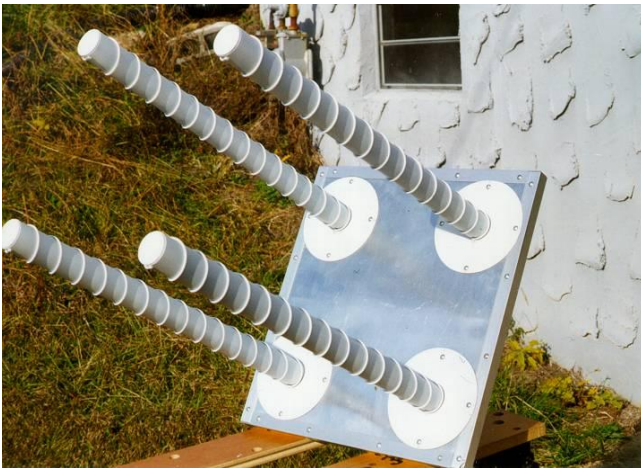
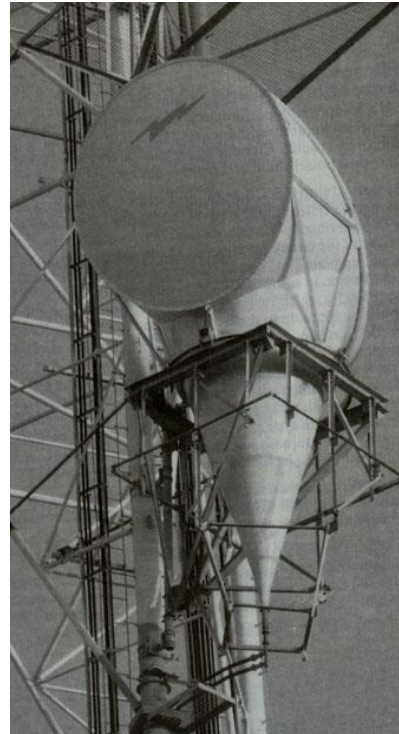


COME VENGONO IRRADIATI I  
CAMPI?

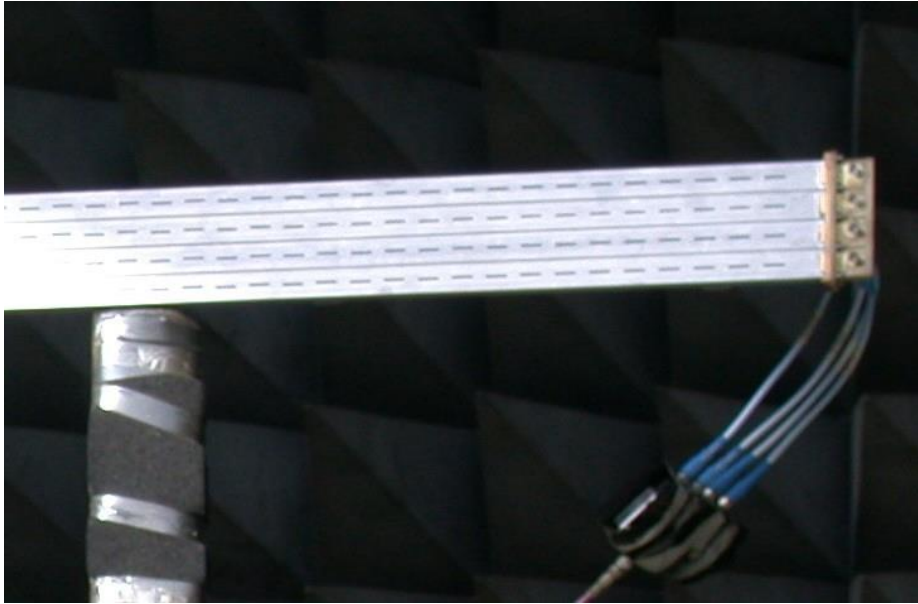
# Tipi di antenna: filiformi



# Tipi di antenna: ad apertura

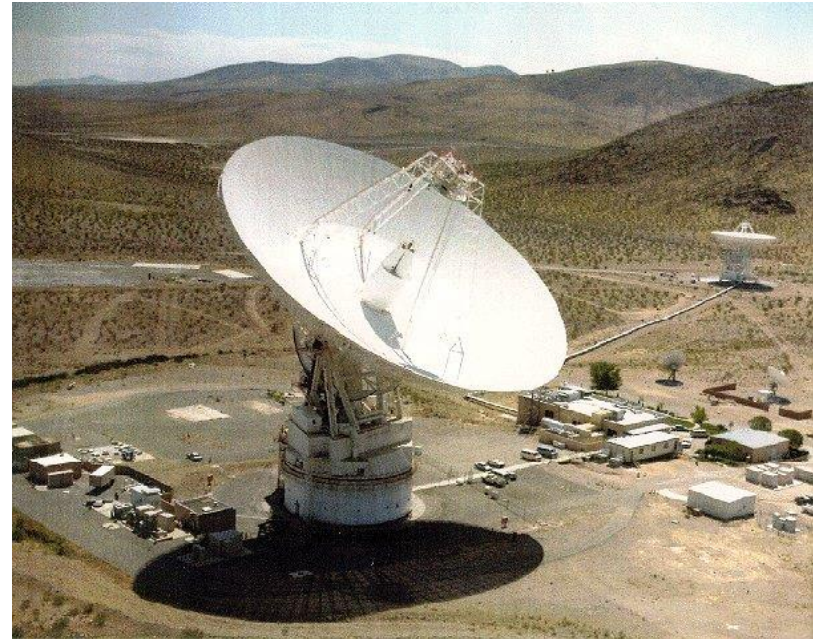


# Tipi di antenna: Schiere



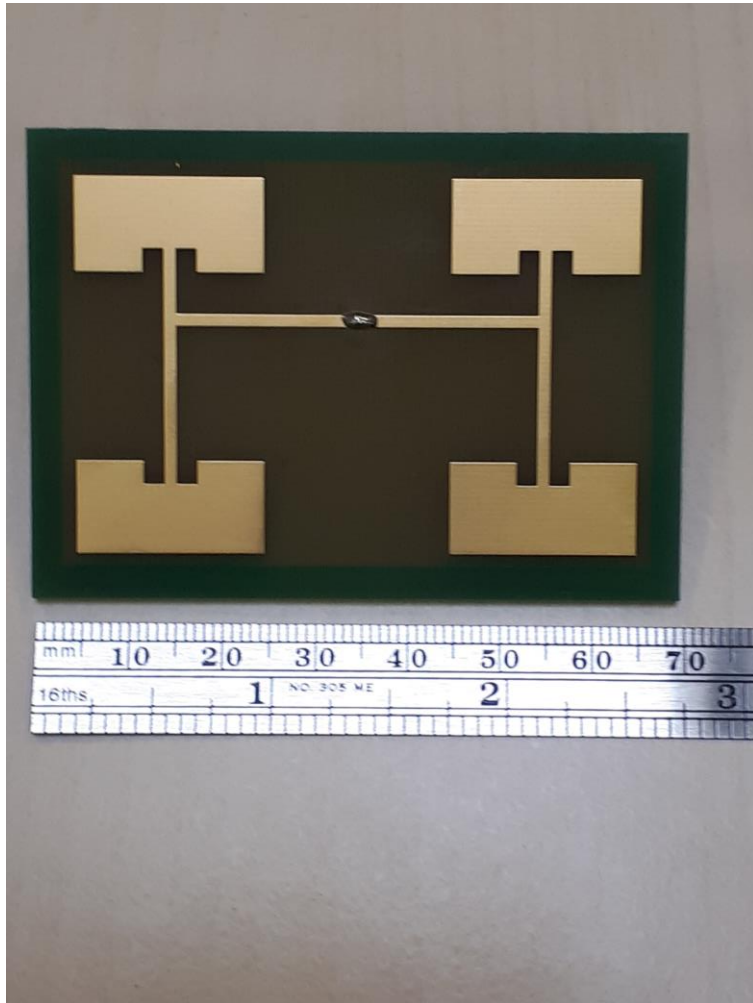


# Tipi di antenna: a riflettore



E...senza  
strafare, la  
parabola di  
casa

# Tipi di antenna: a microstriscia



**FACCIAMO UN PASSO INDIETRO**

# Potenziale vettore e potenziale scalare in un sistema non statico 1/6

Nel caso statico si è visto che il campo elettrico può essere legato ad un potenziale scalare così come il campo magnetico può essere legato ad un potenziale vettore..

E' possibile definire dei potenziali anche nel caso di campi tempo varianti?

Campo magnetico

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \text{Come nel caso statico}$$

Campo elettrico

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \nabla \times \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$



# Potenziale vettore e potenziale scalare in un sistema non statico 2/6

Si può quindi assumere che

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Il campo elettrico dunque non è più irrotazionale nel caso dinamico e deve essere legato anche al potenziale vettore.

Ma i due potenziali sono legati?

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

# Potenziale vettore e potenziale scalare in un sistema non statico 3/6

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H} &= \nabla \times \left( \frac{\nabla \times \vec{A}}{\mu} \right) = \frac{\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}}{\mu} = \\ &= \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)\end{aligned}$$



$$\nabla^2 \vec{A} - \nabla \left( \nabla \cdot \vec{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} V \right) - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}$$

Ricordiamo che, dal teorema di Helmholtz, un vettore è completamente specificato quando ne siano fissati il suo rotore e la sua divergenza. Ci rimane ancora da fissare il valore per la divergenza di  $\mathbf{A}$

# Potenziale vettore e potenziale scalare in un sistema non statico 4/6

Per convenienza facciamo questa scelta (scelta di Lorentz)

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t}$$

In questo modo otteniamo:

$$\nabla^2 V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}$$

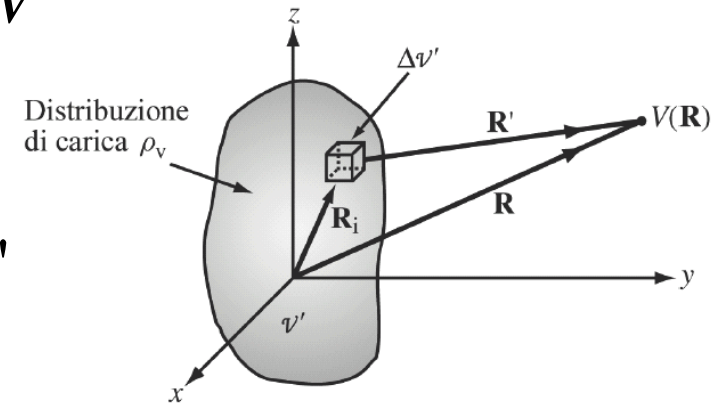
Se le variazioni temporali sono nulle, ricadiamo nei potenziali statici già visti

# Potenziale vettore e potenziale scalare in un sistema non statico 5/6

La soluzione delle due equazioni non sarà troppo diversa da quella statica.  
E' possibile dimostrare che la soluzione è:

$$V(\vec{R}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho_v(\vec{R}_i, t - |\vec{R} - \vec{R}_i|/v)}{|\vec{R} - \vec{R}_i|} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{R}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{R}_i, t - |\vec{R} - \vec{R}_i|/v)}{|\vec{R} - \vec{R}_i|} dV'$$



La velocità  $v$  con cui si propaga l'effetto è pari a:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left[ \frac{m}{s} \right]$$

# Potenziale vettore e potenziale scalare in un sistema non statico 6/6

Ciò significa che dobbiamo immaginare una situazione in cui il cambiamento temporale di una sorgente produce effetti nello spazio circostante in tempi differiti, come avviene per qualunque fenomeno naturale variabile nel tempo (la luce del sole arriva dopo un certo tempo sulla terra; il rumore del tuono arriva al nostro orecchio dopo un certo tempo dopo aver visto il fulmine, ...). Ciò implica la presenza di un tempo di ritardo degli effetti del cambiamento della sorgente in un certo punto dello spazio, posto a distanza  $R'$  dalla sorgente stessa. Il tempo di ritardo è pari al rapporto tra la distanza  $R'$  e la velocità  $v$  con cui il fenomeno fisico si propaga.



# Potenziale vettore e potenziale scalare in un sistema non statico (fasori) 1/3

Le considerazioni precedenti possono essere applicate anche nel caso in cui le sorgenti siano funzioni periodiche sinusoidali. Immaginiamo che

$$\rho_v(\vec{R}, t) = \rho_v(\vec{R}) \cos(\omega t) = \operatorname{Re} \left\{ \rho_v(\vec{R}) e^{j\omega t} \right\}$$

$$\vec{J}(\vec{R}, t) = \vec{J}(\vec{R}) \cos(\omega t) = \operatorname{Re} \left\{ \vec{J}(\vec{R}) e^{j\omega t} \right\}$$

Ci possiamo aspettare che anche i potenziali siano delle funzioni periodiche sinusoidali con opportuna ampiezza e fase

# Potenziale vettore e potenziale scalare in un sistema non statico (fasori) 2/3

Le equazioni per i potenziali nel dominio dei fasori diventano

$$\nabla^2 V(\vec{R}) + \omega^2 \mu \epsilon V(\vec{R}) = -\frac{\rho(\vec{R})}{\epsilon}$$

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{R}) + \omega^2 \mu \epsilon \vec{A}(\vec{R}) = -\mu \vec{J}(\vec{R})$$

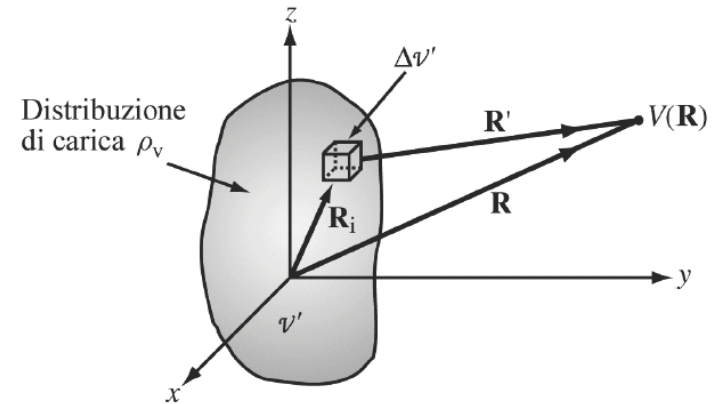
Dove ovviamente  $V(\vec{R})$  e  $\vec{A}(\vec{R})$  sono i fasori corrispondenti dei potenziali scalare e vettore

# Potenziale vettore e potenziale scalare in un sistema non statico (fasori) 3/3

La soluzione nel dominio dei fasori :

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho_v(\vec{R}_i) e^{-jk|\vec{R}-\vec{R}_i|}}{|\vec{R}-\vec{R}_i|} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{R}_i) e^{-jk|\vec{R}-\vec{R}_i|}}{|\vec{R}-\vec{R}_i|} dV'$$



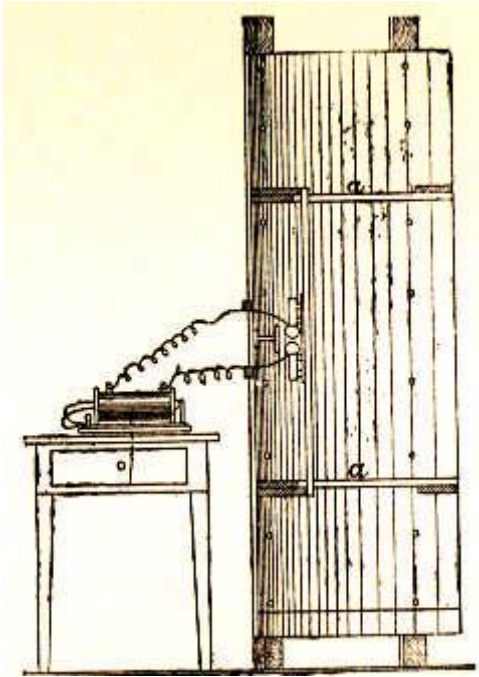
$k$  viene definito numero d'onda oppure costante di propagazione ed è pari a :

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad \left[ \frac{1}{m} \right]$$

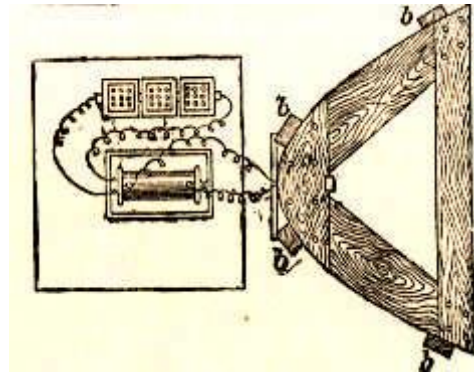
Che cosa ci facciamo con i potenziali ritardati?

# Il dipolo Hertziano

- E' il più semplice esempio di radiatore: ideato da Heinrich Rudolf Hertz ed utilizzato nel suo esperimento del 1887



Trasmittitore



Ricevitore

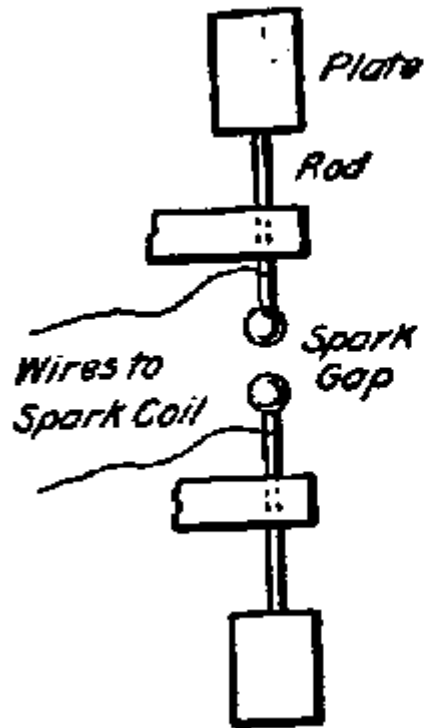


1857-1894

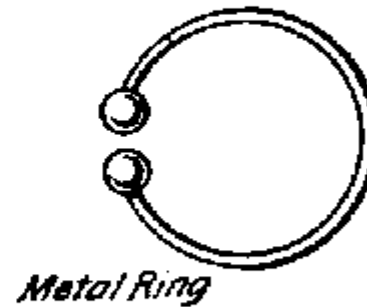


# Il dipolo Hertziano

- In modo più schematico



Trasmittitore



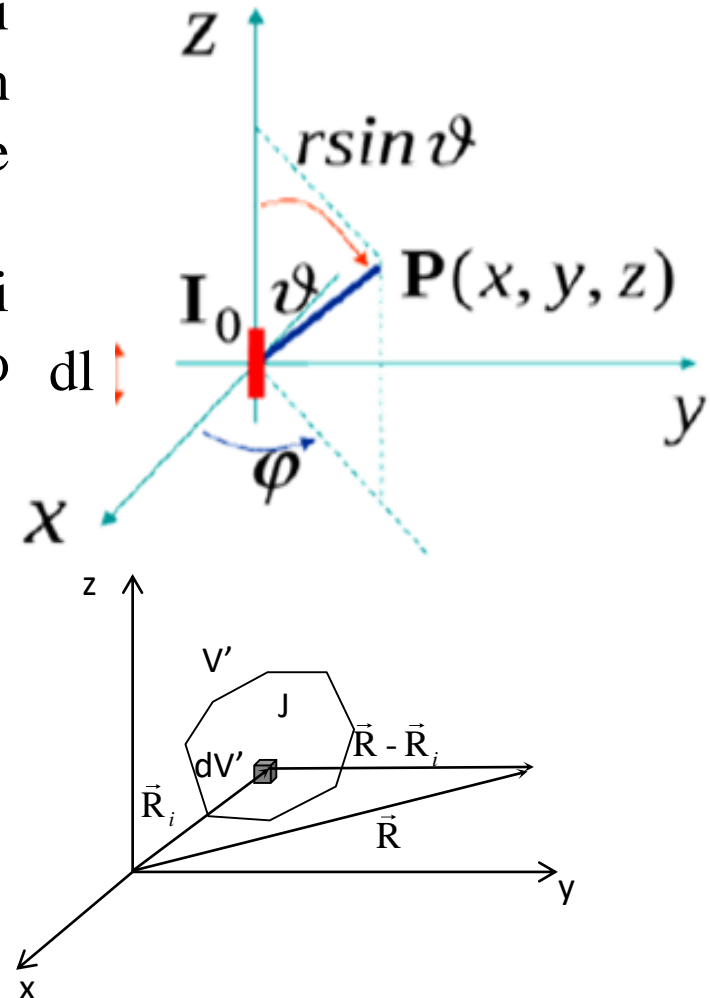
Ricevitore

# Dipolo elettrico hertziano 1/5

Consideriamo un elemento infinitesimo di corrente  $dl$  disposto lungo l'asse  $z$  di un sistema di riferimento cartesiano e variabile nel tempo in modo periodico di tipo  $\cos(\omega t)$ .

Valutiamo il potenziale vettore nel dominio dei fasori, da cui poi calcolare il campo magnetico e, infine, il campo elettrico

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{R}_i) e^{-jk|\vec{R}-\vec{R}_i|}}{|\vec{R}-\vec{R}_i|} dV'$$



## Dipolo elettrico hertziano 2/5

Ipotizzando l'elemento di corrente di lunghezza infinitesima, il vettore  $\mathbf{R}' = \mathbf{R} - \mathbf{R}_i$  coincide con  $\mathbf{R}$ . Inoltre, il volume è infinitesimo e perciò la coordinata  $R$  non è funzione della coordinata di integrazione  $dV'$ . Infine  $\mathbf{J}$  è costante su tutto il volume di integrazione. Quindi, il potenziale vettore vale

$$\begin{aligned}\vec{A}(\mathbf{R}) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{R}_i) e^{-jk|\vec{R} - \vec{R}_i|}}{|\vec{R} - \vec{R}_i|} dV' = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{R}_i) e^{-jkR}}{|\vec{R}|} dV' = \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{|\vec{R}|} \vec{J} V' = \frac{\mu I dl}{4\pi R} e^{-jkR} \hat{z}\end{aligned}$$

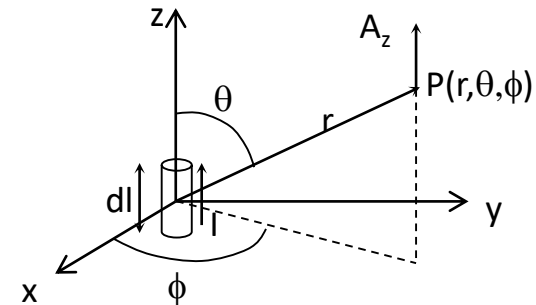
# Dipolo elettrico hertziano 3/5

Esprimiamo il potenziale in un sistema di riferimento sferico, poiché è molto più comodo da utilizzare

$$\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} = \mathbf{A}_z \cos \theta \hat{r} - \mathbf{A}_z \sin \theta \hat{\theta} = \frac{\mu I_0 dl}{4\pi R} e^{-jkR} (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})$$

e valutiamo poi il campo magnetico

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{\nabla \times \vec{A}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial(R\mathbf{A}_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial(\mathbf{A}_R)}{\partial \theta} \right] \frac{\hat{\phi}}{R} \\ &= \frac{I_0 dl}{4\pi} \left[ -\frac{\partial}{\partial R} (\sin \theta e^{-jkR}) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\cos \theta}{R} e^{-jkR} \right) \right] \frac{\hat{\phi}}{R} \\ &= \frac{I_0 dl}{4\pi} \left[ \frac{1}{R^2} + \frac{jk}{R} \right] \sin \theta e^{-jkR} \hat{\phi} \\ &= \mathbf{H}_\phi \hat{\phi} \end{aligned}$$



## Dipolo elettrico hertziano 4/5

Quindi determiniamo il campo elettrico da Maxwell

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\nabla \times \vec{H}}{j\omega\epsilon} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[ \frac{\partial(\mathbf{H}_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} \frac{\hat{r}}{R \sin \theta} - \frac{\partial(R\mathbf{H}_\phi)}{\partial R} \frac{\hat{\theta}}{R} \right] = \\ &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{I_0 dl}{4\pi} \left[ \left( \frac{1}{R^2} + \frac{jk}{R} \right) \frac{\partial(\sin^2 \theta)}{\partial \theta} \frac{e^{-jkR} \hat{r}}{R \sin \theta} - \frac{\partial \left[ \left( \frac{1}{R} + jk \right) e^{-jkR} \right]}{\partial R} \sin \theta \frac{\hat{\theta}}{R} \right] \\ &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{I_0 dl}{4\pi} 2 \left( \frac{1}{R^3} + \frac{jk}{R^2} \right) \cos \theta e^{-jkR} \hat{r} \\ &\quad + \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{I_0 dl}{4\pi} \left[ \left( \frac{jk}{R^2} + \frac{(jk)^2}{R} \right) \sin \theta + \frac{1}{R^3} \sin \theta \right] e^{-jkR} \hat{\theta}\end{aligned}$$




# Dipolo elettrico hertziano 5/5

Ordinando le due espressioni dei campi e.m. si ottiene:

$$\vec{E} = E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta}$$

$$= \frac{2I_0 dl}{4\pi} k^2 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left[ \frac{1}{(kR)^2} - \frac{j}{(kR)^3} \right] \cos \theta e^{-jkR} \hat{r} \\ + \frac{I_0 dl}{4\pi} k^2 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left[ \frac{j}{kR} + \frac{1}{(kR)^2} - \frac{j}{(kR)^3} \right] \sin \theta e^{-jkR} \hat{\theta}$$

$$\vec{H} = H_\phi \hat{\phi}$$

$$= \frac{I_0 dl}{4\pi} k^2 \left[ \frac{j}{kR} + \frac{1}{(kR)^2} \right] \sin \theta e^{-jkR} \hat{\phi}$$


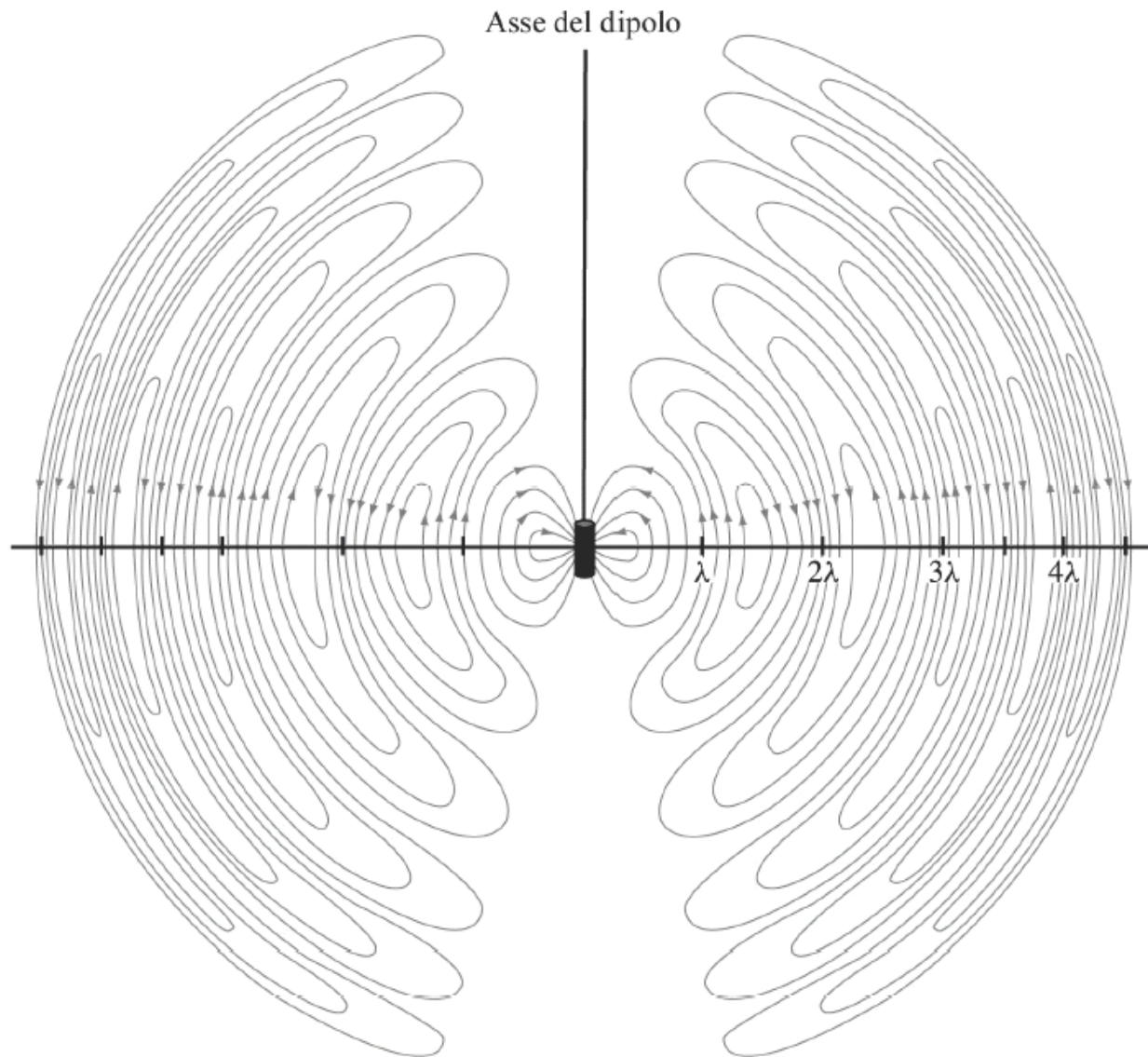
$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \text{ } [\Omega]$$

I due termini decadono con leggi diverse: hanno la stessa ampiezza per

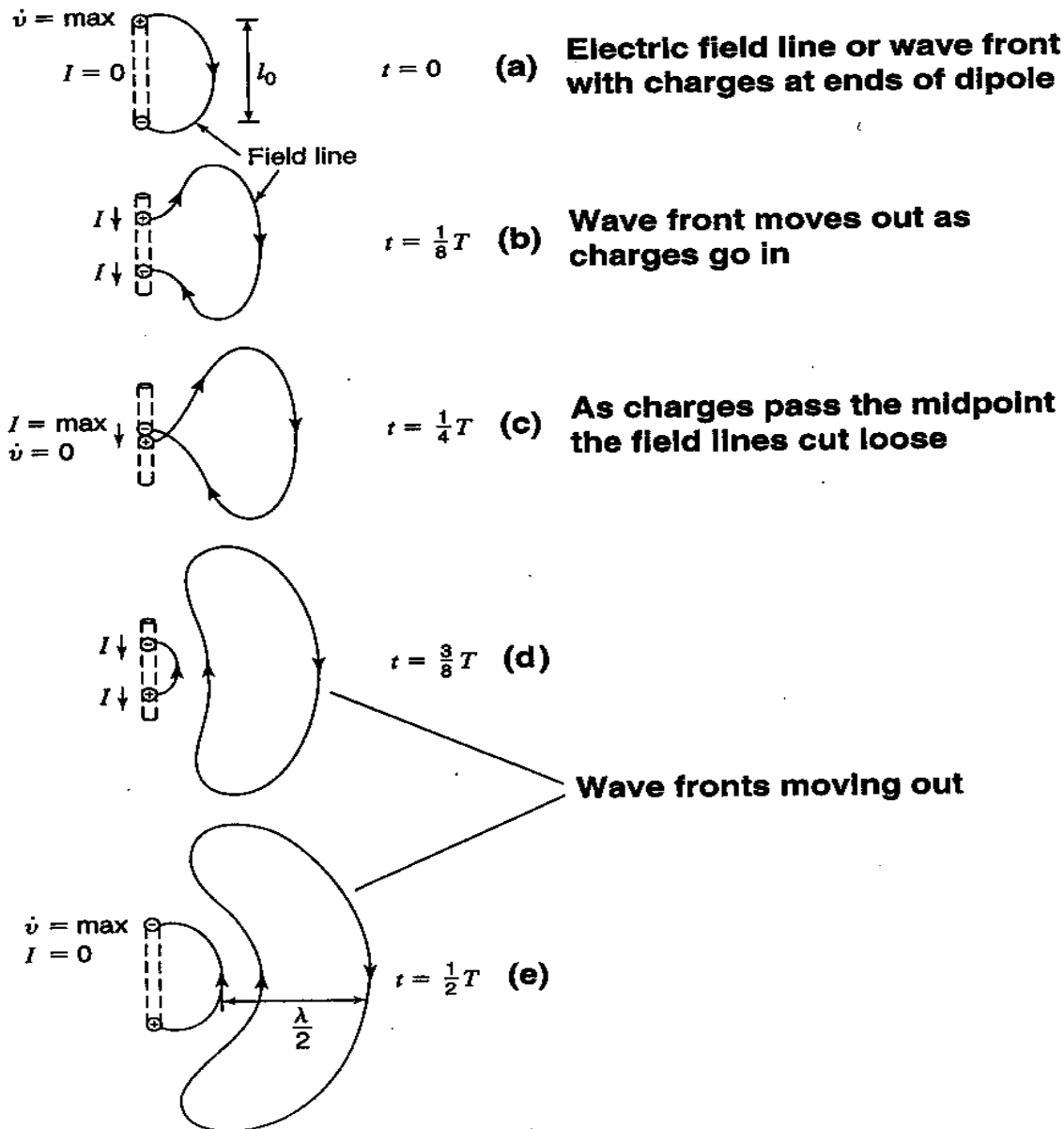
$$R = \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi} \approx \frac{\lambda}{6}$$

# Linee di campo elettrico

Linee di campo elettrico che circondano un dipolo oscillante in un determinato istante.



# Funzionamento di un'antenna



Il campo elettromagnetico può sostenersi da solo anche in assenza di cariche. Ecco perché le linee possono allontanarsi dalla sorgente realizzando così il fenomeno della radiazione

## Campo vicino 1/5

In zona di campo vicino ( $R \ll \lambda/6$ ) si hanno due contributi “pesanti”, ovvero prevalgono i termini di ordine (-2) e (-3):

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta} \\ &\approx \frac{2I_0 dl}{4\pi} k^2 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left[ \frac{1}{(kR)^2} - \frac{j}{(kR)^3} \right] \cos \theta e^{-jkR} \hat{r} \\ &\quad + \frac{I_0 dl}{4\pi} k^2 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left[ \frac{1}{(kR)^2} - \frac{j}{(kR)^3} \right] \sin \theta e^{-jkR} \hat{\theta}\end{aligned}$$

$$\vec{H} = H_\phi \hat{\phi} \approx \frac{I_0 dl}{4\pi} k^2 \frac{1}{(kR)^2} \sin \theta e^{-jkR} \hat{\phi}$$

## Campo vicino 2/5

Quando siamo “vicinissimi” alla sorgente il termine preponderante è quello di ordine (-3):

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}} &= E_r \hat{\mathbf{r}} + E_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= -\frac{2I_0 dl}{4\pi} k^2 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{j}{(kR)^3} \cos\theta e^{-jkR} \hat{\mathbf{r}} - \frac{I_0 dl}{4\pi} k^2 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{j}{(kR)^3} \sin\theta e^{-jkR} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= -j \frac{I_0 dl}{4\pi} k^2 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{j}{(kR)^3} [2 \cos\theta \hat{\mathbf{r}} + \sin\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}] e^{-jkR}\end{aligned}$$

Questo termine richiama fortemente il campo elettrico generato da un [dipolo elettrico statico](#). Per questo motivo, un elemento di corrente che irradia nello spazio viene definito “dipolo elettrico hertziano”.

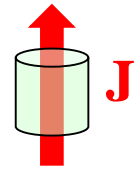


## Campo vicino 3/5

Ma perché accade questo? Per comprendere meglio, consideriamo l'elemento di corrente  $I_0$  di lunghezza  $dl$  ed applichiamo l'equazione di continuità della carica ad un cilindretto che contiene parzialmente o totalmente l'elemento di corrente. Indichiamo con  $Q_{\text{tot}}$  la quantità di carica eventualmente racchiusa nel cilindretto.

Consideriamo il cilindretto posto in mezzo all'elemento di corrente

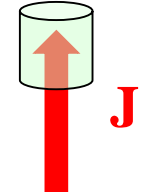
$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \vec{J} dV + j\omega \int_V \rho_v dV &= \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + j\omega \int_V \rho_v dV = \\ &= \int_{S_{b.\text{inf.}}} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{b.\text{sup.}}} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{\text{lat.}}} \vec{J} \cdot d\vec{S} + j\omega \int_V \rho_v dV = \\ &= -I_0 + I_0 + 0 + j\omega \int_V \rho_v dV = j\omega Q_{\text{int.}} = 0 \end{aligned}$$



Quindi nel mezzo dell'elemento di corrente non vi è accumulo di carica.

## Campo vicino 4/5

Consideriamo il cilindretto posto a cavallo della “punta” dell’elemento di corrente



$$\begin{aligned}\int_V \nabla \cdot \vec{J} dV + j\omega \int_V \rho_v dV &= \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + j\omega \int_V \rho_v dV = \\ &= \int_{S_{b.inf.}} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{b.sup.}} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{lat.}} \vec{J} \cdot d\vec{S} + j\omega \int_V \rho_v dV = \\ -I_0 + 0 + 0 + j\omega \int_V \rho_v dV &= -I_0 + j\omega Q_{int}^{sup} = 0\end{aligned}$$

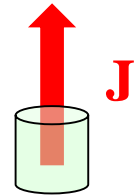
$$Q_{int}^{sup} = \frac{I_0}{j\omega} \neq 0$$

Quindi sulla “punta” dell’elemento di corrente vi è un accumulo di carica.

## Campo vicino 5/5

Consideriamo il cilindretto posto a cavallo della “coda” dell’elemento di corrente

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \vec{J} dV + j\omega \int_V \rho_v dV &= \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + j\omega \int_V \rho_v dV = \\ &= \int_{S_{b.inf.}} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{b.sup.}} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{lat.}} \vec{J} \cdot d\vec{S} + j\omega \int_V \rho_v dV = \end{aligned}$$



$$0 + I_0 + 0 + j\omega \int_V \rho_v dV = I_0 + j\omega Q_{int}^{inf} = 0$$

$$Q_{int}^{inf} = -\frac{I_0}{j\omega} = -Q_{int}^{sup}$$

Quindi sulla “coda” dell’elemento di corrente vi è un accumulo di carica di polarità esattamente opposta a quella presente sulla sua “punta”. Si è creato quindi un sistema di cariche proprio come nel dipolo elettrico statico. Ecco dunque spiegato perché in sua vicinanza l’elemento di corrente crea un campo elettrico simile a quello di un dipolo statico.

# Campo lontano 1/5

Si definisce zona di “campo lontano” la zona per cui  $R \gg \lambda/6$ . In tal caso i termini prevalenti sono quelli che variano con  $R$ :

$$E_r = 0$$

$$E_\theta = jk \frac{I_0 dl}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-jkR}}{R} \eta$$

$$H_\phi = jk \frac{I_0 dl}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-jkR}}{R}$$

$$\frac{E_\theta}{H_\phi} = \eta$$

Il campo elettrico :

- varia come  $\sin \theta$  e quindi e' massimo nella direzione ortogonale al dipolo e nulla sull'asse del dipolo;
- e' proporzionale alla corrente  $I_0$
- e' proporzionale a  $kdl$  ossia al rapporto  $dl/\lambda$

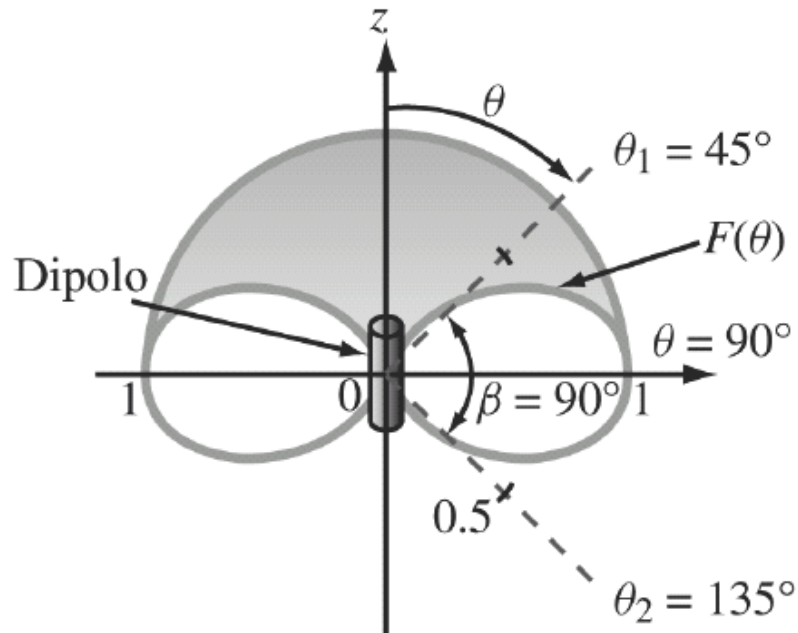
Il campo magnetico:

- e' perpendicolare al campo elettrico e alla direzione di radiazione  $r$
- è proporzionale al campo elettrico tramite  $\eta$ .

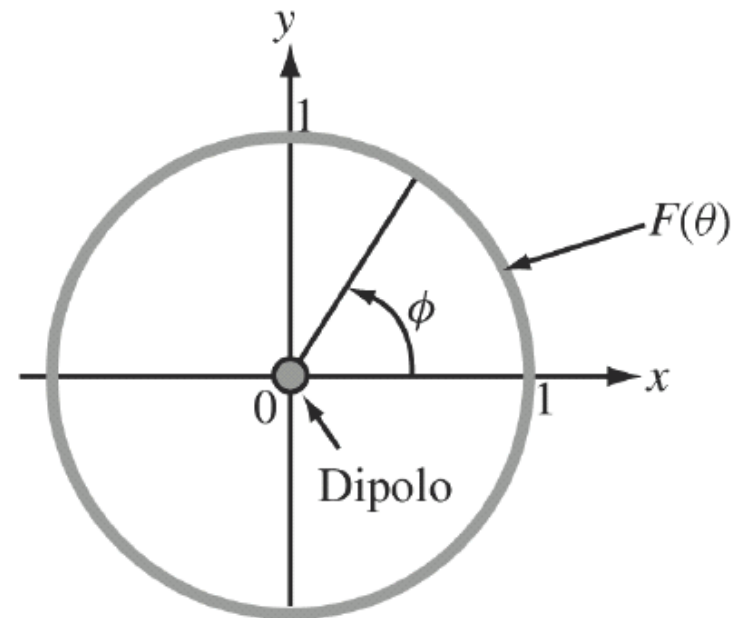
## Campo lontano 2/5

il campo elettrico:

- varia come  $\sin\theta$  : e' massimo nella direzione ortogonale al dipolo e nulla sull'asse del dipolo
- non varia con  $\varphi$



(a) Diagramma in elevazione



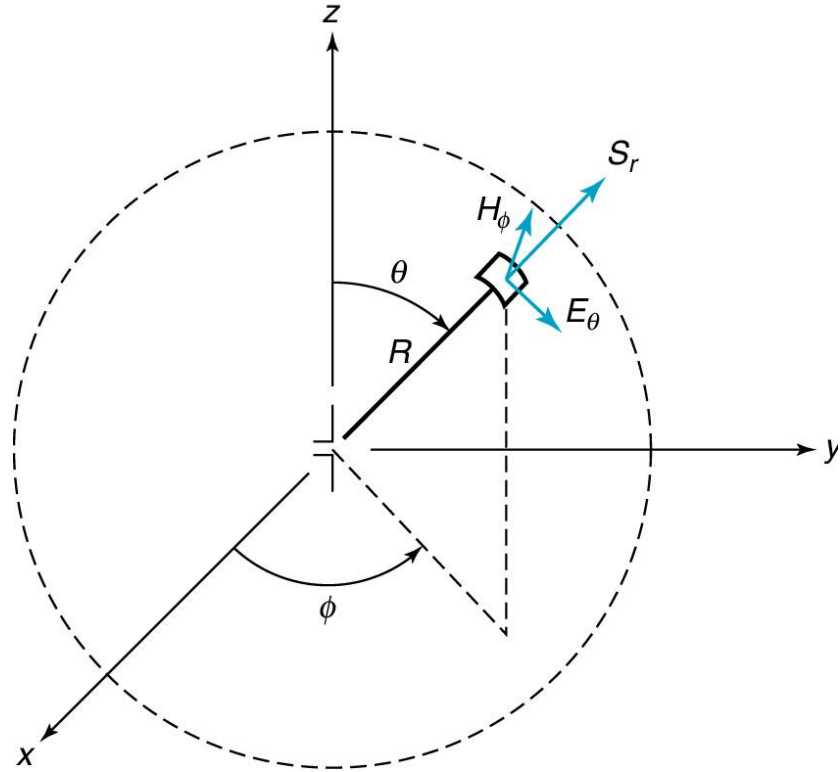
(b) Diagramma azimutale

## Campo lontano 3/5

$$E_r = 0$$

$$E_\theta = jk \frac{I_0 dl}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-jkR}}{R} \eta$$

$$H_\phi = jk \frac{I_0 dl}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-jkR}}{R}$$

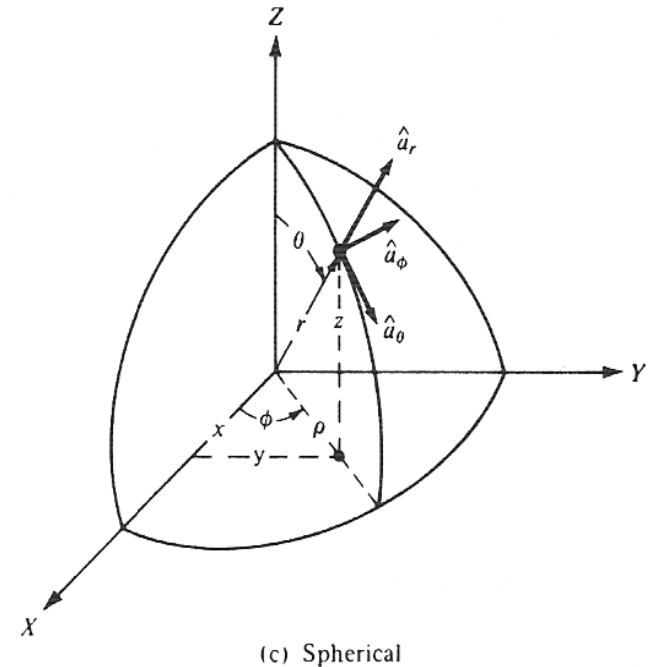


Il campo magnetico è ortogonale al campo elettrico ed alla direzione di propagazione r

$$\frac{E_\theta}{H_\phi} = \eta$$

# Campo lontano 4/5

- le ampiezze di **E** e di **H** diminuiscono con la distanza come  $1/r$
- Il rapporto tra le ampiezze vale  $\eta = 120\pi \Omega$
- **E** ed **H** sono in fase nel tempo
- **E** ed **H** sono perpendicolari nello spazio e perpendicolari alla direzione di propagazione



Il campo e' localmente assimilabile ad un'onda piana e soddisfa le condizioni di Sommerfeld (o di fisica realizzabilità):

# Campo lontano 5/5

La zona di campo lontano dipende fortemente dalla lunghezza d'onda e quindi dalla frequenza

Esempio

- a 50 Hz ( frequenze industriali )  $\lambda$  è dell'ordine di migliaia di chilometri
- a 1 MHz ( stazioni MA)  $\lambda/6 = 300/6 = 50$  metri
- a 100 MHz ( stazioni MF)  $\lambda/6 = 3/6 = 0,5$  metri
- a 1 GHz ( Stazioni Radio per TF)  $\lambda/6 = 5$  centimetri



# Potenza irradiata da un dipolo hertziano

## 1/5

Riscriviamo le espressioni dei campi e.m. generati da un dipolo hertziano, accorpendo alcune quantità:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}} &= E_r \hat{\mathbf{r}} + E_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= 2H_0\eta \left[ \frac{1}{(kR)^2} - \frac{j}{(kR)^3} \right] \cos\theta e^{-jkR} \hat{\mathbf{r}} + H_0\eta \left[ \frac{j}{kR} + \frac{1}{(kR)^2} - \frac{j}{(kR)^3} \right] \sin\theta e^{-jkR} \hat{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{H}} = H_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} = H_0 \left[ \frac{j}{kR} + \frac{1}{(kR)^2} \right] \sin\theta e^{-jkR} \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$H_0 = \frac{I_0 dl}{4\pi} k^2 \quad \left[ \frac{\text{A}}{\text{m}} \right] \quad k = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad \left[ \frac{1}{\text{m}} \right]$$

# Potenza irradiata da un dipolo hertziano

## 2/5

Valutiamo il vettore di Poynting in ogni punto dello spazio

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2} (E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta}) \times H_\phi^* \hat{\phi} = \frac{1}{2} (-E_r H_\phi^* \hat{\theta} + E_\theta H_\phi^* \hat{r}) = \\ &= -H_0 \eta \left[ \frac{1}{(kR)^2} - \frac{j}{(kR)^3} \right] \cos \theta e^{-jkR} H_0^* \left[ \frac{j^*}{kR} + \frac{1}{(kR)^2} \right] \sin \theta e^{jkR} \hat{\theta} \\ &\quad + \frac{1}{2} H_0 \eta \left[ \frac{j}{kR} + \frac{1}{(kR)^2} - \frac{j}{(kR)^3} \right] \sin \theta e^{-jkR} H_0^* \left[ \frac{j^*}{kR} + \frac{1}{(kR)^2} \right] \sin \theta e^{jkR} \hat{r} \\ &= -\frac{1}{2} |H_0|^2 \eta \left[ -\frac{j}{(kR)^3} + \frac{1}{(kR)^4} - \frac{1}{(kR)^4} - \frac{j}{(kR)^5} \right] \sin(2\theta) \hat{\theta} \\ &\quad + \frac{1}{2} |H_0|^2 \eta \left[ \frac{1}{(kR)^2} + \frac{j}{(kR)^3} - \frac{j}{(kR)^3} + \frac{1}{(kR)^4} - \frac{1}{(kR)^4} - \frac{j}{(kR)^5} \right] \sin^2 \theta \hat{r}\end{aligned}$$

# Potenza irradiata da un dipolo hertziano

## 3/5

Semplificando, si ottiene:

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2} (E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta}) \times H_\phi^* \hat{\phi} = \frac{1}{2} (-E_r H_\phi^* \hat{\theta} + E_\theta H_\phi^* \hat{r}) = \\ &= j \frac{1}{2} |H_0|^2 \eta \left[ \frac{1}{(kR)^3} + \frac{1}{(kR)^5} \right] \sin(2\theta) \hat{\theta} + \frac{1}{2} |H_0|^2 \eta \left[ \frac{1}{(kR)^2} - \frac{j}{(kR)^5} \right] \sin^2 \theta \hat{r} \\ &= \frac{1}{2} |H_0|^2 \eta \left\{ \left( \frac{\sin \theta}{kR} \right)^2 \hat{r} + j \left[ \frac{\sin(2\theta)}{(kR)^3} + \frac{\sin(2\theta)}{(kR)^5} \right] \hat{\theta} - j \frac{\sin^2 \theta}{(kR)^5} \hat{r} \right\} \left[ \frac{W}{m^2} \right]\end{aligned}$$

Quindi, si osserva che il vettore di Poynting:

- è reale soltanto lungo la direzione  $\mathbf{r}$  e decresce come  $1/R^2$
- è immaginario lungo  $\mathbf{r}$  e  $\theta$
- la componente reale è data dal prodotto delle espressioni relative ai campi lontani dei  $E_\theta$  ed  $H_\phi$

# Potenza irradiata da un dipolo hertziano 4/5

La potenza media irradiata dal dipolo attraverso una superficie sferica è ottenuta a partire dalla componente reale del vettore di Poynting:

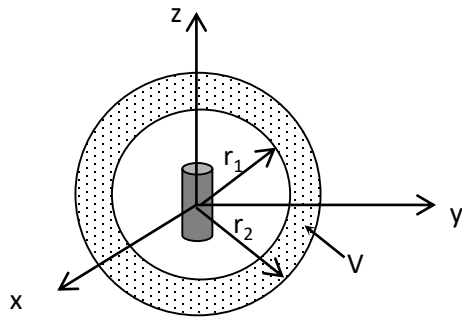
$$\begin{aligned} W &= \oint_S [\bar{\mathbf{P}}] \cdot d\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \oint_S \operatorname{Re} [E_\theta \mathbf{H}_\phi^* \hat{\mathbf{r}}] \cdot dS \hat{\mathbf{r}} = \\ &= \frac{1}{2} |H_0|^2 \eta \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \left( \frac{\sin \theta}{kR} \right)^2 \hat{\mathbf{r}} - j \frac{\sin^2 \theta}{(kR)^5} \hat{\mathbf{r}} \right\} R^2 \sin \theta d\theta d\phi = \\ &= \frac{1}{2} |H_0|^2 2\pi \eta \left( \frac{1}{k^2} - j \frac{1}{k^5 R^3} \right) \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} |H_0|^2 2\pi \eta \left( \frac{1}{k^2} - j \frac{1}{k^5 R^3} \right) \frac{4}{3} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{I_0 dl}{4\pi} k^2 \right)^2 2\pi \eta \left( \frac{1}{k^2} - j \frac{1}{k^5 R^3} \right) \frac{4}{3} = \left( \frac{I_0 dl}{4\pi} \right)^2 \pi \eta \left( k^2 - j \frac{1}{kR^3} \right) \frac{4}{3} = \\ &= \left( \frac{I_0 dl}{4\pi} \right)^2 \pi \eta \left( \frac{4\pi^2}{\lambda^2} - j \frac{\lambda}{2\pi R^3} \right) \frac{4}{3} = \frac{1}{2} |I_0|^2 \frac{(\pi dl)^2}{\lambda^2} 80 - j \frac{1}{2} \left( \frac{dl}{\pi} \right)^2 |I_0|^2 10\pi \frac{\lambda}{R^3} \end{aligned}$$

$\eta = 120\pi$

# Potenza irradiata da un dipolo hertziano 5/5

$P_a$ : Potenza attiva:  $\frac{\pi}{3} \eta |I|^2 \left( \frac{dl}{\lambda} \right)^2$

Non dipende dalla distanza  $r$  (se il mezzo ha  $\sigma=0$ )



$$P_a(r_1) = P_a(r_2)$$

E' una potenza che si allontana dal dipolo (positiva)

Se  $P_a$  non dipende da  $r$ , vuole dire che la densità di potenza (vettore di Poynting, parte reale) dipende da  $1/r^2$  e dunque i termini che contribuiscono a questa potenza sono quelli proporzionali a  $1/r$ . Cio' significa che solamente i termini radiativi dei campi contribuiscono alla potenza attiva e, dato che non ci sono mezzi dissipativi, a quella irradiata.

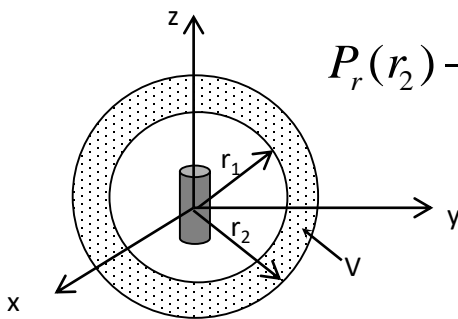
# Potenza reattiva di un dipolo hertziano

$$P_r: \text{Potenza reattiva} = -j \frac{\eta}{24\pi^2} |\mathbf{I}|^2 \left( \frac{d\mathbf{l}}{\lambda} \right)^2 \left( \frac{\lambda}{r} \right)^3$$

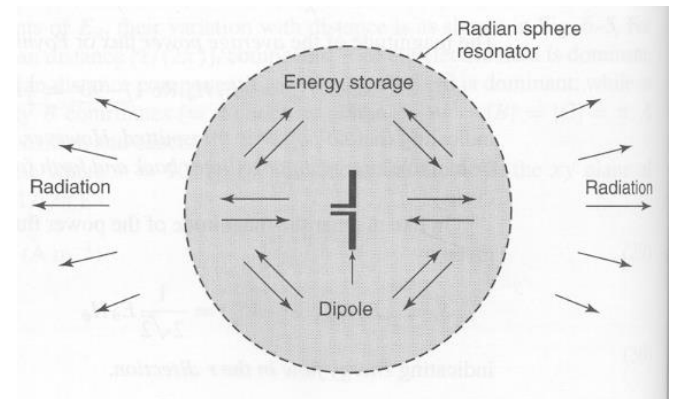
- Dipende dalla distanza  $r$ : ricordando il teorema di Poynting cui

$$P_r = -2\omega \int_V (U_m - U_e) dV$$

cio' significa che c'e' uno squilibrio tra l'energia immagazzinata nel campo elettrico e quella nel campo magnetico. Essendo reattiva è una potenza che il dipolo scambia con l'ambiente circostante, ed oscilla dentro e fuori della superficie sferica.



$$P_r(r_2) - P_r(r_1) = -2\omega \int_V (U_m - U_e) dV$$



- i termini di  $E$  ed  $H$  che contribuiscono alla potenza reattiva sono quelli proporzionali a  $1/r^2$  ed  $1/r^3$  (chiamati reattivi o quasi statici)

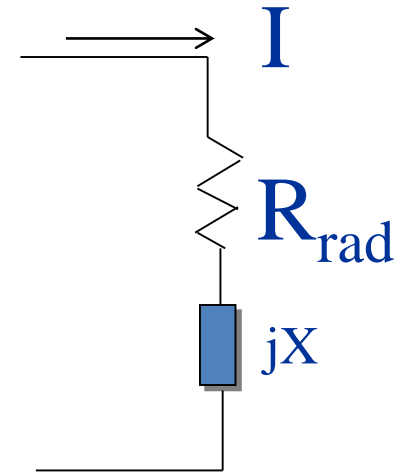
# Impedenza di radiazione

- Antenna come carico:
  - Termine resistivo: tiene conto della potenza irradiata e di quella (eventualmente) dissipata
  - Termine immaginario: potenza immagazzinata

$$W = \frac{1}{2} |I_0|^2 \frac{(\pi dl)^2}{\lambda^2} 80 - j \frac{1}{2} \left( \frac{dl}{\pi} \right)^2 |I_0|^2 10\pi \frac{\lambda}{R^3} = \frac{1}{2} (R_{rad} - jX) |I_0|^2$$

$$\frac{\pi}{3} \eta |I|^2 \left( \frac{dl}{\lambda} \right)^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2} R_{rad} |I|^2$$

$$R_{rad} = 80\pi^2 \left( \frac{dl}{\lambda} \right)^2$$



# Impedenza d'onda

Analizziamo l'impedenza radiale dell'onda irradiata dal dipolo.

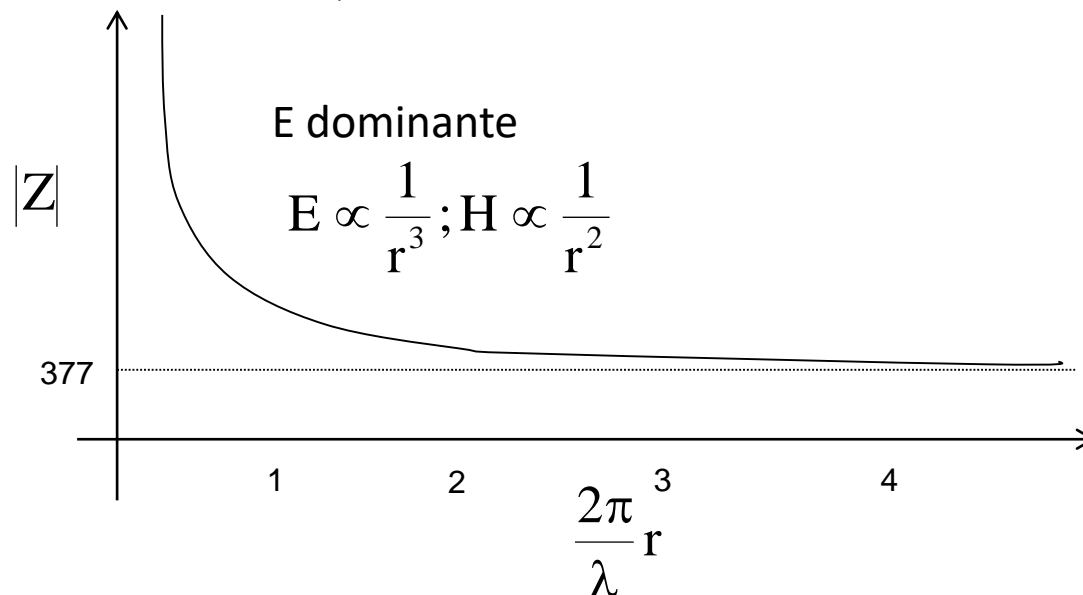
Dividiamo l'analisi nelle zone di campo vicino e in quella di campo lontano.

$r \rightarrow \infty$  Abbiamo solamente componenti di campo lontano ( $E_\theta$  ed  $H_\phi$ )

$$Z = \frac{E_\theta}{H_\phi} = \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377\Omega$$

$r \rightarrow 0$  (solo componenti di campo vicino)

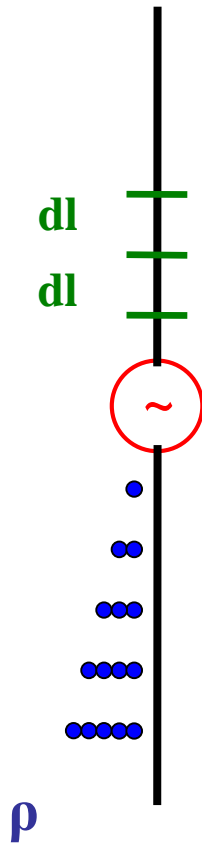
$$Z = \frac{E_\theta}{H_\phi} = -j \frac{\eta}{\beta r}$$





# Campo irradiato da un'antenna generica

## 1/3



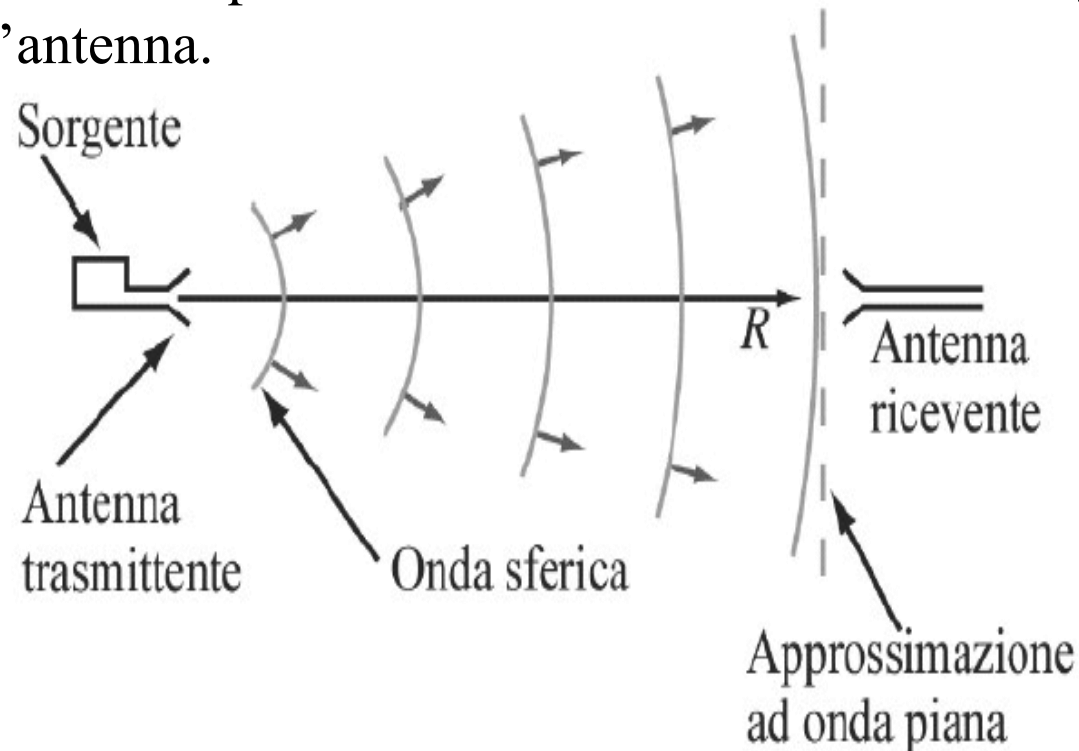
Un'antenna generica può essere vista come la sequenza di tanti dipoli infinitesimi ciascuno dotato di un'ampiezza di corrente opportuna. Il campo e.m. totale irradiato è dato dalla somma vettoriale di tutti i campi dovuti ai dipoli elementari che costituiscono la struttura. (sembra facile !!!!!)

I

# Campo irradiato da un'antenna generica

## 2/3

In ogni caso, per quanto complessa sia l'antenna, in condizioni di “campo lontano” il campo e.m. generato può essere approssimato come un'onda piana “locale” che soddisfa le condizioni di Sommerfeld. Ovviamente, la densità di potenza associata a tale onda è legata alle caratteristiche dell'antenna.



# Campo irradiato da un'antenna generica

## 3/3

[APPLET: dipolo hertziano ed antenne più complesse](http://www.amanogawa.com/archive/antennaB.html)

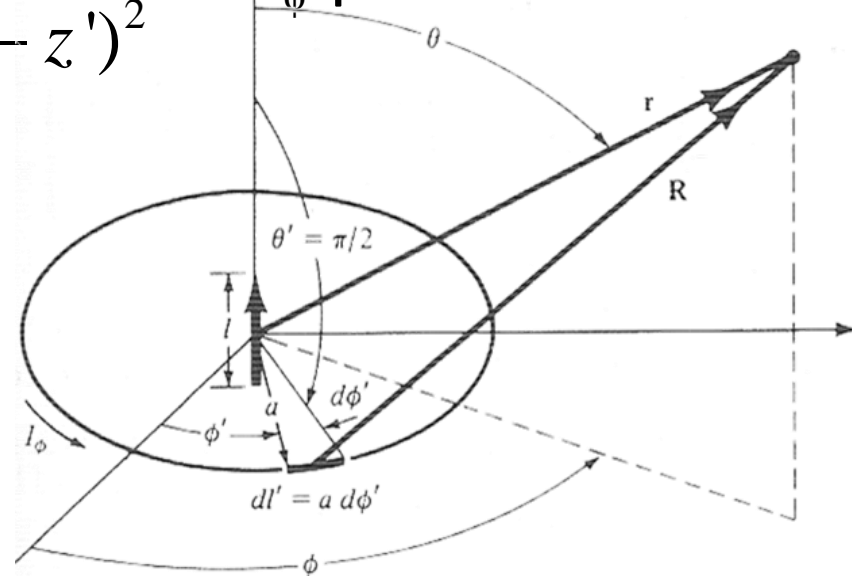
<http://www.amanogawa.com/archive/antennaB.html>

# Il loop di corrente 1/5

Consideriamo un loop di corrente in cui la corrente vari nel tempo: calcoliamo il campo e.m. generato a partire dal potenziale vettore:

$$\begin{aligned}\vec{A}(r, \theta, \phi) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_C \frac{I e^{-jk \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} d\ell' \hat{\phi}'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} = \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I a e^{-jk \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} d\phi' \hat{\phi}'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} = A_{\phi} \hat{\phi}'\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}x' = a \cos \phi' & x = r \sin \theta \cos \phi \\ y' = a \sin \phi' & y = r \sin \theta \sin \phi \\ z' = 0 & z = r \cos \theta\end{array}$$



## Il loop di corrente 2/5

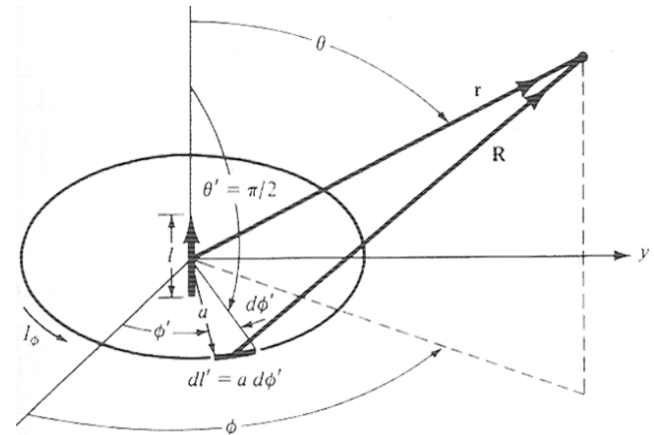
Poiché si vuole esprimere il potenziale vettore nelle coordinate sferiche, bisogna proiettare  $A_{\varphi}$  sul versore  $\hat{\varphi}$ , ovvero

$$A_{\varphi}(r, \theta, \varphi) = \bar{A} \cdot \hat{\varphi} = A_{\varphi'} \hat{\varphi}' \cdot \hat{\varphi} = \frac{\mu I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jk\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} d\varphi' \hat{\varphi}' \cdot \hat{\varphi}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} =$$

$$= \frac{\mu I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jk\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')}} \cos(\varphi - \varphi') d\varphi'}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')}} =$$

Vista la simmetria, si può affermare che il campo non dipende dalla coordinata  $\varphi$  e quindi si può assumere  $\varphi=0$  nell'integrale.

$$A_{\phi}(r, \theta, \phi) = \frac{\mu I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jk\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos \phi'}} \cos \phi' d\phi'}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos \phi'}}$$



## Il loop di corrente 3/5

Se ipotizziamo il loop piccolo rispetto al punto in cui vogliamo calcolare il campo, possiamo porre  $ka \ll 1$  ed introdurre una espansione in serie nella funzione integranda:

$$\frac{e^{-jk\sqrt{r^2+a^2-2ar\sin\theta\cos\phi'}}}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\sin\theta\cos\phi'}} \approx \left[ \frac{1}{r} + \left( \frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) a \sin\theta \cos\phi' \right] e^{-jkr}$$

$$\begin{aligned} A_\phi(r, \theta, \phi) &= \frac{\mu I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jk\sqrt{r^2+a^2-2ar\sin\theta\cos\phi'}}}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\sin\theta\cos\phi'}} \cos\phi' d\phi' \\ &\approx \frac{\mu I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{r} + \left( \frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) a \sin\theta \cos\phi' \right] e^{-jkr} \cos\phi' d\phi' \\ &= \frac{\mu I a}{4\pi} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) a \sin\theta \pi e^{-jkr} = \frac{\mu I a^2}{4} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) \sin\theta e^{-jkr} \end{aligned}$$

## Il loop di corrente 4/5

Il campo magnetico si ottiene ora dal rotore:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{H}} &= \frac{\nabla \times \bar{\mathbf{A}}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial (\mathbf{A}_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} \right] \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r \sin \theta} + \frac{1}{\mu} \left[ -\frac{\partial (r \mathbf{A}_\varphi)}{\partial r} \right] \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \\&= \frac{I_0 a^2}{4} \left\{ 2 \left( \frac{1}{r^3} + \frac{j k}{r^2} \right) \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \left[ -\frac{1}{r^3} - j k \left( \frac{1}{r^2} + \frac{j k}{r} \right) \right] \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} e^{-j k r} \\&= \frac{I_0 a^2 k^3}{4} \left\{ 2 \left[ \frac{1}{(k r)^3} + \frac{j}{(k r)^2} \right] \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \left[ -\frac{1}{(k r)^3} - \frac{j}{(k r)^2} + \frac{1}{k r} \right] \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} e^{-j k r} \\&= H_r \hat{\mathbf{r}} + H_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \bar{\mathbf{E}} &= \frac{\nabla \times \bar{\mathbf{H}}}{j \omega \epsilon} = \frac{1}{j \omega \epsilon} \left[ \frac{\partial (r H_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r} = \frac{I_0 a^2 k^2}{4} \eta \left\{ \left[ \frac{k}{k r} - \frac{j k}{(k r)^2} \right] \sin \theta \right\} e^{-j k r} \hat{\boldsymbol{\phi}} \\&= E_\varphi \hat{\boldsymbol{\phi}}\end{aligned}$$

## Il loop di corrente 5/5

Ordinando le due espressioni dei campi e.m. si ottiene:

$$E_{\phi} = \frac{I_0 a^2 k^3}{4} \eta \left[ \frac{1}{kr} - \frac{j}{(kr)^2} \right] \sin \theta e^{-jkr}$$

$$H_r = \frac{I_0 a^2 k^3}{4} 2 \left[ \frac{j}{(kr)^2} + \frac{1}{(kr)^3} \right] \cos \theta e^{-jkr}$$

$$H_{\theta} = -\frac{I_0 a^2 k^3}{4} \left[ \frac{1}{kr} - \frac{j}{(kr)^2} - \frac{1}{(kr)^3} \right] \sin \theta e^{-jkr}$$

Si può osservare che le espressioni ottenute sono le “duali” di quelle del dipolo hertziano e valgono le stesse considerazioni sul campo vicino e lontano effettuate precedentemente.



# Il loop di corrente: campo lontano

In campo lontano si ottiene:

$$E_{\phi} = H_0 \eta \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{kr}$$

$$H_r = 0$$

$$H_{\theta} = -H_0 \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{kr}$$

$$H_0 = \frac{I_0 a^2 k^3}{4}$$

$$\frac{E_{\phi}}{H_{\theta}} = -\eta$$

Anche in questo caso, abbiamo un campo e.m. che soddisfa le condizioni di Sommerfeld e che, localmente, può essere considerato un'onda piana.

# Impedenza d'onda

Analizziamo l'impedenza radiale dell'onda irradiata dal dipolo.

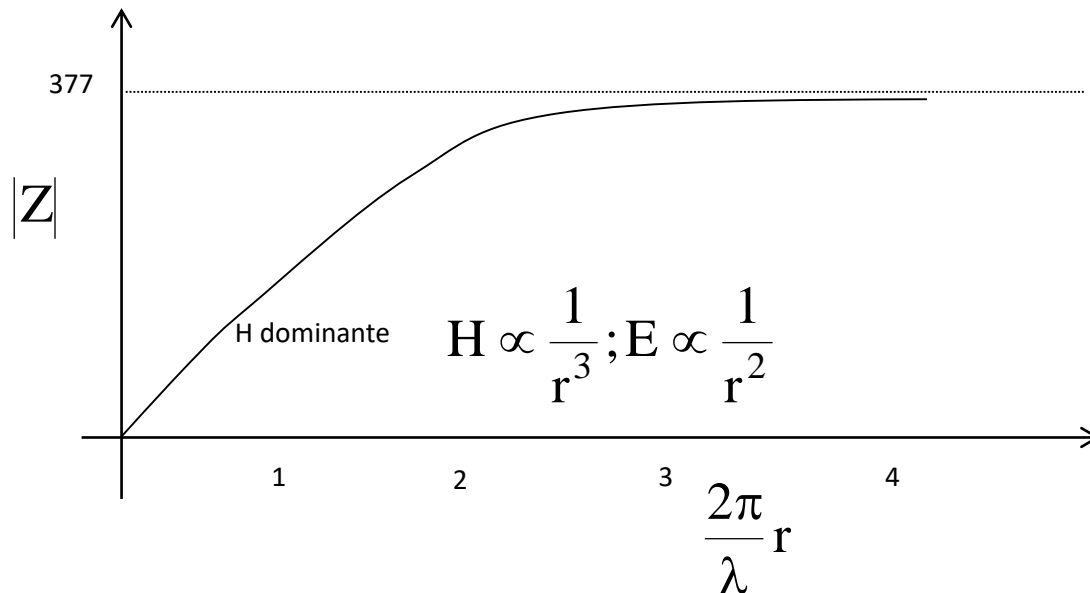
Dividiamo l'analisi nelle zone di campo vicino e in quella di campo lontano.

$r \rightarrow \infty$  Abbiamo solamente componenti di campo lontano ( $H_\theta$  ed  $E_\phi$ )

$$Z = \frac{E_\phi}{H_\theta} = -\eta = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = -377\Omega$$

$r \rightarrow 0$  (solo componenti di campo vicino)

$$Z = \frac{E_\phi}{H_\theta} = j\eta\beta r$$



# Confronto dipolo-loop

$$E_r = \frac{I_0 dl}{2\pi} k^2 \eta \left[ \frac{1}{(kR)^2} - \frac{j}{(kR)^3} \right] \cos \theta e^{-jkR}$$

$$E_\theta = \frac{I_0 dl}{4\pi} k^2 \eta \left[ \frac{j}{kR} + \frac{1}{(kR)^2} - \frac{j}{(kR)^3} \right] \sin \theta e^{-jkR}$$

$$H_\phi = \frac{I_0 dl}{4\pi} k^2 \left[ \frac{j}{kR} + \frac{1}{(kR)^2} \right] \sin \theta e^{-jkR}$$

$$Z = \frac{E_\theta}{H_\phi} = -j \frac{\eta}{\beta r}$$

$$H_r = \frac{jI_0 (\pi a^2) k^3}{2\pi} \left[ \frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right] \cos \theta e^{-jkr}$$

$$H_\theta = \frac{jI_0 (\pi a^2) k^3}{4\pi} \left[ \frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right] \sin \theta e^{-jkr}$$

$$E_\phi = \frac{I_0 (\pi a^2) k^3 \eta}{j4\pi} \left[ \frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} \right] \sin \theta e^{-jkr}$$

$$Z = \frac{E_\phi}{H_\theta} = j\eta \beta r$$