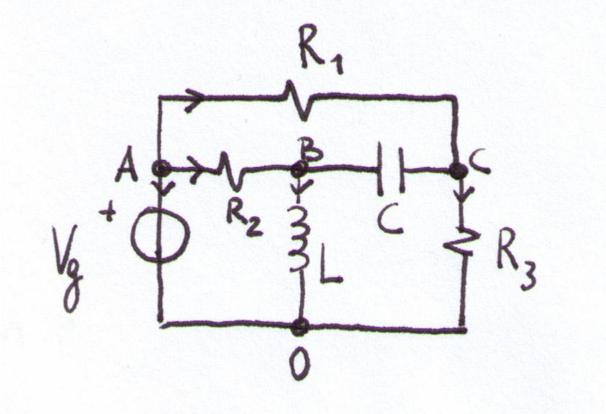
Grafo orientato associato ad un circuito elettrico

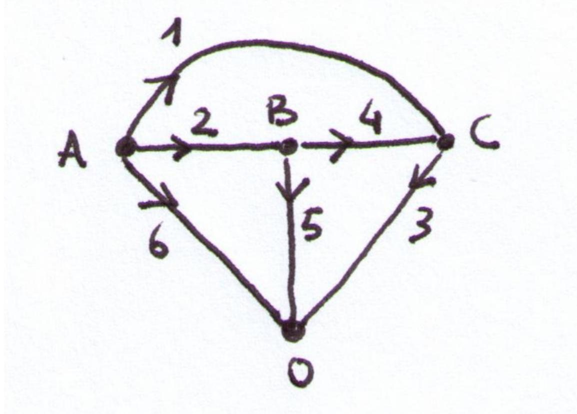
Un circuito può essere rappresentato da un insieme di elementi ideali, connessi in modo opportuno e caratterizzati dalle grandezze elettriche tensione e corrente.

Per ogni elemento del circuito, ovvero per ogni bipolo, vi sono una tensione e una corrente che lo caratterizzano. Quindi per risolvere un circuito con $\Re$ archi è necessario determinare $\Re$ tensioni e $\Re$ correnti elettriche. Le $2\Re$ grandezze devono soddisfare $\Re$ equazioni costitutive, imposte dalla natura dei bipoli, e altrettante equazioni che sono, invece, indipendenti dal tipo di elementi e che riguardano la topologia del circuito, cioè le leggi di Kirchhoff.

Visto che queste ultime dipendono solo dal numero di elementi e dal modo in cui sono collegati tra loro, è utile semplificare la rappresentazione del circuito considerandone il grafo associato: si rinuncia a distinguere la tipologia del componente, identificando ciascun ramo con un semplice segmento che lo collega agli altri. Dopodiché si stabilisce un verso per la corrente di ciascun arco e, adottando la convenzione degli utilizzatori, si definisce il verso della tensione omologa in modo coordinato, evitando di indicarla esplicitamente sul grafo che, di conseguenza, acquista l’attributo di orientato.



Circuito elettrico

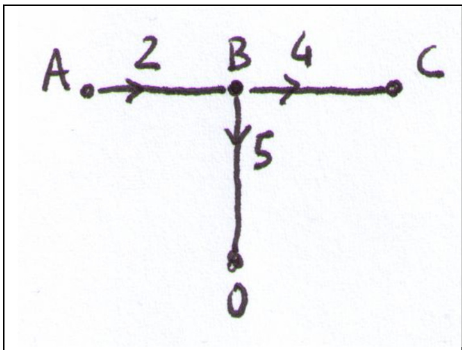


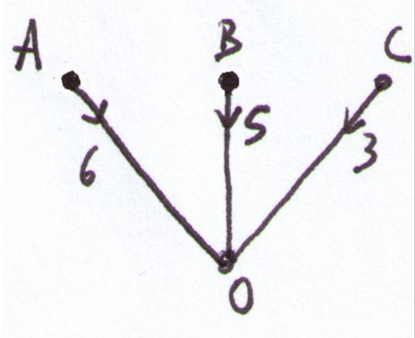
Grafo orientato associato al circuito

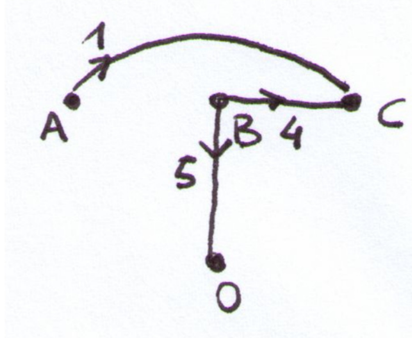
Albero e co-albero

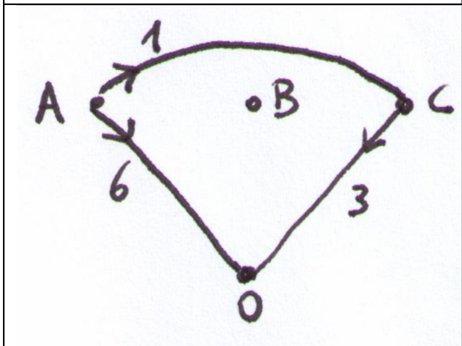
Definito il grafo orientato associato al circuito, è possibile identificare molteplici alberi, ciascuno dei quali è un insieme connesso di rami che collega tutti i nodi del grafo senza però realizzare alcun percorso chiuso. Ad ogni albero è quindi associato un co-albero formato da tutti gli archi del grafo che non appartengono all’albero in questione.

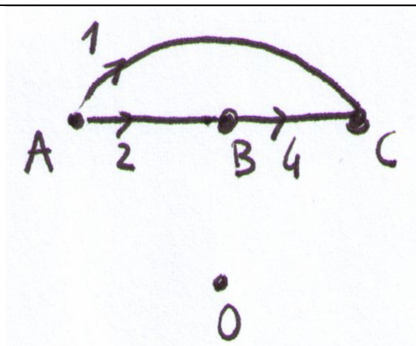
Nelle figure seguenti si riportano tre delle possibili coppie di albero e co-albero:

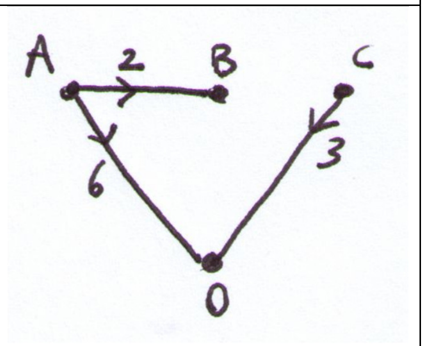
<table>
<tr>
<td>

Albero: {2,4,5}</td>
<td>

Albero: {6,5,3}</td>
<td>

Albero: {1,4,5}</td>
</tr>
<tr>
<td>

Co-albero: {1,3,6}</td>
<td>

Co-albero: {1,2,4}</td>
<td>

Co-albero: {2,3,6}</td>
</tr>
</table>

Supponendo che un grafo sia composto da $\aleph$ nodi, si verifica che ognuno dei possibili alberi ha un numero di rami pari a $\aleph - 1$, infatti, per costruire l'albero, il primo ramo collega due nodi, mentre i rami successivi aggiungono ciascuno un nodo fino all'$\aleph$-esimo. Inoltre, identificando con $\mathfrak{R}$ il numero totale di rami del grafo, il co-albero ha $\mathfrak{R} - (\aleph - 1)$ rami. Il grafo dell'esempio presenta 4 nodi e 6 rami, quindi ciascun albero ha $\aleph - 1 = 3$ rami e il co-albero corrispondente possiede $\mathfrak{R} - \aleph + 1 = 3$ rami. (Si noti che, in generale, il numero di archi sull'albero differisce dal numero di archi sul co-albero.)

Facendo uso delle nozioni di albero e co-albero per l'analisi di un circuito, è agevole giungere alla scrittura delle leggi di Kirchhoff (sia delle correnti che delle tensioni) identificando il set di correnti indipendenti e quello delle tensioni indipendenti mediante i quali poter esprimere tutte le altre correnti e tensioni, rispettivamente. A tal fine si introducono le nozioni di maglia fondamentale e di taglio fondamentale.

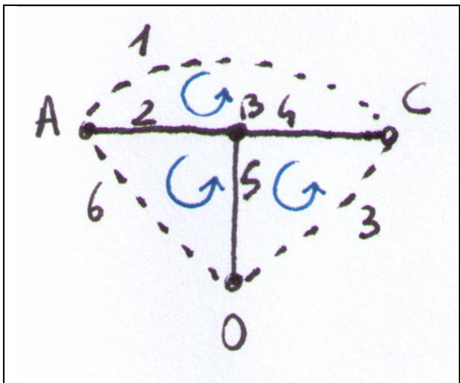
Maglia fondamentale e taglio fondamentale

La maglia è un insieme di rami del grafo che forma un percorso chiuso e sulla quale è valido l'equilibrio delle tensioni, come espresso dalla relativa legge di Kirchhoff.

Una maglia fondamentale è una maglia ottenuta aggiungendo all'albero uno qualunque dei rami di co-albero. Infatti, poiché l'albero, per definizione, collega tutti i nodi, l'aggiunta di un ramo di co-albero causa la formazione di un percorso chiuso e quindi di una maglia.

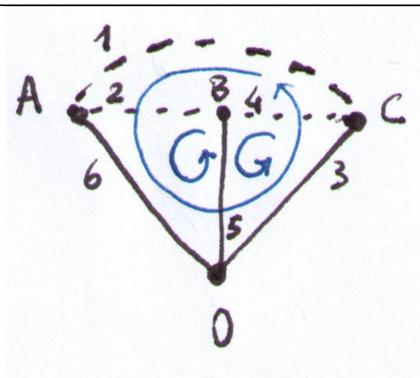
Ne consegue che il ramo di co-albero identifica e caratterizza la maglia fondamentale e che, quindi, ci sono tante maglie fondamentali quanti sono i rami di co-albero, cioè $\Re - \aleph + 1$.

Nelle figure si evidenziano le maglie fondamentali ottenute da ciascuna coppia di albero e co-albero prima rappresentate: in questo caso $\Re - \aleph + 1 = 3$; nello scrivere l'insieme dei rami di ogni maglia il primo ramo indicato è quello del co-albero che definisce la maglia fondamentale.



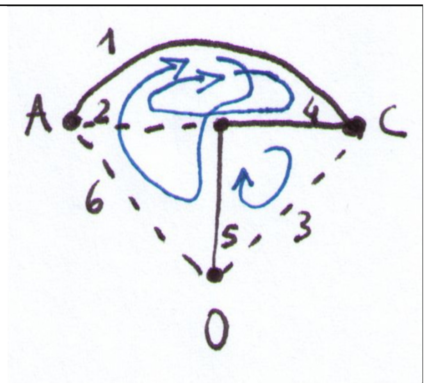
Maglie fondamentali:

{1,2,4}, {6,2,5}, {3,4,5}



Maglie fondamentali:

{1,3,6}, {2,5,6}, {4,3,5}



Maglie fondamentali:

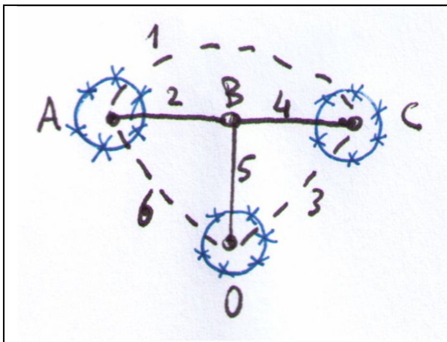
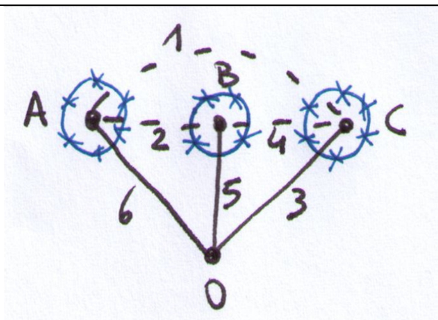
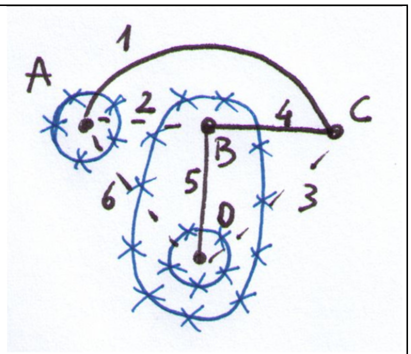
{2,1,4}, {6,1,4,5}, {3,4,5}

Il taglio è un insieme di rami la cui rimozione dal grafo rende quest'ultimo non connesso, cioè viene meno la proprietà di poter raggiungere, in modo continuo, qualunque nodo seguendo i rami del grafo. La legge di Kirchhoff delle correnti prevede la scrittura dell'equilibrio delle correnti che attraversano una linea chiusa e proprio i rami del taglio sono quelli intersecati da tale linea.

Un taglio fondamentale è un taglio che contiene vari rami di co-albero, ma un solo ramo di albero, visto che rimuovere un ramo di quest'ultimo lo suddivide in due parti e rende il grafo non connesso.

Il taglio fondamentale è quindi individuato dal ramo di albero che, a sua volta, compare soltanto in quel taglio: ne consegue che i tagli fondamentali sono in numero pari a quello dei rami di albero, cioè $\aleph - 1$.

Nelle figure si riportano i tagli fondamentali relativi a ciascuna coppia di albero e co-albero prima definita: in questo esempio, i tagli sono $\aleph - 1 = 3$ e, per ogni taglio, il primo elemento dell'insieme è il ramo di albero che definisce il taglio stesso.

		
Tagli fondamentali:	Tagli fondamentali:	Tagli fondamentali:
$\{2,1,6\}, \{4,1,3\}, \{5,3,6\}$	$\{6,1,2\}, \{5,2,4\}, \{3,1,4\}$	$\{1,2,6\}, \{4,3,6,2\}, \{5,3,6\}$

Si vuole evidenziare che le tensioni dei rami di albero $\underline{V_a}$ costituiscono un insieme di tensioni indipendenti perché la definizione di albero implica l'assenza di maglie e, inoltre, le tensioni dei rami di co-albero $\underline{V_c}$ possono essere espresse come combinazione lineare di $\underline{V_a}$ scrivendo l'equilibrio delle tensioni alle maglie fondamentali nella forma $V_c + [B]V_a = 0$, da cui risulta che $V_c = -[B]V_a$.

In modo duale, le correnti dei rami di co-albero $\underline{I_c}$ rappresentano un insieme di correnti indipendenti perché non vi può essere un taglio costituito dai soli rami di co-albero, essendo l'albero un insieme connesso di rami. Applicando il bilancio delle correnti ai tagli fondamentali, si ottiene $I_a + [A]I_c = 0$ e, quindi, si può esprimere le correnti dei rami di albero $\underline{I_a}$ come combinazione lineare di $\underline{I_c}$ come mostrato dall'equazione $I_a = -[A]I_c$.

Per le proprietà delle maglie e dei tagli fondamentali si conclude che $B = -A^T$, da cui segue sia il metodo di risoluzione dei circuiti su base maglie, nel caso si scelgano le $\underline{I_c}$ come variabili ausiliarie, sia quello su base tagli, se invece si esprimono tutte le altre grandezze in funzione di $\underline{V_a}$.