ANALISI MATEMATICA 1: 11/01/2021

COGNOME: NASA NOME: OMAR MATRICOLA: S1097765

ESERCIZIO 1: CONSIDERATA LA FUNZIONE $f(x) = \log x - \arctan(x-1)$.
SE NE DETERMINI:

1. DOMINIO, COMPORTAMENTO AGLI ESTREMI ED EVENTUALI ASINTOTI (3PT)
2. DERIVATA E SUO SEGNO (3PT)
3. INTERVALLI DI MONOTONIA, PUNTI DI MASSIMO E MINIMO ASSOLUTI E RELATIVI, NUMERO DI SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE $f(x)=0$ (6 PT)
4. SI DISEGNI IL GRAFICO QUALITATIVO DELLA FUNZIONE (3 PT)

ESERCIZIO 2: ~~STABILI~~ (1) STABILIRE PER QUALI VALORI DI $\alpha > 0$ È CONVERGENTE IL SEGUENTE INTEGRALE IMPROPRIO $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (1+x^{1/3})^3}\,dx$ (8PT)
(2) CALCOLARLO PER $\alpha = 1/3$ (7PT)

(1) $f(x) = \log x - \arctan(x-1)$

DOMINIO

1. $D_f: x>0 \Rightarrow D_f: x \in (0; +\infty)$

ESTREMI DEL DOMINIO $\lim_{x\to 0^+} \log x - \arctan(x-1) = -\infty - \arctan(-1) = -\infty$

$x=0$ È ASINTOTO VERTICALE A.V.

$\lim_{x\to+\infty} \log x - \arctan(x-1) = +\infty - \frac{\pi}{2} = +\infty$ A.Q.

POSSIBILE ESISTENZA DELL'ASINTOTO OBLIQUO PER $x \to +\infty$

A.Q.: $y = mx + q$ $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, m \neq 0$ $q = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$

$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x - \arctan(x-1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{\log x}{x}}_{\downarrow 0} - \underbrace{\frac{\arctan(x-1)}{x}}_{\downarrow 0} = 0 \Rightarrow \nexists$ A.Q.

PER LA GERARCHIA DEGLI INFINITI

~~SI RICADE NELLA~~

2. $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+(x-1)^2} \cdot 1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2-2x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2-2x+2} = \frac{x^2-2x+2-x}{x(x^2-2x+2)} =$

$= \frac{x^2-3x+2}{x(x^2-2x+2)}$

* FATTE QUESTE CONSIDERAZIONI, POSSO SEMPLIFICARE IL DENOMINATORE SENZA INCORRERE A PROBLEMI DI SEGNO

$f'(x) > 0$ $\frac{x^2-3x+2}{x(x^2-2x+2)} > 0$ *

* $>0 \ \forall x \in D_f$

$x^2-3x+2>0$

EQUAZIONE ASSOCIATA: $x^2-3x+2=0$ $\quad x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2}=\begin{cases}2\\1\end{cases}$

$\forall x \; x^2-3x+2>0 \longrightarrow x<1 \cup x>2$

LA DERIVATA PRIMA RISULTA POSITIVA $\forall x<1 \wedge \forall x>2$; NEGATIVA $\forall\; 1<x<2$

3.

	0	1	2
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

PER IL CRITERIO DI MONOTONIA, $f(x)$ RISULTA STRETTAMENTE CRESCENTE $\forall x\in(0;1) \wedge \forall x\in(2;+\infty)$, STRETTAMENTE DECRESCENTE $\forall x\in(1;2)$

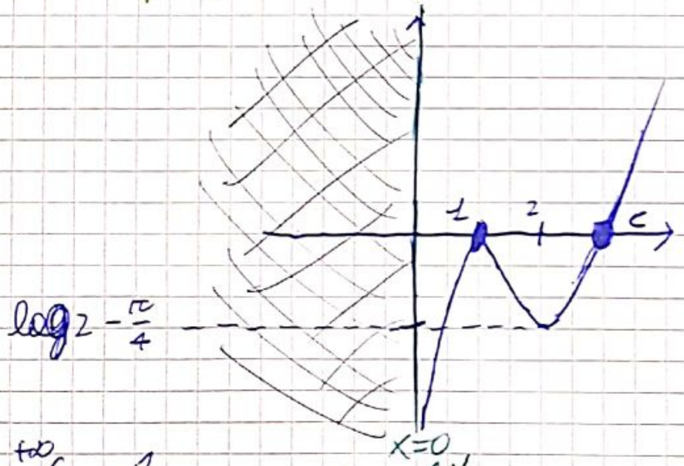
IN $x=1$ SI INCONTRA UN PUNTO DI MASSIMO RELATIVO $f(1)=\log 1-0=0$

IN $x=2$ SI INCONTRA UN PUNTO DI MINIMO RELATIVO $f(2)=\log 2-\frac{\pi}{4}<0$

NON CI SONO MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI, ESSENDO L'INSIEME DELLE IMMAGINI ILLIMITATO A DX E SX

DALLE PRECEDENTI CONSIDERAZIONI SUI LIMITI E SUI PUNTI DI MASSIMO E MINIMO, CONCLUDIAMO CHE $f(x)=0$ PRESENTA DUE SOLUZIONI: LA PRIMA È $f(1)=0$ E LA SECONDA È UN PUNTO $c \mid 2<c<+\infty$

4.



(2) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha(1+x^{\frac{1}{3}})^3}dx$ FUNZIONE CONTINUA IN $(0;+\infty)$

$\Rightarrow \underbrace{\int_0^1\frac{1}{x^\alpha(1+x^{\frac{1}{3}})^3}dx}_{1}+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha(1+x^{\frac{1}{3}})^3}dx}_{2}$

$1\to \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^\alpha(1+x^{\frac{1}{3}})^3}\sim\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^\alpha}$ CONVERGENTE $\forall\alpha<1$

$2\to \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha(1+x^{1/3})^3}\sim\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha(x^{1/3})^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha+1}}$ CONVERGENTE $\forall\alpha+1>1 \Rightarrow \alpha>0$

$\textcircled{1}\begin{cases}\alpha<1\end{cases}$
$\textcircled{2}\begin{cases}\alpha>0\end{cases}$

CALCOLO

$\frac{1}{} = \langle\, {}^{2}_{1}$

$x>2$; NEGATIVA

MONOTONIA, $f(x)$

$;1) \wedge \forall x \in (2;+\infty)$;

$x \in (1;2)$

$1) = \log 1 - 0 = 0$

$) = \frac{\ln 2}{\log 2} - \frac{10}{4} < 0$

AUMENTATO A DX E SX

DI MASSIMO

IONI: LA

$2 < c < +\infty$

$$\begin{cases} \alpha < 1 & (1) \\ \alpha > 0 & (2) \end{cases} \Longrightarrow \text{L'INTEGRALE CONVERGE} \Longleftrightarrow 0 < \alpha < 1$$

CALCOLO PER $\alpha = \frac{1}{3}$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}(1+x^{1/3})^3}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1/3}(1+x^{1/3})^3}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^{1/3}(1+x^{1/3})^3}\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^{1/3}(1+x^{1/3})^3}\,dx = ^{*}$$

$$\int \frac{1}{x^{1/3}(1+x^{1/3})^3}\,dx \qquad x^{\frac{1}{3}} = t \;\rightarrow\; x = t^3$$

$$dx = 3t^2\,dt$$

(CONVERSIONE ESTREMI DI INTEGRAZIONE)

$x \to 0 \Rightarrow t \to 0$

$x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty$

$$\int \frac{3t^{\cancel{2}}}{\cancel{t}(t+1)^3}\,dt = 3\int \frac{t}{(t+1)^3}\,dt = 3\int t\cdot(t+1)^{-3}\,dt$$

INTEGRALE PER PARTI

$F(x) = t \qquad G'(x) = (t+1)^{-3}$

$F'(x) = 1 \qquad G(x) = -\frac{1}{2}(t+1)^{-2}$

errore di calcolo

$$\int t\cdot(t+1)^{-3}\,dt = -\frac{1}{2}(t+1)^{-2} + \frac{1}{2}\int (t+1)^{-2}\,dx = -\frac{1}{2}(t+1)^{-2} + \frac{1}{4}(t+1)^{-1} + c$$

$$\overset{*}{=} \lim_{a\to 0^+} 3\cdot\left[-\frac{1}{2}(t+1)^{-2} + \frac{1}{4}(t+1)^{-1}\right]_a^1 + \lim_{b\to+\infty} 3\cdot\left[-\frac{1}{2}(t+1)^{-2} + \frac{1}{4}(t+1)^{-1}\right]_1^{+\infty} =$$

Scansionato con Cam

$$= 3 \cdot \left\{ \cancel{-\frac{1}{2}(1+1)^{-2}} + \cancel{\frac{1}{4}(1+1)^{-1}} + \frac{1}{2}(0+1)^{-2} - \frac{1}{4}(0+1)^{-1} \underbrace{-\frac{1}{2}(+\infty)^{-2}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{4}(+\infty)^{-1}}_{\downarrow 0} + \right.$$

$$\left. + \cancel{\frac{1}{2}(1+1)^{-2}} - \cancel{\frac{1}{4}(1+1)^{-1}} \right\} = 3 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right\} = \frac{3}{4}$$