

Simulazione numerica dei circuiti non lineari e con invarianti

Prof. Simone Fiori

`s.fiori@staff.univpm.it`

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione
Università Politecnica delle Marche



Argomenti

- Studio di circuiti non lineari
- Studio di circuiti **con invarianti**
- Tecniche numeriche specifiche



Risoluzione di circuiti non lineari

La classe dei circuiti non-lineari è vastissima e non è pertanto possibile sviluppare tecniche di risoluzione circuitale universali.

I sistemi risolvibili sono comunque ottenibili utilizzando le equazioni della Teoria dei Circuiti (leggi di Kirchhoff e relazioni costitutive dei componenti). Tali sistemi sono, in generale, molto complessi e non possono essere risolti in forma chiusa.

In genere è conveniente utilizzare tecniche numeriche per la risoluzione (approssimata) dei circuiti non-lineari.



Risoluzione di circuiti non lineari

Vediamo alcuni esempi significativi:

- Modello di van der Pol: esempio di circuito non lineare a una sola variabile.
- Caricabatterie con diodo: esempio di circuito non lineare a più variabili.
- Sistema di Lorenz (simula la turbolenza atmosferica): sistema dinamico a tre variabili con comportamento caotico.
- Convertitore elettrico DC-DC (utilizzato per variare il livello di tensione prodotto da una batteria).
- Oscillatore su sfera (utilizzato nella trasmissione sicura delle informazioni): esempi di sistema con invarianti.



Modello di van der Pol

L'oscillatore di van der Pol rappresenta un modello di un circuito con dissipazione non lineare attiva/passiva. Il modello è descritto dall'equazione differenziale del II ordine:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + \omega^2x = 0,$$

dove x è una variabile elettrica funzione del tempo $t > 0$ e $\mu > 0$ è un parametro scalare che quantifica la forza dissipativa mentre ω è la pulsazione naturale del sistema.



Modello di van der Pol

È utile riguardare l'equazione di van der Pol come l'equazione che descrive il moto di una particella di massa unitaria, la cui posizione sia x , collegata ad una molla (con costante di elasticità unitaria) e ad uno smorzatore non lineare:

$$\underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}}_{\text{Accelerazione}} = \underbrace{-\omega^2 x}_{\text{Forza elastica}} + \underbrace{\mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt}}_{\text{Forza di smorzamento}}$$



Modello di van der Pol

$$\underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}}_{\text{Accelerazione}} = \underbrace{-\omega^2 x}_{\text{Forza elastica}} + \underbrace{\mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt}}_{\text{Forza di smorzamento}}$$

Per quanto riguarda la forza elastica, osserviamo che:

- quando $x > 0$, ovvero la particella si allontana verso destra dal punto $x = 0$, la forza elastica $-\omega^2 x$ è diretta verso sinistra, tende quindi a richiamare la particella verso il punto $x = 0$;
- quando $x < 0$, ovvero la particella si allontana verso sinistra dal punto $x = 0$, la forza elastica $-\omega^2 x$ è diretta verso destra, tende comunque a richiamare la particella verso il punto $x = 0$.



Modello di van der Pol

$$\underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}}_{\text{Accelerazione}} = \underbrace{-\omega^2 x}_{\text{Forza elastica}} + \underbrace{\mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt}}_{\text{Forza di smorzamento}}$$

Per quanto riguarda la forza di smorzamento, osserviamo che:

- quando $|x| > 1$, ovvero la particella si allontana eccessivamente dal punto $x = 0$, il coefficiente di smorzamento $\mu(1 - x^2) < 0$, quindi la forza di smorzamento è diretta in modo tale da richiamare la particella verso $x = 0$;
- quando $|x| < 1$, il coefficiente di smorzamento $\mu(1 - x^2) > 0$, quindi la forza di smorzamento è diretta in modo tale da spingere la particella lontano da $x = 0$.



Modello di van der Pol

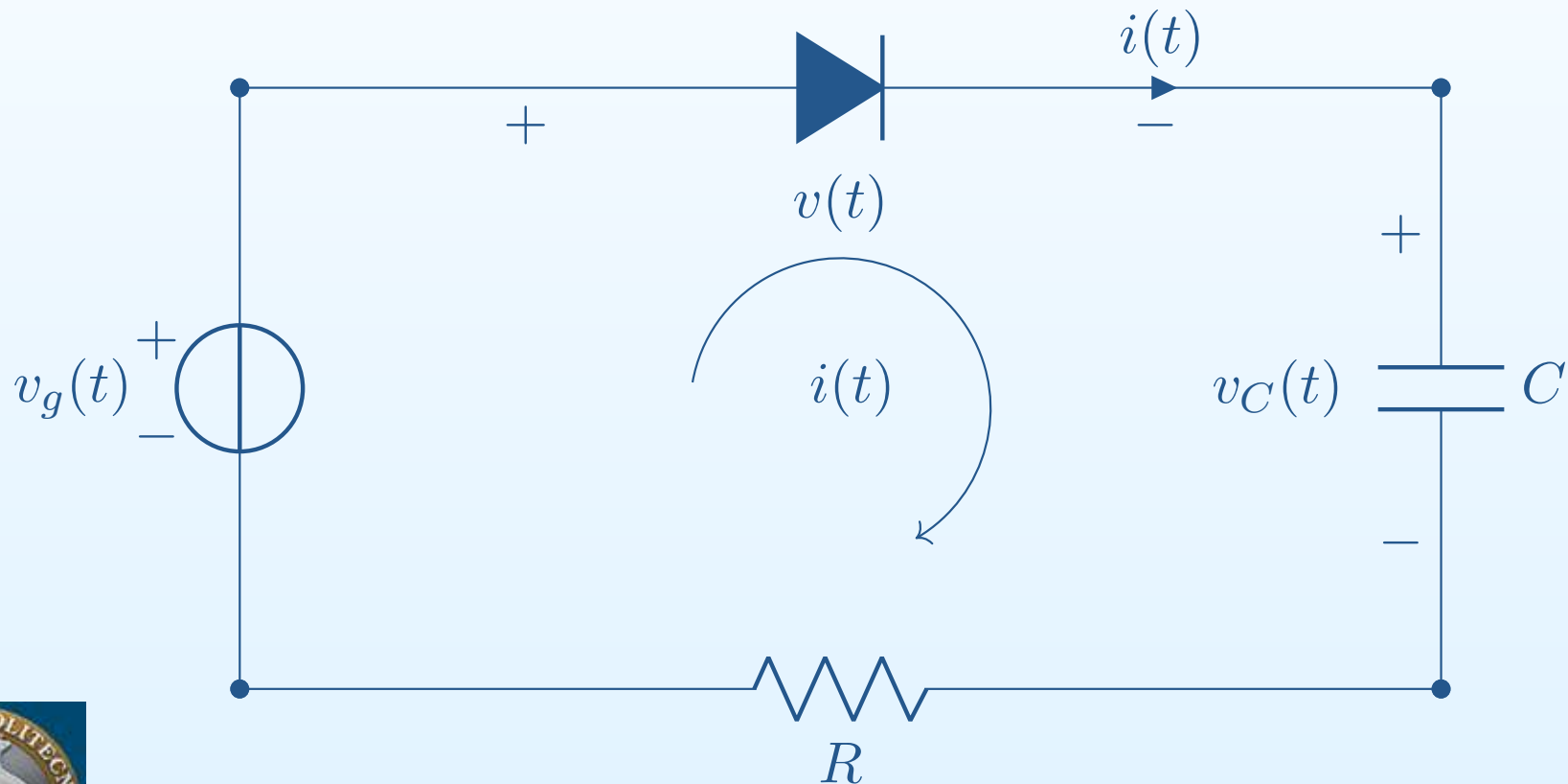
L'azione combinata delle due forze tende a richiamare e ad allontanare la particella in prossimità del punto $x = 0$, il che risulta in una oscillazione periodica della grandezza x nel tempo.

Utilizziamo MATLAB per simulare numericamente il comportamento di un oscillatore elettrico di van der Pol.



Risoluzione di circuito GIT-R-C-DIODO

In questo esempio (**caricabatterie**), si vuole risolvere numericamente un circuito elettrico non lineare (a causa della presenza del diodo) con memoria (a causa della presenza del condensatore).



Risoluzione di circuito GIT-R-C-DIODO

Il sistema risolvante è formato da tre equazioni:

$$\begin{cases} -v_g(t) + v(t) + v_C(t) + R i(t) = 0, & (\text{LKT della maglia}) \\ i(t) = I_s \left(e^{\frac{v(t)}{V_\theta}} - 1 \right), & (\text{Relazione costitutiva diodo}) \\ i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}, & (\text{Relazione costitutiva condensatore}) \end{cases}$$

dove I_s e V_θ sono i parametri caratteristici costanti del diodo (corrente di saturazione (A) e tensione termica (V), rispettivamente), $(v(t), i(t))$ rappresenta lo stato elettrico del diodo. I valori numerici dei parametri del circuito sono:

$$R = 1\Omega, \quad C = \frac{1}{2}\text{F}, \quad v_g(t) = 2 \cos(t) \text{ V},$$

$$I_s = 10^{-10} \text{ A}, \quad V_\theta = 25 \cdot 10^{-3} \text{ V}.$$



Risoluzione di circuito GIT-R-C-DIODO

Occorre, inoltre, stabilire una condizione iniziale necessaria per poter risolvere il sistema differenziale del primo ordine.

Tale condizione iniziale si assume $v_C(0) = 0$ V.

Sostituendo la seconda equazione nella prima, otteniamo il sistema risolvante (non lineare, differenziale) per $t \geq 0$:

$$\begin{cases} v(t) + R I_s \left(e^{\frac{v(t)}{V_\theta}} - 1 \right) = v_g(t) - v_C(t), \\ i(t) = I_s \left(e^{\frac{v(t)}{V_\theta}} - 1 \right), \\ \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C}. \end{cases}$$

Vediamo come poter risolvere tale sistema di equazioni.



Risoluzione di circuito GIT-R-C-DIODO

$$\begin{cases} v(t) + R I_s \left(e^{\frac{v(t)}{V_\theta}} - 1 \right) = v_g(t) - v_C(t), \\ i(t) = I_s \left(e^{\frac{v(t)}{V_\theta}} - 1 \right), \\ \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C}. \end{cases}$$

Per $t = 0$, il membro a destra della prima equazione è noto, pertanto la prima relazione rappresenta un'equazione non lineare nell'incognita $v(0)$. Risolvendo tale equazione (numericamente e in modo approssimato), si trova il valore $v(0)$.



Risoluzione di circuito GIT-R-C-DIODO

$$\begin{cases} v(t) + R I_s \left(e^{\frac{v(t)}{V_\theta}} - 1 \right) = v_g(t) - v_C(t), \\ i(t) = I_s \left(e^{\frac{v(t)}{V_\theta}} - 1 \right), \\ \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C}. \end{cases}$$

Sostituendo il valore $v(0)$ nella seconda equazione, si determina direttamente il valore $i(0)$.



Risoluzione di circuito GIT-R-C-DIODO

$$\begin{cases} v(t) + R I_s \left(e^{\frac{v(t)}{V_\theta}} - 1 \right) = v_g(t) - v_C(t), \\ i(t) = I_s \left(e^{\frac{v(t)}{V_\theta}} - 1 \right), \\ \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C}. \end{cases}$$

Il valore $i(0)$ permette di determinare, approssimando la derivata con un rapporto incrementale, il valore $v_C(T)$, dove $T > 0$ rappresenta un intervallo temporale sufficientemente piccolo (*intervallo di campionamento*).



Risoluzione di circuito GIT-R-C-DIODO

$$\begin{cases} v(t) + R I_s \left(e^{\frac{v(t)}{V_\theta}} - 1 \right) = v_g(t) - v_C(t), \\ i(t) = I_s \left(e^{\frac{v(t)}{V_\theta}} - 1 \right), \\ \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C}. \end{cases}$$

Per $t = T$, il membro a destra della prima equazione è noto, pertanto la prima relazione rappresenta un'equazione non lineare nell'incognita $v(T)$. Risolvendo tale equazione numericamente si trova il valore $v(T)$.



Risoluzione di circuito GIT-R-C-DIODO

$$\begin{cases} v(t) + R I_s \left(e^{\frac{v(t)}{V_\theta}} - 1 \right) = v_g(t) - v_C(t), \\ i(t) = I_s \left(e^{\frac{v(t)}{V_\theta}} - 1 \right), \\ \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C}. \end{cases}$$

Sostituendo il valore $v(T)$ nella seconda equazione, si determina direttamente il valore $i(T)$.



Risoluzione di circuito GIT-R-C-DIODO

$$\begin{cases} v(t) + R I_s \left(e^{\frac{v(t)}{V_\theta}} - 1 \right) = v_g(t) - v_C(t), \\ i(t) = I_s \left(e^{\frac{v(t)}{V_\theta}} - 1 \right), \\ \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C}. \end{cases}$$

Il valore $i(T)$ permette di determinare, approssimando la derivata con un rapporto incrementale, il valore $v_C(2T)$.

Si procede così iterativamente determinando i valori approssimati delle grandezze elettriche per $t = 3T$, $t = 4T$, $t = 5T$, e così via.



Risoluzione di circuito GIT-R-C-DIODO

Formalmente, utilizzando la nozione di *campionamento uniforme* con intervallo di campionamento T , sostituiamo le grandezze a tempo continuo con le rispettive grandezze a tempo discreto, ovvero:

$$v_g(t) \rightarrow v_g[n],$$

$$v(t) \rightarrow v[n],$$

$$i(t) \rightarrow i[n],$$

$$v_C(t) \rightarrow v_C[n],$$

con n variabile temporale discreta in \mathbb{Z} (ricordiamo che, dal campionamento, segue che $t = nT$).



Risoluzione di circuito GIT-R-C-DIODO

L'algoritmo numerico per risolvere il circuito diventa, allora:

$$\begin{cases} v[n] := \text{valore di } v \text{ tale che } v + R I_s \left(e^{\frac{v}{V_\theta}} - 1 \right) - v_g[n] + v_C[n] = 0, \\ i[n] := I_s \left(e^{\frac{v[n]}{V_\theta}} - 1 \right), \\ v_C[n+1] := v_C[n] + \frac{T}{C} i[n], \end{cases}$$

per $n = 0, 1, 2, \dots$

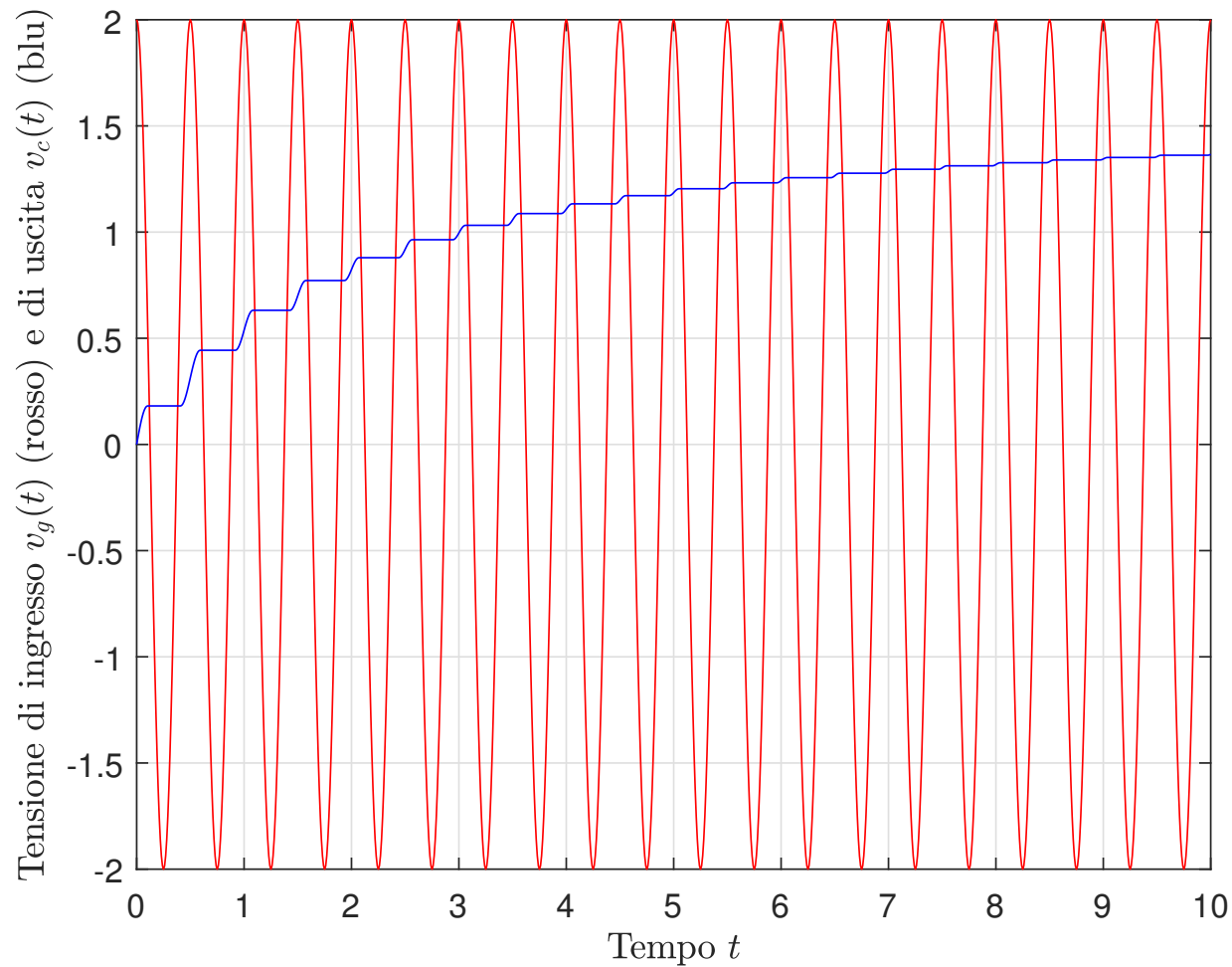
Osservazioni:

1. La derivata prima è stata approssimata con il metodo fEul.
2. La prima equazione richiede di determinare lo 'zero' di una funzione non lineare, cioè di risolvere il problema $f(x) = 0$ con $f(x) := x + a e^{\frac{x}{b}} + c$, dove a, b e c sono costanti note. Il valore v si può determinare utilizzando la funzione `fsolve` di MATLAB.



Risoluzione di circuito GIT-R-C-DIODO

La soluzione numerica determinata tramite MATLAB è:



Risoluzione di circuito GIT-R-C-DIODO

Nella figura, la curva in **rosso** rappresenta la tensione (sinusoidale) impressa dal generatore indipendente di tensione, mentre la curva in **blu** rappresenta la tensione rilevabile ai capi del condensatore:

- quando la tensione impressa dal generatore è maggiore della tensione già presente ai capi del condensatore, la corrente fluisce attraverso il diodo e carica il condensatore,
- quando la tensione ai capi del generatore è inferiore alla tensione già presente ai capi del condensatore, il 'reflusso' di corrente verso il generatore viene bloccato dal diodo e la quantità di carica presente nel condensatore rimane invariata.



Modello matematico di Lorenz

Il modello di Lorenz è formato da tre equazioni differenziali del primo ordine in tre variabili ed è di tipo non lineare.

È un sistema prototipale in quanto modelli con significato fisico diverso (ad esempio, il modello SIR che spiega la propagazione dei virus) assomigliano molto al modello di Lorenz. Altri sistemi con modelli matematici simili sono: laser, dinamo, motori in corrente continua, reazioni chimiche e fenomeni di osmosi.

Il modello di Lorenz è noto per avere un comportamento di tipo **caotico** (ovvero **deterministico** ma **non periodico**, somigliante a moto casuale, **estremamente sensibile alla variazione di condizioni iniziali**).



Modello matematico di Lorenz

Modello di Lorenz in spazio di stato (SdS) con variabili di stato $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma y - \sigma x, \\ \frac{dy}{dt} = \rho x - xz - y, \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z. \end{cases}$$

Utilizzando un **codice MATLAB** si può verificare che con i valori dei parametri $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ e $\rho = 28$ le soluzioni di questo sistema sono caotiche.



Sistema con invarianti

Consideriamo il seguente modello a tre variabili (x, y, z) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \beta y + \gamma z, \\ \frac{dy}{dt} = -\beta x + \alpha z, \\ \frac{dz}{dt} = -\gamma x - \alpha y, \end{cases}$$

dove $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$. Si tratta di un modello **lineare** che ha però una caratteristica importante, ovvero la seguente quantità rimane **costante nel tempo**:

$$I(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$$



Sistema con invarianti

$$\dot{x} = \beta y + \gamma z, \quad \dot{y} = -\beta x + \alpha z, \quad \dot{z} = -\gamma x - \alpha y$$

Dimostrazione che $I = \text{costante}$ lungo le soluzioni:

$$\begin{aligned} \frac{dI(x, y, z)}{dt} &= 2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} \\ &= 2x(\beta y + \gamma z) + 2y(-\beta x + \alpha z) + 2z(-\gamma x - \alpha y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

In particolare, date le condizioni iniziali $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ e $z(0) = z_0$, risulta

$$I(x(t), y(t), z(t)) = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \text{ per ogni } t \geq 0.$$



Sistema con invarianti

$$\frac{dx}{dt} = \beta y + \gamma z, \quad \frac{dy}{dt} = -\beta x + \alpha z, \quad \frac{dz}{dt} = -\gamma x - \alpha y.$$

L'esistenza di una funzione $I(x(t), y(t), z(t))$ delle variabili di stato del sistema che rimane costante, implica che il punto $P := (x, y, z)$ non possa variare liberamente in \mathbb{R}^3 ma che debba giacere su una superficie. In questo esempio, l'equazione

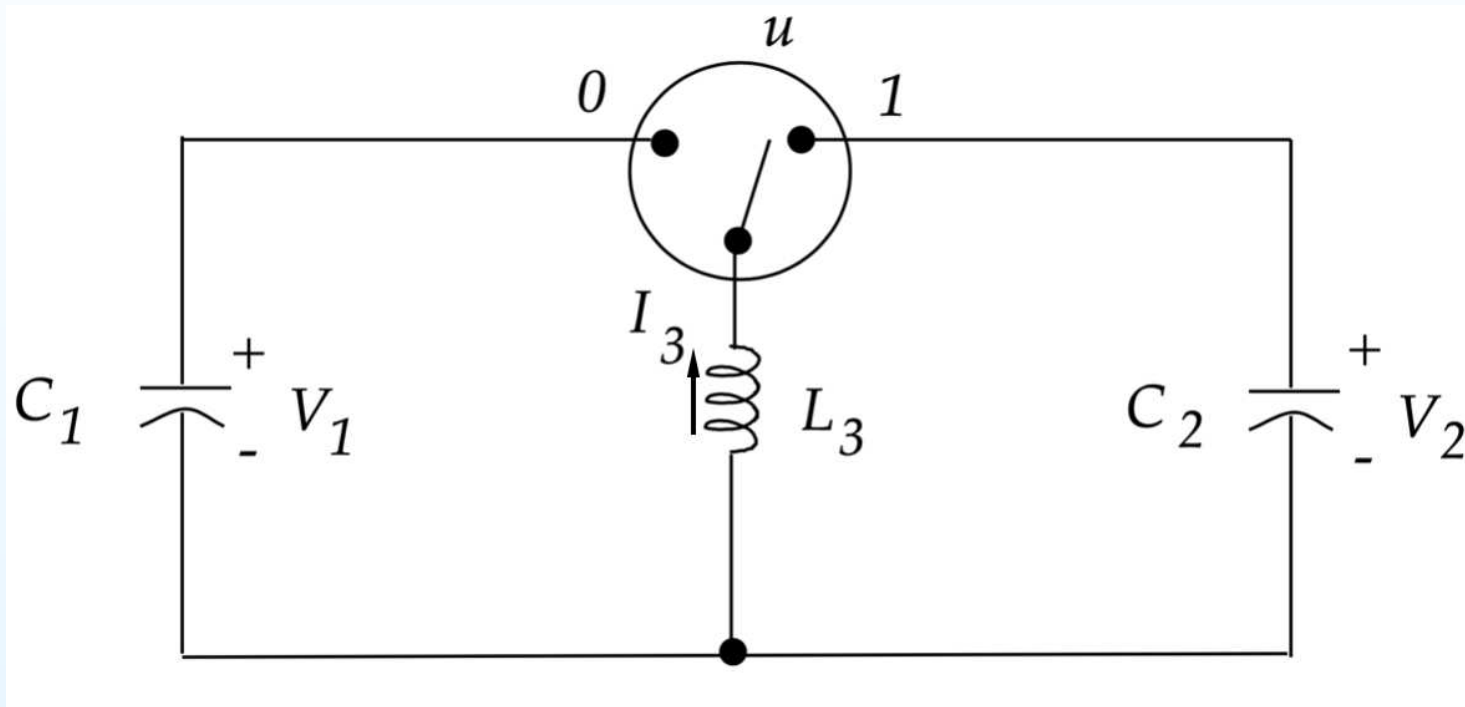
$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{costante}$$

rappresenta una **superficie sferica** immersa in \mathbb{R}^3 .



Sistema con invarianti: Convertitore DC-DC

Schema elettrico di principio di convertitore DC-DC:

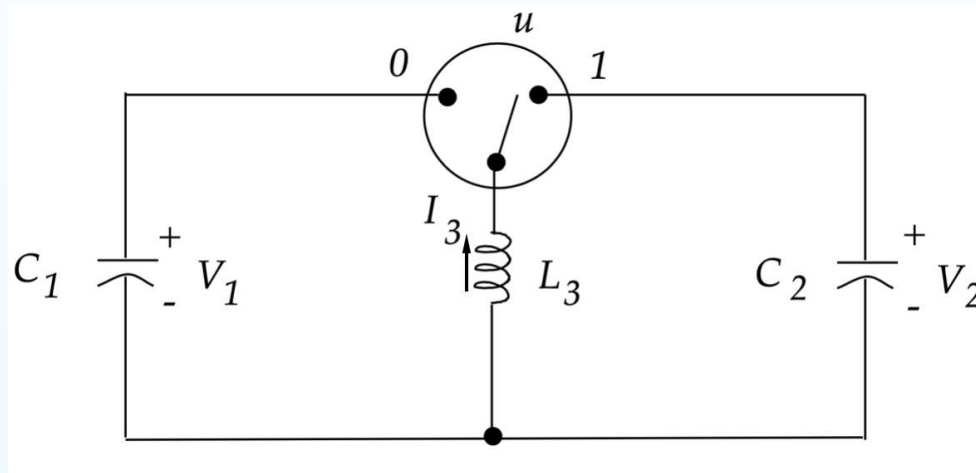


Lo switch u assume valore 0 quando L_3 è collegato a C_1 e valore 1 quando L_3 è collegato a C_2 .



Sistema con invarianti: Convertitore DC-DC

Schema elettrico di principio di convertitore DC-DC:



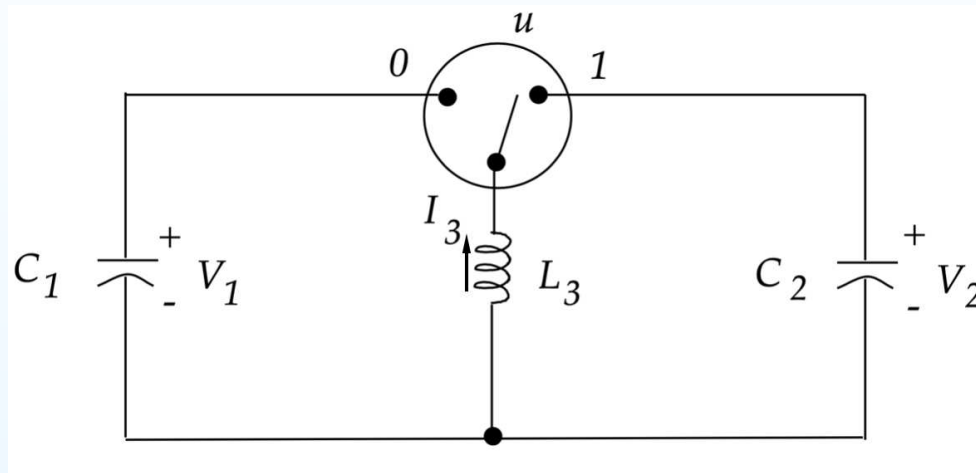
Obiettivo dell'applicazione: Trasferire l'energia elettrica contenuta nel condensatore C_1 completamente al condensatore C_2 operando lo switch.

L'induttore L_3 viene utilizzato come 'deposito temporaneo' di energia ad ogni commutazione dello switch.



Sistema con invarianti: Convertitore DC-DC

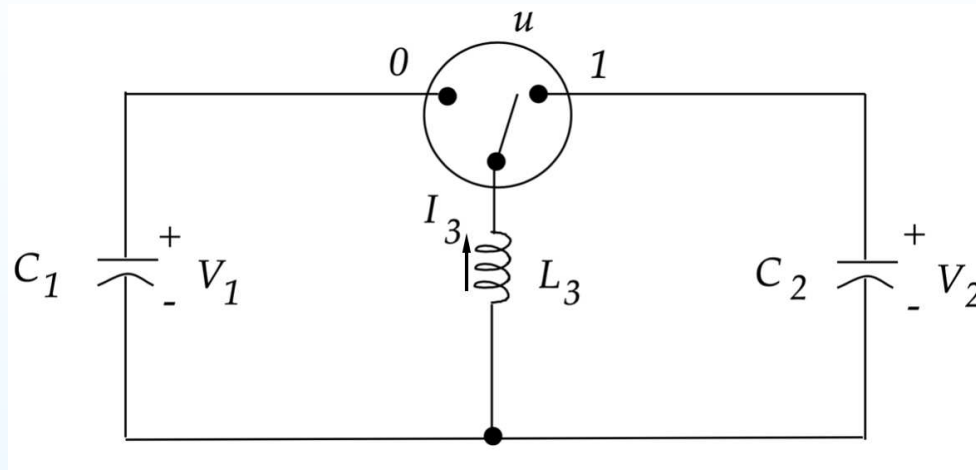
Schema elettrico di principio di convertitore DC-DC:



Implementazione dello studente M.L. Bramucci basata sull'articolo: N.E. Leonard and P.S. Krishnaprasad, "Control of switched electrical networks using averaging over Lie groups", Proceedings of the 33rd conference on Decision and Control (Lake Buena Vista, FL, USA – December 1994)



Sistema con invarianti: Convertitore DC-DC



Descrizione in spazio di stato di questo circuito:

$$\begin{cases} C_1 \frac{dV_1}{dt} = (1 - u) I_3, \\ C_2 \frac{dV_2}{dt} = u I_3, \\ L_3 \frac{dI_3}{dt} = -(1 - u) V_1 - u V_2. \end{cases}$$



Sistema con invarianti: Convertitore DC-DC

$$C_1 \dot{V}_1 = (1 - u) I_3, \quad C_2 \dot{V}_2 = u I_3, \quad L_3 \dot{I}_3 = -(1 - u) V_1 - u V_2$$

Il contenuto energetico totale del circuito si definisce:

$$E(V_1, V_2, I_3) := \frac{1}{2} C_1 V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 V_2^2 + \frac{1}{2} L_3 I_3^2.$$

È immediato verificare che

$$\frac{dE(V_1, V_2, I_3)}{dt} = (1 - u) V_1 I_3 + u V_2 I_3 - (1 - u) I_3 V_1 - u I_3 V_2 = 0.$$



Sistema con invarianti: Convertitore DC-DC

Perciò **l'energia del circuito è un invariante che vincola il valore delle variabili di stato.**

Osservazione importante: Da questo esempio possiamo dedurre come lo spazio di stato dei sistemi dinamici con invarianti non sia uno spazio piatto \mathbb{R}^p ma, in generale, uno spazio **curvo** (come, ad esempio, un'ellissoide).



Sistema con invarianti: Convertitore DC-DC

Utilizziamo uno dei metodi numerici studiati per simulare numericamente il convertitore DC-DC e utilizziamo la soluzione numerica per verificare se il metodo numerico utilizzato rispetta l'invariante E .

Come valori numerici prendiamo $C_1 = C_2 = 2$ Farad e $L_3 = 2$ Henry. Si noti che, in questo caso, l'invariante è una superficie sferica unitaria immersa nello spazio \mathbb{R}^3 .



Sistema con invarianti: Convertitore DC-DC

Il modello matematico che descrive il convertitore elettrico si riscrive, utilizzando una rappresentazione in spazio di stato (SdS), come:

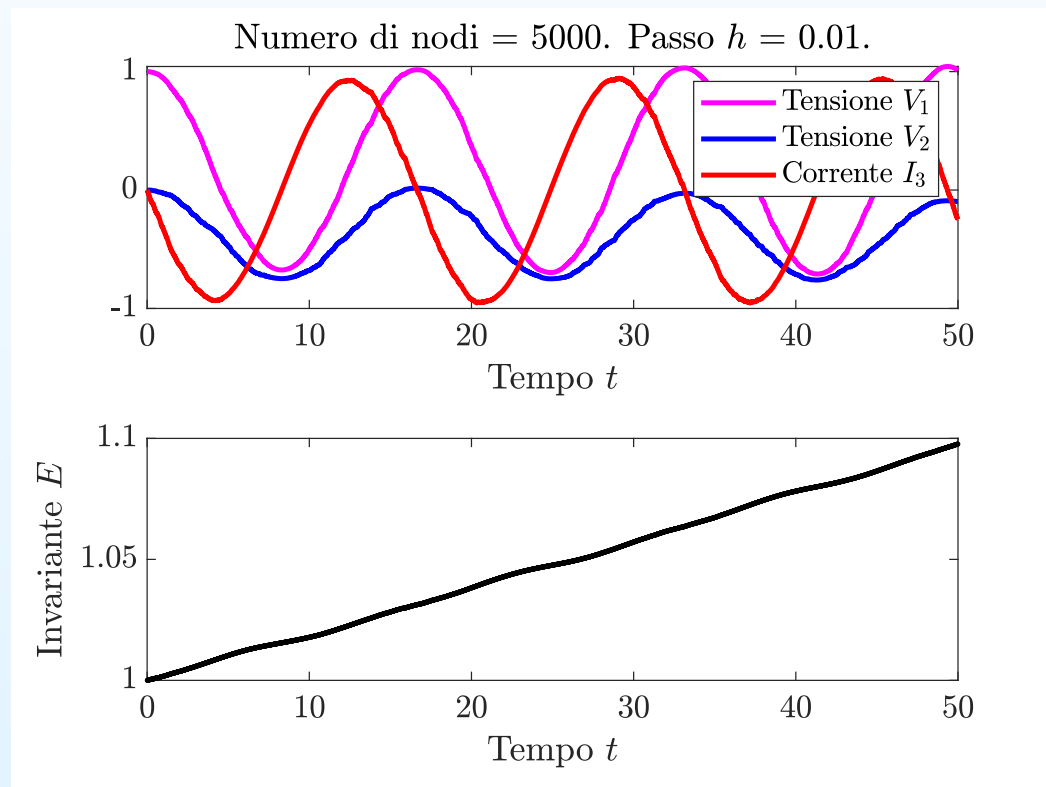
$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)),$$
$$f\left(t, \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_3 \end{bmatrix}\right) := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 - u(t) \\ 0 & 0 & u(t) \\ u(t) - 1 & -u(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_3 \end{bmatrix},$$

dove x rappresenta il **vettore di stato** del sistema, u rappresenta il **segnale di ingresso** del sistema ed f rappresenta la **funzione di transizione** dello stato.



Sistema con invarianti: Convertitore DC-DC

Risultato ottenuto con fEul prendendo $v_1(0) = 1$, $v_2(0) = 0$ e $i_3(0) = 0$: come vediamo, la funzione E , invece di rimanere costante a 1, aumenta sempre, segno che **il metodo numerico non rispetta l'invariante**.



Sistema con invarianti: Tecniche numeriche

Le equazioni differenziali dei sistemi con invarianti non possono essere risolte con le tecniche numeriche classiche (ad esempio, con i metodi della classe di Eulero), che sono pensate per simulare sistemi il cui spazio di stato è \mathbb{R}^n . Un utilizzo di queste tecniche comporterebbe la perdita di aderenza delle soluzioni alla realtà fisica (ad esempio la non conservazione dell'energia in un circuito).

Vanno perciò utilizzate tecniche numeriche specifiche che siano in grado di tenere in debito conto la struttura 'curva' degli spazi di stato.



Oscillatore su sfera e altri esempi

Le tecniche numeriche necessarie sono troppo complesse per poter essere riassunte in questo corso. **Vediamo quindi qualche esempio numerico direttamente in MATLAB.**

