Julie Capron,
encadrée par Omar Mohsen

Université Paris-Saclay, 2024

– Travail Encadré de Recherche –
C* algèbres, nucléarité et moyennabilité

Table des matières

Introduction

Ce mémoire a été motivé par la compréhension des notions de nucléarité et de moyennabilité, qui m'avaient été introduites lors de mon travail encadré de recherche de L3. Ainsi, voulant mêler ces deux concepts, j'ai été amenée à étudier la théorie des C* algèbres.

Le but de ce mémoire est donc de présenter la structure et les propriétés des C* algèbres permettant de relier nos trois notions clefs.

Dès lors, nous nous intéresserons tout d'abord aux C* algèbres. Nous porterons une attention particulière à la construction d'un produit tensoriel sur ces dernières. Nous introduirons ensuite la nucléarité sur les C* algèbres et nous attarderons sur un joli résultat concernant la structure du produit tensoriel de C* algèbres. Enfin, après avoir défini la moyennabilité sur certains groupes, nous pourrons lier nos notions à travers un dernier énoncé.

Je tiens à remercier grandement M. Omar Mohsen pour ses innombrables conseils, sa bienveillance et sa patience lors de ce projet.

Principales notations utilisées

- $\mathcal{M}_N(X)$: ensemble des matrices carrées de taille N à coefficient dans X.
- $B(X)$: ensemble des applications linéaires bornées de X dans X.
- $C(X)$: ensemble des fonctions continues de X dans $\mathbb{C}$.
- Sauf mention contraire explicite, on privilégiera dans ce mémoire les lettres :
  - A, B, C, D pour les C* algèbres
  - H, V pour des espaces vectoriels
  - H_i pour des espaces de Hilbert

1 C* algèbres : définitions, premières propriétés

1.1 Définitions

Commençons par définir quelques notions importantes pour notre sujet :

Définition 1 (Involution) Une involution d'une algèbre A sur le corps $\mathbb{C}$ est une application $x \mapsto x^*$ de A dans A vérifiant pour tout x, y dans A et λ dans $\mathbb{C}$:

- $(x^*)^* = x$ (involutive)
- $(\lambda x + y)^* = \overline{\lambda} x^* + y^*$ (antilinéaire)
- $(xy)^* = y^* x^*$ (antimultiplicative)

A algèbre sur $\mathbb{C}$ munie d'une involution est dite involutive. On pourra également la qualifier de *-algèbre. x^* est l'adjoint de x.

Définition 2 Un élément x de A est :

- auto-adjoint/ hermitien si $x^* = x$.
- normal si $xx^* = x^*x$
- unitaire si $xx^* = x^*x = 1$; x est alors inversible et $x^{-1} = x^*$.

Définition 3 (Algèbre normée involutive) Une algèbre normée involutive est une algèbre normée A munie d'une involution telle que $\|x^*\| = \|x\|$ pour x dans A. Si de plus A est complète, on dira que A est une algèbre de Banach involutive.

Définition 4 (C* algèbre) Une C* algèbre est une algèbre de Banach involutive A telle que

$$\|x\|^2 = \|x^*x\|. \tag{1.1}$$

Exemple 1 On rappelle qu'un espace préhilbertien est un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire, et qu'un espace de Hilbert est une espace préhilbertien complet (pour la norme associée au produit scalaire).
Si H est un espace de Hilbert, alors $L(H)$ muni de $uv = u \circ v$, de $u \mapsto u^*$ et d'une norme d'opérateur est une C* algèbre.

1.2 Produit tensoriel sur les C* algèbres : Construction

Le produit tensoriel est un outil très intéressant puisqu'il permet de transformer des applications blinéaires en applications linéaires. En particulier, si $f : H \times V \to L$ est une application bilinéaire et H, V et L des espaces vectoriels, il existe une unique application linéaire $\tilde{f} : H \otimes V \to L$ telle que $\Phi(x \otimes y) = \phi(x, y)$ pour tout x dans H et y dans V.

On rappelle que tout élément de ce produit tensoriel $H \otimes V$ s'écrit comme une somme finie

$$\sum_i^n h_i \otimes v_i$$

où h_i est dans H, v_i est dans V.
L'élément $h_i \otimes v_i$ de $H \otimes V$ est l'image par l'application bilinéaire $\phi : H \times V \to H \otimes V$ de $(h_i, v_i) \in H \times V$.

Cette définition est valable sur les modules, donc en paticulier sur les espaces vectoriels et les algèbres.

Remarque 1 : Dans ce qui suit, si H et V sont des espaces vectoriels, des modules, des algèbres ou encore des C* algèbres, on notera dans un premier temps $H \odot V$ leur produit tensoriel - algébrique - pour éviter la confusion avec le produit tensoriel complété de C* algèbres qui aura lui une structure plus intéressante.

Les cas qui nous intéressent sont ceux des C* algèbres et des espaces de Hilbert. On va commencer par traiter le cas des espaces de Hilbert.

- Si H_1 et H_2 sont deux espaces de Hilbert, on considère le produit tensoriel algébrique $H_1 \odot H_2$, muni du produit scalaire :

$$\langle x \odot y, x' \odot y' \rangle \ = \ \langle x, x' \rangle \langle y, y' \rangle,$$

qui est bien défini par la propriété universelle du produit tensoriel.

Proposition 1 L'application $\langle , \rangle$ ainsi définie est un produit scalaire sur $H_1 \odot H_2$.

On rappelle une notion que nous allons utiliser dans la démonstration :

Définition 5 (Matrice symétrique positive) Une matrice symétrique M dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ est dite symétrique positive si pour tout vecteur colonne X à N coefficients complexes,

$$\langle X, MX \rangle \geq 0, \text{ i.e. } \overline{X}^T MX \geq 0 \text{ (produit scalaire dans } \mathcal{M}_N(\mathbb{C}) \text{).}$$

Démonstration. Soient x, x' et $\tilde{x}$ dans H_1, y, y' et $\tilde{y}$ dans H_2 et λ dans $\mathbb{C}$. Alors :

- Symétrie :

$$\begin{aligned} \langle x \odot y, x' \odot y' \rangle &= \langle x, x' \rangle \langle y, y' \rangle \\ &= \langle x', x \rangle \langle y', y \rangle \\ &= \langle x' \odot y', x \odot y \rangle \end{aligned}$$

par symétrie des produits scalaires sur H_1 et H_2.

- "Bilinéarité" : il s'agit de montrer la multilinéarirté de l'application

$$T : (x, y, z, t) \mapsto \langle x \odot y, z \odot t \rangle.$$

Or, par définition du produit scalaire sur $H_1 \odot H_2$ et par linéarité des produits scalaires sur H_1 et H_2 :

$$\begin{aligned} \langle (\lambda x + x') \odot y, \tilde{x} \odot \tilde{y} \rangle &= \langle \lambda x + x', \tilde{x} \rangle \langle y, \tilde{y} \rangle \\ &= (\lambda \langle x, \tilde{x} \rangle + \langle x', \tilde{x} \rangle) \langle y, \tilde{y} \rangle \\ &= \lambda \langle x, \tilde{x} \rangle \langle y, \tilde{y} \rangle + \langle x', \tilde{x} \rangle \langle y, \tilde{y} \rangle \\ &= \lambda \langle x \odot y, \tilde{x} \odot \tilde{y} \rangle + \langle x' \odot y, \tilde{x} \odot \tilde{y} \rangle \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} \langle x \odot (\lambda y + y'), \tilde{x} \odot \tilde{y} \rangle &= \langle x, \tilde{x} \rangle \langle \lambda y + y', \tilde{y} \rangle \\ &= \langle x, \tilde{x} \rangle (\lambda \langle y, \tilde{y} \rangle + \langle y', \tilde{y} \rangle) \\ &= \lambda \langle x, \tilde{x} \rangle \langle y, \tilde{y} \rangle + \langle x, \tilde{x} \rangle \langle y', \tilde{y} \rangle \\ &= \lambda \langle x \odot y, \tilde{x} \odot \tilde{y} \rangle + \langle x \odot y', \tilde{x} \odot \tilde{y} \rangle \end{aligned}$$

et la symétrie du produit scalaire nous donne la multilinéarité attendue.

- Pour montrer que l'application $\langle , \rangle$ est définie positive, nous allons nous servir du lemme suivant :

Lemme 1 Si $(a_{i,j})_{i,j}$ et $(b_{i,j})_{i,j}$ sont des matrices de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ symétriques positives, alors

$$\sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j} \geq 0.$$

Démonstration. On pose $M = (a_{ij})_{i,j}$ et $N = (b_{ij})_{i,j}$. M est une matrice positive donc il existe S matrice dans$\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ telle que $M = S^*S$. De même, N est positive donc il existe R matrice dans$\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ telle que $N = R^*R$.
On a donc

$$a_{ij} = \sum_k \overline{S_{ki}} S_{kj}$$

et

$$b_{ij} = \sum_k \overline{R_{ki}} R_{kj},$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\sum a_{ij} b_{ij} &= \sum_{i,j} \sum_l \sum_k \overline{S_{ki}} S_{kj} \overline{R_{li}} R_{lj} \\
&= \sum_{k,l} (\sum_{i,j} \overline{S_{ki}} S_{kj} \overline{R_{li}} R_{lj}) \\
&= \sum_{k,l} \underbrace{\overline{(\sum_i S_{ki} R_{li})} (\sum_j S_{kj} R_{lj})}_{\geq 0} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

en tant que somme de termes positifs ou nuls.

□

Dès lors, si $x \in H_1 \odot H_2$, on écrit $x = \sum_i v_i \odot w_i$ avec $v_i \in H_1$ et $w_i \in H_2$, de sorte que :

$$\langle x, x \rangle_{H_1 \odot H_2} = \sum_{i,j} \langle v_i, v_j \rangle_{H_1} \langle w_i, w_j \rangle_{H_2}.$$

Les produits scalaires sur H_1 et H_2 étant des applications bilinéaires positives, on a ce qu'il faut : le lemme nous assure que $\langle x, x \rangle_{H_1 \odot H_2} \geq 0$.

De plus, si $x \in H_1 \odot H_2$ vérifie $\langle x, x \rangle_{H_1 \odot H_2} = 0$, alors montrons que $x = 0$. Pour cela, partant de $x = \sum_i^n v_i \odot w_i$, on peut d'après Gram-Schmidt considérer $e_1, ..., e_m$ base orthonormée pour le sous espace vectoriel engendré par la famille $w_1, ..., w_n$.
On peut donc écrire :

$$x = \sum_i^m u_i \odot e_i$$

où les u_i sont dans H_1.

Puis :

$$\begin{aligned}\langle x,x\rangle_{H_1\odot H_2} &= \sum_{i,j}^{m}\langle u_i\odot e_i,u_j\odot e_j\rangle \\ &= \sum_{i,j}^{m}\langle u_i,u_j\rangle\langle e_i,e_j\rangle \\ &= \sum_{j}^{m}\|u_j\|^2\end{aligned}$$

donc puisqu'on a une somme de termes positifs, $\langle x,x\rangle_{H_1\odot H_2}=0$ implique que chaque terme est nul i.e. que pour tout i, u_i est nul puis x est nul.

□

Remarque 2 : Cette écriture montrait également la positivité du produit sclaire montrée juste au-dessus grâce au lemme, mais on laissera au lecteur le plaisir de constater que le lemme introduit sera réutilisé par la suite et non introduit inutilement.

L'application $\langle,\rangle_{H_1\odot H_2}$ est donc un produit scalaire sur l'espace vectoriel $H_1\odot H_2$: ce dernier est alors un espace pré-hilbertien. On aimerait que ce soit un espace de Hilbert, i.e. qu'il soit complet.
Pour cela, on utilise la théorie des espaces de Hilbert et on considère $H_1\otimes H_2$, la complétion de $H_1\odot H_2$: on a alors un espace complet.

- On peut maintenant traiter le cas des C* algèbres. Si A_1 et A_2 sont des C* algèbres, A_1 et A_2 sont en particulier des $\mathbb{C}$-algèbres : on peut donc considérer leur produit tensoriel algébrique sur $\mathbb{C}$: $A_1\odot A_2$. Comme rappelé à l'instant, les éléments de $A_1\odot A_2$ sont des sommes finies de produits d'éléments de A_1 et A_2, et $A_1\odot A_2$ a une structure d'**algèbre** sur $\mathbb{C}$ (non normée !) où pour a_1, a_1' dans A_1 et a_2, a_2' dans A_2 :

$$(a_1\odot a_2)(a_1'\odot a_2')=(a_1a_1')\odot(a_2a_2'). \tag{1.2}$$

On va munir $A_1\odot A_2$ d'une structure de **C* algèbre**.

Involution. On peut pour commencer par munir $A_1\odot A_2$ d'une involution via :

$$(a_1\odot a_2)^*=a_1^*\odot a_2^*,$$

où la restriction de * sur A_1 et A_2 est l'involution définie sur ces algèbres involutives.

Proposition 2 L'application * ainsi définie est une involution sur $A_1\odot A_2$.

Démonstration. Vérifions les trois axiomes, en utilisant le fait que la restriction de * sur A_1 et A_2 est une involution :

- Si $a_1\in A_1$ et $a_2\in A_2$, alors

$$\begin{aligned}((a_1\odot a_2)^*)^* &= (a_1^*\odot a_2^*)^* \\ &= a_1^{**}\odot a_2^{**} \\ &= a_1\odot a_2,\end{aligned}$$

  donc * ainsi définie sur $A_1\odot A_2$ est involutive.
- Pour l'antilinéarité, montrons que si $a_1,a_1'\in A_1$, $a_2,a_2'\in A_2$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, alors :

$$((\lambda a_1+\mu a_1')\odot a_2)^*=\overline{\lambda}(a_1\odot a_2)^*+\overline{\mu}(a_1'\odot a_2)^*.$$

On utilise la linéarité par rapport à la première variable de l'application $(x,y) \mapsto x \odot y$ ainsi que l'antilinéarité de * sur A_1 :

$$\begin{aligned}((\lambda a_1 + \mu a_1') \odot a_2)^* &= (\lambda a_1 + \mu a_1')^* \odot a_2^* \\ &= (\overline{\lambda} a_1^* + \overline{\mu} a_1' *) \odot a_2^* \\ &= \overline{\lambda} a_1^* \odot a_2^* + \overline{\mu} a_1'^* \odot a_2^* \\ &= \overline{\lambda}(a_1 \odot a_2)^* + \overline{\mu}(a_1' \odot a_2)^*\end{aligned}$$

et les mêmes étapes de calcul nous donnent

$$(a_1 \odot (\lambda a_2 + \mu a_2'))^* = \overline{\lambda}(a_1 \odot a_2)^* + \overline{\mu}(a_1' \odot a_2)^*$$

donc * est bien antilinéaire sur $A_1 \odot A_2$.

- On utilise maintenant (1.2) pour prouver l'antimultiplicité :

$$\begin{aligned}((a_1 \odot a_2)(a_1' \odot a_2'))^* &= ((a_1 a_1') \odot (a_2 a_2'))^* \\ &= (a_1 a_1')^* \odot (a_2 a_2')^* \\ &= (a_1'^* a_1^*) \odot (a_2'^* a_2^*).\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(a_1' \odot a_2')^* (a_1 \odot a_2)^* &= (a_1'^* \odot a_2'^*)(a_1^* \odot a_2^*) \\ &= (a_1'^* a_1^*) \odot (a_2'^* a_2^*),\end{aligned}$$

d'où l'antimultiplicité de *.

Notre * est donc bien une involution ! □

Norme. Il s'agit maintenant de définir une norme sur $A_1 \odot A_2$ qui doit vérifier (1.1) pour qu'on ait la structure de C* algèbre. Pour cela, définissons tout d'abord une nouvelle notion :

Définition 6 (C*-norme) Une <u>C*-norme</u> est une application $N : A_1 \odot A_2 \mapsto \mathbb{R}_+$ telle que :

1. N est une norme.
2. $N(x^*x) = N(x)^2$ pour $x \in A_1 \odot A_2$.
3. $N(a_1 \odot a_2) = \|a_1\|_{A_1} \|a_2\|_{A_2}$ pour $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$.

Proposition 3 On dispose des deux propriétés suivantes :

1. Il existe des C* normes.
2. Il existe une C* norme maximale $N_{\max}$ telle que pour toute N C*-norme et pour tout x dans $A_1 \odot A_2$, $N(x) \leq N_{\max}(x)$. On la notera $\|.\|_{\max}$.

Démonstration. 1. Afin de montrer que les C*-normes existent, nous allons en construire une. D'après la théorie des C*-algèbres, on peut plonger A_1 et A_2 dans des espaces $B(H_1)$ et $B(H_2)$ (où H_1 et H_2 sont des espaces de Hilbert) via :

$$\begin{aligned}\phi_1 \,:\, A_1 &\hookrightarrow B(H_1) \\ a_1 &\mapsto (\phi_1(a_1) : H_1 \mapsto H_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_2 \,:\, A_2 &\hookrightarrow B(H_2) \\ a_2 &\mapsto (\phi_2(a_2) : H_2 \mapsto H_2)\end{aligned}$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont deux *-morphismes.

Étape 1 : Partant de $H_1 \odot H_2$, on considère la complétion $H_1 \otimes H_2$ dont la construction avait été donnée page 4, pour le cas des espaces de Hilbert.

Étape 2 : On veut construire l'application :

$$\begin{array}{rcl} \phi_1 \otimes \phi_2 \,:\, A_1 \odot A_2 & \to & B(H_1 \otimes H_2) \\ a_1 \odot a_2 & \mapsto & \phi_1(a_1) \otimes \phi_2(a_2) \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rcl} \phi_1(a_1) \otimes \phi_2(a_2) \,:\, H_1 \otimes H_2 & \to & H_1 \otimes H_2 \\ h_1 \otimes h_2 & \mapsto & \phi_1(a_1)(h_1) \otimes \phi_2(a_2)(h_2) \end{array}.$$

Remarque 3 : Le lecteur pourra noter que l'application $\phi_1 \odot \phi_2$ est à valeurs dans $B(H_1) \odot B(H_2)$, mais $B(H_1) \odot B(H_2) \subset B(H_1 \odot H_2)$ donc l'espace d'arrivée de $\phi_1 \otimes \phi_2$ est cohérent.

Pour la construction de $\phi_1 \otimes \phi_2$, on a plusieurs points à vérifier. Le premier est de vérifier que l'application

$$\begin{array}{rcl} \phi_1(a_1) \odot \phi_2(a_2) \,:\, H_1 \odot H_2 & \to & H_1 \odot H_2 \\ h_1 \odot h_2 & \mapsto & \phi_1(a_1)(h_1) \odot \phi_2(a_2)(h_2) \end{array}$$

est bien définie et bornée pour qu'elle puisse passer "à la complétion".

- Elle est ben définie par linéarité des applications ϕ_1 et ϕ_2 et par la propriété universelle du produit tensoriel.
  Cette même propriété nous assure d'ailleurs que l'application $\phi_1 \odot \phi_2$ est l'unique application linéaire vérifiant
  $$(\phi_1 \odot \phi_2)(a_1 \odot a_2) = \phi_1(a_1) \odot \phi_2(a_2).$$
- On doit vérifier qu'elle est bornée par rapport à la norme, i.e. que
  $$\|\phi_1(a_1) \odot \phi_2(a_2)\|_{B(H_1 \otimes H_2)} \leq \|a_1\|\|a_2\|.$$
  Soit x dans $H_1 \odot H_2$. On va montrer que
  $$\langle \phi_1(a_1) \odot \phi_2(a_2)(x), \phi_1(a_1) \odot \phi_2(a_2)(x) \rangle_{H_1 \odot H_2} \;\leq\; \|a_1\|^2 \|a_2\|^2 \langle x, x \rangle_{H_1 \odot H_2}. \tag{1.3}$$
  Si on montre cette inégalité, alors en prenant la racine des deux quantités (positives), on aura le résultat attendu.
  D'une part, montrons que
  $$\langle \phi_1(a_1) \odot \phi_2(a_2)(x), \phi_1(a_1) \odot \phi_2(a_2)(x) \rangle_{H_1 \odot H_2} \;=\; \langle \phi_1(a_1^* a_1) \odot \phi_2(a_2^* a_2)(x), x \rangle. \tag{1.4}$$
  Cela vient du fait que $\phi_1 \odot \phi_2$ est un morphisme d'algèbre involutif : commençons par justifier cela.

  Démonstration. En effet,

  $$\begin{aligned} \phi_1 \odot \phi_2((a_1 \odot a_2)^*)(h_1 \odot h_2) &= \phi_1 \odot \phi_2(a_1^* \odot a_2^*)(h_1 \odot h_2) \\ &= \phi_1(a_1^*)(h_1) \odot \phi_2(a_2^*)(h_2) \\ &= \phi_1(a_1)^*(h_1) \odot \phi_2(a_2)^*(h_2) \text{ [Les morphismes } \phi_1 \text{ et } \phi_2 \text{ sont involutifs]} \\ &= \phi_1^* \odot \phi_2^*(a_1 \odot a_2)(h_1 \odot h_2)\text{[par 1.2]}. \end{aligned}$$

  □

Donc

$$\begin{aligned}\langle \phi_1(a_1)\odot\phi_2(a_2)(x), \phi_1(a_1)\odot\phi_2(a_2)(x)\rangle_{H_1\odot H_2} &= \langle(\phi_1(a_1)\odot\phi_2(a_2)(x))(\phi_1\odot\phi_2(a_1\odot a_2)^*(x)), x\rangle\\ &= \langle(\phi_1(a_1)\odot\phi_2(a_2)(x))(\phi_1\odot\phi_2(a_1^*\odot a_2^*)(x)), x\rangle\\ &= \langle(\phi_1(a_1)\odot\phi_2(a_2)(x))(\phi_1(a_1^*)\odot\phi_2(a_2^*))(x), x\rangle\\ &= \langle(\phi_1(a_1)\phi_1(a_1^*))\odot(\phi_2(a_2)\phi_2(a_2^*)(x)), x\rangle\\ &= \langle\phi_1(a_1^*a_1)\odot\phi_2(a_2^*a_2)(x), x\rangle\end{aligned}$$

Repartons alors de (1.4).

$$\begin{aligned}\langle \phi_1(a_1)\odot\phi_2(a_2)(x), \phi_1(a_1)\odot\phi_2(a_2)(x)\rangle_{H_1\odot H_2} &= \langle\phi_1(a_1^*a_1)\odot\phi_2(a_2^*a_2)(x), x\rangle\\ &= \sum_{i,j}\langle\phi_1(a_1^*a_1)v_i, v_j\rangle\langle\phi_2(a_2^*a_2)w_i, w_j\rangle\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\|a_1\|^2\|a_2\|^2\langle x, x\rangle_{H_1\odot H_2} = \sum \|a_1\|^2\langle v_i, v_j\rangle\|a_2\|^2\langle w_i, w_j\rangle.$$

Il s'agit donc de montrer que

$$\sum_{i,j}\underbrace{\langle\phi_1(a_1^*a_1)v_i, v_j\rangle}_{m_{ij}}\underbrace{\langle\phi_2(a_2^*a_2)w_i, w_j\rangle}_{n_ij} \leq \sum\underbrace{\|a_1\|^2\langle v_i, v_j\rangle}_{m'_{ij}}\underbrace{\|a_2\|^2\langle w_i, w_j\rangle}_{n'_{ij}}$$

. On va alors appliquer un nouveau lemme, très proche du premier :

Lemme 2 Soient $M = (m_{ij})$, $M' = (m'_{ij})$, $N = (n_{ij})$ et $N' = (n'_{ij})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrices toutes symétriques positives telles que

$$M \leq M' \text{ et } N \leq N'.$$

Alors,

$$\sum m_{ij}n_{ij} \leq \sum m'_{ij}n'_{ij}.$$

Démonstration. Pour montrer ce résultat, on va introduire une somme intermédiaire et montrer deux inégalités, i.e. :

$$\sum m_{ij}n_{ij}\underbrace{\leq}_{1}\sum m'_{ij}n_{ij}\underbrace{\leq}_{2}\sum m'_{ij}n'_{ij}.$$

On commence par montrer 1 :

$$\sum m'_{ij}n_{ij} - \sum m_{ij}n_{ij} = \sum(m'_{ij} - m_{ij})n_{ij}.$$

Or, par hypothèses, $M' - M$ ainsi que N sont des matrices positives, donc d'après le **lemme 1** montré précédemment, la somme ci-dessus est positive, ce qui montre 1.
De même, pour 2 :

$$\sum m'_{ij}n'_{ij} - \sum m'_{ij}n_{ij} = \sum(n'_{ij} - n_{ij})m'_{ij}$$

et on conclue de la même façon que pour 1 en utilisant que $N' - N$ et M sont des matrices positives.

□

Si on arrive à appliquer ce lemme aux matrices définies ci-dessus grâce aux accolades, alors on aura montré (1.3). Il faut donc que nos matrices vérifient les conditions du théorème.

- D'une part,
  - $(m'_{ij})_{i,j} = (\|a_1\|^2\langle v_i, v_j\rangle)_{i,j}$ est une matrice symétrique positive par positivité et symétrie du produit scalaire, qu'on a multiplié par un coefficient positif (la norme).
  - $(n'_{ij})_{i,j} = (\|a_2\|^2\langle w_i, w_j\rangle)_{i,j}$ est également une matrice symétrique positive pour les mêmes raisons que $(m'_{ij})_{i,j}$.
  - $(m_{ij})_{i,j} = (\langle \phi_1(a_1^*a_1)v_i, v_j\rangle)_{i,j}$ est une matrice symétrique positive, car si λ est dans $\mathbb{C}$, alors :
  $$\sum \overline{\lambda_i}\langle \phi_1(a_1^*a_1)v_i, v_j\rangle\lambda_j = \sum\langle \lambda_i\phi_1(a_1^*a_1)v_i, v_j\lambda_j\rangle$$
  Puis en posant $v = \sum \lambda_i v_i$, alors cette quantité vaut :
  $$\sum \overline{\lambda_i}\langle \phi_1(a_1^*a_1)v_i, v_j\rangle\lambda_j = \langle \phi_1(a_1^*a_1)v, v\rangle$$
  et cette quantité est positive puisque ϕ_1 est positive. Ceci étant vrai pour tout λ dans $\mathbb{C}$, alors notre matrice est bien une matrice symétrique positive.
  - $(n_{ij})_{i,j} = (\langle \phi_2(a_2^*a_2)w_i, w_j\rangle)_{i,j}$ est symétrique positive pour les mêmes raisons que $(m_{ij})_{i,j}$.
- D'autre part, on veut montrer que $M_{ij} \leq M'_{ij}$ et $N_{ij} \leq N'_{ij}$, i.e. que
  $$M'_{ij} - M_{ij} \text{ est positive et } N'_{ij} - N_{ij} \text{ est positive.}$$
  - $M_{ij} \leq M'_{ij}$ car le coefficient ij de cette matrice est :
  $$\|a_1\|^2\langle v_i, v_j\rangle - \langle \phi_1(a_1^*a_1)v_i, v_j\rangle = \langle (\|a_1\|^2 Id - \phi_1(a_1^*a_1))v_i, v_j\rangle$$
  et $\|a_1\|^2 Id - \phi_1(a_1^*a_1)$ est un opérateur (symétrique) positif car ϕ_1 est un opérateur autoadjoint donc
  $$\phi_1(a_1^*a_1) = \phi_1(a_1)\phi_1(a_1)^*$$
  puis
  $$\|\phi_1(a_1)\phi_1(a_1)^*\| = \|\phi_1(a_1)\|^2 \leq \|a_1\|^2.$$
  (L'inégalité est donnée par la théorie des C* algèbres, mais enfait on a même égalité par injectivité de ϕ_1)
  - De même, $N_{ij} \leq N'_{ij}$ car le coefficient ij de cette matrice est :
  $$\|a_2\|^2\langle w_i, w_j\rangle - \langle \phi_2(a_2^*a_2)w_i, w_j\rangle = \langle (\|a_2\|^2 Id - \phi_2(a_2^*a_2))w_i, w_j\rangle$$
  et $\|a_2\|^2 Id - \phi_2(a_2^*a_2)$ est un opérateur (symétrique) positif pour les mêmes raisons qu'au tiret précédent.
- On peut donc appliquer le lemme 2 : on trouve que
  $$\sum_{i,j}\langle \phi_1(a_1^*a_1)v_i, v_j\rangle\langle \phi_2(a_2^*a_2)w_i, w_j\rangle \;\leq\; \sum \|a_1\|^2\langle v_i, v_j\rangle\|a_2\|^2\langle w_i, w_j\rangle,$$
  ce qui prouve (1.3) puis on a le résultat final en prenant la racine carrée à droite et à gauche : on a bien montré que
  $$\|\phi_1(a_1)\odot\phi_2(a_2)\|_{B(H_1\otimes H_2)} \leq \|a_1\|\|a_2\|.$$

- Dès lors, notre application est bornée, donc bien définie pour la complétion !
  On peut donc considérer $\phi_1\otimes\phi_2$.

Étape 3 : On peut maintenant définir une C*-norme avec ce qu'on vient de construire. Posons, pour $x \in A_1\odot A_2$:
$$N(x) = \|\phi_1\otimes\phi_2(x)\|_{B(H_1\otimes H_2)}.$$

C'est une norme car :

- Séparation : Si $x = 0$, alors on a bien sûr $N(0) = \|0\|_{B(H_1 \otimes H_2)} = 0$.
  Par ailleurs, si $N(x) = \|\phi_1 \otimes \phi_2(x)\|_{B(H_1 \otimes H_2)} = 0$, alors par séparation de la norme $\|.\|_{B(H_1 \otimes H_2)}$ on a $\phi_1 \otimes \phi_2(x) = 0$, et puisque ϕ_1 et ϕ_2 sont injectives, par construction et propriétés du produit tensoriel, $\phi_1 \otimes \phi_2$ est injective donc $x = 0$.
- Inégalité triangulaire : Soient x et y dans $A_1 \odot A_2$. On utilise la linéarité de l'application $\phi_1 \otimes \phi_2$:

$$\begin{aligned}
N(x+y) &= \|\phi_1 \otimes \phi_2(x+y)\|_{B(H_1 \otimes H_2)} \\
&= \|(\phi_1 \otimes \phi_2(x)) + \phi_1 \otimes \phi_2(y)\|_{B(H_1 \otimes H_2)} \\
&\leq \|\phi_1 \otimes \phi_2(x)\|_{B(H_1 \otimes H_2)} + \|\phi_1 \otimes \phi_2(y)\|_{B(H_1 \otimes H_2)} \\
&= N(x) + N(y)
\end{aligned}$$

  où la dernière inégalité vient de la sous-additivité de $\|.\|_{B(H_1 \otimes H_2)}$ qui est une norme (c'est même une C*-norme).
- Homogénéité : Soient λ dans $\mathbb{C}$ et x dans $A_1 \odot A_2$. Alors :

$$\begin{aligned}
N(\lambda x) &= \|\phi_1 \otimes \phi_2(\lambda x)\|_{B(H_1 \otimes H_2)} \\
&= \|\lambda(\phi_1 \otimes \phi_2(x))\|_{B(H_1 \otimes H_2)} \\
&= |\lambda| \|\phi_1 \otimes \phi_2(x)\|_{B(H_1 \otimes H_2)} \\
&= |\lambda| N(x)
\end{aligned}$$

  où la troisième égalité est donnée par l'homogénéité de la norme $\|.\|_{B(H_1 \otimes H_2)}$.
- C*-norme : Soient x et y dans $A_1 \odot A_2$. On veut vérifier que

$$N(x^* x) = N(x)^2$$

  et

$$N(x \odot y) = \|x\|_{H_1 \odot H_2} \|y\|_{H_1 \odot H_2}.$$

  Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
N(x^* x) &= \|\phi_1 \otimes \phi_2(x^* x)\|_{B(H_1 \otimes H_2)} \\
&= \|\phi_1 \otimes \phi_2(x)^* \phi_1 \odot \phi_2(x)\|_{B(H_1 \otimes H_2)} \text{ [*-morph]} \\
&= \|\phi_1 \otimes \phi_2(x)\|^2_{B(H_1 \otimes H_2)} \text{ [C* norme]}
\end{aligned}$$

  Où :

  [*-morph] est justifié car $\phi_1 \otimes \phi_2$ est un *-morphisme préservant l'involution
  [C* norme] vient du fait que $\|.\|_{B(H_1 \otimes H_2)}$ est une C*-norme.

  Ensuite, en utilsant à nouveau le fait que $\|.\|_{B(H_1 \otimes H_2)}$ est une C*-norme :

$$\begin{aligned}
N(x \odot y) &= \|\phi_1 \otimes \phi_2(x \odot y)\|_{B(H_1 \otimes H_2)} \\
&= \|x \odot y\|_{B(H_1 \otimes H_2)} \\
&= \|x\|_{B(H_1 \otimes H_2)} \|y\|_{B(H_1 \otimes H_2)} \\
&= N(x) N(y).
\end{aligned}$$

  où la deuxième égalité vient du fait que $\phi_1 \otimes \phi_2$ préserve la norme.

Ainsi, N définit bien une C*-norme : on a ce qu'il faut.

□

2. Posons, pour tout x dans $A_1 \odot A_2$, $N_{\max}(x) = \sup(I) = \sup\{N(x) : N \text{ est une C*-norme}\}$. Cet élément existe puisque l'ensemble considéré est non vide d'après ce qui précède. Montrons qu'elle vérifie l'énoncé 2 de la proposition. Puisqu'elle vérifie par construction l'inégalite souhaitée, il s'agit de montrer que $N_{\max}$ est toujours finie et que c'est une C*-norme.
   Pour commencer, si on écrit x dans $A_1 \odot A_2$ comme $\sum_i a_i \odot b_i$ avec $a_i \in A_1$, $b_i \in A_2$, alors, pour toute C*-norme N :
   $$N(x) \leq \sum_i N(a_i \odot b_i) = \sum_i \|a_i\|\|b_i\|,$$
   quantité indépendante de N, finie, puis en passant à la borne sup à gauche :
   $$N_{\max}(x) \leq \sum_i \|a_i\|\|b_i\|,$$
   donc c'est bien une quantité finie.
   Montrons maintenant que c'est une C*-norme, donc en particulier une norme. Soient x et y dans $A_1 \odot A_2$. Alors, pour toute C*-norme N, en utilisant le fait que N est une norme, puis par définition de $N_{\max}$:
   - $N_{\max}$ est à valeurs réelles positives puis que toute C*-norme est en particulier une norme donc à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
   - Séparation : Si $N_{\max}(x) = 0$, alors puisque I est non vide, en prenant N C*-norme dans I,
     $$N(x) \leq N_{\max}(x) = 0$$
     donc $N(x) = 0$ mais puisque N est une norme, alors $x = 0$.
   - Absolue homogénéité : Si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors d'une part
     $$N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \leq |\lambda| N_{\max}(x)$$
     puis en passant à la borne sup à gauche puisque cette égalité est vraie pour toute C*-norme :
     $$N_{\max}(\lambda x) \leq |\lambda| N_{\max}(x).$$
     D'autre part, on écrit
     $$|\lambda| N(x) = N(\lambda x) \leq N_{\max}(\lambda x)$$
     puis en passant au sup à gauche :
     $$|\lambda| N_{\max}(x) \leq N_{\max}(\lambda x).$$
     D'où l'absolue homogénéité de $N_{\max}$.
   - Inégalité triangulaire :
     $$N(x+y) \leq N(x) + N(y) \leq N_{\max}(x) + N_{\max}(y),$$
     puis en passant au sup à gauche :
     $$N_{\max}(x+y) \leq N_{\max}(x) + N_{\max}(y).$$
   - De même que pour l'homogénéité, d'une part :
     $$N(x^*x) = N(x)^2 \leq N_{\max}(x)^2$$
     puis en passant au sup à gauche,
     $$N_{\max}(x^*x) \leq N_{\max}(x)^2.$$

D'autre part :

$$N(x)^2 = N(x^*x) \leq N_{\max}(x^*x)$$

puis en passant au sup à gauche :

$$N_{\max}(x)^2 \leq N_{\max}(x^*x)$$

- Enfin,

$$N(x \odot y) = \|x\|\|y\|$$

par le troisième axiome des C*-normes, donc en particulier on peut passer au sup à gauche (la quantité de droite est indépendante de N).

D'où $N_{\max}$ est une C*-norme.

□

Ainsi, $N_{\max}$ est une C*-norme vérifiant l'inégalité de l'énoncé : on a l'existence d'une norme maximale. On la notera dans la suite $\|.\|_{\max}$.

Définition 7 Si A_1 et A_2 sont deux C*-algèbres, on peut maintenant définir le produit tensoriel $A_1 \otimes_{\max} A_2$ comme la complétion de $A_1 \odot A_2$ par $\|.\|_{\max}$.

Théorème 1 $A_1 \otimes_{\max} A_2$ est une C* algèbre.

Démonstration. Cela découle des résultats précédents et de la définition des C*-normes.

Remarque 4 : En général, il y a plusieurs C*-normes possibles sur un espace donné, mais on s'intéressera aux C* algèbres qui ont une unique C*-norme qui convienne (cf nucléarité) : ça sera donc la norme $\|.\|_{\max}$ puisqu'elle existe toujours.

Remarque 5 : Dans ce qui suit, on identifiera $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \otimes_{\max} A)$ à $\mathcal{M}_n(A)$. Cela permet de justifier, d'après ce qui a été fait avant, que $\mathcal{M}_n(A)$ est une C* algèbre.
On a effectivement un *-isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \odot A$ et $\mathcal{M}_n(A)$ via l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \odot A & \xrightarrow{*\simeq} & \mathcal{M}_n(A) \\ & \sum_{i,j=1}^n e_{ij} \odot a_{ij} & \mapsto & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

où pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$, e_{ij} est la matrice comportant un 1 à l'intersection la i-ème ligne et j-ème colonne et des zéros partout ailleurs.

Il est alors intéressant de voir que l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \odot A$ est complète, et qu'elle est donc égale à l'algèbre complétée $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \otimes_{\max} A$.

Proposition 4 L'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \odot A$ est complète par rapport à la norme $\|.\|_{\max}$.

Démonstration. Pour montrer que la norme définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \odot A$, $\|.\|_{\max}$, est déja complète, nous allons montrer qu'elle est équivalente à une norme complète : la norme définie sur $\mathcal{M}_n(A)$ par

$$N(M) = \max_{i,j} \{\|m_{ij}\|_A\}$$

Soit $M = (m_{ij})_{ij}$ dans $\mathcal{M}_n(A)$. On écrit $M = \sum_{i,j=1}^n e_{ij} \odot m_{ij}$ grâce à l'identification faite dans la remarque

6. On va montrer que :

$$\max_{i,j} \{\|m_{ij}\|_A\} \underbrace{\leq}_{1} \|M\|_{\max} \underbrace{\leq}_{2} n^2 \max_{i,j} \{\|m_{ij}\|_A\}$$

- Commençons par montrer 2 :

$$\begin{aligned} \|M\|_{\max} &\leq \sum_{i,j} \|e_{ij} \odot m_{ij}\|_{\max} \\ &= \sum_{i,j} \underbrace{\|e_{ij}\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}}_{=1} \|m_{ij}\|_A \\ &\leq n^2 \max_{i,j} \{\|m_{ij}\|_A\} \end{aligned}$$

- Pour 1, considérons la norme définie sur $\mathcal{M}_n(A)$ par :

$$\|M\|_2 = \sqrt{\sum_{ij} \|m_{ij}\|_A^2}.$$

On peut déjà remarquer que pour tout couple (i, j),

$$\|m_{ij}\|_A \leq \|M\|_2.$$

Puis, si on voit la matrice M comme une application $M : A^n \to A^n$, alors on peut considérer $\|M\|_{op} = \sup \{\|Mv\|_2, \|v\| = 1\}$. Alors, pour tout i, j, on a :

$$\|m_{ij}\|_A \leq \|Me_{ij}\|_2 \leq \|M\|_{op}.$$

Ceci étant vrai pour tout couple (i,j), on peut passer au max à gauche et on trouve alors

$$\max_{i,j} \{\|m_{ij}\|_A\} \leq \|M\|_{op} \leq \|M\|_{\max},$$

par définition de la norme max, puisque $\|.\|_{op}$ est une C*-norme. D'où 1.

Ainsi, $\|.\|_{\max}$ et N sont deux normes équivalentes. Or, N est une norme complète. Donc $\|.\|_{\max}$ est complète : $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \odot A$ est bien complète par rapport à $\|.\|_{\max}$.

□

Dès lors, cela implique $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \odot A = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \otimes_{\max} A$.

Remarque 6 : On note que la théorie des C* algèbres nous dit que si la norme $\|.\|_{\max}$ est complète, alors toutes les C*-normes sont les mêmes, égales à cette dernière. En effet, si on considère N une norme complète sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \odot A$, alors on aurait d'une part le plongement :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \odot A \hookrightarrow B$$

où B est $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \odot A$ complété via la norme N, et d'autre part, on a vu que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \odot A = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \otimes_{\max} A$ donc la norme d'un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \otimes_{\max} A$ est égale à sa norme dans B car on a l'inclusion d'une C* algèbre dans une autre, d'où $N = \|.\|_{\max}$.

1.3 Premières propriétés sur $A_1 \otimes_{\max} A_2$

Maintenant qu'on a construit la C* algèbre $A_1 \otimes_{\max} A_2$, on peut énoncer quelques propriétés intéressantes, qu'on ne démontrera pas.
Commençons par rappeler deux définitions.

Définition 8 (Application positive) Une application linéaire $\phi : A \to B$ entre deux C* alèbres A et B est dite <u>positive</u> si elle envoie tout élément positif sur un élément positif :

$$a \geq 0 \Rightarrow \phi(a) \geq 0.$$

Définition 9 (Application complètement positive) Soient A et B deux *-algèbres. Une application linéaire $\phi : A \to B$ est dite <u>complètement positive</u> si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a_i \in A, b_i \in B$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_i^* \phi(a_i^* a_j) b_j \geq 0$$

dans B.
De façon équivalente, c'est une application $\phi : A \to B$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application induite (en utilisant les identifications faites en remarque juste au dessus) :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{M}_n(\phi) : & \mathcal{M}_n(A) & \to & \mathcal{M}_n(B) \\ & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \phi(a_{11}) & \cdots & \phi(a_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(a_{n1}) & \cdots & \phi(a_{nn}) \end{pmatrix} \end{array}$$

est positive pour tout n.
On note $CP(A, B)$ l'ensemble des applications complètement positives de A dans B.

Cette notion intervient dans une première propriété sur notre produit tensoriel :

Proposition 5 Soient $\phi : A \mapsto C$ et $\psi : B \mapsto D$ des applications complètement positives entre C* algèbres. Alors, l'application

$$\phi \otimes_{\max} \psi : A \otimes_{\max} B \mapsto C \otimes_{\max} D$$

est bien définie et est une application complètement positive.

On peut également noter que le produit tensoriel max préserve les suites exactes :

Proposition 6 Si I idéal et A, B, C des C* algèbres telles que

$$0 \mapsto I \mapsto A \mapsto B \mapsto O$$

est une suite exacte, alors

$$0 \mapsto I \otimes_{\max} C \mapsto A \otimes_{\max} C \mapsto B \otimes_{\max} C \mapsto O$$

est exacte.

2 Nucléarité et résultat principal

2.1 Nucléarité

On peut désormais définir une notion clef de ce mémoire : la nucléarité. On admettra l'équivalence entre les deux définitions qui suivent, mais le lecteur curieux pourra trouver la démonstration dans [**Brow72**].

Définition 10 (C* algèbre nucléaire) • 1. Une C* algèbre unifère A est nucléaire si pour tout $\varepsilon < 0$ et pour tout ensemble fini $\mathfrak{F} \subset A$, il existe C une C* algèbre de dimension finie et des applications contractantes complètement positives $\varphi : A \to C$ et $\psi : C \to A$ telles que pour tout a dans $\mathfrak{F}$,

$$\|\psi \circ \varphi(a) - a\| < \varepsilon.$$

• 2. De façon équivalente, une C* algèbre A est nucléaire si pour toute C* algèbre B, il existe une unique C*-norme sur $A \odot B$.

Théorème 2 Toute C* algèbre de dimension finie est nucléaire.

Démonstration. Pour montrer ce résultat, nous allons nous appuyer sur le lemme suivant :

Lemme 3 Si A est une C* algèbre non nulle de dimension finie, alors elle est *-isomorphe à

$$\mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{C})$$

pour des entiers $n_1, \ldots, n_k$.

Soit maintenant A une C* algèbre de dimension finie. Si elle est nulle, on a ce qu'il faut. Sinon, d'après le lemme, on peut écrire

$$A \simeq \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{C})$$

Soit B une C* algèbre quelconque. Alors, l'application linéaire donnée par propriété universelle du produit tensoriel :

$$\begin{array}{cccc} \pi : & A \odot B & \to & (\mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C}) \odot B) \oplus \cdots \oplus (\mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{C}) \odot B) \\ & (a_1, \ldots, a_k) \odot b & \mapsto & (a_1 \odot b, \ldots, a_k \odot b) \end{array}$$

est enfait un *-isomorphime. Dès lors, la propriété 4 nous assure que $A \odot B$ est complète par rapport à la C*-norme $\|.\|_{\max}$ puisque chaque $\mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C}) \odot B$ l'est. Puis, la remarque 6 nous donne l'unicité de cette C*-norme : A est donc bien nucléaire [def 10.2].

□

2.2 Résultat principal

Théorème 3 1. Toute C* algèbre commutative unifère A est nucléaire.

2. De plus, A est de la forme

$$A = \mathbf{C}(X)$$

où X est compact séparé [théorème de Gelfand],
et le produit tensoriel de A par une C* algèbre quelconque B est donné par

$$A \otimes_{\max} B = \{f : X \mapsto B \mid \text{f est continue}\}.$$

Démonstration. 1. Soit A une C* algèbre commutative unifère. Nous allons démontrer que A est nucléaire en montrant qu'elle vérifie le point 1 de la définition 10 : il s'agit donc de construire des bonnes fonctions φ et ψ. Admettons le théorème de Gelfand, i.e. la première partie du deuxième point du théorème, qu'on ne démontrera pas. On a donc $A = \mathbf{C}(X)$ où X est compact séparé.

Soient $\mathfrak{F} \subset A$ finie et $\varepsilon > 0$. Considérons pour tout x dans X :

$$\mathbf{U}_x = \{y \in X, \forall f \in \mathfrak{F} : \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon\}.$$

On a alors
$$X = \bigcup_{x \in X} \mathbf{U}_x.$$
De plus, puisque X est compact, on peut extraire un recouvrement fini :
$$X = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{U}_{x_i}.$$
À f fixée, chaque ensemble $\mathbf{U}_{f,x_i} = \{y \in X : \|f(y) - f(x_i)\|_B < \varepsilon\}$ est ouvert. Puisque $\mathfrak{F}$ est finie, chaque $\mathbf{U}_{x_i} = \bigcap_{f \in \mathfrak{F}} \mathbf{U}_{f,x_i}$ est donc ouvert en tant qu'intersection finie d'ouverts.

Puisque X est séparé et compact (donc en particulier normal), on peut alors considérer une partition de l'unité associée aux $\mathbf{U}_{x_i}$. Soient $\sigma_1, \dots, \sigma_n : X \mapsto [0,1]$ fonctions continues telles que :

1. $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i(x) = 1$, pour tout x.
2. $\text{Supp}(\sigma_i) \subset U_{x_i}$ pour tout i.

On définit ensuite les applications :
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & A & \hookrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & f & \mapsto & (f(x_1), \dots, f(x_n)) \end{array},$$
c'est un *-homéomorphisme unitaire donc une application unitaire complètement positive, et :
$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{C}^n & \hookrightarrow & A \\ & (d_1, \dots, d_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} d_i \sigma_i \end{array}.$$
On peut voir que ψ est positive, et puisque son domaine de définition est une C* algèbre commutatie, alors ψ est complètement positive. Puis, il nous reste pour conclure à estimer la quantité $\|f - \psi \circ \varphi(f)\|$:
$$\begin{aligned} \|f - \psi \circ \varphi(f)\| &= \|(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i}_{=1}) f - \psi(f(x_1), \dots, f(x_n))\| \\ &= \|\sum_{i=1}^{n} \sigma_i f - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\sigma_i\| \\ &= \|\sum_{i=1}^{n} (f - f(x_i)1)\sigma_i\| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$
Ceci étant vrai quelque soit f dans $\mathfrak{F}$, on a ce qu'il faut : A est nucléaire par la caractérisation 1 de la définition 10.

□

2. Soit B une C* algèbre quelconque. Soit $C = \{f : X \to B \mid \text{f est continue}\}$.
Montrons que
$$A \otimes_{\max} B = C.$$
On va procéder en 4 points.
- Tout d'abord, il s'agit de voir que C munie de la norme
$$\|f\| = \sup_{x \in X} \{\|f(x)\|_B\}$$
est une **C* algèbre.**

On sait déjà que c'est une algèbre de Banach involutive. Montrons que si de plus f est dans C,

$$\|f\|^2 = \|f^* f\|,$$

i.e. que

$$(\sup_{x\in X} \{\|f(x)\|_B\})^2 = \sup_{x\in X} \{\|f^*(x)f(x)\|_B\}.$$

Soit f dans C. Puisque B est une C* algèbre, on a pour tout x dans X :

$$\|f(x)\|_B^2 = \|f^*(x)f(x)\|_B. \tag{2.1}$$

D'une part,

$$\|f^*(x)f(x)\|_B \leq \sup_{x\in X} \{\|f^*(x)f(x)\|_B\},$$

d'où

$$\|f(x)\|_B^2 \leq \sup_{x\in X} \{\|f^*(x)f(x)\|_B\} \text{ [par 2.1]}$$

puis en passant à la borne sup à gauche (car cette inégalité est vraie pour tout x),

$$(\sup_{x\in X} \{\|f(x)\|_B\})^2 = \sup_{x\in X} \left\{\|f(x)\|_B^2\right\} \leq \sup_{x\in X} \{\|f^*(x)f(x)\|_B\},$$

où l'égalité est donnée par la positivité des valeurs dans le sup, par positivité de la norme.
D'autre part, en réitérant le raisonnement :

$$\|f(x)\|_B^2 \leq \sup_{x\in X} \left\{\|f(x)\|_B^2\right\} = (\sup_{x\in X} \{\|f(x)\|_B\})^2$$

d'où

$$\|f^*(x)f(x)\|_B \leq (\sup_{x\in X} \{\|f(x)\|_B\})^2 \text{ [par 2.1]},$$

puis, en passant à la borne sup à gauche :

$$\sup_{x\in X} \{\|f^*(x)f(x)\|_B\} \leq (\sup_{x\in X} \{\|f(x)\|_B\})^2.$$

On a donc bien l'égalité recherchée, puis que C est une C* algèbre.
- On a l'inclusion

$$\begin{array}{rcl} i\,:\, A \odot B & \hookrightarrow & C \\ f \odot b & \mapsto & (x \mapsto f(x)b)\ , \end{array}$$

où il est clair que l'application $x \mapsto f(x)b$ est dans C par continuité de f (car f est dans A) et du produit terme à terme. Mais cette inclusion i est enfait un *-homéomorphisme.
Montrons tout d'abord qu'elle préserve l'addition. En effet, si f et g sont dans A et b dans B et λ dans $\mathbb{C}$, alors :

$$\begin{aligned} i((\lambda f + g) \odot b) &= (x \mapsto (\lambda f + g)(x)b) \\ &= (x \mapsto (\lambda f(x) + g(x))b) \\ &= (x \mapsto \lambda f(x)b + g(x)b) \\ &= (x \mapsto \lambda f(x)b) + (x \mapsto g(x)b) \\ &= \lambda(x \mapsto f(x)b) + (x \mapsto g(x)b) \\ &= \lambda i(f \odot b) + i(g \odot b) \end{aligned}$$

De même, si b_1 et b_2 sont dans B et λ dans $\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} i(f \odot (\lambda b_1 + b_2)) &= (x \mapsto f(x)(\lambda b_1 + b_2)) \\ &= (x \mapsto \lambda f(x)b_1 + f(x)b_2) \\ &= \lambda(x \mapsto f(x)b_1) + (x \mapsto f(x)b_2) \\ &= \lambda i(f \odot b_1) + i(f \odot b_2), \end{aligned}$$

donc i est linéaire par rapport à la première et la seconde variable.
De plus, i préserve la multiplication définie sur le produit tensoriel algébrique : si f et g sont dans A et si b_1 et b_2 sont dans B, alors

$$\begin{aligned} i((f \odot b_1)(g \odot b_2)) &= i((fg \odot b_1 b_2)) \\ &= (x \mapsto (fg)(x)(b_1 b_2)) \\ &= (x \mapsto f(x)g(x)b_1 b_2) \\ &= (x \mapsto f(x)b_1)(x \mapsto g(x)b_2) \\ &= i(f \odot b_1)i(g \odot b_2), \end{aligned}$$

on a ce qu'il faut.
Enfin, d'une part

$$\begin{aligned} i((f \odot b)^*) &= i(f^* \odot b^*) \\ &= (x \mapsto f^*(x)b^*) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} (i(f \odot b))^* &= (x \mapsto f(x)b)^* \\ &= (x \mapsto (f(x)b)^*) \\ &= (x \mapsto f^*(x)b^*) \end{aligned}$$

donc i préserve *.
Cela montre que i est un *-homéomorphisme.
• Montrons maintenant que l'image de i est dense dans C. Soit $f : X \mapsto B$ dans C. Soit $\varepsilon > 0$. On veut trouver un élément dans $Im(i)$ à distance ε de f.
Considérons les ensembles définis pour $x \in X$ par :

$$\mathbf{U}_x = \{y \in X : \|f(y) - f(x)\|_B < \varepsilon\}.$$

Les $\mathbf{U}_x$ sont ouverts et chaque $\mathbf{U}_x$ contient x. On peut de plus écrire

$$X = \bigcup_{x \in X} \mathbf{U}_x.$$

De plus, puisque X est compact on peut extraire un recouvrement fini :

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{U}_{x_i}.$$

Puisqu'on travaille sur X compact séparé (donc normal), on peut considérer la partition de l'unité suivante : soient $p_1, \ldots, p_n : X \mapsto [0,1]$ fonctions continues telles que :

1. $\sum_{i=1}^{n} p_i(x) = 1$, pour tout x.
2. $\text{Supp}(p_i) \subset \mathbf{U}_{x_i}$ pour tout i.

Considérons maintenant l'élément :

$$g = \sum_{i=1}^{n} p_i \odot f(x_i) \in C(X) \odot B.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\|f - i(g)\| &= \sup_{x \in X} \left\{ \|f(x) - \sum_{i=1}^{n} p_i(x) f(x_i)\|_B \right\} \\
&= \sup_{x \in X} \left\{ \| \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i(x)}_{=1} f(x) - \sum_{i=1}^{n} p_i(x) f(x_i)\|_B \right\} \\
&= \sup_{x \in X} \left\{ \| \sum_{i=1}^{n} p_i(x)(f(x) - f(x_i))\|_B \right\} \\
&\leq \sup_{x \in X} \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \|(f(x) - f(x_i))\|_B \right\}
\end{aligned}$$

À cette étape :

- Si $x \in \mathbf{U}_{x_i}$, alors dans ce cas $\|(f(x) - f(x_i))\|_B < \varepsilon$ par définition des $\mathbf{U}_{x_i}$.
- Sinon, $p_i(x) = 0$ car chaque p_i est à support dans $\mathbf{U}_{x_i}$.

Dès lors, en reprenant là où on s'était arrêtés :

$$\begin{aligned}
\|f - i(g)\| &\leq \sup_{x \in X} \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \|(f(x) - f(x_i))\|_B \right\} \\
&\leq \sup_{x \in X} \left\{ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i(x)}_{=1} \varepsilon \right\} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

On a gagné ! L'image de i est bien dense dans C.

• On peut désormais conclure : on a vu que C est une C* algèbre munie d'une C*-norme [1er point] et que l'inclusion i de $A \odot B$ dans C a une image dense dans C, i.e. $\overline{A \odot B} = C$ [3ème point].
De plus, la C*-norme sur C restreinte à $A \odot B$ reste une C*-norme, donc par nucléarité de A, la norme sur C restreinte à $A \odot B$ est $\|.\|_{\max}$. Ainsi, la complétion de $A \odot B$ dans C est $A \otimes_{\max} B$.
Or, C étant une C* algèbre, elle est complète donc la complétion de $A \odot B$ dans C est son adhérence $\overline{A \odot B}$, d'où :

$$A \otimes_{\max} B = C.$$

□

3 Moyennabilité

Dans cette partie, on définiera la notions de moyennabilité sur des groupes dénombrables uniquement. Cependant, la théorie générale permet de définir cette notion également sur des groupes non dénombrables.

3.1 Premières définitions

Définition 11 (Suites de Følner) Soit Γ un groupe (dénombrable). Une suite de Følner (à gauche) est une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles finis non vides de Γ vérifiant :

$$\forall \gamma \in \Gamma, \lim_{n\to+\infty} \frac{|F_n \triangle \gamma F_n|}{|F_n|} = 0,$$

où $A\triangle B$ est la différence symétrique entre deux ensembles A et B.

Définition 12 (Moyennable) Un groupe dénombrable Γ est moyennable s'il admet une suite de Følner.

Proposition 7 L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs est moyennable.

Démonstration. Considérons le groupe $\Gamma = \mathbb{Z}$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$F_n = [\![-n, n]\!].$$

Vérifions que cette suite d'ensemble est une suite de Følner.

- Tout d'abord, il est clair que pour tout n entier, $[\![-n, n]\!] \subset \mathbb{Z}$.
- Cette suite croissante d'ensembles comporte de plus des ensembles non vides, le plus petit étant $F_0 = \{0\}$.
- Considérons maintenant l'action de $\mathbb{Z}$ sur les F_n :

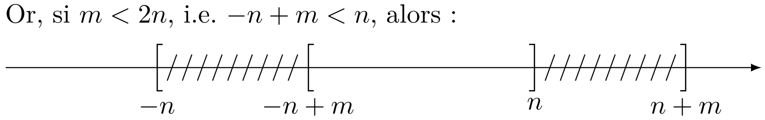
$$mF_n = [\![-n+m, n+m]\!], \ \forall (n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}.$$

Soient n dans $\mathbb{N}$ et m dans $\mathbb{Z}$. Déjà, on a quoi qu'il arrive

$$|F_n| = |[\![-n, n]\!]| = 2n.$$

Pour la suite, puisqu'on considèrera la limite du quotient $\frac{|F_n\triangle mF_n|}{|F_n|}$ lorsque n tend vers l'infini, on peut sans perte de généralité supposer $m < 2n$.

Or, si $m < 2n$, i.e. $-n+m < n$, alors :



$$F_n \triangle mF_n = [\![-n, -n+m]\!] \cup [\![n, n+m]\!]$$

et

$$|F_n \triangle mF_n| = 2m.$$

Dès lors, la limite recherchée - à m fixé - est :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|F_n\triangle mF_n|}{|F_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2m}{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{m}{n} = 0.$$

La suite $F_n = [\![-n, n]\!]$ définit donc bien une suite de Følner sur $\mathbb{Z}$, qui est donc un groupe moyennable. $\square$

3.2 C* algèbre régulière d'un groupe

Cette sous-partie va nous permettre de relier toutes les notions vues précédemment grâce à un théorème. Pour ce faire, commençons par définir une nouvelle notion. On rappelle que

$$\ell^2(X) = \left\{ a : X \to \mathbb{C} : \sum_{x \in X} |a(x)|^2 < \infty \right\}.$$

Définition 13 Soit Γ un groupe et soit $\gamma \in \Gamma$. On associe à cet élément l'application :

$$\begin{array}{rccc} T_\gamma : & \ell^2(\Gamma) & \to & \ell^2(\Gamma) \\ & a & \mapsto & (\gamma' \mapsto a(\gamma^{-1}\gamma')). \end{array}$$

Proposition 8 L'application T_γ vérifie :

- $T_e = id_{\ell^2(\Gamma)}$ où e est l'élément neutre du groupe.
- $T_{\gamma_1\gamma_2} = T_{\gamma_1} \circ T_{\gamma_2}$ pour γ_1 et γ_2 dans Γ. En particulier, on a donc $T_\gamma^{-1} = T_{\gamma^{-1}}$.
- $T_\gamma^* = T_{\gamma^{-1}}$.

Démonstration. Soit $a \in \ell^2(\Gamma)$.
• Soit e l'élément neutre du groupe Γ. Alors,

$$\begin{aligned} T_e(a) &= (\gamma' \mapsto a(e^{-1}\gamma')) \\ &= (\gamma' \mapsto a(e\gamma')) \\ &= (\gamma' \mapsto a(\gamma')) \\ &= a. \end{aligned}$$

D'où $T_e = id_{\ell^2(\Gamma)}$.
• Soient γ_1 et γ_2 dans Γ. Alors,

$$\begin{aligned} T_{\gamma_1\gamma_2} &= (\gamma' \mapsto a((\gamma_1\gamma_2)^{-1}\gamma')) \\ &= (\gamma' \mapsto a(\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma')), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_{\gamma_1} \circ T_{\gamma_2}(a) &= T_{\gamma_1}(\underbrace{\gamma' \mapsto a(\gamma_2^{-1}\gamma'))}_{=\beta} \\ &= (\gamma' \mapsto \beta(\gamma_1^{-1}\gamma') \\ &= \gamma' \mapsto a(\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma'), \end{aligned}$$

d'où $T_{\gamma_1\gamma_2} = T_{\gamma_1} \circ T_{\gamma_2}$.
• Enfin, soit $\gamma \in \Gamma$. Montrer que $T_\gamma^* = T_{\gamma^{-1}}$ revient à montrer que si a et b sont dans $\ell^2(\Gamma)$, alors $\langle T_\gamma a, b \rangle = \langle a, T_{\gamma^{-1}} b \rangle$, où on rappelle que le produit scalaire est défini par :

$$\langle a, b \rangle = \sum_{\gamma' \in \Gamma} \overline{a(\gamma')} b(\gamma').$$

Soient a et b sont dans $\ell^2(\Gamma)$. Alors,

$$\begin{aligned}\langle T_\gamma(a), b\rangle &= \sum_{\gamma'\in\Gamma} \overline{T_\gamma(a)(\gamma')}b(\gamma') \\ &= \sum_{\gamma'\in\Gamma} \overline{a(\gamma^{-1}\gamma')}b(\gamma')\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\langle a, T_{\gamma^{-1}}(b)\rangle &= \sum_{\gamma'\in\Gamma} \overline{a(\gamma')}T_{\gamma^{-1}}(b)(\gamma') \\ &= \sum_{\gamma'\in\Gamma} \overline{a(\gamma')}b((\gamma^{-1})^{-1}\gamma') \\ &= \sum_{\gamma'\in\Gamma} \overline{a(\gamma')}b(\gamma\gamma')\end{aligned}$$

Puisque γ est fixé dans Γ, l'application :

$$\begin{array}{rccc}\varphi_\gamma : & \Gamma & \to & \Gamma \\ & \gamma' & \mapsto & \gamma\gamma'\end{array}$$

est une bijection (de réciproque $\gamma' \mapsto \gamma^{-1}\gamma'$).
On peut alors effectuer le changement de variable $\tilde{\gamma} = \gamma\gamma'$ i.e. $\gamma' = \gamma^{-1}\tilde{\gamma}$ dans la somme précédente :

$$\begin{aligned}\langle a, T_{\gamma^{-1}}(b)\rangle &= \sum_{\gamma'\in\Gamma} \overline{a(\gamma')}b(\gamma\gamma') \\ &= \sum_{\tilde{\gamma}\in\Gamma} \overline{a(\gamma^{-1}\tilde{\gamma})}b(\gamma\gamma^{-1}\tilde{\gamma}) \\ &= \sum_{\tilde{\gamma}\in\Gamma} \overline{a(\gamma^{-1}\tilde{\gamma})}b(\tilde{\gamma}) \\ &= \sum_{\gamma'\in\Gamma} \overline{a(\gamma^{-1}\gamma')}b(\gamma') \\ &= \langle T_\gamma(a), b\rangle\end{aligned}$$

D'où $T_\gamma^* = T_{\gamma^{-1}}$.

Proposition 9 L'application

$$\begin{array}{rccc}\phi : & \Gamma & \to & B(\ell^2(\Gamma)) \\ & \gamma & \mapsto & T_\gamma\end{array}$$

est bien définie et permet d'inclure Γ dans $B(\ell^2(\Gamma))$.

Démonstration. Il s'agit de montrer que T_γ est bornée. En effet, elle est bornée de norme 1, car pour tout a dans $\ell^2(\Gamma)$,

$$\begin{aligned}\langle T_\gamma a, T_\gamma a\rangle &= \langle a, T_{\gamma^{-1}}T_\gamma a\rangle \\ &= \langle a, a\rangle,\end{aligned}$$

donc T_γ préserve la norme.

L'application ϕ est de plus injecive, car si γ_1 et γ_2 sont dans Γ tels que $T_{\gamma_1} = T_{\gamma_2}$, alors :

$$\begin{aligned} T_{\gamma_1} = T_{\gamma_2} &\Leftrightarrow T_{\gamma_1} T_{\gamma_2}^{-1} = id_{\ell^2(\Gamma)} \\ &\Leftrightarrow T_{\gamma_1} T_{\gamma_2^{-1}} = id_{\ell^2(\Gamma)} \\ &\Leftrightarrow T_{\gamma_1 \gamma_2^{-1}} = id_{\ell^2(\Gamma)} \\ &\Leftrightarrow \gamma_1 \gamma_2^{-1} = e \\ &\Leftrightarrow \gamma_1 = \gamma_2. \end{aligned}$$

Maintenant que nous avons bien défini T_γ, nous pouvons nous intéresser à la notion de C* algèbre régulière d'un groupe.

Définition 14 (C* algèbre régulière d'un groupe) Soit Γ un groupe (discret). On définit la C* algèbre régulière de Γ par :

$$C_r^*\Gamma = \overline{\left\{ \sum_{i \in I} a_i T_{\gamma_i} : \gamma_i \in \Gamma, a_i \in \mathbb{C}, I \text{ fini} \right\}} \subset B(\ell^2(\Gamma)),$$

où l'adhérence est celle par rapport à la norme sur $B(\ell^2(\Gamma))$.

Nous pouvons alors énoncer un théorème liant les trois parties de ce mémoire :

Théorème 4 Si Γ est moyennable, alors $C_r^*\Gamma$ est nucléaire.

Démonstration. Pour montrer que $C_r^*\Gamma$ est nucléaire, on va construire des applications

$$\varphi_n : C_r^*\Gamma \to M_n(\mathbb{C})$$

et

$$\psi_n : M_n(\mathbb{C}) \to C_r^*\Gamma$$

vérifiant les conditions de la définition 10. Pour tout $F \subset \Gamma$ sous ensemble fini de Γ, on construit les applications :

$$\varphi_F : C_r^*\Gamma \to M_{|F|}(\mathbb{C})$$

et

$$\psi_F : M_{|F|}(\mathbb{C}) \to C_r^*\Gamma.$$

On identifiera d'ailleurs dans la suite $M_{|F|}(\mathbb{C})$ à $B(\ell^2(F))$. On sait que $\ell^2(F) \subset \ell^2(\Gamma)$ est un sous ensemble de dimension finie. On considère la projection orthogonale :

$$P : \ell^2(\Gamma) \to \ell^2(F).$$

- Tout d'abord, l'application :

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\varphi}_F : & B(\ell^2(\Gamma)) & \to & B(\ell^2(F)) \\ & T & \mapsto & P(T_{|\ell^2(F)}) \end{array}$$

est bien définie car la projection orthogonale est de norme 1. Puisque $C_r^*\Gamma \subset B(\ell^2(\Gamma))$, on peut alors considérer

$$\varphi_F = \tilde{\varphi}_{F|C_r^*\Gamma}.$$

- On va maintenant construire les ψ_F.

Pour commencer, pour tout g dans Γ, on considère les applications $\delta_g \in \ell^2(\Gamma)$ telles que

$$\delta_g(h) = \begin{cases} 1 \text{ si } g = h \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Enfait, si $g \in F$, $\delta_g \in \ell^2(F)$ et les δ_g forment une base algébrique de $\ell^2(F)$. On pose alors, pour g et g' dans F,

$$\begin{array}{rcl} L_{gg'} : \ell^2(F) & \to & \ell^2(F) \\ \delta_g & \mapsto & \delta_{g'} \\ \delta_h & \mapsto & 0 \ \forall h \neq g. \end{array}$$

La matrice associée à cette application ne comporte que des zéros sauf un 1. Puisque l'application ψ que l'on souhaite définir est linéaire et que les $L_{g,g'}$ forment une base de $B(\ell^2(F))$, il suffit de définir ψ_F sur cette base. Posons donc :

$$\begin{array}{rcl} \psi_F : B(\ell^2(F)) & \to & C_r^*\Gamma \\ L_{gg'} & \mapsto & \frac{1}{|F|} T_{g'} T_{g^{-1}}. \end{array}$$

On a maintenant 3 choses à vérifier :

1. $\forall F \subset \Gamma$, φ_F est contractante complètement positive.
2. $\forall F \subset \Gamma$, ψ_F est contractante complètement positive.
3. $\forall a \in C_r^*\Gamma$, si F_n est une suite de Følner sur Γ, alors

$$\|\psi_{F_n} \circ \varphi_{F_n}(a) - a\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

1. On considère

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\varphi}_F : B(\ell^2(\Gamma)) & \to & B(\ell^2(F)) \\ T & \mapsto & P(T)_{|\ell^2(F)} \end{array},$$

   puisque φ_F est sa restriction, elle gardera les propriétés voulues.
   Tout d'abord, $\tilde{\varphi}_F$ est contractante car puisque la projection est de norme ≤ 1, alors

$$\|\tilde{\varphi}_F(T)\| = \|P(T_{|\ell^2(F)})\|_{\ell^2(F)} \leq \|T\|.$$

   Ensuite, si T est positive, on a pour tout v dans $\ell^2(F)$ $\langle Tv, v\rangle \geq 0$, mais puisque $\langle Tv, v\rangle = \langle PTv, v\rangle$ (car Tv se décompose en somme de deux éléments, un qui est sur $\ell^2(F)$, c'est Ptv, et un autre, Otv, qui est sur son orthogonal donc $\langle Tv, v\rangle = \langle PTv, v\rangle + \underbrace{\langle OTv, v\rangle}_{=0}$), alors $\tilde{\varphi}_F$ envoie bien le positif sur du positif, puis elle est complètement positive car cela s'étend à la fonction matricielle associée.
2. Montrons dans un premier temps que

$$\psi_F : B(\ell^2(F)) \to C_r^*\Gamma$$

   est (complètement) positive. Soit M une matrice positive dans $B(\ell^2(F))$. Puisque M est positive, il existe S matrice dans$\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ telle que $M = S^*S$. En notant $\{g_1, \ldots, g_n\} = F$, on peut écrire

$$S = \sum a_{ij} L_{g_i g_j}$$

puis

$$\begin{aligned}
M &= S^*S \\
&= (\sum_{i,j} a_{ij} L_{g_i g_j})^* (\sum_{i,j} a_{ij} L_{g_i g_j}) \\
&= (\sum_{i,j} \overline{a_{ij}} L^*_{g_i g_j})(\sum_{i,j} a_{ij} L_{g_i g_j}) \\
&= (\sum_{i,j} \overline{a_{ij}} L_{g_j g_i})(\sum_{k,l} a_{kl} L_{g_k g_l}) \\
&= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \overline{a_{ij}} L_{g_j g_i} a_{kl} L_{g_k g_l} \\
&= \sum_i \sum_j \sum_l \overline{a_{ij}} a_{il} L_{g_j g_i} L_{g_i g_l}.
\end{aligned}$$

En effet, puisque $L_{g_j g_i} a_{kl}$ et $L_{g_k g_l}$ sont des matrices faites de zéros et d'un coefficient égal à 1 en position (j, i) et (k, l) respectivement, pour que leur produit matriciel soit non nul, on a nécessairement $k = i$, ce qui nous permet de retirer une somme. Puis

$$\begin{aligned}
\psi_F(M) &= \psi_F(\sum_i \sum_j \sum_l \overline{a_{ij}} a_{il} L_{g_j g_i} L_{g_i g_l}) \\
&= \psi_F(\sum_i (\sum_j \overline{a_{ij}} L_{g_j g_i})(\sum_l a_{il} L_{g_i g_l})) \\
&= \psi_F(\sum_i (\sum_j a_{ij} L_{g_i g_j})^* (\sum_l a_{il} L_{g_i g_l})) \\
&= \sum_i (\sum_j a_{ij} \psi_F(L_{g_i g_j}))^* (\sum_l a_{il} \psi_F(L_{g_i g_l})) \\
&= \sum_i (\sum_j \frac{a_{ij}}{|F|} T_{g_j} T_{g_i}^{-1}))^* (\sum_l \frac{a_{il}}{|F|} T_{g_l} T_{g_i}^{-1})) \\
&= \sum_i (\sum_j \frac{a_{ij}}{|F|} T_{g_j} T_{g_i}^{-1}))^* (\sum_j \frac{a_{ij}}{|F|} T_{g_j} T_{g_i}^{-1})) \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

puisque chaque terme est positif en tant que produit d'un élément et de son adjoint, et on somme donc des termes positifs donc la somme est positive. L'application ψ envoie donc bien le positif sur du positif, puis elle est complètement positive car cela s'étend à la fonction matricielle associée.
Il faut maintenant montrer qu'elle est contractante. On va utiliser le lemme suivant :

Lemme 4 Soient A une C* algèbre, $E \subset A$ et $\psi : E \to \mathbb{C}$ une application linéaire positive. Alors,

$$\|\psi\| = \psi(1).$$

Démonstration. Soit x dans E tel que $\|x\| \leq 1$. Quitte à multiplier par un scalaire de norme 1, on peut supposer que $\psi(x) > 0$. Puisque ψ est une application positive, elle est automatiquement auto-adjointe et vérifie donc

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\psi(x + x^*),$$

ce qui nous permet alors de supposer que x est également auto-adjoint, quitte à le remplacer par $\frac{x+x^*}{2}$. Dès lors, on a l'inégalité $x \leq \|x\|1$, d'où

$$\underbrace{\psi(x)}_{=|\psi(x)| car \psi positive} \leq \psi(1)\|x\|,$$

puis

$$\frac{|\psi(x)|}{\|x\|} \leq \psi(1),$$

et ce pour tout x d'où en passant au sup à gauche

$$\|\psi\| = \psi(1).$$

□

Puisque ψ_F est à valeurs dans $C_r^*\Gamma$, il s'agit de montrer que $\psi_F(1) = id$ pour qu'elle soit de norme 1. Or,

$$\begin{aligned}
\psi_F(1) &= \psi_F(\sum_i 1L_{g_i g_i}) \\
&= \sum_i \psi_F(L_{g_i g_i}) \\
&= \sum \frac{1}{|F|} T_{g_i} T_{g_i}^{-1} \\
&= \frac{1}{|F|} \sum id \\
&= |F| \frac{1}{|F|} id \\
&= id,
\end{aligned}$$

donc ψ_F est bien une application de norme 1, donc contractante.

3. Enfin, montrons que $\forall a \in C_r^*\Gamma$, si F_n est une suite de Følner sur Γ, alors

$$\|\psi_{F_n} \circ \varphi_{F_n}(a) - a\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Étape 1. Commençons par montrer que c'est vrai pour b dans

$$E = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i T_{\gamma_i} : \gamma_i \in \Gamma, \lambda_i \in \mathbb{C}, I \text{ fini} \right\}.$$

Puisque $\psi_{F_n} \circ \varphi_{F_n}$ est linéare, il s'agit de montrer que la limite est nulle pour un $b = T_\gamma$. Soit $\gamma \in \Gamma$. On écrit $F_n = \{g_1, \ldots, g_k\}$. Avant d'évaluer $\psi_{F_n} \circ \varphi_{F_n}(T_\gamma)$, commençons par évaluer $\varphi_{F_n}(T_\gamma)$. On a :

$$\varphi_{F_n}(T_\gamma) = P(T_{\gamma|\ell^2(F_{\gamma_n})}),$$

et pour tout i dans $[\![1\ ;\ k]\!]$,

$$T_\gamma(\delta_{g_i}) = \delta_{\gamma g_i},$$

car $T_\gamma(\delta_{g_i})(h) = \delta_{g_i}(\gamma^{-1}h)$ donc $T_\gamma(\delta_{g_i})(h) = 1 \Leftrightarrow h = \gamma g_i$.
Donc

$$\varphi_{F_n}(T_\gamma) = \sum_{g_i \in F_n \cap \gamma F_n} L_{g_i, \gamma g_i},$$

puis :

$$\begin{aligned}
\psi_{F_n}(\varphi_{F_n}(T_\gamma)) &= \frac{1}{|F_n|}(\sum_{g_i \in F_n \cap \gamma F_n} \psi_{F_n}(L_{g_i,\gamma g_i})) \\
&= \frac{1}{|F_n|}(\sum_{g_i \in F_n \cap \gamma F_n} T_{\gamma g_i} T_{g_i}^{-1}) \\
&= \frac{1}{|F_n|}(\sum_{g_i \in F_n \cap \gamma F_n} T_\gamma T_{g_i} T_{g_i}^{-1}) \\
&= \frac{1}{|F_n|}(\sum_{g_i \in F_n \cap \gamma F_n} T_\gamma) \\
&= \frac{T_\gamma}{|F_n|} |F_n \cap \gamma F_n|.
\end{aligned}$$

Or, F_n est une suite de Følner donc $\frac{|F_n \triangle \gamma F_n|}{|F_n|} \to 0$. De plus,

$$\begin{aligned}
|F_n \triangle \gamma F_n| &= |F_n| + \underbrace{|\gamma F_n|}_{=|F_n|} - 2|F_n \cap \gamma F_n| \\
&= 2(|F_n| - |F_n \cap \gamma F_n|).
\end{aligned}$$

Donc, puisque

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|F_n \triangle \gamma F_n|}{|F_n|} = \lim_{n \to +\infty} 2(1 - \frac{|F_n \cap \gamma F_n|}{|F_n|}) = 0,$$

alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|F_n \cap \gamma F_n|}{|F_n|} = 1,$$

puis

$$\lim_{n \to +\infty} \psi_{F_n}(\varphi_{F_n}(T_\gamma)) = T_\gamma,$$

i.e.

$$\|\psi_{F_n} \circ \varphi_{F_n}(T_\gamma) - T_\gamma\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

On a donc ce qu'il faut pour tout élément de E, par linéarité de $\psi_{F_n} \circ \varphi_{F_n}$!

Ètape 2. Maintenant, soit $\varepsilon > 0$, soit $a \in C_r^*\Gamma$, et soit $b \in E$ tel que

$$\|a - b\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

(Existe par définition de $C_r^*\Gamma$)
D'après l'**Étape 1**, il existe n assez grand tel que

$$\|\psi_{F_n} \circ \phi_{F_n}(b) - b\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\|\psi_{F_n} \circ \varphi_{F_n}(a) - a\| &= \|\psi_{F_n} \circ \varphi_{F_n}(a) - \psi_{F_n} \circ \varphi_{F_n}(b) + \psi_{F_n} \circ \varphi_{F_n}(b) - b + b - a\| \\
&\leq \|\psi_{F_n} \circ \varphi_{F_n}(a) - \psi_{F_n} \circ \varphi_{F_n}(b)\| + \|\psi_{F_n} \circ \varphi_{F_n}(b) - b\| + \|b - a\| \\
&\leq \underbrace{\|\psi_{F_n} \circ \varphi_{F_n}(a - b)\|}_{\leq \|a-b\| \text{ car } \psi_{F_n} \circ \varphi_{F_n} \text{ contractante}} + \underbrace{\|\psi_{F_n} \circ \varphi_{F_n}(b) - b\|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|b - a\|}_{\frac{\varepsilon}{3}} \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

et ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien la convergence souhaitée.

Ainsi, d'après les points 1, 2 et 3, nos applications φ et ψ vérifient les conditions de nucléarité, d'où $C_r^*\Gamma$ est nucléaire.

□

3.3 Application aux groupes d'automorphismes quantiques

Pour terminer ce mémoire, on peut énoncer un résultat qui lie notre dernière partie à la théorie des graphes. C'est en effet ce domaine et en particulier le sujet qui suit qui ont motivé mon TER, étant dans la continuité de mon travail de L3.

Si on se donne un graphe fini G, on peut lui associer un groupe compact (quantique) appelé le **groupe d'automorphisme quantique** et noté $Aut^+(G)$. En général, il est difficile de comprendre la structure de $Aut^+(G)$ à partir des propriétés de G, ou même de savoir si elle est vraiment quantique (au sens où la C* algèbre associée est non-commutative).

Dans le cas des arbres, il a été montré que le groupe d'automorphismes quantiques est presque sûrement infini, donc quantique dans le sens précisé ci-dessus.

On peut alors énoncer un résultat lié à notre travail précédent.

Proposition 10 Soit $N \geq 5$ un entier et T un arbre à N sommets. Alors, presque sûrement, $Aut^+(G)$ n'est pas moyennable.

Il est cependant important de noter que si le terme "moyennable" caractérisait dans notre mémoire des groupes discrets, ici, c'est au sens des groupes quantiques. La définition ne sera donc pas exactement la même. Le lecteur curieux pourra si besoin se référer à [**Sal24**].

Bibliographie

[Dix77] Jacques Dixmier, *Les C* algèbres et leurs représentations* (1977).

[Mur90] Gérard J. Murphy, *C*-Algebras and operator theory* (1990).

[Brow72] Nathanial P. Brown et Narutaka Ozawa, *C*-Algebras and Finite-Dimensional Approximations* (1972) .

[Sal24] Lucas Alger, Julie Capron et Félix de la Salle, *Patterns in trees and quantum automorphism groups* (2024).