Potenze nel dominio dei fasori e teoremi sulle potenze fasoriali

Prof. Simone Fiori

s.fiori@staff.univpm.it

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione (DII)

Università Politecnica delle Marche

Argomenti

- Proprietà utili dei numeri complessi
- Potenze nel dominio dei fasori
- Potenze fasoriali per i bipoli e per le reti 2-porte elementari
- Teorema di Boucherot
- Schema tipico di generazione-trasferimento-utilizzo di energia elettrica e perdite nella trasmissione di energia
- Teorema del massimo trasferimento di potenza attiva
- Classificazione delle impedenza e condizione di risonanza
- Rifasamento delle impedenze ohmico-induttive

Proprietà utili dei numeri complessi

Ricordiamo le seguenti proprietà dei numeri complessi:

- Il modulo del numero complesso $z \in \mathbb{C}$ si indica con $|z|$.
- Se $z \in \mathbb{C}$, vale $\frac{1}{2}(z + z^\star) = \Re\{z\}$.
- Se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, vale: $\Re\{z_1 \cdot z_2\} = \Re\{z_1\}\Re\{z_2\} - \Im\{z_1\}\Im\{z_2\}$.
- Se $x \in \mathbb{R}$, valgono: $\Re\{e^{Jx}\} = \cos x$, $\Im\{e^{Jx}\} = \sin x$.
- Se $z \in \mathbb{C}$, vale $z \cdot z^\star = |z|^2$.
- Se $z \in \mathbb{C}$, vale $\frac{1}{2}(z - z^\star) = J\Im\{z\}$.
- Se $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, si definisce *trasposta hermitiana* $\mathbf{z}^{\mathrm{H}} = (\mathbf{z}^\star)^\top$.

Condizioni operative per l’utilizzo del metodo dei fasori

Ricordiamo le seguenti ipotesi:

- Il circuito è formato da componenti lineari tempo-invarianti e da **un** generatore indipendente (di tensione o di corrente).
- La grandezza impressa dal generatore indipendente è di tipo *sinusoidale* con pulsazione ω.

Sotto queste ipotesi, la tensione elettrica $v(t)$ e la corrente elettrica $i(t)$ in ogni elemento del circuito sono del tipo:

$$\begin{cases} v(t) = V\cos(\omega t + \varphi_v), \\ i(t) = I\cos(\omega t + \varphi_i). \end{cases}$$

Espressione delle grandezze in termini fasoriali

Si definiscono i fasori associati alla tensione e alla corrente elettrica in un elemento (bipolo, porta elettrica) del circuito:

$$\begin{cases} \dot{V} = Ve^{J\varphi_v}, \\ \dot{I} = Ie^{J\varphi_i}. \end{cases}$$

La tensione elettrica $v(t)$ e la corrente elettrica $i(t)$ in ogni elemento del circuito si possono esprimere come:

$$\begin{cases} v(t) & = & \frac{1}{2}\dot{V}e^{J\omega t} + \frac{1}{2}\dot{V}^{\star}e^{-J\omega t}, \\ i(t) & = & \frac{1}{2}\dot{I}e^{J\omega t} + \frac{1}{2}\dot{I}^{\star}e^{-J\omega t}. \end{cases}$$

Espressione della potenza istantanea

La potenza istantanea si calcola con:

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) \\ &= \left(\frac{1}{2}\dot{V}e^{J\omega t} + \frac{1}{2}\dot{V}^\star e^{-J\omega t}\right)\left(\frac{1}{2}\dot{I}e^{J\omega t} + \frac{1}{2}\dot{I}^\star e^{-J\omega t}\right) \\ &= \frac{1}{4}\dot{V}\dot{I}^\star + \frac{1}{4}\dot{V}^\star\dot{I} + \frac{1}{4}\dot{V}\dot{I}e^{2J\omega t} + \frac{1}{4}\dot{V}^\star\dot{I}^\star e^{-2J\omega t} \\ &= \frac{1}{2}\Re\{\dot{V}\dot{I}^\star\} + \frac{1}{2}\Re\{\dot{V}\dot{I}e^{2J\omega t}\}. \end{aligned}$$

La potenza istantanea si compone, quindi, di due termini: un termine costante (rispetto al tempo) e un termine variabile.

Termini della potenza istantanea

La potenza istantanea si può, quindi, esprimere come:

$$p(t) = P_a + p_v(t),$$

dove:

- Il termine $P_a = \frac{1}{2}\Re\{\dot{V}\dot{I}^\star\}$ si chiama *potenza attiva* e si misura in Watt (W).
- Il termine $p_v(t) = \frac{1}{2}\Re\{\dot{V}\dot{I}e^{2J\omega t}\}$ si chiama *parte variabile della potenza istantanea* e si misura in Watt (W).

Parte costante della potenza istantanea

Sulla parte costante della potenza istantanea si possono svolgere le seguenti considerazioni:

- Essa rappresenta un trasferimento di energia di tipo **irreversibile** verso l'elemento del circuito su cui è calcolata.
- Essa rappresenta anche il *valore medio* della potenza istantanea scambiata dall'elemento del circuito su cui è calcolata. Infatti, detto $T = \frac{\pi}{\omega}$ il periodo della funzione $p(t)$, risulta:

$$\langle p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \ldots = P_a.$$

Parte variabile della potenza istantanea

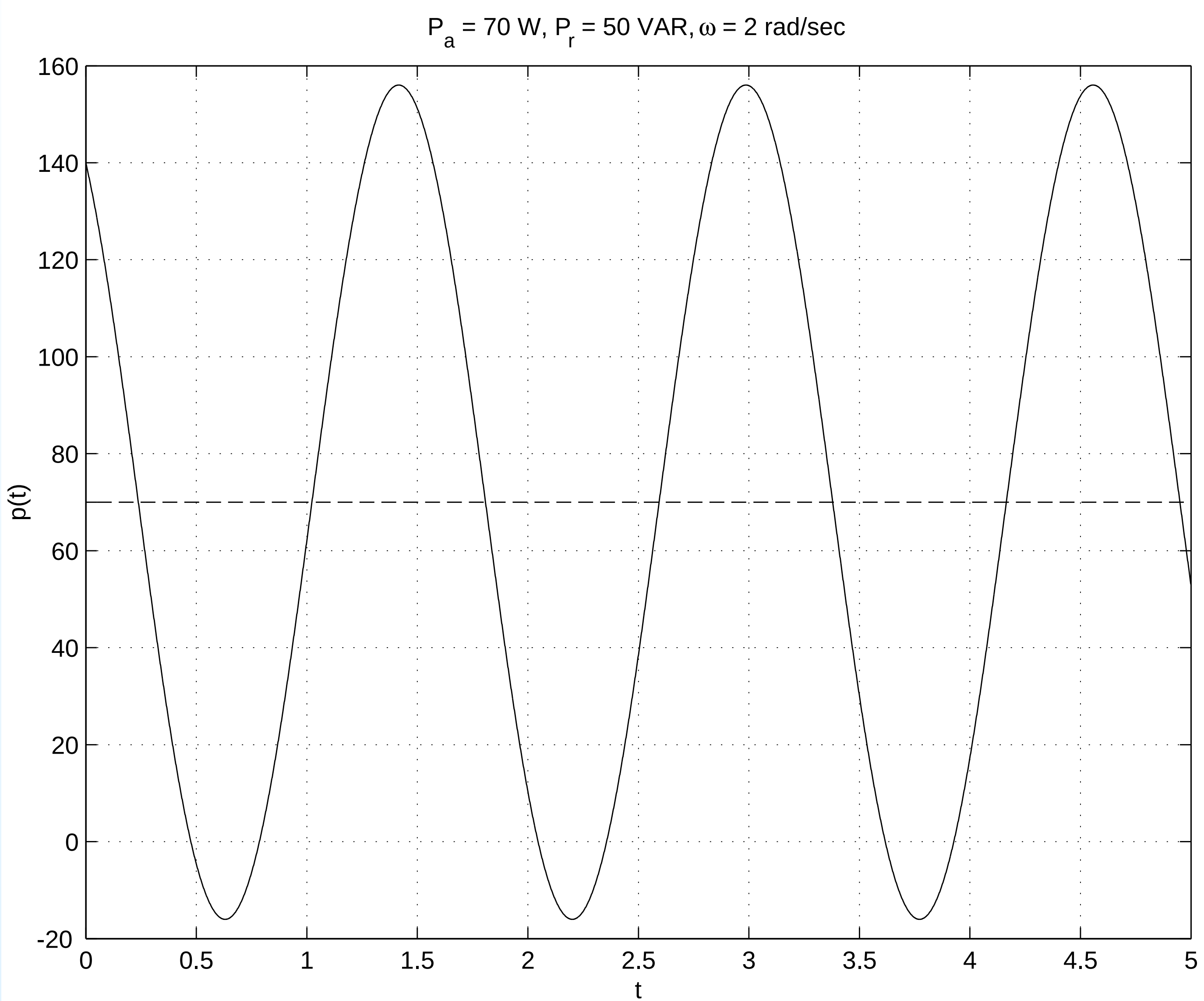
La parte variabile della potenza istantanea è stata definita come:

$$p_v(t) = \frac{1}{2}\Re\{\dot{V}\dot{I}e^{2J\omega t}\}.$$

Sostituendo le espressioni esplicite dei fasori, ovvero $\dot{V} = Ve^{J\varphi_v}$ e $\dot{I} = Ie^{J\varphi_i}$, si ottiene:

$$\begin{aligned} p_v(t) &= \frac{1}{2}\Re\{VIe^{J\varphi_v}e^{J\varphi_i}e^{2J\omega t}\} \\ &= \frac{1}{2}VI\Re\{e^{J(2\omega t+\varphi_v+\varphi_i)}\} \\ &= \frac{1}{2}VI\cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i). \end{aligned}$$

Rappresentazione grafica



Potenza complessa

Conviene definire una nuova grandezza fasoriale, chiamata **potenza complessa**:

$$\boxed{\dot{P}_c = \frac{1}{2}\dot{V}\dot{I}^\star}$$

La potenza complessa si misura in Voltampére (*VA*). Essendo un numero complesso, essa possiede una parte reale e una parte immaginaria. La parte reale è la potenza attiva:

$$\dot{P}_c = P_a + JP_r,$$

mentre la parte immaginaria si chiama **potenza reattiva** e si misura in Voltampére reattivi (*VAR*).

Carattere fasoriale della potenza complessa

Si noti che la potenza complessa $\dot{P}_c$ ha effettivamente carattere fasoriale, perché ad essa è associata una grandezza sinusoidale (ovvero $p_v(t)$).

Potenza istantanea e potenza complessa

Si cerca una espressione della parte variabile della potenza istantanea in funzione della potenza attiva e della potenza reattiva:

$$\begin{aligned}
p_v(t) &= \frac{1}{2}\Re\{\dot{V} I e^{J\varphi_i} e^{2J\omega t}\} \\
&= \frac{1}{2}\Re\{\dot{V} I e^{-J\varphi_i} e^{J\varphi_i} e^{2J\omega t} e^{J\varphi_i}\} \\
&= \frac{1}{2}\Re\{\dot{V} \dot{I}^\star e^{2J(\omega t+\varphi_i)}\} \\
&= \Re\{\dot{P}_c e^{2J(\omega t+\varphi_i)}\} \\
&= P_a \cos(2\omega t + 2\varphi_i) - P_r \sin(2\omega t + 2\varphi_i).
\end{aligned}$$

Potenza istantanea e potenza complessa (2)

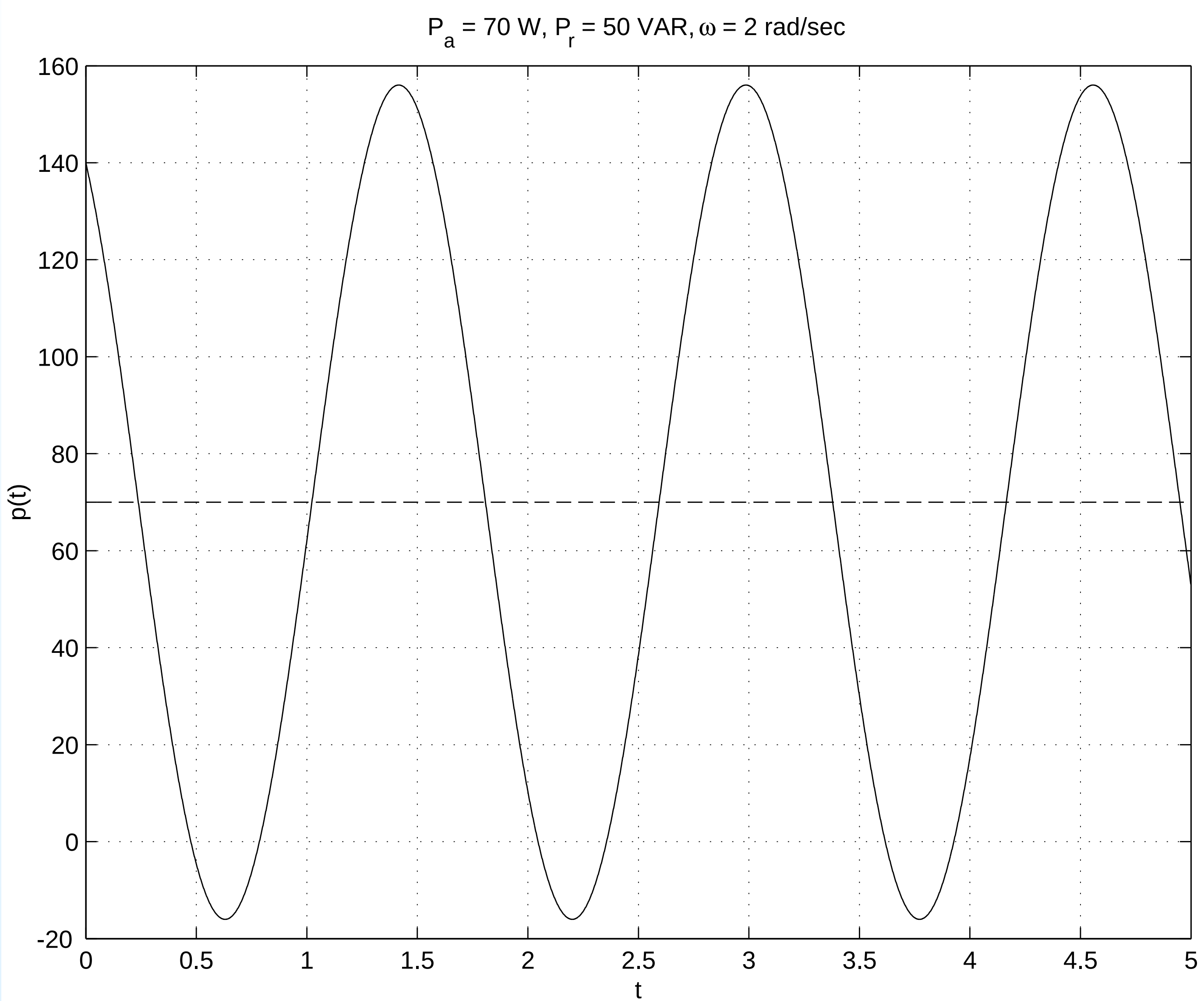
In conclusione:

$$\boxed{p(t) = P_a[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_i)] - P_r \sin(2\omega t + 2\varphi_i)}$$

Significato fisico dei termini:

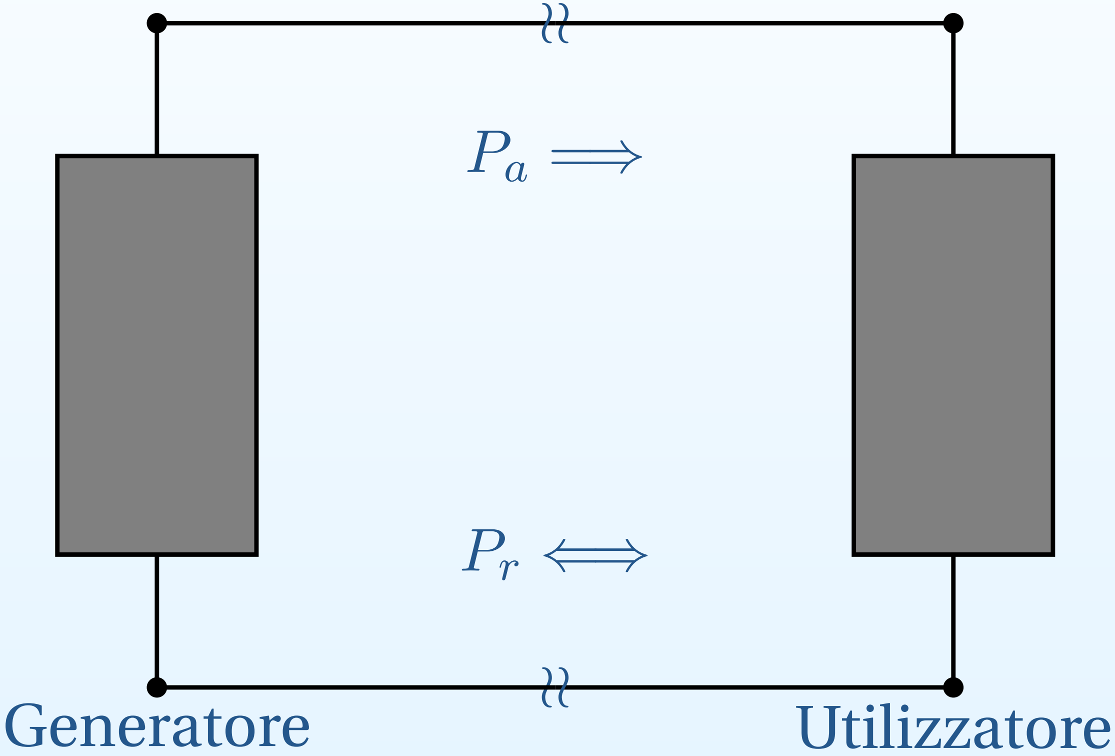
- Il primo termine, che ha segno costante (per esempio ≥ 0 se $P_a > 0$), rappresenta un trasferimento irreversibile di energia verso la porta elettrica.
- Il secondo termine, che ha segno oscillante, rappresenta un trasferimento di energia reversibile (“palleggiamento”).

Rappresentazione grafica



Potenza istantanea e potenza complessa (3)

Situazione tipica: trasferimenti di energia da un generatore ad un utilizzatore.



Potenza apparente e fattore di potenza

La potenza complessa ha espressione:

$$\begin{aligned}\dot{P}_c &= \frac{1}{2}\dot{V}\dot{I}^\star = \frac{1}{2}Ve^{J\varphi_v}Ie^{-J\varphi_i}\\ &= \frac{1}{2}VIe^{J(\varphi_v-\varphi_i)}\end{aligned}$$

Si definiscono allora tre ulteriori quantità:

- Potenza apparente. E’ definita come: $P_{ap} = \frac{1}{2}VI$. (Unità di misura *VA*.)
- Sfasamento. Definito come: $\Phi = \varphi_v - \varphi_i$.
- Fattore di potenza. Definito come: $\cos\Phi$.

Relazione tra le potenze

Valgono le seguenti relazioni:

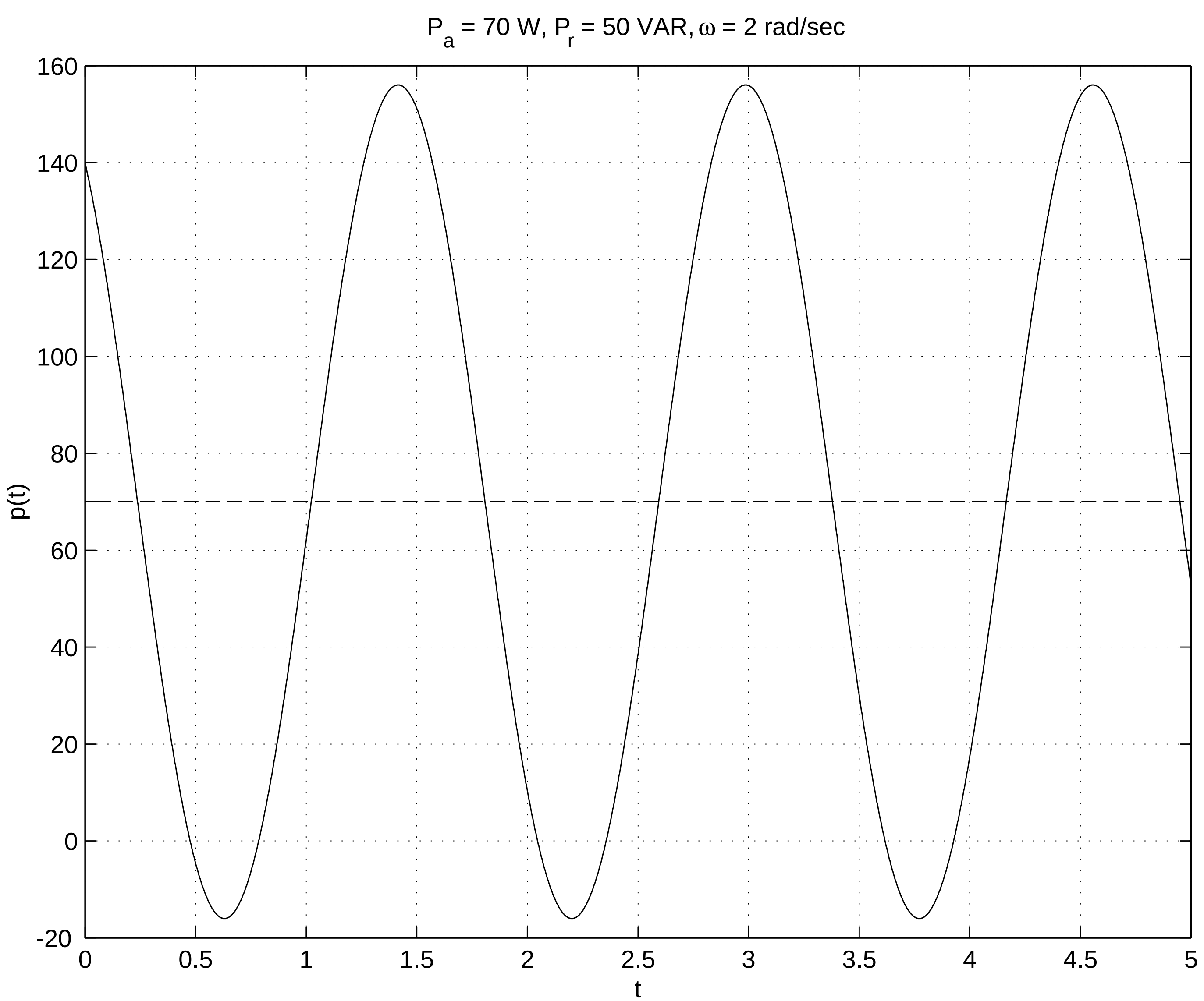
$$\begin{aligned} P_a &= P_{ap} \cos \Phi, \\ P_r &= P_{ap} \sin \Phi, \\ P_a &\leq P_{ap}. \end{aligned}$$

Si ipotizzi che su un bipolo $P_a > 0$. Allora, essendo:

$$p(t) = P_a + P_{ap} \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i),$$

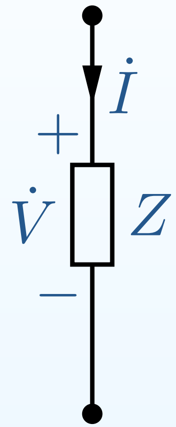
i valori minimi di $p(t)$ sono sempre inferiori allo zero (dunque esistono sempre degli intervalli di tempo in cui il bipolo cede energia), a meno che $P_r = 0$, nel quale caso i punti di minimo sono nulli.

Rappresentazione grafica



Potenza complessa su una impedenza (1)

Su una impedenza generica $Z = R + JX$:



vale:

$$\dot{P}_c = \frac{1}{2}\dot{V}\dot{I}^\star = \frac{1}{2}(R + JX)\dot{I}\dot{I}^\star = \frac{1}{2}R|\dot{I}|^2 + \frac{1}{2}JX|\dot{I}|^2.$$

Di conseguenza: $P_a = \frac{1}{2}R|\dot{I}|^2$, $P_r = \frac{1}{2}X|\dot{I}|^2$.

Potenza complessa su una impedenza (2)

Su una impedenza generica vale:

$$\dot{P}_c = \frac{1}{2} Z |\dot{I}|^2.$$

Dato che $\dot{I} = Y\dot{V}$, risulta $\dot{I}\dot{I}^\star = YY^\star\dot{V}\dot{V}^\star$, ovvero:

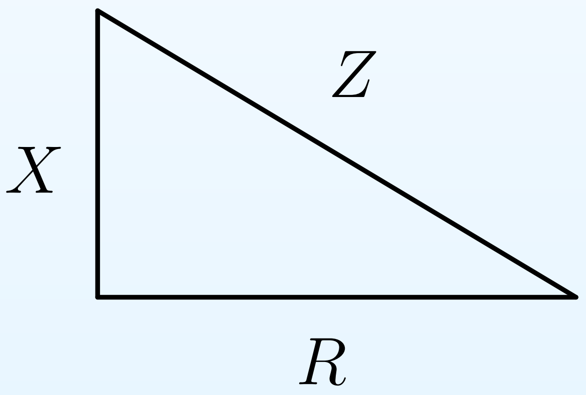
$$\dot{P}_c = \frac{1}{2} ZYY^\star |\dot{V}|^2 = \frac{1}{2} Y^\star |\dot{V}|^2,$$

dal momento che $ZY = 1$.

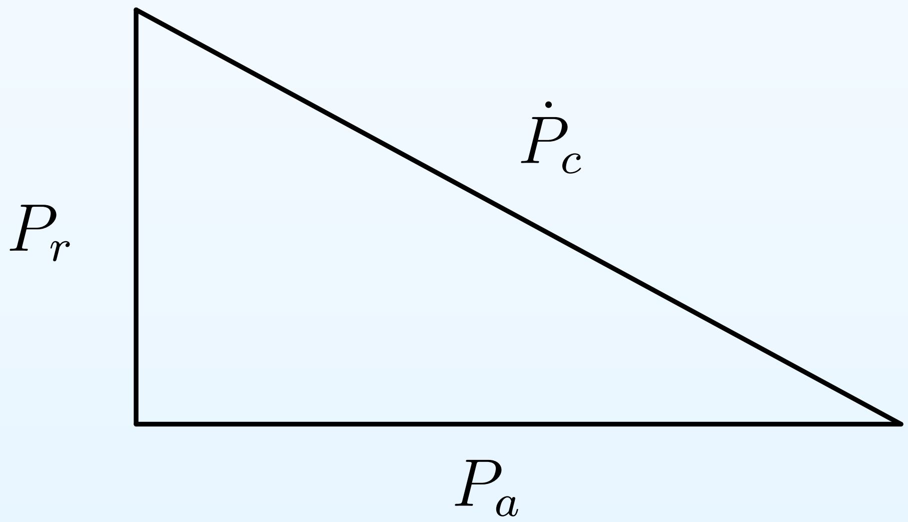
Triangoli delle impedenze e delle potenze

I seguenti triangoli sono simili:

Triangolo delle impedenze



Triangolo delle potenze



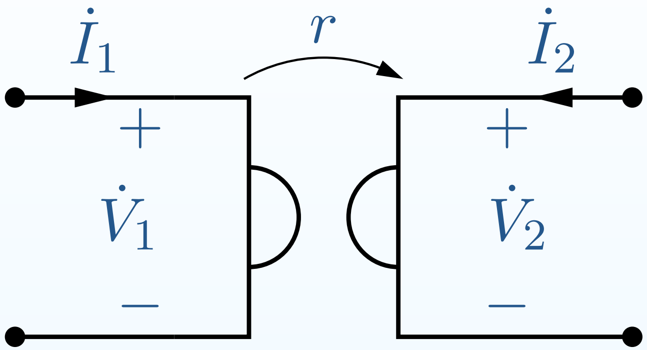
Potenza complessa su una rete 2-porte

Per una generica rete 2-porte

la potenza complessa si definisce come:

$$\dot{P}_c = \frac{1}{2}\dot{V}_1\dot{I}_1^\star + \frac{1}{2}\dot{V}_2\dot{I}_2^\star.$$

Potenza complessa sul “giratore”



Il comportamento del giratore è descritto dalle relazioni:

$$\dot{V}_1 = -r\dot{I}_2, \; \dot{V}_2 = r\dot{I}_1$$

La potenza complessa relativa a un giratore ha espressione:

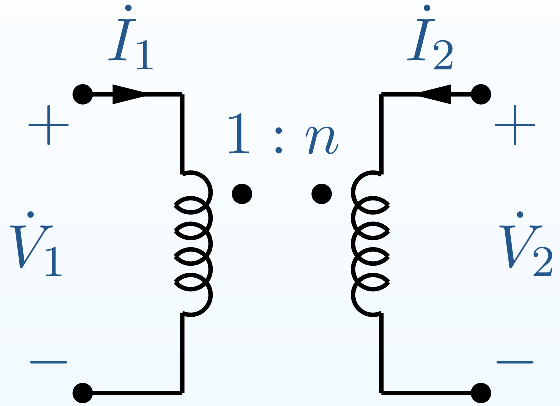
$$\begin{aligned}
\dot{P}_c &= \frac{1}{2}\dot{V}_1\dot{I}_1^\star + \frac{1}{2}\dot{V}_2\dot{I}_2^\star = \frac{1}{2}(-r\dot{I}_2)\dot{I}_1^\star + \frac{1}{2}(r\dot{I}_1)\dot{I}_2^\star \\
&= \frac{1}{2}r(\dot{I}_1\dot{I}_2^\star - \dot{I}_2\dot{I}_1^\star) = r\Im\{\dot{I}_1\dot{I}_2^\star\}J
\end{aligned}$$

Potenza complessa sul “giratore” (2)

Quindi:

- Il giratore non scambia potenza attiva ($P_a = 0$).
- Il giratore scambia potenza reattiva ($P_r = r\Im\{\dot{I}_1 \dot{I}_2^\star\}$).

Potenza complessa sul “trasformatore ideale”



Il comportamento del trasformatore è descritto dalle relazioni:

$$\dot{V}_2 = n\dot{V}_1, \; \dot{I}_2 = -\tfrac{1}{n}\dot{I}_1$$

La potenza complessa relativa a un trasformatore ha espressione:

$$\dot{P}_c = \frac{1}{2}\dot{V}_1\dot{I}_1^{\star} + \frac{1}{2}\dot{V}_2\dot{I}_2^{\star} = \frac{1}{2}\dot{V}_1\dot{I}_1^{\star} + \frac{1}{2}(n\dot{V}_1)\left(-\frac{1}{n}\dot{I}_1\right)^{\star} = \dot{0}.$$

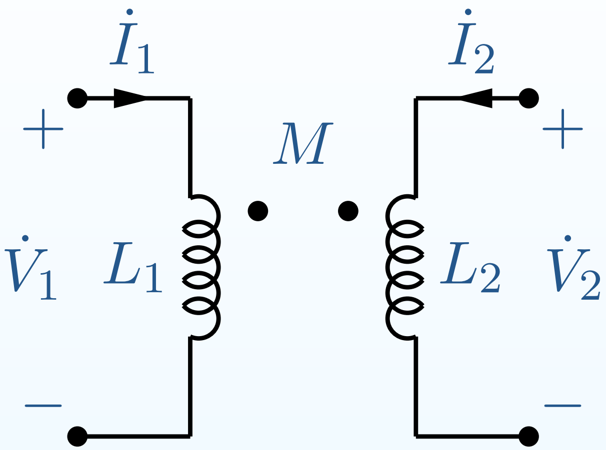
Potenza complessa sul “trasformatore” (2)

Quindi:

- Il trasformatore non scambia potenza attiva ($P_a = 0$).
- Il trasformatore non scambia potenza reattiva ($P_r = 0$).

Attenzione: questi risultati valgono per il trasformatore *nel suo complesso*. Tuttavia, la prima porta e la seconda porta, in generale, scambiano potenza con il resto del circuito, ma la potenza entrante nella prima porta è uguale alla potenza uscente dalla seconda porta, quindi il bilancio complessivo è nullo.

Potenza complessa sugli "IMA"



Il comportamento degli IMA è descritto dalle relazioni:

$$\dot{V}_1 = J\omega L_1 \dot{I}_1 + J\omega M \dot{I}_2,\ \dot{V}_2 = J\omega M \dot{I}_1 + J\omega L_2 \dot{I}_2$$

La potenza complessa relativa a una rete IMA ha espressione:

$$\begin{aligned}
\dot{P}_c &= \frac{1}{2}\dot{V}_1\dot{I}_1^\star + \frac{1}{2}\dot{V}_2\dot{I}_2^\star \\
&= \frac{1}{2}(J\omega L_1\dot{I}_1 + J\omega M\dot{I}_2)\dot{I}_1^\star + \frac{1}{2}(J\omega M\dot{I}_1 + J\omega L_2\dot{I}_2)\dot{I}_2^\star \\
&= \frac{1}{2}J\omega L_1|\dot{I}_1|^2 + \frac{1}{2}J\omega L_2|\dot{I}_2|^2 + J\omega M\Re\{\dot{I}_1\dot{I}_2^\star\}.
\end{aligned}$$

Potenza complessa sugli IMA (2)

Quindi:

- Gli induttori mutuamente accoppiati non scambiano potenza attiva ($P_a = 0$).
- Gli induttori mutuamente accoppiati scambiano potenza reattiva ($P_r = -J\dot{P}_c$).

Riassunto: Potenza complessa sulle reti elementari

Si può riassumere i risultati trovati come segue:

- Il resistore scambia solo potenza attiva. L'induttore e il condensatore scambiano solo potenza reattiva.
- Il giratore scambia solo potenza reattiva.
- Il trasformatore non scambia né potenza attiva, né potenza reattiva.
- Gli induttori mutuamente accoppiati scambiano solo potenza reattiva.
- Per gli altri bipoli e reti 2-porte elementari non è possibile dire nulla, a priori, sull'entità delle potenze (attiva/reattiva) scambiate. In generale, questi componenti scambiano sia potenza attiva che potenza reattiva con il resto del circuito.

Teorema di Boucherot

Il teorema di Boucherot stabilisce la conservazione della potenza complessa totale in un circuito.

La potenza complessa totale in un circuito elettrico nel dominio dei fasori si definisce come:

$$\dot{P}_{c,\mathrm{tot}} = \frac{1}{2} \sum_k \dot{V}_k \dot{I}_k^{\star}.$$

Il teorema di Boucherot stabilisce che:

$$\boxed{\dot{P}_{c,\mathrm{tot}} = \dot{0}}$$

Dimostrazione del Teorema di Boucherot (1)

Analogamente a quanto fatto per dimostrare il teorema della conservazione della potenza istantanea, si scrive:

$$\dot{P}_{c,\mathrm{tot}} = \frac{1}{2}\mathbf{I}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{H}}\mathbf{V}_{\mathrm{a}} + \frac{1}{2}\mathbf{I}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{H}}\mathbf{V}_{\mathrm{c}},$$

dove $\mathbf{V}_{\mathrm{a}}$ e $\mathbf{I}_{\mathrm{a}}$ rappresentano i vettori delle tensioni e delle correnti fasoriali di albero, rispettivamente, e $\mathbf{V}_{\mathrm{c}}$ e $\mathbf{I}_{\mathrm{c}}$ rappresentano i vettori delle tensioni e delle correnti fasoriali di coalbero, rispettivamente.
Inoltre, valgono sempre le equazioni topologiche (ai fasori) $\mathbf{V}_{\mathrm{c}} = -\mathbf{B}\mathbf{V}_{\mathrm{a}}$, $\mathbf{I}_{\mathrm{a}} = -\mathbf{A}\mathbf{I}_{\mathrm{c}}$ e $\mathbf{A} = -\mathbf{B}^{\top}$.

Dimostrazione del Teorema di Boucherot (2)

Allora risulta:

$$
\begin{aligned}
\dot{P}_{c,\mathrm{tot}} &= \frac{1}{2}\mathbf{I}_\mathrm{a}^\mathrm{H}\mathbf{V}_\mathrm{a} + \frac{1}{2}\mathbf{I}_\mathrm{c}^\mathrm{H}\mathbf{V}_\mathrm{c} \\
&= \frac{1}{2}(-\mathbf{A}\mathbf{I}_\mathrm{c})^\mathrm{H}\mathbf{V}_\mathrm{a} + \frac{1}{2}\mathbf{I}_\mathrm{c}^\mathrm{H}(-\mathbf{B}\mathbf{V}_\mathrm{a}) \\
&= -\frac{1}{2}\mathbf{I}_\mathrm{c}^\mathrm{H}\mathbf{A}^\mathrm{H}\mathbf{V}_\mathrm{a} - \frac{1}{2}\mathbf{I}_\mathrm{c}^\mathrm{H}\mathbf{B}\mathbf{V}_\mathrm{a} \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{I}_\mathrm{c}^\mathrm{H}\mathbf{B}\mathbf{V}_\mathrm{a} - \frac{1}{2}\mathbf{I}_\mathrm{c}^\mathrm{H}\mathbf{B}\mathbf{V}_\mathrm{a} \\
&= \dot{0}.
\end{aligned}
$$

Nota: Poiché le matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ hanno elementi in $\{0, \pm 1\}$, risulta $\mathbf{A}^\mathrm{H} = \mathbf{A}^\top$ e $\mathbf{B}^\mathrm{H} = \mathbf{B}^\top$.

Corollario al Teorema di Boucherot

Il teorema di Boucherot assicura che la potenza complessa totale $\dot{P}_{c,\mathrm{tot}}$ di un circuito è nulla. D'altra parte, la potenza complessa totale si può scrivere come:

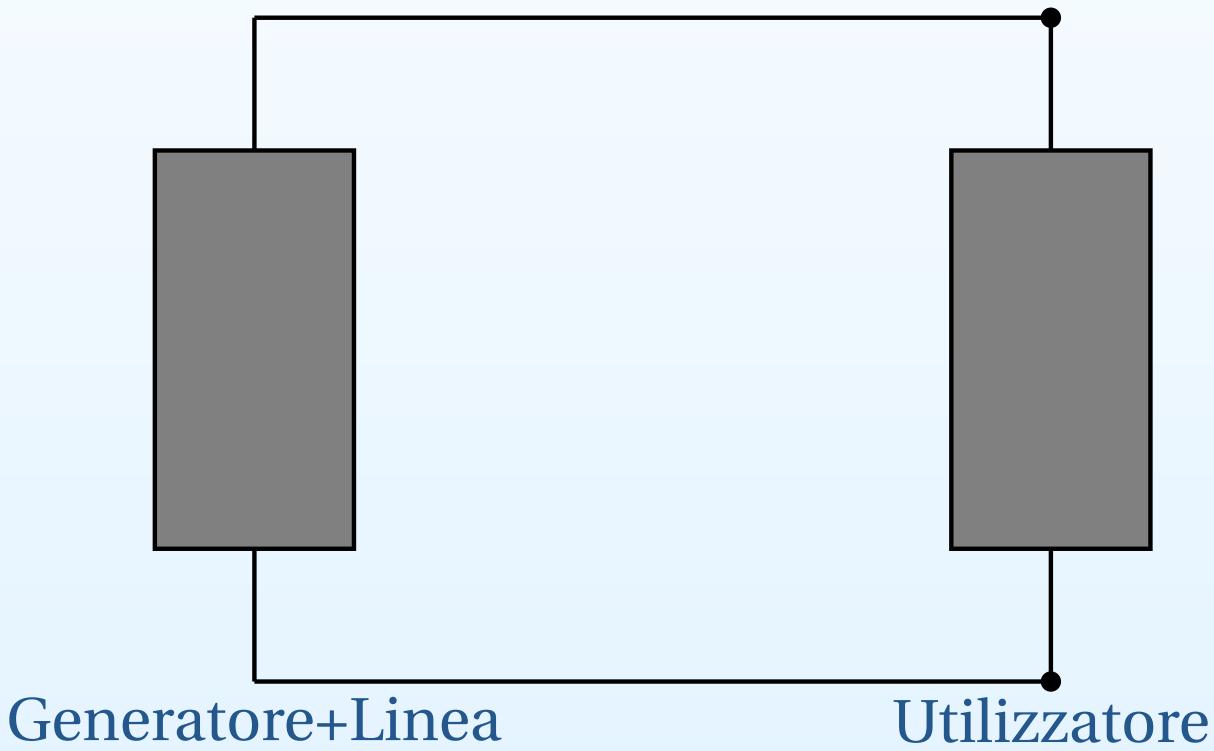
$$\dot{P}_{c,\mathrm{tot}} = P_{a,\mathrm{tot}} + J\, P_{r,\mathrm{tot}}.$$

Perciò, come corollario al teorema di Boucherot, si ha che:

$$\boxed{P_{a,\mathrm{tot}} = 0, \quad P_{r,\mathrm{tot}} = 0.}$$

Generazione, trasporto e utilizzo dell'energia elettrica

In ambito domestico e industriale, la situazione tipica di trasferimento di potenza dal generatore all'utilizzatore si può schematizzare come segue:



Perdite di energia nelle linee di trasmissione

Le linee di trasmissione dell'energia elettrica tipicamente sono:

- **Aeree**: Si pensi alle terne di cavi AT (*alta tensione*) che attraversano le campagne.
- **Interrate o sottomarine**: Si pensi all'alimentazione delle piattaforme marine.

Un cavo elettrico cilindrico di lunghezza ℓ e raggio r, è rappresentable come un resistore elettrico di resistenza:

$$R_{\text{cavo}} = \rho \frac{\ell}{\pi r^2},$$

dove il parametro ρ (*resistività*) dipende dal materiale. La potenza attiva dissipata su un cavo su cui scorre $\dot{I}_{\text{cavo}}$ vale:

$$P_{a,\text{cavo}} = \frac{1}{2} R_{\text{cavo}} |\dot{I}_{\text{cavo}}|^2.$$

Minimizzazione delle perdite di energia nelle linee

Risulta, quindi:

$$P_{a,\text{cavo}} = \frac{1}{2}\frac{\rho\ell}{\pi r^2}|\dot{I}_{\text{cavo}}|^2.$$

Al fine di minimizzare le perdite sulle linee di trasmissione dell'energia, si può agire come segue:

- Scegliere materiali a bassa resistività (per esempio: rame; applicazioni speciali: *oro, superconduttori*).
- Costruire cavi con una ampia sezione trasversale (aumentando però ingombro, peso, volume di metallo e quindi costo).
- Minimizzare l'intensità $|\dot{I}_{\text{cavo}}|$ della corrente di linea (utilizzando dei trasformatori AT/BT).
- Minimizzare la lunghezza dei cavi (spesso infattibile).

Circuito equivalente per generazione-trasporto-utilizzo

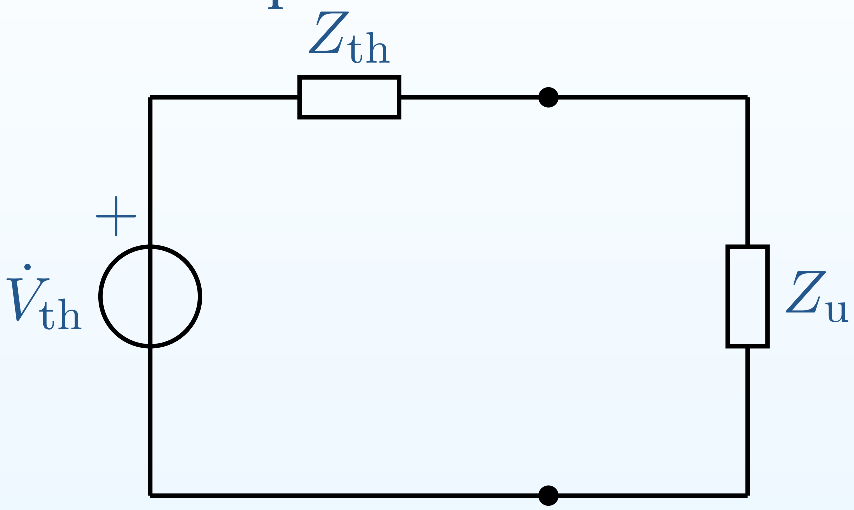
Dal punto di vista circuitale, gli elementi dell'anello di generazione, trasporto e utilizzo dell'energia elettrica possono essere rappresentati come segue:

- Il circuito di generazione e trasporto, in genere complesso, può essere rappresentato tramite un circuito equivalente di Thevenin con parametri $\dot{V}_{\text{th}}$ e $Z_{\text{th}} = R_{\text{th}} + JX_{\text{th}}$.
- L'utilizzatore può essere rappresentato con una impedenza $Z_{\text{u}} = R_{\text{u}} + JX_{\text{u}}$.

Dal punto di vista fisico, $\dot{V}_{\text{th}}$ rappresenta la *tensione nominale* disponibile in assenza di utilizzatore ($Z_{\text{u}} = \infty$), mentre Z_{th} rappresenta le *perdite* (R_{th}) e gli effetti reattivi (X_{th}) interni al generatore e relativi alla linea di trasmissione dell'energia.

Teorema MTPA

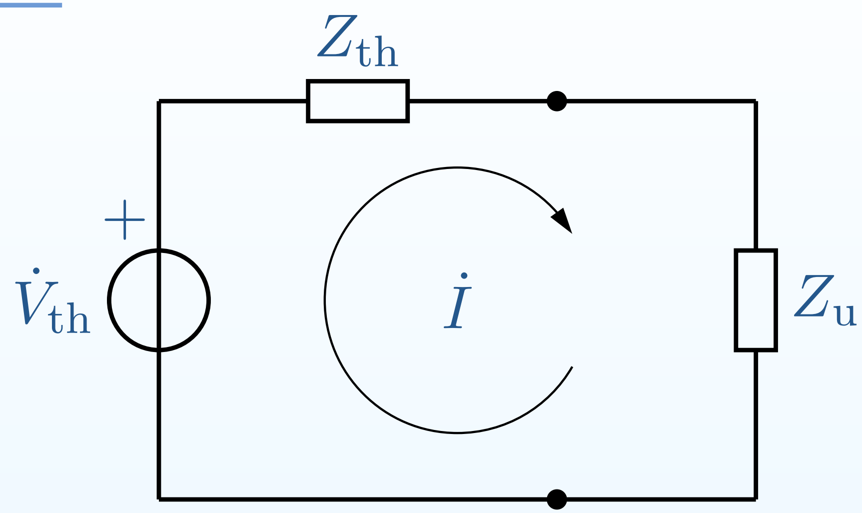
Dato, quindi, il circuito equivalente:



Ci si pone il seguente problema: Noti i valori di $\dot{V}_{\rm th}$ e $Z_{\rm th}$, determinare il valore di $Z_{\rm u}$ tale che la potenza attiva $P_{a,{\rm u}}$ sia massima.

MTPA = **M**assimo **T**rasferimento di **P**otenza **A**ttiva

Teorema MTPA (2)



La corrente di maglia $\dot I$ vale:

$$\dot I = \frac{\dot V_{\rm th}}{Z_{\rm th} + Z_{\rm u}},$$

quindi la potenza attiva sull'utilizzatore vale:

$$P_{a,{\rm u}} = \frac{1}{2} R_{\rm u} \left| \frac{\dot V_{\rm th}}{Z_{\rm th} + Z_{\rm u}} \right|^2 = \frac{1}{2} R_{\rm u} \frac{|\dot V_{\rm th}|^2}{(R_{\rm th} + R_{\rm u})^2 + (X_{\rm th} + X_{\rm u})^2}.$$

Teorema MTPA (3)

La potenza attiva sull'utilizzatore è una funzione delle variabili R_u e X_u, infatti:

$$P_{a,\mathrm{u}}(R_\mathrm{u}, X_\mathrm{u}) = \frac{1}{2}\frac{R_\mathrm{u}|\dot{V}_\mathrm{th}|^2}{(R_\mathrm{th}+R_\mathrm{u})^2+(X_\mathrm{th}+X_\mathrm{u})^2}.$$

Per trovare il punto di massimo di tale funzione di due variabili, occorre risolvere il sistema di equazioni:

$$\frac{\partial P_{a,\mathrm{u}}(R_\mathrm{u}, X_\mathrm{u})}{\partial R_\mathrm{u}} = 0, \quad \frac{\partial P_{a,\mathrm{u}}(R_\mathrm{u}, X_\mathrm{u})}{\partial X_\mathrm{u}} = 0,$$

e verificare che la soluzione corrisponda a un punto di massimo.

Teorema MTPA (4)

Il punto di massimo si trova in:

$$R_{\mathrm{u}} = R_{\mathrm{th}},\ X_{\mathrm{u}} = -X_{\mathrm{th}}.$$

Le due precedenti condizioni di MTPA si possono riscrivere in modo compatto come:

$$\boxed{Z_{\mathrm{u}} = Z_{\mathrm{th}}^{\star}}$$

Il valore della potenza massima trasferibile sul carico è $P_{a,\mathrm{u}}^{\max} = P_{a,\mathrm{u}}(R_{\mathrm{th}}, -X_{\mathrm{th}})$, ovvero:

$$P_{a,\mathrm{u}}^{\max} = \frac{|\dot{V}_{\mathrm{th}}|^2}{8\Re\{Z_{\mathrm{th}}\}}.$$

Teorema MTPA (5)

Osserviamo che la resistenza equivalente di Thevenin R_{th} può, in linea di principio, assumere ogni valore. Distinguiamo quindi tre diversi casi:

- **Caso** $R_{\mathrm{th}} > 0$: Questo è l'unico caso che abbia senso considerare nell'ambito dell'MTPA, infatti, questo è l'unico caso in cui $P_{a,\mathrm{u}}^{\max} > 0$ ed ha valore finito, pertanto in questo caso l'utilizzatore assorbe effettivamente energia dal resto del circuito.
- **Caso** $R_{\mathrm{th}} = 0$: Rappresenta un caso *non realistico* di sistema di generazione e trasporto privo di perdite.
- **Caso** $R_{\mathrm{th}} < 0$: Rappresenta il caso *non realistico* di impedenza di carico Z_{u} che deve generare energia invece di assorbirla, in disaccordo con il principio stesso per cui l'MTPA è stato pensato.

Classificazione delle impedenze e risonanza

Data una generica impedenza $Z(\omega) = R(\omega) + JX(\omega)$, essa viene classificata come segue:

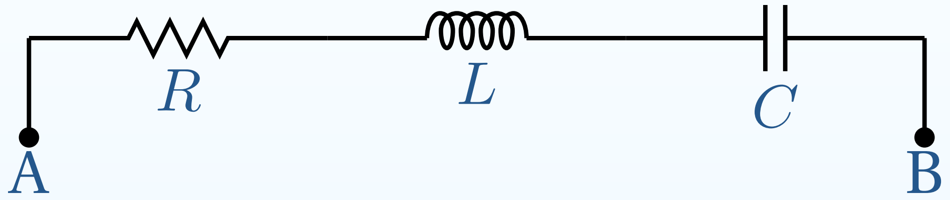
- Se $X(\omega) > 0$, l'impedenza viene detta *ohmico-induttiva*.
- Se $X(\omega) < 0$, l'impedenza viene detta *ohmico-capacitiva*.

Da notare che, essendo l'impedenza una funzione della pulsazione, il carattere ohmico-induttivo od ohmico-capacitivo dipende dalla pulsazione ω.
L'insieme delle pulsazioni che annullano la parte reattiva di una impedenza viene detto *insieme delle pulsazioni di risonanza*:

$$\Omega_Z = \{\omega \in \mathbb{R}^+ | \Im\{Z(\omega)\} = 0\}.$$

Circuito risonante R-L-C

Si consideri il seguente bipolo:



L'impedenza equivalente del bipolo A-B vale:

$$Z(\omega) = R + J\omega L + \frac{1}{J\omega C} = R + J\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Circuito risonante R-L-C

Osserviamo che

- per ω sufficientemente grande, risulta $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, quindi il bipolo ha carattere *ohmico-induttivo*;
- per ω sufficientemente piccolo, risulta $\omega L < \frac{1}{\omega C}$, quindi il bipolo ha carattere *ohmico-capacitivo*;

La pulsazione di risonanza si trova con:

$$\Im\{Z(\omega)\} = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_{\mathrm{r}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}}.$$

La pulsazioni ω_{r} costituisce il punto di discriminazione tra carattere ohmico-induttivo e carattere ohmico-capacitivo.

Proprietà della risonanza (circuito R-L-C)

Poiché in condizione di risonanza la parte immaginaria dell'impedenza del bipolo è nulla, rimane:

$$Z\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right) = R,$$

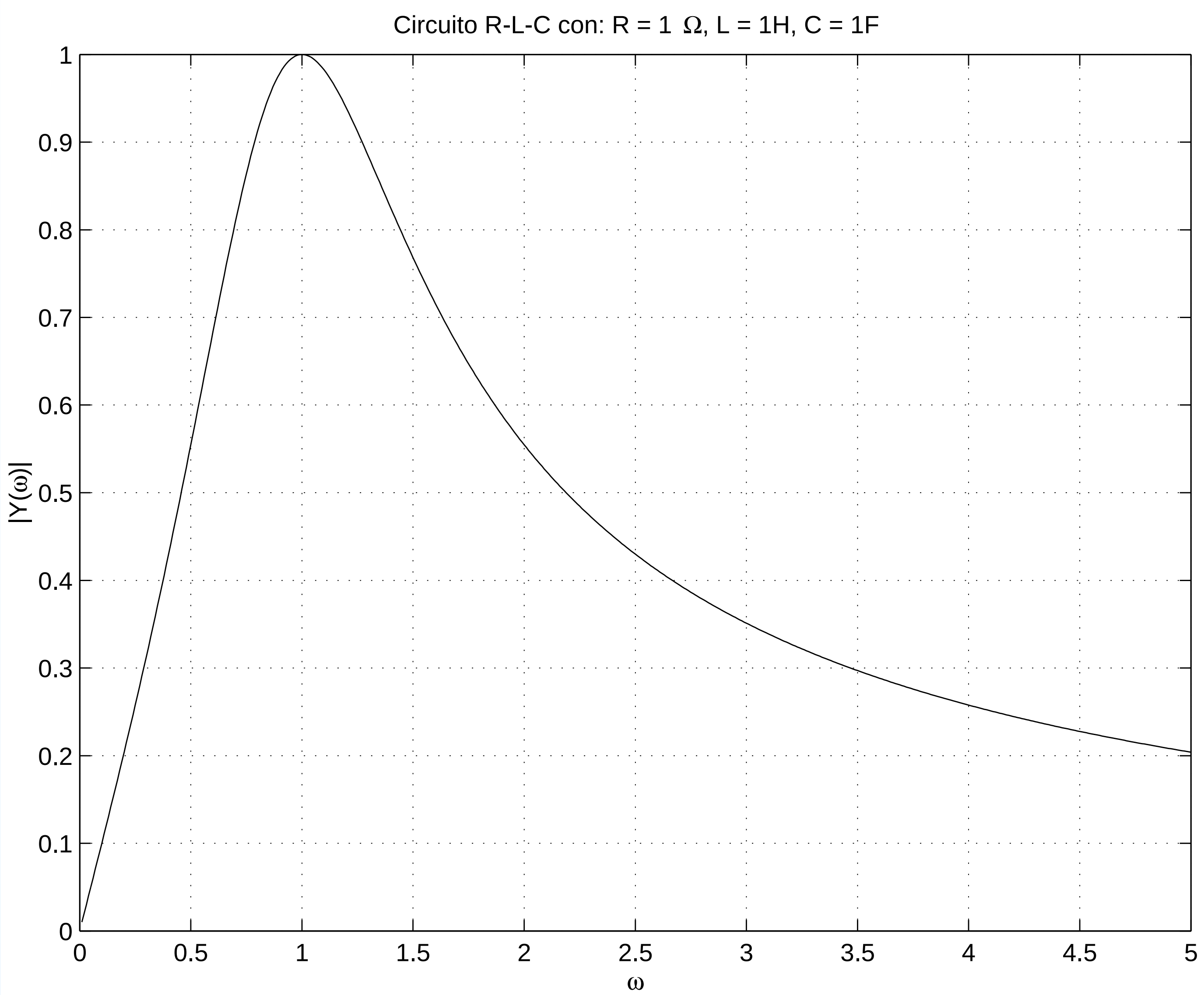
quindi, **il circuito R-L-C in risonanza ha un comportamento puramente resistivo** e **non scambia potenza reattiva**.

Dette $\dot{V}$ e $\dot{I}$ la tensione e la corrente sul bipolo R-L-C, in risonanza vale $\dot{I} = \frac{\dot{V}}{R}$, quindi:

$$\dot{V}_L = J\omega L\dot{I} \;\Rightarrow |\dot{V}_L| = \frac{\omega L}{R}|\dot{V}|\;(\gg |\dot{V}|),$$

$$\dot{V}_C = -J\frac{1}{\omega C}\dot{I} \;\Rightarrow |\dot{V}_C| = \frac{1}{\omega C R}|\dot{V}|\;(\gg |\dot{V}|).$$

Comportamento in frequenza del circuito R-L-C



Rifasamento delle impedenze ohmico-induttive

Sia dato un bipolo di impedenza $Z = R + JX$ che, alla pulsazione di lavoro, presenta $X > 0$.

In generale, tale bipolo assorbe sia potenza attiva (dovuta alla componente resistiva) che potenza reattiva (dovuta alla componente reattiva dell'impedenza).

Si vuole modificare il bipolo in modo tale che vi sia un basso scambio netto di potenza reattiva con l'esterno. Tale operazione si chiama *rifasamento*.

Rifasamento nelle applicazioni domestiche

Da una formula precedentemente mostrata, si ha che:

$$P_r = P_{ap} \sin \Phi, \text{ quindi } P_r = 0 \Rightarrow \sin \Phi = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\cos \Phi = 1}$$

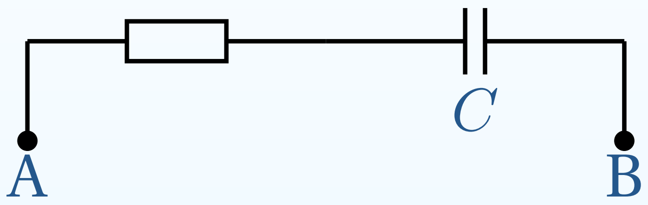
Quando si ottiene, per un bipolo, un fattore di potenza unitario, si parla di *rifasamento perfetto*.

*Il tipico contratto di fornitura per uso domestico stipulato con l'ENEL impegna l'utente a garantire che il fattore di potenza complessivo dell'insieme degli utilizzatori sia:

$$\boxed{\cos \Phi \geq 0.9}$$

Rifasamento perfetto di tipo “serie”

Un possibile schema di rifasamento è il seguente:

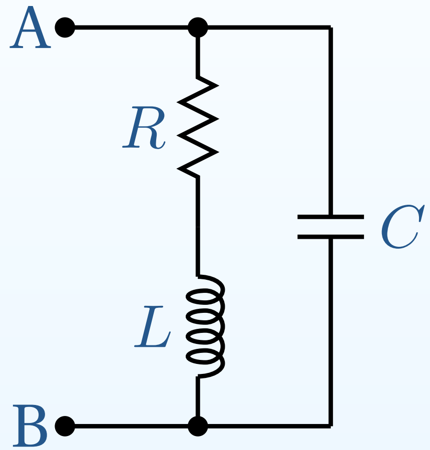


Tale schema presenta, però, una serie di svantaggi, tra cui:

- La tensione sul condensatore potrebbe essere molto maggiore della tensione di alimentazione, quindi il condensatore va dimensionato in modo che abbia sufficiente “rigidità dielettrica”.
- La tensione sul bipolo ohmico-induttivo è diversa dalla tensione di alimentazione, quindi il bipolo non viene alimentato correttamente.

Rifasamento perfetto di tipo "parallelo"

Si preferisce adottare il seguente schema di rifasamento:



Tale schema presenta i seguenti vantaggi:

- La tensione sul condensatore di rifasamento è pari alla tensione di alimentazione.
- La tensione sul bipolo ohmico-induttivo è pari alla tensione di alimentazione.

Rifasamento perfetto di tipo “parallelo” (2)

Per determinare il valore della capacità di rifasamento C, dati R, L e ω, si impone la condizione di rifasamento perfetto $\Im\{Z(C)\} = 0$, dove:

$$Z(C) = \frac{(R + J\omega L)\frac{1}{J\omega C}}{R + J\omega L + \frac{1}{J\omega C}}.$$

Risolvendo l’equazione $\Im\{Z(C)\} = 0$ in funzione dell’incognita C, si ottiene:

$$\boxed{C_{\mathrm{r}} = \frac{L}{R^2+\omega^2 L^2}}$$

Nota: Nelle applicazioni comuni, risulta $L > 0$, quindi il condensatore di rifasamento è energeticamente passivo.