Instituto Tecnológico de Monterrey

Campus Toluca

Entrega Fase 1 de la Situación Problema

Team Infierno

Integrantes:

Dana Barbara Lira Fuentes - A01769550

Omar Reyes Barrueta - A01772756

Mauricio González Segovia - A01770038

Juan Pablo Fabian Ruiz - A01772643

24 de enero 2024

Modelación Matemática de la Difusión de una Enfermedad

Supongamos que una enfermedad curable se difunde en una población muy grande y de tamaño constante como la de un Campus Universitario. La persona que se recupera de la enfermedad crea defensas y ya no es susceptible a adquirirla de nuevo.

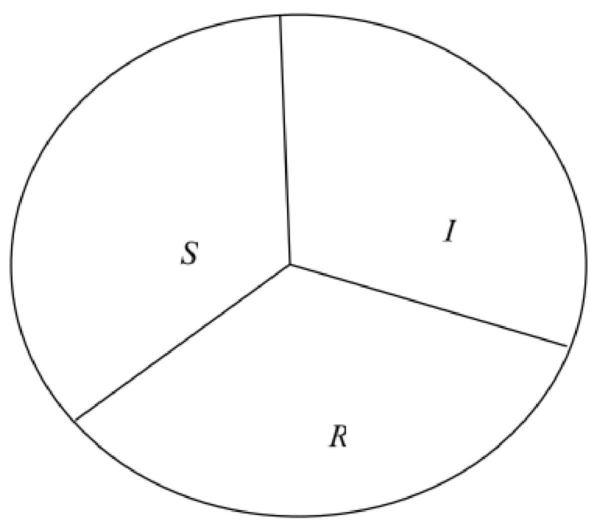
En cualquier tiempo por la presencia de la enfermedad, la población se divide en tres diferentes clases de personas:

Susceptibles: Personas que pueden enfermarse.

Infectados: Tienen la enfermedad.

Recuperados: Tuvieron la enfermedad y ya están bien.

Esto se muestra en la siguiente figura:



Población total

Llamaremos:

S (t) =El número de personas susceptibles a la enfermedad en el tiempo t

I (t) =El número de personas infectadas en el tiempo t

R(t) =El número de personas recuperadas en el tiempo t

Fase 1

Observa que

$S = S(t)$, $I = I(t)$ y $R = R(t)$ son funciones que dependen del tiempo.

Explica por qué las tres clases se relacionan mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{dS}{dt} = -0.00001 S\,I$$

$$\frac{dI}{dt} = 0.00001 S\,I - \frac{1}{14} I$$

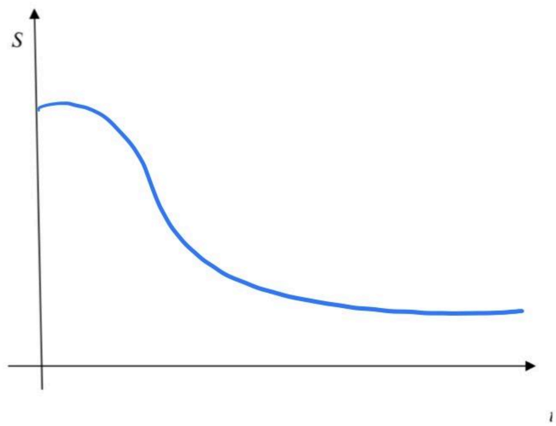
$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{14} I$$

Explicación

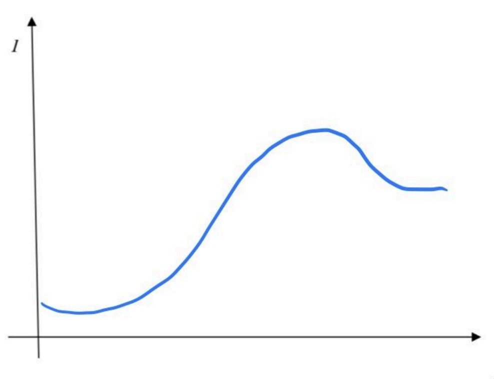
Conforme hemos observado estas ecuaciones, tienen la similitud de que van a un sector específico, El H1N1, por lo tanto observamos que estas funciones conforme a el tiempo disminuyen e incrementan proporcionalmente el ejemplo claro está en que los propensos a enfermarse (S) disminuyen con el tiempo pero por el otro lado se convierten en infectados (I), lo que nos demuestra la relación entre estas dos funciones, gracias a esta observación sabemos la relación de estas dos funciones inversamente proporcionales.

Por lo tanto la tercera es el resultado de la recuperación de un infectado (R), lo cual muestra la reducción de la segunda función conforme la tercera va creciendo igualitariamente que va restando a la segunda función.

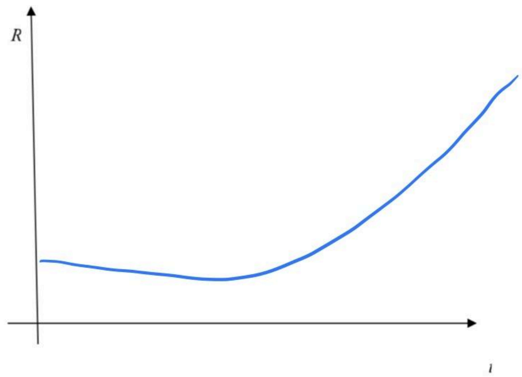
Supongamos que empezamos (*t* = 0) a analizar la difusión de la enfermedad cuando había 45400 susceptibles, 2100 infectados y 2500 recuperados. Infiere cómo quedarían las gráficas de *S* (*t*), *I* (*t*) y *R*(*t*) en el tiempo. Explica tus respuestas.



Ya que la ecuación 1 se muestra negativa, asumimos que la función es decreciente y que eventualmente tiene que llegar a un valor constante. Debe comenzar en 45400 susceptibles.

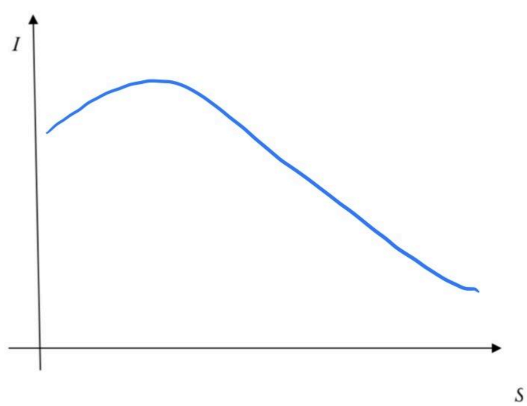


La cantidad de infectados comienza baja y con el tiempo llega a un punto máximo de infectados. Cuando estos infectados se convierten en recuperados, la gráfica vuelve a decrecer para llegar a un valor constante. Por lo tanto con los Recuperados la función con el tiempo es lineal, ya que conforme a el tiempo una décima cuarta parte de los infectados se recupera, así que la gráfica quedaría tal que así.

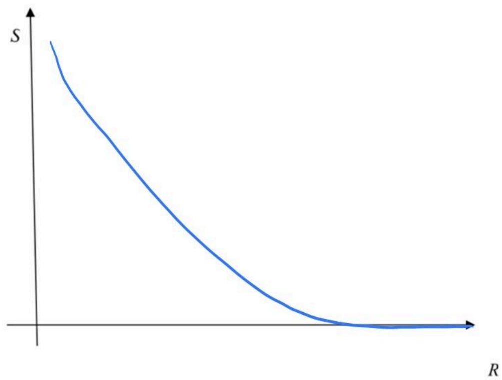


La función comienza en 2500, ya que es la cantidad de recuperados que existe al inicio. Con el tiempo, dicha cantidad va en aumento ya que la gente infectada se va recuperando. Finalmente, se estabiliza.

Pero por otra parte el máximo de la función sería desde 2500 recuperados y por ahora los 2100 infectados, pero hasta el momento en el que haya un infectado más la función de los recuperados aumentará su valor.



Está función comienza en 45,400 susceptibles y 2,100 infectados, ya que son los datos que se nos proporcionan. Con el paso del tiempo, la función crece ya que mientras haya más susceptibles, habrá más infectados. Sin embargo, llega a su punto máximo y comienza a decrecer hasta tender a un valor constante y pequeño, ya que al no haber susceptibles, tarde o temprano dejará de haber infectados.



Está gráfica inicia en 45,400 susceptibles y 2500 recuperados, tal como se menciona en los datos iniciales. Al principio, entre más susceptibles habrá más recuperados. Luego, el número de susceptibles decrece al tiempo en que el número de recuperados aumenta, hasta tender a un valor constante.

Fase 2

Usa el Método de Euler con $\Delta t = 0.01$ para obtener una solución aproximada del sistema de ecuaciones que modela la difusión de la enfermedad.

$$\frac{dS}{dt} = -0.00001\,S\,I$$

$$\frac{dI}{dt} = 0.00001\,S\,I - \frac{1}{14}I$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{14}I$$

Sujeto a las condiciones: $S(0) = 45400$, $I(0) = 2100$ y $R(0) = 2500$.

a) Contrasta las gráficas obtenidas con el Método de Euler con la inferencia que se realizó en la Actividad 2.

b) Obtén el número máximo de infectados analíticamente y también de la gráfica que obtuviste con el Método de Euler. Compara los dos resultados ¿Es buena la aproximación obtenida de la gráfica?

c) Verifica que:

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{7142.86}{S}$$

d) Separa variables para justificar que:

$$I = -S + 7142.86\ln(S) - 29094.80$$

e) La función que obtuviste relaciona los infectados y los susceptibles, gráfica I en función de S y haz lo mismo con los datos obtenidos con el Método de Euler ¿Hay parecido en las gráficas?

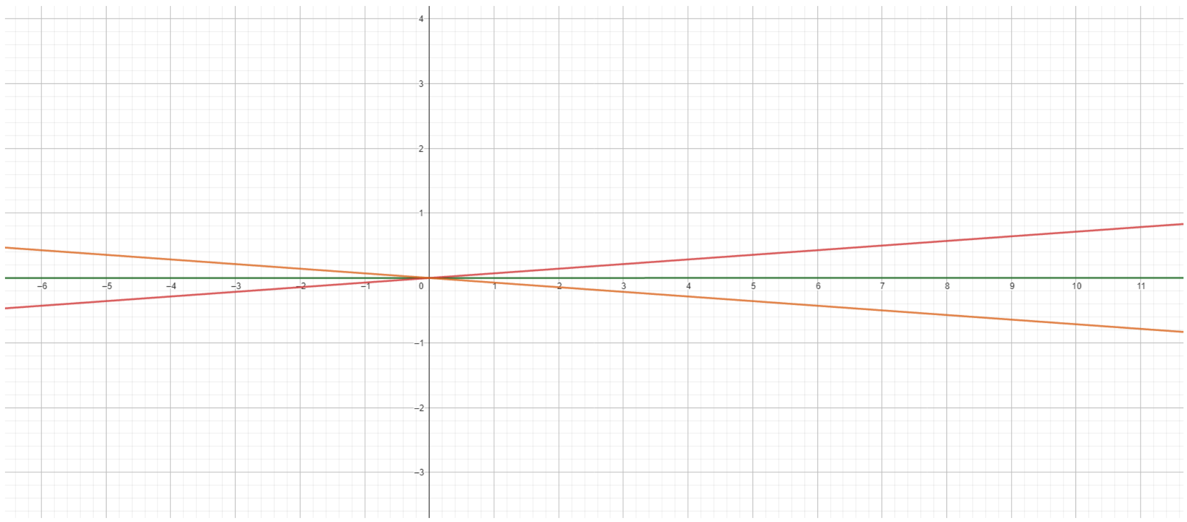
f) Verifica que:

$$\frac{dS}{dR} = -0.00014\,S$$

g) Separa variables para justificar que:

$$S = 64425.67\ e^{-0.00014\,R}$$

h) La función que obtuviste relaciona los susceptibles y los recuperado, gráfica S en función de R y haz lo mismo con los datos obtenidos con el Método de Euler ¿Hay parecido en las gráficas?



Conforme a el análisi de las derivadas conforme a el tiempo esto nos arrojó

El COLOR NARANJA

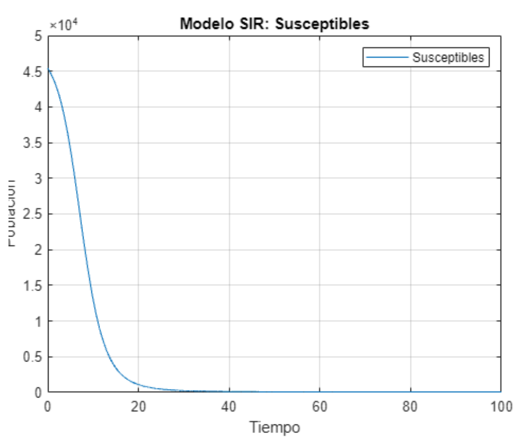
Explica el decaimiento de los susceptibles a enfermarse

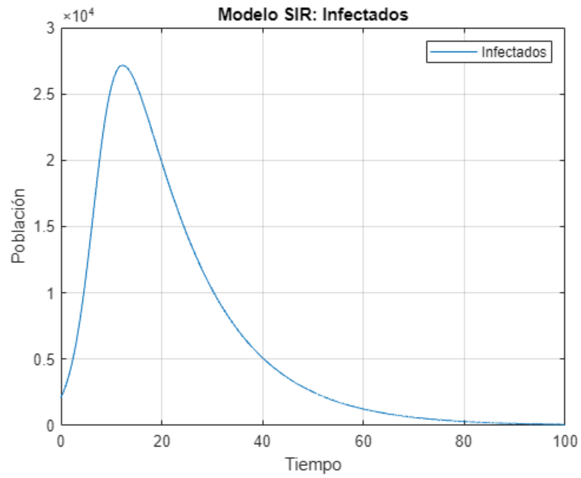
El COLOR ROJO

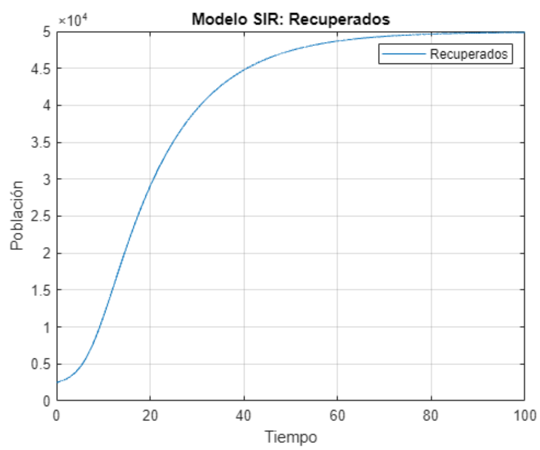
Explica el incremento en los infectados, volviendolos recuperados

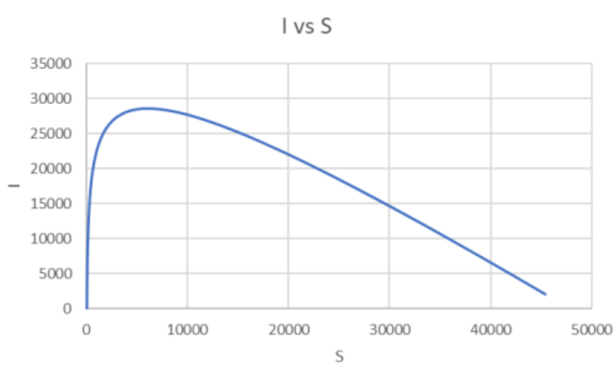
El COLOR VERDE

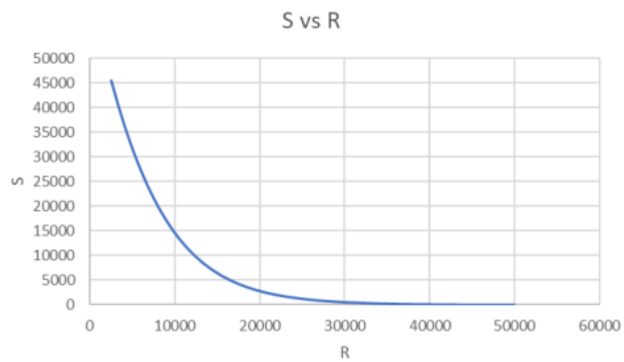
Explica por el proceso en el que los infectados crecen y decrecen conforme a el tiempo

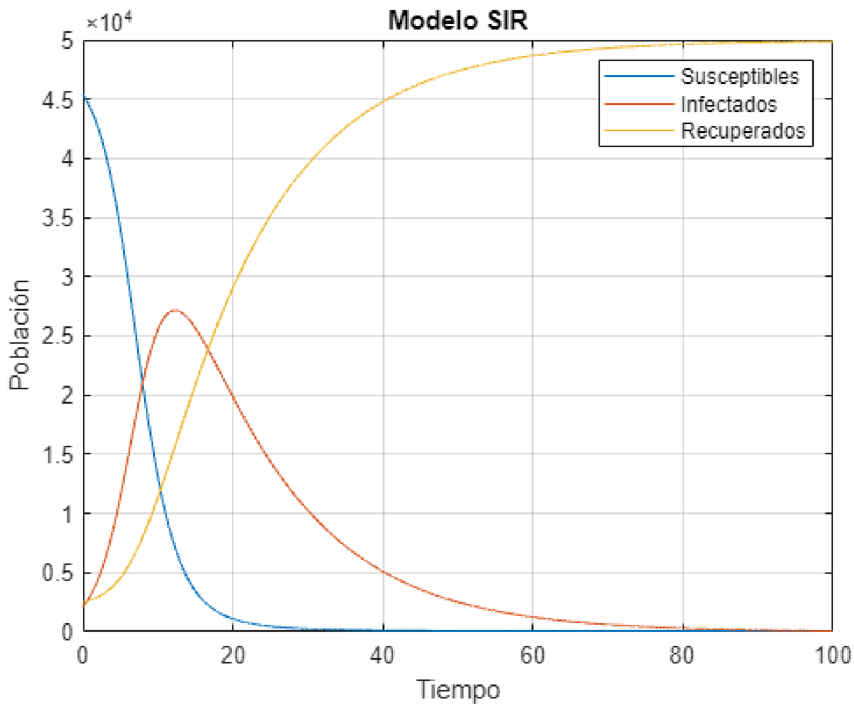



Modelo SIR: Infectados
×10^4
Infectados
Población
Tiempo


Modelo SIR: Recuperados
×10^4
Recuperados
Población
Tiempo


I vs S
I
S





a) Gráfica Susceptibles vs. Tiempo

Las inferencias comparado con el método de Euler son casi idénticas, debido a que observamos que después de que cada persona se infecta, termina de ser susceptible a esto, por lo que es de gran ayuda este dato ya que en algún momento ya no quedarán más susceptibles, por lo que la gráfica de susceptibilidad en alguna momento <y= será cero.

Gráfica de Infectados vs. Tiempo.

La primer cosa que llegó a nuestra mente fue que el crecimiento durante un tiempo llega a ser exponencial, por lo que en cierta parte, el comportamiento si es de esta manera, en la segunda gráfica podemos encontrar un máximo, debido a que no existe pendiente, si existe una diferencia entre nuestra inferencia y lo que vemos en la segunda tabla, pero no es tan grande.

Gráfica de Recuperados vs. Tiempo.

En este caso ponemos en nuestra inferencia como una función exponencial, donde los recuperados seguirán creciendo, pero lo que sucede con esto es que en algún punto el número de recuperados será el mismo debido a que ya no quedarán más infectados, de una cierta manera nuestras gráficas se parecen, ya que ambas presentan una curva en la gráfica, sin embargo, se nota el crecimiento más lento en la segunda gráfica.

Gráfica de Infectados vs. Susceptibles.

En esta gráfica encontramos de igual manera un parecido, pero en esta un poco más significante que en las demás y lo podemos saber debido a esta singular forma en la que interactúa la gráfica y pues si tiene mucho sentido, entre menos susceptibles mas infectados, y entre más infectados menos susceptibles, en ambas gráficas podemos ver lo mismo.

Gráfica de Susceptibles vs. Recuperados.

En esta de igual manera podemos observar el parecido entre ambas gráficas, donde encontramos un decrecimiento exponencial, donde la relación se encuentra entre menos susceptibles más recuperados y entre menos recuperados más susceptibles.

b) Podemos concluir que son muy similares. Esto se debe a que delta t de la función de infectados fue un valor pequeño, lo que nos permite tener una aproximación muy similar a la derivada de la función igualada a 0, que es el método para obtener el punto máximo de la gráfica. Dicho punto es el número máximo de personas que podrán ser infectadas al mismo tiempo.

Tal como podemos apreciar en la siguiente imágen:

Datos de Excel (Aproximación de Euler):

Máximo Infectados:	28578.627

Punto Máximo de la Función (Aproximación de Euler):

Encontrar los puntos máximos de la función.

$$\frac{dI}{dt} = 0.00001 \cdot S \cdot I - 1/14 \cdot I = 0$$

Obtenemos el valor de S para sustituir en la función del número de infectados, la cual surge a partir de la integral de la derivada anterior:

$$0.00001S = \frac{1}{14}$$

$$S = \frac{1}{0.00014}$$

$$I = -S + 7142.86\ln(S) - 29094.80$$

Función de infectados

$$I\left(\frac{1}{0.00014}\right) = -\left(\frac{1}{0.00014}\right) + 7142.86ln\left(\frac{1}{0.00014}\right) - 29094.80$$

$$I\left(\frac{1}{0.00014}\right) = 27147.14060$$

Por lo tanto, tenemos una aproximación de Euler equivalente a 28,578.627 contra el máximo de casos infectados de 27,147.14. Cabe señalar que, si necesitáramos una aproximación más exacta, habría que determinar delta t con un valor más próximo a 0. Podemos concluir con que es una buena aproximación obtenida de la gráfica.

c) Al inicio se vio que teníamos una relación de dS con dt y otra de dI con dt.

$$\frac{\frac{dI}{dt}}{\frac{dS}{dt}} = \frac{dI}{dS} = \frac{1*10^{-5}SI - \frac{1}{14}I}{-1*10^{-5}SI} = \frac{1*10^{-5}SI}{-1*10^{-5}SI} + \frac{\frac{1}{14}I}{1*10^{-5}SI} = -1 + \frac{1742.86}{S}$$

Con esto logramos dar con que hay una relación entre dI con dS pero sin la variable I en la fórmula para lograr obtener datos con más facilidad.

d) La ecuación con la integral de los <infectados= con respecto a los <posibles=:

$$I = \int \quad (-1 + \frac{7142.86}{s})ds$$

$$I = -S + 7142.86\, ln\,(s) + C$$

Los valores iniciales I (0) =2100 y s (0) = 45400 se sustituyen en la integral encontrada anteriormente, con esto se logrará tener el valor de la constante (C) de nuestra integración.

$$2100 = -45400 + 7142.86\, ln\,(45400) + C$$

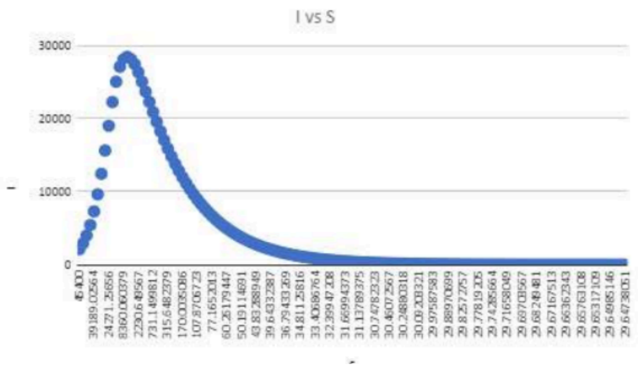
$$C = 2100 + 45400 - 7142.86\, ln\,(45400)$$

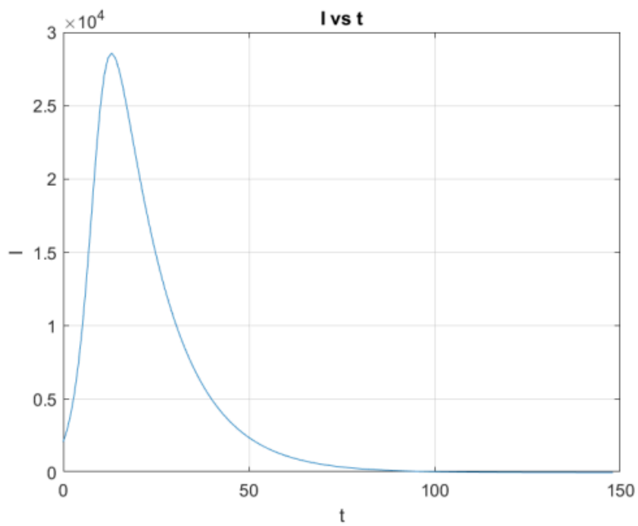
$$C = -29094.80$$

En donde donde obtenemos este resultado:

$$I = -S + 7142.86\, ln\,(s) - 29094.80$$

e) De acuerdo a los datos obtenidos anteriormente, podemos afirmar que si bien la gráfica de la aproximación de Euler y la gráfica de la función que obtuvimos a partir de la función de Casos Infectados no son exactamente iguales, existe un parecido muy grande de su comportamiento. Tal como se muestra a continuación:





Para ambos casos, se puede observar que las gráficas suben hasta el número máximo de infectados con respecto al tiempo. Así mismo, ambos parten del origen y van decreciendo con el paso del tiempo. Vale la pena reiterar que, entre menor sea el diferencial de la función, mayor similitud con la función de Casos infectados.

f) Dividiremos las funciones que teníamos al inicio para poder conseguir la fórmula respecto a la derivada de susceptibles contra la derivada de recuperados.

$$\frac{dS}{dt} = -1 * 10^{-5} SI$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{14} I$$

Al crear la ecuación de ambas funciones se van cancelando los valores por lo que nos queda sin el valor R.

$$\frac{\frac{dI}{dt}}{\frac{dR}{dt}} = \frac{dS}{dR} = \frac{-1 * 10^{-5} SI}{\frac{1}{14} I} = \frac{-1 * 10^{-5} SI}{\frac{1}{14} I} + \frac{1 * 10^{-5} SI}{\frac{1}{14} I} = -0.00014S$$

Con esta ecuación damos a ver la relación que hay entre dS y dR sin el valor R y calcular nuestras soluciones usando un valor más simple.

g) Se debe integrar de ambos lados de la función y utilizar el método de sustitución para sacar el valor de K respecto a nuestros valores iniciales.

$$\int dS/S = \int -0.00014 dR$$

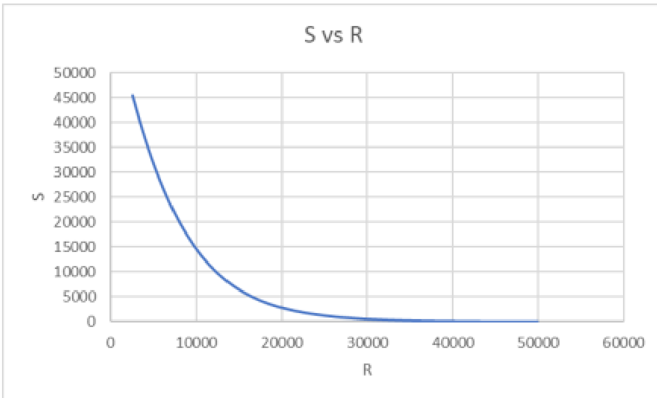
$$S = Ke^{-0.00014R}$$

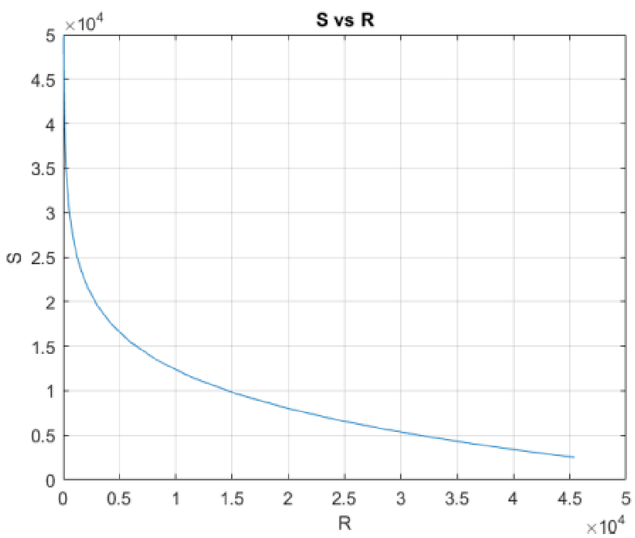
$$45400 = Ke^{-0.00014(2500)}$$

$$\frac{ln(45400)}{ln(-0.00014(2500))} = K$$

$$K = 64425.67$$

h) Las gráficas son totalmente iguales ya que tienen las mismas tendencias y cruzan por los mismos valores.





Código:

```
% Parámetros iniciales

S0 = 45400;

I0 = 2100;

R0 = 2500;


% Tiempo de simulación

tspan = [0 100]; % Puedes ajustar el tiempo final según sea necesario


% Sistema de Ecuaciones Diferenciales

f = @(t, y) [-0.00001*y(1)*y(2);

        0.00001*y(1)*y(2) - y(2)/14;

        y(2)/14];


% Condiciones iniciales

y0 = [S0; I0; R0];


% Resolver EDO usando ode45

[t, y] = ode45(f, tspan, y0);

% Graficar resultados

figure;

plot(t, y(:,1), 'r', 'LineWidth', 1); hold on;

plot(t, y(:,2), 'g', 'LineWidth', 1);

plot(t, y(:,3), 'b', 'LineWidth', 1);

xlabel('Tiempo (días)');

ylabel('Población');

legend('Susceptibles','Infectados','Recuperados');

title('Modelo SIR para la difusión de enfermedades');

grid on;
```

De acuerdo a los datos obtenidos anteriormente, podemos afirmar que si bien la gráfica de la aproximación de Euler y la gráfica de la función que obtuvimos a partir de la función de casos infectados no son exactamente iguales, hay un parecido muy grande en su comportamiento. Para ambos casos se puede ver que las gráficas suben hasta el número máximo de infectados con respecto al tiempo. Los dos parten del origen y van decreciendo con el paso del tiempo. Entre menor sea la diferencia de la función, más se parecerá con la función de casos de infectados.

Conclusión

Con este proyecto, nos pudimos percatar que gracias a la modelación matemática mediante la aproximación de Euler y aplicación de programación, pudimos desarrollar la propagación de enfermedades en el público. Gracias a este conocimiento pudimos analizar cada uno de los puntos y número de personas infectadas, al igual de que con esto, podemos darnos una idea de como seria una gráfica de la problemática y al momento hacer conciencia de cómo se comporta y tomar precauciones al momento de presenciar un caso como este.