(X_f, \cdot)$ . De esta manera la forma simpléctica

define un paréntesis de Poisson para funciones en  $C^{\infty}(M)$  por la fórmula  $\{f,g\}=df(X_g)$ . Cada sistema físico tiene una función de energía total H, que junto con el paréntesis de Poisson, nos da la evolución de un observable por medio de la ecuación de Hamilton

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}.$$

El paréntesis de Poisson para nuestro ejemplo particular es  $\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p}$ . Escribiendo la evolución de la posición y del momento se obtienen las ecuaciones clásicas de Hamilton.

En la mecánica cuántica de Heisenberg, los estados de un sistema son los vectores unitarios en un espacio de Hilbert (funciónes de onda). Los observables son operadores lineales Hermíticos actuando sobre el espacio de Hilbert. La observacion de un operador T en el estado  $\psi$  no es determinista, su valor esperado es  $|\langle T\psi,\psi\rangle|$ .

La evolución de un observable A es definida por medio de la ecuación de Schrödinger

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A, \widehat{H}] = \frac{1}{i\hbar}(A\widehat{H} - \widehat{H}A),$$

donde  $\widehat{H}$  es el operador de energía total.

Cuantización es un procedimiento para pasar de la mecánica clásica a la mecánica cuántica. Este procedimiento substituye el espacio de fase con un espacio de Hilbert (de funciones de onda) y las funciones sobre el espacio de fase con operadores actuando en el espacio de Hilbert. La ecuación de Hamilton se transforma en la ecuación de Schrödinger, con el paréntesis de Poisson convertiendose en el conmutador de operadores.

En el caso más sencillo del espacio de fase  $T^*\mathbb{R}$ , el espacio de Hilbert asociado por la cuantización es  $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R})$ . En el caso general de la variedad cotangente  $T^*(N)$ , o el más general de la variedad simpléctica  $(M,\omega)$  con  $\omega$  una clase de  $H^2(M,\mathbb{Z})$ , la cuantización geométrica (ver [25]) produce el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  como el espacio  $\Gamma(M,\mathcal{L})$  de las secciones  $L^2$ -integrables de un haz complejo de líneas  $\mathcal{L}$  sobre M. La forma simpléctica que describe la evolución en el sistema original y la constante de Planck  $\hbar = \frac{1}{N}$  se incluyen en la estructura geométrica del haz, pidiendo que su curvatura sea  $N\omega$ . Varios casos particulares, bien entendidos basado en experimentos, indican que el espacio de Hilbert definido así es demasiado grande, por lo que lo reducimos por medio de una polarización.

Por ejemplo, si identificamos  $T^*\mathbb{R}$  con  $\mathbb{C}$  poniendo z=q+ip, el espacio de Hilbert en la polarización real es el espacio de funciones  $L^2$ -integrables en la variable real q. Si la variedad simpléctica M es una variedad compleja, hay lo que se llama la polarización holomórfa, para cual el espacio de Hilbert consiste de las secciones holomórfas  $L^2$ -integrables del haz  $\mathcal{L}$ .

El producto interior de dos secciones del espacio de Hilbert se puede definir como  $\langle \sigma, \sigma' \rangle = \int_M \langle \sigma, \sigma' \rangle_x Vol$  donde  $Vol = \omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ , pero es posible que las secciones producidas por la polarización no sean integrables. El procedimiento estándar consiste en introducir una semi-densidad relacionada a la polarización y multiplicar cada sección por esta semi-densidad. Desde el punto de vista geométrico, se multiplica el haz  $\mathcal L$  por otro haz que contiene la información sobre la medida de integración (ver [21]).

Los operadores lineales op(f) asociados a funciones  $f \in C^{\infty}(M)$  deben respetar las condiciones de Dirac:

- 1. op(1) = I,
- 2. si f es de valores reales, el operador op(f) debe ser autoadjunto.
- 3.  $op(\{f,g\}) = \frac{1}{i\hbar}[op(f), op(g)].$

En realidad la última condición es demasiado optimista y es imposible de satisfacer (un resultado de Groenewold y Van Hove), y por eso hay que introducir un error  $O(\hbar)$ .

En el caso más sencillo  $T^*\mathbb{R}$  se requiere además que el operador op(q) sea la multiplicación por la coordenada q y el operador op(p) sea  $-i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$ , y que el espacio de Hilbert sea irreducible bajo la acción de estos dos operadores. En este caso para definir el operador asociado a una función general f(p,q) se puede usar la "receta" de H. Weyl:

$$op(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(x, y) \exp(i(x \, op(p) + y \, op(q))) dx dy,$$

donde  $\hat{f}$  es la transformada de Fourier de f. Pero hay una infinitud de "recetas" de cuantización, como por ejemplo la de Toeplitz:

$$op(f): g \in L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow fg \in L^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \Pi fg \in L^2(\mathbb{R}),$$

donde  $\Pi$  es la proyección de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  en el espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$  de las funciones en la primera variable.

El procedimiento de cuantización de Toeplitz se puede generalizar al caso general de una variedad simpléctica M:

$$op(f): \quad \sigma \in \mathcal{H} \longrightarrow f\sigma \in L^2(M,L) \longrightarrow \Pi f\sigma \in \mathcal{H}.$$

Existe también el procedimiento de cuantización geometrica estandar [25]. Otro metodo, desarollado en los ultimos 30 años [5], es deformar el algebra de funciones  $C^{\infty}(M)$  a un algebra no conmutativa de operadores:

$$f * g = fg + \hbar \{f, g\} + \hbar^2 B_2(f, g) + \hbar^3 B_3(f, g) + \cdots$$

### 4. El espacio de moduli de conexiones planas y su cuantización

Nuestra intención es cuantizar los campos con simetría interior SU(2) en una superficie S modulo cambios locales de coordenadas. Desde el punto de

vista matemático, el espacio de fase es

$$\{A \mid A : su(2) - \operatorname{conección}\}/\mathcal{G}$$

donde  $\mathcal{G}$  es el grupo de transformaciones gauge

$$A \to g^{-1}Ag + g^{-1}dg$$
 donde  $g: S \to SU(2)$ .

Por reducción simpléctica (ver [3]) cuantizar este espacio es lo mismo que cuantizar

$$\mathcal{M} = \{A \mid A : su(2) - \text{conexión plana}\}/\mathcal{G} = \{\rho : \pi_1(S) \longrightarrow SU(2)\}/\text{conjugación}$$

que es por un lado el espacio de moduli de conexiones planas de su(2) en la superficie y por otro lado la variedad de caracteres de SU(2)-representaciones del grupo fundamental de la superficie.  $\mathcal{M}$  es una variedad algebraica compleja muy complicada, estudiada por primera vez por Narasimhan y Seshadri [17].

Atiyah y Bott han mostrado [4] que la parte suave de la variedad algebraica  $\mathcal{M}$  es una variedad simpléctica con forma simpléctica

$$\omega(A, B) = -\int_{S} tr(A \wedge B).$$

En esta fórmula los vectores tangentes a  $\mathcal{M}$ , A y B admiten dos conexiones de su(2) tangentes al espacio afín de todas la conexiones de su(2) en la superficie, y despues se multiplican y el producto se integra sobre la superficie.

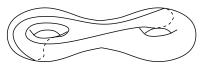


Figura 5.

Los observables clásicos son las trazas de holonomías sobre curvas cerradas (Figura 5) en la superficie:

$$I_{\gamma}: A \to tr \, hol_{\gamma}(A)$$
).

W. Goldman ha mostrado [13] que el paréntesis de Poisson (necesario para hacer mecánica clásica en el espacio  $\mathcal{M}$ ) se calcula con la fórmula

$$\{I_{\alpha}, I_{\beta}\} = \frac{1}{2} \sum_{x \in \alpha \cap \beta} sgn(x) (I_{\alpha\beta_x^{-1}} - I_{\alpha\beta_x})$$

donde el signo del cruzamiento x es "–" si  $\alpha$  y  $\beta$  se cruzan como en la Figura 6, y "+" si  $\beta$  tiene la dirección opuesta. Aqui pensamos de las curvas  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha\beta_x^{-1}$ , y  $\alpha\beta_x$  como elementos del grupo fundamental de la superficie.

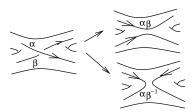


Figura 6.

El espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_r$  de la cuantización de  $\mathcal{M}$  consiste de las funciones theta generalizadas. Éstas son las secciones holomórfas del haz en líneas de Chern-Simons

$$\mathcal{L} = \mathcal{A}_F^s \times_{\Theta} \mathbb{C}.$$

Aqui $\mathcal{A}_F^s$  representa el espacio de las conexiones planas irreducibles, y el cociclo de Chern-Simons es

$$(A,z) \sim (A^g, \Theta(A,g)z)$$

donde  $A^g = g^{-1}Ag + g^{-1}dg$  y  $\Theta(A,g) = \exp(iL(\widetilde{A}^g) - L(\widetilde{A}))$ , con  $\widetilde{A}$  una extensión de la connexión A en una variedad de dimension tres limitada por la superficie y  $\widetilde{A}^g$  una extensión de  $A^g$  en la misma variedad que es "gauge" equivalente a  $\widetilde{A}$ .

El espacio de fase  $\mathcal{M}$  es de volumen finito. Por este motivo, el espacio de Hilbert asociado tiene dimensión finita. Ésta es una consecuencia del principio de incertidumbre de Heisenberg, porque cada partícula ocupa un volumen positivo en el espacio de fase, y el numero maximo de particulas es igual a la dimensión del espacio de Hilbert.

La dimensión de  $\mathcal{H}_r$  se calcula con la fórmula de Verlinde (probada para un grupo de Lie general por Faltings [8]):

$$\dim \mathcal{H}_r = r^{g-1} \sum_{i=1}^{r-1} \left( 2 \sin^2 \frac{j\pi}{r} \right)^{-(g-1)},$$

donde g es el género de la superficie.

Por otro lado, los observables cuánticos son muy misteriosos. Witten dice [24] que la cuantización de  $tr \, hol_{\gamma}(A)$  (donde  $\gamma$  es una curva cerrada en la superficie) es el operador integral con núcleo

$$< A_1 | tr \, hol_{\gamma}(A) | A_2 > = \int_{\mathcal{M}_{A_1, A_2}} e^{2irL(A)} tr \, hol_{\gamma}(A) \mathcal{D}A.$$

Esta definición usa la integral de Feynman, y por tanto no tiene un fundamento matemático. Ya hay un único modelo de cuantización de los operadores, que es parte de la teoría topológica de campos cuánticos de Reshetikhin y Turaev [18] basada en los grupos cuánticos de Drinfeld [7]. Esta teoría nos da una construcción combinatoria de los operadores. Presentamos en lo qué sigue las idéas básicas de esta cuantización.

El grupo cuántico de SU(2) tiene un numero finito de representaciones irreducibles  $V^1, V^2, \ldots, V^{r-1}$ , donde el índice representa la dimensión. Usando la teoria de campos cuánticos conformes [20] se pueden identificar las funciones theta generalizadas en la superficie con coloraciones de las orillas del grafo que es el centro de la superficie con representaciones irreducibles. La Figura 7 muestra el caso de la superficie de género 2. Las dimensiones m, n, p de las tres representaciones que se encuentran a cada vértice satisfacen las condiciones cuantizadas de Clebsch-Gordon

$$|m-n|+1 \le p \le \min(m+n-1, 2r-2-m-n).$$

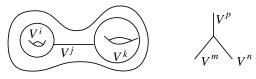


Figura 7.

Por otro lado, las matrices de los operadores se calculan con diagramas de nudos y de grafos con relaciones como la del polinomio de Jones [18]. Los calculos son muy complicados, y son basados en funciones hipergeométricas.

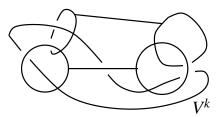


Figura 8.

Por ejemplo el grafo con curva cerada colorada en la Figura 8 describe un operador para el caso de la superficie de género 2, y cada coloración de las orillas de este grafo con representaciones irreducibles de SU(2) cuántico produce una entrada de la matriz del operador.

Alexeev y Schomerus [1] han demonstrado que esta cuantización satisface la condición de Dirac

$$op(\{I_{\alpha}, I_{\beta}\}) = \frac{1}{i\hbar}[op(I_{\alpha}), op(I_{\beta})] + O(\hbar)$$

para el paréntesis de Poisson de Goldman. Pero nos interesa entender esta cuantización desde un punto de vista geométrico, con mas intuición física. El único caso bien entendido es el del toro (por que el caso de la esfera es trivial).

### 5. El caso particular del toro

En el caso del toro, el espacio de fase  $\mathcal{M}$  se puede calcular directamente y es muy sencillo. Este espacio se llama la "funda de almohada" y se obtiene factorizando el plano complejo por las transformaciones  $z \to z + m + in$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$  y  $z \to -z$  (Figura 9).

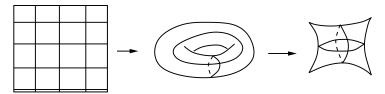


Figura 9.

El autor de este artículo en su trabajo con Frohman [11] ha descubierto la fórmula siguiente para multiplicar los operadores C(p,q) asociados a los observables clasicos  $2\cos 2\pi(px+qy)$  en la funda de almohada:

$$C(m,n)C(p,q) = e^{i\pi(mq-np)/r}C(m+p,n+q) + e^{-i\pi(mq-np)/r}C(m-p,n-q).$$

Desde el punto de vista de la teoría de Reshetikhin y Turaev, el operador C(p,q) es la diferencia de los operadores definidos por la curva de inclinación p/q en el toro colorada por  $V^{d+1}$  y  $V^{d-1}$ , donde d es el máximo común divisor de p y q.

Esta fórmula esta relacionada con el principio de incertidumbre de Heisenberg. La forma mas reconocida del principio de incertidumbre es  $\Delta p \Delta q \geq \hbar$ , pero su forma básica es  $op(p)op(q) - op(q)op(p) = \hbar op(1)$ . Si denotamos U y V los operadores de evolución de la posición y del momento

$$U = e^{i \operatorname{op}(q)}, V = e^{i \operatorname{op}(p)}.$$

entonces el principio de incertidumbre se convierte en

$$VU = e^{2\pi i\hbar}UV$$
.

El álgebra von Neumann generada por  $U,V,U^{-1}$  y  $V^{-1}$  se llama el toro no conmutativo y es una deformación del álgebra  $C^{\infty}(S^1\times S^1)$  de las funciones

en el toro. El toro no conmutativo ocurrió por primera vez en el trabajo de Rieffel [19] y juega un rol central en la geometría no conmutativa de Connes [6].

El resultado con Frohman demuestra que hay un morfismo del álgebra de los operadores de la cuantización de  $\mathcal M$  en el toro no conmutativo

$$op(2\cos 2\pi(px+qy)) \longrightarrow e^{-\pi i\hbar pq}(U^pV^q + U^{-p}V^{-q}).$$

Recuerde que  $\hbar = \frac{1}{2r}$ .

Este resultado tiene una explicación mas profunda. En su trabajo con Uribe [12] el autor de este artículo ha demonstrado que la cuantización de  $\mathcal{M}$  con grupos cuanticos es isomorfa a la cuantización de este espacio con el procedimiento de H. Weyl (la que usa la trasformada de Fourier).

Para describir este isomorphismo utilizamos la forma compleja de la cuantización de Weyl. Las funciones de onda que son las coloraciones del centro del toro con  $V^j$ ,  $j=1,2,\cdots,r-1$ , como mostrado en la Figura 10, coresponden a las funciones theta

$$\zeta_j(z) = \sqrt[4]{r}e^{-\frac{\pi j^2}{2r}}(\theta_j(z) - \theta_{-j}(z)), \quad j = 1, 2, \dots, r - 1,$$

donde

$$\theta_j(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(2rn^2 + 2jn) + 2\pi i z(j+2rn)}.$$

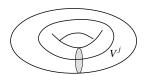


Figura 10.

En la cuantización con grupos cuanticos, el operador asociado a la traza en la representación en dimension 2 de la holonomía por una curva con inclinación p/q en el toro es dado por la fórmula

$$\zeta_j \to e^{-\frac{i\pi}{2r}pq} \left(e^{\frac{i\pi}{r}jq}\zeta_{j-p} + e^{-\frac{i\pi}{r}jq}\zeta_{j+p}\right).$$

En la cuantización de Weyl el mismo operador es el operador de Toeplitz con símbolo  $e^{-\Delta\hbar/4}\cos(px+qy)$ :

$$f \to e^{-\Delta \hbar/4} \cos 2\pi (px + qy) f \to \Pi_{\mathcal{H}_r} e^{-\Delta \hbar/4} \cos 2\pi (px + qy) f$$

donde  $\Delta = \frac{1}{2\pi}(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$  y  $\Pi_{\mathcal{H}_r}$  es la proyección en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_r$ .

#### 6. Una posible aplicación

Para motivar más el estudio de la teoría física del polinomio de Jones, concluimos este artículo con una aplicación posible de esta teoría a la investigación del efecto Hall cuántico fraccionario.

El efecto Hall clásico fue observado en 1879 de E. Hall. Este efecto ocurre cuando una corriente eléctrica pasa por un material en presencia de un campo magnético (ver Figura 11). En este caso los electones tienden a irse hacia un lado. La teoría clásica pronostica que la intensidad de este efecto es proporcional a la intensidad del campo magnético. Pero en 1979, von Kitzling descubrió que, para un campo magnético muy fuerte (10 T) y temperatura baja (50 mK) el efecto Hall está cuantizado. Precisamente, si  $R_H = V_H/I$  denota la resistencia Hall, entonces  $1/R_H$  esta cuantizado en unidades de  $e^2/h$ . En los 80's, Tsui y Stormer descubrieron además que existía una resistencia de Hall para fracciones de  $e^2/h$ , lo que se llama el efecto Hall cuántico fraccionario. Este efecto se observa cuando el flujo de electrones está ligado a una superficie, como por ejemplo en la juntura entre un cristal de galio-arsénico y un cristal de aluminio-galio-arsénico.

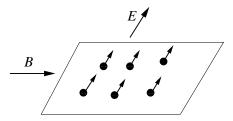


Figura 11.

R. Laughlin ganó el Premio Nobel para explicar las fracciones, llamadas niveles,  $\frac{1}{2m+1}$ ,  $m=1,2,3,\ldots$  Su teoría pronostica la existencia de cargas eléctricas fraccionales, con consecuencia la existencia de la estadística fraccionaria de partículas. Pues además de los bosones, cuyas funciones de onda quedan invariantes por la permutación de partículas, y de los fermiones, cuyas funciones de onda cambian de signo por la permutación de partículas, hay otras que se llaman cuasi-partículas, cuyas funciones de onda se multiplican con un número complejo cuando las cuasi-partículas se permutan (ver Figura 12).

Moore y Read [16] conjecturaron que algunos niveles (e.g.  $\frac{5}{2}$ ) se pueden modelar con la teoría de campo cuántico con lagrangiano de Chern-Simons, la teoría física del polinomio de Jones. El modelo de Moore y Read pronostica la existencia de estadística no Abeliana. En este caso un sistema de partículas cuyas trayectorias forman una trenza (Figura 13) produce una representación del

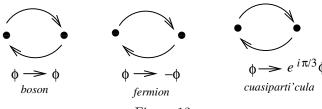


Figura 12.

grupo de trenzas en un grupo de matrices, y esta es la representación de Jones [15] relacionada a su polinomio. Suponiendo la conjectura verdadera, Freedman, Nayak, Shtengel, Walker, Wang dedujeron [10] que se puede construir un computador cuántico universal que utiliza el efecto Hall cuántico fraccionario.

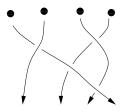


Figura 13.

# References

- A. Yu. Alexeev, V. Schomerus, Representation theory of Chern-Simons observables, Duke Math. J., 85(1996), No. 2, 447-510.
- [2] J.E. Andersen, Deformation quantization and geometric quantization of Abelian moduli spaces, Comm. Math. Phys. **255**(2005), no. 3, 727–745.
- [3] M.F. Atyiah, The Geometry and Physics of Knots, Lezioni Lincee, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
- [4] M.F. Atiyah, R. Bott, The Yang-Mills equations over a Riemann surface, Phil. Trans. Royal Soc. A 308(1982), 523-615.
- [5] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, Deformation theory and quantization, Ann. Phys., 111(1978), 61-151.
- [6] A. Connes, Noncommutative Geometry, Academic Press Inc., San Diego, CA, 1994.
- [7] V. Drinfeld, Quantum groups, Proceedings of the ICM, Berkeley (1986), 793–820.
- [8] G. Faltings, A proof of the Verlinde formula, J. Alg. Geom., 3(1994), 347–374.
- [9] D. Freed, Classical Chern-Simons, part 1 Adv. Math. 113 (1995) no. 2, 237–303, part
  II Houston J. Math. 28(2002) no. 2, 293–310.
- [10] M. Freedman, Ch. Nayak, K. Shtengel, K. Walker, Zh. Wang, A class of P, T-invariant topological phases of interacting electrons, Annals of Physics, 310(2004), 428–492.
- [11] Ch. Frohman, R. Gelca, Skein modules and the noncommutative torus, Transactions Amer. Math. Soc., 352(2000), 4877–4888.

- [12] R. Gelca, A. Uribe, The Weyl quantization and the quantum group quantization of the moduli space of flat SU(2)-connections on the torus are the same, Commun. Math. Phys., 233(2003), 493–512.
- [13] W. Goldman, Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flow of surface group representations, Invent. Math., 85(1986), 263-302.
- [14] V.F.R. Jones, Polynomial invariants of knots via von Neumann algebras, Bull. Amer. Math. Soc., 12(1985), 103–111.
- [15] V.F.R. Jones, Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials, Ann. of Math., 126(1987), 335-388.
- [16] G. Moore, N. Read, Nonabelions in the fractional quantum Hall effect, Nucl. Phys. B 360(1991), 362.
- [17] M.S. Narasimhan, C.S. Seshadri, Holomorphic vector bundles on a compact Riemann surface, Math. Ann., 155(1964), 69–80.
- [18] N.Yu. Reshetikhin, V.G. Turaev, Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups, Inventiones Math., 103(1991), 547–597.
- [19] M. Rieffel, Deformation quantization of Heisenberg Manifolds, Commun. Math. Phys. 122(1989), 531–562.
- [20] G. Segal, The definition of conformal field theory, in Topology, Geometry, and Quantum Field Theory, U. Tillman ed., London Math. Soc. Lect. Notes Series, 2004.
- [21] J. Snyaticki, Geometric Quantization and Quantum Mechanics, Springer, 1980.
- [22] V.G. Turaev, Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds, de Gruyter, 1994.
- [23] A. Tyurin, Quantization, Classical and Quantum Field Theory and Theta Functions, American Mathematical Society, 21(2003).
- [24] E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial, Comm. Math. Phys., 121(1989), 351–399.
- [25] N.M.J. Woodhouse, Geometric Quantization, Oxford Mathematical Monographs, 1997.

Department of Mathematics and Statistics, Texas Tech University, Lubbock, TX 79409 and Institute of Mathematics of the Romanian Academy, Bucharest, Romania  $E\text{-}mail\ address$ : rgelca@gmail.com