Magnetostatica

Campo Magnetico

- L’interazione tra magneti avviene a distanza, senza contatto.
- In analogia con quanto fatto con il campo elettrico, introduciamo un campo che spiega questa forza. Il campo Magnetico.

Gli esperimenti di Oersted: il Campo Magnetico

Hans Christian Oersted, in Danimarca il 4 settembre del 1820 scoprì che un filo percorso da una corrente elettrica deviava l'ago di una bussola.

Non riuscì a dare alcuna spiegazione al fenomeno, anche considerato che l'ago non veniva né attratto né respinto, ma si disponeva ad angolo retto con il filo

APPLET: bussola e campo magnetico
http://micro.magnet.fsu.edu/electromag/java/compass/index.html

APPLET: il campo magnetico di un filo di corrente ha linee di forza circolari #1
https://nationalmaglab.org/education/magnet-academy/watch-play/interactive/magnetic-field-around-a-wire-ii

APPLET: il campo magnetico di un filo di corrente ha linee di forza circolari #2
https://nationalmaglab.org/education/magnet-academy/watch-play/interactive/magnetic-field-around-a-wire-i

Campo Magnetico

- La corrente non è altro che un’insieme di cariche in movimento. Dunque il campo magnetico viene generato da cariche in movimento.
- L’ampiezza del campo dipende:
  - Dall’ampiezza della carica (q)
  - Dalla velocità della carica (v)
  - Dalla distanza dalla carica (r)

Forza e induzione magnetica 1/4

- Il campo magnetico esercita una forza sulle cariche in movimento (Forza magnetica)

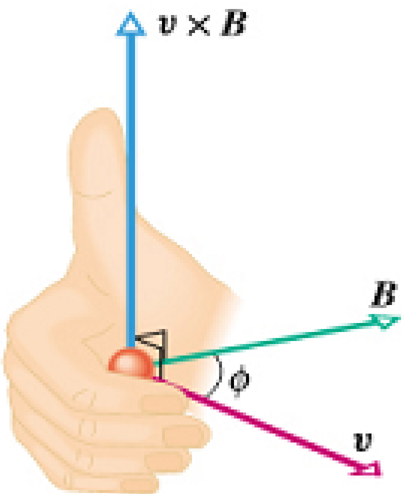
Attraverso questa forza **definiamo un campo vettoriale B, che chiameremo densità di flusso magnetico o *induzione magnetica*.**

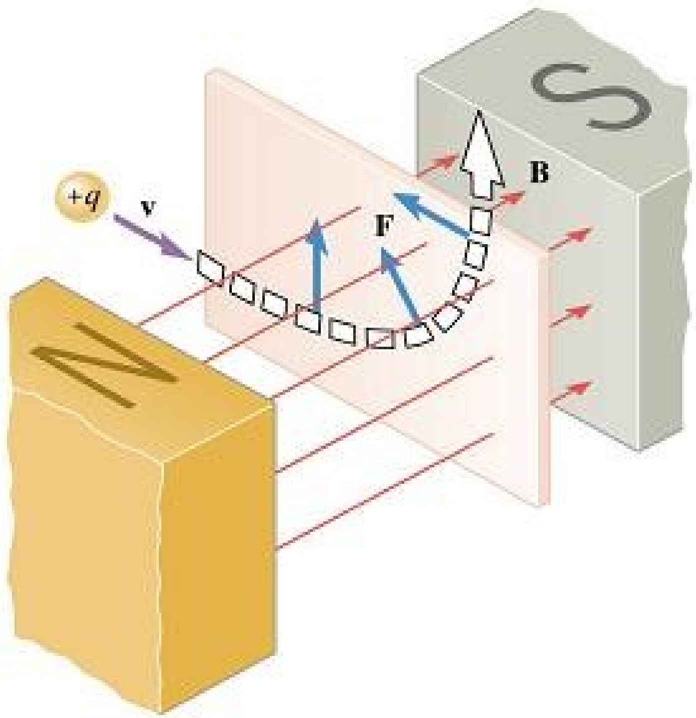
B si misura in Tesla [Vs/m^2]= Weber / m^2 oppure Gauss (10^{-4} T)

μ_0

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

$$[B] = \left[\frac{F}{qv}\right] = \left[\frac{V}{m^2 s^{-1}}\right] = \left[\frac{Wb}{m^2}\right] = [T]$$



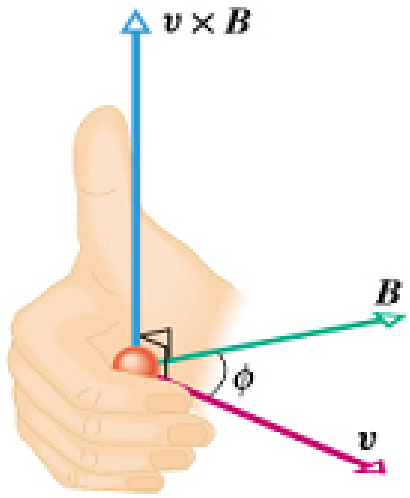


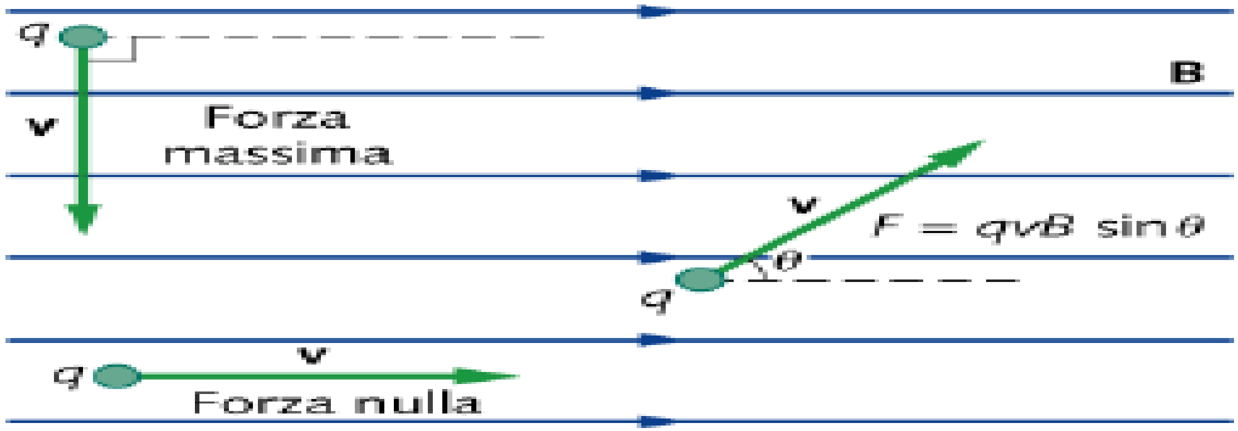
Direzione della forza secondo la regola della mano destra (o della vite)

Forza e induzione magnetica 2/4

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} = qvB\sin\theta \quad [N]$$

$$[\mathrm{B}] = [\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}^2}] = [\mathrm{T}] = 10^4[\mathrm{G}]$$





[APPLET: la forza di Lorentz](https://nationalmaglab.org/education/magnet-academy/watch-play/interactive/lorentz-force)

https://nationalmaglab.org/education/magnet-academy/watch-play/interactive/lorentz-force

Forza e Induzione Magnetica 3/4

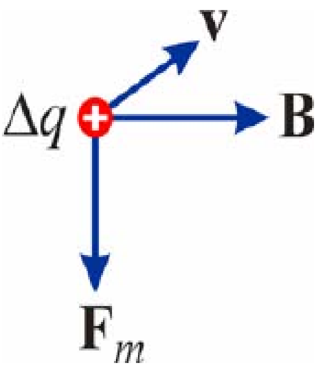
Si dice che una regione è sede di un **campo magnetico** se una carica di prova Δq puntiforme in moto con velocità istantanea $\mathbf{v}$ in tale regione è soggetta (oltre alla eventuale forza $\mathbf{F}_e$ dovuta al campo elettrico) ad una forza

$$\mathbf{F}_m = \Delta q\, \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Il vettore **induzione magnetica** $\mathbf{B}$ ha

- direzione coincidente con la direzione della velocità in corrispondenza della quale la forza $\mathbf{F}_m$ è nulla
- verso tale che $\mathbf{v}$ $\mathbf{B}$ e $\mathbf{F}_m$ formino una terna destra
- modulo dato da

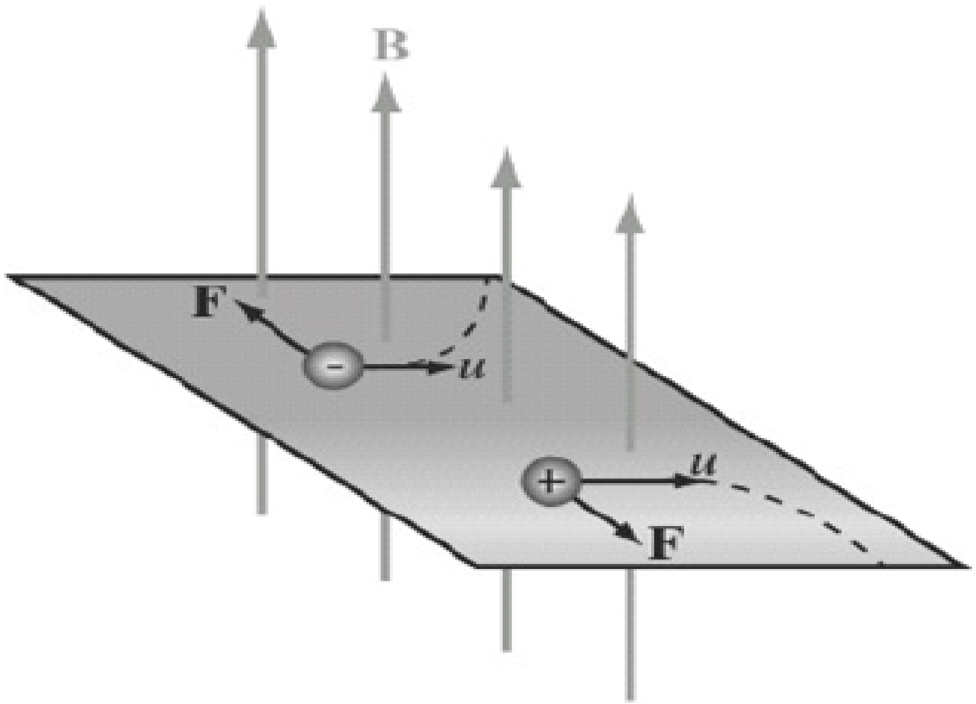
$$B = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{F_{m\max}}{\Delta q\, v}$$



dove $F_{m\,\max}$ indica il valore massimo del modulo di $\mathbf{F}_m$ (che si ottiene quando $\mathbf{v}$ è ortogonale a $\mathbf{B}$)

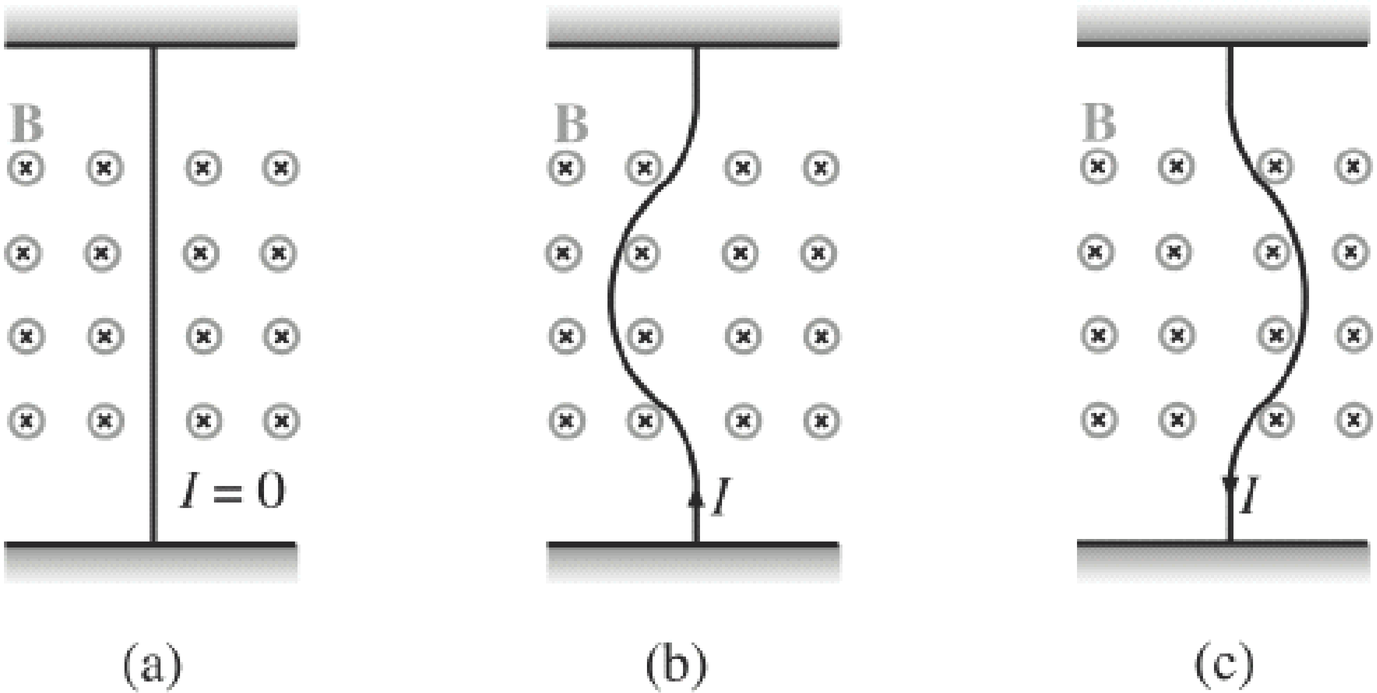
Forza e Induzione Magnetica 4/4

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \quad [N]$$



Attenzione al segno della carica elettrica q !

Forza agente su un filo percorso da corrente immerso in un campo magnetico

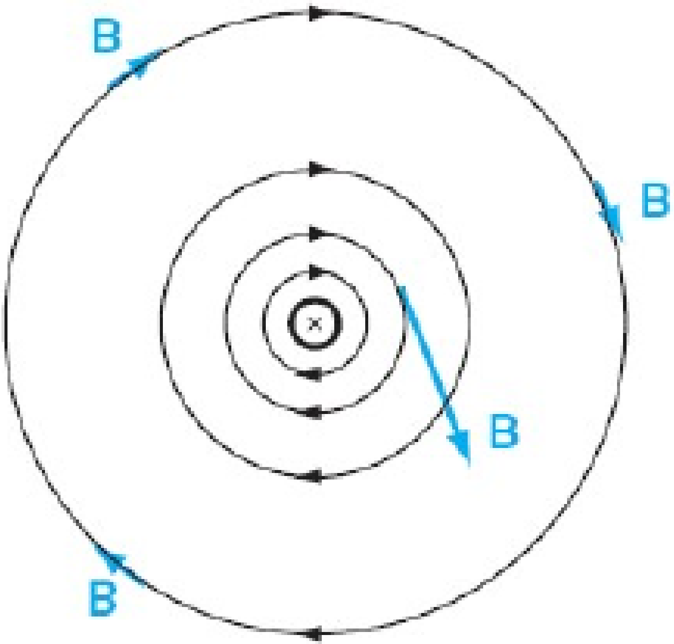


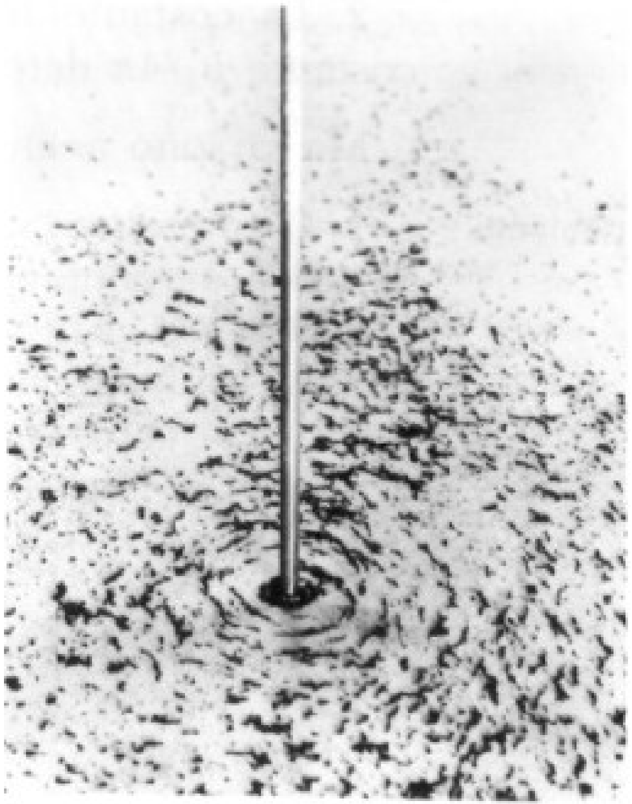
$$d\vec{\mathbf{F}} = dq\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} = dq\frac{d\vec{\mathbf{l}}}{dt} \times \vec{\mathbf{B}} = \frac{dq}{dt}d\vec{\mathbf{l}} \times \vec{\mathbf{B}} = Id\vec{\mathbf{l}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

[APPLET: attrazione/repulsione tra due fili percorsi da correnti](https://nationalmaglab.org/education/magnet-academy/watch-play/interactive/parallel-wires)
https://nationalmaglab.org/education/magnet-academy/watch-play/interactive/parallel-wires

Riassumendo ……

- La corrente elettrica è "sorgente" del campo magnetico
- Le linee del campo magnetico sono circonferenze concentriche con la corrente





Campo Magnetico H

Ricordiamo che in elettrostatica abbiamo introdotto due vettori legati tra di loro dalle proprietà del dielettrico nel quale sono immersi:

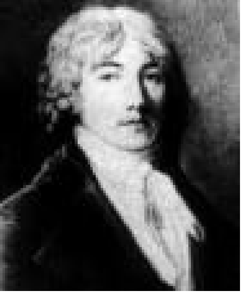
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

Allo stesso modo in magnetostatica è possibile introdurre un vettore legato all' vettore induzione magnetica dalle proprietà del materiale. Questo vettore sarà indipendente dal materiale e lo chiameremo: CAMPO MAGNETICO H

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$[H] = \left[\frac{T}{Tm} A\right] = \left[\frac{A}{m}\right]$$

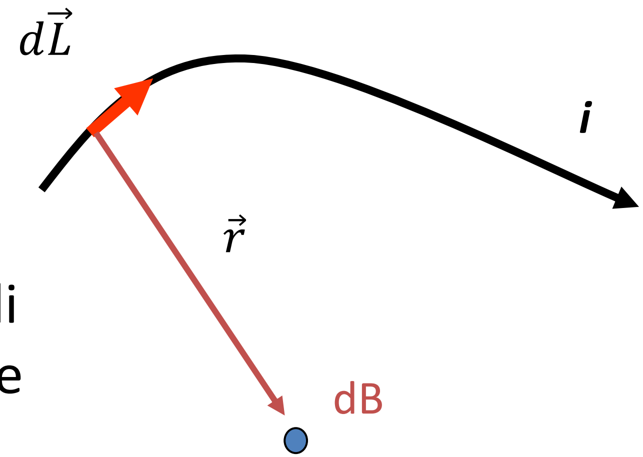
Il legame tra i due vettori è rappresentato dalle proprietà magnetiche del mezzo riconducibili alla "permeabilità magnetica" μ:



Jean-Baptiste
Biot (1774-1862)

Legge di Biot-Savart

Felix Savart
(1791-1841)



- Legge che lega la corrente al campo magnetico prodotto.
- Scegliere un elementino infinitesimo di lunghezza ***dL*** su cui scorre una corrente *i*
- Il campo ***dB*** prodotto da questo elemento in un punto posto in ***r*** è dato dalla legge di Biot-Savart

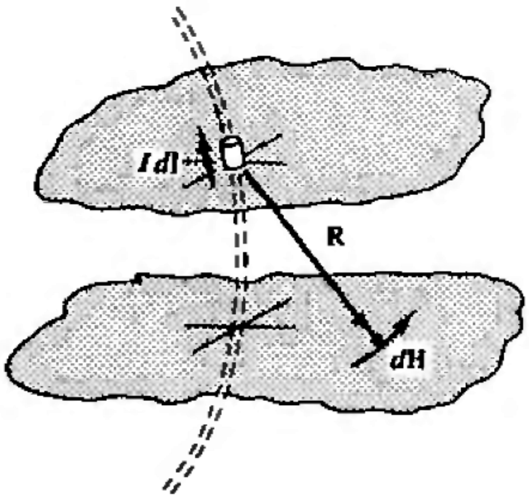
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i d\vec{L} \times \vec{r}}{r^3}$$

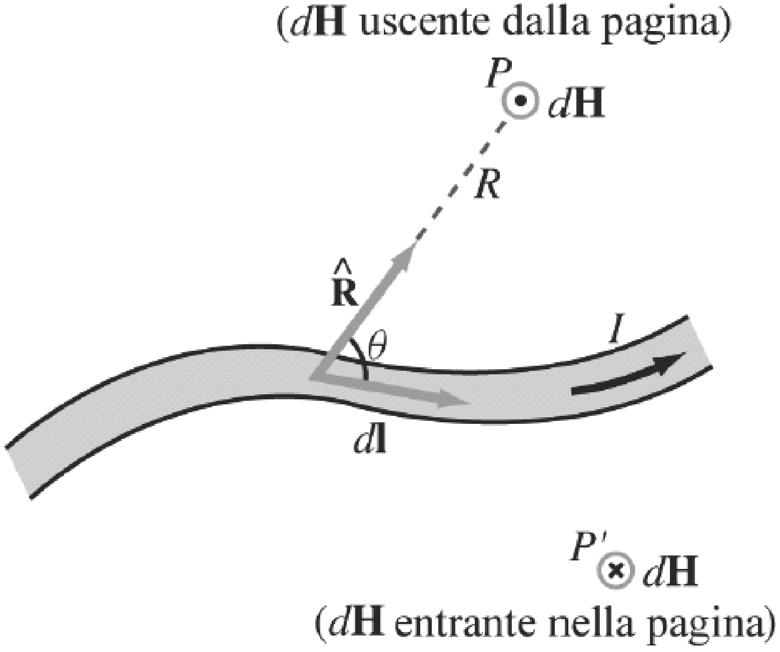
$\mu_0 = 4\pi x 10^{-7}$ He/m
Permeabilità magnetica del vuoto

Legge di Biot-Savart

Se consideriamo una corrente che percorre un percorso chiuso C, si ottiene:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \mu_0 \oint_C I \frac{d\vec{l} \times \hat{R}}{4\pi R^2} = \mu_0 \oint_c I \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{4\pi R^3}$$

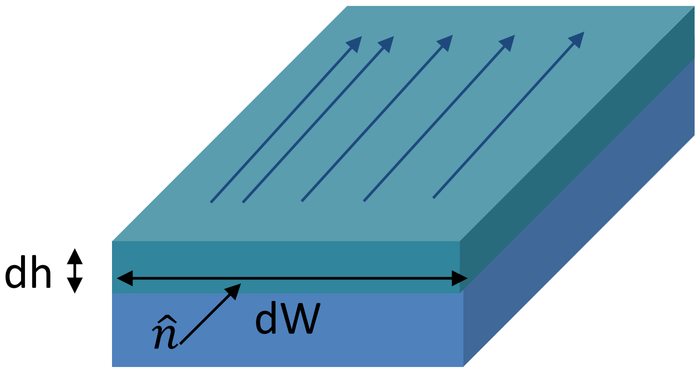




Corrente superficiale

Ricordiamo che la corrente rappresenta il numero di cariche che attraversano una superficie per unità di tempo.
La densità di corrente invece rappresenta la corrente per unità di superficie e si misura in A/m^2
Tra di loro sono legate da questa relazione

$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_A \vec{J} \cdot dhdW\hat{n}$$

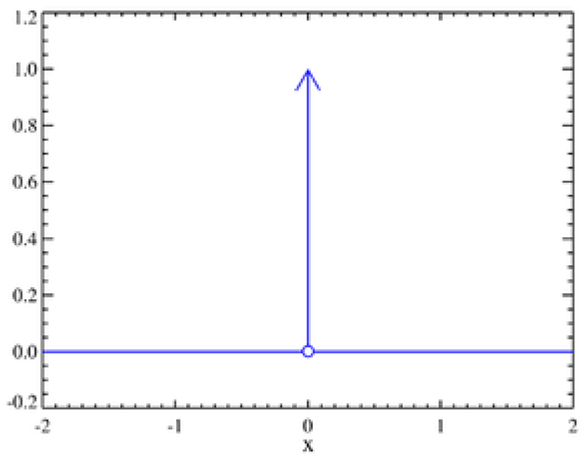


In alcune situazioni (conduttori ideali) le cariche stanno solamente sulla superficie esterna del materiale. In questo caso si introduce il concetto di corrente superficiale. In particolare la densità di corrente superficiale Js che scorre attraverso una superficie di spessore dH infinitesimo che è legata alla densità di corrente in questo modo

$$\vec{J} = J_S(W)\delta(h)\hat{n}$$

Funzione delta di Dirac

Rappresentazione grafica della delta



Delta come limite di successioni

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}}\, e^{-nx^2}$$

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{rect(\frac{x}{n})}{n}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$$

Proprietà della delta

$$\mathcal{F}^{-1}(k) = k\delta(t)$$

Antitrasformata di una costante è una delta di dirac

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

La derivata di una funzione a gradino è una delta di dirac

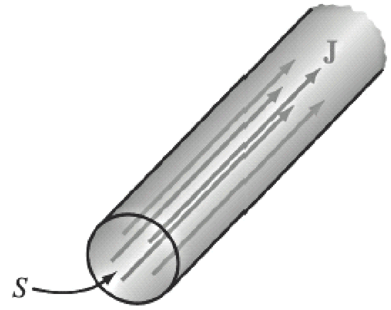
Legge di Biot-Savart per distribuzioni volumetriche o superficiali di corrente

Il prodotto I d**l** può essere facilmente ricondotto alla densità di corrente volumetrica o superficiale da:

$$I d\vec{l} = \vec{J} dV = \vec{J}_s dS \quad [J] = \frac{A}{m^2} \quad [J_s] = \frac{A}{m}$$

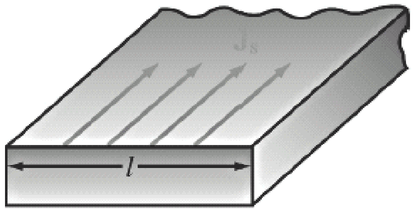
In tal caso, si ottiene:

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} \times \hat{R}}{R^2} dV \quad \left[\frac{A}{m}\right]$$



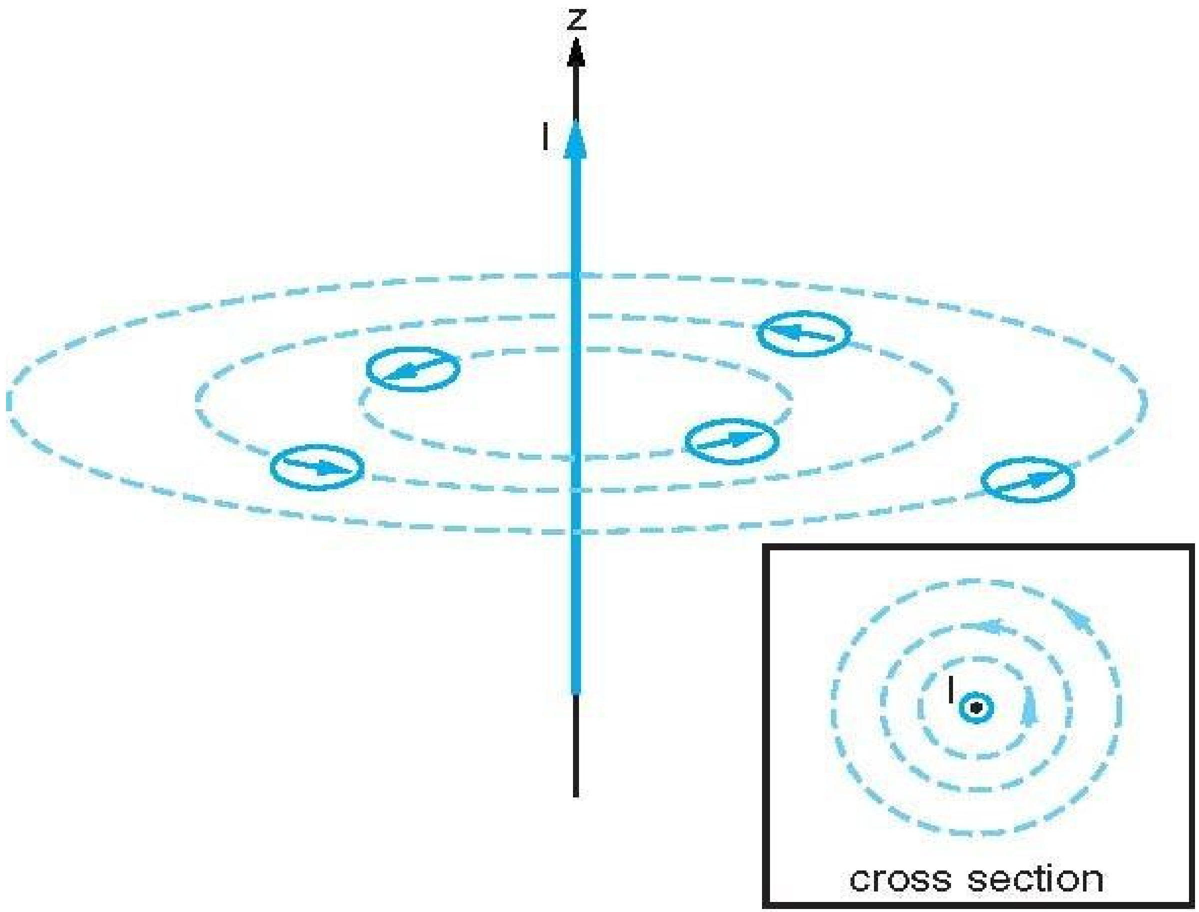
(a) Densità volumetrica di corrente **J** in (A/m²)

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}_s \times \hat{R}}{R^2} dS \quad \left[\frac{A}{m}\right]$$



(b) Densità superficiale di corrente $\mathbf{J}_s$ in (A/m)

Campo magnetico prodotto da un filo percorso da corrente



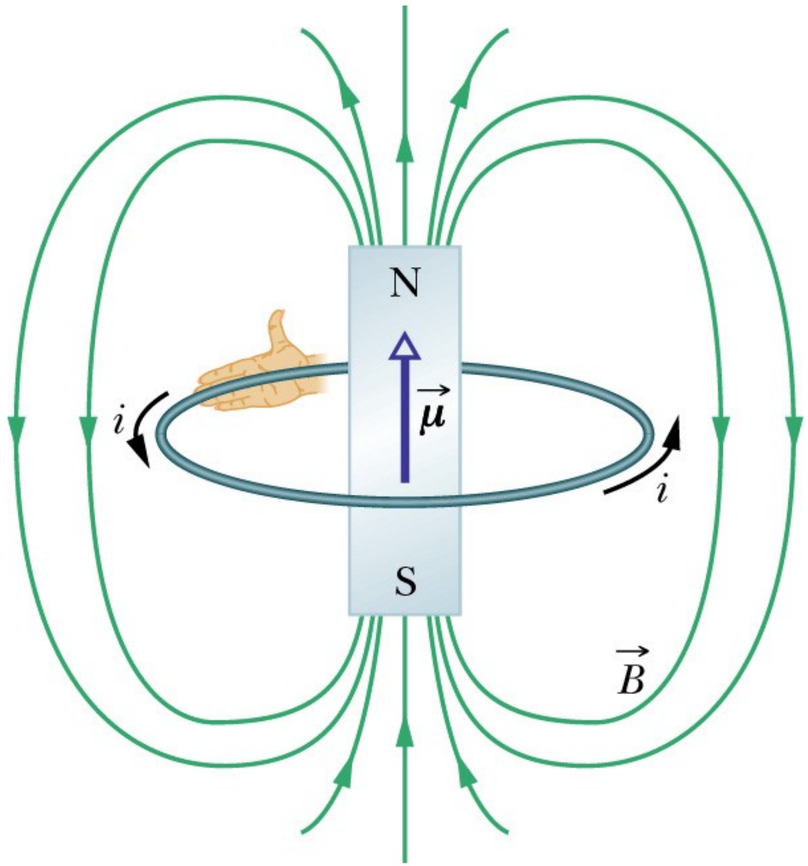
Per la direzione del campo B vale la regola della mano destra. Se il pollice punta verso la corrente la mano si richiude dando la direzione del campo B

[APPLET: campo magnetico prodotto da un filo infinito](http://www.falstad.com/vector3dm/)

http://www.falstad.com/vector3dm/

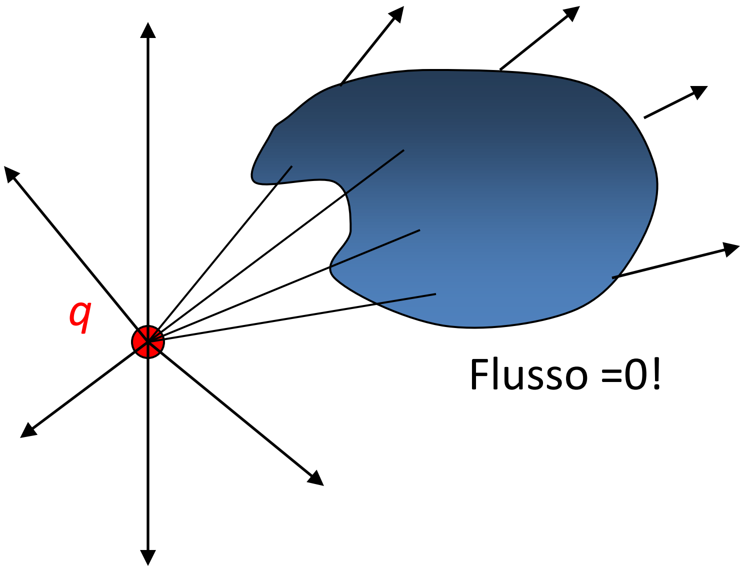
Campo magnetico di una spira di corrente

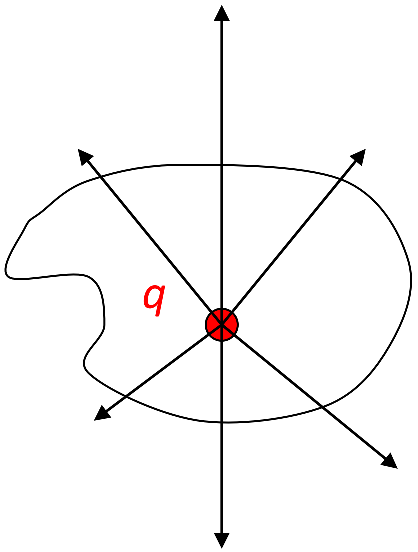
Un loop circolare (detto spira) su cui circola una corrente viene anche chiamato dipolo magnetico .
E' possibile calcolare il campo B utilizzando la legge di Biot-Savart:



Ricordate la legge di Gauss?

Data una superficie arbitraria chiusa il flusso di campo elettrico attraverso di essa è proporzionale alla carica racchiusa all'interno della superficie.

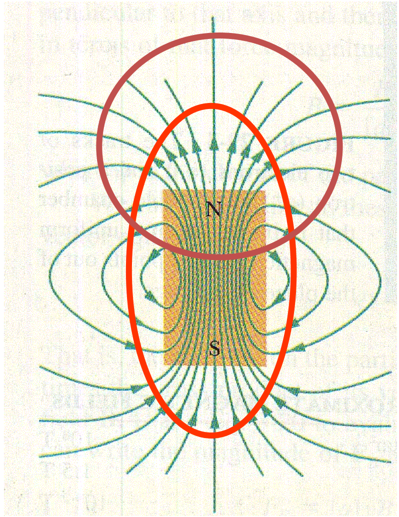




$$\boxed{\Phi \equiv \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

Legge di Gauss per il magnetismo:

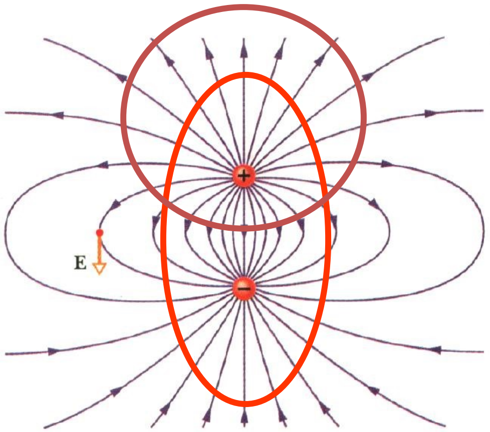
Non esistono poli isolati! Le linee del campo magnetico si richiudono su se stesse! Il campo magnetico attraverso una superficie chiusa ha sempre un flusso nullo.



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

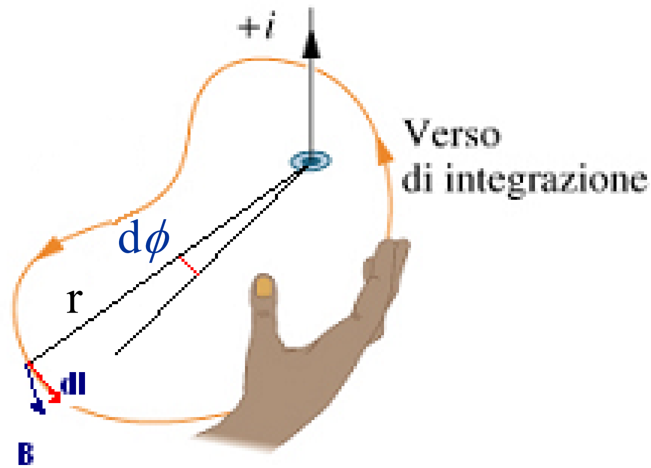
Campo solenoidale

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



Legge di Ampère

Calcoliamo la circuitazione di **B** lungo un arbitrario percorso chiuso intorno ad una corrente filiforme



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\varphi} \cdot d\vec{l}$$

$$dl = r d\varphi \quad \Rightarrow \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\varphi = \mu_0 I$$

Risultato ottenuto per un caso particolare ma di portata generale

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$ Legge di Ampere

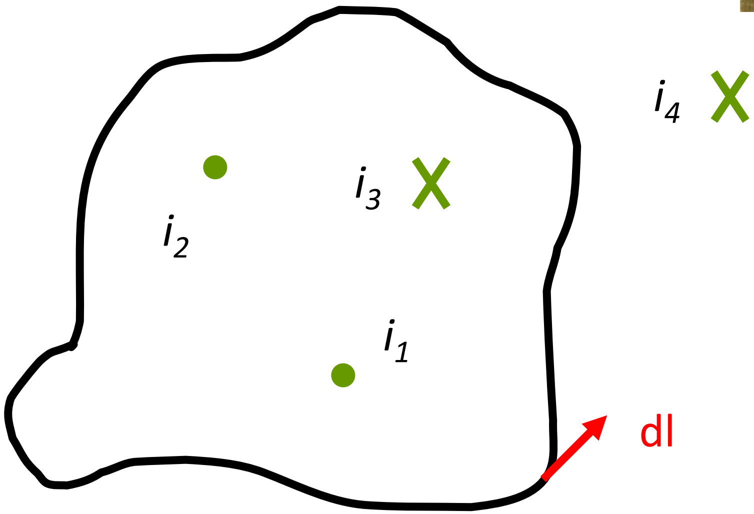
$\overrightarrow{dl} = dr\hat{r} + rd\varphi\hat{\varphi} + dz\hat{z}$ Coordinate cilindriche

$\overrightarrow{dl} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + rsin\theta d\varphi\hat{\varphi}$ Coordinate sferiche

Legge di Ampere: “l’equivalente” della legge di Gauss per il campo B

$$\oint_{\text{loop}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

$$\oint_{\text{loop}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = i$$



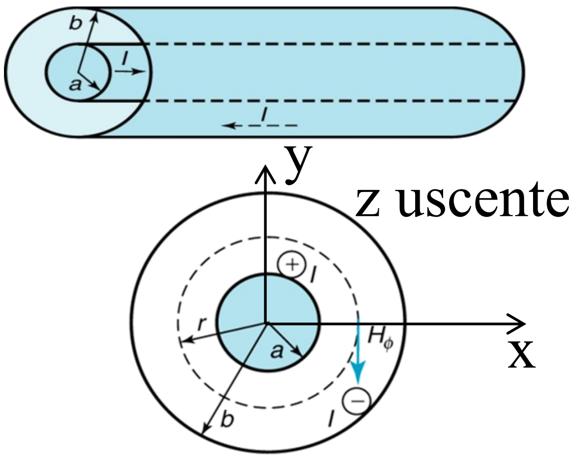
$$\oint_{\text{loop}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_1 + i_2 - i_3)$$

Per il segno delle correnti dobbiamo utilizzare la regola della mano destra

Come per la legge di Gauss per il campo elettrico, è possibile sfruttare le simmetrie per ricavare il campo B.

Applicazioni della legge di Ampere: due conduttori concentrici 1/2

Supponiamo di avere due conduttori concentrici di raggio a e b su cui fluisce la stessa corrente I, ma in direzioni opposte. Applichiamo la legge di Ampere e sfruttiamo la simmetria del sistema. Consideriamo una circonferenza di raggio r intermedio tra a e b.



La circonferenza racchiude una superficie (il cerchio di raggio r e area πr^2) che viene attraversata dalla densità di corrente **J** lungo -z, per una corrente totale pari ad -I, avendo ipotizzato d**S** orientata lungo z e d**l** lungo **φ**, secondo la regola della mano destra.

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \vec{H} \cdot r d\varphi \hat{\varphi} = \int_0^{2\pi} (-H_\varphi \hat{\varphi}) \cdot r d\varphi \hat{\varphi} = -H_\varphi r \int_0^{2\pi} d\varphi = -2\pi r H_\varphi =$$

$$= \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_S -J_z \hat{z} \cdot dS \hat{z} = -\int_S J_z dS = -I \quad \Rightarrow \quad H_\varphi = \frac{I}{2\pi r} \quad a < r < b$$

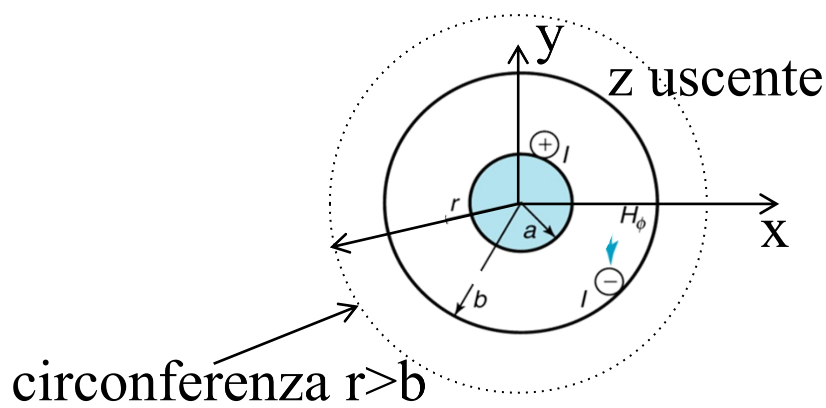
Applicazioni della legge di Ampere: due conduttori concentrici 2/2

r<a: Poiché supponiamo il conduttore ideale, la corrente è distribuita sulla superficie del conduttore. Quindi, all'interno del conduttore ideale la corrente è pari a zero così come lo è il campo magnetico.
r>b: Consideriamo ora una circonferenza di raggio r, con r>b.

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \vec{H}\cdot r d\phi\hat{\phi} = \int_0^{2\pi} (-H_\phi\hat{\phi})\cdot r d\phi\hat{\phi} = -H_\phi r\int_0^{2\pi} d\phi = -2\pi r H_\phi =$$

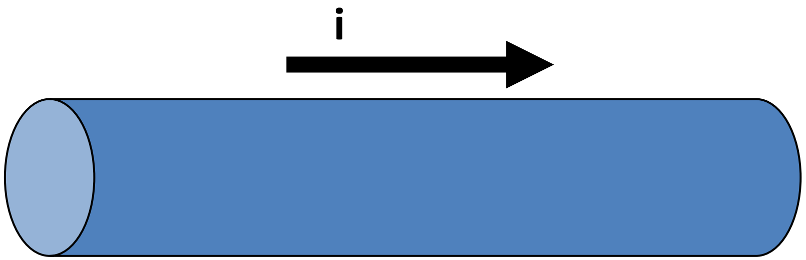
$$= \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J}_{\text{int}}\cdot d\vec{S} + \int_S \vec{J}_{ext}\cdot d\vec{S} = -I + I = 0$$

$$\mathrm{H}_\varphi = 0 \quad \mathrm{r} > \mathrm{b}$$



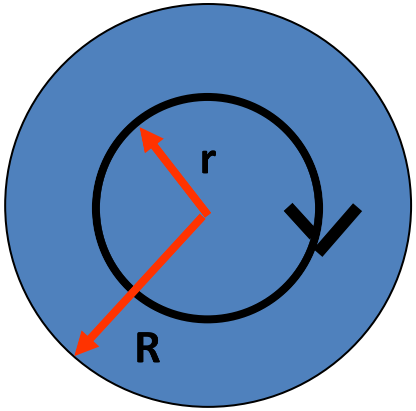
Applicazioni della legge di Ampere: campo magnetico in un conduttore reale 1/2

- Una corrente uniformemente distribuita, scorre su un filo infinitamente lungo, di sezione circolare di raggio R.
- Calcolare il campo magnetico in tutto lo spazio.



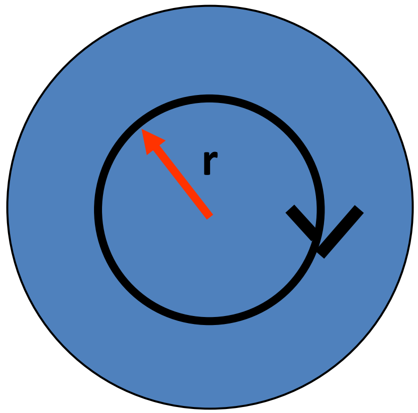
- Per la regola della mano destra la direzione di B sarà azimutale:
- Il pollice diretto come la corrente, la mano si chiude intorno al filo
- Inoltre per simmetria il campo B dipenderà solamente dalla distanza r

$$\oint_C B\hat{\varphi} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$



Applicazioni della legge di Ampere: campo magnetico in un conduttore reale 2/2

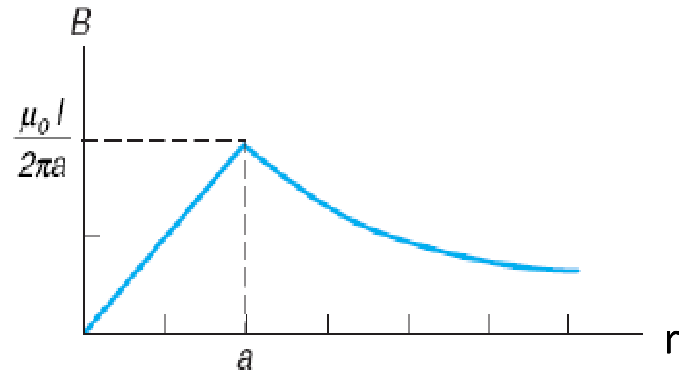
$$\oint_C B\hat{\varphi} \cdot dl\hat{\varphi} = \mu_0 i$$



Prendiamo come percorso amperiano una circonferenza concentrica

$$B(2\pi r) = \mu_0 i_{racchiusa}$$

$$B = \frac{\mu_0 i_{racchiusa}}{2\pi r}$$



$$i_{racchiusa} = J(\pi r^2) = \frac{i}{\pi R^2}\pi r^2 = i\frac{r^2}{R^2}$$

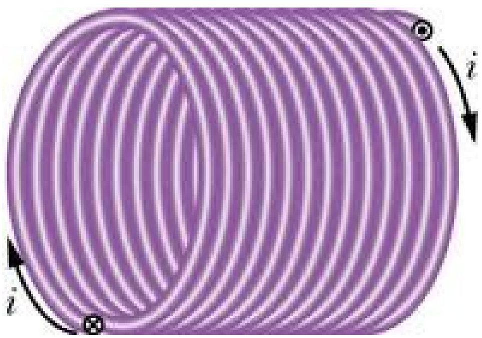
$$\boxed{B = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2}}$$

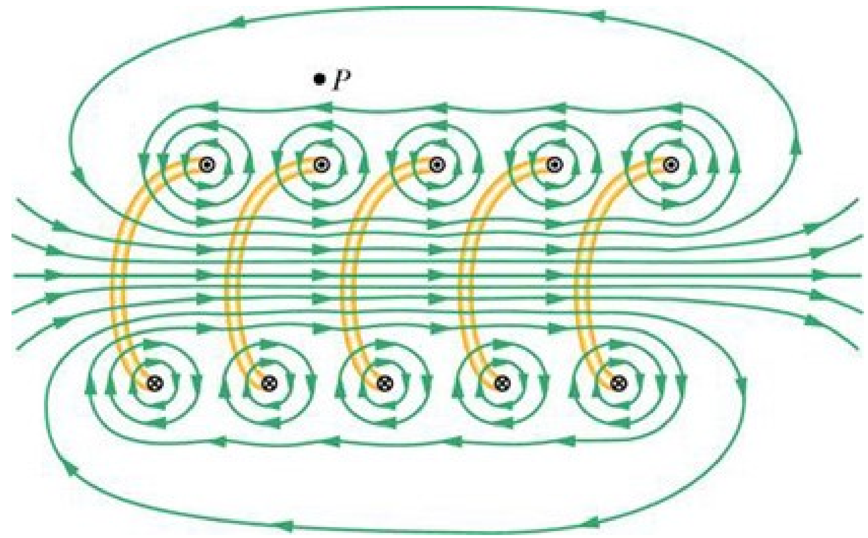
r < R

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}}$$

per r>R, $i_{racch}=i$

Solenoidi





Le linee di campo prodotte da un solenoide seguono la regola della mano destra:
La mano si chiude lungo la corrente, il pollice indica la direzione del campo B concatenato con la corrente

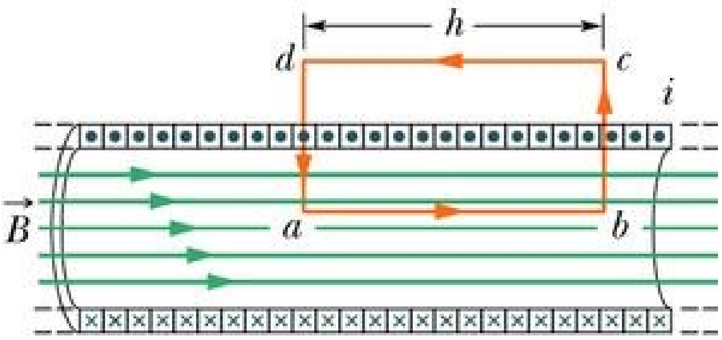
Per un solenoide reale di lunghezza finita il campo B si richiude al suo esterno, ma l’ampiezza del campo interno è molto piu’ elevata di quello esterno

Solenoidi: calcolo del campo B

Ipotizziamo un solenoide infinitamente esteso: le linee di campo si richiudono all'infinito e il campo B all'esterno del solenoide sarà nullo
Applichiamo la legge di Ampere e utilizziamo una linea che si chiude all'esterno del solenoide

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{racc}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 + Bh + 0 + 0$$



N_h = numero di spire in un tratto di solenoide lungo h

$$i_{enc} = iN_h = i(N/L)h = inh$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc} \Rightarrow Bh = \mu_0 inh$$

$$\Rightarrow B = \mu_0 in$$

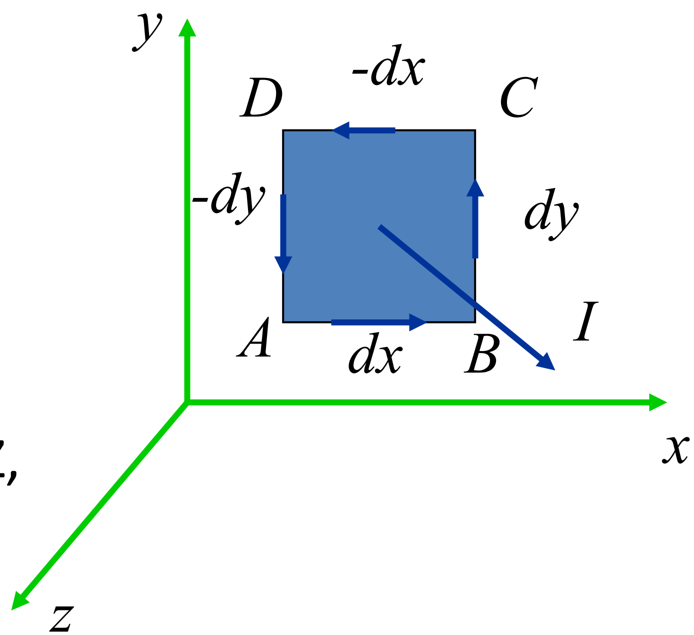
Un operatore differenziale per la circuitazione: il rotore

Applichiamo il Th di Ampère ad una spira infinitesima, nel piano XY

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_y dy - B_y' dy - B_x dx + B_x' dx$$

$$= \left(B_y - B_y{'}\right) dy - (B_x - B_x') dx$$

$$= \frac{\partial B_y}{\partial x} dxdy - \frac{\partial B_x}{\partial y} dxdy = \mu_0 I = \mu_0 J_z dxdy$$



Scegliendo sup. elementari parallele ad YZ ed XZ, analogamente:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 J_x \qquad \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 J_y$$

Un operatore differenziale per la circuitazione: il rotore

Diremo che il vettore μJ è dato dal rotore(B):

$$\nabla \times \vec{B} = \left[\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right]\vec{\mathbf{u}}_x + \left[\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right]\vec{\mathbf{u}}_y + \left[\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right]\vec{\mathbf{u}}_z$$

$$Curl(\vec{\mathbf{B}}) = \nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{u}}_x & \vec{\mathbf{u}}_y & \vec{\mathbf{u}}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{J}}$$

Th di Ampère in forma differenziale

Definizione e significato fisico del rotore

$$\nabla \times \vec{A} \cdot \hat{n} = \lim_{\Delta S_i \to 0} \frac{\oint_{C_i} \vec{A} \cdot d\vec{l}}{\Delta S_i}$$

Il rotore del vettore A è un vettore:
La cui **ampiezza** è la massima circuitazione del vettore A per unità di superficie, quando questa tende a zero
La cui **direzione** è la normale alla superficie, orientata, che rende massima la circuitazione

APPLET: significato del rotore
http://mathinsight.org/curl_idea

APPLET: Attenti!!! Il rotore è un vettore locale
http://mathinsight.org/curl_subtleties

Teorema di Stokes

$$\int_S \nabla \times \overrightarrow{\mathbf{A}} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \overrightarrow{\mathbf{A}} \cdot d\vec{\mathbf{l}}$$