IL METODO DI ANALISI SU BASE TAGLI

Prof. Simone Fiori
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione (DII)
Università Politecnica delle Marche (uPM)
`http://web.dii.univpm.it/fiori`

1 Generalità

Il *metodo di analisi su base tagli* (MABT) si applica a circuiti elettrici formati solamente da resistori e generatori indipendenti di corrente.

Consideriamo un generico bipolo k^{mo} il cui stato elettrico sia descritto dalla coppia tensione-corrente (v_k, i_k). La relazione costitutiva del bipolo può essere del tipo:

- $i_k = G_k\, v_k$ se il bipolo è un resistore di conduttanza G_k,
- $i_k = i_{g,k}$ se il bipolo è un generatore indipendente di corrente di valore $i_{g,k}$.

Queste relazioni costitutive si possono riassumere con la relazione costitutiva generalizzata

$$i_k = G_k v_k + i_{g,k}, \tag{1}$$

con la convenzione che

- se il bipolo è un resistore, si assume $i_{g,k} = 0$,
- se il bipolo è un generatore indipendente di corrente, si assume $G_k = 0$.

Si assume una partizione albero/co-albero $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ del grafo $\mathcal{G}$ associato al circuito elettrico. Per gli archi dell'albero, cioè quando $k \in \mathcal{A}$, a partire dalla relazione (1) si può scrivere un'unica relazione vettoriale tra le tensioni e le correnti associate agli archi dell'albero, ovvero:

$$I_a = G_a V_a + I_{g,a}, \tag{2}$$

dove I_a è il vettore delle correnti sugli archi di albero, V_a è il vettore delle tensioni sugli archi di albero, G_a è una matrice *diagonale* delle eventuali conduttanze degli archi di albero e $I_{g,a}$ è il vettore delle correnti impresse dagli eventuali generatori presenti sugli archi di albero.

Analogamente, per gli archi del co-albero, cioè quando $k \in \mathcal{C}$, si può scrivere un'unica relazione vettoriale tra le tensioni e le correnti associate agli archi del co-albero, ovvero:

$$I_c = G_c V_c + I_{g,c}, \tag{3}$$

dove I_c è il vettore delle correnti sugli archi di co-albero, V_c è il vettore delle tensioni sugli archi di co-albero, G_c è una matrice *diagonale* delle eventuali conduttanze degli archi di co-albero e $I_{g,c}$ è il vettore delle correnti impresse dagli eventuali generatori presenti sugli archi di co-albero.

Ricordiamo le relazioni topologiche che descrivono la struttura del grafo e la partizione albero/co-albero:

$$\begin{cases} I_a + A I_c = 0, \\ V_c + B V_a = 0, \\ B = -A^T. \end{cases} \tag{4}$$

Il sistema risolvente nel metodo di analisi su base tagli è, quindi

$$\begin{cases} I_a = G_a V_a + I_{g,a}, \\ I_c = G_c V_c + I_{g,c}, \\ I_a + A I_c = 0, \\ V_c + B V_a = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Questo insieme di equazioni contiene $2R$ incognite (dove R rappresenta il numero totale di archi del grafo $\mathcal{G}$) ed è composto da $2R$ equazioni linearmente indipendenti.

2 Struttura e proprietà del sistema risolvente

Conviene scrivere il sistema risolvente (5) utilizzando, come unica incognita, il vettore delle tensioni di albero V_a. Per far questo, inseriamo la prima e la seconda equazione all'interno della terza, ottenendo

$$\begin{cases} G_a V_a + I_{g,a} + A(G_c V_c + I_{g,c}) = 0, \\ V_c + B V_a = 0, \end{cases} \tag{6}$$

ovvero

$$\begin{cases} G_a V_a + I_{g,a} + A G_c V_c + A I_{g,c} = 0, \\ V_c = -B V_a. \end{cases} \tag{7}$$

Inserendo, infine, l'ultima equazione nella prima, si ottiene

$$G_a V_a + I_{g,a} + AG_c(-BV_a) + AI_{g,c} = 0. \tag{8}$$

Raccogliendo i termini omologhi, si ottiene poi

$$(G_a - AG_c B)V_a = -I_{g,a} - AI_{g,c}. \tag{9}$$

Definendo

$$\begin{cases} G_T \triangleq G_a - AG_c B, \\ I_{g,T} \triangleq -I_{g,a} - AI_{g,c}, \end{cases} \tag{10}$$

si può scrivere il sistema risolvente in forma compatta come

$$G_T V_a = I_{g,T}. \tag{11}$$

La matrice G_T ha dimensione $a \times a$, dove a rappresenta il numero di archi dell'albero ed è dimensionalmente omogenea, infatti, tutti i suoi elementi si misurano in Siemens (S). Il vettore colonna $I_{g,T}$ ha a righe ed è dimensionalmente omogeneo, infatti, tutti i suoi elementi si misurano in Ampère (A).

La matrice G_T è *simmetrica*, infatti, dopo averla scritta come $G_a + AG_c A^T$ (grazie alla terza equazione topologica $B = -A^T$), si può notare che

$$G_T^T = (G_a + AG_c A^T)^T = G_a^T + (AG_c A^T)^T = G_a + AG_c^T A^T = G_a + AG_c A^T, \tag{12}$$

dato che sia G_a che G_c sono diagonali e, in quanto tali, anche simmetriche.