

TER

Théorème d'invariance du domaine de Brouwer

Enzo Tanguidé - Quentin Casella

Dirigé par Omar Mohsen

Université de Paris-Saclay

M1

2023 - 2024

Sommaire

Introduction	3
1 Homologie singulière	3
1.1 Simplexes	3
1.2 Morphismes de bord et groupes d'homologie	4
2 Homologie et topologie générale	5
2.1 Homologie d'espaces homéomorphes	5
2.2 Réduction par composante connexe par arcs	7
2.3 Groupes d'homologie réduits	9
3 Homologie et homotopie	12
3.1 Applications de chaînes et morphisme induit	13
3.2 Homologie d'espaces homotopes	15
4 Résultats majeurs	22
4.1 Algèbre homologique	22
4.2 Théorème de Mayer-Vietoris	33
4.3 Exemple des sphères	38
4.4 Invariance du domaine	39
5 Annexes	42

Introduction

L'énoncé du théorème d'invariance du domaine de Brouwer est le suivant : Si $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ sont des ouverts non vides homéomorphes avec $n, m \in \mathbb{N}$, alors $m = n$. Même si intuitivement on voit bien ce qu'il se passe, la démonstration n'a rien d'évident. Celle proposée dans ce rapport, qui s'appuie sur le livre de Allen widehatcher intitulé Algebraic Topology, est loin d'être purement topologique et nécessite des outils plus complexes. Notamment, on va se servir d'invariants algébriques qu'on appelle groupes d'homologie, qui "détectent et comptent le nombre de trou de toute dimension". C'est cet outil qui nous donnera l'égalité des dimensions.

Dans toute la suite, on se donne X un espace topologique.

1 Homologie singulière

1.1 Simplexes

Définitions 1.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On appelle n -simplexe standard la partie $\Delta^n := \left\{ \sum_{i=0}^n t_i e_i \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0 \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}$ de l'espace euclidien \mathbb{R}^{n+1} , où $(e_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} .
- Un n -simplexe singulier dans l'espace X est une application continue $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$.
- On note $C_n(X)$ le \mathbb{Z} -module libre dont une base est l'ensemble des n -simplexes singuliers. Les éléments de $C_n(X)$ sont appelés n -chaines et sont de la forme $\sum_{\sigma \in \Sigma} n_\sigma \sigma$ avec $\Sigma \subset \mathcal{C}(\Delta^n, X)$ une partie finie, et $(n_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ une famille d'éléments de \mathbb{Z} .

Exemple 1.1.2. Pour $n = 2$, on a $\Delta^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1, x, y, z \geq 0\}$, qui est l'intersection d'un plan et d'un huitième d'espace. Ainsi, l'objet obtenu est un triangle, comme représenté sur la Figure 1 ci-dessous. Notez que n correspond intuitivement à la "dimension" de Δ^n . Ainsi, Δ^2 est une "surface".

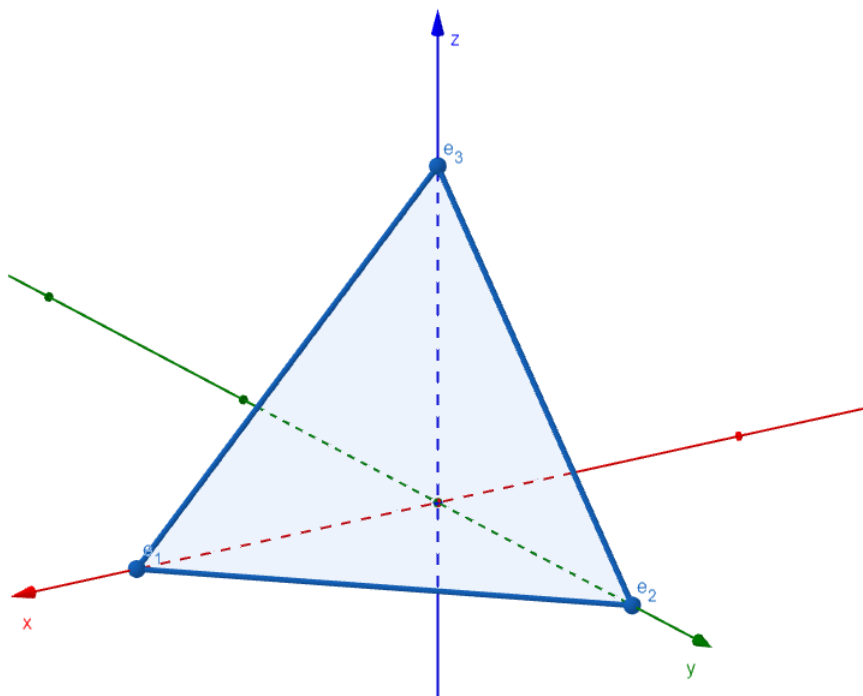


Figure 1: Représentation du 2-simplexe standard Δ^2

Remarques 1.1.3.

- Δ^n se note aussi $[e_0, \dots, e_n]$, que l'on définit de la façon suivante. Pour $m, n \in \mathbb{N}$ et $(v_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ une famille d'éléments de \mathbb{R}^m , on définit $[v_0, \dots, v_n]$ comme étant la partie $\left\{ \sum_{i=0}^n t_i v_i \mid t_i \geq 0 \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}$ de \mathbb{R}^m . Cet ensemble est le plus petit convexe de \mathbb{R}^m contenant ces vecteurs. On donne une démonstration détaillée en annexe avec la proposition 5.0.1.
- On demande seulement que l'application σ soit continue, elle peut donc éventuellement être non injective.
- Notez que même pour des espaces X raisonnables, $C_n(X)$ peut être gigantesque !
- Plus tard, nous serons amenés à considérer les restrictions $\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_n]}$ où \widehat{e}_j signifie qu'on enlève e_j , i.e., $[e_0, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_n]$ est l'ensemble $\left\{ \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n t_i e_i \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0 \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{j\}, \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n t_i = 1 \right\}$. C'est donc une partie de $\mathbb{R}^j \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n-j}$ identifiée à la partie $[e'_0, \dots, e'_{n-1}]$ de \mathbb{R}^n via l'homéomorphisme

$$\begin{aligned} I_j^n : [e_0, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_n] &\rightarrow [e'_0, \dots, e'_{n-1}] \\ (t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \dots, t_n) &\mapsto (t_0, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_n) \end{aligned}$$

où $(e'_i)_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ est la base canonique de \mathbb{R}^n . Ainsi, quand on parlera de $\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_n]}$, on sous-entendra en fait que l'on travaille avec l'application continue $\sigma \circ (I_j^n)^{-1} : \Delta^{n-1} \rightarrow X$.

1.2 Morphismes de bord et groupes d'homologie

Définition 1.2.1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle morphismes de bord de X les morphismes de \mathbb{Z} -modules

$$\begin{aligned} \partial_n : C_n(X) &\rightarrow C_{n-1}(X) \\ \sigma &\mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_n]} \end{aligned}$$

où σ est un élément de la base. On définit aussi $\partial_0 : C_0(X) \rightarrow \{0\}$ le morphisme nulle.

Remarque 1.2.2. Ce que l'on a fait ici, et que l'on fera à l'avenir, c'est de définir un morphisme uniquement sur la base que l'on s'est donné sur $C_n(X)$. Pour en déduire l'image de tout $x \in C_n(X)$, il suffit d'écrire que $x = \sum_{\sigma \in \Sigma} n_\sigma \sigma$ avec $\Sigma \subset \mathcal{C}(\Delta^n, X)$ une partie finie et $(n_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ des entiers, puis, $\partial_n(x) = \sum_{\sigma \in \Sigma} n_\sigma \partial_n(\sigma)$.

On aimerait savoir si on a l'inclusion $\text{Im}(\partial_{n+1}) \subset \ker(\partial_n)$ pour s'intéresser au quotient $\frac{\ker(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}$. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 1.2.3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$.

Preuve. Pour $n = 0$ c'est clair, supposons que $n \in \mathbb{N}^*$. Soit σ un élément de la base de $C_{n+1}(X)$. On a

$$\begin{aligned} \partial_n \circ \partial_{n+1}(\sigma) &= \partial_n \left(\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_{n+1}]} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial_n \left(\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_{n+1}]} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e}_j, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_{n+1}]} + \sum_{j=i+1}^{n+1} (-1)^{j-1} \sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_{n+1}]} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e}_j, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_{n+1}]} + \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j=i+1}^{n+1} (-1)^{j-1} \sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_{n+1}]} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^i (-1)^j \sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e}_j, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_{n+1}]} - \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i (-1)^j \sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_{n+1}]} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Remarque 1.2.4. On obtient donc un diagramme

$$- - \triangleright C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) - - \triangleright \quad - - \triangleright C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} \{0\}$$

avec la propriété $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Un tel diagramme est appelé complexe de chaînes.

On peut maintenant définir proprement les groupes d'homologie.

Définition 1.2.5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle n -ième groupe d'homologie, et on note $H_n(X)$, le groupe quotient $\frac{\ker(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}$.

Remarques 1.2.6.

- Notez que comme $\partial_0 = 0$, on a toujours $H_0(X) = \frac{C_0(X)}{\text{Im}(\partial_1)}$.
- On observe en fait qu'on peut définir les groupes d'homologie pour n'importe quel complexe de chaînes, étant donné que leur définition ne dépend pas de la nature des objets. Dans le cas où l'on remplace les $C_n(X)$ par des objets A_n , on notera alors les groupes d'homologie $H_n(A)$. Si la situation est ambiguë, on précisera qui sont les morphismes de bord, par exemple on écrira ∂_n^X ou ∂_n^A . Sauf mention explicite du contraire, les A_n seront toujours des \mathbb{Z} -modules.
- On notera $\pi_n : \ker(\partial_n) \rightarrow H_n(X)$ la projection canonique. Si besoin, on précisera laquelle en exposant, par exemple on peut écrire π_n^X .

2 Homologie et topologie générale

2.1 Homologie d'espaces homéomorphes

On peut se demander comment se comportent les H_n par homéomorphisme. On va pour cela s'appuyer sur un lemme plus algébrique.

Lemme 2.1.1. Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des \mathbb{Z} -modules. On pose $A_{-1} = \{0\}$ et $B_{-1} = \{0\}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un isomorphisme

$$\varphi_n : A_n \xrightarrow{\sim} B_n$$

On pose

$$\varphi_{-1} : A_{-1} \xrightarrow{\sim} B_{-1}$$

le morphisme trivial. On suppose également qu'on a des morphismes

$$\begin{cases} \partial_n^A : A_n \rightarrow A_{n-1} \\ \partial_n^B : B_n \rightarrow B_{n-1} \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut résumer la situation sur un diagramme

$$\begin{array}{ccc} - - \triangleright A_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}^A} A_n - - \triangleright & & - - \triangleright A_0 \xrightarrow{\partial_0^A} A_{-1} \\ \varphi_{n+1} \downarrow \wr & \varphi_n \downarrow \wr & \varphi_0 \downarrow \wr \quad \varphi_{-1} \downarrow \wr \\ - - \triangleright B_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}^B} B_n - - \triangleright & & - - \triangleright B_0 \xrightarrow{\partial_0^B} B_{-1} \end{array}$$

On suppose que ce diagramme commute, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\partial_n^B \circ \varphi_n = \varphi_{n-1} \circ \partial_n^A$. Enfin, on suppose que les A_n et les B_n sont des complexes de chaînes, i.e., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\partial_n^A \circ \partial_{n+1}^A = 0$ et $\partial_n^B \circ \partial_{n+1}^B = 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n induit un isomorphisme

$$\frac{\ker(\partial_n^A)}{\text{Im}(\partial_{n+1}^A)} \simeq \frac{\ker(\partial_n^B)}{\text{Im}(\partial_{n+1}^B)}$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons

$$\begin{aligned}\psi_n : \ker(\partial_n^A) &\rightarrow \frac{\ker(\partial_n^B)}{\text{Im}(\partial_{n+1}^B)} \\ x &\mapsto \pi_n^B \circ \varphi_n(x)\end{aligned}$$

Pour que cette application soit bien définie, il faut vérifier que $\varphi_n(\ker(\partial_n^A)) \subset \ker(\partial_n^B)$. En fait, comme on veut aussi montrer que ψ_n est surjective, on va montrer qu'il y a égalité par double inclusions.

- $\varphi_n(\ker(\partial_n^A)) \subset \ker(\partial_n^B)$: Soit $x \in \ker(\partial_n^A)$. On a

$$\begin{aligned}\partial_n^B \circ \varphi_n(x) &= \varphi_{n-1} \circ \partial_n^A(x) \\ &= \varphi_{n-1}(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $\varphi_n(x)$ appartient bien à $\ker(\partial_n^B)$, ce qui montre que $\varphi_n(\ker(\partial_n^A)) \subset \ker(\partial_n^B)$ et donc que ψ_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $\ker(\partial_n^B) \subset \varphi_n(\ker(\partial_n^A))$: Soit $y \in \ker(\partial_n^B)$. En posant $x = \varphi_n^{-1}(y)$ on a

$$\begin{aligned}0 &= \partial_n^B(y) \\ &= \partial_n^B \circ \varphi_n(x) \\ &= \varphi_{n-1} \circ \partial_n^A(x)\end{aligned}$$

Et comme φ_{n-1} est injective, ceci implique que $x \in \ker(\partial_n^A)$ et donc $y \in \varphi_n(\ker(\partial_n^A))$, ce qui montre que $\ker(\partial_n^B) \subset \varphi_n(\ker(\partial_n^A))$.

On veut maintenant calculer le noyau de ψ_n pour appliquer le théorème de factorisation. Soit $x \in \ker(\psi_n)$. On a

$$\begin{aligned}\psi_n(x) = 0 &\iff \pi_n^B \circ \varphi_n(x) = 0 \\ &\iff \varphi_n(x) \in \text{Im}(\partial_{n+1}^B) \\ &\iff \exists y \in B_{n+1}, \varphi_n(x) = \partial_{n+1}^B(y) \\ &\iff \exists z \in A_{n+1}, \varphi_n(x) = \partial_{n+1}^B \circ \varphi_{n+1}(z) \\ &\iff \exists z \in A_{n+1}, \varphi_n(x) = \varphi_n \circ \partial_{n+1}^A(z) \\ &\iff \exists z \in A_{n+1}, x = \partial_{n+1}^A(z) \\ &\iff x \in \text{Im}(\partial_{n+1}^A)\end{aligned}$$

Donc $\ker(\psi_n) = \text{Im}(\partial_{n+1}^A)$. Finalement, par factorisation, ψ_n induit un isomorphisme

$$\tilde{\psi}_n : \frac{\ker(\partial_n^A)}{\text{Im}(\partial_{n+1}^A)} \xrightarrow{\sim} \frac{\ker(\partial_n^B)}{\text{Im}(\partial_{n+1}^B)}$$

ce qu'on voulait.

Proposition 2.1.2. Soit Y un autre espace topologique, que l'on suppose homéomorphe à X . Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n(X)$ et $H_n(Y)$ sont isomorphes.

Preuve. Soit $\phi : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'isomorphisme

$$\begin{aligned}\varphi_n : C_n(X) &\xrightarrow{\sim} C_n(Y) \\ \sigma &\mapsto \phi \circ \sigma\end{aligned}$$

pour σ un élément de la base de $C_n(X)$. On veut appliquer le lemme 2.1.1 avec $A_n = C_n(X)$, $B_n = C_n(Y)$ et les φ_n pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ avec les conventions $C_{-1}(X) = \{0\}$, $C_{-1}(Y) = \{0\}$ et $\varphi_{-1} : C_{-1}(X) \rightarrow C_{-1}(Y)$

le morphisme trivial. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n^X} & C_{n-1}(X) \\ \psi_n \downarrow \wr & & \psi_{n-1} \downarrow \wr \\ C_n(Y) & \xrightarrow{\partial_n^Y} & C_{n-1}(Y) \end{array}$$

Pour $n = 0$ le résultat est clair. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in C_n(X)$ il existe $\Sigma \subset \mathcal{C}(\Delta^n, X)$ une partie finie et $(n_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ une famille d'entiers tels que $x = \sum_{\sigma \in \Sigma} n_\sigma \sigma$. On a alors

$$\begin{aligned} \partial_n^Y \circ \psi_n(x) &= \sum_{\sigma \in \Sigma} n_\sigma \sum_{i=0}^n (-1)^i (\phi \circ \sigma) \big|_{[e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]} \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma} n_\sigma \sum_{i=0}^n (-1)^i \phi \circ (\sigma \big|_{[e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]}) \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma} n_\sigma \psi_{n-1} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \big|_{[e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma} n_\sigma \psi_{n-1} \circ \partial_n^X(\sigma) \\ &= \psi_{n-1} \circ \partial_n^X(x) \end{aligned}$$

Ainsi par le lemme 2.1.1, on a bien $H_n(X) \simeq H_n(Y)$.

Remarque 2.1.3. On verra plus tard qu'en fait, toute application continue $f : X \rightarrow Y$ induit des morphismes

$$f_*^n : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$$

2.2 Réduction par composante connexe par arcs

Comme l'image d'un simplexe est connexe par arcs, on peut se ramener à étudier les groupes d'homologie sur chaque composante connexe par arcs de X .

Proposition 2.2.1. Soit Λ l'ensemble des composantes connexes par arcs de X . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$H_n(X) \simeq \bigoplus_{C \in \Lambda} H_n(C).$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme mentionné précédemment, l'image d'un simplexe est connexe par arcs car Δ^n est connexe par arcs, donc on a une application naturelle

$$\begin{aligned} f_n : \bigcup_{C \in \Lambda} \mathcal{C}(\Delta^n, C) &\rightarrow \mathcal{C}(\Delta^n, X) \\ (\sigma : \Delta^n \rightarrow C_\sigma) &\mapsto i_{C_\sigma} \circ \sigma \end{aligned}$$

où C_σ est une composante connexe par arcs de X , $i_{C_\sigma} : C_\sigma \rightarrow X$ est l'inclusion. Cette application est bien définie car i_{C_σ} et σ sont continues donc $i_{C_\sigma} \circ \sigma \in \mathcal{C}(\Delta^n, X)$. On va montrer que f_n est une bijection.

- f_n est injective : Soient $\sigma : \Delta^n \rightarrow C_\sigma$ et $\sigma' : \Delta^n \rightarrow C_{\sigma'}$ deux applications continues telles que $f_n(\sigma) = f_n(\sigma')$, i.e., $i_{C_\sigma} \circ \sigma = i_{C_{\sigma'}} \circ \sigma'$. Comme ces applications ont une image connexe par arcs, il vient que $C_\sigma = C_{\sigma'}$ puis $\sigma = \sigma'$.
- f_n est surjective : Soit $\tilde{\sigma} \in \mathcal{C}(\Delta^n, X)$. L'image de cette application est connexe par arcs donc il existe une unique composante connexe par arcs $C_{\tilde{\sigma}} \in \Lambda$ contenant cette image. Ainsi, on peut définir l'application

$$\begin{aligned} \sigma : \Delta^n &\rightarrow C_{\tilde{\sigma}} \\ x &\mapsto \tilde{\sigma}(x) \end{aligned}$$

continue comme corestriction d'une application continue. On a bien $f_n(\sigma) = \tilde{\sigma}$.

Cette bijection induit l'isomorphisme naturel

$$\varphi_n : \bigoplus_{C \in \Lambda} C_n(C) \xrightarrow{\sim} C_n(X)$$

qui envoie base sur base via f_n . On va voir que le diagramme suivant est commutatif. Si $n = 0$ c'est clair donc on suppose que $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{C \in \Lambda} C_n(C) & \xrightarrow{\bigoplus_{C \in \Lambda} \partial_n^C} & \bigoplus_{C \in \Lambda} C_{n-1}(C) \\ \varphi_n \downarrow \wr & & \varphi_{n-1} \downarrow \wr \\ C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n^X} & C_{n-1}(X) \end{array}$$

Le morphisme $\bigoplus_{C \in \Lambda} \partial_n^C$ est défini par

$$\begin{aligned} \bigoplus_{C \in \Lambda} \partial_n^C : \bigoplus_{C \in \Lambda} C_n(C) &\rightarrow \bigoplus_{C \in \Lambda} C_{n-1}(C) \\ (x_C)_{C \in \Lambda} &\mapsto \left(\partial_n^C(x_C) \right)_{C \in \Lambda} \end{aligned}$$

où $(x_C)_{C \in \Lambda}$ est une famille presque nulle, et donc $(\partial_n^C(x_C))_{C \in \Lambda}$ aussi, ce qui justifie que cette application est bien définie. On veut appliquer le lemme 2.1.1, montrons donc que le diagramme précédent est commutatif. Soit $(x_C)_{C \in \Lambda} \in \bigoplus_{C \in \Lambda} C_n(C)$. Pour tout $C \in \Lambda$, il existe $\Sigma_C \subset \mathcal{C}(\Delta^n, X)$ une partie finie et $(n_{\sigma_C})_{\sigma_C \in \Sigma_C}$ une famille d'entiers tels que $x_C = \sum_{\sigma_C \in \Sigma_C} n_{\sigma_C} \sigma_C$. Montrons que

$$\varphi_{n-1} \circ \bigoplus_{C \in \Lambda} \partial_n^C((x_C)_{C \in \Lambda}) = \partial_n^X \circ \varphi_n((x_C)_{C \in \Lambda})$$

On a

$$\begin{aligned} \varphi_{n-1} \circ \bigoplus_{C \in \Lambda} \partial_n^C((x_C)_{C \in \Lambda}) &= \varphi_{n-1}((\partial_n^C(x_C))_{C \in \Lambda}) \\ &= \varphi_{n-1} \left(\sum_{\sigma_C \in \Sigma_C} n_{\sigma_C} \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_C|_{[e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_n]} \right) \\ &= \sum_{\sigma_C \in \Sigma_C} n_{\sigma_C} \sum_{i=0}^n (-1)^i i_C \circ (\sigma_C|_{[e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_n]}) \\ &= \sum_{\sigma_C \in \Sigma_C} n_{\sigma_C} \sum_{i=0}^n (-1)^i (i_C \circ \sigma_C)|_{[e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_n]} \\ &= \sum_{\sigma_C \in \Sigma_C} n_{\sigma_C} \partial_n^X(i_C \circ \sigma_C) \\ &= \partial_n^X \circ \varphi_n((x_C)_{C \in \Lambda}) \end{aligned}$$

Donc ce diagramme commute. Par le lemme 2.1.1 on a un isomorphisme

$$\frac{\ker \left(\bigoplus_{C \in \Lambda} \partial_n^C \right)}{\operatorname{Im} \left(\bigoplus_{C \in \Lambda} \partial_{n+1}^C \right)} \xrightarrow{\sim} H_n(X)$$

Par définition de $\bigoplus_{C \in \Lambda} \partial_n^C$, on a

$$\begin{aligned} \ker \left(\bigoplus_{C \in \Lambda} \partial_n^C \right) &= \bigoplus_{C \in \Lambda} \ker(\partial_n^C) \\ \operatorname{Im} \left(\bigoplus_{C \in \Lambda} \partial_{n+1}^C \right) &= \bigoplus_{C \in \Lambda} \operatorname{Im}(\partial_{n+1}^C) \end{aligned}$$

Et comme

$$\frac{\bigoplus_{C \in \Lambda} \ker(\partial_n^C)}{\bigoplus_{C \in \Lambda} \operatorname{Im}(\partial_{n+1}^C)} \simeq \bigoplus_{C \in \Lambda} \frac{\ker(\partial_n^C)}{\operatorname{Im}(\partial_{n+1}^C)}$$

on a bien le résultat attendu.

2.3 Groupes d'homologie réduits

Parmi tous les groupes d'homologie, le premier est un peu différent des autres.

Proposition 2.3.1. Si X est non vide et connexe par arcs, alors $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.

Preuve. On a vu que

$$H_0(X) = \frac{C_0(X)}{\operatorname{Im}(\partial_1)}$$

On va donc construire un morphisme

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon : C_0(X) & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ \sigma & \mapsto & 1 \end{array}$$

où σ est un élément de la base de $C_0(X)$. Ce morphisme est clairement surjectif. Montrons maintenant par double inclusions que $\ker(\varepsilon) = \operatorname{Im}(\partial_1)$.

- $\operatorname{Im}(\partial_1) \subset \ker(\varepsilon)$: Il suffit de vérifier la propriété sur l'image des éléments σ de la base de $C_1(X)$.

$$\begin{aligned} \varepsilon \circ \partial_1(\sigma) &= \varepsilon(\sigma|_{[e_1]} - \sigma|_{[e_0]}) \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- $\ker(\varepsilon) \subset \operatorname{Im}(\partial_1)$: Soit $y = \sum_{\sigma \in \Sigma} n_\sigma \sigma \in \ker(\varepsilon)$ avec $\Sigma \subset \mathcal{C}(\Delta^0, X)$ une partie finie et $(n_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ une famille d'entiers. Alors $\varepsilon(y) = \sum_{\sigma \in \Sigma} n_\sigma = 0$. Soient $u \in X \neq \emptyset$ et $(\sigma_u : e_0 \mapsto u) \in \mathcal{C}(\Delta^0, X)$. Comme X est connexe par arcs, il existe $\gamma_\sigma : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin partant de u , arrivant en $\sigma(e_0)$ pour tout $\sigma \in \Sigma$. On pose

$$\begin{array}{ccc} \phi : \Delta^1 & \rightarrow & [0, 1] \\ (x, y) & \mapsto & y \end{array}$$

Enfin, on pose $\tilde{\sigma} = \gamma_\sigma \circ \phi \in \mathcal{C}(\Delta^1, X)$. Ainsi, $\tilde{\sigma}|_{[e_0]} = \sigma_u$ et $\tilde{\sigma}|_{[e_1]} = \sigma$. On a donc

$$\begin{aligned} y &= \sum_{\sigma \in \Sigma} n_\sigma \sigma \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma} n_\sigma \sigma - \left(\sum_{\sigma \in \Sigma} n_\sigma \right) \sigma_u \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma} n_\sigma (\sigma - \sigma_u) \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma} n_\sigma \partial_1(\tilde{\sigma}) \\ &= \partial_1 \left(\sum_{\sigma \in \Sigma} n_\sigma \tilde{\sigma} \right) \end{aligned}$$

Donc $y \in \operatorname{Im}(\partial_1)$.

Ainsi, par factorisation, ε induit un isomorphisme

$$\tilde{\varepsilon} : \frac{C_0(X)}{\operatorname{Im}(\partial_1)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$$

et on a $H_0(X) = \frac{C_0(X)}{\operatorname{Im}(\partial_1)} \simeq \mathbb{Z}$.

Corollaire 2.3.2. Pour X quelconque, $H_0(X) \simeq \bigoplus_{C \in \Lambda} \mathbb{Z}$, où Λ est l'ensemble des composantes connexes par arcs de X .

Preuve. $H_0(X) \simeq \bigoplus_{C \in \Lambda} H_0(C) \simeq \bigoplus_{C \in \Lambda} \mathbb{Z}$, conséquence immédiate des propositions 2.3.1 et 2.2.1.

Remarques 2.3.3.

- Si plusieurs complexes de chaines sont en jeu, on le précisera en exposant du morphisme ε . Par exemple, dans la preuve de la proposition 2.3.1 on aurait pu noter ε^X plutôt que ε .
- Dans la démonstration de la proposition 2.3.1, on n'a pas eu besoin de l'hypothèse de connexité par arcs pour démontrer que $\text{Im}(\partial_1) \subset \ker(\varepsilon)$. Ainsi, pour $X \neq \emptyset$ quelconque, l'inclusion $\text{Im}(\partial_1) \subset \ker(\varepsilon)$ fournit le complexe de chaines

$$- - \triangleright C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow \{0\}$$

On appelle ce complexe de chaines le complexe de chaines augmenté.

Le deuxième point de cette remarque induit naturellement la définition suivante.

Définition 2.3.4. On appelle groupes d'homologie réduits les groupes d'homologie correspondants au complexe de chaines précédent. Plus précisément, ce sont les groupes définis par

$$\begin{cases} \tilde{H}_n(X) = H_n(X) & \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \tilde{H}_0(X) = \frac{\ker(\varepsilon)}{\text{Im}(\partial_1)} \end{cases}$$

Remarques 2.3.5.

- On note $\tilde{\pi}_n$ les projections canoniques correspondantes aux groupes d'homologie réduits.
- En particulier, si X est connexe par arcs alors $\ker(\varepsilon) = \text{Im}(\partial_1)$ par la preuve de la proposition 2.3.1, et donc $\tilde{H}_0(X) = \{0\}$.

En fait, il y a un lien beaucoup plus intime entre $H_0(X)$ et $\tilde{H}_0(X)$. C'est ce que l'on précise dans les propositions suivantes.

Proposition 2.3.6. On a une suite exacte courte

$$\{0\} \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \xrightarrow{\varphi} H_0(X) \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \longrightarrow \{0\}$$

où $\varphi : \frac{\ker(\varepsilon)}{\text{Im}(\partial_1)} \rightarrow \frac{C_0(X)}{\text{Im}(\partial_1)}$ est le morphisme induit par l'inclusion $\ker(\varepsilon) \rightarrow C_0(X)$, et

$$\begin{aligned} \psi : H_0(X) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \pi_0(x) &\mapsto \varepsilon(x) \end{aligned}$$

est la factorisation du morphisme $\varepsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ par le sous-module $\text{Im}(\partial_1) \subset \ker(\varepsilon)$, avec $x \in C_0(X)$.

Preuve. On a quatre points à montrer.

- φ est injective : Découle de l'injectivité de l'inclusion $\ker(\varepsilon) \rightarrow C_0(X)$ et du fait que l'on quotiente par le même sous-module au départ et à l'arrivée.
- $\text{Im}(\varphi) \subset \ker(\psi)$: Soit $x \in \ker(\varepsilon)$ de sorte que $\varphi(\tilde{\pi}_0(x)) \in \text{Im}(\varphi)$. On a

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi(\tilde{\pi}_0(x)) &= \psi(\pi_0(x)) \\ &= \varepsilon(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- $\ker(\psi) \subset \text{Im}(\varphi)$: Soit $x \in C_0(X)$ tel que $\pi_0(x) \in \ker(\psi)$. Alors $\varepsilon(x) = 0$ donc $x \in \ker(\varepsilon)$. Ainsi, $\tilde{\pi}_0(x)$ a un sens et donc $\pi_0(x) = \varphi(\tilde{\pi}_0(x))$.
- ψ surjective : Découle de la surjectivité de ε .

Proposition 2.3.7. On a un isomorphisme

$$\begin{aligned} \phi : \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z} &\xrightarrow{\sim} H_0(X) \\ (x, n) &\mapsto \varphi(x) + na \end{aligned}$$

où $a \in H_0(X)$ vérifie $\psi(a) = 1$. Cet élément a existe par surjectivité de ψ .

Preuve. On va montrer que ϕ est bijective.

- ϕ est injective : Soit $(x, n) \in \ker(\phi)$. On a

$$\begin{aligned} \phi(x, n) = 0 &\iff \varphi(x) + na = 0 \\ &\iff \varphi(x) = -na \end{aligned}$$

or $\text{Im}(\varphi) = \ker(\psi)$ donc

$$\begin{aligned} \phi(x, n) = 0 &\iff -na \in \ker(\psi) \\ &\iff n\psi(a) = 0 \\ &\iff n = 0 \end{aligned}$$

Par le premier calcul on en déduit que $\varphi(x) = 0$. Comme φ est injective, on obtient $x = 0$ et donc finalement $(x, n) = 0$.

- ϕ est surjective : Soit $y \in H_0(X)$. On a que $\psi(y) = \psi(\psi(y)a)$ donc $y - \psi(y)a \in \ker(\psi) = \text{Im}(\varphi)$. Il existe donc $x \in \tilde{H}_0(X)$ tel que $y - \psi(y)a = \varphi(x)$. Ainsi, $y = \varphi(x) + \psi(y)a = \phi(x, \psi(y))$.

Remarque 2.3.8. Le morphisme ϕ n'est pas canonique, il dépend du choix de l'élément $a \in H_0(X)$, on peut donc le choisir parmi tous ceux qui satisfont $\psi(a) = 1$. Par exemple, ça peut être la classe d'un simplexe. C'est ce choix qui va donner lieu à la proposition qui suit.

Proposition 2.3.9. Soient Λ l'ensemble des composantes connexes par arcs de X et $\sigma \in \mathcal{C}(\Delta^0, X)$. On note C_σ la composante connexe par arcs de l'image de σ . Alors $\tilde{H}_0(X) \simeq \bigoplus_{\substack{C \in \Lambda \\ C \neq C_\sigma}} \mathbb{Z}$.

Preuve. On a $\psi(\pi_0(\sigma)) = 1$, donc le morphisme

$$\begin{aligned} \phi : \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z} &\rightarrow H_0(X) \\ (x, n) &\mapsto \varphi(x) + n\pi_0(\sigma) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Soit

$$\pi : H_0(X) \rightarrow \frac{\bigoplus_{C \in \Lambda} H_0(C)}{H_0(C_\sigma)}$$

la composée de l'isomorphisme $H_0(X) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{C \in \Lambda} H_0(C)$ et de la projection canonique $\bigoplus_{C \in \Lambda} H_0(C) \rightarrow \frac{\bigoplus_{C \in \Lambda} H_0(C)}{H_0(C_\sigma)}$.

On a notamment

$$\ker(\pi) = \left\{ \pi_0 \left(\sum_{\gamma \in \Sigma} n_\gamma \gamma \right) \mid \Sigma \subset \mathcal{C}(\Delta^0, C_\sigma), \# \Sigma \in \mathbb{N}, (n_\gamma)_{\gamma \in \Sigma} \in \mathbb{Z}^\Sigma \right\}$$

Montrons que $\ker(\pi \circ \phi) = \{0\} \oplus \mathbb{Z}$. On procède par double inclusions.

- $\{0\} \oplus \mathbb{Z} \subset \ker(\pi \circ \phi)$: Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a

$$\begin{aligned}\pi \circ \phi(0, n) &= \pi(n\pi_0(\sigma)) \\ &= n\pi(\pi_0(\sigma)) \\ &= 0\end{aligned}$$

- $\ker(\pi \circ \phi) \subset \{0\} \oplus \mathbb{Z}$: Soit $(x, n) \in \ker(\pi \circ \phi)$. Alors $\varphi(x) + n\pi_0(\sigma) \in \ker(\pi)$. Or $\pi_0(\sigma) \in \ker(\pi)$, donc $\varphi(x) \in \ker(\pi)$, et donc il existe $\Sigma \subset \mathcal{C}(\Delta^0, C_\sigma)$ une partie finie et $(n_\gamma)_{\gamma \in \Sigma}$ une famille d'éléments de \mathbb{Z} tels que

$$\varphi(x) = \pi_0\left(\sum_{\gamma \in \Sigma} n_\gamma \gamma\right)$$

Comme C_σ est connexe par arcs, on a que pour tout $\gamma \in \Sigma$, il existe $c_\gamma : \Delta^1 \rightarrow C_\sigma$ un chemin tel que $c_\gamma(e_0) = \sigma(e_0)$ et $c_\gamma(e_1) = \gamma(e_0)$ en considérant Δ^1 plutôt que $[0, 1]$ comme espace de départ de c_σ puisque ces espaces sont homéomorphes. Ainsi, $c_\gamma \in \mathcal{C}(\Delta^1, X)$ et $\partial_1(c_\gamma) = \gamma - \sigma$, donc $\pi_0(\gamma) = \pi_0(\sigma)$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \pi_0\left(\sum_{\gamma \in \Sigma} n_\gamma \gamma\right) \\ &= \sum_{\gamma \in \Sigma} n_\gamma \pi_0(\sigma)\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}0 &= \psi \circ \varphi(x) \\ &= \sum_{\gamma \in \Sigma} n_\gamma \psi(\pi_0(\sigma)) \\ &= \sum_{\gamma \in \Sigma} n_\gamma\end{aligned}$$

donc $\varphi(x) = \sum_{\gamma \in \Sigma} n_\gamma \pi_0(\sigma) = 0$, puis par injectivité de φ , $x = 0$. Ainsi, on a bien $(x, n) \in \{0\} \oplus \mathbb{Z}$.

Par le théorème de factorisation, $\pi \circ \phi$ induit un isomorphisme

$$\Psi : \frac{\tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}}{\{0\} \oplus \mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} \frac{\bigoplus_{C \in \Lambda} H_0(C)}{H_0(C_\sigma)}$$

Or $\tilde{H}_0(X) \simeq \frac{\tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}}{\{0\} \oplus \mathbb{Z}}$ et $\bigoplus_{\substack{C \in \Lambda \\ C \neq C_\sigma}} \mathbb{Z} \simeq \frac{\bigoplus_{C \in \Lambda} H_0(C)}{H_0(C_\sigma)}$, d'où $\tilde{H}_0(X) \simeq \bigoplus_{\substack{C \in \Lambda \\ C \neq C_\sigma}} \mathbb{Z}$.

Remarques 2.3.10.

- Comme on a $\mathbb{Z}^n \simeq \mathbb{Z}^m \implies n = m$, on en déduit que l'on peut lire le nombre de composantes connexes par arcs de X sur $\tilde{H}_0(X)$ et sur $H_0(X)$.
- Puisque $H_0(X)$ et $\tilde{H}_0(X)$ se calculent de la même façon en comptant les composantes connexes par arcs, on choisira indifféremment de parler de l'homologie ou de l'homologie réduite. Selon la situation, il sera plus commode de choisir l'une plutôt que l'autre.

3 Homologie et homotopie

On a vu que les groupes d'homologie étaient invariants par homéomorphisme. En fait, ils le sont par homotopie.

3.1 Applications de chaines et morphisme induit

On commence par étudier l'homologie de l'espace le plus simple possible.

Proposition 3.1.1. Si X est réduit à un singleton, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n(X) = \{0\}$ et $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.

Preuve. La connexité par arcs de X et la proposition 2.3.1 donnent $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons σ_n l'unique élément de $\mathcal{C}(\Delta^n, X)$. Cette unicité implique $C_n(X) \simeq \mathbb{Z}$. On a $\partial_n(\sigma_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{n-1}$ qui vaut 0 si n est impair et σ_{n-1} si n est pair. Ainsi

$$\begin{cases} \ker(\partial_{2k}) \simeq \{0\} & \text{Im}(\partial_{2k}) \simeq \mathbb{Z} & \forall k \in \mathbb{N}^* \\ \ker(\partial_{2k+1}) \simeq \mathbb{Z} & \text{Im}(\partial_{2k+1}) \simeq \{0\} & \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

et donc $H_n(X) = \frac{\{0\}}{\{0\}}$ si n est pair et $H_n(X) = \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}}$ sinon. Dans tous les cas, $H_n(X) = \{0\}$.

Remarque 3.1.2. D'après la remarque 2.3.10, on a de façon équivalente que $\tilde{H}_n(X) = \{0\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 3.1.3. Soit Y un espace topologique et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Alors pour $n \in \mathbb{N}$, f induit le morphisme

$$\begin{aligned} f_{\#}^n : C_n(X) &\rightarrow C_n(Y) \\ \sigma &\mapsto f \circ \sigma \end{aligned}$$

où σ est un élément de la base de $C_n(X)$.

Proposition 3.1.4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n^X} & C_{n-1}(X) \\ f_{\#}^n \downarrow & & \downarrow f_{\#}^{n-1} \\ C_n(Y) & \xrightarrow{\partial_n^Y} & C_{n-1}(Y) \end{array}$$

est commutatif.

Preuve. Soit σ un élément de la base de $C_n(X)$. On a

$$\begin{aligned} f_{\#}^{n-1} \circ \partial_n^X(\sigma) &= f_{\#}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]} \right) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i f \circ \sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]} \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (f \circ \sigma)|_{[e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]} \\ &= \partial_n^Y \circ f_{\#}^n(\sigma) \end{aligned}$$

Remarques 3.1.5.

- Comme à chaque fois, lorsque $n = 0$, le diagramme commute en remplaçant $C_{n-1}(X)$ et $C_{n-1}(Y)$ par $\{0\}$.
- Lorsque les carrés commutent, on dit que la famille $(f_{\#}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ définit une application de chaines partant du complexe de chaines de X vers celui de Y .

Proposition 3.1.6. L'application f induit un morphisme $f_{\star}^n : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose l'application

$$\begin{aligned} \psi_n : \ker(\partial_n^X) &\rightarrow H_n(Y) \\ x &\mapsto \pi_n^Y \circ f_{\#}^n(x) \end{aligned}$$

Il faut montrer que ψ_n est bien définie en montrant que $f_{\#}^n(\ker \partial_n^X) \subset \ker(\partial_n^Y)$. Soit $x \in \ker(\partial_n^X)$. On a

$$\begin{aligned} \partial_n^Y \circ f_{\#}^n(x) &= f_{\#}^{n-1} \circ \partial_n^X(x) \\ &= f_{\#}^{n-1}(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où ψ_n est bien définie. Pour pouvoir factoriser, on doit maintenant montrer que $\text{Im}(\partial_{n+1}^X) \subset \ker(\psi_n)$. Soit $x \in C_{n+1}(X)$.

$$\begin{aligned} \psi_n \circ \partial_{n+1}^X(x) &= \pi_n^Y \circ f_{\#}^n \circ \partial_{n+1}^X(x) \\ &= \pi_n^Y \circ \partial_{n+1}^Y \circ f_{\#}^{n+1}(x) \\ &= \pi_n^Y(\partial_{n+1}^Y \circ f_{\#}^{n+1}(x)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, ψ_n se factorise en

$$\begin{aligned} f_*^n : H_n(X) &\rightarrow H_n(Y) \\ \pi_n^X(x) &\mapsto \pi_n^Y \circ f_{\#}^n(x) \end{aligned}$$

Remarque 3.1.7. On observe que dans la preuve ci-dessus, on n'utilise à aucun moment autre chose que la propriété de morphisme des applications $f_{\#}^n$. On a donc un énoncé plus général : Soit

$$\begin{array}{ccccc} \cdots \rightarrow A_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^A} & A_n & \cdots \rightarrow & \cdots \rightarrow A_0 & \xrightarrow{\partial_0^A} & \{0\} \\ & \downarrow f_{\#}^{n+1} & \downarrow f_{\#}^n & & \downarrow f_{\#}^0 & & \\ \cdots \rightarrow B_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^B} & B_n & \cdots \rightarrow & \cdots \rightarrow B_0 & \xrightarrow{\partial_0^B} & \{0\} \end{array}$$

un diagramme commutatif. Alors il existe $f_*^n : H_n(A) \rightarrow H_n(B)$ des morphismes induits par les $f_{\#}^n$.

Voici deux propriétés assez simples concernant ce morphisme induit.

Proposition 3.1.8. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si $g : Y \rightarrow Z$ est une autre application continue, alors $(g \circ f)_*^n = g_*^n \circ f_*^n$
- Si Id_X est l'identité sur X , alors $Id_{X_*}^n = Id_{H_n(X)}$ l'identité sur $H_n(X)$.

Preuve.

- Soit $\pi_n^X(x) \in H_n(X)$ avec $x \in \ker(\partial_n^X)$.

$$\begin{aligned} g_*^n \circ f_*^n(\pi_n^X(x)) &= g_*^n \circ \pi_n^Y \circ f_{\#}^n(x) \\ &= \pi_n^Z \circ g_{\#}^n \circ f_{\#}^n(x) \\ &= \pi_n^Z \circ (g \circ f)_{\#}^n(x) \\ &= (g \circ f)_*^n(\pi_n^X(x)) \end{aligned}$$

Les deux premières égalités viennent de la définition de f_*^n et g_*^n , la dernière vient de celle de $(g \circ f)_*^n$. Justifions la troisième égalité pour conclure. Pour cela il suffit de montrer que $(g \circ f)_{\#}^n = g_{\#}^n \circ f_{\#}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons ceci sur les éléments de la base de $C_n(X)$. Soit $\sigma \in \mathcal{C}(\Delta^n, X)$.

$$\begin{aligned} (g \circ f)_{\#}^n(\sigma) &= (g \circ f) \circ \sigma \\ &= g \circ (f \circ \sigma) \\ &= g_{\#}^n \circ f_{\#}^n(\sigma) \end{aligned}$$

- On a $Id_{X\#}^n(\sigma) = Id_X \circ \sigma = \sigma = Id_{C_n(X)}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathcal{C}(\Delta^n, X)$, donc $Id_{X\#}^n = Id_{C_n(X)}$. Il suit que pour tout $\pi_n^X(x) \in H_n(X)$ avec $x \in \ker(\partial_n^X)$

$$\begin{aligned} Id_{X*}^n \circ \pi_n^X(x) &= \pi_n^X \circ Id_{X\#}^n(x) \\ &= \pi_n^X(x) \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

3.2 Homologie d'espaces homotopes

Théorème 3.2.1. Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : X \rightarrow Y$ deux applications continues qu'on suppose homotopes. Alors $f_*^n = g_*^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ l'homotopie entre f et g . Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On pose

$$\begin{aligned} \varphi_i^n : \Delta^{n+1} &\rightarrow [e_0, \dots, e_i, e_i + e_{n+1}, \dots, e_n + e_{n+1}] \subset \Delta^n \times [0, 1] \\ (t_0, \dots, t_{n+1}) &\mapsto \sum_{j=0}^i t_j e_j + \sum_{j=i}^n t_{j+1} (e_j + e_{n+1}) \end{aligned}$$

L'application continue φ_i^n est surjective, et comme $(e_0, \dots, e_i, e_i + e_{n+1}, \dots, e_n + e_{n+1})$ est une base de \mathbb{R}^{n+2} , φ_i^n est injective, donc bijective. On justifie l'inclusion $[e_0, \dots, e_i, e_i + e_{n+1}, \dots, e_n + e_{n+1}] \subset \Delta^n \times [0, 1]$: Si $(t_0, \dots, t_{n+1}) \in \Delta^{n+1}$, alors $t_i \geq 0$ et $\sum_{i=0}^{n+1} t_i = 1$. Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^i t_j e_j + \sum_{j=i}^n t_{j+1} (e_j + e_{n+1}) &= \sum_{j=0}^i t_j e_j + \sum_{j=i}^n t_{j+1} e_j + \sum_{j=i}^n t_{j+1} e_{n+1} \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} t_j e_j + (t_i + t_{i+1}) e_i + \sum_{j=i+1}^n t_{j+1} e_j + \sum_{j=i}^n t_{j+1} e_{n+1} \end{aligned}$$

et si on fait la somme des coefficients devant les e_j pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ qui sont positifs, on a exactement $\sum_{j=0}^{n+1} t_j = 1$,

et le coefficient devant e_{n+1} est $\sum_{j=i}^n t_{j+1} = \sum_{j=i+1}^{n+1} t_j \in [0, 1]$, ce qui montre l'inclusion. Par ailleurs, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, on a

- Si $j \leq i$ alors on a

$$\begin{aligned} \varphi_i^n|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{n+1}]} : \Delta^n &\rightarrow [e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_i, e_i + e_{n+1}, \dots, e_n + e_{n+1}] \\ \sum_{k=0}^n t_k e_k &\mapsto \varphi_i^n \circ (I_j^{n+1})^{-1} \left(\sum_{k=0}^n t_k e_k \right) = \sum_{k=0}^{j-1} t_k e_k + \sum_{k=j}^{i-1} t_k e_{k+1} + \sum_{k=i}^n t_k (e_k + e_{n+1}) \end{aligned}$$

- Si $j > i$ alors on a

$$\begin{aligned} \varphi_i^n|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{n+1}]} : \Delta^n &\rightarrow [e_0, \dots, e_i, e_i + e_{n+1}, \dots, (\widehat{e_{j-1} + e_{n+1}}), \dots, e_n + e_{n+1}] \\ \sum_{k=0}^n t_k e_k &\mapsto \varphi_i^n \circ (I_j^{n+1})^{-1} \left(\sum_{k=0}^n t_k e_k \right) = \sum_{k=0}^i t_k e_k + \sum_{k=i+1}^{j-1} t_k (e_{k-1} + e_{n+1}) + \sum_{k=j}^n t_k (e_k + e_{n+1}) \end{aligned}$$

qui sont encore des bijections. On va noter

$$\begin{aligned} p_1^n : \Delta^n \times [0, 1] &\rightarrow \Delta^n \\ (x, t) &\mapsto x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p_2^n : \Delta^n \times [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ (x, t) &\mapsto t \end{aligned}$$

les projections sur les différentes coordonnées. Pour $\sigma \in \mathcal{C}(\Delta^n, X)$, on pose l'application

$$\begin{aligned}\phi_i^\sigma : \Delta^{n+1} &\rightarrow X \times [0, 1] \\ x &\mapsto (\sigma \circ p_1^n \circ \varphi_i^n(x), p_2^n \circ \varphi_i^n(x))\end{aligned}$$

On pose maintenant ce qu'on appelle l'opérateur de prisme

$$\begin{aligned}P_n : C_n(X) &\rightarrow C_{n+1}(Y) \\ \sigma &\mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i (H \circ \phi_i^\sigma)\end{aligned}$$

où σ est un élément de la base. On va montrer que

$$\partial_{n+1}^Y \circ P_n = g_\#^n - f_\#^n - P_{n-1} \circ \partial_n^X$$

où par convention, $P_{-1} : \{0\} \rightarrow C_0(Y)$ est le morphisme nul. Pour cela, il suffit de montrer l'égalité sur les éléments de la base. Soit $\sigma \in \mathcal{C}(\Delta^n, X)$. Évacuons le cas $n = 0$. On cherche donc à montrer que

$$\partial_1^Y \circ P_0 = g_\#^0 - f_\#^0$$

car $\partial_0^X = 0$. On a

$$\begin{aligned}\partial_1^Y \circ P_0(\sigma) &= \sum_{i=0}^0 (-1)^i \sum_{j=0}^1 (-1)^j (H \circ \phi_i^\sigma) \big|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_1]} \\ &= (H \circ \phi_0^\sigma) \big|_{[\widehat{e_0}, e_1]} - (H \circ \phi_0^\sigma) \big|_{[e_0, \widehat{e_1}]} \\ &= g_\#^0(\sigma) - f_\#^0(\sigma)\end{aligned}$$

En effet, avec $e_0 \in \Delta^0$ l'unique élément, la dernière égalité est donnée par

$$\begin{aligned}(H \circ \phi_0^\sigma) \big|_{[\widehat{e_0}, e_1]}(e_0) &= H(\sigma \circ p_1^0 \circ \varphi_0^0 \circ (I_0^1)^{-1}(e_0), p_2^0 \circ \varphi_0^0 \circ (I_0^1)^{-1}(e_0)) \\ &= H(\sigma \circ p_1^0 \circ \varphi_0^0(e_1), p_2^0 \circ \varphi_0^0(e_1)) \\ &= H(\sigma \circ p_1^0(e_0 + e_1), p_2^0(e_0 + e_1)) \\ &= H(\sigma(e_0), 1) \\ &= g \circ \sigma(e_0) \\ &= g_\#^0(\sigma)(e_0)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(H \circ \phi_0^\sigma) \big|_{[e_0, \widehat{e_1}]}(e_0) &= H(\sigma \circ p_1^0 \circ \varphi_0^0 \circ (I_1^1)^{-1}(e_0), p_2^0 \circ \varphi_0^0 \circ (I_1^1)^{-1}(e_0)) \\ &= H(\sigma \circ p_1^0 \circ \varphi_0^0(e_0), p_2^0 \circ \varphi_0^0(e_0)) \\ &= H(\sigma \circ p_1^0(e_0), p_2^0(e_0)) \\ &= H(\sigma(e_0), 0) \\ &= f \circ \sigma(e_0) \\ &= f_\#^0(\sigma)(e_0)\end{aligned}$$

Supposons maintenant $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\partial_{n+1}^Y \circ P_n(\sigma) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j (H \circ \phi_i^\sigma) \big|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{n+1}]} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=0}^n (-1)^{i+j} (H \circ \phi_i^\sigma) \big|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{n+1}]} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \left(\sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+j} (H \circ \phi_i^\sigma) \big|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{n+1}]} + \sum_{i=j}^n (-1)^{i+j} (H \circ \phi_i^\sigma) \big|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{n+1}]} \right)\end{aligned}$$

avec les conventions habituelles sur la somme : lorsque $j = 0$ la première somme à l'intérieur de la grande vaut 0, et lorsque $j = n + 1$, la deuxième somme à l'intérieur de la grande vaut 0. Avant de poursuivre le calcul, on va analyser quelques termes qui peuvent se compenser ou que l'on peut reconnaître à ce stade du calcul. Soit $\sigma \in \mathcal{C}(\Delta^n, X)$. On a

- Pour $j = 0$, $i = 0$ et $x = \sum_{k=0}^n t_k e_k \in \Delta^n$

$$\begin{aligned}
(H \circ \phi_i^\sigma) \Big|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{n+1}]}(x) &= H \left(\sigma \circ p_1^n \circ \varphi_0^n \circ (I_0^{n+1})^{-1}(x), p_2^n \circ \varphi_0^n \circ (I_0^{n+1})^{-1}(x) \right) \\
&= H \left(\sigma \circ p_1^n \circ \varphi_0^n \left(\sum_{k=1}^{n+1} t_{k-1} e_k \right), p_2^n \circ \varphi_0^n \left(\sum_{k=1}^{n+1} t_{k-1} e_k \right) \right) \\
&= H \left(\sigma \circ p_1^n \left(\sum_{k=1}^{n+1} t_{k-1} (e_{k-1} + e_{n+1}) \right), p_2^n \left(\sum_{k=1}^{n+1} t_{k-1} (e_{k-1} + e_{n+1}) \right) \right) \\
&= H \left(\sigma \circ p_1^n \left(\sum_{k=0}^n t_k (e_k + e_{n+1}) \right), p_2^n \left(\sum_{k=0}^n t_k (e_k + e_{n+1}) \right) \right) \\
&= H \left(\sigma \left(\sum_{k=0}^n t_k e_k \right), \sum_{k=0}^n t_k \right) \\
&= H(\sigma(x), 1) \\
&= g \circ \sigma(x) \\
&= g_{\#}^n(\sigma)(x)
\end{aligned}$$

- Pour $j = n + 1$, $i = n$ et $x = \sum_{k=0}^n t_k e_k \in \Delta^n$

$$\begin{aligned}
(H \circ \phi_i^\sigma) \Big|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{n+1}]}(x) &= H \left(\sigma \circ p_1^n \circ \varphi_n^n \circ (I_{n+1}^{n+1})^{-1}(x), p_2^n \circ \varphi_n^n \circ (I_{n+1}^{n+1})^{-1}(x) \right) \\
&= H \left(\sigma \circ p_1^n \circ \varphi_n^n \left(\sum_{k=0}^n t_k e_k \right), p_2^n \circ \varphi_n^n \left(\sum_{k=0}^n t_k e_k \right) \right) \\
&= H \left(\sigma \circ p_1^n \left(\sum_{k=0}^n t_k e_k \right), p_2^n \left(\sum_{k=0}^n t_k e_k \right) \right) \\
&= H \left(\sigma \left(\sum_{k=0}^n t_k e_k \right), 0 \right) \\
&= H(\sigma(x), 0) \\
&= f \circ \sigma(x) \\
&= f_{\#}^n(\sigma)(x)
\end{aligned}$$

- Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $x = \sum_{k=0}^n t_k e_k \in \Delta^n$

– Si $i = j$, alors

$$\begin{aligned}
\varphi_i^n \circ (I_j^{n+1})^{-1}(x) &= \varphi_j^n \left(\sum_{k=0}^{j-1} t_k e_k + 0e_j + \sum_{k=j+1}^{n+1} t_{k-1} e_k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{j-1} t_k e_k + 0e_j + \sum_{k=j+1}^{n+1} t_{k-1} (e_{k-1} + e_{n+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{j-1} t_k e_k + \sum_{k=j+1}^{n+1} t_{k-1} (e_{k-1} + e_{n+1})
\end{aligned}$$

– Si $i = j - 1$, alors

$$\begin{aligned}
\varphi_i^n \circ (I_j^{n+1})^{-1}(x) &= \varphi_{j-1}^n \left(\sum_{k=0}^{j-1} t_k e_k + 0e_j + \sum_{k=j+1}^n t_{k-1} e_k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{j-1} t_k e_k + 0(e_{j-1} + e_{n+1}) + \sum_{k=j+1}^n t_{k-1} (e_{k-1} + e_{n+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{j-1} t_k e_k + \sum_{k=j+1}^n t_{k-1} (e_{k-1} + e_{n+1})
\end{aligned}$$

On remarque donc que

$$\varphi_j^n \circ (I_j^{n+1})^{-1} = \varphi_{j-1}^n \circ (I_j^{n+1})^{-1}$$

et donc pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$(-1)^{j+j} (H \circ \phi_j^\sigma) \big|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{n+1}]} + (-1)^{j+j-1} (H \circ \phi_{j-1}^\sigma) \big|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{n+1}]} = 0$$

On veut retrouver dans la somme le terme $P_{n-1} \circ \partial_n^X$. Pour cela, il suffit de voir que pour tout $j \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$ et $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$

- Si $i < j - 1$

$$\phi_i^\sigma \big|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{n+1}]} = \phi_i^{\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_{j-1}}, \dots, e_n]}}$$

- Si $i > j$

$$\phi_i^\sigma \big|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{n+1}]} = \phi_{i-1}^{\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_n]}}$$

En effet, pour $x = \sum_{k=0}^n t_k e_k \in \Delta^n$ on a

- Si $i < j - 1$

$$\begin{aligned}
p_1^n \circ \varphi_i^n \circ (I_j^{n+1})^{-1}(x) &= p_1^n \circ \varphi_i^n \circ (I_j^{n+1})^{-1} \left(\sum_{k=0}^n t_k e_k \right) \\
&= p_1^n \circ \varphi_i^n \left(\sum_{k=0}^{j-1} t_k e_k + \sum_{k=j+1}^{n+1} t_{k-1} e_k \right) \\
&= p_1^n \left(\sum_{k=0}^i t_k e_k + \sum_{k=i+1}^{j-1} t_k (e_{k-1} + e_{n+1}) + \sum_{k=j+1}^{n+1} t_{k-1} (e_{k-1} + e_{n+1}) \right) \\
&= \sum_{k=0}^i t_k e_k + \sum_{k=i}^{j-2} t_{k+1} e_k + \sum_{k=j}^n t_k e_k
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
p_2^n \circ \varphi_i^n \circ (I_j^{n+1})^{-1}(x) &= p_2^n \circ \varphi_i^n \left(\sum_{k=0}^{j-1} t_k e_k + \sum_{k=j}^n t_k e_{k+1} \right) \\
&= p_2^n \left(\sum_{k=0}^i t_k e_k + \sum_{k=i+1}^{j-1} t_k (e_{k-1} + e_{n+1}) + \sum_{k=j}^n t_k (e_k + e_{n+1}) \right) \\
&= \sum_{k=i+1}^n t_k
\end{aligned}$$

Si $i' \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $j' \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tels que $i' < j'$

$$\begin{aligned} (I_{j'}^n)^{-1} \circ p_1^{n-1} \circ \varphi_{i'}^{n-1}(x) &= (I_{j'}^n)^{-1} \circ p_1^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{i'} t_k e_k + \sum_{k=i'+1}^n t_k (e_{k-1} + e_n) \right) \\ &= (I_{j'}^n)^{-1} \left(\sum_{k=0}^{i'} t_k e_k + \sum_{k=i'}^{n-1} t_{k+1} e_k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{i'} t_k e_k + \sum_{k=i'}^{j'-1} t_{k+1} e_k + \sum_{k=j'+1}^n t_k e_k \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p_2^{n-1} \circ \varphi_{i'}^{n-1}(x) &= p_2^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{i'} t_k e_k + \sum_{k=i'+1}^n t_k (e_{k-1} + e_n) \right) \\ &= \sum_{k=i'+1}^n t_k \end{aligned}$$

Donc en prenant $i' = i$ et $j' = j-1$, on a $i' < j'$. On voit alors, d'après ce qui précède, que

$$\begin{cases} p_1^n \circ \varphi_i^n \circ (I_j^{n+1})^{-1} &= (I_{j-1}^n)^{-1} \circ p_1^{n-1} \circ \varphi_i^{n-1} \\ p_2^n \circ \varphi_i^n \circ (I_j^{n+1})^{-1} &= p_2^{n-1} \circ \varphi_i^{n-1} \end{cases}$$

et donc on a

$$\begin{aligned} \phi_i^\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{n+1}]}(x) &= \left(\sigma \circ p_1^n \circ \varphi_i^n \circ (I_j^{n+1})^{-1}(x), p_2^n \circ \varphi_i^n \circ (I_j^{n+1})^{-1}(x) \right) \\ &= \left(\sigma \circ (I_{j-1}^n)^{-1} \circ p_1^{n-1} \circ \varphi_i^{n-1}(x), p_2^{n-1} \circ \varphi_i^{n-1}(x) \right) \\ &= \phi_i^\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_{j-1}}, \dots, e_n]}(x) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\phi_i^\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{n+1}]} = \phi_i^\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_{j-1}}, \dots, e_n]}$$

- Si $i > j$

$$\begin{aligned} p_1^n \circ \varphi_i^n \circ (I_j^{n+1})^{-1}(x) &= p_1^n \circ \varphi_i^n \circ (I_j^{n+1})^{-1} \left(\sum_{k=0}^n t_k e_k \right) \\ &= p_1^n \circ \varphi_i^n \left(\sum_{k=0}^{j-1} t_k e_k + \sum_{k=j+1}^{n+1} t_{k-1} e_k \right) \\ &= p_1^n \left(\sum_{k=0}^{j-1} t_k e_k + \sum_{k=j+1}^i t_{k-1} e_k + \sum_{k=i+1}^{n+1} t_{k-1} (e_{k-1} + e_{n+1}) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{j-1} t_k e_k + \sum_{k=j+1}^i t_{k-1} e_k + \sum_{k=i}^n t_k e_k \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p_2^n \circ \varphi_i^n \circ (I_j^{n+1})^{-1}(x) &= p_2^n \circ \varphi_i^n \left(\sum_{k=0}^{j-1} t_k e_k + \sum_{k=j}^n t_k e_{k+1} \right) \\ &= p_2^n \left(\sum_{k=0}^{j-1} t_k e_k + \sum_{k=j}^{i-1} t_k e_{k+1} + \sum_{k=i}^n t_k (e_k + e_{n+1}) \right) \\ &= \sum_{k=i}^n t_k \end{aligned}$$

Si $i' \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $j' \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tels que $i' > j' - 1$

$$\begin{aligned}
(I_{j'}^n)^{-1} \circ p_1^{n-1} \circ \varphi_{i'}^{n-1}(x) &= (I_{j'}^n)^{-1} \circ p_1^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{i'} t_k e_k + \sum_{k=i'+1}^n t_k (e_{k-1} + e_n) \right) \\
&= (I_{j'}^n)^{-1} \left(\sum_{k=0}^{i'} t_k e_k + \sum_{k=i'}^{n-1} t_{k+1} e_k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{j'-1} t_k e_k + \sum_{k=j'+1}^{i'+1} t_{k-1} e_k + \sum_{k=i'+1}^n t_k e_k
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
p_2^{n-1} \circ \varphi_{i'}^{n-1}(x) &= p_2^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{i'} t_k e_k + \sum_{k=i'+1}^n t_k (e_{k-1} + e_n) \right) \\
&= \sum_{k=i'+1}^n t_k
\end{aligned}$$

Donc en prenant $i' = i - 1$ et $j' = j$, on a $i' > j' - 1$. On voit alors, d'après ce qui précède, que

$$\begin{cases} p_1^n \circ \varphi_i^n \circ (I_j^{n+1})^{-1} &= (I_j^n)^{-1} \circ p_1^{n-1} \circ \varphi_{i-1}^{n-1} \\ p_2^n \circ \varphi_i^n \circ (I_j^{n+1})^{-1} &= p_2^{n-1} \circ \varphi_{i-1}^{n-1} \end{cases}$$

et donc on a

$$\begin{aligned}
\phi_i^\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{n+1}]}(x) &= \left(\sigma \circ p_1^n \circ \varphi_i^n \circ (I_j^{n+1})^{-1}(x), p_2^n \circ \varphi_i^n \circ (I_j^{n+1})^{-1}(x) \right) \\
&= \left(\sigma \circ (I_j^n)^{-1} \circ p_1^{n-1} \circ \varphi_{i-1}^{n-1}(x), p_2^{n-1} \circ \varphi_{i-1}^{n-1}(x) \right) \\
&= \phi_{i-1}^{\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_n]}}(x)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\phi_i^\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{n+1}]} = \phi_{i-1}^{\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_n]}}$$

On peut donc réécrire la somme

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}^Y \circ P_n(\sigma) &= \sum_{j=0}^{n+1} \left(\sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+j} (H \circ \phi_i^\sigma) \Big|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{n+1}]} + \sum_{i=j}^n (-1)^{i+j} (H \circ \phi_i^\sigma) \Big|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{n+1}]} \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{j-2} (-1)^{i+j} (H \circ \phi_i^\sigma) \Big|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{n+1}]} + \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i+j} (H \circ \phi_i^\sigma) \Big|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{n+1}]} \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n (-1)^i (H \circ \phi_i^\sigma) \Big|_{[\widehat{e_0}, \dots, e_{n+1}]} + (-1)^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (H \circ \phi_i^\sigma) \Big|_{[e_0, \dots, \widehat{e_{n+1}}]} \\
&\quad + (-1)^{0+0} g_{\#}^n(\sigma) + (-1)^{n+n+1} f_{\#}^n(\sigma) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{j-2} (-1)^{i+j} H \circ \phi_i^{\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_{j-1}}, \dots, e_n]}} + \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i+j} H \circ \phi_{i-1}^{\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_n]}} \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n (-1)^i H \circ \phi_{i-1}^{\sigma|_{[\widehat{e_0}, \dots, e_n]}} + (-1)^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i H \circ \phi_i^{\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_n}]}} + g_{\#}^n(\sigma) - f_{\#}^n(\sigma) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+j+1} H \circ \phi_i^{\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_n]}} + (-1)^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i H \circ \phi_i^{\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_n}]}} \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^{n-1} (-1)^{i+1+j} H \circ \phi_i^{\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_n]}} + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} H \circ \phi_i^{\sigma|_{[\widehat{e_0}, \dots, e_n]}} \\
&\quad + g_{\#}^n(\sigma) - f_{\#}^n(\sigma) \\
&= g_{\#}^n(\sigma) - f_{\#}^n(\sigma) \\
&\quad - \left(\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+j} H \circ \phi_i^{\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_n]}} + \sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^{n-1} (-1)^{i+j} H \circ \phi_i^{\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_n]}} \right) \\
&= g_{\#}^n(\sigma) - f_{\#}^n(\sigma) - \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+j} H \circ \phi_i^{\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_n]}} \\
&= g_{\#}^n(\sigma) - f_{\#}^n(\sigma) - P_{n-1} \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j \sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_n]} \right) \\
&= g_{\#}^n(\sigma) - f_{\#}^n(\sigma) - P_{n-1} \circ \partial_n^X(\sigma)
\end{aligned}$$

Il est maintenant temps de conclure. Soit $x \in \ker(\partial_n^X)$. On veut montrer que

$$f_{\#}^n(\pi_n^X(x)) = g_{\#}^n(\pi_n^X(x))$$

i.e.

$$\pi_n^Y(f_{\#}^n(x)) = \pi_n^Y(g_{\#}^n(x))$$

i.e.

$$g_{\#}^n(x) - f_{\#}^n(x) \in \text{Im}(\partial_{n+1}^Y)$$

Or, en utilisant la formule que l'on a établie précédemment, on a

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}^Y \circ P_n(x) &= g_{\#}^n(x) - f_{\#}^n(x) - P_{n-1} \circ \partial_n^X(x) \\
&= g_{\#}^n(x) - f_{\#}^n(x) - P_{n-1}(0) \\
&= g_{\#}^n(x) - f_{\#}^n(x)
\end{aligned}$$

donc on a bien $g_{\#}^n(x) - f_{\#}^n(x) \in \text{Im}(\partial_{n+1}^Y)$, ce qu'on voulait.

Corollaire 3.2.2. Les $f_{\#}^n : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ induits par une équivalence d'homotopie $f : X \rightarrow Y$ sont des isomorphismes.

Preuve. On note $g : Y \rightarrow X$ une inverse d'homotopie pour f . Alors $g \circ f \sim Id_X$ et $f \circ g \sim Id_Y$ où \sim est la relation d'homotopie, Id_X et Id_Y sont l'identité sur X et Y respectivement. Ainsi, par le théorème 3.2.1 et par la proposition 3.1.8 on a

$$\begin{cases} Id_{H_n(X)} = Id_{X*}^n &= (g \circ f)_*^n = g_*^n \circ f_*^n \\ Id_{H_n(Y)} = Id_{Y*}^n &= (f \circ g)_*^n = f_*^n \circ g_*^n \end{cases}$$

ce qui montre bien que f_*^n est un isomorphisme.

Remarque 3.2.3. Là encore, on observe que l'on n'utilise pas la nature profonde des morphismes. Dans la démonstration du théorème 3.2.1, on se contente d'établir une égalité, puis on utilise cette égalité de façon abstraite. On a donc un fait plus général : Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux complexes de chaînes et

$$\begin{cases} f_n : A_n \rightarrow B_n \\ g_n : A_n \rightarrow B_n \\ P_n : A_n \rightarrow B_{n+1} \end{cases}$$

des morphismes tels que $\partial_{n+1}^B \circ P_n + P_{n-1} \circ \partial_n^A = g - f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, toujours avec la convention $A_{-1} = \{0\}$. Alors, $f_*^n = g_*^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ici, les f_n et les g_n jouent le rôle des $f_{\#}^n$ et des $g_{\#}^n$ respectivement, et les f_*^n et les g_*^n sont les morphismes induits grâce à la remarque 3.1.7. La famille des P_n est appelée homotopie de chaînes entre les applications de chaînes f_n et g_n . On dit aussi que les f_n et les g_n sont chaînes-homotopes. Le corollaire est similaire : Soient

$$\begin{cases} f_n : A_n \rightarrow B_n \\ g_n : B_n \rightarrow A_n \end{cases}$$

des morphismes tels que les $g_n \circ f_n$ sont chaînes-homotopes aux Id_{A_n} et les $f_n \circ g_n$ sont chaînes-homotopes aux Id_{B_n} . Alors les f_*^n et les g_*^n sont des isomorphismes. On dit que les g_n sont des inverses d'homotopie de chaînes des f_n .

4 Résultats majeurs

4.1 Algèbre homologique

Définition 4.1.1. Soient $n \in \mathbb{N}$, $A, B \subset X$ deux parties. On note $C_n(A+B)$ le sous ensemble de $C_n(X)$ défini par $C_n(A+B) = \{x+y \in C_n(X) \mid x \in C_n(A), y \in C_n(B)\}$. On note aussi $i_n : C_n(A+B) \rightarrow C_n(X)$ l'inclusion canonique et $\partial_n^{(A+B)}$ la restriction $\partial_n|_{C_n(A+B)}$. On remarque que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\partial_n^{(A+B)}$ est à valeur dans $C_{n-1}(A+B)$. En effet, pour $x \in C_n(A)$ et $y \in C_n(B)$, on a

$$\partial_n(x+y) = \partial_n(x) + \partial_n(y)$$

avec $\partial_n(x) \in C_{n-1}(A)$ et $\partial_n(y) \in C_{n-1}(B)$. Par définition de $C_{n-1}(A+B)$, $\partial_n(x+y) \in C_{n-1}(A+B)$. Pour $n=0$, $\partial_n^{(A+B)}$ est bien défini. Ainsi, les $C_n(A+B)$ munis des $\partial_n^{(A+B)}$ forment un complexe de chaînes, et on peut donc définir les groupes d'homologie $H_n(A+B)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ comme étant le quotient $\frac{\ker(\partial_n^{(A+B)})}{\text{Im}(\partial_{n+1}^{(A+B)})}$.

Lemme 4.1.2 (de subdivision barycentrique). Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A, B \subset X$ deux parties telles que $X = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$. Alors

$$\begin{aligned} i_*^n : H_n(A+B) &\xrightarrow{\sim} H_n(X) \\ \pi_n^{(A+B)}(x+y) &\mapsto \pi_n^X(x+y) \end{aligned}$$

est un isomorphisme, avec $x \in C_n(A)$ et $y \in C_n(B)$ tels que $x+y \in \ker(\partial_n^{(A+B)})$.

Preuve. On va montrer qu'il existe des morphismes $\rho_n : C_n(X) \rightarrow C_n(A+B)$ tels que les $\rho_n \circ i_n$ et les $Id_{C_n(A+B)}$ soient chaînes-homotopes et les $i_n \circ \rho_n$ et les $Id_{C_n(X)}$ soient chaînes-homotopes. De cette façon, on aura que les

$$\begin{aligned} i_*^n : H_n(A+B) &\rightarrow H_n(X) \\ \pi_n^{(A+B)}(x+y) &\mapsto \pi_n^X(x+y) \end{aligned}$$

sont des isomorphismes par la remarque 3.2.3, et donc le résultat attendu. On va procéder en trois étapes.

- Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et Y un sous-ensemble convexe de \mathbb{R}^m . On va définir la subdivision barycentrique sur des chaines particulières. Ces chaines particulières dont on va parler ici sont les chaines linéaires que l'on va tout de suite définir. On va poser $LC_n(Y)$ le sous-module de $C_n(Y)$ composé des chaines linéaires, i.e., l'ensemble $\left\{ \sum_{\sigma \in \Sigma} n_\sigma \sigma \mid \Sigma \subset \mathcal{L}(\Delta^n, Y), \# \Sigma \in \mathbb{N}, (n_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \in \mathbb{Z}^\Sigma \right\}$, où $\mathcal{L}(\Delta^n, Y)$ est l'ensemble $\{f|_{\Delta^n} \mid f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^m), f(\Delta^n) \subset Y\}$. Soit λ une telle chaine. Par linéarité, λ est complètement déterminée par les $v_i = \lambda(e_i)$ avec $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On pourra alors se permettre de parler de l'image $[v_0, \dots, v_n]$ pour désigner λ . Il va être plus commode de définir $LC_{-1}(Y)$ comme étant le module libre engendré par le simplexe vide $[\emptyset]$. On a donc une identification canonique $LC_{-1}(Y) \simeq \mathbb{Z}$ qui envoie $[\emptyset]$ sur 1. On note $\partial_{n+1}^{LC(Y)}$ les morphismes de bord restreints à $LC_{n+1}(Y)$, et $\partial_0^{LC(Y)}$ le morphisme ε restreint à $LC_0(Y)$ après l'identification $LC_{-1}(Y) \simeq \mathbb{Z}$. Notons que $\partial_n^{LC(Y)}(LC_n(Y)) \subset LC_{n-1}(Y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, les $LC_{n-1}(Y)$ munis des $\partial_{n-1}^{LC(Y)}$ forment un complexe de chaines. On définit le barycentre d'un simplexe linéaire $[v_0, \dots, v_n]$ comme étant le point $b = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} v_i$ avec $v_i \in \mathbb{R}^m$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Pour $b \in Y$, on définit l'opérateur de cône

$$\begin{aligned} C_b^{n-1} : LC_{n-1}(Y) &\rightarrow LC_n(Y) \\ [v_0, \dots, v_{n-1}] &\mapsto [b, v_0, \dots, v_{n-1}] \end{aligned}$$

Montrons que l'on a la formule $\partial_{n+1}^{LC(Y)} \circ C_b^n = Id_{LC_n(Y)} - C_b^{n-1} \circ \partial_n^{LC(Y)}$. Par linéarité de l'expression, il suffit de montrer que c'est vrai sur les éléments de la base de $LC_n(Y)$. On voit dans un premier temps que les notations employées permettent d'écrire

$$[v_0, \dots, v_n] \big|_{[e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]} = [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]$$

pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrons maintenant l'égalité annoncée. Soit $\lambda = [v_0, \dots, v_n] \in LC_n(Y)$ un élément de la base. Alors

$$\begin{aligned} \partial_{n+1}^{LC(Y)} \circ C_b^n(\lambda) &= \partial_{n+1}^{LC(Y)}([b, v_0, \dots, v_n]) \\ &= [v_0, \dots, v_n] + \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} [b, v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n] \\ &= \lambda - \sum_{i=0}^n (-1)^i C_b^{n-1}([v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]) \\ &= \lambda - C_b^{n-1} \circ \partial_n^{LC(Y)}(\lambda) \end{aligned}$$

On peut maintenant définir l'opérateur de subdivision barycentrique. On procède par récurrence en posant

$$\begin{aligned} S_{-1} : LC_{-1}(Y) &\rightarrow LC_{-1}(Y) \\ [\emptyset] &\mapsto [\emptyset] \end{aligned}$$

et, si S_{n-1} est construit, on pose

$$\begin{aligned} S_n : LC_n(Y) &\rightarrow LC_n(Y) \\ \lambda &\mapsto C_{b_\lambda}^{n-1} \circ S_{n-1} \circ \partial_n^{LC(Y)}(\lambda) \end{aligned}$$

où b_λ est l'image par λ du barycentre de Δ^n , ou de manière équivalente, le barycentre de l'image $[v_0, \dots, v_n]$. L'idée derrière cette définition, c'est de dire que la subdivision d'un n -simplexe, c'est l'ensemble des sous-simplexes dont la base est un $(n-1)$ -simplexe de la subdivision de l'une des faces du n -simplexe, et dont le sommet opposé est le barycentre du simplexe. On va maintenant montrer par récurrence que

$$\partial_n^{LC(Y)} \circ S_n = S_{n-1} \circ \partial_n^{LC(Y)}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\lambda = [v_0] \in LC_0(Y)$ un élément de la base. Alors on a

$$\begin{aligned}
S_0(\lambda) &= C_{b_\lambda}^{-1} \circ S_{-1} \circ \partial_0^{LC(Y)}(\lambda) \\
&= C_{b_\lambda}^{-1} \circ S_{-1} \circ [\emptyset] \\
&= C_{b_\lambda}^{-1} \circ [\emptyset] \\
&= [b_\lambda] \\
&= [v_0]
\end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que le barycentre d'un 0-simplexe est son seul sommet. Ainsi, $S_0 = Id_{LC_0(Y)}$ et donc $\partial_0^{LC(Y)} \circ S_0(\lambda) = [\emptyset]$. Mais comme on sait que $S_{-1} = Id_{LC_{-1}(Y)}$, on a $S_{-1} \circ \partial_0^{LC(Y)}(\lambda) = S_{-1}([\emptyset]) = [\emptyset]$. On a donc montré la propriété pour $n = 0$. Supposons que la propriété soit vraie pour $n \in \mathbb{N}$, montrons qu'elle reste vraie pour $n + 1$. Soit $\lambda \in LC_{n+1}(Y)$ un élément de la base. Alors

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}^{LC(Y)} \circ S_{n+1}(\lambda) &= \left(\partial_{n+1}^{LC(Y)} \circ C_{b_\lambda}^n \right) \circ S_n \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)}(\lambda) \\
&= \left(Id_{LC_n(Y)} - C_{b_\lambda}^{n-1} \circ \partial_n^{LC(Y)} \right) \circ S_n \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)}(\lambda) \\
&= S_n \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)}(\lambda) - C_{b_\lambda}^{n-1} \circ \left(\partial_n^{LC(Y)} \circ S_n \right) \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)}(\lambda) \\
&= S_n \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)}(\lambda) - C_{b_\lambda}^{n-1} \circ \left(S_{n-1} \circ \partial_n^{LC(Y)} \right) \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)}(\lambda) \\
&= S_n \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)}(\lambda) - C_{b_\lambda}^{n-1} \circ S_{n-1}(0) \\
&= S_n \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)}(\lambda)
\end{aligned}$$

On construit maintenant une homotopie de chaines avec la famille $T_n : LC_n(Y) \rightarrow LC_{n+1}(Y)$ définie par récurrence. On commence avec $n = -1$ en posant $T_{-1} = 0$. Supposons que l'on a construit T_{n-1} pour $n \in \mathbb{N}$. On construit

$$\begin{aligned}
T_n : LC_n(Y) &\rightarrow LC_{n+1}(Y) \\
\lambda &\mapsto C_{b_\lambda}^n \left(\lambda - T_{n-1} \circ \partial_n^{LC(Y)}(\lambda) \right)
\end{aligned}$$

Là encore, les T_{n-1} vérifient une relation, à savoir

$$\partial_{n+1}^{LC(Y)} \circ T_n + T_{n-1} \circ \partial_n^{LC(Y)} = Id_{LC_n(Y)} - S_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On montre aussi cette relation par récurrence. Pour $n = 0$, comme $T_{-1} = 0$ et $S_0 = Id_{LC_0(Y)}$, il faut montrer que $\partial_1^{LC(Y)} \circ T_0 = 0$. Soit $\lambda = [v_0] \in LC_0(Y)$ un élément de la base. On a

$$\begin{aligned}
\partial_1^{LC(Y)} \circ T_0(\lambda) &= \partial_1^{LC(Y)} \circ C_{b_\lambda}^0(\lambda) \\
&= \partial_1^{LC(Y)}([b_\lambda, v_0]) \\
&= \partial_1^{LC(Y)}([v_0, v_0]) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Supposons que cette propriété est vraie pour $n \in \mathbb{N}$, montrons qu'elle reste vraie pour $n + 1$. Soit

$\lambda \in LC_{n+1}(Y)$ un élément de la base. On a

$$\begin{aligned}
\partial_{n+2}^{LC(Y)} \circ T_{n+1}(\lambda) &= \left(\partial_{n+2}^{LC(Y)} \circ C_{b_\lambda}^{n+1} \right) \left(\lambda - T_n \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)}(\lambda) \right) \\
&= \left(Id_{LC_{n+1}(Y)} - C_{b_\lambda}^n \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)} \right) \left(\lambda - T_n \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)}(\lambda) \right) \\
&= \left(\lambda - T_n \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)}(\lambda) \right) - C_{b_\lambda}^n \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)}(\lambda) + C_{b_\lambda}^n \circ \left(\partial_{n+1}^{LC(Y)} \circ T_n \right) \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)}(\lambda) \\
&= \left(\lambda - T_n \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)}(\lambda) \right) - C_{b_\lambda}^n \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)}(\lambda) \\
&\quad + C_{b_\lambda}^n \circ \left(Id_{LC_n(Y)} - S_n - T_{n-1} \circ \partial_n^{LC(Y)} \right) \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)}(\lambda) \\
&= \lambda - T_n \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)}(\lambda) - C_{b_\lambda}^n \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)}(\lambda) + C_{b_\lambda}^n \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)}(\lambda) \\
&\quad - C_{b_\lambda}^n \circ S_n \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)}(\lambda) - C_{b_\lambda}^n \circ T_{n-1} \circ \left(\partial_n^{LC(Y)} \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)} \right)(\lambda) \\
&= \lambda - T_n \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)}(\lambda) - C_{b_\lambda}^n \circ S_n \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)}(\lambda) - C_{b_\lambda}^n \circ T_{n-1}(0) \\
&= \lambda - T_n \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)}(\lambda) - S_{n+1}(\lambda)
\end{aligned}$$

- On définit maintenant la subdivision barycentrique de manière générale. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $Y = \Delta^n$, on renomme les opérateurs S_k et T_k du point précédent en \tilde{S}_k^n et \tilde{T}_k^n respectivement. On veut construire des opérateurs plus généraux S_k et T_k en se servant des opérateurs \tilde{S}_k^n et \tilde{T}_k^n . Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$\left\{ \begin{array}{ll} S_n : C_n(X) & \rightarrow C_n(X) \\ \sigma & \mapsto \sigma_{\#}^n \circ \tilde{S}_n^n(\Delta^n) \\ \\ T_n : C_n(X) & \rightarrow C_{n+1}(X) \\ \sigma & \mapsto \sigma_{\#}^{n+1} \circ \tilde{T}_n^n(\Delta^n) \end{array} \right.$$

où Δ^n est ici vu comme le simplexe identité $[e_0, \dots, e_n]$ de $LC_n(\Delta^n)$. On a les mêmes propriétés qu'au point précédent pour les opérateurs S_n et T_n , i.e., on a

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_n^X \circ S_n &= S_{n-1} \circ \partial_n^X \\ \partial_{n+1}^X \circ T_n + T_{n-1} \circ \partial_n^X &= Id_{C_n(X)} - S_n \end{array} \right.$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Fixons un tel n et $\sigma \in C_n(X)$ un élément de la base. Montrons la première relation. On a

$$\begin{aligned}
\partial_n^X \circ S_n(\sigma) &= \partial_n^X \circ \sigma_{\#}^n \circ \tilde{S}_n^n(\Delta^n) \\
&= \sigma_{\#}^{n-1} \circ \partial_n^{\Delta^n} \circ \tilde{S}_n^n(\Delta^n) \\
&= \sigma_{\#}^{n-1} \circ \tilde{S}_{n-1}^n \circ \partial_n^{\Delta^n}(\Delta^n) \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{\#}^{n-1} \circ \tilde{S}_{n-1}^n([e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]) \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum_{i=0}^n (-1)^i \left(\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]} \right)_{\#}^{n-1} \circ \tilde{S}_{n-1}^{n-1}(\Delta^{n-1}) \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i S_{n-1} \left(\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]} \right) \\
&= S_{n-1} \circ \partial_n^X(\sigma)
\end{aligned}$$

Pour justifier $(*)$, on va montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et pour tout élément de base $\lambda \in LC_k([e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]) \subset LC_k(\Delta^n)$ on a

$$\sigma_{\#}^k \circ \tilde{S}_k^n(\lambda) = \left(\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]} \right)_{\#}^k \circ \tilde{S}_k^{n-1}(I_i^n \circ \lambda)$$

Comme on a

$$\begin{aligned} \left(\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]} \right)_{\#}^k &= (\sigma \circ (I_i^n)^{-1})_{\#}^k \\ &= \sigma_{\#}^k \circ ((I_i^n)^{-1})_{\#}^k \end{aligned}$$

il suffit de montrer qu'on a

$$\tilde{S}_k^n(\lambda) = ((I_i^n)^{-1})_{\#}^k \circ \tilde{S}_k^{n-1}(I_i^n \circ \lambda)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour $k = 0$, on a vu que $\tilde{S}_0^n = Id_{LC_0(\Delta^n)}$ et $\tilde{S}_0^{n-1} = Id_{LC_0(\Delta^{n-1})}$ donc le résultat est clair. Supposons la propriété vraie pour $k \in \mathbb{N}$, montrons qu'elle reste vraie pour $k + 1$. Soit $\lambda \in LC_{k+1}([e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n])$ un élément de la base.

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{k+1}^n(\lambda) &= C_{b_\lambda}^k \circ (\tilde{S}_k^n) \circ \partial_{k+1}^{\Delta^n}(\lambda) \\ &= C_{b_\lambda}^k \circ \left(((I_i^n)^{-1})_{\#}^k \circ \tilde{S}_k^{n-1} \circ (I_i^n)_{\#}^k \right) \circ \partial_{k+1}^{\Delta^n}(\lambda) \\ &= \left(C_{b_\lambda}^k \circ ((I_i^n)^{-1})_{\#}^k \right) \circ \tilde{S}_k^{n-1} \circ \left((I_i^n)_{\#}^k \circ \partial_{k+1}^{\Delta^n}(\lambda) \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \left(((I_i^n)^{-1})_{\#}^{k+1} \circ C_{b_{I_i^n(\lambda)}}^k \right) \circ \tilde{S}_k^{n-1} \circ \left(\partial_{k+1}^{\Delta^{n-1}} \circ (I_i^n)_{\#}^{k+1} \right)(\lambda) \\ &= ((I_i^n)^{-1})_{\#}^{k+1} \left(C_{b_{I_i^n(\lambda)}}^k \circ \tilde{S}_k^{n-1} \circ \partial_{k+1}^{\Delta^{n-1}}(I_i^n \circ \lambda) \right) \\ &= ((I_i^n)^{-1})_{\#}^{k+1} (\tilde{S}_{k+1}^{n-1}(I_i^n \circ \lambda)) \end{aligned}$$

Il y a deux parties à justifier dans $(*)$. Pour cela, il suffit de revenir aux définitions. On avait déjà vu comment justifier la deuxième partie grâce à la proposition 3.1.4. Pour justifier la première partie, il suffit de dire qu'adjoindre un sommet à un simplexe linéaire avant de d'appliquer une application linéaire revient à adjoindre l'image du sommet par cette application au simplexe linéaire à qui on a appliqué cette application. Ceci achève la démonstration de la première relation. Montrons la deuxième en gardant les mêmes n et σ . On a

$$\begin{aligned} \partial_{n+1}^X \circ T_n(\sigma) &= \partial_{n+1}^X \circ \sigma_{\#}^{n+1} \circ \tilde{T}_n^n(\Delta^n) \\ &= \sigma_{\#}^n \circ \partial_{n+1}^{\Delta^n} \circ \tilde{T}_n^n(\Delta^n) \\ &= \sigma_{\#}^n \circ (\Delta^n - \tilde{S}_n^n(\Delta^n) - \tilde{T}_{n-1}^n \circ \partial_n^{\Delta^n}(\Delta^n)) \\ &= \sigma - S_n(\sigma) - \sigma_{\#}^n \circ \tilde{T}_{n-1}^n \circ \partial_n^{\Delta^n}(\Delta^n) \\ &= \sigma - S_n(\sigma) - \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{\#}^n \circ \tilde{T}_{n-1}^n([e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sigma - S_n(\sigma) - \sum_{i=0}^n (-1)^i \left(\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]} \right)_{\#}^n \circ \tilde{T}_{n-1}^{n-1}(\Delta^{n-1}) \\ &= \sigma - S_n(\sigma) - \sum_{i=0}^n (-1)^i T_{n-1}(\sigma) \\ &= \sigma - S_n(\sigma) - T_{n-1} \circ \partial_n^X(\sigma) \end{aligned}$$

On justifie $(*)$ de la même manière que lors de la première relation.

- Soit $m \in \mathbb{N}$, on définit les opérateurs

$$\begin{aligned} D_m^n : C_n(X) &\rightarrow C_{n+1}(X) \\ x &\mapsto \sum_{i=0}^{m-1} T_n \circ S_n^{\circ i}(x) \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On va montrer que les D_m^n sont une homotopie de chaines entre les $Id_{C_n(X)}$ et les $S_n^{\circ m}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}^X \circ D_m^n + D_m^{n-1} \circ \partial_n^X &= \sum_{i=0}^{m-1} (\partial_{n+1}^X \circ T_n \circ S_n^{\circ i} + T_{n-1} \circ S_{n-1}^{\circ i} \circ \partial_n^X) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} (\partial_{n+1}^X \circ T_n \circ S_n^{\circ i} + T_{n-1} \circ \partial_n^X \circ S_n^{\circ i}) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} ((Id_{C_n(X)} - S_n) \circ S_n^{\circ i}) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} S_n^{\circ i} - S_n^{\circ i+1} \\
&= Id_{C_n(X)} - S_n^{\circ m}
\end{aligned}$$

Pour tout $\sigma \in C_n(X)$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $S_n^{\circ m}(\sigma) \in C_n(A+B)$. En effet, le diamètre de l'image des simplexes linéaires dans la décomposition de $(\tilde{S}_n^n)^{\circ m}(\Delta^n)$ tend vers 0 uniformément en les simplexes quand m tend vers $+\infty$ grâce à la proposition 5.0.2. De plus, d'après le lemme de la maille 5.0.3, il existe $\varepsilon > 0$ tel que tout sous-ensemble de diamètre plus petit que ε soit contenu dans l'un des ouverts du recouvrement ouvert $\left\{ \sigma^{-1} \left(\overset{\circ}{A} \right), \sigma^{-1} \left(\overset{\circ}{B} \right) \right\}$ de Δ^n . Ainsi, en appliquant $\sigma_{\#}^n$ à ces simplexes

linéaires, l'image des simplexes obtenus est dans l'un des deux ouverts $\overset{\circ}{A}$ ou $\overset{\circ}{B}$. Le fait que l'on parle de $(\tilde{S}_n^n)^{\circ m}(\Delta^n)$ laisse sous-entendre que l'on a $S_n^{\circ m}(\sigma) = \sigma_{\#}^n \circ (\tilde{S}_n^n)^{\circ m}(\Delta^n)$. Montrons ce résultat par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$. Pour $m = 0$, on a bien $\sigma = \sigma_{\#}^n(\Delta^n)$. Supposons le résultat vrai pour $m \in \mathbb{N}$, montrons qu'il reste vrai pour $m + 1$. On a

$$\begin{aligned}
S_n^{\circ m+1}(\sigma) &= S_n \circ (\sigma_{\#}^n \circ (\tilde{S}_n^n)^{\circ m}(\Delta^n)) \\
&\stackrel{(*)}{=} \sigma_{\#}^n \circ \tilde{S}_n^n \circ (\tilde{S}_n^n)^{\circ m}(\Delta^n) \\
&= \sigma_{\#}^n \circ (\tilde{S}_n^n)^{\circ m+1}(\Delta^n)
\end{aligned}$$

Bien entendu, pour avoir $(*)$ il faut justifier pourquoi on peut écrire

$$S_n \circ \sigma_{\#}^n = \sigma_{\#}^n \circ \tilde{S}_n^n$$

Soit $\lambda \in LC_n(\Delta^n)$ un élément de la base. On a

$$\begin{aligned}
S_n \circ \sigma_{\#}^n(\lambda) &= S_n(\sigma \circ \lambda) \\
&= (\sigma \circ \lambda)_{\#}^n \circ \tilde{S}_n^n(\Delta^n) \\
&= \sigma_{\#}^n \circ \lambda_{\#}^n \circ \tilde{S}_n^n(\Delta^n)
\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que

$$\lambda_{\#}^n \circ \tilde{S}_n^n(\Delta^n) = \tilde{S}_n^n(\lambda)$$

autrement dit, que la définition de $S_n^{\Delta^n} : C_n(\Delta^n) \rightarrow C_n(\Delta^n)$ coïncide avec la définition de \tilde{S}_n^n sur $LC_n(\Delta^n)$. Pour cela, on va montrer par récurrence sur $j \in \mathbb{N}$ que pour tout $k \geq j$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\lambda \in LC_k(\Delta^n)$ on a

$$\lambda_{\#}^j \circ \tilde{S}_j^k([e_0, \dots, e_j]) = \tilde{S}_j^n(\lambda|_{[e_0, \dots, e_j]})$$

Pour $j = 0$, $k \geq j$, $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in LC_k(\Delta^n)$, on a

$$\begin{aligned}
\lambda_{\#}^0 \circ \tilde{S}_0^k([e_0]) &= \lambda_{\#}^0([e_0]) \\
&= \lambda \circ [e_0] \\
&= \lambda|_{[e_0]} \\
&= \tilde{S}_0^n(\lambda|_{[e_0]})
\end{aligned}$$

Supposons que la propriété soit vraie pour $j \in \mathbb{N}$, montrons qu'elle reste vraie pour $j + 1$. Soient $k \geq j + 1$, $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in LC_k(\Delta^n)$. Alors on a

$$\begin{aligned}
\lambda_{\#}^{j+1} \circ \tilde{S}_{j+1}^k([e_0, \dots, e_{j+1}]) &= \left(\lambda_{\#}^{j+1} \circ C_{b_{[e_0, \dots, e_{j+1}]}}^j \right) \circ \tilde{S}_j^k \circ \partial_{j+1}^{\Delta^k}([e_0, \dots, e_{j+1}]) \\
&= \left(C_{b_{\lambda|_{[e_0, \dots, e_{j+1}]}}}^j \circ \lambda_{\#}^j \right) \circ \tilde{S}_j^k \circ \partial_{j+1}^{\Delta^k}([e_0, \dots, e_{j+1}]) \\
&= C_{b_{\lambda|_{[e_0, \dots, e_{j+1}]}}}^j \left(\sum_{i=0}^{j+1} (-1)^i \lambda_{\#}^j \circ \tilde{S}_j^k([e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_{j+1}]) \right) \\
&\stackrel{(*)}{=} C_{b_{\lambda|_{[e_0, \dots, e_{j+1}]}}}^j \left(\sum_{i=0}^{j+1} (-1)^i \left(\lambda|_{[e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_k]} \right)_{\#}^j \circ \tilde{S}_j^{k-1}([e_0, \dots, e_j]) \right) \\
&= C_{b_{\lambda|_{[e_0, \dots, e_{j+1}]}}}^j \left(\sum_{i=0}^{j+1} (-1)^i \tilde{S}_j^n \left(\lambda|_{[e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_k]}|_{[e_0, \dots, e_j]} \right) \right) \\
&= C_{b_{\lambda|_{[e_0, \dots, e_{j+1}]}}}^j \circ \tilde{S}_j^n \left(\sum_{i=0}^{j+1} (-1)^i \lambda|_{[e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_{j+1}]} \right) \\
&= C_{b_{\lambda|_{[e_0, \dots, e_{j+1}]}}}^j \circ \tilde{S}_j^n \circ \partial_{j+1}^{\Delta^n}(\lambda|_{[e_0, \dots, e_{j+1}]}) \\
&= \tilde{S}_{j+1}^n(\lambda|_{[e_0, \dots, e_{j+1}]})
\end{aligned}$$

On a déjà vu dans le point précédent la justification de $(*)$. On va maintenant définir une nouvelle famille d'opérateurs. Pour $\sigma \in C_n(X)$ un élément de la base, on pose m_{σ} le plus petit entier naturel qui vérifie $D_{m_{\sigma}}^n(\sigma) \in C_n(A+B)$. On définit alors

$$\begin{aligned}
D_n : C_n(X) &\rightarrow C_{n+1}(X) \\
\sigma &\mapsto D_{m_{\sigma}}^n(\sigma)
\end{aligned}$$

On veut construire une application de chaines $\rho_n : C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ qui vérifie

$$\partial_{n+1}^X \circ D_n + D_{n-1} \circ \partial_n^X = Id_{C_n(X)} - \rho_n$$

et telle que l'image de ρ_n soit dans $C_n(A+B)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec la convention $C_{-1}(X) = \{0\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on va alors poser tout bêtement

$$\rho_n = Id_{C_n(X)} - \partial_{n+1}^X \circ D_n - D_{n-1} \circ \partial_n^X$$

Vérifions que les ρ_n forment une application de chaines. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma \in C_{n+1}(X)$ un élément de la base. On a

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}^X \circ \rho_{n+1}(\sigma) &= \partial_{n+1}^X(\sigma) - \partial_{n+1}^X \circ \partial_{n+2}^X \circ D_{n+1}(\sigma) - \partial_{n+1}^X \circ D_n \circ \partial_{n+1}^X(\sigma) \\
&= \partial_{n+1}^X(\sigma) - \partial_{n+1}^X \circ D_n \circ \partial_{n+1}^X(\sigma) \\
&= \partial_{n+1}^X(\sigma) - \partial_{n+1}^X \circ D_n \circ \partial_{n+1}^X(\sigma) - D_{n-1} \circ \partial_n^X \circ \partial_{n+1}^X(\sigma) \\
&= \rho_n \circ \partial_{n+1}^X(\sigma)
\end{aligned}$$

Reste à voir que ρ_n est à valeur dans $C_n(A+B)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma \in C_n(X)$ un élément de la base. On a

$$\begin{aligned}
\rho_n(\sigma) &= \sigma - \partial_{n+1}^X \circ D_n(\sigma) - D_{n-1} \circ \partial_n^X(\sigma) \\
&= (\sigma - \partial_{n+1}^X \circ D_{m_{\sigma}}^n(\sigma)) - D_{n-1} \circ \partial_n^X(\sigma) \\
&= (S_n^{m_{\sigma}}(\sigma) + D_{m_{\sigma}}^{n-1} \circ \partial_n^X(\sigma)) - D_{n-1} \circ \partial_n^X(\sigma)
\end{aligned}$$

Par définition de m_σ , on a $S_n^{om_\sigma}(\sigma) \in C_n(A+B)$. Il faut étudier le terme restant.

$$D_{m_\sigma}^{n-1} \circ \partial_n^X(\sigma) - D_{n-1} \circ \partial_n^X(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \left(D_{m_\sigma}^{n-1}(\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]}) - D_{m_\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]}}^{n-1}(\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]}) \right)$$

Voyons que chaque terme dans la somme est dans $C_n(A+B)$. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On va noter σ_i le terme $\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]}$. On a

$$D_{m_\sigma}^{n-1}(\sigma_i) - D_{m_{\sigma_i}}^{n-1}(\sigma_i) = \sum_{j=m_{\sigma_i}}^{m_\sigma-1} T_{n-1} \circ S_{n-1}^{oj}(\sigma_i)$$

Comme $j \geq m_{\sigma_i}$, on a $S_{n-1}^{oj}(\sigma_i) \in C_{n-1}(A+B)$, et donc $T_{n-1} \circ S_{n-1}^{oj}(\sigma_i) \in C_n(A+B)$ puisqu'on a $T_{n-1}(C_{n-1}(A)) \subset C_n(A)$ et $T_{n-1}(C_{n-1}(B)) \subset C_n(B)$, ce qui conclut. En voyant maintenant $\rho_n : C_n(X) \rightarrow C_n(A+B)$, on a par définition

$$\partial_{n+1}^X \circ D_n + D_{n-1} \circ \partial_n^X = Id_{C_n(X)} - i_n \circ \rho_n$$

De plus, par définition, les D_n sont identiquement nuls sur les $C_n(A+B)$, car les m_σ sont nuls lorsque $\sigma \in C_n(A) \cup C_n(B)$. Ainsi on a

$$0 = Id_{C_n(X)} \circ i_n - i_n \circ \rho_n \circ i_n$$

ce qui équivaut à

$$0 = i_n \circ Id_{C_n(A+B)} - i_n \circ \rho_n \circ i_n$$

et par injectivité de i_n on a

$$0 = Id_{C_n(A+B)} - \rho_n \circ i_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, par la remarque 3.2.3 on en déduit que les ρ_n sont des inverses d'homotopie de chaines pour les i_n , ce qui conclut la preuve.

Lemme 4.1.3. Soit

$$\begin{array}{ccccc} & \{0\} & & \{0\} & & \{0\} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ - - \triangleright & A_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^A} & A_n & - - \triangleright & A_0 \xrightarrow{\partial_0^A} \{0\} \\ & \downarrow \varphi_{n+1} & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_0 \\ - - \triangleright & B_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^B} & B_n & - - \triangleright & B_0 \xrightarrow{\partial_0^B} \{0\} \\ & \downarrow \psi_{n+1} & & \downarrow \psi_n & & \downarrow \psi_0 \\ - - \triangleright & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^C} & C_n & - - \triangleright & C_0 \xrightarrow{\partial_0^C} \{0\} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \{0\} & & \{0\} & & \{0\} \end{array}$$

un diagramme commutatif tel que les colonnes soient exactes et les lignes soient des complexes de chaines. Alors il existe $\tilde{\varphi}_n$, $\tilde{\psi}_n$ et $\tilde{\partial}_{n+1}$ des morphismes pour tout $n \in \mathbb{N}$ tels que la suite longue

$$- - \triangleright H_n(A) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_n} H_n(B) \xrightarrow{\tilde{\psi}_n} H_n(C) \xrightarrow{\tilde{\partial}_n} H_{n-1}(A) - - \triangleright \quad - - \triangleright H_0(C) \longrightarrow \{0\}$$

soit exacte.

Preuve.

- Forme explicite des morphismes : On sait déjà que les φ_n et les ψ_n induisent les $\tilde{\varphi}_n$ et les $\tilde{\psi}_n$, ce sont en fait les morphismes que induits φ_*^n et ψ_*^n . Ils sont définits par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \tilde{\varphi}_n : H_n(A) & \rightarrow & H_n(B) \\ \pi_n^A(x) & \mapsto & \pi_n^B(\varphi_n(x)) \\ \tilde{\psi}_n : H_n(B) & \rightarrow & H_n(C) \\ \pi_n^B(y) & \mapsto & \pi_n^C(\psi_n(y)) \end{array} \right.$$

où $x \in \ker(\partial_n^A)$ et $y \in \ker(\partial_n^B)$. Il sera plus commode de rajouter des morphismes triviaux notés φ_{-1} et ψ_{-1} sur la colonne la plus à droite du diagramme, qui reste commutatif. Construisons maintenant les $\tilde{\partial}_n$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $c \in \ker(\partial_{n+1}^C)$. Comme ψ_{n+1} est surjective, il existe $b \in B_{n+1}$ tel que $c = \psi_{n+1}(b)$. Comme le diagramme commute, on a

$$\begin{aligned} \psi_n \circ \partial_{n+1}^B(b) &= \partial_{n+1}^C \circ \psi_{n+1}(b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc on a $\partial_{n+1}^B(b) \in \ker(\psi_n)$. Or $\ker(\psi_n) = \text{Im}(\varphi_n)$ donc il existe $a \in A_n$ tel que $\partial_{n+1}^B(b) = \varphi_n(a)$. On va voir que $a \in \ker(\partial_n^A)$. Comme φ_{n-1} est injective, on a

$$\varphi_{n-1} \circ \partial_n^A(a) = 0 \iff \partial_n^A(a) = 0$$

Or

$$\begin{aligned} \varphi_{n-1} \circ \partial_n^A(a) &= \partial_n^B \circ \varphi_n(a) \\ &= \partial_n^B \circ \partial_{n+1}^B(b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On va donc naturellement vouloir définir l'application

$$\begin{array}{lcl} \tilde{\partial}_{n+1} : H_{n+1}(C) & \rightarrow & H_n(A) \\ \pi_{n+1}^C(c) & \mapsto & \pi_n^A(a) \end{array}$$

Vérifions que cette application est bien définie. Soit c' un autre représentant de la classe de c . Il existe alors $\gamma \in C_{n+2}$ tel que $c' = c + \partial_{n+2}^C(\gamma)$. Or ψ_{n+2} est surjective donc il existe $\beta \in B_{n+2}$ tel que $\gamma = \psi_{n+2}(\beta)$. On choisit de la même manière $b' \in B_{n+1}$ tel que $c' = \psi_{n+1}(b')$. On a donc

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(b') &= \psi_{n+1}(b) + \partial_{n+2}^C \circ \psi_{n+2}(\beta) \\ &= \psi_{n+1}(b) + \psi_{n+1} \circ \partial_{n+2}^B(\beta) \end{aligned}$$

Donc $b' - b - \partial_{n+2}^B(\beta) \in \ker(\psi_{n+1}) = \text{Im}(\varphi_{n+1})$, donc il existe $\alpha \in A_{n+1}$ tel que

$$b' = b + \partial_{n+2}^B(\beta) + \varphi_{n+1}(\alpha)$$

On choisit $a' \in A_n$ tel que $\partial_{n+1}^B(b') = \varphi_n(a')$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi_n(a') &= \partial_{n+1}^B(b') \\ &= \partial_{n+1}^B(b) + \partial_{n+1}^B \circ \partial_{n+2}^B(\beta) + \partial_{n+1}^B \circ \varphi_{n+1}(\alpha) \\ &= \varphi_n(a) + 0 + \varphi_n \circ \partial_{n+1}^A(\alpha) \end{aligned}$$

Or φ_n est injective donc $a' = a + \partial_{n+1}^A(\alpha)$ donc a et a' sont dans la même classe, ce qui montre que l'application est bien définie. On remarque que dès que l'on a $a \in A_n$, $b \in B_{n+1}$ et $c \in \ker(\partial_{n+1}^C)$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} c & = & \psi_{n+1}(b) \\ \partial_{n+1}^B(b) & = & \varphi_n(a) \end{array} \right.$$

alors on a gratuitement $a \in \ker(\partial_n^A)$ et $\tilde{\partial}_{n+1}(\pi_{n+1}^C(c)) = \pi_n^A(a)$. Il reste à montrer que c'est bien un morphisme. Soient $c_1, c_2 \in \ker(\partial_{n+1}^C)$, et $b_1, b_2 \in B_{n+1}$, $a_1, a_2 \in A_n$ les éléments choisis dans le processus qui définit $\tilde{\partial}_{n+1}$. On pose $c = c_1 + c_2$, $b = b_1 + b_2$ et $a = a_1 + a_2$. Comme les applications sont des morphismes, on a

$$\begin{cases} c &= \psi_{n+1}(b) \\ \partial_{n+1}^B(b) &= \varphi_n(a) \end{cases}$$

Dans ce qui précède, on a vu implicitement que $\tilde{\partial}_{n+1}(\pi_{n+1}^C(c))$ ne dépendait ni du choix de a , ni du choix de b . Finalement on a

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_{n+1}(\pi_{n+1}^C(c)) &= \pi_n^A(a) \\ &= \pi_n^A(a_1) + \pi_n^A(a_2) \\ &= \tilde{\partial}_{n+1}(\pi_{n+1}^C(c_1)) + \tilde{\partial}_{n+1}(\pi_{n+1}^C(c_2)) \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

- La suite est exacte : Soit $n \in \mathbb{N}$.

– $\text{Im}(\tilde{\varphi}_n) \subset \ker(\tilde{\psi}_n)$: Soit $x \in \ker(\partial_n^A)$ de sorte que $\tilde{\varphi}_n(\pi_n^A(x)) \in \text{Im}(\tilde{\varphi}_n)$. Alors on a

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_n \circ \tilde{\varphi}_n(\pi_n^A(x)) &= \tilde{\psi}_n(\pi_n^B(\varphi_n(x))) \\ &= \pi_n^C(\psi_n \circ \varphi_n(x)) \\ &= \pi_n^C(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

– $\ker(\tilde{\psi}_n) \subset \text{Im}(\tilde{\varphi}_n)$: Soit $y \in \ker(\partial_n^B)$ tel que $\pi_n^B(y) \in \ker(\tilde{\psi}_n)$. On a

$$\begin{aligned} \pi_n^C(\psi_n(y)) &= \tilde{\psi}_n(\pi_n^B(y)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc il existe $\gamma \in C_{n+1}$ tel que $\psi_n(y) = \partial_{n+1}^C(\gamma)$. Or ψ_{n+1} est surjective donc il existe $\beta \in B_{n+1}$ tel que $\gamma = \psi_{n+1}(\beta)$. Ainsi

$$\begin{aligned} \psi_n(y) &= \partial_{n+1}^C(\gamma) \\ &= \partial_{n+1}^C \circ \psi_{n+1}(\beta) \\ &= \psi_n \circ \partial_{n+1}^B(\beta) \end{aligned}$$

Ainsi, $y - \partial_{n+1}^B(\beta) \in \ker(\psi_n) = \text{Im}(\varphi_n)$ donc il existe $x \in A_n$ tel que $y = \varphi_n(x) + \partial_{n+1}^B(\beta)$. On voudrait en déduire que

$$\begin{aligned} \pi_n^B(y) &= \pi_n^B(\varphi_n(x)) + \pi_n^B(\partial_{n+1}^B(\beta)) \\ &= \tilde{\varphi}_n(\pi_n^A(x)) \end{aligned}$$

Pour cela, il faut justifier que $\varphi_n(x) \in \ker(\partial_n^B)$ et $x \in \ker(\partial_n^A)$. D'abord, on a pris $y \in \ker(\partial_n^B)$ donc on a $\varphi_n(x) = y - \partial_{n+1}^B(\beta) \in \ker(\partial_n^B)$. Ensuite, on a

$$\begin{aligned} \varphi_{n-1} \circ \partial_n^A(x) &= \partial_n^B \circ \varphi_n(x) \\ &= \partial_n^B(y - \partial_{n+1}^B(\beta)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Et comme φ_{n-1} est injective, on en déduit que $\partial_n^A(x) = 0$. Ainsi, on a bien $\pi_n^B(y) = \tilde{\varphi}_n(\pi_n^A(x))$, i.e., $\pi_n^B(y) \in \text{Im}(\tilde{\varphi}_n)$ ce qu'on voulait.

- $\text{Im}(\tilde{\partial}_{n+1}) \subset \ker(\tilde{\varphi}_n)$: Soit $x \in \ker(\partial_{n+1}^C)$ de sorte que $\tilde{\partial}_{n+1} \circ \pi_{n+1}^C(x) \in \text{Im}(\tilde{\partial}_{n+1})$. Par construction de $\tilde{\partial}_{n+1}$, il existe $a \in \ker(\partial_n^A)$ et $b \in B_{n+1}$ tels que $x = \psi_{n+1}(b)$, $\partial_{n+1}^B(b) = \varphi_n(a)$ et $\tilde{\partial}_{n+1}(\pi_{n+1}^C(x)) = \pi_n^A(a)$. Ainsi on a

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_n \circ \tilde{\partial}_{n+1}(\pi_{n+1}^C(x)) &= \tilde{\varphi}_n(\pi_n^A(a)) \\ &= \pi_n^B(\varphi_n(a)) \\ &= \pi_n^B(\partial_{n+1}^B(b)) \\ &= 0\end{aligned}$$

- $\ker(\tilde{\varphi}_n) \subset \text{Im}(\tilde{\partial}_{n+1})$: Soit $y \in \ker(\partial_n^A)$ tel que $\pi_n^A(y) \in \ker(\tilde{\varphi}_n)$. On a

$$\begin{aligned}\pi_n^B(\varphi_n(y)) &= \tilde{\varphi}_n(\pi_n^A(y)) \\ &= 0\end{aligned}$$

donc il existe $b \in B_{n+1}$ tel que $\varphi_n(y) = \partial_{n+1}^B(b)$. En posant $c = \psi_{n+1}(b)$ et $a = y$ on a donc

$$\begin{cases} c &= \psi_{n+1}(b) \\ \partial_{n+1}^B(b) &= \varphi_n(a) \end{cases}$$

Ainsi, par définition de $\tilde{\partial}_{n+1}$, on a $\tilde{\partial}_{n+1}(\pi_{n+1}^C(c)) = \pi_n^A(a)$, or $\pi_n^A(a) = \pi_n^A(y)$ donc on a bien $\pi_n^A(y) \in \text{Im}(\tilde{\partial}_{n+1})$ ce qu'on voulait.

- $\text{Im}(\tilde{\psi}_{n+1}) \subset \ker(\tilde{\partial}_{n+1})$: Soit $x \in \ker(\partial_{n+1}^B)$ de sorte que $\tilde{\psi}_{n+1} \circ \pi_{n+1}^B(x) \in \text{Im}(\tilde{\psi}_{n+1})$. On pose

$$\begin{cases} a &= 0 \\ b &= x \\ c &= \psi_{n+1}(x) \end{cases}$$

Puisque $x \in \ker(\partial_{n+1}^B)$, on a bien

$$\begin{cases} c &= \psi_{n+1}(b) \\ \partial_{n+1}^B(b) &= \varphi_n(a) \end{cases}$$

et donc par définition de $\tilde{\partial}_{n+1}$ on a

$$\begin{aligned}\tilde{\partial}_{n+1} \circ \tilde{\psi}_{n+1}(\pi_{n+1}^B(x)) &= \tilde{\partial}_{n+1}(\pi_{n+1}^C(\psi_{n+1}(x))) \\ &= \pi_n^A(a) \\ &= \pi_n^A(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

- $\ker(\tilde{\partial}_{n+1}) \subset \text{Im}(\tilde{\psi}_{n+1})$: Soit $y \in \ker(\partial_{n+1}^C)$ tel que $\pi_{n+1}^C(y) \in \ker(\tilde{\partial}_{n+1})$. Posons $c = y$. Soient $a \in \ker(\partial_n^A)$ et $b \in B_{n+1}$ tels que

$$\begin{cases} c &= \psi_{n+1}(b) \\ \partial_{n+1}^B(b) &= \varphi_n(a) \end{cases}$$

de manière à ce que l'on ait $\tilde{\partial}_{n+1}(\pi_{n+1}^C(c)) = \pi_n^A(a)$. Ainsi, comme $\pi_{n+1}^C(c) \in \ker(\tilde{\partial}_{n+1})$, on a $\pi_n^A(a) = 0$ donc il existe $\alpha \in A_{n+1}$ tel que $a = \partial_{n+1}^A(\alpha)$. On peut écrire

$$\begin{aligned}\partial_{n+1}^B(b) &= \varphi_n(a) \\ &= \varphi_n \circ \partial_{n+1}^A(\alpha) \\ &= \partial_{n+1}^B \circ \varphi_{n+1}(\alpha)\end{aligned}$$

donc $b - \varphi_{n+1}(\alpha) \in \ker(\partial_{n+1}^B)$. On peut donc parler de $\pi_{n+1}^B(b - \varphi_{n+1}(\alpha))$ et écrire

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_{n+1}(\pi_{n+1}^B(b - \varphi_{n+1}(\alpha))) &= \pi_{n+1}^C(\psi_{n+1}(b - \varphi_{n+1}(\alpha))) \\ &= \pi_{n+1}^C(\psi_{n+1}(b) + \psi_{n+1} \circ \varphi_{n+1}(\alpha)) \\ &= \pi_{n+1}^C(c + 0) \\ &= \pi_{n+1}^C(y)\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\pi_{n+1}^C(y) \in \text{Im}(\tilde{\psi}_{n+1})$ ce qu'on voulait.

– $\tilde{\psi}_0$ est surjective : Soit $c \in \ker(\partial_0^C)$. On cherche $b \in \ker(\partial_0^B)$ tel que $\tilde{\psi}_0(\pi_0^B(b)) = \pi_0^C(c)$. Comme ψ_0 est surjective, il existe $b \in B_0$ tel que $\psi_0(b) = c$. Or $\ker(\partial_0^B) = B_0$ donc $b \in \ker(\partial_0^B)$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_0(\pi_0^B(b)) &= \pi_0^C(\psi_0(b)) \\ &= \pi_0^C(c)\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

4.2 Théorème de Mayer-Vietoris

Théorème 4.2.1 (Mayer-Vietoris). Soient $A, B \subset X$ deux sous-parties telles que $X = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$. Alors on a une suite exacte longue

$$\begin{aligned}-- \rightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_n} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\tilde{\psi}_n} H_n(X) \xrightarrow{\tilde{\partial}_n} H_{n-1}(A \cap B) -- \rightarrow \\ -- \rightarrow H_0(X) \longrightarrow \{0\}\end{aligned}$$

pour certains morphismes $\tilde{\varphi}_n$, $\tilde{\psi}_n$ et $\tilde{\partial}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. Montrons que pour $n \in \mathbb{N}$, on a une suite exacte courte

$$\{0\} \longrightarrow C_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi_n} C_n(A) \oplus C_n(B) \xrightarrow{\psi_n} C_n(A + B) \longrightarrow \{0\}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_n : C_n(A \cap B) & \rightarrow C_n(A) \oplus C_n(B) \\ x & \mapsto (x, -x) \\ \psi_n : C_n(A) \oplus C_n(B) & \rightarrow C_n(A + B) \\ (x, y) & \mapsto x + y \end{array} \right.$$

- φ_n est injective : Soit $x \in C_n(A \cap B)$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) = 0 &\iff (x, -x) = (0, 0) \\ &\iff x = 0\end{aligned}$$

- $\text{Im}(\varphi_n) \subset \ker(\psi_n)$: Soit $x \in C_n(A \cap B)$. Alors

$$\begin{aligned}\psi_n \circ \varphi_n(x) &= \psi_n(x, -x) \\ &= x - x \\ &= 0\end{aligned}$$

- $\ker(\psi_n) \subset \text{Im}(\varphi_n)$: Soit $(x, y) \in \ker(\psi_n)$. Alors $0 = \psi_n(x, y) = x + y$ donc $y = -x$ et donc finalement $(x, y) = (x, -x) = \varphi_n(x)$.

- ψ_n est surjective : Soit $z \in C_n(A+B)$. Par définition de $C_n(A+B)$, il existe $x \in C_n(A)$ et $y \in C_n(B)$ tels que $z = x + y$. Ainsi, $z = \psi_n(x, y) \in \text{Im}(\psi_n)$.

Par ailleurs, les $C_n(A \cap B)$, $C_n(A) \oplus C_n(B)$ et $C_n(A+B)$ munis des morphismes de bord $\partial_n^{(A \cap B)}$, $\partial_n^A \oplus \partial_n^B$ et $\partial_n^{(A+B)}$ forment des complexes de chaines. Enfin, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
& \{0\} & & \{0\} & & \{0\} \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\dots \rightarrow & C_{n+1}(A \cap B) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^{(A \cap B)}} & C_n(A \cap B) & \rightarrow \dots & C_0(A \cap B) \xrightarrow{\partial_0^{(A \cap B)}} \{0\} \\
& \downarrow \varphi_{n+1} & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_0 \\
\dots \rightarrow & C_{n+1}(A) \oplus C_{n+1}(B) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^A \oplus \partial_{n+1}^B} & C_n(A) \oplus C_n(B) & \rightarrow \dots & C_0(A) \oplus C_0(B) \xrightarrow{\partial_0^A \oplus \partial_0^B} \{0\} \\
& \downarrow \psi_{n+1} & & \downarrow \psi_n & & \downarrow \psi_0 \\
\dots \rightarrow & C_{n+1}(A+B) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^{(A+B)}} & C_n(A+B) & \rightarrow \dots & C_0(A+B) \xrightarrow{\partial_0^{(A+B)}} \{0\} \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& \{0\} & & \{0\} & & \{0\}
\end{array}$$

est commutatif. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$

- Pour $x \in C_{n+1}(A \cap B)$ on a

$$\begin{aligned}
(\partial_{n+1}^A \oplus \partial_{n+1}^B) \circ \varphi_{n+1}(x) &= (\partial_{n+1}^A(x), \partial_{n+1}^B(-x)) \\
&= (\partial_{n+1}^{(A \cap B)}(x), -\partial_{n+1}^{(A \cap B)}(x)) \\
&= \varphi_n \circ \partial_{n+1}^{(A \cap B)}(x)
\end{aligned}$$

- Pour $(x, y) \in C_{n+1}(A) \oplus C_{n+1}(B)$ on a

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}^{(A+B)} \circ \psi_{n+1}(x, y) &= \partial_{n+1}^{(A+B)}(x + y) \\
&= \partial_{n+1}^A(x) + \partial_{n+1}^B(y) \\
&= \psi_n \circ (\partial_{n+1}^A \oplus \partial_{n+1}^B)(x, y)
\end{aligned}$$

Ainsi, par le lemme 4.1.3 on a une suite exacte longue

$$\begin{aligned}
\dots \rightarrow H_n(A \cap B) &\xrightarrow{\bar{\varphi}_n} \frac{\ker(\partial_n^A \oplus \partial_n^B)}{\text{Im}(\partial_{n+1}^A \oplus \partial_{n+1}^B)} \xrightarrow{\bar{\psi}_n} H_n(A+B) \xrightarrow{\bar{\partial}_n} H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \dots \\
&\dots \rightarrow H_0(A+B) \longrightarrow \{0\}
\end{aligned}$$

Or on a un isomorphisme $\Psi_n^{(A,B)} : \frac{\ker(\partial_n^A \oplus \partial_n^B)}{\text{Im}(\partial_{n+1}^A \oplus \partial_{n+1}^B)} \xrightarrow{\sim} H_n(A) \oplus H_n(B)$, et par le lemme de subdivision barycentrique 4.1.2, on a l'isomorphisme $i_*^n : H_n(A+B) \xrightarrow{\sim} H_n(X)$. Donc on a la suite exacte longue

$$\begin{aligned}
\dots \rightarrow H_n(A \cap B) &\xrightarrow{\tilde{\varphi}_n} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\tilde{\psi}_n} H_n(X) \xrightarrow{\tilde{\partial}_n} H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \dots \\
&\dots \rightarrow H_0(X) \longrightarrow \{0\}
\end{aligned}$$

avec $\tilde{\varphi}_n = \Psi_n^{(A,B)} \circ \bar{\varphi}_n$, $\tilde{\psi}_n = i_*^n \circ \bar{\psi}_n \circ \left(\Psi_n^{(A,B)}\right)^{-1}$ et $\tilde{\partial}_n = \bar{\partial}_n \circ (i_*^n)^{-1}$, ce qu'on attendait.

Remarques 4.2.2.

- Dans la fin de cette démonstration, on affirme que la suite reste exacte après composition par des isomorphismes. En effet, par exemple

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im}(\tilde{\varphi}_n) &= \Psi_n^{(A,B)}(\operatorname{Im}(\overline{\varphi}_n)) \\
 &= \Psi_n^{(A,B)}(\ker(\overline{\psi}_n)) \\
 &= \ker\left(\overline{\psi}_n \circ \left(\Psi_n^{(A,B)}\right)^{-1}\right) \\
 &= \ker\left(i_*^n \circ \overline{\psi}_n \circ \left(\Psi_n^{(A,B)}\right)^{-1}\right) \\
 &= \ker(\tilde{\psi}_n)
 \end{aligned}$$

On montre de la même manière que $\operatorname{Im}(\tilde{\partial}_{n+1}) = \ker(\tilde{\varphi}_n)$ et $\operatorname{Im}(\tilde{\psi}_{n+1}) = \ker(\tilde{\partial}_{n+1})$. Par ailleurs, il est clair que $\tilde{\psi}_0$ est surjective.

- Le morphisme $\tilde{\partial}_{n+1}$ peut être explicité pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soient $x \in C_{n+1}(A)$ et $y \in C_{n+1}(B)$ tels que $x + y \in \ker(\partial_{n+1}^{(A+B)})$. Posons

$$\begin{cases} b &= (x, y) \\ a &= \partial_{n+1}^A(x) \end{cases}$$

On a bien $x + y = \psi_{n+1}(b)$. Or, $\partial_{n+1}^{(A+B)}(x + y) = 0$, i.e., $\partial_{n+1}^A(x) = -\partial_{n+1}^B(y) \in C_n(A \cap B)$, donc $a \in C_n(A \cap B)$, et on a $\varphi_n(a) = \partial_{n+1}^B(b)$. Ainsi, $\tilde{\partial}_{n+1}(\pi_{n+1}^{(A+B)}(x + y)) = \pi_n^{(A \cap B)}(\partial_{n+1}^A(x))$.

Corollaire 4.2.3. On a un résultat similaire concernant le complexe de chaînes augmenté en remplaçant l'extrémité droite du diagramme par

$$\begin{array}{ccccc}
 & \{0\} & & \{0\} & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 - - - & \rightarrow C_0(A \cap B) & \xrightarrow{\varepsilon^{(A \cap B)}} & \mathbb{Z} & \longrightarrow \{0\} \\
 & \downarrow \varphi_0 & & \downarrow \varphi_{\mathbb{Z}} & \\
 - - & \rightarrow C_0(A) \oplus C_0(B) & \xrightarrow{\varepsilon^A \oplus \varepsilon^B} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow \{0\} \\
 & \downarrow \psi_0 & & \downarrow \psi_{\mathbb{Z}} & \\
 - - - & \rightarrow C_0(A + B) & \xrightarrow{\varepsilon^{(A+B)}} & \mathbb{Z} & \longrightarrow \{0\} \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \{0\} & & \{0\} &
 \end{array}$$

où

$$\begin{cases} \varphi_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ \quad x \mapsto (x, -x) \\ \\ \psi_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ \quad (x, y) \mapsto x + y \end{cases}$$

Preuve. Montrer que cette nouvelle colonne est exacte se fait exactement de la même façon que les autres. Voyons que ce diagramme commute.

- $\varphi_{\mathbb{Z}} \circ \varepsilon^{(A \cap B)} = (\varepsilon^A \oplus \varepsilon^B) \circ \varphi_0$: Soit $x \in C_0(A \cap B)$. Alors

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\mathbb{Z}} \circ \varepsilon^{(A \cap B)}(x) &= (\varepsilon^A(x), -\varepsilon^B(x)) \\
 &= (\varepsilon^A \oplus \varepsilon^B)(x, -x) \\
 &= (\varepsilon^A \oplus \varepsilon^B) \circ \varphi_0(x)
 \end{aligned}$$

- $\psi_{\mathbb{Z}} \circ (\varepsilon^A \oplus \varepsilon^B) = \varepsilon^{(A+B)} \circ \psi_0$: Soient $x \in C_0(A)$ et $y \in C_0(B)$. Alors

$$\begin{aligned}\psi_{\mathbb{Z}} \circ (\varepsilon^A \oplus \varepsilon^B)(x, y) &= \varepsilon^A(x) + \varepsilon^B(y) \\ &= \varepsilon^{(A+B)}(x + y) \\ &= \varepsilon^{(A+B)} \circ \psi_0(x, y)\end{aligned}$$

Ainsi, en reprenant la démonstration précédente, on a une suite exacte longue pour les groupes d'homologie réduits

$$\begin{aligned}-\rightarrow \tilde{H}_n(A \cap B) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_n} \tilde{H}_n(A) \oplus \tilde{H}_n(B) \xrightarrow{\tilde{\psi}_n} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{\tilde{\delta}_n} \tilde{H}_{n-1}(A \cap B) - - - \rightarrow \\ - - - - - \rightarrow \tilde{H}_0(X) \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{\text{Im}(\varepsilon^{(A \cap B)})} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\text{Im}(\varepsilon^A \oplus \varepsilon^B)} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{\text{Im}(\varepsilon^{(A+B)})} \rightarrow \{0\}\end{aligned}$$

Or les morphismes $\varepsilon^{(A \cap B)}$, $\varepsilon^A \oplus \varepsilon^B$ et $\varepsilon^{(A+B)}$ sont surjectifs donc la suite se simplifie

$$\begin{aligned}- - \rightarrow \tilde{H}_n(A \cap B) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_n} \tilde{H}_n(A) \oplus \tilde{H}_n(B) \xrightarrow{\tilde{\psi}_n} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{\tilde{\delta}_n} \tilde{H}_{n-1}(A \cap B) - - - - \rightarrow \\ - - - - - \rightarrow \tilde{H}_0(X) \longrightarrow \{0\}\end{aligned}$$

Corollaire 4.2.4. Le théorème de Mayer-Vietoris se généralise si on suppose seulement que $X = A \cup B$ et qu'il existe U et V deux ouverts contenant A et B respectivement tels que A , B et $A \cap B$ sont des rétracts par déformation forte de U , V et $U \cap V$ respectivement.

Preuve. Dans la démonstration du théorème de Mayer-Vietoris, on n'utilise le fait que X est l'union de deux ouverts que pour pouvoir utiliser le lemme de subdivision barycentrique. On a donc quand même la suite exacte longue

$$\begin{aligned}- - \rightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_n} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\tilde{\psi}_n} H_n(A + B) \xrightarrow{\tilde{\delta}_n} H_{n-1}(A \cap B) - - - \rightarrow \\ - - - - - \rightarrow H_0(A + B) \longrightarrow \{0\}\end{aligned}$$

On a aussi une suite exacte avec U et V . Reste à montrer que $H_n(A + B)$ et $H_n(X)$ sont isomorphes pour pouvoir conclure. Les inclusions

$$\left\{ \begin{array}{ll} i^n : C_n(A \cap B) & \rightarrow C_n(U \cap V) \\ j^n : C_n(A) & \rightarrow C_n(U) \\ k^n : C_n(B) & \rightarrow C_n(V) \\ l^n : C_n(A + B) & \rightarrow C_n(U + V) \end{array} \right.$$

induisent les morphismes

$$\left\{ \begin{array}{ll} i_*^n : H_n(A \cap B) & \rightarrow H_n(U \cap V) \\ j_*^n \oplus k_*^n : H_n(A) \oplus H_n(B) & \rightarrow H_n(U) \oplus H_n(V) \\ l_*^n : H_n(A + B) & \rightarrow H_n(U + V) \end{array} \right.$$

- $\bar{\partial}_{n+1} \circ l_*^{n+1} = i_*^n \circ \tilde{\partial}_{n+1}$: Soient $x \in C_{n+1}(A)$ et $y \in C_{n+1}(B)$ tels que $x + y \in \ker(\partial_{n+1}^{(A+B)})$. On a

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_{n+1} \circ l_*^{n+1} \left(\pi_{n+1}^{(A+B)}(x+y) \right) &= \bar{\partial}_{n+1} \left(\pi_{n+1}^{(U+V)}(l^{n+1}(x+y)) \right) \\
&= \bar{\partial}_{n+1} \left(\pi_{n+1}^{(U+V)}(j^{n+1}(x) + k^{n+1}(y)) \right) \\
&= \pi_n^{(U \cap V)}(\partial_{n+1}^U(j^{n+1}(x))) \\
&\stackrel{(*)}{=} \pi_n^{(U \cap V)}(j^n(\partial_{n+1}^A(x))) \\
&= \pi_n^{(U \cap V)}(i^n(\partial_{n+1}^A(x))) \\
&= i_*^n \left(\pi_n^{(A \cap B)}(\partial_{n+1}^A(x)) \right) \\
&= i_*^n \circ \tilde{\partial}_{n+1} \left(\pi_{n+1}^{(A+B)}(x+y) \right)
\end{aligned}$$

On justifie $(*)$ en disant que les j^n forment une application de chaines.

Remarque 4.2.5. On peut combiner ces deux corollaires pour obtenir un théorème de Mayer-Vietoris généralisé avec les groupes d'homologie réduits.

4.3 Exemple des sphères

Il est grand temps de calculer quelques groupes d'homologie sur des espaces topologiques bien connus. L'exemple suivant est fondamental et illustre bien la puissance du théorème de Mayer-Vietoris.

Exemple 4.3.1. On note S^n la sphère unité de dimension n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On va montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\begin{cases} \tilde{H}_n(S^n) & \simeq \mathbb{Z} \\ \tilde{H}_k(S^n) & = \{0\} \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{n\} \end{cases}$$

Si $n = 0$, alors $S^0 = \{-1, 1\}$, union de deux composantes connexes par arcs, donc $\tilde{H}_0(S^0) \simeq \mathbb{Z}$ par la remarque 2.3.9, et $\tilde{H}_k(S^0) \simeq \{0\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par les propositions 3.1.1 et 2.2.1. On suppose maintenant qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie. Montrons qu'elle reste vraie pour $n + 1$. Soient $N = (0, \dots, 0, 1)$ le pôle nord et $S = (0, \dots, 0, -1)$ le pôle sud dans S^{n+1} . On va appliquer le théorème de Mayer-Vietoris version groupes d'homologie réduits avec $X = S^{n+1}$, $A = S^{n+1} \setminus \{N\}$ et $B = S^{n+1} \setminus \{S\}$ deux ouverts qui recouvrent X . La projection stéréographique par rapport au pôle nord, puis par rapport au pôle sud nous donne que A et B sont tous les deux homéomorphes à \mathbb{R}^{n+1} . Or \mathbb{R}^{n+1} a le même type d'homotopie qu'un singleton, donc d'après la proposition 3.1.1 on a $\tilde{H}_k(A) = \{0\} = \tilde{H}_k(B)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La partie $A \cap B$ se rétracte par déformation forte sur l'équateur $S^n \times \{0\}$, donc par le corollaire 3.2.2, $\tilde{H}_k(A \cap B) \simeq \tilde{H}_k(S^n)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, d'après le théorème de Mayer-Vietoris version groupes d'homologie réduits, on a la suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow \{0\} \longrightarrow \tilde{H}_k(S^{n+1}) \longrightarrow \tilde{H}_{k-1}(S^n) \longrightarrow \{0\} \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \{0\} \longrightarrow \tilde{H}_0(S^{n+1}) \longrightarrow \{0\}$$

ce qui implique $\tilde{H}_k(S^{n+1}) \simeq \tilde{H}_{k-1}(S^n)$ pour tout $k \geq 1$, et $\tilde{H}_0(S^{n+1}) = \{0\}$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{cases} \tilde{H}_{n+1}(S^{n+1}) & \simeq \tilde{H}_n(S^n) & \simeq \mathbb{Z} \\ \tilde{H}_k(S^{n+1}) & \simeq \tilde{H}_{k-1}(S^n) & = \{0\} \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{n+1\} \end{cases}$$

ce qui conclut.

4.4 Invariance du domaine

On touche au but, plus qu'une proposition avant de s'attaquer au résultat qui nous intéresse !

Proposition 4.4.1. Soient $k, n \in \mathbb{N}$. On note D^k la boule unité de \mathbb{R}^k .

- Si $h : D^k \rightarrow S^n$ est un plongement, alors $\tilde{H}_i(S^n \setminus h(D^k)) = \{0\}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.
- Si $k < n$ et si $h : S^k \rightarrow S^n$ un plongement, alors

$$\begin{cases} \tilde{H}_{n-k-1}(S^n \setminus h(S^k)) & \simeq \mathbb{Z} \\ \tilde{H}_i(S^n \setminus h(S^k)) & \simeq \{0\} \quad \forall i \in \mathbb{N} \setminus \{n-k-1\} \end{cases}$$

Preuve. On va montrer ces résultats par récurrence sur k .

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $k = 0$, alors $S^n \setminus h(D^0) \simeq \mathbb{R}^n$, d'où le résultat. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie, montrons qu'elle reste vraie pour $k+1$. Dans ce qui suit, il sera plus commode de considérer I^k plutôt que S^k , où $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Par la suite, on se permettra de faire des abus de notation du genre $h(I^k)$. On sous entendra en fait que l'on parle de $h \circ \phi(I^k)$ où $\phi : I^k \xrightarrow{\sim} S^k$ est un homéomorphisme. En fait, cet homéomorphisme ne joue pas de rôle et il peut être n'importe lequel dans la mesure où la composée d'un plongement par un homéomorphisme reste un plongement. On cherche donc à montrer que $\tilde{H}_i(S^n \setminus h(I^{k+1})) = \{0\}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Par l'absurde, supposons que ce ne soit pas le cas. Alors il existe $i \in \mathbb{N}$, $x_i \in \ker \left(\partial_i^{(S^n \setminus h(I^{k+1}))} \right)$ si $i \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 \in \ker \left(\varepsilon^{(S^n \setminus h(I^{k+1}))} \right)$ si $i = 0$, tels que $\tilde{\pi}_i^{(S^n \setminus h(I^{k+1}))}(x_i) \neq 0$. On va construire par récurrence une suite d'intervalles $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$ inclus dans I imbriqués, telle que $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} I_m = \{p\}$ pour un certain $p \in I$, et telle que $\tilde{\pi}_i^{(S^n \setminus h(I^k \times I_m))}(x_i) \neq 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Cette suite d'intervalles induira deux suites d'éléments de I , à savoir $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ croissante et $(b_m)_{m \in \mathbb{N}}$ décroissante telles que $I_m = [a_m, b_m]$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, et qui convergent vers p . On pose $I_0 = I$, et donc $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$, de sorte que $I^{k+1} = I^k \times I_0$ et $\tilde{\pi}_i^{(S^n \setminus h(I^k \times I_0))}(x_i) \neq 0$ par hypothèse. Supposons que l'on a construit I_m pour un certain $m \in \mathbb{N}$. On va utiliser le théorème de Mayer-Vietoris pour construire I_{m+1} . On définit deux ouverts

$$\begin{cases} A &= S^n \setminus h(I^k \times I_{m+1}^A) \\ B &= S^n \setminus h(I^k \times I_{m+1}^B) \end{cases}$$

avec $I_{m+1}^A = [a_m, \frac{a_m+b_m}{2}]$ et $I_{m+1}^B = [\frac{a_m+b_m}{2}, b_m]$. On a donc

$$\begin{cases} A \cap B &= S^n \setminus h(I^k \times I_m) \\ A \cup B &= S^n \setminus h(I^k \times \{\frac{a_m+b_m}{2}\}) \end{cases}$$

Par hypothèse de récurrence, on a $\tilde{H}_j(A \cup B) = \{0\}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, donc par le théorème de Mayer-Vietoris, on a une suite exacte longue pour les groupes d'homologie réduits, qui se simplifie et qui s'écrit

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \{0\} &\longrightarrow \tilde{H}_j(A \cap B) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_j} \tilde{H}_j(A) \oplus \tilde{H}_j(B) \longrightarrow \{0\} \cdots \\ &\cdots \longrightarrow \{0\} \longrightarrow \tilde{H}_0(A \cap B) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_0} \tilde{H}_0(A) \oplus \tilde{H}_0(B) \longrightarrow \{0\} \end{aligned}$$

En particulier, le morphisme

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_i : \tilde{H}_i(A \cap B) &\rightarrow \tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B) \\ \tilde{\pi}_i^{(A \cap B)}(x) &\mapsto (\tilde{\pi}_i^A(x), -\tilde{\pi}_i^B(x)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme, avec $x \in \ker(\partial_i^{(A \cap B)})$ si $i \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \ker(\varepsilon^{(A \cap B)})$ si $i = 0$. Par hypothèse, $\tilde{\pi}_i^{(A \cap B)}(x_i) \neq 0$ donc on a $\tilde{\varphi}_i(\tilde{\pi}_i^{(A \cap B)}) \neq 0$ par injectivité. Ainsi, on a $\tilde{\pi}_i^A(x_i) \neq 0$ ou $\tilde{\pi}_i^B(x_i) \neq 0$. On pose $I_{m+1} = I_{m+1}^A$ si $\tilde{\pi}_i^A(x_i) \neq 0$ et $I_{m+1} = I_{m+1}^B$ sinon. On a alors $I_{m+1} \subset I_m$, et par construction $\tilde{\pi}_i^{(S^n \setminus h(I^k \times I_{m+1}))}(x_i) \neq 0$. On a donc construit la suite d'intervalles imbriqués, et on a que la taille de I_{m+1} est deux fois plus petite que celle de I_m pour tout $m \in \mathbb{N}$, donc par compacité des intervalles, il existe $p \in I$ tel que $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} I_m = \{p\}$. Or, par hypothèse de récurrence, $\tilde{H}_i(S^n \setminus h(I^k \times \{p\})) = \{0\}$, donc il existe $y \in C_{i+1}(S^n \setminus h(I^k \times \{p\}))$ tel que $x_i = \partial_{i+1}^{(S^n \setminus h(I^k \times \{p\}))}(y)$. Mais $(S^n \setminus h(I^k \times I_m))_{m \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert de $S^n \setminus h(I^k \times \{p\})$, et comme y est une somme finie de simplexes dont l'image dans $S^n \setminus h(I^k \times \{p\})$ est compacte, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $y \in C_{i+1}(S^n \setminus h(I^k \times I_m))$. Ainsi, $x_i = \partial_{i+1}^{(S^n \setminus h(I^k \times I_m))}(y)$ et donc $\tilde{\pi}_i^{(S^n \setminus h(I^k \times I_m))}(x_i) = 0$, ce qui contredit la définition de I_m . On a donc montré que $\tilde{H}_i(S^n \setminus h(I^{k+1})) = \{0\}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, et par principe de récurrence, on a le résultat attendu.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n > k = 0$, alors il est assez facile de voir que $S^n \setminus h(S^0) \simeq S^{n-1} \times \mathbb{R}$, qui se rétracte par déformation forte sur $S^{n-1} \times \{0\}$, lui-même homéomorphe à S^{n-1} . Ainsi, d'après l'exemple 4.3.1, on a bien

$$\begin{cases} \tilde{H}_{n-1}(S^n \setminus h(S^0)) & \simeq \mathbb{Z} \\ \tilde{H}_i(S^n \setminus h(S^0)) & \simeq \{0\} \quad \forall i \in \mathbb{N} \setminus \{n-1\} \end{cases}$$

Supposons maintenant qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que si $n > k$, alors pour tout plongement $h : S^k \rightarrow S^n$ on a

$$\begin{cases} \tilde{H}_{n-k-1}(S^n \setminus h(S^k)) & \simeq \mathbb{Z} \\ \tilde{H}_i(S^n \setminus h(S^k)) & \simeq \{0\} \quad \forall i \in \mathbb{N} \setminus \{n-k-1\} \end{cases}$$

Montrons que cette propriété reste vraie pour $k+1$. On choisit $n > k+1$. On va appliquer le théorème de Mayer-Vietoris avec les ouverts

$$\begin{cases} A & = S^n \setminus h(D_+^{k+1}) \\ B & = S^n \setminus h(D_-^{k+1}) \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} D_+^{k+1} & = \{(x_0, \dots, x_{k+1}) \in S^{k+1} \mid x_{k+1} \geq 0\} \\ D_-^{k+1} & = \{(x_0, \dots, x_{k+1}) \in S^{k+1} \mid x_{k+1} \leq 0\} \end{cases}$$

qui sont tous deux homéomorphes à D^{k+1} , et s'intersectent en $S^k \times \{0\}$. De cette façon, on a

$$\begin{cases} S^n \setminus h(S^k \times \{0\}) & = \mathring{A} \cup \mathring{B} \\ S^n \setminus h(S^{k+1}) & = A \cap B \end{cases}$$

D'après le point précédent de cette proposition, les groupes d'homologie réduits de A et de B sont tous nuls. Ainsi, d'après le théorème de Mayer-Vietoris avec les groupes d'homologie réduits, on a une suite exacte longue

$$\begin{aligned} - - \triangleright \{0\} & \longrightarrow \tilde{H}_{i+1}(S^n \setminus h(S^k \times \{0\})) \xrightarrow{\tilde{\partial}_{i+1}} \tilde{H}_i(S^n \setminus h(S^{k+1})) \longrightarrow \{0\} - - \triangleright \\ & - - - - - \triangleright \{0\} \longrightarrow \tilde{H}_0(S^n \setminus h(S^k \times \{0\})) \longrightarrow \{0\} \end{aligned}$$

On en déduit que $\tilde{H}_{i+1}(S^n \setminus h(S^k \times \{0\})) \simeq \tilde{H}_i(S^n \setminus h(S^{k+1}))$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Par hypothèse on a $k+1 < n$, donc $k < n$ et $n-k-2 \geq 0$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence, et écrire

$$\begin{cases} \tilde{H}_{n-(k+1)-1}(S^n \setminus h(S^{k+1})) \simeq \tilde{H}_{n-k-1}(S^n \setminus h(S^k \times \{0\})) & \simeq \mathbb{Z} \\ \tilde{H}_i(S^n \setminus h(S^{k+1})) \simeq \tilde{H}_{i+1}(S^n \setminus h(S^k \times \{0\})) & \simeq \{0\} \quad \forall i \in \mathbb{N} \setminus \{n-k-2\} \end{cases}$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque 4.4.2. On peut affaiblir l'hypothèse selon laquelle h est un plongement en supposant simplement que c'est une injection continue car on n'utilise que le fait que l'image d'un compact par une application continue est compacte. Ceci dit, ça ne change rien puisque l'espace de départ est un compact dans les deux cas.

Théorème 4.4.3. Soient $n \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un plongement. Alors $h(U)$ est un ouvert.

Preuve. Si $n = 0$, le résultat est clair. Supposons $n > 0$. Si $U = \emptyset$, alors $h(U) = \emptyset$ qui est un ouvert. Supposons $U \neq \emptyset$. Soit $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{N\}$ un homéomorphisme avec $N = (0, \dots, 0, 1)$ le pôle nord de S^n . Montrer que $h(U)$ est ouvert est équivalent à montrer que $\phi \circ h(U)$ est ouvert dans S^n car $S^n \setminus \{N\}$ est un ouvert de S^n . Par la suite, on fera l'abus de noter h pour parler de $\phi \circ h$. Pour montrer que $h(U)$ est ouvert, il suffit de montrer que pour tout $x \in U$, $h(D^n \setminus \partial D^n)$ est ouvert dans S^n , où $D^n \subset U$ est un disque centrée en x . Fixons un tel $x \in U$, notons $D^n \subset U$ un disque centré en x . Montrons que $h(D^n \setminus \partial D^n)$ est ouvert. Le bord ∂D^n est homéomorphe à S^{n-1} , donc par la proposition 4.4.1 qui précède, $\tilde{H}_0(S^n \setminus h(\partial D^n)) \simeq \mathbb{Z}$, i.e., $S^n \setminus h(\partial D^n)$ a deux composantes connexes par arcs d'après la remarque 2.3.10. On a que $S^n \setminus h(\partial D^n)$ est l'union disjointe des deux parties $h(D^n \setminus \partial D^n)$ et $S^n \setminus h(D^n)$. Montrons que ces deux parties sont connexes par arcs. Comme h est continue et que $D^n \setminus \partial D^n$ est connexe par arcs, on en déduit que $h(D^n \setminus \partial D^n)$ est également connexe par arcs. Par la proposition 4.4.1 qui précède, on a $\tilde{H}_0(S^n \setminus h(D^n)) = \{0\}$, i.e., $S^n \setminus h(D^n)$ est connexe par arcs d'après la remarque 2.3.10. On peut maintenant montrer que $h(D^n \setminus \partial D^n)$ est ouvert. Soit $y \in h(D^n \setminus \partial D^n)$. Comme S^n est localement connexe par arcs et que $S^n \setminus h(\partial D^n)$ est ouvert, il existe $V \subset S^n \setminus h(\partial D^n)$ un voisinage ouvert connexe par arcs de y . Mais $y \in h(D^n \setminus \partial D^n)$, V est connexe par arcs et $h(D^n \setminus \partial D^n)$ est une composante connexe par arcs de $S^n \setminus h(\partial D^n)$, donc on a que $V \subset h(D^n \setminus \partial D^n)$. Ainsi, on a montré que $h(D^n \setminus \partial D^n)$ est ouvert, ce qui conclut la démonstration.

Remarque 4.4.4. Là encore, on peut supposer seulement que h est continue injective.

Corollaire 4.4.5 (Théorème d'invariance du domaine de Brouwer). Soient $m, n \in \mathbb{N}$ et $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ deux ouverts non vides. Si U et V sont homéomorphes, alors $m = n$.

Preuve. Supposons par l'absurde que $m \neq n$. Supposons par exemple que $m > n$. Notons

$$\begin{cases} \phi : U & \rightarrow V \\ i : \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R}^m \end{cases}$$

l'homéomorphisme entre U et V , et l'incusion canonique respectivement. Enfin, posons

$$\begin{aligned} h : U & \rightarrow \mathbb{R}^m \\ x & \mapsto i \circ \phi(x) \end{aligned}$$

qui est continue injective. D'après le théorème 4.4.3 qui précède, appuyé par la remarque 4.4.4, $h(U)$ est un ouvert non vide de \mathbb{R}^m . Or on a $h(U) \subset i(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}$ qui est d'intérieur vide car $m > n$, ce qui contredit le fait que $h(U)$ soit un ouvert non vide. Ainsi, l'hypothèse selon laquelle $m > n$ est fausse. Par symétrie, on montre de même qu'on ne peut pas avoir $m < n$. Ainsi, $m = n$.

5 Annexes

Proposition 5.0.1. Soient $m, n \in \mathbb{N}$, $(v_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ une famille d'éléments de \mathbb{R}^m . Alors $[v_0, \dots, v_n]$ est le plus petit convexe contenant v_i pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Preuve. Cette notion de plus petit convexe, qu'on appelle enveloppe convexe, est bien définie car l'intersection de convexes est convexe et \mathbb{R}^m est un convexe contenant ces points. Donc l'intersection de tous les convexes contenant ces points est convexe, et l'intersection n'est pas une intersection sur l'ensemble vide. On va montrer que $[v_0, \dots, v_n]$ est ce plus petit convexe.

- Pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, en prenant $t_i = 1$ et $t_j = 0$ pour $j \neq i$, on a que $v_i \in [v_0, \dots, v_n]$
- Pour $t \in [0, 1]$ et $\sum_{i=0}^n t_i v_i, \sum_{i=0}^n t'_i v_i \in [v_0, \dots, v_n]$ avec $t_i, t'_i \in [0, 1]$, on a

$$(1-t) \sum_{i=0}^n t_i v_i + t \sum_{i=0}^n t'_i v_i = \sum_{i=0}^n ((1-t)t_i + t t'_i) v_i \in [v_0, \dots, v_n]$$

car $(1-t)t_i + t t'_i \in [0, 1]$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, donc cet ensemble est bien convexe.

- Pour montrer que c'est l'enveloppe convexe de $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ on va montrer par récurrence que pour tout sous-ensemble A de \mathbb{R}^m , si on prend $a_1, a_2, \dots, a_k \in E$ l'enveloppe convexe de A , et $t_1, \dots, t_k \in [0, 1]$ tels que $\sum_{i=1}^k t_i = 1$, alors $\sum_{i=1}^k t_i a_i \in E$. Soit A une partie de \mathbb{R}^m et E son enveloppe convexe. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note H_k : "Soient $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in E^k$ et $t_1, \dots, t_k \in [0, 1]$ tels que $\sum_{i=1}^k t_i = 1$. Alors $\sum_{i=1}^k t_i a_i \in E$ ". Montrons H_k par récurrence sur k .

- Pour $k = 1$ il n'y a rien à faire.
- Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que H_k soit vraie, montrons que H_{k+1} est vraie. Soient $(a_1, a_2, \dots, a_{k+1}) \in E^{k+1}$ et $t_1, \dots, t_{k+1} \in [0, 1]$ tels que $\sum_{i=1}^{k+1} t_i = 1$. Si $t_{k+1} = 1$ on a $\sum_{i=1}^{k+1} t_i a_i = a_{k+1} \in E$, et donc on a le résultat. Sinon on a

$$\sum_{i=1}^{k+1} t_i a_i = (1 - t_{k+1}) \sum_{i=1}^k \frac{t_i}{1 - t_{k+1}} a_i + t_{k+1} a_{k+1}$$

or

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} t_i &= \sum_{i=1}^k t_i + t_{k+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{i=1}^k \frac{t_i}{1 - t_{k+1}} = 1$$

Ainsi, d'après H_k on a $\sum_{i=1}^k \frac{t_i}{1 - t_{k+1}} a_i \in E$, et comme E est convexe on a

$$(1 - t_{k+1}) \sum_{i=1}^k \frac{t_i}{1 - t_{k+1}} a_i + t_{k+1} a_{k+1} \in E$$

c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{k+1} t_i a_i \in E$. Ainsi on a montré H_{k+1} et par principe de récurrence on a bien le résultat.

Proposition 5.0.2. Soit Y un sous-ensemble convexe d'un \mathbb{R} -espace vectoriel V . Soient $n \in \mathbb{N}$ et un simplexe linéaire $\lambda = [v_0, \dots, v_n] \in LC_n(Y)$. Soit $b = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} v_i$ le barycentre de λ . Alors, chaque simplexe linéaire qui contribuent dans la décomposition de $S_n(\lambda)$ ont un diamètre au plus égal à $\frac{n}{n+1}$ fois celui de λ . Par "contribuent", on entend que leur coefficient est non nul.

Preuve. Fixons d'abord quelques notations plus commodes. On note $\text{diam}(S)$ le diamètre d'une partie $S \subset Y$. On va d'abord montrer des résultats préliminaires.

- Soient $n \in \mathbb{N}$, $\lambda = [v_0, \dots, v_n] \in LC_n(Y)$ un simplexe linéaire, $\Sigma_\lambda \subset LC_n(Y)$ l'ensemble des simplexes linéaires qui contribuent dans $S_n(\lambda)$. Alors, pour tout $\gamma = [w_0, \dots, w_n] \in \Sigma_\lambda$, il existe $I_0 \subset \dots \subset I_n = \llbracket 0, n \rrbracket$ tels que $\#I_k = k+1$ et w_{n-k} est le barycentre de $[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$ avec $\{i_0, \dots, i_k\} = I_k$ et $i_0 < \dots < i_k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On commence par le cas $n = 0$. On a $S_0([v_0]) = [v_0]$ donc le résultat est clair. Supposons que l'on a le résultat pour $n \in \mathbb{N}$, montrons qu'il reste vrai pour $n+1$. Soit $\lambda = [v_0, \dots, v_{n+1}] \in LC_{n+1}(Y)$ un simplexe linéaire. Notons b_λ le barycentre de l'image de λ et λ_i le terme $[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_{n+1}]$ pour $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$. On a

$$\begin{aligned} S_{n+1}(\lambda) &= C_{b_\lambda}^n \circ S_n \circ \partial_{n+1}^{LC(Y)}(\lambda) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i C_{b_\lambda}^n \circ S_n(\lambda_i) \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\Sigma_\lambda = \bigcup_{i=0}^{n+1} C_{b_\lambda}^n(\Sigma_{\lambda_i})$. Un élément de cet ensemble est donc de la forme $[b_\lambda, w_0, \dots, w_n]$ avec $[w_0, \dots, w_n] \in \Sigma_{\lambda_i}$ pour un certain $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$. Fixons un tel élément. Par hypothèse de récurrence, il existe $I_0 \subset \dots \subset I_n = \llbracket 0, n+1 \rrbracket \setminus \{i\}$ tels que $\#I_k = k+1$ et w_{n-k} est le barycentre de $[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$ avec $\{i_0, \dots, i_k\} = I_k$ et $i_0 < \dots < i_k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En posant $I_{n+1} = \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $w'_0 = b_\lambda$ et $w'_k = w_{k-1}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ on a bien $I_0 \subset \dots \subset I_{n+1} = \llbracket 0, n+1 \rrbracket$ tels que $\#I_k = k+1$ et w'_{n+1-k} est le barycentre de $[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$ avec $\{i_0, \dots, i_k\} = I_k$ et $i_0 < \dots < i_k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$.

- Soient $n \in \mathbb{N}$, $[v_0, \dots, v_n] \in LC_n(Y)$ un simplexe linéaire. Alors $\text{diam}([v_0, \dots, v_n]) = \max_{i,j \in \llbracket 0, n \rrbracket} |v_i - v_j|$.

Pour montrer ceci, on se donne $v, v' \in [v_0, \dots, v_n]$. Il existe des $t_i \geq 0$ tels que $\sum_{i=0}^n t_i = 1$ et $v' = \sum_{i=0}^n t_i v_i$.

On a alors

$$\begin{aligned} |v - v'| &= \left| v - \sum_{i=0}^n t_i v_i \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^n t_i v - \sum_{i=0}^n t_i v_i \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^n t_i |v - v_i| \\ &\leq \sum_{i=0}^n t_i \max_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket} |v - v_j| \\ &= \max_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket} |v - v_j| \end{aligned}$$

En itérant cette preuve avec v_j dans le rôle de v , et v dans le rôle de v' , on a $|v - v'| \leq \max_{i,j \in \llbracket 0, n \rrbracket} |v_i - v_j|$, donc $\text{diam}([v_0, \dots, v_n]) \leq \max_{i,j \in \llbracket 0, n \rrbracket} |v_i - v_j|$. L'autre inégalité étant triviale, on a le résultat.

On peut maintenant passer à la démonstration de la proposition. On procède encore par récurrence. Pour $n = 0$, on a que le diamètre de l'image d'un 0-simplexe linéaire est nul, et comme $S_0 = Id_{LC_0(Y)}$, on a le résultat. Supposons que le résultat est vrai pour $n \in \mathbb{N}$, montrons qu'il reste vrai pour $n+1$. Soit $\lambda = [v_0, \dots, v_{n+1}] \in LC_{n+1}(Y)$ un simplexe linéaire et $[w_0, \dots, w_{n+1}]$ un simplexe linéaire qui contribue dans la décomposition de $S_{n+1}(\lambda)$. D'après le deuxième résultat préliminaire, il suffit de montrer qu'on

a $|w_i - w_j| \leq \frac{n+1}{n+2} \text{diam}(\lambda)$ pour tout $i, j \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$. Fixons nous $i, j \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$. On peut supposer que $i \neq j$. Si $i, j \geq 1$, alors on peut voir dans la démonstration du premier point des préliminaires que w_i et w_j sont dans l'une des faces $\lambda_k = [v_0, \dots, \widehat{v_k}, \dots, v_{n+1}]$ de $[v_0, \dots, v_{n+1}]$ pour un certain $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, et même que $[w_1, \dots, w_{n+1}]$ apparaît dans la décomposition de $S_n(\lambda_k)$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} |w_i - w_j| &\leq \frac{n}{n+1} \text{diam}(\lambda_k) \\ &\leq \frac{n+1}{n+2} \text{diam}(\lambda) \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $w_i = b_\lambda$ ou $w_j = b_\lambda$. Par symétrie on peut supposer qu'on a $w_i = b_\lambda$. Soient $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$ vérifiant $|w_i - w_j| \leq |b_\lambda - v_k|$, et b_k le barycentre de $[v_0, \dots, \widehat{v_k}, \dots, v_{n+1}]$. On sait que ce k existe d'après le calcul dans la preuve du deuxième point des préliminaires. Alors $b_\lambda = \frac{1}{n+2} v_k + \frac{n+1}{n+2} b_k$, et on a

$$\begin{aligned} |w_i - w_j| &\leq |b_\lambda - v_k| \\ &= \frac{n+1}{n+2} |b_k - v_k| \\ &= \frac{n+1}{n+2} \text{diam}(\lambda) \end{aligned}$$

ce qui conclut la récurrence.

Lemme 5.0.3 (de la maille). Soit X un espace métrique qui vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass, par exmple un espace métrique compact. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X . Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $x \in X$, il existe $i \in I$ tel que la boule ouverte $B(x, \varepsilon) \subset U_i$.

Preuve. Par l'absurde, on construit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $B(x_n, \frac{1}{n+1})$ ne soit dans aucun ouvert du recouvrement. L'espace X vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass donc il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un $x \in X$. Mais il existe $\varepsilon > 0$ et $i \in I$ tels que $B(x, \varepsilon) \subset U_i$. De plus, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_{\varphi(n)} \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$, et $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq M$, $\frac{1}{\varphi(n)+1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $n \geq \max\{N, M\}$, $B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)+1}) \subset B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \subset U_i$ ce qui contredit la définition des $x_{\varphi(n)}$.

Lemme 5.0.4 (des cinq). Soit

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & D & \xrightarrow{l} & E \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \varepsilon \\ A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & D' & \xrightarrow{l'} & E' \end{array}$$

un diagramme commutatif avec $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$ des groupes abéliens, où les lignes sont exactes et les morphismes $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ sont des isomorphismes. Alors γ est un isomorphisme.

Preuve.

- γ est injective : Soit $c \in \ker(\gamma)$. Alors, $k' \circ \gamma(c) = 0$ ce qui équivaut à $\delta \circ k(c) = 0$, et par injectivité de δ , $k(c) = 0$. Ainsi, $c \in \ker(k) = \text{Im}(j)$, donc il existe $b \in B$ tel que $c = j(b)$. On a donc

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma(c) \\ &= \gamma \circ j(b) \\ &= j' \circ \beta(b) \end{aligned}$$

donc $\beta(b) \in \ker(j') = \text{Im}(i')$. Ainsi, il existe $a' \in A'$ tel que $i'(a') = \beta(b)$. Mais α est surjective donc il existe $a \in A$ tel que $a' = \alpha(a)$. On a donc

$$\begin{aligned} \beta(b) &= i'(a') \\ &= i' \circ \alpha(a) \\ &= \beta \circ i(a) \end{aligned}$$

Or β est injective donc on a $b = i(a)$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} c &= j(b) \\ &= j \circ i(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- γ est surjective : Soit $c' \in C'$. Comme δ est surjective, il existe $d \in D$ tel que $\delta(d) = k'(c')$. Or

$$\begin{aligned} 0 &= l' \circ k'(c') \\ &= l' \circ \delta(d) \\ &= \varepsilon \circ l(d) \end{aligned}$$

donc $l(d) = 0$ par injectivité de ε . Ainsi, $d \in \ker(l) = \text{Im}(k)$ et donc il existe $c \in C$ tel que $d = k(c)$. On a donc

$$\begin{aligned} k'(c') &= \delta(d) \\ &= \delta \circ k(c) \\ &= k' \circ \gamma(c) \end{aligned}$$

donc $c' - \gamma(c) \in \ker(k') = \text{Im}(j')$. Donc il existe $b' \in B'$ tel que $c' - \gamma(c) = j'(b')$. Comme β est surjective, il existe $b \in B$ tel que $b' = \beta(b)$. On a donc

$$\begin{aligned} \gamma(j(b) + c) &= \gamma \circ j(b) + \gamma(c) \\ &= j' \circ \beta(b) + \gamma(c) \\ &= j'(b') + \gamma(c) \\ &= c' - \gamma(c) + \gamma(c) \\ &= c' \end{aligned}$$