Formule di passaggio tempo-fasore

Prof. Simone Fiori
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione (DII)
Università Politecnica delle Marche (UnivPM)
http://web.dii.univpm.it/fiori

1 Formule di passaggio

Ad una grandezza sinusoidale del tipo $x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$ si può associare un fasore $\dot{X} = Xe^{J\varphi}$, dove J rappresenta l'unità immaginaria ($J^2 = -1$).

Viceversa, ad un fasore scritto in forma polare $\dot{X} = Xe^{J\varphi}$, riferito ad una pulsazione ω, si può associare immediatamente la grandezza temporale $x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$.

In alcune circostanze, tuttavia, i fasori si presentano in forma cartesiana $\dot{X} = a + Jb$, con $a, b \in \mathbb{R}$, e la loro associazione con una grandezza sinusoidale non è immediata.

Si considerino le seguenti identità:

$$\dot{X} = a + Jb = Xe^{J\varphi} = X(\cos\varphi + J\sin\varphi) = X\cos\varphi + JX\sin\varphi, \quad (1)$$

$$x(t) = X\cos(\omega t + \varphi) = X\cos\varphi\cos(\omega t) - X\sin\varphi\sin(\omega t). \quad (2)$$

Dalla prima identità segue che $a = X\cos\varphi$ e $b = X\sin\varphi$. Dalla seconda identità, segue, quindi, che ad un fasore scritto in forma cartesiana $\dot{X} = a + Jb$ si può associare una grandezza temporale del tipo:

$$x(t) = a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t). \quad (3)$$

Riassumendo, si hanno le seguenti formule di passaggio tempo-fasore:

$$\dot{X} = Xe^{J\varphi} \quad \rightleftarrows \quad x(t) = X\cos(\omega t + \varphi), \quad (4)$$

$$\dot{X} = a + Jb \quad \rightleftarrows \quad x(t) = a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t). \quad (5)$$

2 Esempi

Si consideri di voler determinare il fasore associato alla grandezza sinusoidale $x(t) = 2\sin(3t)$. Si può utilizzare la formula (5) osservando che la grandezza nel dominio del tempo è scritta in forma $= a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t)$ con $a = 0$, $b = -2$. Il fasore associato è, quindi, $\dot{X} = -2J$. ☑

Un esempio di situazione incontrata frequentemente è: Data una grandezza sinusoidale $x(t) = 6\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$, scrivere il fasore $\dot{X}$ ad essa associata. Si può utilizzare la formula (4) e scrivere il fasore in uno dei seguenti modi (equivalenti):

$$\dot{X} = 6e^{J\frac{\pi}{4}} = 6(\cos\tfrac{\pi}{4} + J\sin\tfrac{\pi}{4}) = 6(\tfrac{\sqrt{2}}{2} + J\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = 3\sqrt{2}(1 + J). ☑$$

Un altro esempio di situazione incontrata frequentemente è: Il fasore $\dot{X} = 2+3J$ è associato ad una grandezza sinusoidale $x(t)$ di pulsazione $\omega = 5$ rad/sec, si vuole scrivere tale grandezza sinusoidale. Si può utilizzare di nuovo la formula (5), dove $a = 2$ e $b = 3$, per cui $x(t) = 2\cos(5t) - 3\sin(5t)$. ☑

Infine, va osservato che alcuni casi non rientrano in quanto previsto dalle formule (4) e (5) come, ad esempio, il segnale sinusoidale $x(t) = 3\cos(2t) + 5\sin(2t + \frac{\pi}{3})$... ⌛ 💬

In questi casi, occorre utilizzare le formule trigonometriche di espansione per ricondursi ad uno dei casi previsti dalle formule (4) e (5). Osservando che

$$\sin(2t + \tfrac{\pi}{3}) = \sin(2t)\cos(\tfrac{\pi}{3}) + \cos(2t)\sin(\tfrac{\pi}{3}) = \tfrac{1}{2}\sin(2t) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(2t),$$

si trova

$$x(t) = 3\cos(2t) + 5(\tfrac{1}{2}\sin(2t) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(2t)) = (3 + \tfrac{5\sqrt{3}}{2})\cos(2t) + \tfrac{5}{2}\sin(2t),$$

per cui il fasore associato al segnale sinusoidale è $\dot{X} = 3 + \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}J$. ☑

3 Nota

Questo documento è stato scritto in LaTeX2e usando il package FONTAWESOME per le icone speciali. Si **consiglia fortemente** di utilizzare il sistema di composizione LaTeX2e per scrivere relazioni e tesi 🎓 😅 😉.