

ONDE ELETTROMAGNETICHE

Una soluzione per le 4 equazioni di Maxwell


- Poniamoci in una regione (magari nel vuoto) in cui non ci sono né correnti né cariche, ma c'è un campo elettromagnetico

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathbf{B}} \quad \nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathbf{D}}$$

- Prendiamo il rotore della prima

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{\mathbf{H}}$$

- Applichiamo la solita identità a sinistra e sostituiamo la seconda equazione a destra


$$\cancel{\nabla \nabla \cdot \vec{\mathbf{E}}} - \nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}$$

Non ci sono cariche

Equazione di Helmholtz

□ Quindi, nel vuoto

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 E_x - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 E_y - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 E_z - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Analogamente:

$$\nabla^2 \vec{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Queste equazioni vengono definite “equazioni d’onda o di Helmholtz” per il campo elettrico ed il campo magnetico.

Equazione di Helmholtz: caso particolare

Immaginiamo, per semplicità, che il campo elettrico sia costituito dalla sola componente E_x e che

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

Ciò implica che non ci sono variazioni lungo la direzione x e y . Questo può avvenire in un mezzo omogeneo infinitamente esteso che non ha nessuna variazione nella direzione x ed y . In altri termini, fissato un piano x - y , ortogonale a z , il campo elettrico risulta essere pari ad una costante sul piano, che però può variare al cambiare del piano x - y scelto, lungo z . Risulta dunque:

$$\nabla^2 E_x - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

Equazione di Helmholtz: caso particolare

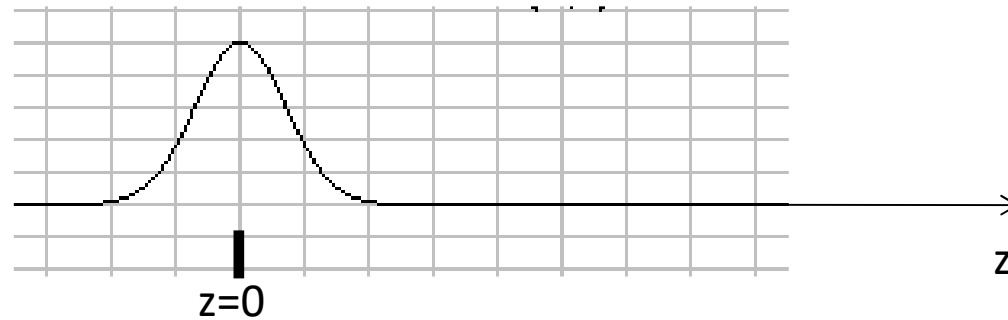
La soluzione dell'equazione differenziale del secondo ordine ottenuta risulta essere una combinazione lineare delle due generiche funzioni del tipo:

$$E_x = E_x^+ f^+ \left(t - \frac{z}{v} \right) + E_x^- f^- \left(t + \frac{z}{v} \right) \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

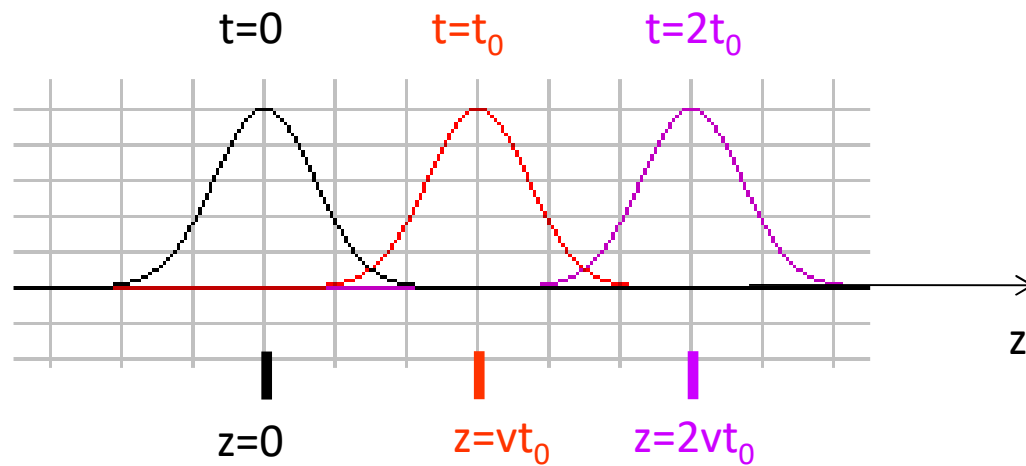
Che cosa rappresentano queste funzioni?

Onda viaggiante

Considerate $f(z) =$



Come è fatta la funzione $g(z,t) = f(t-z/v)$?



$f(t-z/v)$ è un'onda che viaggia nella direzione delle z positive!!

Onda viaggiante

□ La funzione $E_x = f\left(t + \frac{z}{v}\right)$ rappresenta invece un'onda che viaggia nella direzione delle z negative

□ A che velocità si muove l'onda?

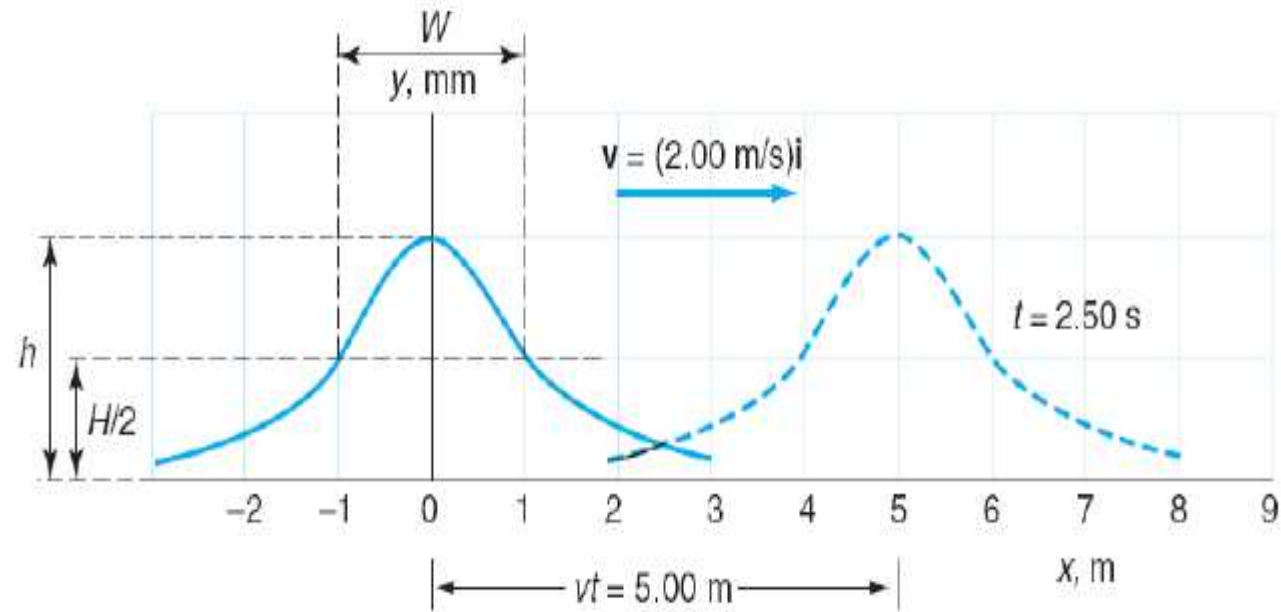
Dopo un intervallo di tempo Δt , si sposta di un intervallo Δz tale che

$$\frac{\Delta z}{c} = \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta z}{\Delta t} = v$$

□ Cioè: si sposta alla velocità v .

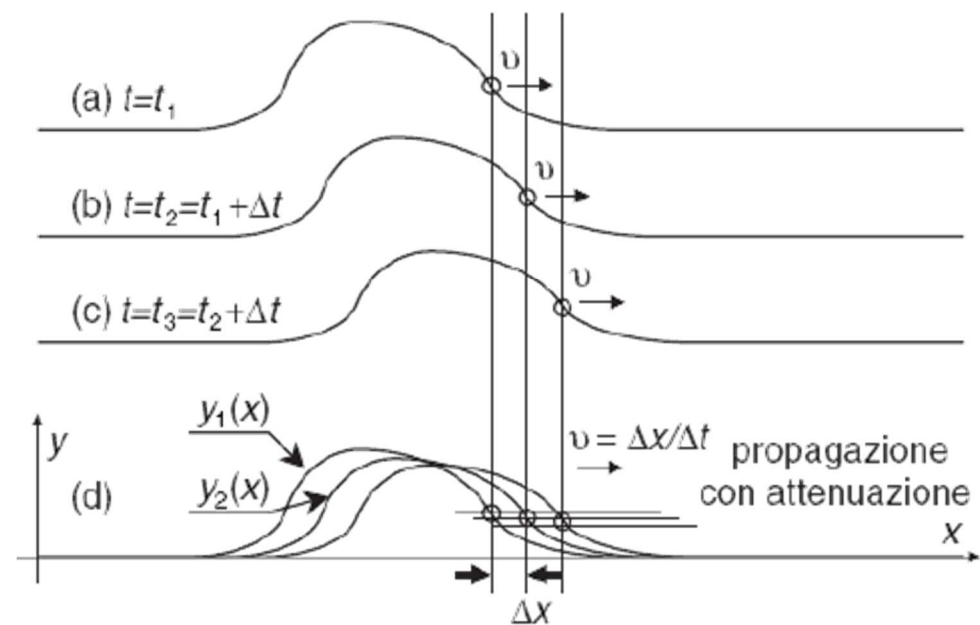
La soluzione descrive un campo che si propaga alla velocità v in direzione di z

Onda viaggiante



Propagazione senza attenuazione

Onda viaggiante



Onde piane

Equazione d'onda da risolvere

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad \xrightarrow{\text{Soluzione generale}} \quad E_x = Af_1\left(t - \frac{z}{v}\right) + Bf_2\left(t + \frac{z}{v}\right) \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Onda piana E⁺

Quanto vale H? $\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}$

$$H_y = -\frac{1}{\mu} \int -\frac{1}{v} Af_1'\left(t - \frac{z}{v}\right) + \frac{1}{v} Bf_2'\left(t + \frac{z}{v}\right) dt = \frac{1}{\eta} Af_1\left(t - \frac{z}{v}\right) + \frac{1}{\eta} Bf_2\left(t + \frac{z}{v}\right)$$

Onda piana H⁺

$$H_y^+ = \frac{E_x^+}{\eta} \quad H_y^- = -\frac{E_x^-}{\eta} \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad [\Omega] \quad \text{impedenza d'onda}$$

Onde piane

Se fossimo partiti da un campo elettrico diretto lungo y, avremmo ottenuto un campo magnetico diretto lungo x. Entrambi si propagano in direzione z:

$$E_y = E_y^+ f^+ \left(t - \frac{z}{v} \right) + E_y^- f^- \left(t + \frac{z}{v} \right)$$

$$H_x = H_x^+ f^+ \left(t - \frac{z}{v} \right) + H_x^- f^- \left(t + \frac{z}{v} \right) = \frac{1}{\eta} \left[-E_y^+ f^+ \left(t - \frac{z}{v} \right) + E_y^- f^- \left(t + \frac{z}{v} \right) \right]$$

$$H_x^+ = -\frac{E_y^+}{\eta} \quad H_x^- = \frac{E_y^-}{\eta}$$

Onde piane

In generale per un'onda che viaggia nella direzione z possiamo avere entrambi le componenti sia del campo elettrico che del campo magnetico, ed esse sono legate dalle seguenti equazioni:

$$\vec{E} \times \vec{H} = \hat{z}(E_x H_y - E_y H_x) = \hat{z} \eta H^2 \quad \text{E ed H sono perpendicolari alla direzione di propagazione.}$$

$$\frac{E_x}{H_y} = \eta \quad \frac{E_y}{H_x} = -\eta \quad \text{Onda piana che viaggia nella direzione delle } z \text{ positive.}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{H} = E_x H_x + E_y H_y = \eta H_y H_x - \eta H_x H_y = 0$$

I campi sono ortogonali tra loro

I campi di un'onda piana formano una terna destrorsa con la direzione di propagazione

Vettore di Poynting di un'onda piana 1/2

Consideriamo un'onda che si propaghi in una generica direzione progressiva o regressiva. Abbiamo visto che:

$$\bar{\mathbf{H}}^{\pm} = \pm \frac{\hat{k} \times \bar{\mathbf{E}}^{\pm}}{\eta} \quad \bar{\mathbf{E}}^{\pm} = \pm \eta \bar{\mathbf{H}}^{\pm} \times \hat{k}$$

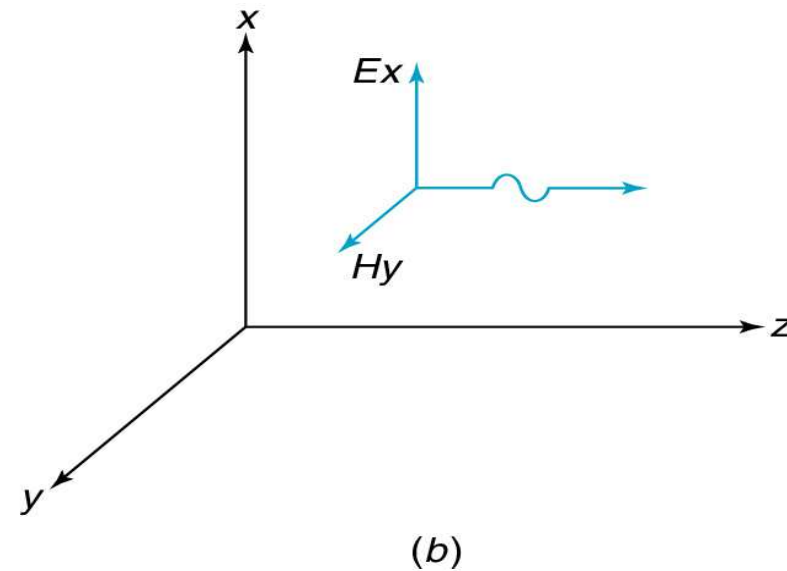
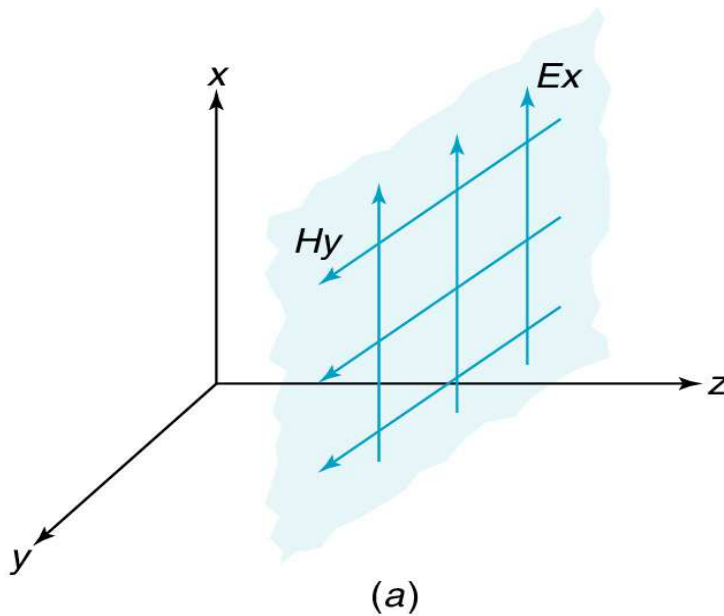
Se premoltiplichiamo la prima vettorialmente per $\bar{\mathbf{E}}^{\pm}$, si ottiene il vettore di Poynting. Sfruttando una nota proprietà vettoriale si ha:

$$\bar{\mathbf{E}}^{\pm} \times \bar{\mathbf{H}}^{\pm} = \pm \frac{\bar{\mathbf{E}}^{\pm} \times \hat{k} \times \bar{\mathbf{E}}^{\pm}}{\eta} = \pm \frac{\bar{\mathbf{E}}^{\pm} \cdot \bar{\mathbf{E}}^{\pm}}{\eta} \hat{k} \mp \frac{\bar{\mathbf{E}}^{\pm} (\bar{\mathbf{E}}^{\pm} \cdot \hat{k})}{\eta} = \pm \frac{|\bar{\mathbf{E}}^{\pm}|^2}{\eta} \hat{k} \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

0

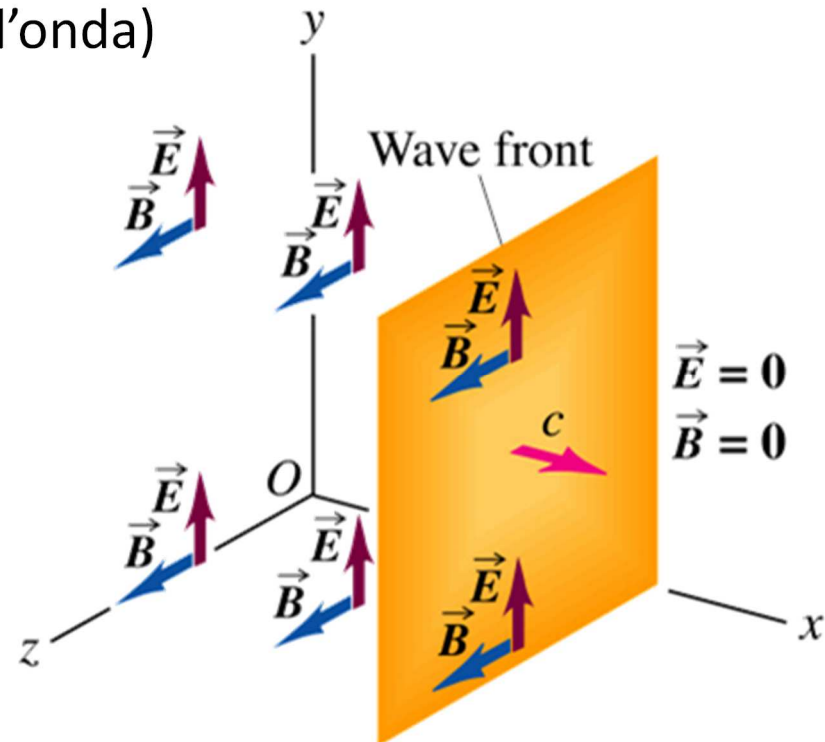
Vettore di Poynting di un'onda 2/2

Quindi il vettore di Poynting associato ad un'onda progressiva o regressiva punta sempre nella direzione di propagazione (progressiva o regressiva) e forma una terna destrorsa con il campo \mathbf{E} ed \mathbf{H} .



Relazione tra \mathbf{E} , \mathbf{H} e \mathbf{P}

- \mathbf{E} ortogonale ad \mathbf{H}
- \mathbf{E} ed \mathbf{H} entrambi ortogonali alla direzione di propagazione
- \mathbf{E} , \mathbf{H} e \mathbf{P} formano una terna destrorsa
- \mathbf{E} ed \mathbf{H} in fase nel tempo
- Il rapporto tra le ampiezze delle onde progressive (e di quelle regressive) è pari all'impedenza d'onda
- Le ampiezze dei \mathbf{E} ed \mathbf{H} sono costanti su un piano ortogonale alla direzione di propagazione (fronte d'onda)



Velocità di un'onda

La velocità delle onde è legata soltanto alle caratteristiche del mezzo in cui esse si propagano (supponiamo un materiale NON ferromagnetico)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{n} \quad \left[\frac{m}{s} \right] \quad c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

n viene definito “indice di rifrazione del mezzo” ($n \geq 1$).

Dalla relazione precedente si può osservare che la velocità massima a cui può viaggiare un'onda è pari alla velocità della luce nel vuoto.

La velocità della luce è invariante rispetto al sistema di riferimento in cui la si rileva: questo principio è alla base della teoria della relatività ristretta introdotta da Albert Einstein

Impedenza d'onda

Anche l'impedenza d'onda è legata soltanto alle caratteristiche del mezzo in cui esse si propagano

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{\eta_0}{n} \quad [\Omega] \quad \eta_0 \approx 377 \, \Omega$$

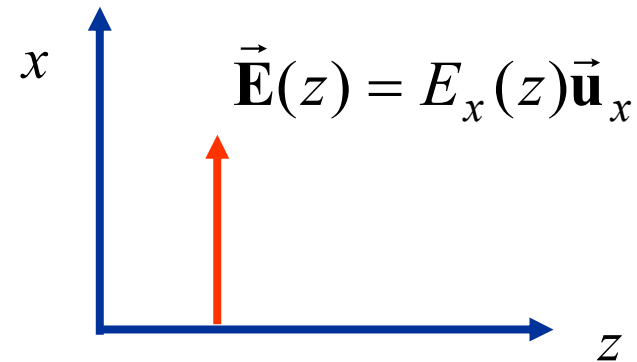
Dalla relazione precedente si può osservare che l'impedenza d'onda massima di un'onda è pari a quella nel vuoto.

Onde piane in regime sinusoidale

- Vediamo di nuovo il caso dell'onda piana: immaginiamo di avere un campo elettrico tutto in x e che dipende solo dalla coordinata z
- Partendo dalle equazioni di Maxwell nel dominio dei fasori e manipolandole come fatto nel tempo, l'equazione d'onda per il campo elettrico diventa semplicemente

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x + \beta^2 E_x = 0$$

Equazione di Helmholtz o d'onda



Onde piane nel dominio dei fasori

La soluzione dell'equazione nel dominio dei fasori:

$$E_x = E_x^+ e^{-j\beta z} + E_x^- e^{+j\beta z}$$

$$E_x^+ e^{-j\beta z}$$

onda piana che viaggia verso le z positive

$$E_x^- e^{+j\beta z}$$

onda piana che viaggia verso le z negative.

$$E_x^\pm$$

è in generale una quantità complessa

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad \longrightarrow \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \Omega$$

$$H_y = \frac{1}{\eta} \left[E_x^+ e^{-j\beta z} - E_x^- e^{+j\beta z} \right]$$

- Volendo recuperare l'espressione nel tempo, per esempio della componente progressiva (assumiamo E^+ reale (E_0) per semplificare)

$$E_x(t) = \text{Re}(E_x^+ e^{j(\omega t - \beta z)}) = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right)$$

Onde Piane : regime sinusoidale

□ Se E ha tale forma, il campo H riusciamo a ricavarlo dall'equazione di Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{\mu_0} \left(-\hat{y} \left(-\frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} = \pm \frac{\hat{y} \omega}{c \mu_0} E_0 \sin \omega \left(t \pm \frac{z}{c} \right) \quad \Rightarrow \vec{H} = \pm \frac{\hat{y}}{c \mu_0} E_0 \cos \omega \left(t \pm \frac{z}{c} \right)$$

Onde Piane : regime sinusoidale

Onda nel dominio del tempo a regime sinusoidale:

$$E_x(z, t) = E_x^+ \sin \omega \left(t - \frac{z}{v} \right) = E_x^+ \sin(\omega t - \beta z)$$

$\omega t - \beta z$ fase istantanea
 βz fase dell'onda

Un'onda in regime sinusoidale risulta essere sinusoidale anche spazialmente

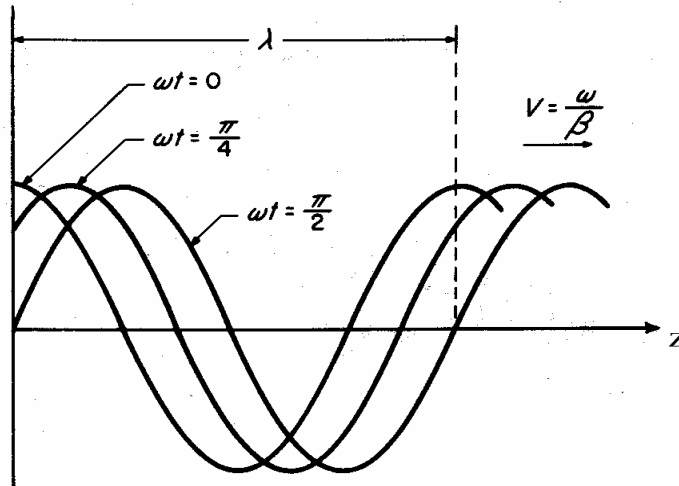
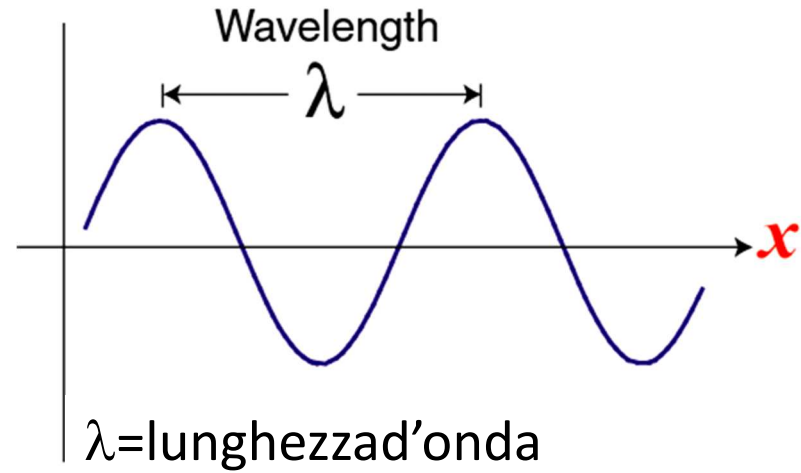


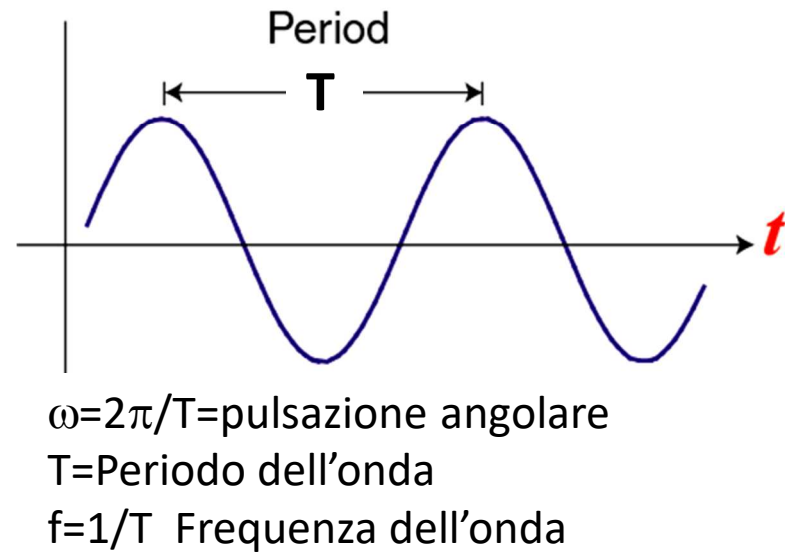
Figure 5-3. A sinusoidal traveling wave.

Definizioni

Quantità spaziali:



Quantità temporali:



Onde Piane : regime sinusoidale

λ = lunghezza d'onda: distanza spaziale tra due punti dell'onda sfasati di 2π

$$E_x(0, t) = E_x^+ \sin \omega(t)$$

$$E_x(\lambda, t) = E_x^+ \sin(\omega t - \beta\lambda) = E_x^+ \sin(\omega t - 2\pi) \qquad \beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

v = velocità di fase

T = Periodo: distanza temporale tra due punti dell'onda sfasati di 2π

$$E_x(z, 0) = E_x^+ \sin(-\beta z)$$

$$E_x(z, T) = E_x^+ \sin(\omega T - \beta z) = E_x^+ \sin(2\pi - \beta z)$$

Onda elettromagnetica

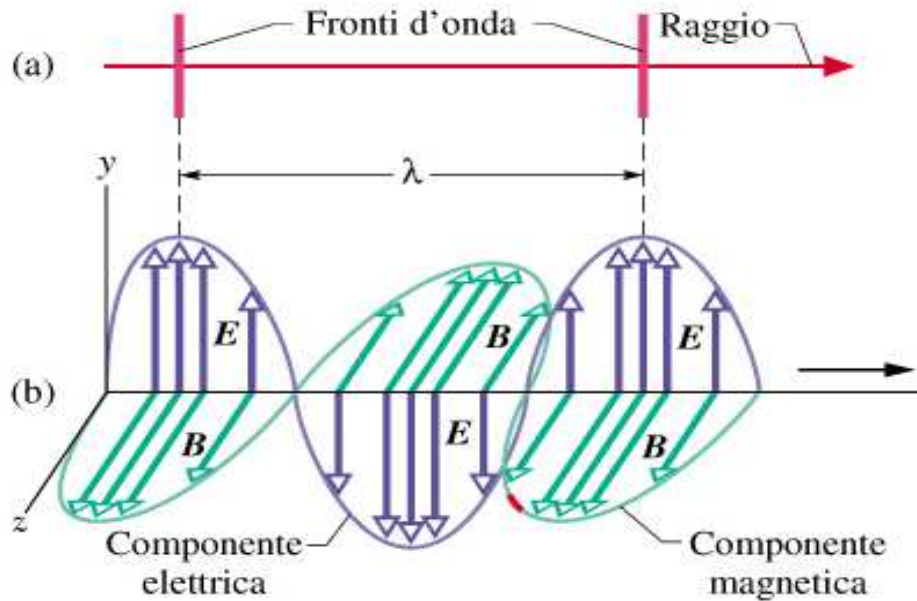


Immagine istantanea di
un'onda

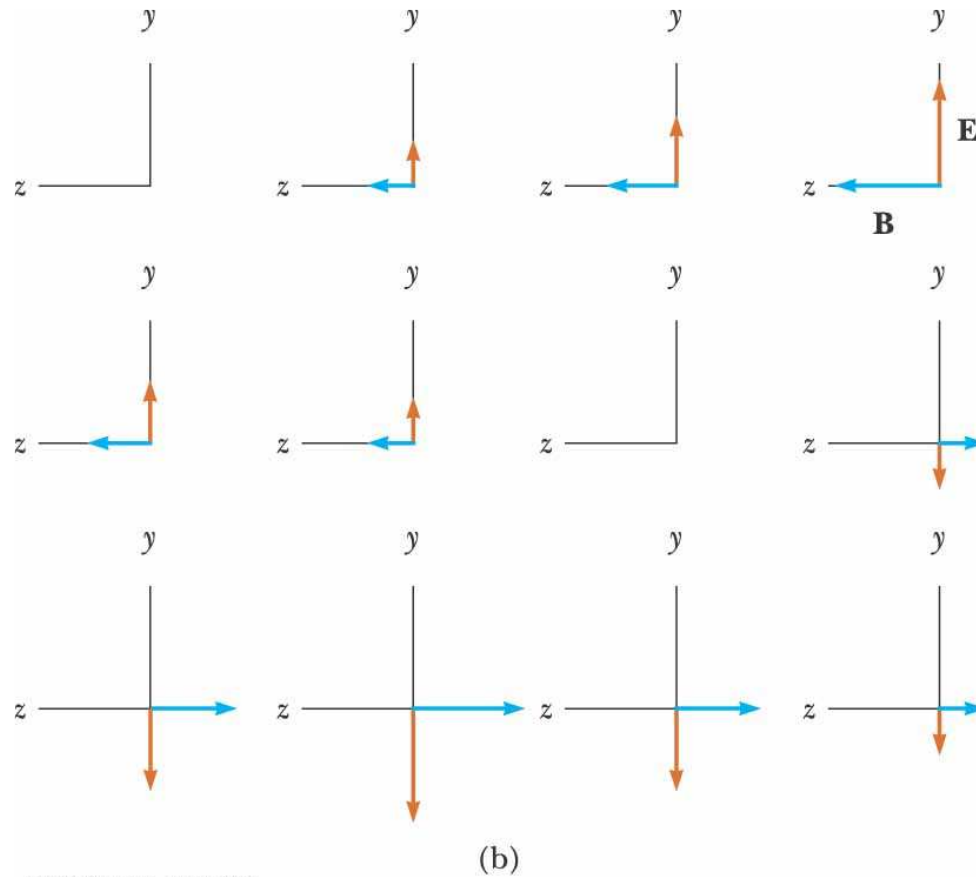
□ Notate E_x ed H_y sono in un rapporto costante:

$$\frac{E_x}{H_y} = \pm c\mu_0 = \pm \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx \pm 377\Omega$$

Impedenza d'onda

Il segno dipende dalla direzione di propagazione (quale sia l'effettiva direzione di propagazione dipenderà dalle condizioni al contorno)

Variazioni temporali di un'onda elettromagnetica



©2004 Thomson - Brooks/Cole

Variazione
temporale dei
campi elettrico e
magnetico.

Il campo E ed H sono in fase tra di loro e hanno la stessa fase in tutti i punti di un piano ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda (piano equifase)

Onde Piane : regime sinusoidale

$$y = y_0 \sin(\omega t - \beta x)$$

Lunghezza d'onda: λ

Frequenza: f

Costante di propagazione: $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$

Pulsazione angolare: $\omega = 2\pi f$

Periodo: $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$

Velocita' di propagazione: $v = \frac{\omega}{\beta} = \lambda f$

Direzione di propagazione: $+x$

Proprietà onde piane

- 1) campo elettrico e magnetico sono perpendicolari alla direzione di propagazione
- 2) campo elettrico e magnetico sono perpendicolari tra di loro e il loro prodotto vettoriale fornisce la direzione di propagazione
- 3) non ci sono variazioni dell'ampiezza dei campi sul piano perpendicolare alla direzione di propagazione (fronte d'onda piano).
In regime sinusoidale il fronte d'onda è un piano equifase.
- 4) il rapporto tra l'ampiezza del campo elettrico e di quello magnetico è dato dall'impedenza d'onda

Vettore di Poynting delle onde piane nel dominio dei fasori

Applichiamo la definizione di vettore di Poynting nel dominio dei fasori:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{P}} &= \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2} \left(E_x^\pm e^{\mp j\beta z} \hat{x} + E_y^\pm e^{\mp j\beta z} \hat{y} \right) \times \left(H_x^\pm e^{\mp j\beta z} \hat{x} + H_y^\pm e^{\mp j\beta z} \hat{y} \right)^* = \\ &= \frac{1}{2} \left(E_x^\pm e^{\mp j\beta z} \hat{x} + E_y^\pm e^{\mp j\beta z} \hat{y} \right) \times \left[\left(H_x^\pm \right)^* e^{\pm j\beta z} \hat{x} + \left(H_y^\pm \right)^* e^{\pm j\beta z} \hat{y} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[E_x^\pm \left(H_y^\pm \right)^* - E_y^\pm \left(H_x^\pm \right)^* \right] \hat{z} = \frac{1}{2} \left[E_x^\pm \left(\pm \frac{E_x^\pm}{\eta} \right)^* - E_y^\pm \left(\mp \frac{E_y^\pm}{\eta} \right)^* \right] \hat{z} = \\ &= \pm \frac{1}{2} \frac{1}{\eta} \left[\left| E_x^\pm \right|^2 + \left| E_y^\pm \right|^2 \right] \hat{z} \quad \text{W/m}^2\end{aligned}$$

Potenza trasportata da un'onda piana 1/2

A partire dal valor medio del vettore di Poynting possiamo calcolare la potenza trasportata da un'onda piana, ricordando che, per definizione, essa si estende nel piano trasversale (rispetto alla direzione di propagazione) e ha un fronte d'onda infinito

$$\begin{aligned} W &= \int_{S_{tr.}} \vec{P} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{tr.}} P_z \hat{z} \cdot dS \hat{z} = \int_{S_{tr.}} \frac{1}{2} \frac{1}{\eta} \left[|E_x^\pm|^2 + |E_y^\pm|^2 \right] dS \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\eta} \left[|E_x^\pm|^2 + |E_y^\pm|^2 \right] \int_{S_{tr.}} dS = \frac{1}{2} \frac{1}{\eta} \left[|E_x^\pm|^2 + |E_y^\pm|^2 \right] S \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\eta} \left[|E_x^\pm|^2 + |E_y^\pm|^2 \right] \infty^2 \quad \text{POTENZA INFINITA!} \end{aligned}$$

Potenza trasportata da un'onda piana 2/2

Se la potenza associata ad un'onda piana è infinita, ciò implica che la sorgente che la crea DEVE avere anch'essa una potenza infinita. Ma ciò NON E' FISICAMENTE POSSIBILE.

Quindi, possiamo concludere che un'onda piana uniforme:

- è una soluzione corretta delle equazioni di Maxwell
- ma non è fisicamente realizzabile.

Allora, cosa ci facciamo delle onde piane?

Utilizzo delle onde piane

La risposta è duplice:

- si può dimostrare che qualunque campo può essere sviluppato in onde piane, che possono essere “maneggiate” più facilmente da un punto di vista matematico (argomento non trattato in questo corso)
- a partire dalle [condizioni di Sommerfeld](#), si può osservare che qualunque campo e.m. creato da una sorgente fisicamente realizzabile, a grande distanza da essa, può essere visto come un’onda LOCALMENTE piana, ma con ampiezza che decresce quanto più si è lontani dalla sorgente:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left| \vec{E}(\vec{r}) - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \vec{H}(\vec{r}) \times \hat{r} \right| = 0$$

Le onde piane e la condizione di Sommerfeld 1/2

La condizione di Sommerfeld può dunque essere letta in questo modo:

- il campo e.m. deve decrescere almeno come $1/r$;
- il campo elettrico è ortogonale al campo magnetico ed alla direzione di propagazione \mathbf{r} all'aumentare di r ;
- \mathbf{E} , \mathbf{H} e \mathbf{r} formano una terna destrorsa;
- il rapporto tra $|\mathbf{E}|$ e $|\mathbf{H}|$ è pari all'impedenza d'onda;
- \mathbf{E} e \mathbf{H} sono in fase nel tempo

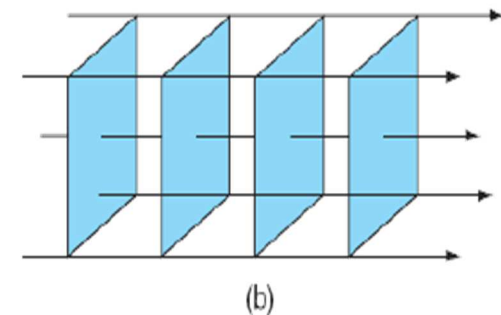
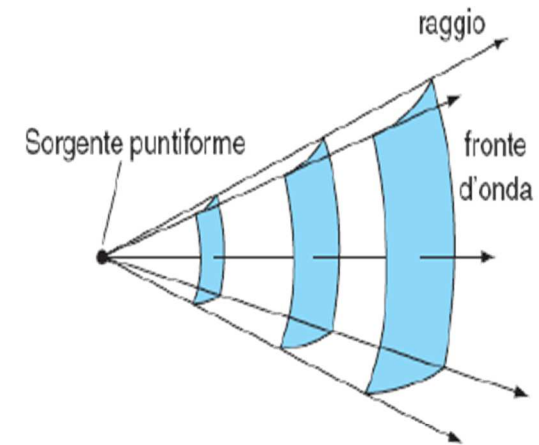
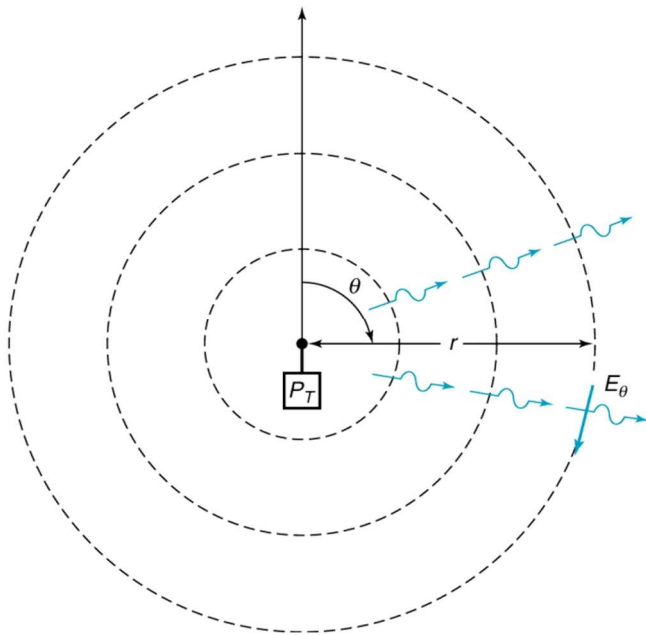
Le ultime 4 proprietà coincidono esattamente con le proprietà delle onde piane.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left| \vec{E}(\vec{r}) - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \vec{H}(\vec{r}) \times \hat{r} \right| = 0$$

Le onde piane e la condizione di Sommerfeld 2/2

Quindi, a grande distanza dalla sorgente, il campo e.m., che in realtà è un'onda sferica, può essere LOCALMENTE approssimato con un'onda piana

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left| \vec{E}(\vec{r}) - \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \vec{H}(\vec{r}) \times \hat{r} \right| = 0$$



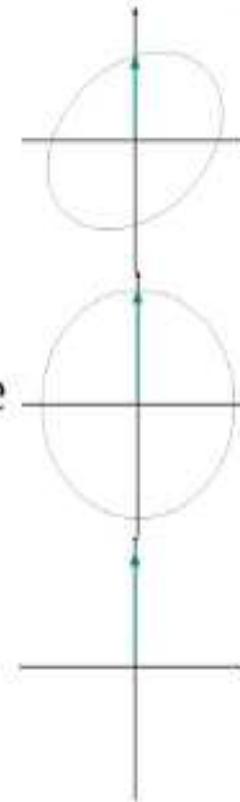
Polarizzazione onde piane

- Fissato un punto dello spazio E e H dipendono dal tempo
- Se la traiettoria descritta da E è sempre la stessa il campo è **polarizzato**
- La traiettoria può essere:

- ellisse → polarizzazione ellittica

- circonferenza → polarizzazione circolare

- segmento → polarizzazione lineare



Polarizzazione onde piane

Per esaminare la polarizzazione di un'onda, consideriamo un'onda e.m. piana progressiva costituita da due componenti:

Dominio dei fasori:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_x^+ e^{-j\beta z} \hat{x} + E_y^+ e^{-j\beta z} \hat{y} = |E_x^+| e^{j\phi_x} e^{-j\beta z} \hat{x} + |E_y^+| e^{j\phi_y} e^{-j\beta z} \hat{y} \\ \vec{H} &= -\frac{E_y^+}{\eta} e^{-j\beta z} \hat{x} + \frac{E_x^+}{\eta} e^{-j\beta z} \hat{y} = -\frac{|E_y^+| e^{j\phi_y}}{\eta} e^{-j\beta z} \hat{x} + \frac{|E_x^+| e^{j\phi_x}}{\eta} e^{-j\beta z} \hat{y}\end{aligned}$$

Dominio del tempo:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= |E_x^+| \cos(\omega t - \beta z + \phi_x) \hat{x} + |E_y^+| \cos(\omega t - \beta z + \phi_y) \hat{y} \\ \vec{H} &= -\frac{|E_y^+| \cos(\omega t - \beta z + \phi_y)}{\eta} \hat{x} + \frac{|E_x^+| \cos(\omega t - \beta z + \phi_x)}{\eta} \hat{y}\end{aligned}$$

Polarizzazione onde piane

Fissato il piano di riferimento $z=z_0$ in cui si vuole osservare l'andamento temporale dell'onda, la polarizzazione cambia in funzione della differenza di fase tra le componenti del campo e del rapporto tra le ampiezze del campo:

- polarizzazione lineare: $\phi_x - \phi_y = N\pi$, $N = 0, \pm 1$
- polarizzazione circolare: $\phi_x - \phi_y = \pm \frac{\pi}{2}$, $|E_x^+| = |E_y^+|$
- Polarizzazione ellittica
orizzontale/verticale $\phi_x - \phi_y = \pm \frac{\pi}{2}$, $|E_x^+| \neq |E_y^+|$
- polarizzazione ellittica
obliqua $0 < |\phi_x - \phi_y| < \frac{\pi}{2}$, $|E_x^+| \neq |E_y^+|$

Polarizzazione lineare 1/2

$$\phi_x - \phi_y = N\pi \quad , \quad N = 0, \pm 1$$

Consideriamo solamente il campo elettrico. Ricordando le proprietà delle onde piane ricaveremo facilmente anche il campo magnetico

Dominio dei fasori

$$\vec{E} = |E_x^+| e^{j\phi_x} e^{-j\beta z} \hat{x} + |E_y^+| e^{j\phi_y} e^{-j\beta z} \hat{y} = \left(|E_x^+| e^{j\phi_x} \hat{x} \pm |E_y^+| e^{j\phi_x} \hat{y} \right) e^{-j\beta z}$$

Dominio del tempo:

$$\vec{E} = |E_x^+| \cos(\omega t - \beta z + \phi_x) \hat{x} \pm |E_y^+| \cos(\omega t - \beta z + \phi_x) \hat{y}$$

Polarizzazione lineare 2/2

$$\phi_x - \phi_y = N\pi \quad , \quad N = 0, \pm 1$$

Dominio dei fasori

$$\vec{E} = |E_x^+| e^{j\phi_x} e^{-j\beta z} \hat{x} + |E_y^+| e^{j\phi_y} e^{-j\beta z} \hat{y} = \left(|E_x^+| e^{j\phi_x} \hat{x} \pm |E_y^+| e^{j\phi_x} \hat{y} \right) e^{-j\beta z}$$

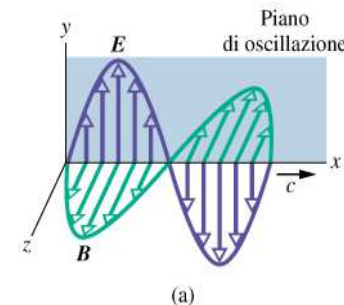
Dominio del tempo:

$$\vec{E} = |E_x^+| \cos(\omega t - \beta z + \phi_x) \hat{x} \pm |E_y^+| \cos(\omega t - \beta z + \phi_x) \hat{y}$$

Le componenti lungo x ed y sono sempre in fase e quindi la loro risultante giace su di una retta inclinata rispetto all'asse x di un angolo pari a:

$$\theta_E = \pm \arctg \left(\frac{E_y^+}{E_x^+} \right)$$

Il campo oscilla sempre su un piano, in generale inclinato di un angolo θ_E



Polarizzazione circolare 1/2

$$\phi_x - \phi_y = \pm \frac{\pi}{2} \quad , \quad |E_x^+| = |E_y^+|$$

Dominio dei fasori

$$\vec{E} = |E_x^+| e^{j\phi_x} e^{-j\beta z} \hat{x} + |E_y^+| e^{j\phi_y} e^{-j\beta z} \hat{y} = |E_x^+| \left(e^{j\phi_x} \hat{x} \mp j e^{j\phi_x} \hat{y} \right) e^{-j\beta z}$$

Dominio del tempo:

$$\vec{E} = |E_x^+| \left(\cos(\omega t - \beta z + \phi_x) \hat{x} \pm \sin(\omega t - \beta z + \phi_x) \hat{y} \right)$$

Le componenti lungo x ed y sono sempre sfasate nel tempo di $\pm\pi/2$ e quindi la loro risultante giace su di una circonferenza.

Polarizzazione circolare 2/2

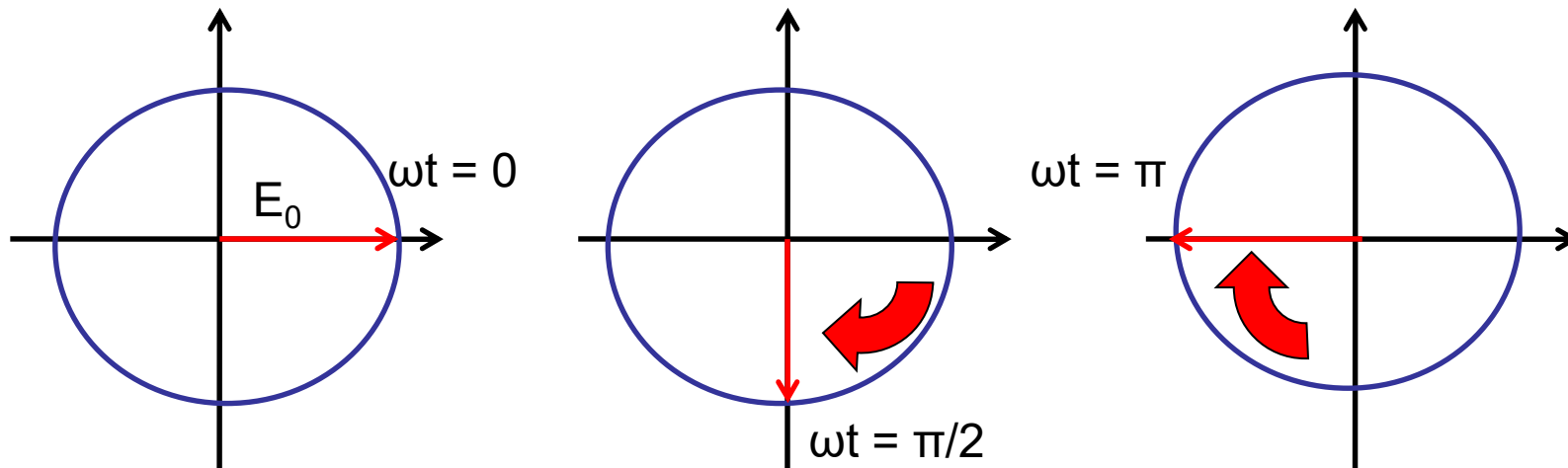
$$E_x = E_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \quad E_y = E_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) + \frac{\pi}{2} \right]$$

Sul piano $z=0$ abbiamo

$$E_x = E_0 \cos(\omega t)$$

$$E_y = -E_0 \sin(\omega t)$$

Polarizzazione circolare
destrorsa



Se $\psi = -\frac{\pi}{2}$ allora si avrà Polarizzazione circolare sinistrorsa

Polarizzazione ellittica 1/2

$$\phi_x - \phi_y = \pm \frac{\pi}{2} \quad , \quad |E_x^+| \neq |E_y^+|$$

Dominio dei fasori

$$\vec{E} = |E_x^+| e^{j\phi_x} e^{-j\beta z} \hat{x} + |E_y^+| e^{j\phi_y} e^{-j\beta z} \hat{y} = \left(|E_x^+| e^{j\phi_x} \hat{x} \mp j |E_y^+| e^{j\phi_x} \hat{y} \right) e^{-j\beta z}$$

Dominio del tempo:

$$\vec{E} = |E_x^+| \cos(\omega t - \beta z + \phi_x) \hat{x} \pm |E_y^+| \sin(\omega t - \beta z + \phi_x) \hat{y}$$

Le componenti lungo x ed y sono diverse e sempre sfasate nel tempo di $\pm\pi/2$ e quindi la loro risultante giace su di una ellisse con semiassi sugli assi coordinati x e y.

Polarizzazione ellittica 2/2

$$0 < |\phi_x - \phi_y| < \frac{\pi}{2} \quad , \quad |E_x^+| \neq |E_y^+|$$

Dominio dei fasori

$$\vec{E} = |E_x^+| e^{j\phi_x} e^{-j\beta z} \hat{x} + |E_y^+| e^{j\phi_y} e^{-j\beta z} \hat{y} = \left(|E_x^+| e^{j\phi_x} \hat{x} + |E_y^+| e^{j\phi_y} \hat{y} \right) e^{-j\beta z}$$

Dominio del tempo:

$$\vec{E} = |E_x^+| \cos(\omega t - \beta z + \phi_x) \hat{x} + |E_y^+| \cos(\omega t - \beta z + \phi_y) \hat{y}$$

Le componenti lungo x ed y hanno ampiezze diverse e sono sempre sfasate nel tempo di un angolo generico e quindi la loro risultante giace su di una ellisse inclinata.

Polarizzazione di un'onda

[APPLET: polarizzazione nel piano](http://www.amanogawa.com/archive/Polarization/Polarization-2.html) (Java)

<http://www.amanogawa.com/archive/Polarization/Polarization-2.html>

[APPLET: polarizzazione nello spazio e nel tempo](http://www.amanogawa.com/archive/Polarization2/Polarization2-2.html) (Java)

<http://www.amanogawa.com/archive/Polarization2/Polarization2-2.html>