# UNA VISIÓN LOCAL DE LOS GRUPOS FINITOS

## JOSÉ CANTARERO

RESUMEN. Este artículo contiene una introducción básica al estudio local de grupos finitos, incluyendo una breve perspectiva de la teoría de sistemas de fusión y grupos p-locales finitos.

#### Introducción

Los fenómenos de simetría se pueden modelar matemáticamente usando acciones de grupos. Configuraciones con un número finito de simetrías abundan en diversas ciencias, incluyendo matemáticas, por lo cual es útil comprender la estructura de los grupos finitos.

Una manera de llevar esto a cabo es intentar clasificarlos. Los grupos finitos se pueden construir mediante extensiones a partir de grupos finitos simples, así que un primer paso en esta dirección es la clasificación de grupos finitos simples, que se conoce. Sin embargo, permanece el problema de determinar las posibles extensiones.

Una alternativa es clasificar las familias de grupos finitos que aparecen como simetrías en el fenómeno de interés. Por ejemplo, se pueden clasificar los grupos finitos de reflexión complejos o los grupos finitos que actúan libremente sobre alguna esfera. Otra alternativa es usar una relación de equivalencia más débil que isomorfismo, pero que contenga la información que queremos. Seguiremos este último camino, mediante una filosofía de localización.

Localizar consiste en reducir un problema a varios problemas locales. En una primera aproximación, estos problemas locales se obtienen fijando un número primo y reinterpretando el problema original con objetos cuya información está concentrada en ese primo. También existen localizaciones más generales, por ejemplo con respecto a una teoría de cohomología o a un morfismo.

Los grupos abelianos finitos se pueden analizar usando las localizaciones en primos de la teoría de grupos abelianos. En la Sección 1 introducimos la noción de equivalencia p-local entre grupos abelianos finitos basada en estas localizaciones. Gracias a la descomposición primaria, la localización en el primo p de un grupo abeliano es isomorfa a su p-subgrupo de Sylow y este es el punto de vista que se puede generalizar a grupos finitos no necesariamente abelianos.

El estudio local de un grupo finito G no solo utiliza un p-subgrupo de Sylow S, sino también las G-subconjugaciones (ver Definición 2.1) entre subgrupos de S. En la Sección 2 extendemos la definición de equivalencia p-local para grupos finitos y describimos invariantes p-locales, que nos permiten descartar que dos grupos sean p-localmente equivalentes, junto con ejemplos. También estudiamos la relación entre ser isomorfos y ser p-localmente equivalentes para todo primo p, probando que estos dos conceptos coinciden para grupos nilpotentes, pero no en general.

En la Sección 3 vemos que la información p-local de un grupo finito G con psubgrupo de Sylow S se puede resumir en una categoría llamada el sistema de fusión
de G relativo a S, de tal manera que dos grupos finitos son p-localmente equivalentes
si y solo si sus sistemas de fusión son isomorfos en cierto sentido. Esto nos permite
encontrar nuevos invariantes p-locales, aquellos que se puedan construir a partir del
sistema de fusión, como por ejemplo la homología y cohomología de grupos con
coeficientes en el campo  $\mathbb{F}_p$  con p elementos.

El resto del artículo está dedicado a relacionar el estudio p-local de los grupos finitos con la homotopía de la p-completación de sus espacios clasificantes. En la Sección 4 damos primero una introducción a los espacios clasificantes de grupos finitos y la p-completación de espacios, para después hablar sobre la Conjetura de Martino-Priddy (Teorema 4.4 en el texto) que proporciona la relación deseada. Finalmente, en la Sección 5 hablamos sobre algunas de las motivaciones de la teoría de grupos p-locales finitos.

En este artículo proveemos una visión introductoria del estudio p-local de grupos finitos que presupone familiaridad con teoría de grupos, pero no necesariamente con topología algebraica. Es por ello que las tres primeras secciones contienen argumentos y ejemplos detallados, mientras que las dos últimas son más superficiales. El contenido está basado en un minicurso impartido por el autor, que se puede consultar en [11]. El lector interesado en profundizar en estos temas puede leer los artículos panorámicos [3], [7], [14], dirigirse a los libros [2], [23] o al artículo [8].

**Agradecimientos.** La elaboración de este artículo fue apoyada por CONAHCYT en el año 2023 mediante el proyecto de Ciencia de Frontera CF-2023-I-2649.

#### 1. LA DESCOMPOSICIÓN PRIMARIA DE GRUPOS ABELIANOS FINITOS

Para cada grupo abeliano finito A, existe una descomposición

$$A = \bigoplus_{p \text{ primo}} A_{(p)},$$

donde cada  $A_{(p)}$  es un p-grupo abeliano finito y  $A_{(q)}$  es el grupo trivial para cada primo q que no divida al orden de A. A esto se le conoce como la descomposición primaria de A y al grupo  $A_{(p)}$  se le llama la componente p-primaria de A. Además,

para cada p se tiene

$$A_{(p)} \cong \bigoplus_{k=1}^r \mathbb{Z}/p^{m_k},$$

para ciertos  $m_k \geq 0$ . Esto determina A salvo isomorfismo pues dos grupos abelianos finitos son isomorfos si y solo si tienen exactamente los mismos sumandos en esta descomposición salvo reordenación. Esto constituye el teorema de clasificación de grupos abelianos finitos, que corresponde al Teorema 6.1 y al Teorema 6.13 en [30].

**Observación 1.1.** La componente p-primaria de A está compuesta de los elementos de A cuyo orden es una potencia de p, pero también la podemos obtener a partir de A mediante

$$A_{(p)} = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)},$$

donde  $\mathbb{Z}_{(p)}$  es la localización de  $\mathbb{Z}$  en el primo p. Usaremos la notación  $A_p^{\wedge}$  debido a que

$$A_p^{\wedge} = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p^{\wedge} \cong A_{(p)},$$

donde  $\mathbb{Z}_p^{\wedge}$  es el anillo de enteros *p*-ádicos.

Esta descomposición nos permite reducir problemas sobre grupos abelianos finitos a p-grupos abelianos finitos, siendo este nuestro primer contexto donde podemos aplicar la filosofía de localización. Por ejemplo, consideremos las siguientes propiedades.

**Propiedad global.** Los grupos abelianos finitos A y B son isomorfos.

**Propiedad local.** Sea p un primo. Las componentes p-primarias de A y B son isomorfas.

¿Cómo podemos saber si esta propiedad local es adecuada para analizar la propiedad original? Para empezar, puesto que  $-\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p^{\wedge}$  es un funtor, se tiene

$$A \cong B \Longrightarrow A_p^{\wedge} \cong B_p^{\wedge}.$$

Es decir, la propiedad global implica la propiedad local. El converso no es cierto, por ejemplo los grupos  $\mathbb{Z}/2$  y  $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3$  no son isomorfos, pero

$$(\mathbb{Z}/2)_2^{\wedge} \cong \mathbb{Z}/2 \cong (\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3)_2^{\wedge}.$$

Sin embargo, si suponemos que  $A_p^{\wedge} \cong B_p^{\wedge}$  para todo primo p, entonces por la clasificación de grupos abelianos finitos se tiene  $A \cong B$ .

**Proposición 1.2.** Dos grupos abelianos finitos A y B son isomorfos si y solo si  $A_p^{\wedge} \cong B_p^{\wedge}$  para todo primo p.

Este resultado es satisfactorio pues reduce la certeza de una propiedad a que se cumplan varias propiedades locales. Se podría mejorar ligeramente, pues al ser A y B finitos, solo existen un número finito de primos que dividen a los órdenes de A ó B. Así que sería suficiente comprobar que  $A_p^{\wedge} \cong B_p^{\wedge}$  para todo primo p que divida el

orden de A o el orden de B. La Proposición 1.2 nos inspira a introducir la siguiente relación de equivalencia.

**Definición 1.3.** Sean A y B grupos abelianos finitos. Una equivalencia p-local de A a B es un isomorfismo  $A_p^{\wedge} \to B_p^{\wedge}$ .

Si existe una equivalencia p-local entre A y B, diremos que son p-localmente equivalentes y denotaremos  $A \simeq_p B$ . La Proposición 1.2 nos diría entonces

$$A \cong B \iff A \simeq_p B$$
 para todo primo  $p$ .

La noción de equivalencia p-local es más débil que isomorfismo. Los grupos  $\mathbb{Z}/2$  y  $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3$  no son isomorfos, pero son 2-localmente equivalentes.

**Definición 1.4.** Sea F una asignación que a cada grupo abeliano finito A lo envía a un objeto F(A) de cierta categoría. Diremos que F es un invariante p-local si  $A \simeq_p B$  implica  $F(A) \cong F(B)$ . Diremos que es un invariante p-local completo si se tiene que  $A \simeq_p B$  si y solo si  $F(A) \cong F(B)$ .

En esta definición la categoría podría ser discreta, es decir, sin morfismos distintos de las identidades. Esto permite tener invariantes que toman valores en enteros, por ejemplo. He aquí algunos ejemplos inmediatos de invariantes p-locales.

- La máxima potencia de p que divide al orden de A.
- El grupo abeliano  $\text{Hom}(\mathbb{Z}/p, A)$ .
- La cardinalidad del conjunto de elementos de orden  $p^2$ .

Similarmente, si  $\mathcal{Q}$  es una propiedad que pueden cumplir los grupos abelianos finitos, diremos que es una propiedad p-local si cada vez que se tenga  $A \simeq_p B$ , entonces A satisface  $\mathcal{Q}$  si y solo si B satisface  $\mathcal{Q}$ . En realidad, una propiedad p-local  $\mathcal{Q}$  corresponde al invariante p-local que a cada grupo A le asigna 1 si satisface  $\mathcal{Q}$  y 0 en otro caso. Por ejemplo, las siguientes son propiedades p-locales.

- Tener algún elemento de orden p.
- Tener orden primo relativo con p.

Los invariantes y propiedades p-locales nos sirven para descartar si dos grupos son p-localmente equivalentes, pues si F es un invariante p-local, se cumple

$$F(A) \ncong F(B) \Longrightarrow A \not\simeq_p B.$$

Afortunadamente, gracias a la descomposición primaria, existe un invariante p-local completo conocido como los coeficientes de p-torsión. Sea A un grupo abeliano finito tal que

$$A_p^{\wedge} \cong \bigoplus_{k>0} (\mathbb{Z}/p^k)^{n_k}.$$

Los coeficientes de p-torsión de A están dados por una tupla finita definida de la siguiente manera inductiva. Sea k el mínimo natural tal que  $n_k \neq 0$ . Entonces ponemos  $n_k$  copias de  $p^k$  en la tupla. Repetimos el proceso con los elementos de

 $\mathbb{N}$  mayores que k y en cada paso ponemos las copias correspondientes a la derecha de los elementos ya asentados. Otra manera de expresar la misma información es mediante la función

$$f_A \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\},$$
  
 $k \mapsto n_k,$ 

que señala las multiplicidades de los  $\mathbb{Z}/p^k$  en la descomposición primaria de A. Por ejemplo, los coeficientes de 2-torsión de  $(\mathbb{Z}/2)^3 \oplus \mathbb{Z}/12$  están dados por la tupla  $(2,2,2,2^2)$  o por la función  $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$  que envía 1 a 3, que envía 2 a 1 y todos los demás naturales a cero. Por supuesto, todos los coeficientes de p-torsión juntos forman los coeficientes de torsión que forman un invariante completo para isomorfismos de grupos abelianos finitos.

# 2. Equivalencias p-locales de grupos finitos

El estudio p-local de grupos finitos no necesariamente abelianos es más sutil porque en general los grupos finitos no se rompen como productos de p-grupos finitos.

**Definición 2.1.** Sean P y Q subgrupos de G. Decimos que un homomorfismo  $f: P \to Q$  es una G-subconjugación si existe  $g \in G$  tal que  $f(x) = gxg^{-1}$  para todo  $x \in P$ . Si además f es un isomorfismo, diremos que es una G-conjugación.

En cualquiera de los dos casos, denotamos  $f = c_g$ . Si existe una G-conjugación entre dos subgrupos de G, diremos que son G-conjugados. Recordemos que cualquier grupo finito tiene p-subgrupos maximales, llamados p-subgrupos de Sylow, y que cualesquiera dos de estos son G-conjugados.

**Definición 2.2.** Sean G, H grupos finitos y p un primo. Se dice que G es p-localmente equivalente a H si existe un isomorfismo  $\alpha \colon S \to R$  entre ciertos p-subgrupos de Sylow S, R de G y H, respectivamente, que satisface:

• Para cada par de subgrupos  $P, Q \leq S$  y cada homomorfismo  $f: P \to Q$ , se tiene que f es una G-subconjugación si y solo si  $\alpha f \alpha^{-1}$  es una H-subconjugación.

A  $\alpha$  se le llama un isomorfismo que preserva fusión o una equivalencia p-local. La condición de la definición es equivalente a pedir que  $c_{\alpha}$  envíe G-subconjugaciones a H-subconjugaciones y que  $c_{\alpha^{-1}}$  envíe H-subconjugaciones a G-subconjugaciones. Si G es p-localmente equivalente a H, denotamos  $G \simeq_p H$ . Algunas propiedades de equivalencias p-locales que son inmediatas de la definición son las siguientes.

- (1) La composición de equivalencias p-locales es una equivalencia p-local.
- (2) Si G es p-localmente equivalente a H y G' es p-localmente equivalente a H', entonces  $G \times G'$  es p-localmente equivalente a  $H \times H'$ .
- (3) Dos p-grupos finitos son p-localmente equivalentes si y solo si son isomorfos.

Si G y H son grupos abelianos finitos, las únicas subconjugaciones son las inclusiones, así que cualquier isomorfismo entre sus p-subgrupos de Sylow automáticamente preserva fusión. Pero además, sus p-subgrupos de Sylow son isomorfos a  $G_p^{\wedge}$  y  $H_p^{\wedge}$ , respectivamente. Con lo cual estamos extendiendo la Definición 1.3.

**Observación 2.3.** Si existe un isomorfismo  $\alpha \colon S \to R$  como en la definición anterior y S' es otro p-subgrupo de Sylow de G, existe  $g \in G$  tal que  $S = gS'g^{-1}$  y entonces podemos considerar la composición  $\alpha c_g \colon S' \to R$ , que también es un isomorfismo. Dados  $P, Q \leq S'$  y un homomorfismo  $f \colon P \to Q$ , se tiene

$$\alpha c_g f(\alpha c_g)^{-1} = \alpha c_g f c_g^{-1} \alpha^{-1} = \alpha c_g f c_{g^{-1}} \alpha^{-1}.$$

Notemos que f es una G-conjugación si y solo si lo es  $c_g f c_{g^{-1}}$ . Como  $\alpha$  preserva fusión, se tiene que  $c_g f c_{g^{-1}}$  es una G-conjugación si y solo si  $\alpha c_g f c_{g^{-1}} \alpha^{-1}$  es una G'-conjugación. Hemos probado que  $\alpha c_g$  también es un isomorfismo que preserva fusión. Un argumento similar funcionaría si elegimos otro p-subgrupo de Sylow de G', así que si existe un isomorfismo que preserva fusión entre ciertos p-subgrupos de Sylow, también lo existe para cualesquiera p-subgrupos de Sylow.

**Ejemplo 2.4.** Veamos que  $\mathbb{Z}/2 \simeq_2 \Sigma_3$ . Tomemos los 2-subgrupos de Sylow  $S = \mathbb{Z}/2$  y  $R = \{1, (1, 2)\}$  para  $\mathbb{Z}/2$  y  $\Sigma_3$ , respectivamente. Consideremos el isomorfismo  $\alpha \colon S \to R$  que envía  $[1]_2$  a (1, 2). Sea  $f \colon P \to Q$  un homomorfismo entre subgrupos de S. Notemos que f es el homomorfismo trivial si y solo si lo es  $\alpha f \alpha^{-1}$ . El homomorfismo trivial es una  $\mathbb{Z}/2$ -subconjugación si y solo si  $P \subseteq Q$ , lo cual ocurre si y solo si  $\alpha(P) \subseteq \alpha(Q)$ . Solo resta comprobar el caso de  $1_S \colon S \to S$ , que es una  $\mathbb{Z}/2$ -subconjugación, para el cual  $\alpha 1_S \alpha^{-1} = 1_R$ , que es una  $\Sigma_3$ -subconjugación.

**Ejemplo 2.5.** Veamos que  $\mathbb{Z}/3 \not\simeq_3 \Sigma_3$ . Tomamos  $S = \mathbb{Z}/3$  y  $R = \{1, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$  como sus 3-subgrupos de Sylow. Hay dos posibles isomorfismos  $S \to R$ . El primero es el isomorfismo  $\alpha$  que envía  $[1]_3$  a (1, 2, 3). Sea  $f \colon S \to S$  el homomorfismo dado por  $f([m]_3) = [2m]_3$ , que no es una  $\mathbb{Z}/3$ -conjugación. Entonces  $\alpha f \alpha^{-1}$  es el único homomorfismo que envía (1, 2, 3) a (1, 3, 2), que es la conjugación por (1, 2). Así que  $\alpha$  no preserva fusión. El otro isomorfismo  $\beta$  envía  $[1]_3$  a (1, 3, 2), pero igualmente cumple que  $\beta f \beta^{-1}$  es conjugación por (1, 2).

Estos dos ejemplos fueron fáciles de tratar manualmente pues los p-subgrupos de Sylow tenían pocos subgrupos y había pocos homomorfismos entre ellos, pero en general este método sería ineficiente. Así que usaremos invariantes p-locales, que al igual que en el caso de grupos abelianos finitos, es una asignación que envía grupos p-localmente equivalentes a objetos isomorfos. Comencemos listando un par de invariantes p-locales sencillos.

- (1) La máxima potencia de p que divide el orden del grupo.
- (2) El p-subgrupo de Sylow del grupo.

Ya vimos en el Ejemplo 2.5 dos grupos finitos que no son 3-localmente equivalentes con 3-subgrupos de Sylow isomorfos. Tiene sentido que esto pueda pasar pues la definición de equivalencia p-local no solo requiere un isomorfismo, sino que también preserve fusión. Para obtener un mejor invariante, necesitamos considerar cómo un grupo finito conjuga los elementos de su p-subgrupo de Sylow. Esto se puede apreciar por ejemplo en el conjunto

 $cc_p(G) = \{ \text{ clases de conjugación de elementos de } G \text{ de orden una potencia de } p \}.$ 

Dados elementos x, y de un p-subgrupo de Sylow S de G, diremos que  $x \sim_G y$  si son G-conjugados. El orden de los elementos de S es una potencia de p, así que hay una función natural

$$S/\sim_G \to \mathrm{cc}_p(G),$$
  
 $[s] \mapsto [s],$ 

que es claramente inyectiva. Por otra parte, si el orden de  $x \in G$  es una potencia de p, el subgrupo generado por x es un p-grupo. Por lo tanto, existe  $g \in G$  tal que  $gxg^{-1} \in S$  y entonces  $[x] = [gxg^{-1}]$  está en la imagen.

**Proposición 2.6.** Si G y H son p-localmente equivalentes, hay una biyección entre  $cc_p(G)$  y  $cc_p(H)$ .

Demostración: Escojamos p-subgrupos de Sylow S y R de G y H, respectivamente. Por los comentarios previos a la proposición es suficiente encontrar una biyección entre  $S/\sim_G$  y  $R/\sim_H$ . Sea  $\alpha\colon S\to R$  un isomorfismo que preserva fusión y definamos

$$S/\sim_G \to R/\sim_H$$
,  $[x] \mapsto [\alpha(x)]$ .

Veamos que está bien definida. Si [x] = [y], entonces  $y = gxg^{-1}$  para algún  $g \in G$ . Sea P el subgrupo generado por x y Q el subgrupo generado por y. Entonces g define una G-conjugación  $c_g \colon P \to Q$  y  $\alpha c_g \alpha^{-1} \colon \alpha(P) \to \alpha(Q)$  debe ser una H-subconjugación, digamos por  $h \in H$ . Es decir,

$$c_h(\alpha(x)) = \alpha c_g \alpha^{-1}(\alpha(x)) = \alpha c_g(x) = \alpha(y),$$

luego  $[\alpha(x)] = [\alpha(y)]$ . Esta función es biyectiva pues tiene una inversa que envía [y] a  $[\alpha^{-1}(y)]$ .

**Ejemplo 2.7.** Veamos que los grupos  $A_4$  y  $D_{12}$  no son 2-localmente equivalentes usando la Proposición 2.6. Un 2-subgrupo de Sylow de  $A_4$  es

$$S = \{1, (1, 2)(3, 4), (1, 4)(3, 2), (1, 3)(2, 4)\},\$$

mientras que un 2-subgrupo de Sylow de  $D_{12}$  es

$$R = \{1, r^3, s, sr^3\}.$$

Ambos subgrupos son isomorfos a  $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ , así que el tipo de isomorfismo del 2-subgrupo de Sylow no sirve en este caso para probar que no son 2-localmente

equivalentes. Los elementos no triviales de S son  $A_4$ -conjugados:

$$(1,2,3)(1,2)(3,4)(1,2,3)^{-1} = (1,4)(2,3),$$
  
 $(1,2,4)(1,2)(3,4)(1,2,4)^{-1} = (1,3)(2,4),$ 

así que  $S/\sim_{A_4}$  tiene dos elementos. Sin embargo,  $r^3$  pertenece al centro de  $D_{12}$ , luego  $R/\sim_{D_{12}}$  tiene al menos tres elementos. Concluimos que  $A_4 \not\simeq_2 D_{12}$ .

Para el siguiente invariante p-local, así como para la siguiente sección, necesitamos recordar varios conceptos de teoría de grupos y su notación.

**Definición 2.8.** Sean H y K subgrupos de G.

(1) El normalizador de H en G es

$$N_G(H) = \{ g \in G \mid gHg^{-1} = H \}.$$

(2) El transportador de H en K es

$$N_G(H, K) = \{ g \in G \mid gHg^{-1} \subseteq K \}.$$

(3) El conjunto de G-subconjugaciones de H en K es

$$\operatorname{Hom}_G(H,K) = \{f \colon H \to K \mid f \text{ es una } G\text{-subconjugación } \}.$$

(4) El grupo de G-automorfismos de H es

$$\operatorname{Aut}_G(H) = \{ f : H \to H \mid f \text{ es una } G\text{-conjugación } \}.$$

(5) El grupo de automorfismos internos de G es

$$\operatorname{Inn}(G) = \operatorname{Aut}_G(G).$$

(6) El grupo de G-automorfismos externos de H es

$$\operatorname{Out}_G(H) = \operatorname{Aut}_G(H) / \operatorname{Inn}(H).$$

(7) El centralizador de H en G es

$$C_G(H) = \{g \in G \mid ghg^{-1} = h \text{ para todo } h \in H\}.$$

(8) El centro de G es

$$Z(G) = C_G(G).$$

Puesto que las equivalencias p-locales preservan subconjugaciones, el siguiente resultado no será sorprendente.

**Proposición 2.9.** Si  $G \simeq_p H$  y S, R son p-subgroups de Sylow de G y H, respectivamente, entonces  $\operatorname{Aut}_G(S) \cong \operatorname{Aut}_H(R)$ .

Demostración : Sea  $\alpha \colon S \to R$  un isomorfismo que preserva fusión. Consideremos el homomorfismo

$$\operatorname{Aut}_G(S) \to \operatorname{Aut}_H(S'),$$
  
 $f \mapsto \alpha f \alpha^{-1}.$ 

Está bien definido, pues si f es una G-conjugación, entonces  $\alpha f \alpha^{-1}$  es una H-conjugación. Es un isomorfismo, pues su inversa es conjugar por  $\alpha^{-1}$ .

**Ejemplo 2.10.** El grupo  $AGL_1(\mathbb{F}_5)$  de transformaciones afines del campo  $\mathbb{F}_5$  tiene como elementos a funciones  $\mathbb{F}_5 \to \mathbb{F}_5$  de la forma  $f_{a,b}(x) = ax + b$  con  $a, b \in \mathbb{F}_5$  y  $a \neq 0$ . Veamos que  $D_{10} \not\simeq_5 AGL_1(\mathbb{F}_5)$ . Un 5-subgrupo de Sylow de  $D_{10}$  es

$$S = \{1, r, r^2, r^3, r^4\},\,$$

donde r y s son los generadores usuales de  $D_{10}$  que satisfacen  $r^5 = 1$ ,  $s^2 = 1$  y  $srs = r^4$ . Por otra parte, un 5-subgrupo de Sylow de  $AGL_1(\mathbb{F}_5)$  está dado por

$$R = \{ f_{[1]_5,b} \mid b \in \mathbb{F}_5 \}.$$

Como S tiene índice dos en  $D_{10}$ , es normal y por lo tanto

$$\operatorname{Aut}_{D_{10}}(S) = \{1_S, c_s\} \cong \mathbb{Z}/2.$$

Por otra parte, en  $AGL_1(\mathbb{F}_5)$  se tiene

$$f_{a,b}^{-1} = f_{a^{-1},-a^{-1}b}$$

y por lo tanto

$$f_{a,b}f_{[1]_5,c}f_{a,b}^{-1} = f_{[1]_5,ac}.$$

Luego R es normal en  $AGL_1(\mathbb{F}_5)$  y se cumple

$$\operatorname{Aut}_{AGL_1(\mathbb{F}_5)}(R) = \{ f_{a,[0]_5} \mid a \in \mathbb{F}_5^{\times} \} \cong \mathbb{Z}/4.$$

En consecuencia  $D_{10} \not\simeq_5 AGL_1(\mathbb{F}_5)$ .

En el caso de grupos con p-subgrupos de Sylow abelianos, una versión mejorada de este invariante caracteriza las equivalencias p-locales. Para ello primero necesitaremos un lema.

**Lema 2.11.** Sea G un grupo finito con p-subgrupo de Sylow S abeliano. Cualquier G-subconjugación entre subgrupos de S extiende a una G-conjugación de S.

Demostración: Sea  $c_g \colon P \to Q$  una G-subconjugación entre subgrupos de S. Como S es abeliano, está contenido en  $C_G(P)$  y en  $C_G(gPg^{-1})$ . Puesto que los órdenes de estos centralizadores dividen al orden de G, se debe tener que S es un p-subgrupo de Sylow de ambos. Por otra parte se tiene  $gC_G(P)g^{-1} \leq C_G(gPg^{-1})$  y entonces  $gSg^{-1}$  es un subgrupo de  $C_G(gPg^{-1})$  del mismo orden que S, así que también es un p-subgrupo de Sylow de  $C_G(gPg^{-1})$ . Entonces debe existir  $z \in C_G(gPg^{-1})$  tal que  $zgSg^{-1}z^{-1} = S$ . La conjugación  $c_{zg} \colon S \to S$  restringida a P coincide con  $c_g$ .

**Proposición 2.12.** Sean G y H grupos finitos con p-subgrupos de Sylow S y R que son abelianos. Para un isomorfismo  $\alpha \colon S \to R$  las siguientes condiciones son equivalentes.

(1) El isomorfismo  $\alpha$  preserva fusión.

- (2) Para cada  $f \in Aut(S)$ , se tiene que f es una G-conjugación si y solo si  $\alpha f \alpha^{-1}$  es una H-conjugación.
- (3) El homomorfismo  $c_{\alpha}$ : Aut $(S) \to \operatorname{Aut}(R)$  restringe a un isomorfismo  $\operatorname{Aut}_{G}(S) \to \operatorname{Aut}_{H}(R)$ .

Demostración: Es claro que la primera condición implica la segunda, y que la segunda implica la tercera. Supongamos que  $c_{\alpha}$  restringe a un isomorfismo  $\operatorname{Aut}_{G}(S) \to \operatorname{Aut}_{H}(R)$ . Sea  $c_{g} \colon P \to Q$  una G-subconjugación entre subgrupos de S. Por el Lema 2.11, existe  $z \in N_{G}(S)$  tal que la restricción de  $c_{z} \colon S \to S$  a P coincide con  $c_{g}$ . Por hipótesis, se tiene  $\alpha c_{z} \alpha^{-1} = c_{h}$  para algún  $h \in H$  y por lo tanto  $\alpha c_{g} \alpha^{-1} = c_{h}$ . El mismo argumento muestra que  $c_{\alpha^{-1}}$  envía H-subconjugaciones a G-conjugaciones, así que  $\alpha$  preserva fusión.

Introducimos ahora una nueva propiedad p-local que nos ayudará a determinar una clase de grupos finitos para los cuales ser isomorfos es lo mismo que ser p-localmente equivalentes para todo primo p.

**Definición 2.13.** Se dice que un grupo G es p-nilpotente si es p-localmente equivalente a su p-subgrupo de Sylow.

Por ejemplo, vimos que  $\Sigma_3$  es 2-nilpotente en el Ejemplo 2.4, y que no es 3-nilpotente en el Ejemplo 2.5.

Sea  $G \simeq_p H$ . Si G es p-nilpotente, entonces G es p-localmente equivalente a su p-subgrupo de Sylow S y por lo tanto  $H \simeq_p S$ . El isomorfismo entre los p-subgrupos de Sylow de G y H nos dice entonces que H es p-nilpotente. Así que ser p-nilpotente es una propiedad p-local.

**Proposición 2.14.** Sea G un grupo finito y S un p-subgrupo de Sylow. Las siguientes condiciones son equivalentes.

- (1) Los elementos de orden primo a p forman un subgrupo.
- (2) Existe un subgrupo normal N de G tal que la composición  $S \to G \to G/N$  es un isomorfismo.
- (3) El grupo G es p-nilpotente.
- (4) Para cada subgrupo P de S, el grupo  $Aut_G(P)$  es un p-grupo.

Demostración: Supongamos que los elementos de orden primo a p forman un subgrupo N. Este subgrupo debe ser normal pues si un elemento tiene orden primo a p, también se cumple esto para sus conjugados. Veamos que la composición  $S \to G \to G/N$  es biyectiva. Si  $s \in S$  es tal que sN = N, entonces  $s \in S \cap N$  con lo que su orden es a la vez primo a p y una potencia de p. Luego s = 1 y la composición es inyectiva. Para ver la sobreyectividad, es suficiente probar que  $|S| \ge |G/N|$ . Sea d = |G|/|S|. El orden de los elementos de N divide a d, y si el orden de un elemento de G divide a d, en particular es primo a p y por lo tanto está en N. Es decir,

$$N = \{ x \in G \mid x^d = 1 \}.$$

Por el Teorema de Frobenius (Teorema 9.1.2 en [19]), la cardinalidad del conjunto  $\{x \in G \mid x^d = 1\}$  es un múltiplo de d, de donde obtenemos

$$\frac{|G|}{|S|} \le |N| \Rightarrow |G/N| \le |S|.$$

Luego  $S \to G/N$  es un isomorfismo.

Supongamos ahora que existe un subgrupo normal N de G tal que  $S \to G/N$  es un isomorfismo. Conjugación por el homomorfismo  $1_S \colon S \to S$  claramente envía S-subconjugaciones a G-subconjugaciones. Su inversa es  $1_S$  y al conjugar  $c_g \colon P \to Q$  volvemos a obtener  $c_g$ , que veremos que también es una S-subconjugación. Como  $S \to G/N$  es un isomorfismo, existe  $s \in S$  y  $n \in N$  tal que g = sn. Dado  $p \in P$ , el elemento  $pn^{-1}p^{-1}$  está en N, luego  $npn^{-1}p^{-1}$  está en N. Entonces

$$snpn^{-1}p^{-1}s^{-1} \in N \cap S$$

y por ser  $S \to G/N$  un isomorfismo, se tiene  $snpn^{-1}p^{-1}s^{-1} = 1$ , de donde  $snpn^{-1}s^{-1} = sps^{-1}$ . Esto prueba que  $c_g = c_s$ , con lo cual  $1_S$  es una equivalencia p-local de S a G.

Si G es p-nilpotente, existe una equivalencia p-local  $\alpha \colon S \to S$  de S a G. Puesto que  $\alpha^{-1} \colon S \to S$  es una equivalencia p-local de S a S, la composición con  $\alpha$ , que es  $1_S$ , es una equivalencia p-local de S a G. Sea  $P \leq S$  y  $c_g \in \operatorname{Aut}_G(P)$ . Como  $1_S$  es una equivalencia p-local, se debe tener  $c_g = c_s$  para algún  $s \in S$  y por lo tanto el orden de  $c_g$  es una potencia de p. En consecuencia,  $\operatorname{Aut}_G(P)$  es un p-grupo.

Si  $\operatorname{Aut}_G(P)$  es un p-grupo para todo  $P \leq S$ , por el Teorema del p-complemento normal de Frobenius (Teorema 5.26 de [21]), existe un subgrupo normal N cuyo índice es |S|. El orden de N es primo a p, así que sus elementos tienen orden primo a p. Si x es un elemento de orden q primo a p, entonces  $(xN)^q = N$ . Pero también se tiene  $(xN)^{|S|} = N$ , así que el orden de xN es primo a p y una potencia de p al mismo tiempo, por lo que xN = N, es decir,  $x \in N$ . Esto muestra que el conjunto de elementos de orden primo a p es N, que es un subgrupo.

**Ejemplo 2.15.**  $A_4$  no es 2-nilpotente, pues los elementos de orden primo a 2 son

$$1, (1, 2, 3), (1, 2, 4), (2, 3, 4), (1, 3, 4), (1, 3, 2), (1, 4, 2), (2, 4, 3), (1, 4, 3),$$

pero  $A_4$  no puede tener un subgrupo de orden 9. Los elementos de orden primo a 3 son

$$1, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3),$$

que forman un subgrupo, así que  $A_4$  es 3-nilpotente. Finalmente  $A_4$  es p-nilpotente si  $p \ge 5$  pues estos primos no dividen el orden de  $A_4$ .

**Ejemplo 2.16.** El grupo  $\mathbb{Z}/4$  actúa sobre  $\mathbb{Z}/3$  por automorfismos mediante

$$[n]_4 \cdot [m]_3 = \begin{cases} [m]_3, & \text{si } n \text{ es par,} \\ [2m]_3, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Al correspondiente producto semidirecto se le conoce como el grupo dicíclico de orden 12 y se denota  $Dic_{12}$ . Veamos que  $Dic_{12}$  es 2-nilpotente.

El orden del elemento ( $[m]_3$ ,  $[n]_4$ ) tiene que ser un múltiplo del orden de  $[n]_4$ , que es 1, 2 ó 4. Para que este orden sea impar, tiene que ser 1, es decir,  $[n]_4 = [0]_4$ . Por lo tanto, los únicos elementos de orden impar son

$$([0]_3, [0]_4), ([1]_3, [0]_4), ([2]_3, [0]_4),$$

que forman un subgrupo. Luego  $\mathrm{Dic}_{12}$  es 2-nilpotente. Su 2-subgrupo de Sylow es

$$\{([0]_3, x) \mid x \in \mathbb{Z}/4\} \cong \mathbb{Z}/4,$$

así que  $\operatorname{Dic}_{12} \simeq_2 \mathbb{Z}/4$ .

Si  $\varphi \colon G \to H$  es un isomorfismo de grupos finitos y S es un p-subgrupo de Sylow de G, se tiene que  $\varphi(S)$  es un p-subgrupo de Sylow de H. Además, la restricción  $\varphi \colon S \to \varphi(S)$  es un isomorfismo que preserva fusión ya que si  $c_g \colon P \to Q$  es una G-subconjugación entre subgrupos de S se tiene

$$\varphi c_g \varphi^{-1} = c_{\varphi(g)}.$$

Igualmente  $c_{\varphi^{-1}}$  envía H-subconjugaciones a G-subconjugaciones. Así que si dos grupos finitos son isomorfos, son p-localmente equivalentes para todo primo p. Sin embargo, el converso no es necesariamente cierto como muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.17.** En este ejemplo veremos que  $\Sigma_3 \times \mathbb{Z}/4$  y  $\mathrm{Dic}_{12} \times \mathbb{Z}/2$  no son isomorfos, pero son p-localmente equivalentes para todo primo p.

Para ver que no son isomorfos, usaremos que si  $G \cong H$ , entonces  $Z(G) \cong Z(H)$ . El centro de  $\Sigma_3$  es  $\{1\}$ , así que

$$Z(\Sigma_3 \times \mathbb{Z}/4) = \{1\} \times \mathbb{Z}/4 \cong \mathbb{Z}/4.$$

Si  $([m]_3, [n]_4) \in Z(Dic_{12})$ , entonces

$$([2m]_3, [n+1]_4) = ([0]_3, [1]_4)([m]_3, [n]_4) = ([m]_3, [n]_4)([0]_3, [1]_4) = ([m]_3, [n+1]_4),$$

de donde m=0. Luego es de la forma ( $[0]_3,[n]_4$ ). Pero también se debe cumplir

$$([1]_3, [n]_4) = ([1]_3, [0]_4)([0]_3, [n]_4) = ([0]_3, [n]_4)([1]_3, [0]_4) = ([2^n]_3, [n]_4),$$

luego n = 0, 2. Comprobamos que

$$([0]_3, [2]_4)([m]_3, [n]_4) = ([m]_3, [n+2]_4) = ([m]_3, [n]_4)([0]_3, [2]_4),$$

por lo tanto  $Z(\text{Dic}_{12}) = \{([0]_3, [0]_4), ([0]_3, [2]_4)\} \cong \mathbb{Z}/2$  y entonces

$$Z(\operatorname{Dic}_{12} \times \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2.$$

Puesto que sus centros no son isomorfos, los grupos  $\mathrm{Dic}_{12} \times \mathbb{Z}/2$  y  $\Sigma_3 \times \mathbb{Z}/4$  no son isomorfos.

Veamos que  $\Sigma_3 \times \mathbb{Z}/4 \simeq_p \mathrm{Dic}_{12} \times \mathbb{Z}/2$  para todo primo p. Puesto que 2 y 3 son los únicos primos que dividen los órdenes de estos grupos, para  $p \geq 5$  se tiene

$$\Sigma_3 \times \mathbb{Z}/4 \simeq_p \{1\} \simeq_p \mathrm{Dic}_{12} \times \mathbb{Z}/2.$$

Ya probamos que  $\Sigma_3$  y Dic<sub>12</sub> son 2-nilpotentes. Sus 2-subgrupos de Sylow son isomorfos a  $\mathbb{Z}/2$  y  $\mathbb{Z}/4$ , respectivamente así que

$$\Sigma_3 \times \mathbb{Z}/4 \simeq_2 \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4 \simeq_2 \mathbb{Z}/2 \times \mathrm{Dic}_{12}$$
.

Por otra parte, consideremos sus 3-subgrupos de Sylow

$$S = \{([0]_3, [0]_4), ([1]_3, [0]_4), ([2]_3, [0]_4)\},$$
  
$$S' = \{1, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\},$$

que son abelianos. Se puede comprobar que  $\operatorname{Aut}_{\operatorname{Dic}_{12}}(S) = \operatorname{Aut}(S)$  y  $\operatorname{Aut}_{\Sigma_3}(S') = \operatorname{Aut}(S')$ , así que cualquier isomorfismo  $S \to S'$  preserva fusión. Por lo tanto  $\operatorname{Dic}_{12} \simeq_3 \Sigma_3$  y

$$\Sigma_3 \times \mathbb{Z}/4 \simeq_3 \Sigma_3 \simeq_3 \mathrm{Dic}_{12} \simeq_3 \mathrm{Dic}_{12} \times \mathbb{Z}/2.$$

Recordemos que la serie central descendente de G se define de manera inductiva mediante  $\gamma_1(G) = G$  y  $\gamma_{n+1}(G) = [\gamma_n(G), G]$ . Forman una serie

$$\cdots \lhd \gamma_{n+1}(G) \lhd \gamma_n(G) \lhd \cdots \lhd \gamma_2(G) \lhd \gamma_1(G) = G.$$

Se dice que un grupo es nilpotente si su serie central descendente termina en el grupo trivial en un número finito de pasos. Es decir, si  $\gamma_n(G) = \{1\}$  para algún n.

**Proposición 2.18.** Sea G un grupo finito y para cada primo p, sea  $S_p$  un p-subgrupo de Sylow de G. Las siguientes condiciones son equivalentes.

- G es nilpotente.
- G es isomorfo  $a \prod_p S_p$ .
- G es p-nilpotente para todo primo p.

Demostración: Supongamos que G es isomorfo a  $\prod_p S_p$ . Puesto que los p-grupos finitos son nilpotentes (Teorema 5.33 de [30]), obtenemos que G es nilpotente. También tendríamos

$$G \cong \prod_{p} S_p \simeq_q S_q$$

para cada primo q, luego G es p-nilpotente para todo primo p.

Supongamos que G es nilpotente. Sea p un primo que divide al orden de G. Si  $N_G(S_p) \neq G$ , entonces por el Teorema 5.38 de [30] se tendría  $N_G(S_p) < N_G(N_G(S_p))$ . Notemos que  $S_p$  es el único p-subgrupo de Sylow de  $N_G(S_p)$ , pues es normal en  $N_G(S_p)$ . Por lo tanto, también es el único p-subgrupo de Sylow de G que está contenido en  $N_G(S_p)$ . Dado  $g \in N_G(N_G(S_p))$ , cumple  $gN_G(S_p)g^{-1} \leq N_G(S_p)$  y en particular  $gS_pg^{-1} \leq N_G(S_p)$ . Pero entonces  $gS_pg^{-1} = S_p$ , de donde  $g \in N_G(S_p)$ , lo cual contradice  $N_G(S_p) < N_G(N_G(S_p))$ . Por lo tanto  $N_G(S_p) = G$ , es decir,  $S_p$  es normal en G. Si p y q son primos distintos que dividen a G y  $s \in S_p$ ,  $t \in S_q$ , se tiene que  $sts^{-1} \in S_q$ , luego  $sts^{-1}t^{-1} \in S_q$ . Igualmente se tiene que  $ts^{-1}t^{-1} \in S_p$ , luego

 $sts^{-1}t^{-1} \in S_p$ . Por lo tanto, el orden de este elemento es una potencia de p y a la vez primo a p, luego s conmuta con t. Ahora consideremos la función

$$\prod_{p} S_{p} \to G,$$

$$(s_{p})_{p} \mapsto \prod_{p} s_{p}.$$

Notemos que es un producto finito pues si p no divide al orden de G, se tiene  $S_p = \{1\}$ . Es un homomorfismo porque los elementos  $s_p$  conmutan entre sí. Si se tiene

$$\prod_{p} s_p = \prod_{p} s'_p,$$

entonces para cada primo q que divida al orden de G se cumple

$$s_q^{-1}s_q' = \prod_{p \neq q} s_p'^{-1}s_p.$$

Este es un elemento cuyo orden es una potencia de q y a la vez primo a q, luego  $s_q = s'_q$ . Así que este homomorfismo es inyectivo, y como ambos grupos tienen el mismo orden, es un isomorfismo.

Supongamos ahora que G es p-nilpotente para todo primo p. Entonces para cada primo p existe un subgrupo normal  $N_p$  tal que la composición de la inclusión  $i_p \colon S_p \to G$  con el cociente  $\pi_p \colon G \to G/N_p$  es un isomorfismo. Sea  $\alpha_p = \pi_p i_p$  y sea  $r_p = \alpha_p^{-1} \pi_p \colon G \to S_p$ . Satisface  $r_p i_p = 1_{S_p}$ , así que es una retracción. Consideremos la función

$$r \colon G \to \prod_p S_p,$$
  
 $g \mapsto (r_p(g))_p.$ 

Es un homomorfismo pues cada  $r_p$  lo es. Además, si  $s \in S_q$ , entonces r(s) es la tupla que tiene s en la coordenada q y 1 en el resto de coordenadas. Por lo tanto, r es sobreyectiva y como ambos grupos tienen el mismo orden, es un isomorfismo.

**Proposición 2.19.** Dos grupos finitos nilpotentes son isomorfos si y solo si son p-localmente equivalentes para todo primo p.

Demostración: Supongamos que  $G \simeq_p H$  para todo primo p y sean  $S_p$  y  $R_p$  los p-subgrupos de Sylow de G y H, respectivamente. Como ambos son p-nilpotentes para todo p, se tiene

$$S_p \simeq_p G \simeq_p H \simeq_p R_p,$$

de donde  $S_p \cong R_p$ . Ahora como G y H son nilpotentes, se tiene

$$G \cong \prod_{p} S_{p} \cong \prod_{p} R_{p} \cong H,$$

como queríamos probar.

En el Ejemplo 2.17, vimos que  $\operatorname{Dic}_{12} \times \mathbb{Z}/2 \simeq_3 \Sigma_3 \times \mathbb{Z}/4$  y  $\Sigma_3 \times \mathbb{Z}/4 \simeq_3 \Sigma_3$ , que no es 3-nilpotente por el Ejemplo 2.5, así que  $\operatorname{Dic}_{12} \times \mathbb{Z}/2$  y  $\Sigma_3 \times \mathbb{Z}/4$  no son 3-nilpotentes. Por lo tanto, no son nilpotentes y esto permite la situación del Ejemplo 2.17.

# 3. Sistemas de fusión y cohomología de grupos

Sea S un p-subgrupo de Sylow del grupo finito G. Consideremos la categoría  $\mathcal{F}_S(G)$  cuyos objetos son los subgrupos de S, con morfismos

$$\operatorname{Mor}_{\mathcal{F}_S(G)}(P,Q) = \operatorname{Hom}_G(P,Q).$$

Esta categoría se llama el sistema de fusión de G relativo a S e intuitivamente es un contenedor que almacena la información p-local del grupo G. Para justificar esta última afirmación, notemos que si R es un p-subgrupo de Sylow de H y  $\alpha \colon S \to R$  es un isomorfismo que preserva fusión, induce un isomorfismo de categorías

$$\alpha_* \colon \mathcal{F}_S(G) \to \mathcal{F}_R(H),$$

$$P \mapsto \alpha(P),$$

$$f \mapsto \alpha f \alpha^{-1}.$$

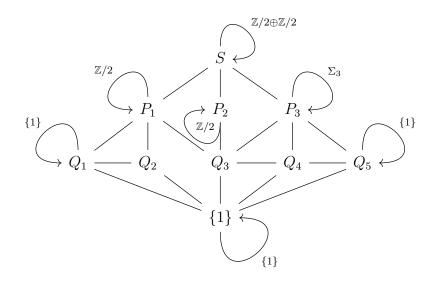
Por otra parte, si  $\alpha \colon S \to R$  es un isomorfismo tal que  $\alpha_*$  tiene sentido, se debe cumplir que  $\alpha c_g \alpha^{-1}$  es una H-subconjugación para cada G-subconjugación  $c_g$ . Si además  $\alpha_*$  es un isomorfismo de categorías, dada una H-subconjugación  $c_h$ , debe existir una G-subconjugación  $c_g$  tal que  $\alpha c_g \alpha^{-1} = c_h$ . Así que  $\alpha^{-1} c_h \alpha = c_g$ , es decir,  $\alpha$  es un isomorfismo que preserva fusión. A un isomorfismo de categorías de la forma  $\alpha_*$  le llamaremos un isomorfismo de sistemas de fusión. Podemos resumir lo que hemos probado en el siguiente corolario.

Corolario 3.1. Sean S y R p-subgrupos de Sylow de G y H. Entonces  $G \simeq_p H$  si y solo si existe un isomorfismo  $\mathcal{F}_S(G) \to \mathcal{F}_R(H)$  de sistemas de fusión.

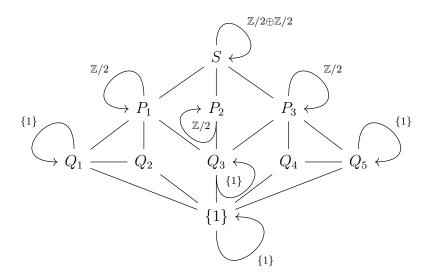
Podemos representar el sistema de fusión mediante un diagrama donde colocamos los subgrupos de S con orden  $p^n$  en la fila (n+1)-ésima contando debe abajo. Usaremos segmentos verticales u oblicuos para inclusiones de subgrupos de una fila en subgrupos de la fila de arriba. Usamos segmentos horizontales para indicar que dos subgrupos son G-conjugados, pero solo los necesarios para que la relación de G-conjugación quede determinada por transitividad. Además se indican los G-automorfismos de un subgrupo en cada clase de G-conjugación.

Es fácil comprobar que dos sistemas de fusión isomorfos deben compartir el mismo diagrama, salvo reordenación y elección del subgrupo de cada clase donde indicamos los G-automorfismos. Por lo tanto este diagrama o cualquier pieza de información que extraigamos de él es un invariante p-local. Por ejemplo, si S es un 2-subgrupo

de Sylow de  $\Sigma_4$ , el diagrama de  $\mathcal{F}_S(\Sigma_4)$  es:



Mientras que el diagrama de  $\mathcal{F}_S(S)$  sería:



La información contenida en estos diagramas se puede obtener usando el software GAP [16]. Podemos dar varias razones por las que  $S \not\simeq_2 \Sigma_4$ .

(1) Tienen un número distinto de clases de conjugación de subgrupos.

- (2) Tienen un número distinto de clases de conjugación de subgrupos de orden dos.
- (3) Hay una clase de  $\Sigma_4$ -conjugación con tres subgrupos, pero no hay tal clase de S-conjugación.
- (4) Hay una clase de S-conjugación con un subgrupo, pero no existe tal clase de  $\Sigma_4$ -conjugación.
- (5) Existe un subgrupo cuyo grupo de automorfismos en  $\mathcal{F}_S(\Sigma_4)$  es  $\Sigma_3$ , pero no existe tal subgrupo para  $\mathcal{F}_S(S)$ .

**Observación 3.2.** En realidad, el diagrama contiene toda la información del sistema de fusión. Para empezar, si dos subgrupos son G-conjugados, tienen grupos de G-automorfismos isomorfos mediante el isomorfismo

$$\operatorname{Aut}_G(H) \to \operatorname{Aut}_G(gHg^{-1}),$$
  
 $c_z \mapsto c_{gzg^{-1}}.$ 

Es por ello que solo indicamos el grupo de G-automorfismos de un subgrupo en cada clase de G-conjugación. Por otra parte, cualquier G-subconjugación  $c_g \colon P \to Q$  se puede descomponer como una G-conjugación  $c_g \colon P \to gPg^{-1}$  seguida de una inclusión  $gPg^{-1} \to Q$ . Por esta razón solamente conectamos las filas entre ellas mediante inclusiones. Por último, si existe una G-conjugación entre P y Q, todas las demás G-conjugaciones de P a Q son composiciones de esta G-conjugación fija con los G-automorfismos de P y por eso solo indicamos cuando dos subgrupos son G-conjugados, pero no todas las G-conjugaciones entre ellos.

Determinar el diagrama de un sistema de fusión requiere bastante trabajo. Es por ello que conviene manejar ciertas subcategorías que generan al sistema de fusión en cierto sentido.

**Definición 3.3.** Sea K un subgrupo de H. Se dice que K está fuertemente p-encajado en H si contiene un p-subgrupo de Sylow de H y  $|K \cap hKh^{-1}|$  es primo a p para todo  $h \in H - K$ .

**Definición 3.4.** Sea S un p-subgrupo de Sylow de G. Se dice que  $P \leq S$  es

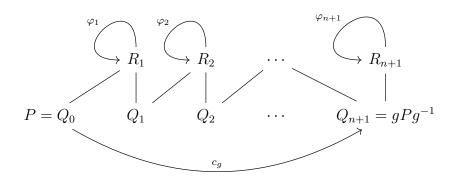
- G-céntrico si  $C_S(gPg^{-1}) = Z(gPg^{-1})$  para todo  $g \in G$  tal que  $gPg^{-1} \leq S$ .
- G—esencial si es G—céntrico y  $\operatorname{Out}_G(P)$  tiene un subgrupo fuertemente p-encajado.
- Completamente G-normalizado si  $|N_S(P)| \ge |N_S(gPg^{-1})|$  para todo  $g \in G$  tal que  $gPg^{-1} \le S$ .

El siguiente teorema (Teorema 2.13 en [20]) explica nuestro interés en estos tipos de subgrupos.

Teorema de fusión de Alperin-Goldschmidt. Sea S un p-subgrupo de Sylow de G y  $P \leq S$  tal que  $gPg^{-1} \leq S$ . Entonces existen subgrupos  $Q_0, \ldots, Q_{n+1}$  y  $R_1, \ldots, R_{n+1}$ , y automorfismos  $\varphi_i \in \operatorname{Aut}_G(R_i)$  tales que:

- Cada  $R_i$  es completamente G-normalizado y G-esencial, o es S.
- $P = Q_0 \ y \ gPg^{-1} = Q_{n+1}$ .
- $Q_{i-1}$ ,  $Q_i \leq R_i$  para todo i.
- $\varphi_j(Q_{j-1}) = Q_j$  para todo j.  $c_g(x) = \varphi_{n+1} \circ \cdots \circ \varphi_1(x)$  para todo  $x \in P$ .

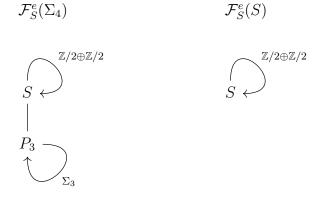
El siguiente diagrama es una representación gráfica del teorema.



Corolario 3.5. Sean S y R p-subgrupos de Sylow de G, H, respectivamente. Un isomorfismo  $\alpha \colon S \to R$  es una equivalencia p-local si y solo si preserva subgrupos esenciales y  $c_{\alpha}$ : Aut<sub>G</sub>(P)  $\rightarrow$  Aut<sub>H</sub>( $\alpha$ (P)) es un isomorfismo para todo subgrupo G-esencial P y para P = S.

Preservar subgrupos esenciales quiere decir que P es G-esencial si y solo si  $\alpha(P)$ es H-esencial. Con esto reducimos el problema a estudiar el diagrama de la subcategoría completa  $\mathcal{F}_{S}^{e}(G)$  de  $\mathcal{F}_{S}(G)$  cuyos objetos son los subgrupos G-esenciales y S.

**Ejemplo 3.6.** Sea S un 2-subgrupo de Sylow de  $\Sigma_4$ . Podemos usar [16] para determinar los diagramas de  $\mathcal{F}_{S}^{e}(\Sigma_{4})$  y  $\mathcal{F}_{S}^{e}(S)$ .



Si los p-subgrupos de Sylow de G son abelianos, entonces no hay subgrupos esenciales. Esto proporciona una explicación más conceptual de la Proposición 2.12. El sistema de fusión también nos puede ayudar a identificar invariantes p-locales. Si una asignación se puede expresar en términos del sistema de fusión, debe ser un invariante p-local. Ejemplos no inmediatamente evidentes de esto son la homología y cohomología de grupos con coeficientes en  $\mathbb{F}_p$ , el campo con p elementos, definidos mediante

$$H_n(G; \mathbb{F}_p) = \operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, \mathbb{F}_p),$$
  
 $H^n(G; \mathbb{F}_p) = \operatorname{Ext}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, \mathbb{F}_p).$ 

Aquí  $\mathbb{Z}G$  denota al anillo de grupo de G, que es el grupo abeliano libre con base G, con el producto inducido por la multiplicación de G. La notación  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{F}_p$  se refiere a estos grupos abelianos con su estructura de  $\mathbb{Z}G$ —módulos dada por

$$\left(\sum n_g g\right) \cdot x = \sum n_g x,$$

donde en el lado derecho usamos la estructura de grupo abeliano de  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{F}_p$ . Aunque nos referiremos a ellos como los grupos de homología y cohomología con coeficientes en  $\mathbb{F}_p$ , tienen estructura de espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}_p$ . También podemos considerar

$$H^*(G; \mathbb{F}_p) = \bigoplus_{n>0} H^n(G; \mathbb{F}_p),$$

que no solo es un  $\mathbb{F}_p$ -espacio vectorial, sino una  $\mathbb{F}_p$ -álgebra graduada.

Teorema de Cartan-Eilenberg.  $Si\ G$  es un grupo finito y S es un p-subgrupo de  $Sylow\ de\ G$ , entonces

$$H_n(G; \mathbb{F}_p) \cong \varinjlim_{\mathcal{F}_S(G)} H_n(Q; \mathbb{F}_p),$$

$$H^n(G; \mathbb{F}_p) \cong \varprojlim_{\mathcal{F}_S(G)} H^n(Q; \mathbb{F}_p),$$

para cualquier  $n \ge 0$ . El isomorfismo en cohomología también induce un isomorfismo de  $\mathbb{F}_p$ -álgebras graduadas

$$H^*(G; \mathbb{F}_p) \cong \varprojlim_{\mathcal{F}_S(G)} H^*(Q; \mathbb{F}_p),$$

La demostración para cohomología se puede encontrar en el Teorema III.10.3 de [10] y es análoga para homología.

Corolario 3.7. Los grupos de homología y cohomología de grupos con coeficientes en  $\mathbb{F}_p$ , así el anillo de cohomología con coeficientes en  $\mathbb{F}_p$ , son invariantes p-locales.

En dimensiones bajas (ver por ejemplo [10]) obtenemos invariantes p-locales con descripciones alternativas.

$$H_1(G; \mathbb{F}_p) \cong G_{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p,$$
  
 $H^1(G; \mathbb{F}_p) \cong \operatorname{Hom}(G, \mathbb{Z}/p),$   
 $H^2(G; \mathbb{F}_p) \cong \{ \text{ clases de equivalencia de extensiones centrales de } G \text{ por } \mathbb{Z}/p \}.$ 

Es conocido que los grupos de homología y cohomología de grupos tienen una interpretación topológica en términos de espacios clasificantes de grupos. En la siguiente sección comentaremos que no solo esto es cierto, sino que cualquier invariante p-local tiene tal interpretación.

# 4. Espacios clasificantes y p-completaciones

Para el estudio de acciones libres de un grupo G con un comportamiento local agradable (que tienen rebanadas), es conveniente usar el lenguaje de haces G-principales. La clasificación de haces G-principales está dada en términos de clases de homotopía de funciones al espacio clasificante BG de G. Estrictamente hablando el espacio clasificante no es un espacio, sino un tipo de homotopía, pero en [25] se construye un funtor de la categoría de grupos topológicos a la categoría de espacios que a cada grupo G le asigna un espacio de este tipo de homotopía. A este espacio se le debería llamar un modelo para el espacio clasificante de G, pero por simplicidad solamente le llamaremos el espacio clasificante de G. También se le conoce como la construcción de Milnor.

Describiremos ahora una simplificación de la construcción de Milnor del espacio clasificante que funciona para grupos finitos G, que es nuestro caso de interés en este documento. Dados dos espacios topológicos X y Y, el producto join de X y Y es el espacio

$$X * Y = X \times Y \times [0, 1] / \sim,$$

donde  $(x_0, y, 0) \sim (x_0, y', 0)$  para todo  $y, y' \in Y$  y todo  $x_0 \in X$  y  $(x, y_0, 1) \sim (x', y_0, 1)$  para todo  $x, x' \in X$  y todo  $y_0 \in Y$ . Lo dotamos de la topología cociente. Usamos la notación

$$tx + (1-t)y := [(x, y, 1-t)]$$

para pensar que X \* Y es el espacio de segmentos abstractos entre los puntos de X y Y. Para construir el espacio clasificante del grupo finito G, realizamos el siguiente proceso inductivo.

$$E^{1}G = G.$$

$$E^{n+1}G = E^{n}G * G.$$

Existen funciones continuas

$$E^n G \to E^{n+1} G,$$
  
 $t_1 g_1 + \ldots + t_n g_n \mapsto t_1 g_1 + \ldots + t_n g_n + 0 \cdot 1,$ 

y podemos considerar el espacio

$$EG = \varinjlim_{n \ge 1} E^n G.$$

Las funciones  $E^nG \to E^{n+1}G$  son encajes, así que EG es la unión de los  $E^nG$  con la topología final, es decir, un subconjunto de EG es abierto si y solo si la intersección con cada  $E^nG$  es abierto en  $E^nG$ . Los elementos del espacio EG son por lo tanto sumas formales finitas

$$\sum \lambda_i g_i$$
,

donde  $\lambda_i \in [0,1]$  y  $\sum \lambda_i = 1$ , es decir, combinaciones lineales convexas formales. El grupo G actúa sobre EG por la derecha mediante

$$\left(\sum \lambda_i g_i\right) \cdot g = \sum \lambda_i(g_i g),$$

y es fácil comprobar que es una acción libre. El espacio clasificante de G es el espacio de órbitas

$$BG = EG/G$$

con la topología cociente. Aunque este modelo de Milnor es explícito, no siempre es el más conveniente. Siguiendo los comentarios en el primer párrafo de esta sección, igualmente llamaremos espacio clasificante a cualquier espacio que sea homotópicamente equivalente a este. El siguiente resultado (Teorema II.1.2 en [1]) nos permite identificar espacios clasificantes.

**Proposición 4.1.** Sea E un CW-complejo contráctil con una acción libre de un grupo finito G. Entonces E/G es un modelo para BG.

**Ejemplo 4.2.** El grupo  $\mathbb{Z}/2$  actúa libremente sobre  $S^{\infty}$  mediante la acción antipodal, de donde  $\mathbb{R}P^{\infty}$  es un modelo para  $B\mathbb{Z}/2$ .

Aparte de su utilidad para clasificar haces G-principales, el espacio BG está intimamente relacionado con G por la heurística de que las propiedades e invariantes homotópicos de BG deben corresponder a propiedades e invariantes algebraicos de G. Sin intentar ser exhaustivos, he aquí algunas relaciones que ilustran esta filosofía.

- (1)  $\pi_1(BG) \cong G$ .
- (2)  $H_1(BG) \cong G_{ab}$ .
- (3)  $H_n(BG; M) \cong H_n(G; M)$  y  $H^n(BG; M) \cong H^n(G; M)$ .
- (4)  $BG \simeq BH$  si y solo si  $G \cong H$ .
- (5)  $K(BG) \cong R(G)^{\wedge}_{I_G}$ .

Estos resultados se pueden encontrar en [1], [10] y [4]. Tenemos pues un tipo de homotopía que captura la información de G. Es natural preguntarse ahora si existe un tipo de homotopía que contenga la información p-local de G, y esto se logrará siguiendo un proceso de localización en topología algebraica.

Dado un espacio X, en [6] se construye para cada primo p el espacio  $X_p^{\wedge}$ , conocido como su p-completación, y un espacio  $X_{\mathbb{Q}}$  llamado su racionalización. La construcción de estos espacios no es relevante para esta discusión, sino más bien lo que se pretende lograr con ellos:

- Son construcciones funtoriales.
- El espacio  $X_p^{\wedge}$  captura la información p-local de X, es decir, la información que se puede recuperar a partir de  $H_*(X; \mathbb{F}_p)$ . Más específicamente, una función  $X \to Y$  induce un isomorfismo en los grupos de homología con coeficientes en  $\mathbb{F}_p$  si y solo si la función inducida  $X_p^{\wedge} \to Y_p^{\wedge}$  es una equivalencia homotópica.
- Bajo ciertas condiciones, uno puede recuperar el tipo de homotopía de un espacio a partir de sus p-completaciones y su racionalización.

Este último punto nos permite elaborar estrategias de local a global. Para resolver un problema, estudiamos primero el problema correspondiente para las completaciones y sus racionalizaciones, y después intentamos recomponer una solución al problema original a partir de sus soluciones locales.

**Ejemplo 4.3.** Si G es un grupo finito, el espacio  $BG_{\mathbb{Q}}$  es contráctil y también lo es  $BG_p^{\wedge}$  si p es un primo que no divide al orden de G. Usando la Proposición VII.4.1 de [6], podemos recuperar con el resto de las p-completaciones el tipo de homotopía de

$$\mathbb{Z}_{\infty}BG \simeq \prod_{p \text{ primo}} BG_p^{\wedge},$$

donde  $\mathbb{Z}_{\infty}X$  es la  $\mathbb{Z}$ -completación de Bousfield-Kan. El espacio  $\mathbb{Z}_{\infty}BG$  tiene los mismos grupos de homología que BG, pero no es homotópicamente equivalente a BG en general. Curiosamente,  $BG \simeq \mathbb{Z}_{\infty}BG$  si y solo si G es nilpotente por la Proposición V.3.3 de [6].

El siguiente resultado fue enunciado originalmente en [24]. La demostración original presentaba dificultades y durante un tiempo se conoció como la conjetura de Martino-Priddy hasta que finalmente se probó en [26] y [27], usando la teoría de grupos p-locales finitos. Diremos más al respecto en la última sección.

**Teorema 4.4.** Sean G y H grupos finitos. Entonces  $BG_p^{\wedge} \simeq BH_p^{\wedge}$  si y solo si  $G \simeq_p H$ .

Este teorema nos dice que el tipo de homotopía de  $BG_p^{\wedge}$  es un invariante p-local completo para grupos finitos. Pero no es un invariante práctico, pues el problema de determinar cuándo dos espacios son homotópicamente equivalentes es generalmente complicado, y la construcción de  $BG_p^{\wedge}$  a partir de BG también lo es.

Sin embargo, la manera en que intentamos entender  $BG_p^{\wedge}$  es a través de sus invariantes homotópicos y esto tiene valor para nuestro problema ya que un invariante homotópico de  $BG_p^{\wedge}$  también será un invariante p-local de G. La nueva heurística nos dice que los invariantes y propiedades homotópicas de  $BG_p^{\wedge}$  corresponden a invariantes y propiedades p-locales de G. Ofrecemos algunos ejemplos de tales invariantes con sus correspondientes invariantes p-locales.

- $(1) H_k(G; \mathbb{F}_p) \cong H_k(BG_p^{\wedge}; \mathbb{F}_p).$
- (2) El p-rango de G es igual a la dimensión de Krull de  $H^*(BG_p^{\wedge}; \mathbb{F}_p)$ .
- (3)  $G/O^p(G) \cong \pi_1(BG_n^{\wedge}).$
- (4)  $(G_{ab})_p^{\wedge} \cong H_1(BG_p^{\wedge}; \mathbb{Z}_p^{\wedge}).$ (5) G es p-nilpotente si y solo si  $BS \simeq BG_p^{\wedge}.$
- (6) Rep(P,G) está en biyección con  $[BP, \overrightarrow{BG_p}]$ .

Estos resultados se pueden consultar en [1], [10], [6], [8], [12] y [29]. Aparte de poder obtener nuevos invariantes p-locales de esta manera, también nos sirve para tener una razón conceptual de por qué algo es un invariante p-local. Por ejemplo,  $O^p(G)$ es el subgrupo normal más pequeño de G cuyo índice es una potencia de p. No es evidente que  $G/O^p(G)$  solo dependa de  $\mathcal{F}_S(G)$ , pero su descripción como  $\pi_1(BG_n^{\wedge})$ nos dice que así es.

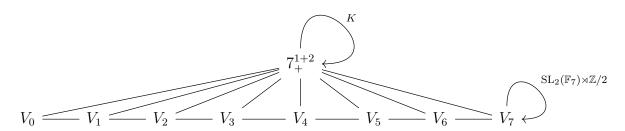
## 5. Grupos p-locales finitos

La teoría de grupos p-locales finitos tiene sus antecedentes en las categorías de Frobenius introducidas en notas no publicadas en 1993, y que se publicarían en [28], dirigidas al estudio de las representaciones modulares de grupos finitos. Posteriormente se encontró que estas categorías eran valiosas para otros propósitos en topología algebraica:

- Encontrar y analizar espacios con propiedades homotópicas similares a  $BG_p^{\wedge}$ .
- Demostrar la conjetura de Martino-Priddy.
- Determinar descomposiciones (co)homológicas de BG.

Merece la pena comentar un poco más sobre el primer objetivo. El grupo de Conway Co<sub>3</sub> es el único grupo simple con su 2-subgrupo de Sylow. Para demostrar esto, era suficiente descartar un hipotético grupo simple G distinto de  $Co_3$  con este 2-subgrupo de Sylow S y una cierta condición sobre el centralizador de un elemento de orden dos. En [32] se determinó cómo debía ser  $\mathcal{F}_S(G)$  si G existiera y se demostró que esto era incompatible con  $\mathcal{F}_T(G)$ , donde T sería un p-subgrupo de Sylow de G para un primo p relacionado con la condición sobre el centralizador. Lo interesante de esta demostración es que no se encontró ninguna inconsistencia en  $\mathcal{F}_S(G)$ , lo cual llevó a plantear [5] si podrían existir abstracciones de los sistemas de fusión  $\mathcal{F}_S(G)$  que no proviniesen de un grupo finito, pero que estuviera ligado a un espacio topológico, al igual que  $\mathcal{F}_S(G)$  lo está con  $BG_n^{\wedge}$ .

Esta abstracción es un sistema de fusión saturado, introducida en [8]. Al igual que  $\mathcal{F}_S(G)$ , es una categoría de subgrupos de un p-grupo finito S y sus morfismos son ciertos monomorfismos. Pero a diferencia de  $\mathcal{F}_S(G)$ , estos morfismos no necesariamente están dados por subconjugaciones por elementos de un grupo finito G cuyo p-subgrupo de Sylow sea S, sino que solo se les requiere que cumplan ciertos axiomas. Existen sistemas de fusión saturados que no son isomorfos a sistemas de fusión de la forma  $\mathcal{F}_S(G)$  y a estos se les conoce como exóticos. Las construcciones de [32] y [5] dieron lugar a tales ejemplos [22]. Otros ejemplos fueron construidos en [31] sobre  $7_+^{1+2}$ , el grupo extraespecial de orden  $7_-^3$  y exponente 7. Para uno de estos, conocido ahora como  $RV_3$ , el diagrama de  $RV_3^e$  está dado por



donde K es una extensión de  $\mathrm{SD}_{32} \times \mathbb{Z}/3$  por  $7^{1+2}_+$ , y los grupos  $V_j$  son isomorfos a  $\mathbb{Z}/7 \oplus \mathbb{Z}/7$ .

A fin de asociarle un espacio topológico a un sistema de fusión saturado, en [8] se introduce la noción de grupo p-local finito, dado por una terna  $\mathcal{G} = (S, \mathcal{F}, \mathcal{L})$ , donde S es un p-grupo finito,  $\mathcal{F}$  es un sistema de fusión saturado sobre S y  $\mathcal{L}$  es un sistema céntrico de enlace para  $\mathcal{F}$ . Este último es otra categoría y el espacio clasificante de  $\mathcal{G}$  se define como

$$B\mathcal{G} = |\mathcal{L}|_p^{\wedge}.$$

Por ejemplo, dado un grupo finito G con p-subgrupo de Sylow S, consideremos la categoría  $\mathcal{L}_S(G)$  cuyos objetos son los subgrupos G-céntricos de S, con morfismos

$$\operatorname{Mor}_{\mathcal{L}_S(G)}(P,Q) = N_G(P,Q)/O^p(C_G(P)).$$

Esta categoría es un sistema céntrico de enlace para  $\mathcal{F}_S(G)$  y satisface

$$|\mathcal{L}_S(G)|_p^{\wedge} \simeq BG_p^{\wedge}.$$

Esto es consistente con la relación que establecimos previamente entre  $\mathcal{F}_S(G)$  y  $BG_p^{\wedge}$ , pero parecería cuestionar la validez de la conjetura de Martino-Priddy, pues nos dice que es el sistema céntrico de enlace quien codifica el tipo de homotopía de  $BG_p^{\wedge}$ . Sin embargo, esto es parte de la estrategia ideada para atacar esta conjetura, que consistió en demostrar que cada sistema de fusión saturado admite un único sistema céntrico de enlace, salvo isomorfismo. Es decir, el esquema de la demostración es el

siguiente:

$$G \simeq_p H \Rightarrow \mathcal{F}_S(G) \cong \mathcal{F}_T(H) \Rightarrow \mathcal{L}_S(G) \cong \mathcal{L}_T(H) \Rightarrow BG_p^{\wedge} \simeq BH_p^{\wedge}.$$

La existencia y unicidad del sistema céntrico de enlace asociado a  $\mathcal{F}_S(G)$  fue probada en [26] y [27], posteriormente extendida a sistemas de fusión saturados en [13] y redemostrada en [17] sin usar la clasificación de grupos finitos simples.

Aunque ya queda fuera del alcance de este artículo, nos gustaría mencionar brevemente que también existen dos maneras de tener una visión local de los grupos compactos de Lie. La primera es mediante la teoría de grupos p-compactos, que extiende las ideas de toro maximal, grupo de Weyl y sistemas de raíces para espacios de lazos con condiciones de finitud en el primo p. La segunda es la teoría de grupos p-locales compactos, similar en forma a la de grupos p-locales finitos. En este caso los p-subgrupos de Sylow son grupos p-torales discretos y los conceptos de sistema de fusión saturado y sistema céntrico de enlace se extienden adecuadamente. El lector interesado puede consultar [18] para una vista panorámica de los grupos p-compactos y [15] para el artículo fundacional de la teoría. Para la teoría de grupos p-locales compactos, se puede consultar [9].

#### Referencias

- Alejandro Adem and R. James Milgram, Cohomology of finite groups, second ed., Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 309, Springer-Verlag, Berlin, 2004. MR 2035696
- Michael Aschbacher, Radha Kessar, and Bob Oliver, Fusion systems in algebra and topology, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 391, Cambridge University Press, Cambridge, 2011. MR 2848834
- 3. Michael Aschbacher and Bob Oliver, Fusion systems, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 53 (2016), no. 4, 555–615. MR 3544261
- 4. M. F. Atiyah and G. B. Segal, Equivariant K-theory and completion, J. Differential Geometry 3 (1969), 1–18. MR 259946
- 5. David J. Benson, Cohomology of sporadic groups, finite loop spaces, and the Dickson invariants, Geometry and cohomology in group theory (Durham, 1994), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 252, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, pp. 10–23. MR 1709949
- A. K. Bousfield and D. M. Kan, Homotopy limits, completions and localizations, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 304, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972. MR 0365573
- Carles Broto, Fusion systems in algebra and topology, Gac. R. Soc. Mat. Esp. 21 (2018), no. 1, 183–202. MR 3771029
- 8. Carles Broto, Ran Levi, and Bob Oliver, *The homotopy theory of fusion systems*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 4, 779–856. MR 1992826
- 9. \_\_\_\_\_, Discrete models for the p-local homotopy theory of compact Lie groups and p-compact groups, Geom. Topol. 11 (2007), 315–427. MR 2302494
- 10. Kenneth S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York, 1994, Corrected reprint of the 1982 original. MR 1324339
- 11. José Cantarero, *Una visión local de los grupos finitos*, 2020, https://www.youtube.com/playlist?list=PLlC\_fV4djn7i8OeoB0gEl\_17HlFu3jvpx.

- 12. José Cantarero, Jérôme Scherer, and Antonio Viruel, *Nilpotent p-local finite groups*, Ark. Mat. **52** (2014), no. 2, 203–225. MR 3255138
- Andrew Chermak, Fusion systems and localities, Acta Math. 211 (2013), no. 1, 47–139.
   MR 3118305
- 14. David A. Craven, *The theory of fusion systems*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 131, Cambridge University Press, Cambridge, 2011, An algebraic approach. MR 2808319
- 15. W. G. Dwyer and C. W. Wilkerson, Homotopy fixed-point methods for Lie groups and finite loop spaces, Ann. of Math. (2) 139 (1994), no. 2, 395–442. MR 1274096
- 16. The GAP Group, GAP Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.13.1, 2024.
- 17. George Glauberman and Justin Lynd, Control of fixed points and existence and uniqueness of centric linking systems, Invent. Math. 206 (2016), no. 2, 441–484. MR 3570297
- 18. Jesper Grodal, *The classification of p-compact groups and homotopical group theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume II, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010, pp. 973–1001. MR 2827828
- 19. Marshall Hall, Jr., The theory of groups, The Macmillan Company, New York, 1959. MR 103215
- 20. Ellen Henke,  $Recognizing SL_2(q)$  in fusion systems, J. Group Theory **13** (2010), no. 5, 679–702. MR 2720198
- I. Martin Isaacs, Finite group theory, Graduate Studies in Mathematics, vol. 92, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008. MR 2426855
- 22. Ran Levi and Bob Oliver, Construction of 2-local finite groups of a type studied by Solomon and Benson, Geom. Topol. 6 (2002), 917–990. MR 1943386
- 23. Markus Linckelmann, *Introduction to fusion systems*, Group representation theory, EPFL Press, Lausanne, 2007, pp. 79–113. MR 2336638
- 24. John Martino and Stewart Priddy, Unstable homotopy classification of  $BG_p^{\wedge}$ , Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **119** (1996), no. 1, 119–137. MR 1356164
- John Milnor, Construction of universal bundles. II, Ann. of Math. (2) 63 (1956), 430–436.
   MR 77932
- Bob Oliver, Equivalences of classifying spaces completed at odd primes, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 137 (2004), no. 2, 321–347. MR 2092063
- 27. \_\_\_\_\_, Equivalences of classifying spaces completed at the prime two, Mem. Amer. Math. Soc. **180** (2006), no. 848, vi+102. MR 2203209
- 28. Lluis Puig, Frobenius categories, J. Algebra 303 (2006), no. 1, 309–357. MR 2253665
- 29. Daniel Quillen, The spectrum of an equivariant cohomology ring. I, II, Ann. of Math. (2) **94** (1971), 549–572; ibid. (2) 94 (1971), 573–602. MR 298694
- 30. Joseph J. Rotman, An introduction to the theory of groups, fourth ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 148, Springer-Verlag, New York, 1995. MR 1307623
- 31. Albert Ruiz and Antonio Viruel, The classification of p-local finite groups over the extraspecial group of order  $p^3$  and exponent p, Math. Z. **248** (2004), no. 1, 45–65. MR 2092721
- 32. Ronald Solomon, Finite groups with Sylow 2-subgroups of type 3, J. Algebra 28 (1974), 182–198. MR 0344338

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C. Unidad Mérida, Parque Científico y Tecnológico de Yucatán, Carretera Sierra Papacal—Chuburná Puerto Km 5.5, Sierra Papacal, Mérida, YUC 97302, Mexico.

Email address: cantarero@cimat.mx