A.A. 2021-2022

Elementi di Elettronica (INF)

Prof. Paolo Crippa

Circuiti Logici Combinatori – P1

Funzioni Binarie: Somma con Riporto

c_{in}	x	y	S	c_{out}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

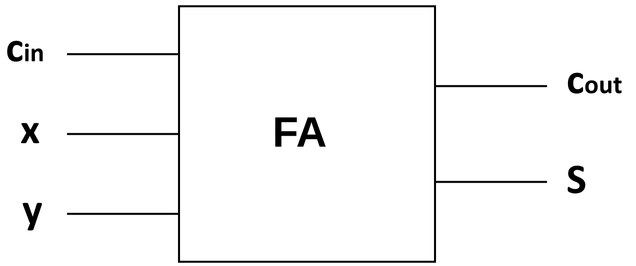
Full – Adder

S, c_{out} sono funzioni

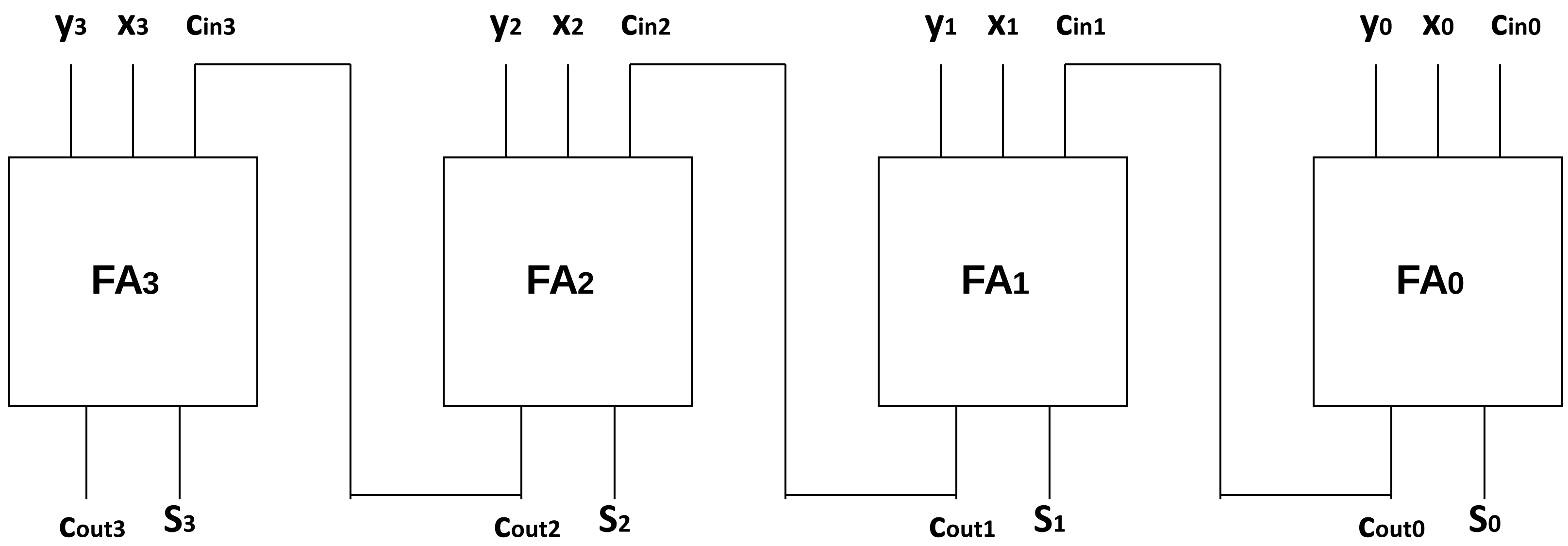
di c_{in}, x, y

$S = f\,(c_{in}, x, y)$

$c_{out} = g\,(c_{in}, x, y)$



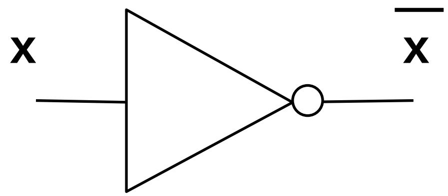
Sommatore a 4 bit



Funzioni Elementari: NOT e BUFFER

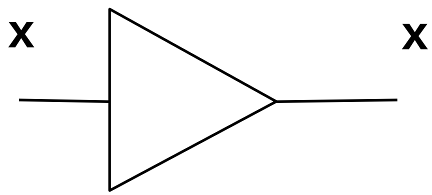
NOT

x	$z = \overline{x}$
0	1
1	0



BUFFER

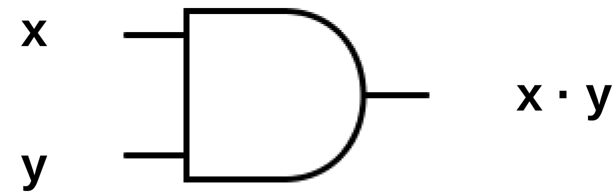
x	$z = x$
0	0
1	1



Funzioni Elementari: AND e OR

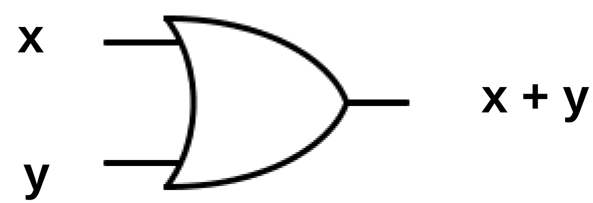
x	y	x · y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

AND



x	y	x + y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

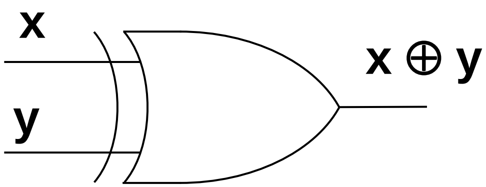
OR

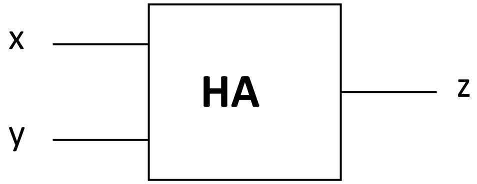


Funzioni Elementari: XOR e XNOR

x	y	$z = x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

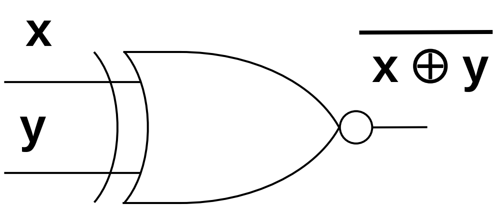
XOR o OR-esclusivo o **Half adder**





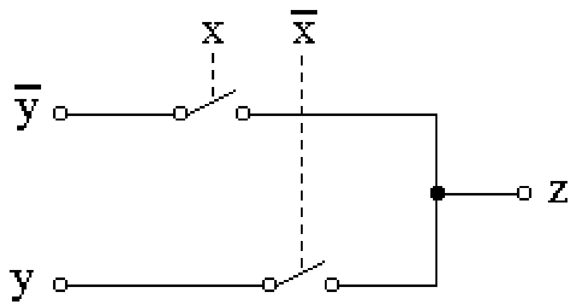
x	y	$z = \overline{x \oplus y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

XNOR o NOR-esclusivo

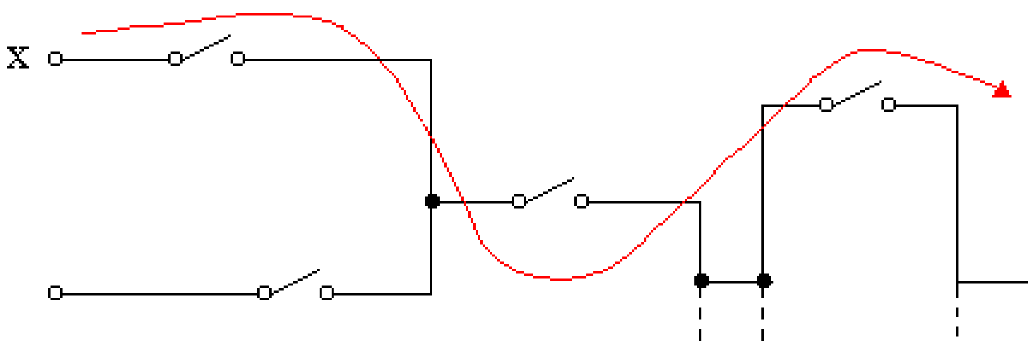


Funzioni Elementari: XOR

lo **XOR** può essere rappresentato tramite interruttori



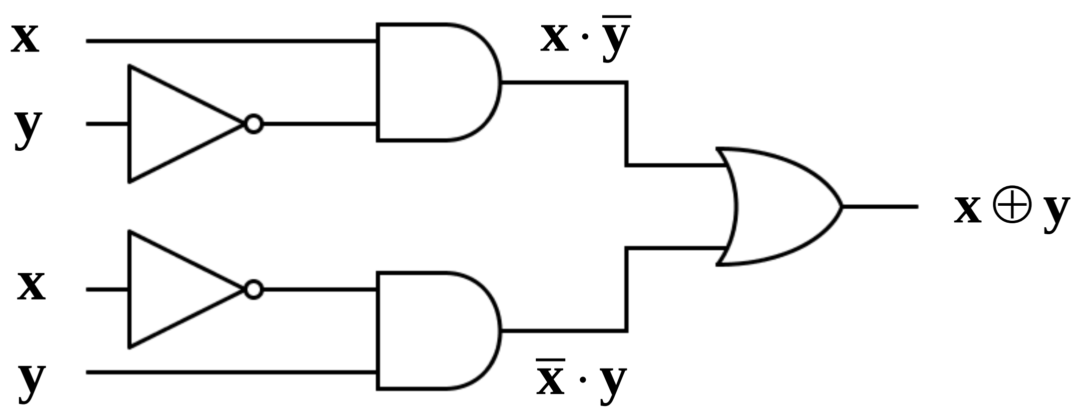
Lo svantaggio della realizzazione con interruttori è che dopo diversi passaggi attraverso gli interruttori il segnale che deve essere trasmesso si degrada (si riduce il valore e subisce un ritardo).



Funzioni Elementari: XOR

$\mathbf{x}$	$\mathbf{y}$	$\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}$	$\mathbf{x} \cdot \overline{\mathbf{y}}$	$\overline{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}$	$\mathbf{x} \cdot \overline{\mathbf{y}} + \overline{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}$
0	0	**0**	0	0	**0**
0	1	**1**	0	1	**1**
1	0	**1**	1	0	**1**
1	1	**0**	0	0	**0**

XOR implementato attraverso funzioni elementari NOT, AND, OR



Funzioni Elementari: XNOR

$\mathbf{x}$	$\mathbf{y}$	$\overline{\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}}$	$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$	$\overline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\mathbf{y}}$	$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \overline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\mathbf{y}}$
0	0	**1**	0	1	**1**
0	1	**0**	0	0	**0**
1	0	**0**	0	0	**0**
1	1	**1**	1	0	**1**

Riassumendo :

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \overline{\mathbf{y}} + \overline{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \\[2em] \overline{\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \overline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\mathbf{y}} \end{array}}$$

XOR e XNOR: Proprietà

P1) $\mathbf{x} \oplus 0 = \mathbf{x}$

P4) $\mathbf{x} \oplus 1 = \overline{\mathbf{x}}$

P2) $\mathbf{x} \oplus \mathbf{x} = 0$

P5) $\mathbf{x} \oplus \overline{\mathbf{x}} = 1$

P3) $\mathbf{x} \oplus \overline{\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}}$

P6) $\overline{\mathbf{x}} \oplus \mathbf{y} = \overline{\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}}$

Proprietà Commutativa

P7) $\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \mathbf{y} \oplus \mathbf{x}$

Proprietà Associativa

P8) $(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) \oplus \mathbf{z} = \mathbf{x} \oplus (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}) = \mathbf{x} \oplus \mathbf{y} \oplus \mathbf{z}$

Funzioni Binarie

Ogni funzione binaria può essere rappresentata con le funzioni elementari NOT, AND, OR.

Le operazioni matematiche (somma, sottrazione, moltiplicazione, divisione) possono essere espresse come funzioni binarie o sequenze di funzioni binarie e quindi come sequenze di combinazioni di funzioni elementari.

Le relazioni logiche possono essere rappresentate da relazioni binarie.

Si può fare l’associazione True = 1 e False = 0

Funzioni Binarie

Esistono 16 possibili funzioni logiche di due variabili

A	B	0	$\wedge$ 1	2	A 3	4	B 5	$\oplus$ 6	$\vee$ 7	$\downarrow$ 8	$\equiv$ 9	$\overline{B}$ 10	11	12	$\supset$ 13	$\uparrow$ 14	15
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T
T	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T

risulta

$$A \uparrow B = \overline{A \wedge B} \qquad A \downarrow B = \overline{A \vee B}$$

NAND = not (AND) NOR = not (OR)

Postulati dell'Algebra Booleana (postulati di Huntington)

L'algebra Booleana è definita da una serie di postulati :

P1) Esiste un insieme B di elementi od oggetti, nel quale è definita una relazione di uguaglianza " = "

proprietà riflessiva: $a = a$

proprietà simmetrica: $a = b \Rightarrow b = a$

proprietà transitiva: $a = b$ e $b = c \Rightarrow a = c$

P2) Si definisce un' operazione " + " (o regola di combinazione) tale che:

$a, b \in B \Rightarrow \quad a + b \in B$

P3) Si definisce un'operazione " · " tale che:

$a, b \in B \Rightarrow \quad a \cdot b \in B$

Algebra Booleana

P4) Esiste in B un elemento “ 0 ” (elemento neutro per l’operazione +) tale che: $a \in B \Rightarrow \quad a + 0 = a$

P5) Esiste in B un elemento “ 1 ” (elemento neutro per l’operazione ·) tale che: $a \in B \Rightarrow \quad a \cdot 1 = a$

Proprietà Commutativa

P6) $a + b = b + a$

P7) $a \cdot b = b \cdot a$

Proprietà Distributiva

P8) $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

P9) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

P10) Per ogni elemento $a \in B$ esiste un elemento $\overline{a}$ tale che:

$$a \cdot \overline{a} = 0 \qquad \text{e} \qquad a + \overline{a} = 1$$

P11) Ci sono almeno due elementi $x, y \in B$ tali che $x \neq y$

Algebra Booleana

L'algebra booleana è definita dall'insieme

< B , op1 , op2 , a , b >

B: insieme di elementi su cui vengono eseguite le operazioni

op1, op2: operazioni a due elementi con certe proprietà

a, b: elementi neutri

L'algebra *ordinaria* con le operazioni di somma e prodotto non è booleana poichè:

- non vale la proprietà P8) : $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
- non esiste $\overline{a}$

Algebra Booleana Binaria

La più semplice algebra Booleana è quella binaria, con i soli elementi **0**,**1**: B {0,1} che soddisfano le seguenti relazioni

$$\bar{1} = 0 \quad , \quad \bar{0} = 1$$

$$1 \cdot 1 = 1 + 1 = 1 + 0 = 0 + 1 = 1$$

$$0 + 0 = 0 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$$

Con queste definizioni le proprietà P1) – P11) sono soddisfatte

Algebra Booleana

operazione · è definita **AND**

x	**y**	**x · y**
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

operazione + è definita **OR**

x	**y**	**x + y**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Algebra Booleana

Corrispondenza biunivoca fra la rappresentazione di relazioni logiche e l'algebra booleana

$\wedge$ (AND)	$\leftrightarrow$	$\cdot$
$\vee$ (OR)	$\leftrightarrow$	$+$
F (False)	$\leftrightarrow$	0
T (True)	$\leftrightarrow$	1
A	$\leftrightarrow$	A

La struttura matematica che consente di rappresentare delle funzioni logiche è un algebra Booleana

Algebra Booleana: Dualità

Esiste una proprietà di **dualità** nei postulati dell'algebra Booleana che si basa sullo scambio dei simboli.

$$1 \quad \leftrightarrow \quad 0$$

$$+ \quad \leftrightarrow \quad \cdot$$

$$a + 0 = a \qquad\qquad a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c)$$

$$\downarrow\ \downarrow \qquad\qquad \downarrow\ \downarrow \quad \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$$

$$a \cdot 1 = a \qquad\qquad a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$$

Ogni teorema nell'algebra Booleana ha il suo duale che si ottiene con lo scambio di simboli.

Teoremi Fondamentali dell'Algebra Booleana

Lemma 1 Gli elementi 0 e 1 sono unici

Prova

Supponiamo 0_1 , 0_2 esistono

$$a_1 + 0_1 = a_1 \qquad a_2 + 0_2 = a_2$$

si scelga

$$a_1 = 0_2 \quad , \quad a_2 = 0_1$$

$$\Rightarrow 0_2 + 0_1 = 0_2 \qquad 0_1 + 0_2 = 0_1$$

per la proprietà commutativa

$$0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = \mathbf{0_2 = 0_1} \quad \text{c.v.d.}$$

Analogamente per 1

$$a_1 \cdot 1_1 = a_1 \qquad a_2 \cdot 1_2 = a_2$$

si scelga

$$a_1 = 1_2 \quad , \quad a_2 = 1_1$$

$$\Rightarrow 1_2 \cdot 1_1 = 1_2 \quad , \quad 1_1 \cdot 1_2 = 1_1$$

$$\Rightarrow \mathbf{1_1 = 1_2} \quad \text{c.v.d.}$$

Teoremi Fondamentali dell'Algebra Booleana

Lemma 2 $\forall\ a \in B \ \Rightarrow\ a + a = a\ ,\ a \cdot a = a$

Prova

$$a + a = (a + a) \cdot 1$$

$$= (a + a) \cdot (a + \overline{a}) \quad \text{per la proprietà P10}$$

$$= a + a \cdot \overline{a} \quad \text{per la proprietà P8}$$

$$= a + 0 \quad \text{per la proprietà P10}$$

$$= a \quad \text{per la proprietà P4}$$

per la dualità

$$a + a = a$$

$$\downarrow$$

$$a \cdot a = a$$

Teoremi Fondamentali dell'Algebra Booleana

<u>Lemma 3</u> $\forall\, a \in B \;\Rightarrow\; a+1=1 \;,\; a\cdot 0=0$

Prova

$$
\begin{aligned}
a+1 &= 1\cdot\left(a+1\right) \\
&= \left(a+\overline{a}\right)\cdot\left(a+1\right) \\
&= a+\overline{a}\cdot 1 \\
&= a+\overline{a} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

per la dualità

$$
\begin{gathered}
a+1=1 \\
\downarrow \\
a\cdot 0=0
\end{gathered}
$$

Teoremi Fondamentali dell'Algebra Booleana

Lemma 4 Gli elementi 1 e 0 sono distinti e $\overline{1} = 0$

Prova

A) $a \cdot 1 = a$

$a \cdot 0 = 0$

Supponiamo $1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 1 = a \cdot 0 = \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

Allora esisterebbe solo un elemento $0 = 1 = a$ contro il postulato 11.

B)

$\bar{1} = \bar{1} \cdot 1$

$= 0$ c.v.d

Teoremi Fondamentali dell'Algebra Booleana

Lemma 5 $a,b \in B \;\Rightarrow\; a + a \cdot b = a \;,\; a \cdot (a+b) = a$

Prova

$$
\begin{aligned}
a + a \cdot b &= a \cdot 1 + a \cdot b \\
&= a \cdot (1 + b) \\
&= a \cdot 1 \\
&= a \qquad \text{c.v.d}
\end{aligned}
$$

per la dualità

$$a + a \cdot b = a$$

$$\downarrow \;\; \downarrow$$

$$a \cdot (a + b) = a \qquad \text{c.v.d}$$

Teoremi Fondamentali dell'Algebra Booleana

<u>Lemma 6</u> $\overline{a}$ è unico.

Prova

Supponiamo che esistano $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$:

$$a+\overline{a_1}=1 \quad , \quad a+\overline{a_2}=1 \quad , \quad a\cdot\overline{a_1}=0 \quad , \quad a\cdot\overline{a_2}=0$$

$$\begin{aligned}
\overline{a_2} &= 1\cdot\overline{a_2} \\
&= \left(a+\overline{a_1}\right)\cdot\overline{a_2} \\
&= a\cdot\overline{a_2}+\overline{a_1}\cdot\overline{a_2} \\
&= 0+\overline{a_1}\cdot\overline{a_2} \\
&= a\cdot\overline{a_1}+\overline{a_1}\cdot\overline{a_2} \\
&= \left(a+\overline{a_2}\right)\cdot\overline{a_1} \\
&= 1\cdot\overline{a_1} \\
&= \overline{a_1} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{a_2}=\overline{a_1} \qquad \text{c.v.d}
\end{aligned}$$

Teoremi Fondamentali dell'Algebra Booleana

Lemma 7 $\forall a \in B \;\Rightarrow\; a = \overline{\overline{a}}$

Prova

Sia $\overline{\overline{a}} = x \qquad \Rightarrow \overline{a} \cdot x = 0 \qquad \overline{a} + x = 1$

ma anche $a \cdot \overline{a} = 0 \quad \overline{a} + a = 1 \qquad \Rightarrow x = a$

Lemma 8 $a \cdot \left[\left(a + b \right) + c \right] = \left[\left(a + b \right) + c \right] \cdot a = a$

Prova

$$
\begin{aligned}
a \cdot \left[\left(a + b \right) + c \right] &= a \cdot \left(a + b \right) + a \cdot c && \text{dal lemma 5} \\
&= a + a \cdot c && \text{dal lemma 5} \\
&= a
\end{aligned}
$$

Teoremi Fondamentali dell'Algebra Booleana

Lemma 9

$$a+\left(b+c\right)=\left(a+b\right)+c \quad \text{proprietà associativa} \quad a\cdot\left(b\cdot c\right)=\left(a\cdot b\right)\cdot c$$

Teorema 10 $a+\overline{a}\cdot b=a+b$ $\qquad$ $a\cdot\left(\overline{a}+b\right)=a\cdot b$

Prova

$$a+\overline{a}\cdot b=\left(a+\overline{a}\right)\cdot\left(a+b\right)=1\cdot\left(a+b\right)$$
$$=a+b$$

proprietà 8 e 10

per la dualità

$$\begin{array}{ccccccc} a & + & \overline{a}\cdot b & = & a & + & b \\ & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \\ a & \cdot & \left(\overline{a}+b\right) & = & a & \cdot & b \end{array}$$

Teoremi Fondamentali dell'Algebra Booleana

<u>Teorema 11 di De Morgan</u> I) $\overline{a+b}=\bar{a}\cdot\bar{b}$ II) $\overline{a\cdot b}=\bar{a}+\bar{b}$

Prova

$$(a+b)+\bar{a}\cdot\bar{b}=\left[(a+b)+\bar{a}\right]\cdot\left[(a+b)+\bar{b}\right]$$

$$=\left[a+\bar{a}+b\right]\cdot\left[a+b+\bar{b}\right]=1\cdot 1=1$$

$$(a+b)\cdot\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)=a\cdot\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)+b\cdot\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)=0+0=0$$

$z=\bar{a}\cdot\bar{b}$ $\quad (a+b)+z=1$ $\quad (a+b)\cdot z=0$

$\Rightarrow\ a+b=\bar{z}$ $\quad \Rightarrow\ a+b=\overline{\bar{a}\cdot\bar{b}}$ $\quad \Rightarrow\ \overline{a+b}=\bar{a}\cdot\bar{b}$ c.v.d

Per la dualità

$$\overline{a+b}=\bar{a}\cdot\bar{b}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$\overline{a\cdot b}=\bar{a}+\bar{b}$ c.v.d

Teoria degli Insiemi come Esempio di Algebra Booleana

- Set A : collezione di oggetti p, $p \in A$

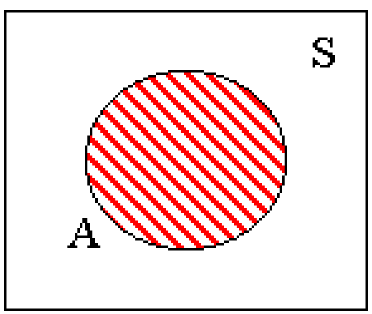
  Universal Set S : totalità degli elementi p, $A \subset S$ (appartenenza)

  Unione $A \cup B$: elementi che appartengono ad A o B

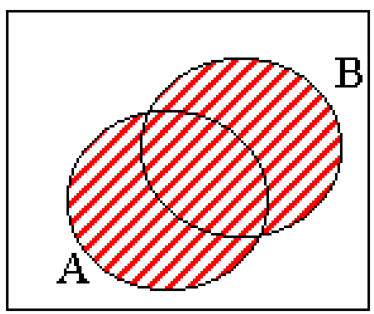
  Intersezione $A \cap B$: elementi che appartengono ad A e B

  Complemento $\overline{A}$: elementi che non appartengono ad A (diagramma di Venn)

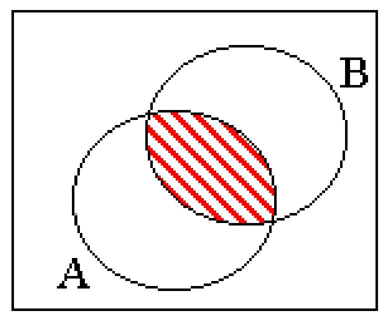
  Insieme vuoto $\varnothing$: nessun elemento p appartiene a $\varnothing$



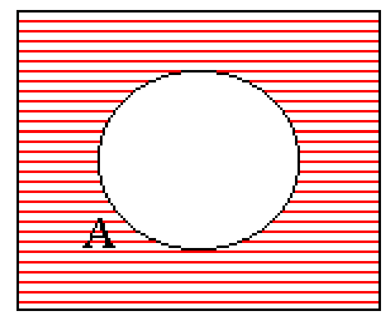
$A \subset S$



$A \cup B$



$A \cap B$



$\overline{A}$

Teoria degli Insiemi come Esempio di Algebra Booleana

Si può dimostrare che i postulati dell'algebra Booleana sono soddisfatti con le corrispondenze seguenti

$\cap \leftrightarrow \cdot$ $\quad \cup \leftrightarrow +$ $\quad \varnothing \leftrightarrow 0$ $\quad S \leftrightarrow 1$ $\quad \bar{A} \leftrightarrow \bar{a}$

P1) Relazione di uguaglianza " = "

proprietà riflessiva: a = a

proprietà simmetrica: a = b ⇨ b = a

proprietà transitiva: a = b e b = c ⇨ a = c

P2) Si definisce un' operazione " + " (o regola di combinazione) tale che:

a, b ϵ B ⇨ a + b ϵ B $\qquad A \cup B \subset S$

P3) Si definisce un'operazione " · " tale che:

a, b ϵ B ⇨ a · b ϵ B $\qquad A \cap B \subset S$

Teoria degli Insiemi come Esempio di Algebra Booleana

P4) Esiste in B un elemento " 0 " (elemento neutro per l'operazione +) tale che:

$a \in B \Rightarrow \quad a + 0 = a \qquad\qquad A \cup \varnothing = A$

P5) Esiste in B un elemento " 1 " (elemento neutro per l'operazione ·) tale che:

$a \in B \Rightarrow \quad a \cdot 1 = a \qquad\qquad A \cap S = A$

Proprietà Commutativa

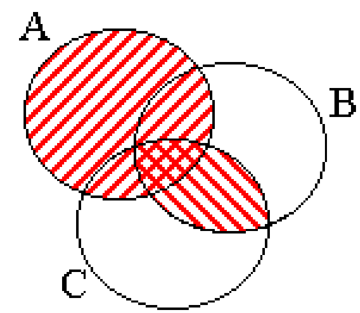
P6) $a + b = b + a$

P7) $a \cdot b = b \cdot a$

Proprietà Distributiva

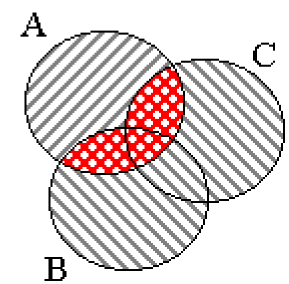
P8) a + (b · c) = (a + b) · (a + c)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$



P9) a · (b + c) = (a · b) + (a · c)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$



P10) Per ogni elemento a $\in$ B esiste un elemento $\overline{a}$ tale che:

$a \cdot \overline{a} = 0$ e $a + \overline{a} = 1$

$A \cap \overline{A} = \varnothing$ $A \cup \overline{A} = S$

P11) Ci sono almeno due elementi x, y $\in$ B tali che x $\neq$ y:

Sono sempre definiti $\varnothing$ e S

Teoremi Fondamentali dell'Algebra Booleana

Teorema del Consenso

1) $\boldsymbol{a \cdot b + \overline{a} \cdot c + b \cdot c = a \cdot b + \overline{a} \cdot c}$

2) $\boldsymbol{(a + b) \cdot (\overline{a} + c) \cdot (b + c) = (a + b) \cdot (\overline{a} + c)}$ (per la dualità)

Prova

$$
\begin{aligned}
a \cdot b + \overline{a} \cdot c + b \cdot c &= a \cdot b + \overline{a} \cdot c + b \cdot c \cdot (a + \overline{a}) \\
&= a \cdot b + \overline{a} \cdot c + a \cdot b \cdot c + \overline{a} \cdot b \cdot c \\
&= a \cdot b \cdot (1 + c) + \overline{a} \cdot c \cdot (1 + b) \\
&= a \cdot b + \overline{a} \cdot c
\end{aligned}
$$

Teorema di De Morgan: Estensione a n Variabili

$$\overline{\left(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n\right)} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \ldots + \overline{x_n}$$

$$\overline{\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right)} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \ldots \cdot \overline{x_n}$$

Teorema di De Morgan Generalizzato

$$\overline{\left[F\left(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n; \cdot, +\right)\right]} = F\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots\ldots, \overline{x_n}; +, \cdot\right)$$

Esempio $F(w,x,y,z) = \left(\overline{w} \cdot x\right) + \left(x \cdot y\right) + w \cdot \left(\overline{x} + \overline{z}\right)$

$$\overline{F(w,x,y,z)} = \overline{\left(\overline{w} \cdot x\right)} \cdot \overline{\left(x \cdot y\right)} \cdot \overline{w \cdot \left(\overline{x} + \overline{z}\right)}$$

$$= \left(w + \overline{x}\right) \cdot \left(\overline{x} + \overline{y}\right) \cdot \left(\overline{w} + x \cdot z\right)$$

Teorema di Shannon

$$f\left(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n\right) = x_1 \cdot f\left(1, x_2, \cdots\cdots, x_n\right) + \overline{x_1} \cdot f\left(0, x_2, \cdots\cdots, x_n\right) \qquad (\,\mathrm{I}\,)$$

Prova (Per sostituzione)

$$f\left(0, x_2, \cdots\cdots, x_n\right) = 0 \cdot f\left(1, x_2, \cdots\cdots, x_n\right) + 1 \cdot f\left(0, x_2, \cdots\cdots, x_n\right) = f\left(0, x_2, \cdots\cdots, x_n\right)$$

$$f\left(1, x_2, \cdots\cdots, x_n\right) = 1 \cdot f\left(1, x_2, \cdots\cdots, x_n\right) + 0 \cdot f\left(0, x_2, \cdots\cdots, x_n\right) = f\left(1, x_2, \cdots\cdots, x_n\right)$$

dualmente

$$f\left(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n\right) = \left(x_1 + f\left(0, x_2, \cdots\cdots, x_n\right)\right) \cdot \left(\overline{x_1} + f\left(1, x_2, \cdots\cdots, x_n\right)\right) \qquad (\,\mathrm{II}\,)$$

Teorema di Shannon

applicato più volte alle diverse variabili:

$$f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) = x_1 \cdot f(1, x_2, \cdots\cdots, x_n) + \overline{x_1} \cdot f(0, x_2, \cdots\cdots, x_n) + x_2 \cdot f(x_1, 1, \cdots\cdots, x_n) + \\ + \overline{x_2} \cdot f(x_1, 0, \cdots\cdots, x_n)$$

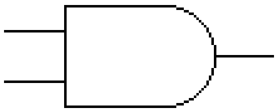
$$f(0,0,x_3,\cdots\cdots,x_n) = 1 \cdot f(0,0,x_3,\cdots\cdots,x_n) + 1 \cdot f(0,0,x_3,\cdots\cdots,x_n) = f(0,0,x_3,\cdots\cdots,x_n)$$

$$f(1,0,x_3,\cdots\cdots,x_n) = 1 \cdot f(1,0,x_3,\cdots\cdots,x_n) + 1 \cdot f(1,0,x_3,\cdots\cdots,x_n) = f(1,0,x_3,\cdots\cdots,x_n)$$

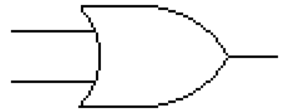
.....

Circuiti Logici

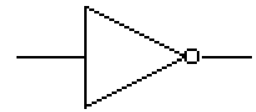
AND



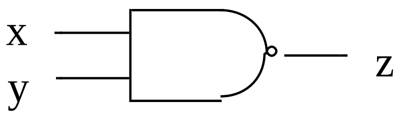
OR



NOT

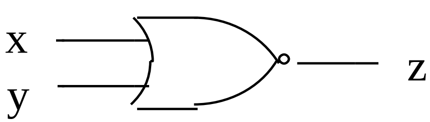


NAND



$\mathbf{x}$	$\mathbf{y}$	$\overline{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

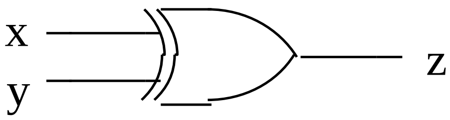
NOR



$\mathbf{x}$	$\mathbf{y}$	$\overline{\mathbf{x} + \mathbf{y}}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

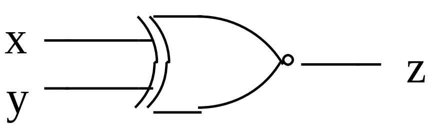
Circuiti Logici

XOR



$\mathbf{x}$	$\mathbf{y}$	$\mathbf{x \oplus y}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

XNOR

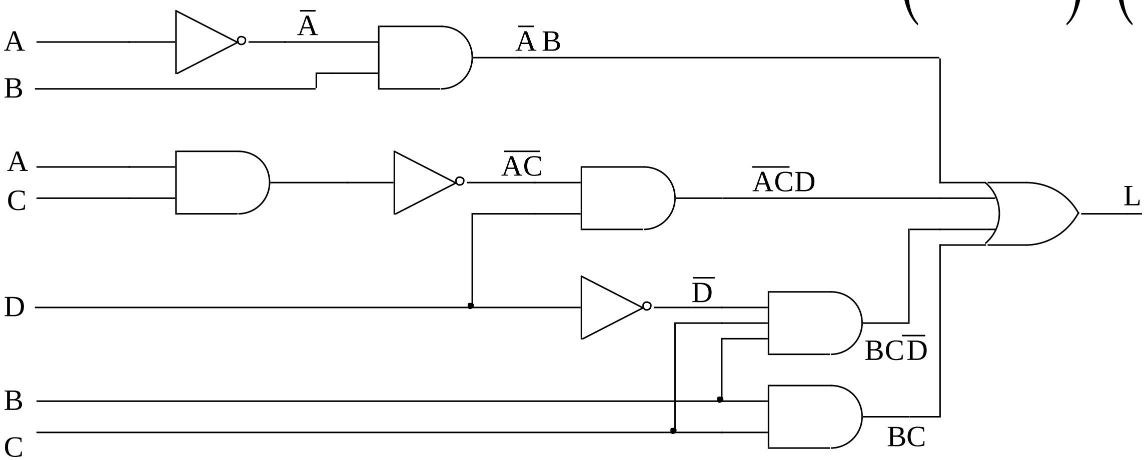


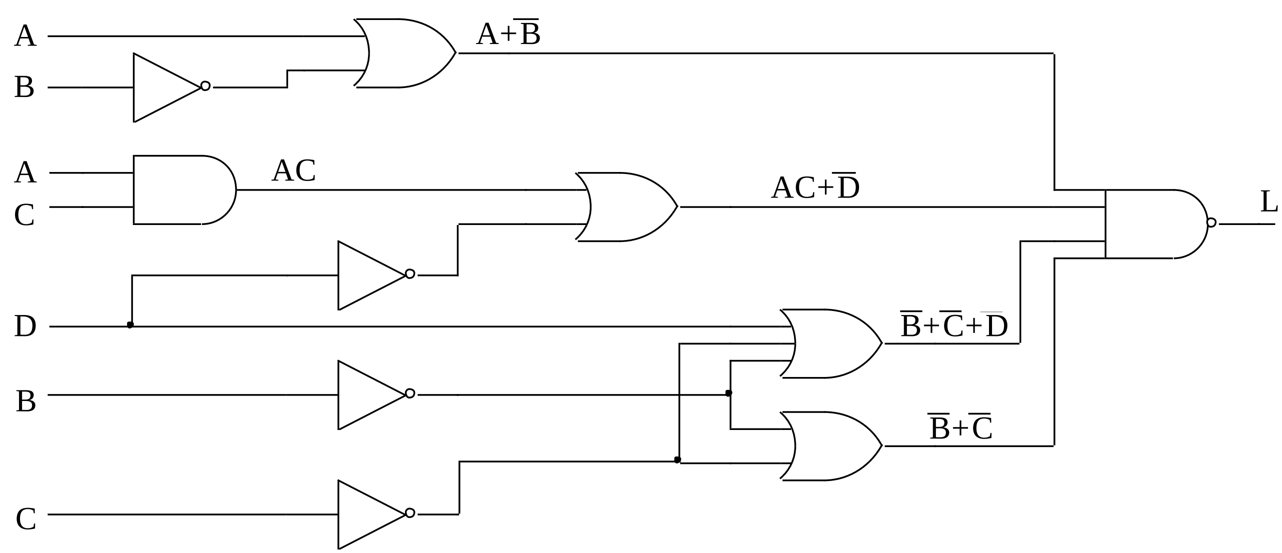
$\mathbf{x}$	$\mathbf{y}$	$\overline{\mathbf{x \oplus y}}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Funzioni Binarie (Logiche) Rappresentate da Circuiti Logici

$$L = \overline{A} \cdot B + \overline{A \cdot C} \cdot D + B \cdot C + B \cdot C \cdot \overline{D} =$$

$$= \overline{\left(A + \overline{B}\right) \cdot \left(A \cdot C + \overline{D}\right) \cdot \left(\overline{B} + \overline{C}\right) \cdot \left(\overline{B} + \overline{C} + D\right)}$$





Operatori Universali

- **(AND, NOT)**

  Dal teorema di De Morgan $\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y} \;\Rightarrow\; x + y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$

  L’operatore OR è una composizione degli operatori AND, NOT.

  L’insieme (AND, NOT) è ***completo***.

- **(OR, NOT)**

  Dal teorema di De Morgan $\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y} \;\Rightarrow\; x \cdot y = \overline{\bar{x} + \bar{y}}$

  L’operatore AND è una composizione degli operatori OR, NOT.

  L’insieme (OR, NOT) è ***completo***.

- **(AND, OR)**

  L’operatore NOT non si può ottenere come composizione di AND, OR.

  L’insieme (AND, OR) ***non è completo***.

Operatori Universali

- **(NAND)**

L’operatore NAND è ***completo***.

- operatore NOT: $\overline{x} = \overline{x} + \overline{x} = \overline{x \cdot x}$

- operatore AND: $x \cdot y = \overline{\overline{x \cdot y}} = \overline{\left(\overline{x \cdot y}\right) \cdot \left(\overline{x \cdot y}\right)}$

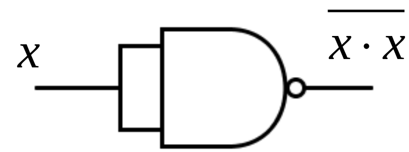
- operatore OR: $x + y = \overline{\overline{x + y}} = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} = \overline{\left(\overline{x \cdot x}\right) \cdot \left(\overline{y \cdot y}\right)}$

Gli operatori OR, AND, NOT sono composizione dell’operatore NAND

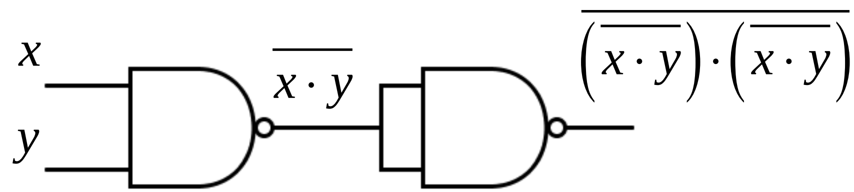
Operatori Universali

- **(NAND)** $\overline{\bullet \cdot \bullet}$

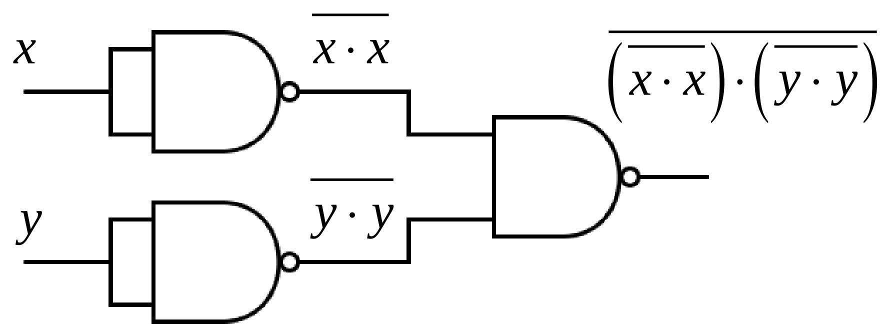
  - NOT: $\overline{x} = \overline{x \cdot x}$



  - AND: $x \cdot y = \overline{\left(\overline{x \cdot y}\right) \cdot \left(\overline{x \cdot y}\right)}$



  - OR: $x + y = \overline{\left(\overline{x \cdot x}\right) \cdot \left(\overline{y \cdot y}\right)}$



Operatori Universali

- **(NOR)**

  L'operatore NOR è ***completo***.

- operatore NOT: $\bar{x} = \bar{x} \cdot \bar{x} = \overline{x + x}$

- operatore AND: $x \cdot y = \overline{\overline{x \cdot y}} = \overline{\bar{x} + \bar{y}} = \overline{\left(\overline{x + x}\right) + \left(\overline{y + y}\right)}$

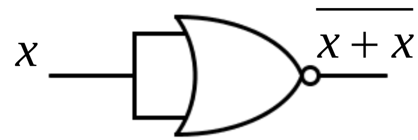
- operatore OR: $x + y = \overline{\overline{x + y}} = \overline{\left(\overline{x + y}\right) + \left(\overline{x + y}\right)}$

Gli operatori OR, AND, NOT sono composizione dell'operatore NOR

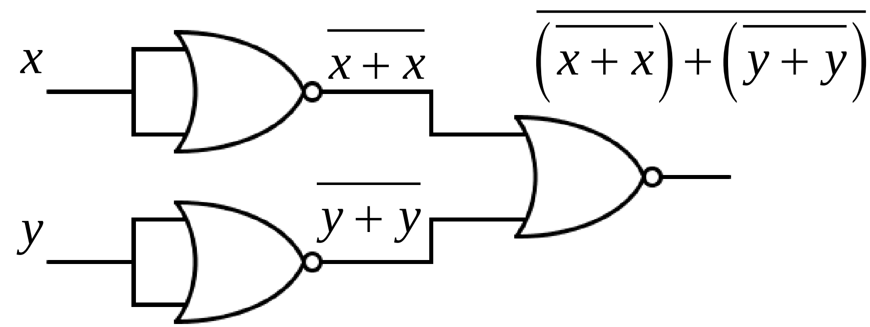
Operatori Universali

- **(NOR)** $\overline{\bullet + \bullet}$

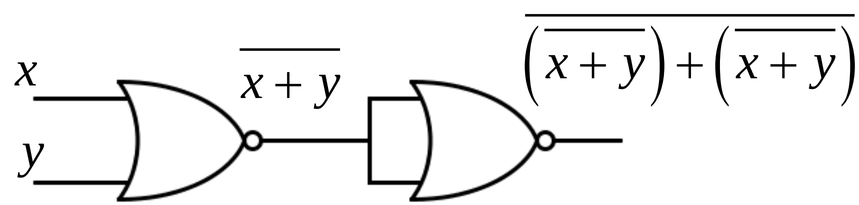
  - NOT: $\bar{x} = \overline{x + x}$



  - AND: $x \cdot y = \overline{\left(\overline{x + x}\right) + \left(\overline{y + y}\right)}$



  - OR: $x + y = \overline{\left(\overline{x + y}\right) + \left(\overline{x + y}\right)}$



Rappresentazioni Canoniche di Funzioni Logiche

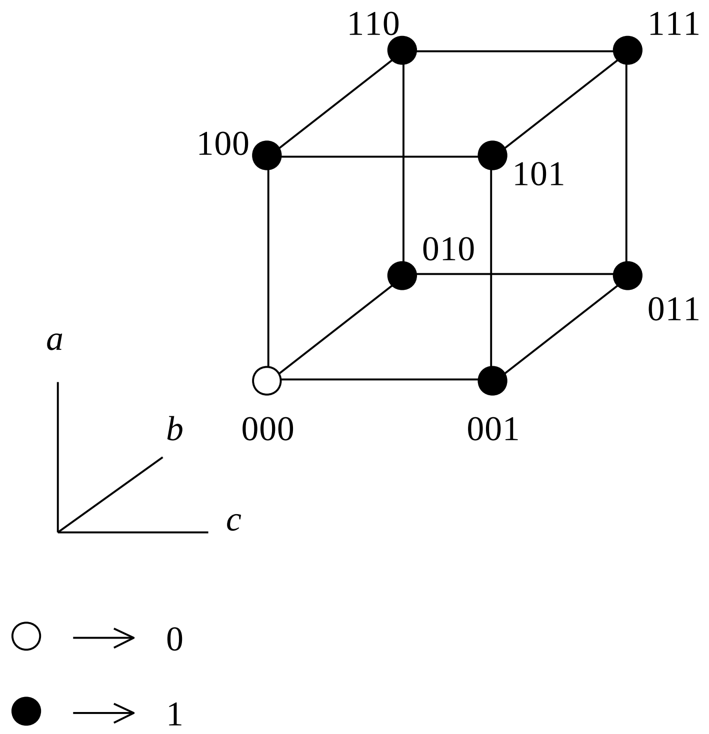
- **Tabella della verità**

Riga	a	b	c	F
0	0	0	0	F(0,0,0)
1	0	0	1	F(0,0,1)
2	0	1	0	F(0,1,0)
3	0	1	1	F(0,1,1)
4	1	0	0	F(1,0,0)
5	1	0	1	F(1,0,1)
6	1	1	0	F(1,1,0)
7	1	1	1	F(1,1,1)

Riga	a	b	c	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Rappresentazioni Canoniche di Funzioni Logiche

- **Rappresentazione cubica**



- **Rappresentazione algebrica**

$$F = a + b + c$$

Rappresentazione Algebrica

- **Variabile letterale**, o semplicemente **letterale**, è una variabile binaria o il complemento di una variabile binaria.

  <u>Esempio:</u> $x, y, \overline{x}, y'$

- **Termine prodotto** (product term) o **implicante** è una semplice letterale o il prodotto logico di 2 o più letterali.

  <u>Esempio:</u> $x',\ x \cdot y,\ x \cdot \overline{y} \cdot z,\ \overline{w} \cdot \overline{z} \cdot x$

- **Somma di prodotti** è una somma logica di termini prodotto.

  <u>Esempio:</u> $\overline{z} + w \cdot x \cdot y + x \cdot \overline{y} \cdot z + w \cdot \overline{y} \cdot z$

Rappresentazione Algebrica

- **Termine somma** è una semplice letterale o la somma logica di 2 o più letterali.

  Esempio: $z,\ \overline{x}+y,\ x+y+\overline{z},\ \overline{x}+\overline{y}+\overline{z}$

- **Prodotto di somme** è un prodotto logico di termini somma.

  Esempio: $\overline{x},\ \left(x+y+w\right)\cdot\left(\overline{x}+\overline{y}+z\right)\cdot\left(x+\overline{z}+\overline{w}\right)$

- **Termine canonico** (o normale) è un termine prodotto o un termine somma in cui le variabili appaiono non più di una sola volta.

  Esempio:

  Termini non canonici: $w\cdot x\cdot x\cdot y,\ w+w+\overline{x}+y,\ w\cdot x\cdot\overline{w}\cdot y,\ x\cdot x'\cdot y$

  Termini canonici: $w\cdot x\cdot\overline{y},\ w+\overline{x}+y$

Rappresentazione Algebrica

- **Mintermine** di una funzione a n-variabili è un prodotto canonico con n-letterali.

  Esistono 2^n di questi termini.

  Esempio:

  Mintermine a 4-variabili: $\overline{w} \cdot \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$, $w \cdot x \cdot \overline{y} \cdot z$, $\overline{w} \cdot \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}$

- **Maxtermine** di una funzione a n-variabili è una somma canonica con n-letterali.

  Esistono 2^n di questi termini.

  Esempio:

  Maxtermine a 4-variabili: $w + \overline{x} + \overline{y} + z$, $\overline{w} + \overline{x} + y + \overline{z}$, $w + x + \overline{y} + z$

Rappresentazione Algebrica

- *corrispondenza* tra tabella della verità $\Rightarrow$ mintermini, maxtermini.

Riga	x	y	z	F	Mintermine	Maxtermine
0	0	0	0	F(0,0,0)	$\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}$	$x+y+z$
1	0	0	1	F(0,0,1)	$\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z$	$x+y+\overline{z}$
2	0	1	0	F(0,1,0)	$\overline{x}\cdot y\cdot\overline{z}$	$x+\overline{y}+z$
3	0	1	1	F(0,1,1)	$\overline{x}\cdot y\cdot z$	$x+\overline{y}+\overline{z}$
4	1	0	0	F(1,0,0)	$x\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}$	$\overline{x}+y+z$
5	1	0	1	F(1,0,1)	$x\cdot\overline{y}\cdot z$	$\overline{x}+y+\overline{z}$
6	1	1	0	F(1,1,0)	$x\cdot y\cdot\overline{z}$	$\overline{x}+\overline{y}+z$
7	1	1	1	F(1,1,1)	$x\cdot y\cdot z$	$\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}$

$$F(x,y,z)$$

- Un **mintermine** è un termine prodotto che è 1 solo in una riga della tabella della verità.
- Un **maxtermine** è un termine somma che è 0 solo in una riga della tabella della verità.

Somma Canonica

- Rappresentazione di una funzione logica come somma di mintermini corrispondenti alle righe della tabella della verità per cui la funzione vale 1.

Riga	x	y	z	F			
0	0	0	0	1	$\rightarrow$	$\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}$	
1	0	0	1	0		$\rightarrow$	$x+y+\overline{z}$
2	0	1	0	0		$\rightarrow$	$x+\overline{y}+z$
3	0	1	1	1	$\rightarrow$	$\overline{x}\cdot y\cdot z$	
4	1	0	0	1	$\rightarrow$	$x\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}$	
5	1	0	1	0		$\rightarrow$	$\overline{x}+y+\overline{z}$
6	1	1	0	1	$\rightarrow$	$x\cdot y\cdot\overline{z}$	
7	1	1	1	1	$\rightarrow$	$x\cdot y\cdot z$	

$$F=\sum_{xyz}(0,3,4,6,7)=\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}+\overline{x}\cdot y\cdot z+x\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}+x\cdot y\cdot\overline{z}+x\cdot y\cdot z$$

- Lista dei mintermini $\rightarrow$ **on-set**

Prodotto Canonico

- Rappresentazione di una funzione logica come prodotto di maxtermini corrispondenti alle righe della tabella della verità per cui la funzione vale 0.

Riga	x	y	z	F		
0	0	0	0	1	$\rightarrow \bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}$	
1	0	0	1	0		$\rightarrow x+y+\bar{z}$
2	0	1	0	0		$\rightarrow x+\bar{y}+z$
3	0	1	1	1	$\rightarrow \bar{x}\cdot y\cdot z$	
4	1	0	0	1	$\rightarrow x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}$	
5	1	0	1	0		$\rightarrow \bar{x}+y+\bar{z}$
6	1	1	0	1	$\rightarrow x\cdot y\cdot\bar{z}$	
7	1	1	1	1	$\rightarrow x\cdot y\cdot z$	

$$F=\prod_{xyz}(1,2,5)=\left(x+y+\bar{z}\right)\cdot\left(x+\bar{y}+z\right)\cdot\left(\bar{x}+y+\bar{z}\right)$$

- Lista dei maxtermini $\rightarrow$ **off-set**

Rappresentazione di Funzioni Logiche

- Ogni funzione logica può essere rappresentata da:

1 - Tabella della verità

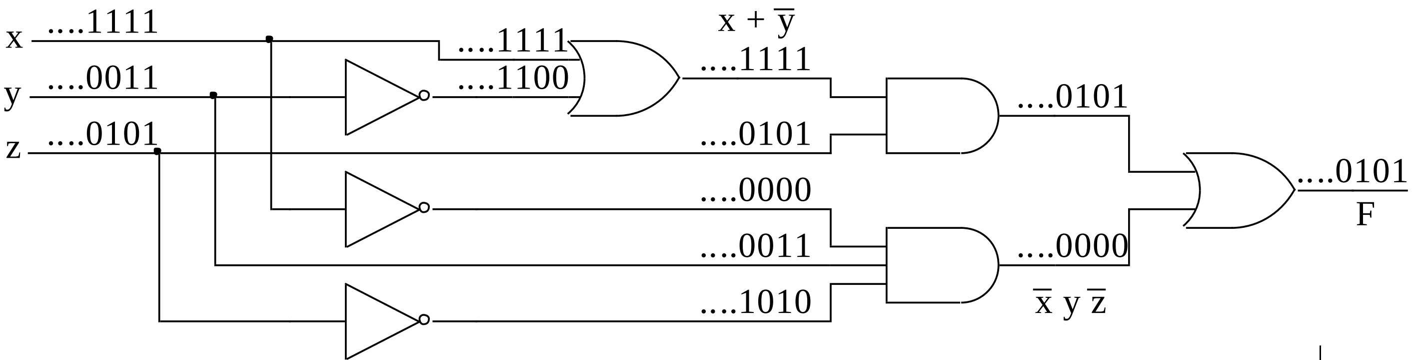
2 - Somma logica di mintermini (somma canonica)

3 - Lista di mintermini con la notazione Σ

4 - Prodotto logico di maxtermini (prodotto canonico)

5 - Lista di maxtermini con la notazione Π

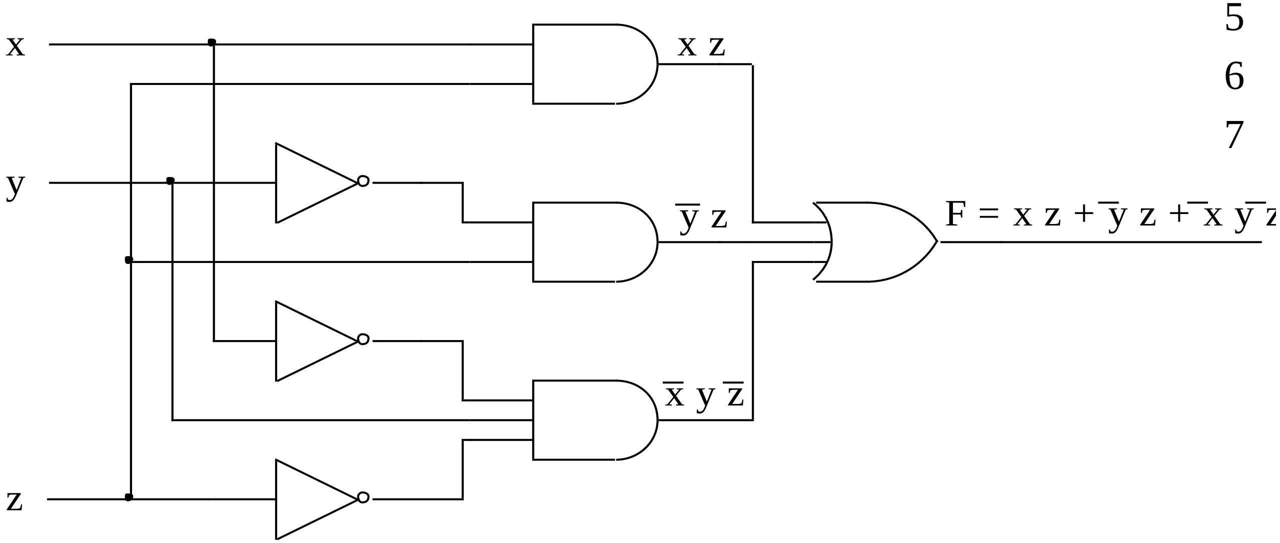
Analisi delle Reti Combinatorie



$$F = \left(x + \bar{y}\right) \cdot z + \left(\bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}\right)$$

$$F = x \cdot z + \bar{y} \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}$$

Riga	**x**	**y**	**z**	**F**
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1



Analisi delle Reti Combinatorie

Dalla proprietà distributiva $x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$

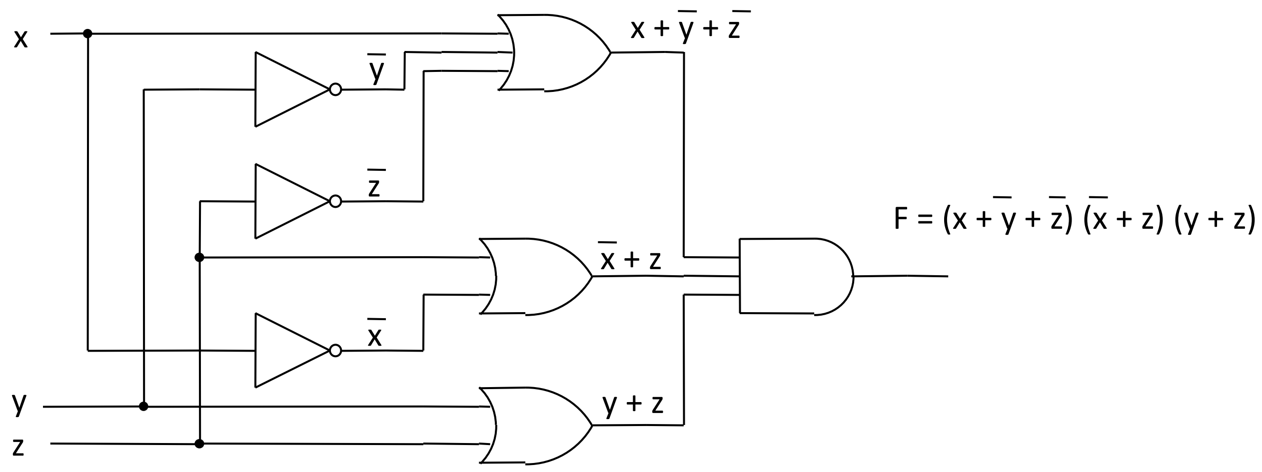
E più in generale $(v \cdot w) + (y \cdot z) = (v + y) \cdot (v + z) \cdot (w + y) \cdot (w + z)$

$$F = \left(\left(x + \overline{y}\right) \cdot z\right) + \left(\overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}\right)$$

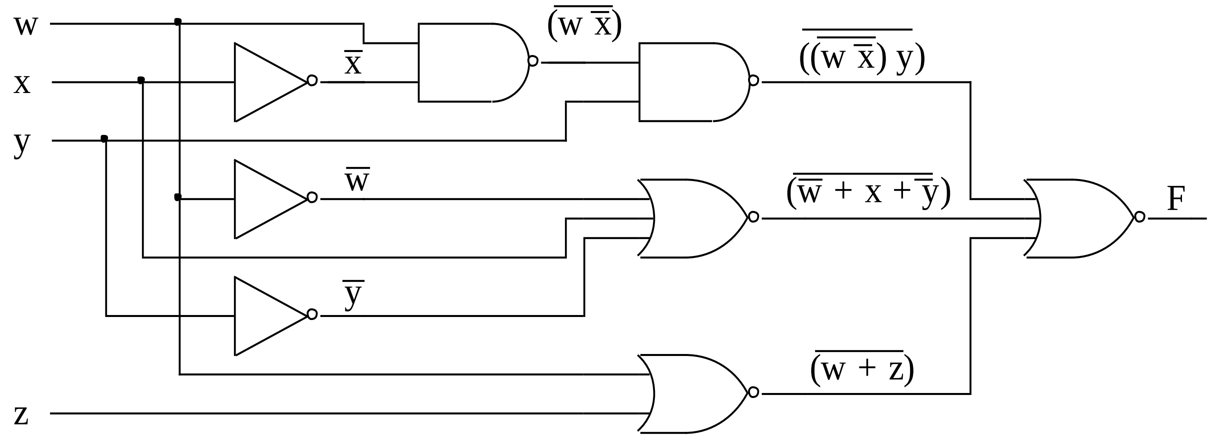
$$= \left(x + \overline{y} + \overline{x}\right) \cdot \left(x + \overline{y} + y\right) \cdot \left(x + \overline{y} + \overline{z}\right) \cdot \left(z + \overline{x}\right) \cdot (z + y) \cdot \left(z + \overline{z}\right)$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \left(x + \overline{y} + \overline{z}\right) \cdot \left(z + \overline{x}\right) \cdot (z + y) \cdot 1$$

$$= \left(x + \overline{y} + \overline{z}\right) \cdot \left(\overline{x} + z\right) \cdot (z + y)$$



Circuito con soli NOR, NAND, NOT

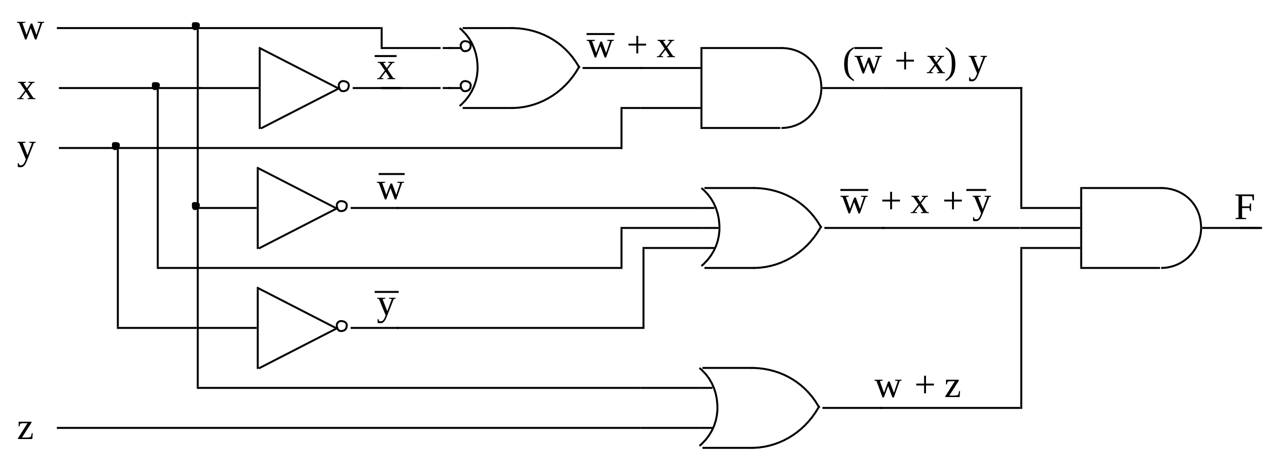


$$F=\overline{\left[\overline{\left(\left(\overline{w\cdot\overline{x}}\right)\cdot y\right)}+\overline{\left(\overline{w}+x+\overline{y}\right)}+\overline{\left(w+z\right)}\right]}$$

con De Morgan

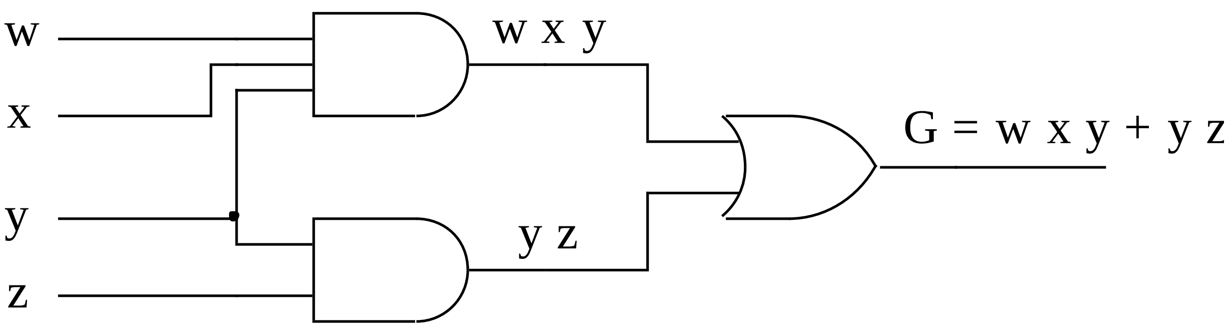
$$=\left(\overline{w\cdot\overline{x}}\cdot y\right)\cdot\left(\overline{w}+x+\overline{y}\right)\cdot\left(w+z\right)$$

$$=\left(\left(\overline{w}+x\right)\cdot y\right)\cdot\left(\overline{w}+x+\overline{y}\right)\cdot\left(w+z\right)$$

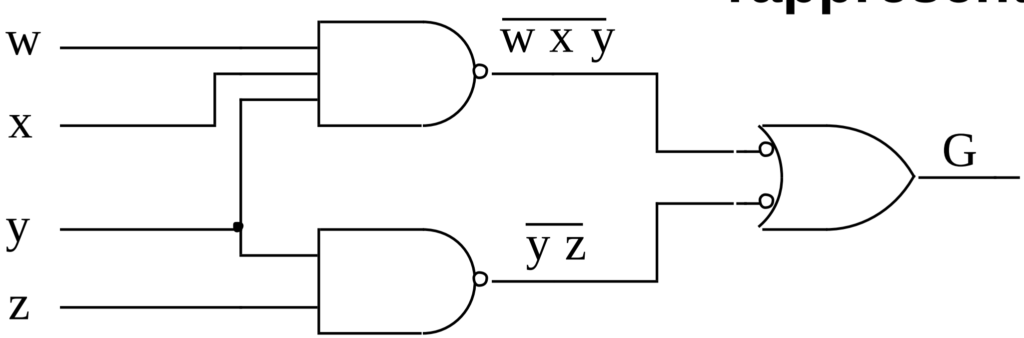


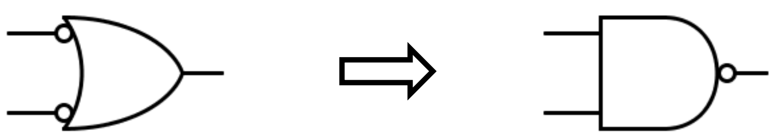
Circuito con soli NOR, NAND, NOT

rappresentazione AND / OR



rappresentazione NAND / NOR





Sintesi dei Circuiti Combinatori

Esempio: Rilevatore di numeri primi

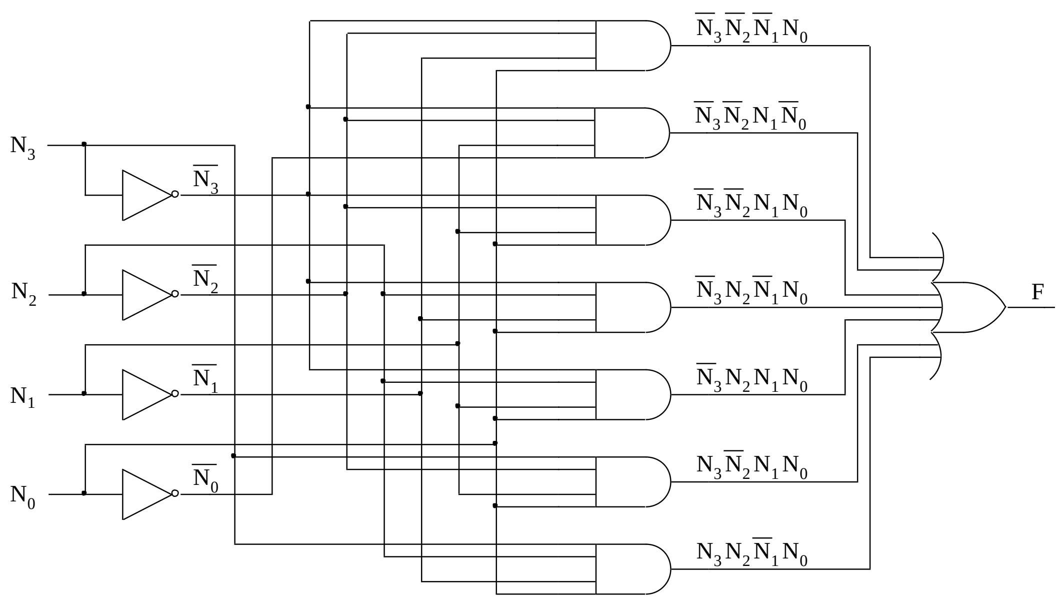
Dato un ingresso a 4-bit $N = N_3 N_2 N_1 N_0$ la funzione è:

$$\begin{cases} 1 & \text{per } N = 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$F = \sum_{N_3 N_2 N_1 N_0} \left(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\right)$$

$$= \overline{N_3} \cdot \overline{N_2} \cdot \overline{N_1} \cdot N_0 + \overline{N_3} \cdot \overline{N_2} \cdot N_1 \cdot \overline{N_0} + \overline{N_3} \cdot \overline{N_2} \cdot N_1 \cdot N_0 + \overline{N_3} \cdot N_2 \cdot \overline{N_1} \cdot N_0 +$$

$$+ \overline{N_3} \cdot N_2 \cdot N_1 \cdot N_0 + N_3 \cdot \overline{N_2} \cdot N_1 \cdot N_0 + N_3 \cdot N_2 \cdot \overline{N_1} \cdot N_0$$



Sintesi dei Circuiti Combinatori

- implementazioni circuitali:

1 – Rappresentazione inverter – AND – OR

2 – Rappresentazione AND – inverter – OR

3 – Rappresentazione NAND – NAND

4 – Rappresentazione inverter – OR – AND

5 – Rappresentazione OR – inverter – AND

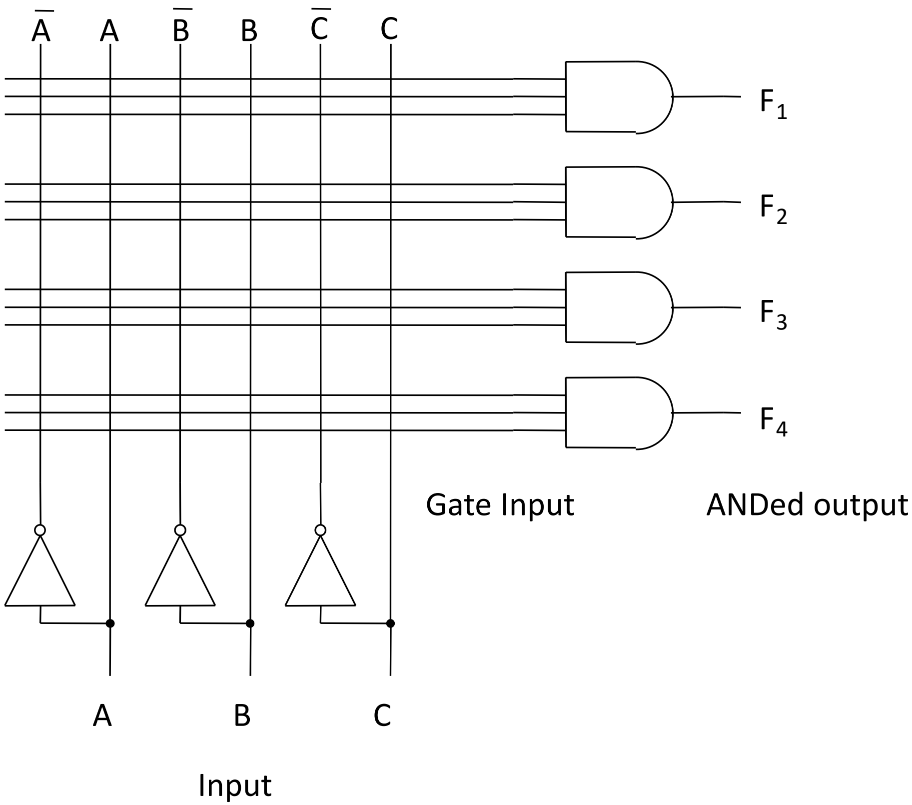
6 – Rappresentazione NOR – NOR

7 – Rappresentazione con PLA

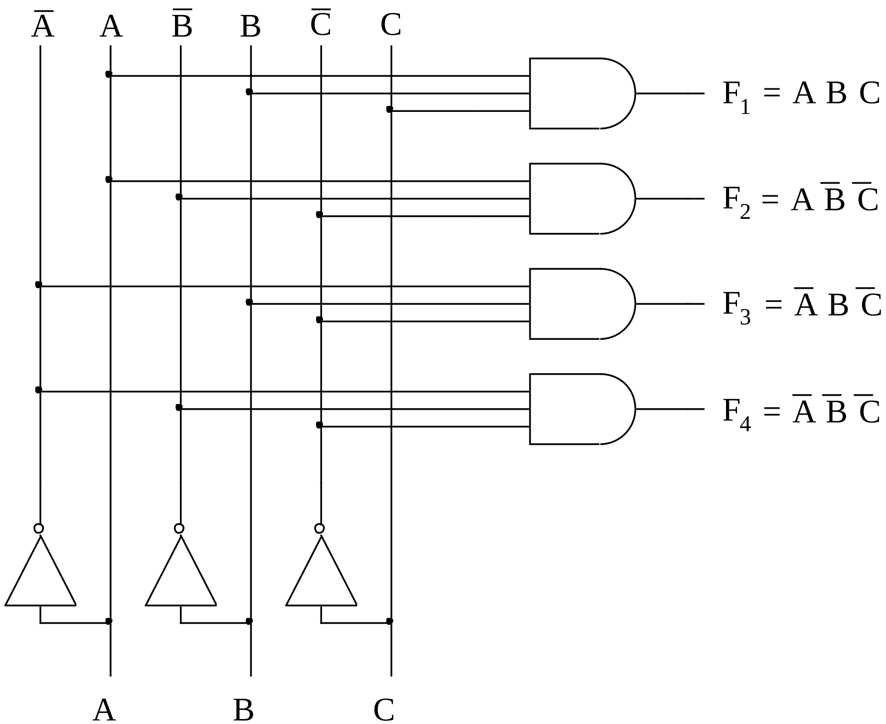
Logica Strutturata (Logic Array)

Reti con struttura regolare

AND Logic Array non programmato

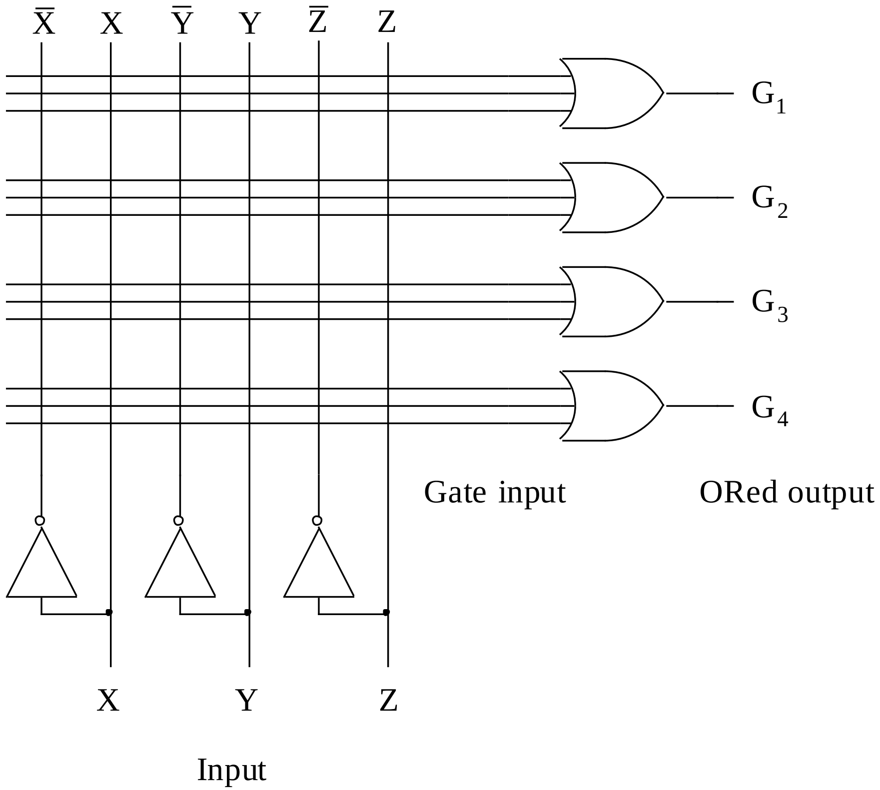


AND Logic Array programmato

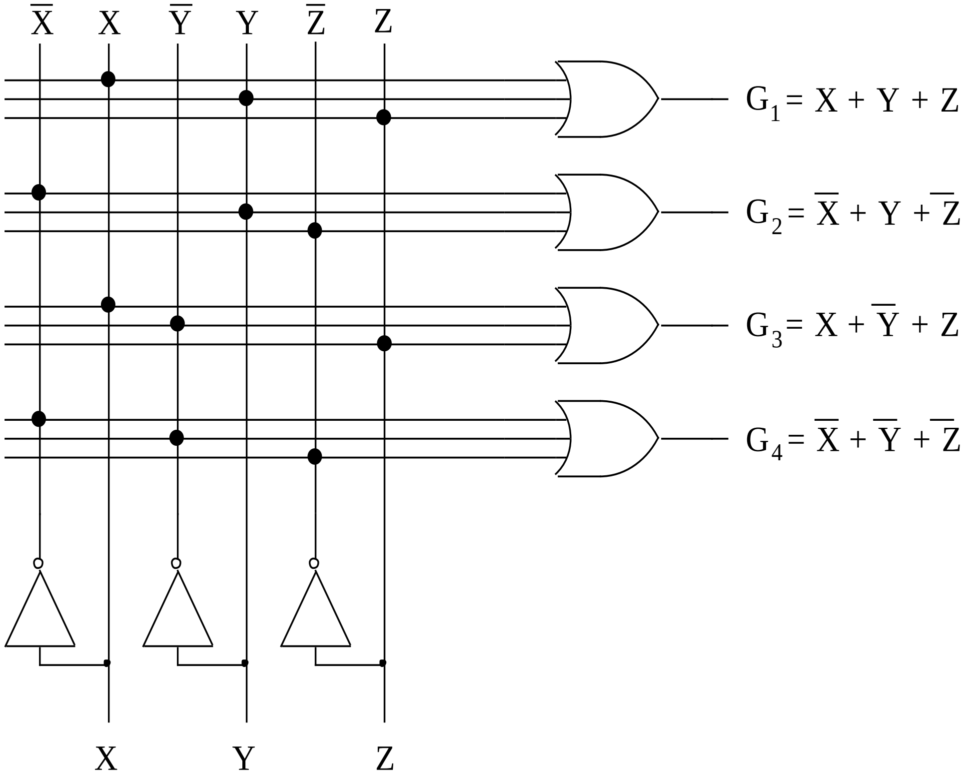


Logica Strutturata (Logic Array)

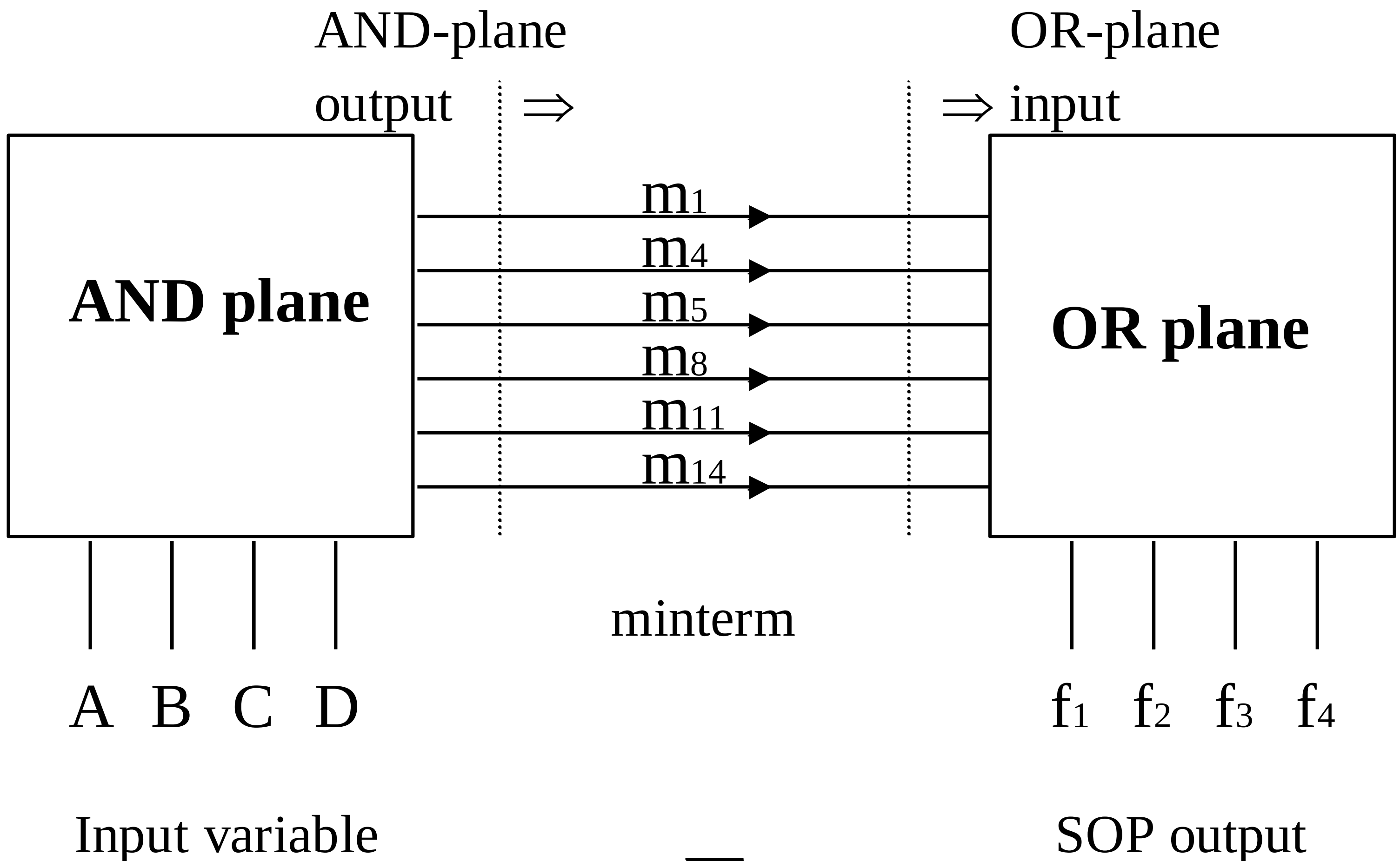
OR Logic Array non programmato



OR Logic Array programmato



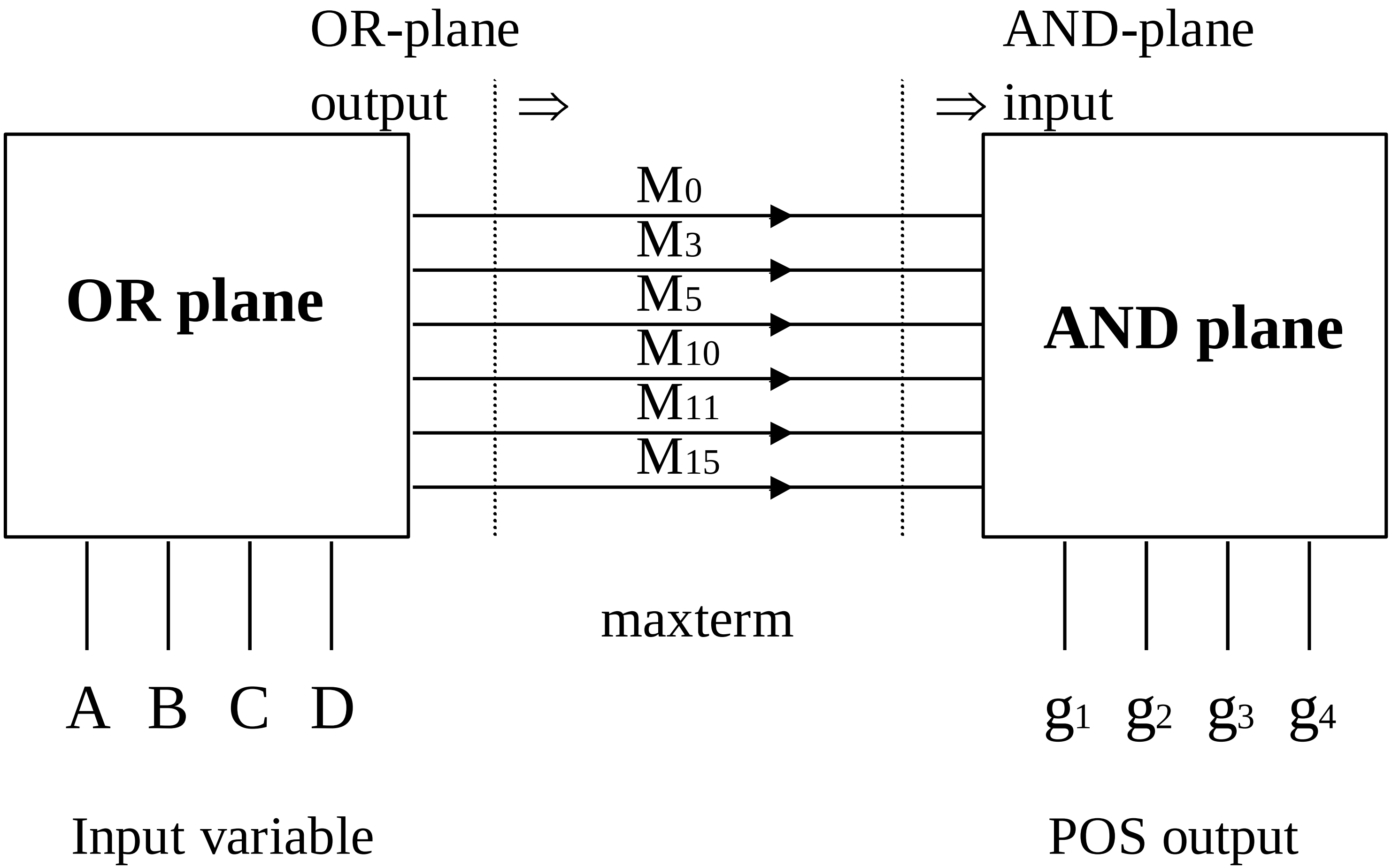
Struttura Generale di PLA "AND-OR"



$$f_n = \sum_i m_i$$

Ogni uscita è una somma di mintermini (SOP = sum of product)

Struttura Generale di PLA "OR-AND"



Ogni uscita è una somma di maxtermini (POS = product of sum)

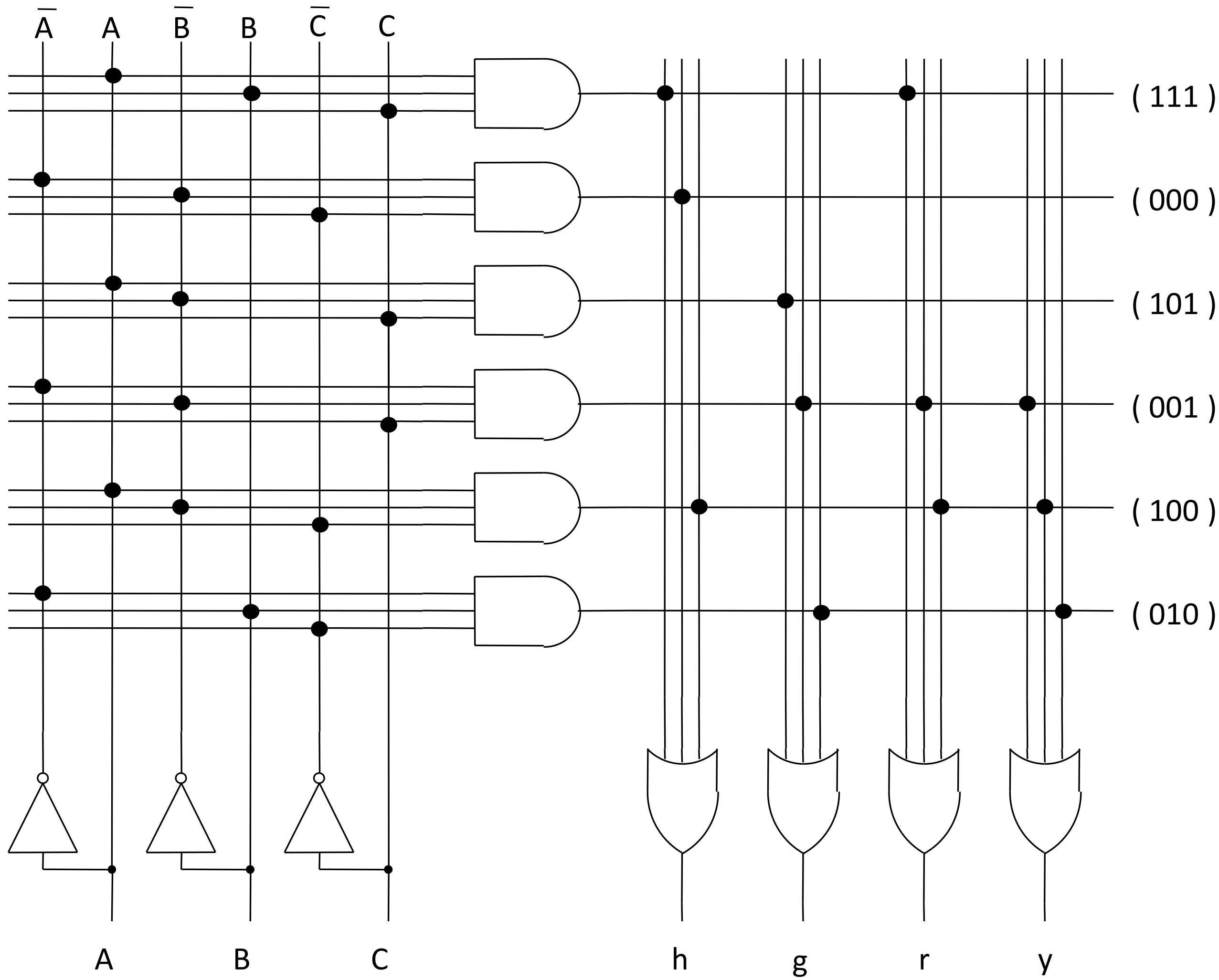
Esempio: PLA "AND-OR"

$$h = A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

$$g = A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$$

$$r = A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

$$y = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$$



Esempio: PLA "OR-AND"

$$G = \left(A + B + C\right)\cdot\left(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}\right)\cdot\left(A + \overline{B} + \overline{C}\right) \qquad H = \left(A + \overline{B} + C\right)\cdot\left(\overline{A} + \overline{B} + C\right)\cdot\left(\overline{A} + B + \overline{C}\right)$$

$$J = \left(A + B + C\right)\cdot\left(\overline{A} + \overline{B} + C\right)\cdot\left(A + \overline{B} + \overline{C}\right) \qquad K = \left(\overline{A} + \overline{B} + C\right)\cdot\left(A + \overline{B} + \overline{C}\right)\cdot\left(\overline{A} + B + \overline{C}\right)$$