

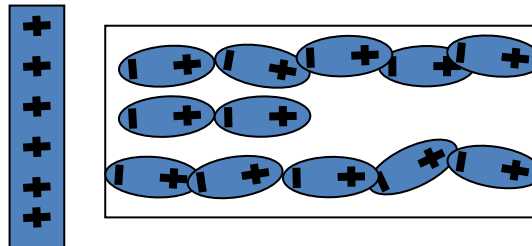
Mezzi reali (dielettrici non ideali)

Ricordiamo il comportamento di un dielettrico in presenza di un campo elettrico esterno:

- 1) Polarizzazione atomica e molecolare: gli atomi e le molecole (es. NaCl) si polarizzano e si orientano secondo la direzione del campo elettrico esterno;
- 2) Polarizzazione per orientamento: le molecole già polarizzate (es. acqua) si orientano secondo la direzione del campo esterno;

A questi effetti se ne può aggiungere un altro:

- 3) Polarizzazione di carica spaziale (tipico dei tessuti biologici) anche detta polarizzazione ionica o interstiziale: le cariche libere di muoversi vengono spinte dal campo esterno, ma la presenza di ostacoli al loro libero fluire (membrane cellulari o altro tipo) creano degli accumuli di cariche positive e negative sui lati opposti di queste barriere creando dei dipoli orientati come il campo



Questo fenomeno crea un momento di dipolo elettrico netto P che si sovrappone al campo esterno producendo una modifica dello stesso all'interno del materiale

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

Dielettrico in presenza di un campo tempo variante

Il momento di dipolo elettrico che si crea con un campo elettrico esterno applicato ad un dielettrico cambia con la frequenza del campo esterno, questo vuole dire che la costante dielettrica dipende dalla frequenza.

Vediamo come:

- 1) Polarizzazione di un atomo sottoposto ad un campo esterno: gli elettroni vengono separati dal nucleo, ma la loro forza di attrazione si oppone a questo spostamento creando un meccanismo tipo molla. Il movimento degli elettroni può essere descritto come un moto armonico sollecitato da una forza sinusoidale (il campo) con perdite dovute ad attriti. (Polarizzazione elettronica).
- 2) Polarizzazione di molecole formate da ioni di atomi diversi all'interno di reticoli cristallini(es. NaCl): stesso effetto della polarizzazione degli atomi (polarizzazione atomica).
- 3) Orientamento dei dipoli permanenti (tipo acqua): l'orientamento delle molecole viene rallentato dall'effetto di movimento random dovuto alla temperatura. A questo effetto di riduzione della polarizzabilità si aggiunge un meccanismo di perdite legato al ritardo di orientamento delle molecole rispetto alle oscillazioni del campo elettrico.
(Polarizzazione dipolare)

Permettività dielettrica complessa

Supponiamo di lavorare nel dominio dei fasori: segnali in regime permanente armonico

Consideriamo la 4a equazione di Maxwell in un mezzo omogeneo uniforme caratterizzato da una conducibilità σ dovuta alle cariche libere e da un vettore di polarizzazione P dovuto agli effetti di polarizzazione appena visti:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + j\omega(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})$$

Vediamo come diventa l'equazione per 3 mezzi diversi:

- 1) Dielettrico ideale senza perdite
- 2) Dielettrico con perdite ohmiche
- 3) Dielettrico con perdite di polarizzazione

Permettività dielettrica complessa

1) Dielettrico ideale senza perdite: $\sigma=0$; $\angle \vec{P} = \angle \vec{E}$ cioè P ed E sono in fase

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = j\omega(\epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E}) = j\omega \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = j\omega(\epsilon_0 \epsilon_r - j0) \vec{E}$$

2) Dielettrico reale con perdite ohmiche: $\sigma \neq 0$; $\angle \vec{P} = \angle \vec{E}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + j\omega(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \sigma \vec{E} + j\omega \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = j\omega \left(\epsilon_0 \epsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E}$$

3) Dielettrico reale con perdite di polarizzazione: $\sigma=0$ $\angle \vec{P} \neq \angle \vec{E}$ cioè P ed E non sono in fase

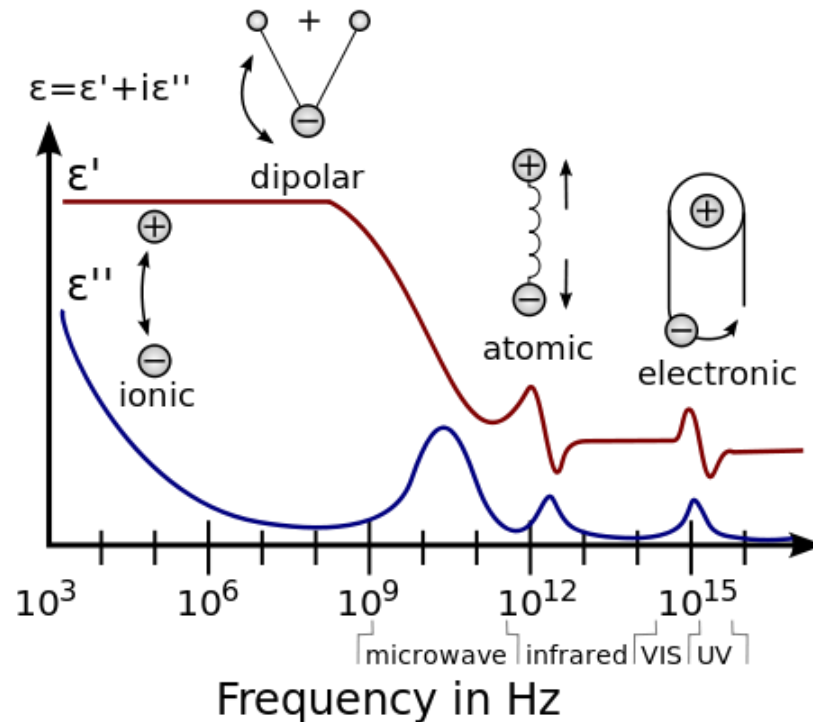
$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi e^{-j\psi} \vec{E} = \epsilon_0 \chi (\cos \psi - j \sin \psi) \vec{E}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} &= j\omega(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \\ &= j\omega(\epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi (\cos \psi - j \sin \psi) \vec{E}) = j\omega(\epsilon_0 (1 + \chi \cos \psi) - j \epsilon_0 \chi \sin \psi) \vec{E} \end{aligned}$$

Permittività dielettrica complessa

In generale un dielettrico può essere rappresentato da una costante dielettrica complessa che dipenderà dalle caratteristiche del mezzo e dai meccanismi di perdita coinvolti.

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$$



Non è possibile sperimentalmente separare l'effetto della conducibilità ohmica dall'effetto di perdite per altri meccanismi per questo motivo spesso si parla di conducibilità in senso generale e si indica

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 - j \frac{\sigma}{\omega}$$

Esempi di costanti dielettriche

Sample	Dielectric Constant at the Frequency, GHz, of			Loss Tangent, (tan delta) at the Frequency, GHz, of		
	1.00	5.00	10.00	1.00	5.00	10.00
FR-3703	1.08	1.05	1.04	0.00164	0.00172	0.00170
FR-3710	1.16	1.08	1.07	0.00177	0.00183	0.00184
FR-3718	1.21	1.13	1.11	0.00218	0.00229	0.00233
FR-7106	1.09	1.05	1.03	0.00171	0.00180	0.00186
FR-7108	1.13	1.11	1.10	0.00174	0.00183	0.00185
FR-7115	1.18	1.10	1.08	0.00206	0.00219	0.00222
R-9807	1.10	1.05	1.05	0.00176	0.00187	0.00191

Campo elettromagnetico in mezzi con perdite

- Abbiamo visto come in generale un mezzo con perdite può essere rappresentato con una costante dielettrica complessa che tiene conto in generale delle perdite di potenza tramite la conducibilità e della polarizzazione tramite la permeabilità elettrica.

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'' = \varepsilon_0\varepsilon_r - j\frac{\sigma}{\omega}$$

- Per cui l'equazione di Ampère diventa (fasori)

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon\vec{\mathbf{E}} = j\omega\left(\varepsilon_0\varepsilon_r - j\frac{\sigma}{\omega}\right)\vec{\mathbf{E}}$$

Campo elettromagnetico in mezzi con perdite

- Calcoliamo la divergenza dell'equazione di Ampere in un mezzo con perdite: ricordando che la divergenza di un rotore è nulla, abbiamo :

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{\mathbf{H}} = 0 = j\omega \left(\varepsilon_0 \varepsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \nabla \cdot \vec{\mathbf{E}}$$

- Per cui

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \varepsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = \nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho = 0$$

- Le cariche libere sono già considerate nella conducibilità, ecco perché troviamo che la divergenza del vettore spostamento elettrico è zero.

Campo elettromagnetico in mezzi con perdite

□ Allora, dalla legge di Faraday

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\vec{\mathbf{H}} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\nabla \times \vec{\mathbf{H}}$$

□ Usando la solita identità per il rotore di rotore, ricordando che la divergenza di E è nulla, e sostituendo l'espressione del rotore di H

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\mathbf{E}} = \nabla\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} - \nabla^2 \vec{\mathbf{E}}$$



$$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = j\omega\mu\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = j\omega\mu \cdot j\omega \left(\varepsilon_0 \varepsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{\mathbf{E}} = -\omega^2 \mu \left(\varepsilon_0 \varepsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{\mathbf{E}} = -\omega^2 \mu \varepsilon_c \vec{\mathbf{E}}$$



$$\boxed{\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} - \gamma^2 \vec{\mathbf{E}} = 0} \quad \gamma^2 = -\omega^2 \mu \varepsilon_c$$

Equazione d'onda

Campo elettromagnetico in mezzi con perdite

Supponiamo di risolverla sotto le stesse ipotesi utilizzate per i mezzi senza perdite:

- 1) Nessuna variazione nella direzione x ed y;
- 2) Campo elettrico diretto lungo x;

La soluzione dell'equazione la conosciamo già:

$$E_x = E_x^+ e^{-\gamma z} + E_x^- e^{+\gamma z} \quad H_y = \frac{E_x^+}{\eta} e^{-\gamma z} - \frac{E_x^-}{\eta} e^{+\gamma z}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = |\eta| e^{j\theta_\eta}$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} - 1 \right]} \quad \beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} + 1 \right]}$$

Campo elettromagnetico in mezzi con perdite

In generale per un'onda che si propaga nella direzione z la soluzione sarà:

$$\vec{E} = E_x^\pm e^{\mp \alpha z} e^{\mp j\beta z} \hat{x} + E_y^\pm e^{\mp \alpha z} e^{\mp j\beta z} \hat{y}$$

$$\vec{H} = H_x^\pm e^{\mp \alpha z} e^{\mp j\beta z} \hat{x} + H_y^\pm e^{\mp \alpha z} e^{\mp j\beta z} \hat{y} = \mp \frac{E_y^\pm}{\eta} e^{\mp j\beta z} \hat{x} \pm \frac{E_x^\pm}{\eta} e^{\mp j\beta z} \hat{y}$$

Vettore di Poynting in mezzi con perdite

Se $\mathbf{E}_x^\pm = |\mathbf{E}_x^\pm| e^{j\theta^\pm}$

$$\mathbf{E}_x = |\mathbf{E}_x^\pm| e^{\mp\alpha z} e^{\mp j\beta z} e^{j\theta^\pm}$$

$$\mathbf{H}_y = \pm \frac{|\mathbf{E}_x^\pm|}{\eta} e^{\mp\alpha z} e^{\mp j\beta z} e^{j\theta^\pm} e^{-j\theta_\eta}$$

Notare che $\mathbf{E}^{+/-}$ ed $\mathbf{H}^{+/-}$ non sono più in fase

$$\vec{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}^*) = \text{Re} \left[\frac{1}{2} \frac{|\mathbf{E}_x^\pm|^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} e^{j\theta_\eta} \right] \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{E}_x^\pm|^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos \theta_\eta \hat{\mathbf{z}}$$

Come vediamo la potenza trasportata si riduce durante la propagazione

Mezzi con perdite

Ritorniamo alla legge di Ampere-Maxwell nel caso generale:

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = j\omega \left(\varepsilon_0 \varepsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{\mathbf{E}} = j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{\mathbf{E}} + \sigma \vec{\mathbf{E}}$$

$$\vec{\mathbf{J}}_c = \sigma \vec{\mathbf{E}} \quad \text{Corrente di conduzione}$$

$$\vec{\mathbf{J}}_d = j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{\mathbf{E}} = j\omega \varepsilon \vec{\mathbf{E}} \quad \text{Corrente di spostamento}$$

Possiamo individuare due casi limite:

$$\sigma \ll \omega \varepsilon \quad \begin{array}{l} \text{Buon dielettrico} \\ \text{o dielettrico a} \\ \text{basse perdite:} \end{array} \quad \vec{\mathbf{J}}_c \ll \vec{\mathbf{J}}_d$$

$$\sigma \gg \omega \varepsilon \quad \text{Buon conduttore:} \quad \vec{\mathbf{J}}_d \ll \vec{\mathbf{J}}_c$$

Buon dielettrico

$$\sigma \ll \omega \varepsilon$$

E' possibile trovare delle espressioni approssimate per la costante di propagazione utilizzando gli sviluppi in serie:

$$\sqrt{1+x^2} \approx 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2} - 1 \right]} \approx \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2 - 1 \right]} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2} + 1 \right]} \approx \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2 + 1 \right]} = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$$

Buon dielettrico

Quindi, β rimane la stessa del caso ideale, ma compare un'attenuazione α proporzionale alla conducibilità del mezzo dielettrico

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left[\frac{Np}{m} \right] \quad \beta \approx \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \left[\frac{rad}{m} \right]$$

Per quanto riguarda l'impedenza d'onda, si ottiene:

$$(1 - x)^{-1/2} \approx 1 + \frac{x}{2}$$
$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}}} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 + j\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right) \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad [\Omega]$$

Buon conduttore

$$\sigma \gg \omega \varepsilon$$

In tal caso le espressioni per la costante di propagazione si semplificano in tal modo:

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2} - 1 \right]} \approx \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}} = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} = \sqrt{\pi f \mu \sigma} = \frac{1}{\delta}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2} + 1 \right]} \approx \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}} = \sqrt{\pi f \mu \sigma} = \frac{1}{\delta}$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \quad [m] \quad \text{profondità di penetrazione}$$

Buon conduttore

$$\gamma = \alpha + j\beta \approx \frac{1}{\delta}(1 + j)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \approx \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2\pi f\mu}{\sigma}} = (1+j) \sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}} = \frac{1+j}{\sigma\delta} \quad [\Omega]$$

Analizziamo le conseguenze di tali risultati considerando il campo elettromagnetico all'interno di un buon conduttore.

Supponiamo che un'onda elettromagnetica che si propaga nella direzione x entri all'interno di un buon conduttore infinitamente esteso. Il campo elettrico dell'onda è diretto lungo x e non ci sono variazioni del mezzo nella direzione x-y.

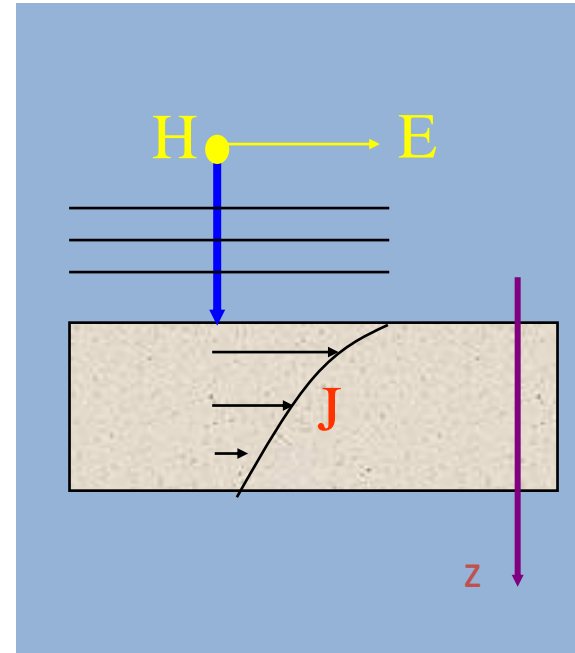
Propagazione delle onde piane in buoni conduttori

- La soluzione delle equazioni di Maxwell all'interno del mezzo è:

$$\vec{E} = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \hat{x}$$

- La densità di corrente segue l'andamento di E (grazie alla legge di Ohm), e in $x=0$ vale

$$J(x=0) = J_0 = \sigma E_0 = \sigma E_0 \hat{x}$$



$$\vec{E} = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \hat{x} = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-j\frac{z}{\delta}} \hat{x} = E_0 e^{-\sqrt{\pi f \mu \sigma} z} e^{-j\sqrt{\pi f \mu \sigma} z} \hat{x}$$

$$\vec{H} = \frac{E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}}{\eta} \hat{y} = \frac{\sigma \delta}{1+j} E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \hat{y} = \frac{\sigma \delta}{2} (1-j) E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \hat{y}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \sigma E_0 e^{-\sqrt{\pi f \mu \sigma} z} e^{-j\sqrt{\pi f \mu \sigma} z} \hat{x}$$

Effetto Pelle

□ Analizziamo i singoli contributi

$$E_z = E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-j\frac{x}{\delta}} = E_0 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

Termine di attenuazione

Termine di sfasamento

$$J_z = \sigma E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-j\frac{x}{\delta}}$$

□ Velocità di propagazione

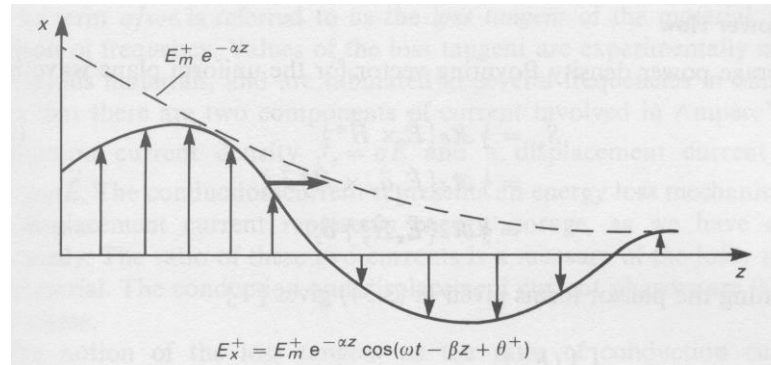
$$v = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$$

Esempio: rame $f=1\text{GHz}$

$$v \approx \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} = 1,3 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Come vediamo la velocità di riduce moltissimo dentro ad un buon conduttore

Effetto Pelle



Onda all'interno di un buon conduttore

$$\vec{E}(t, z) = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \hat{x}$$

Spessore di penetrazione δ : distanza alla quale il campo si riduce di $1/e=0,36$

$$\alpha \delta = 1 \quad \longrightarrow \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma \mu}} \quad \alpha = \beta = \frac{1}{\delta}$$

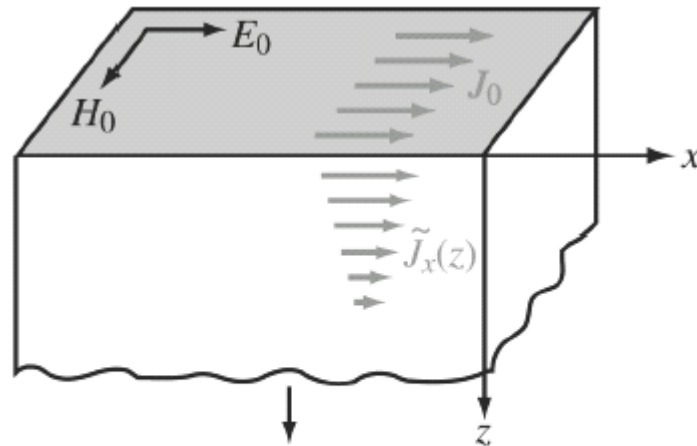
Esempio: rame $f=1\text{GHz}$

$$\delta = 2,1 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 2,1 \mu\text{m}$$

Effetto Pelle

$$\vec{E} = E_{x0} e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-j\frac{z}{\delta}} \hat{x} = E_{x0} e^{-\sqrt{\pi f \mu \sigma} z} e^{-j\sqrt{\pi f \mu \sigma} z} \hat{x} \quad \vec{H} = \frac{\sigma \delta}{1+j} E_{x0} e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-j\frac{z}{\delta}} \hat{y}$$

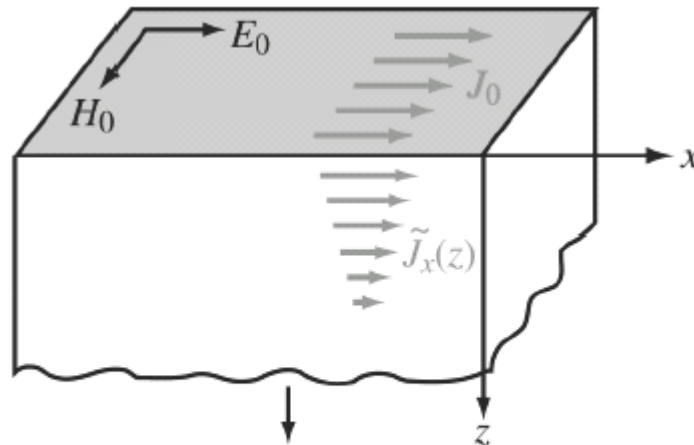
$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \sigma E_{x0} e^{-\sqrt{\pi f \mu \sigma} z} e^{-j\sqrt{\pi f \mu \sigma} z} \hat{x}$$



(a) $\tilde{J}_x(z)$ a decadimento esponenziale

Effetto Pelle

Come si può osservare, contrariamente a quanto avviene in condizioni statiche all'interno di un conduttore reale in cui la corrente si distribuisce uniformemente nella sezione del conduttore, nel caso dinamico ciò non è più vero. Infatti, essa si distribuisce con legge esponenziale decrescente a partire dalla superficie. In altre parole, si addensa su di essa creando il cosiddetto "effetto pelle": la densità di corrente si trova nello strato superficiale ("pelle") del conduttore.



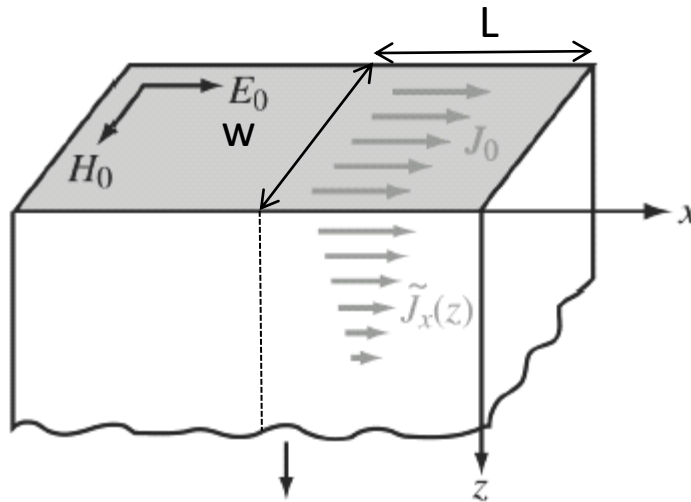
(a) $\tilde{J}_x(z)$ a decadimento esponenziale

Effetto Pelle

Questo effetto è tanto più pronunciato quanto più elevata è la frequenza. A distanza di 5δ dalla superficie, la densità di corrente ha un'ampiezza pari all'1% del suo valore sulla superficie.

Questo flusso di densità di corrente provoca una corrente pari a:

$$I = \int_0^w \int_0^\infty \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^w \int_0^\infty J_x dz dy = w \int_0^\infty \sigma E_{x0} e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-j\frac{z}{\delta}} dz = \frac{w\sigma\delta}{1+j} E_{x0} = J_{sx} w \quad [A]$$



(a) $\tilde{J}_x(z)$ a decadimento esponenziale

Effetto Pelle

Se consideriamo un tratto di conduttore lungo L , e largo w ci sarà una d.d.p ai capi di questo tratto pari a $E_0 L$. E' possibile calcolare l'impedenza di questo tratto di conduttore:

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{E_{x0} L}{\frac{w \sigma \delta}{1+j} E_{x0}} = \frac{1+j}{\sigma \delta} \frac{L}{w} = Z_s \frac{L}{w} \quad [\Omega] \quad Z_s = \frac{1+j}{\sigma \delta} \quad [\Omega]$$

J_{sx}

Impedenza di un tratto di conduttore infinitamente esteso di sezione trasversale unitaria ($w=1m$, $L=1m$), detta "impedenza superficiale"

$$Z_s = \frac{E_0}{J_{sx}} = R_s + j\omega L_s = \frac{1+j}{\sigma \delta} \quad [\Omega]$$

$$R_s = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} \quad [\Omega] \quad L_s = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\pi f \sigma}} \quad [H]$$

Effetto Pelle: dissipazione nel conduttore

Calcoliamo la potenza dissipata dall'onda dentro ad un conduttore infinitamente esteso di sezione trasversale unitaria. Possiamo applicare il teorema di Poynting all'onda che penetra nel conduttore e calcolare il flusso del vettore di Poynting su una superficie unitaria ortogonale alla direzione di propagazione

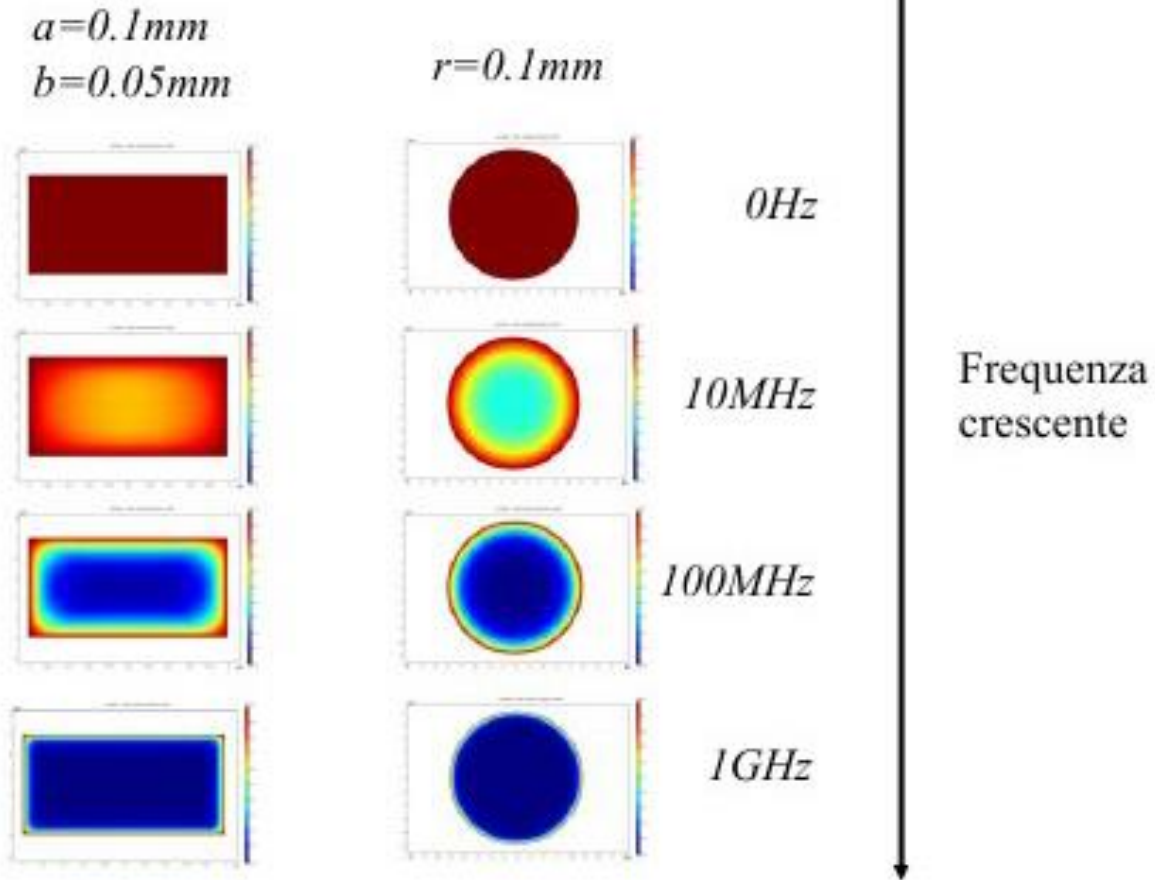
$$W_L = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E}_{x0} \times \vec{H}_{y0}^*) = \frac{1}{2} E_{x0} H_{y0}^* \hat{z}$$

Ricordiamo che: $H_{0y} = \frac{\sigma \delta}{1+j} E_{x0} = J_{sx} \quad \longrightarrow \quad \vec{H} = \hat{n} \times \vec{J}_s$

Dunque possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} W_L &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E}_{x0} \times \vec{H}_{y0}^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E_{x0} H_{y0}^*) \hat{z} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left((Z_s J_{sx})(J_{sx}^*)\right) = \frac{1}{2} R_s |J_{sx}|^2 \end{aligned}$$

Effetto pelle in un conduttore reale



Conduttori o dielettrici?

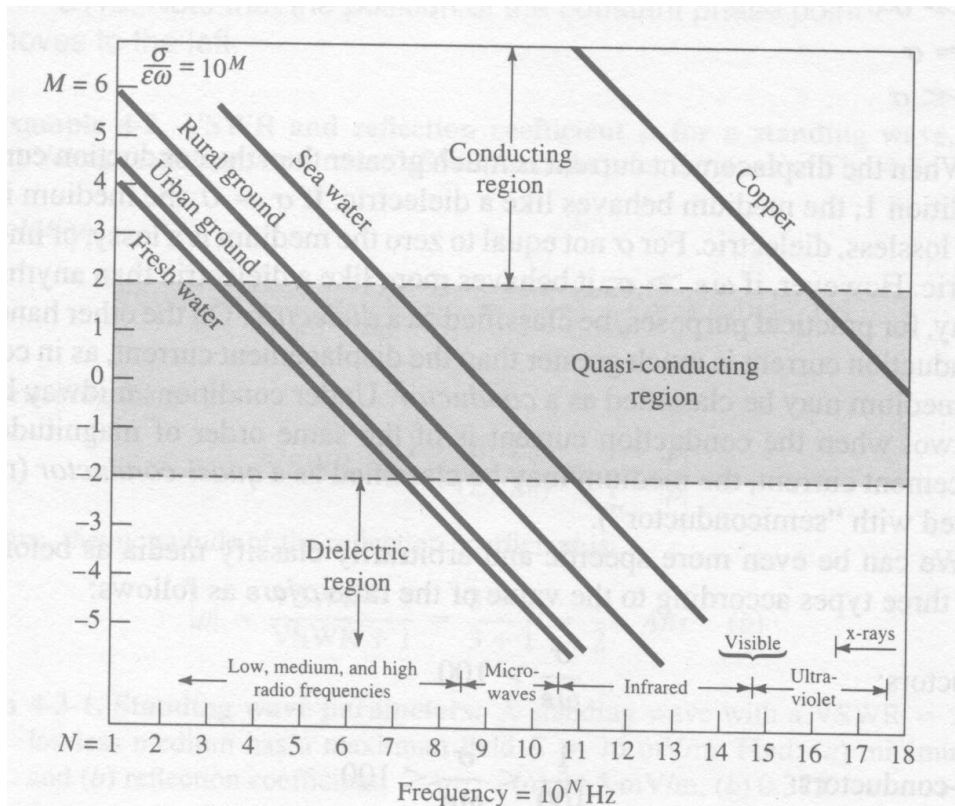


FIGURE 4-8

Ratio $\sigma/\omega\epsilon$ as a function of frequency for some common media (log-log plot). Low-frequency constants for these media are listed in Table 4-2. Note that fresh water and urban ground act like conductors at low frequencies but like dielectrics at high radio frequencies.