Metodo di analisi su base maglie e metodo delle correnti fittizie di maglia

Prof. Simone Fiori

s.fiori@univpm.it

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione

Università Politecnica delle Marche

Argomenti

- Richiamo: Topologia circuitale
- Ipotesi per l'applicazione del metodo
- Metodo di analisi su base maglie (MABM)
- Esempio di applicazione del MABM
- Il metodo delle "correnti fittizie di maglia" (c.f.m.).
- Esempio di applicazione del metodo delle c.f.m.

Nozioni di topologia circuitale

È utile richiamare le seguenti nozioni di topologia circuitale:

- **Grafo** ($\mathcal{G}$): Insieme di archi tra i nodi.
- **Albero** ($\mathcal{A}$): Sottoinsieme degli archi del grafo che unisce tutti i nodi senza formare percorsi chiusi ($\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$).
- **Coalbero** ($\mathcal{C}$): Complemento dell'albero rispetto al grafo ($\mathcal{A} \cup \mathcal{C} = \mathcal{G}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \emptyset$).
- **Maglia fondamentale**: Percorso chiuso (maglia) che comprende un solo arco di coalbero.
- **Taglio fondamentale**: Sottoinsieme di archi (taglio) che comprende un solo arco di albero.

Leggi di Kirchhoff

Le leggi di Kirchhoff riguardano la connessione di componenti in un circuito elettrico ma non riguardano la natura dei componenti stessi. Sono di due tipi:

- Leggi di Kirchhoff alle tensioni (LKT) su una maglia $\mathcal{M}$:

$$\sum_{k \in \mathcal{M}}^{\mathrm{alg}} v_k(t) = 0.$$

- Leggi di Kirchhoff alle correnti (LKC) su un taglio $\mathcal{T}$:

$$\sum_{k \in \mathcal{T}}^{\mathrm{alg}} i_k(t) = 0.$$

Equazioni topologiche

Indichiamo con $\mathbf{V}_\mathrm{a}$ e $\mathbf{V}_\mathrm{c}$ il vettore delle tensioni di albero e coalbero, rispettivamente.

$\boxed{\text{Le tensioni di albero sono indipendenti tra loro.}}$

Indichiamo con $\mathbf{I}_\mathrm{a}$ e $\mathbf{I}_\mathrm{c}$ il vettore delle correnti di albero e coalbero, rispettivamente.

$\boxed{\text{Le correnti di coalbero sono indipendenti tra loro.}}$

- Equazione topologica “A”: $\mathbf{I}_\mathrm{a} + \mathbf{A}\mathbf{I}_\mathrm{c} = \mathbf{0}$,
- Equazione topologica “B”: $\mathbf{V}_\mathrm{c} + \mathbf{B}\mathbf{V}_\mathrm{a} = \mathbf{0}$,
- Terza equazione topologica: $\mathbf{B} = -\mathbf{A}^\top$.

Equazioni topologiche (2)

In un grafo con R rami (o archi) e N nodi, risulta:

- Numero di rami dell'albero: $a = N - 1$,
- Numero di rami del co-albero: $c = R - N + 1$.

Le dimensioni dei vettori sono:

- Vettori $\mathbf{I}_\mathrm{a}$ e $\mathbf{V}_\mathrm{a}$: Sono vettori $a \times 1$ (appartengono a $\mathbb{R}^a$),
- Vettori $\mathbf{I}_\mathrm{c}$ e $\mathbf{V}_\mathrm{c}$: Sono vettori $c \times 1$ (appartengono a $\mathbb{R}^c$).

Le caratteristiche delle matrici sono:

- La matrice $\mathbf{A}$ ha dimensione $a \times c$ e gli elementi appartengono a $\{0, \pm 1\}$.
- La matrice $\mathbf{B}$ ha dimensione $c \times a$ e gli elementi appartengono a $\{0, \pm 1\}$.

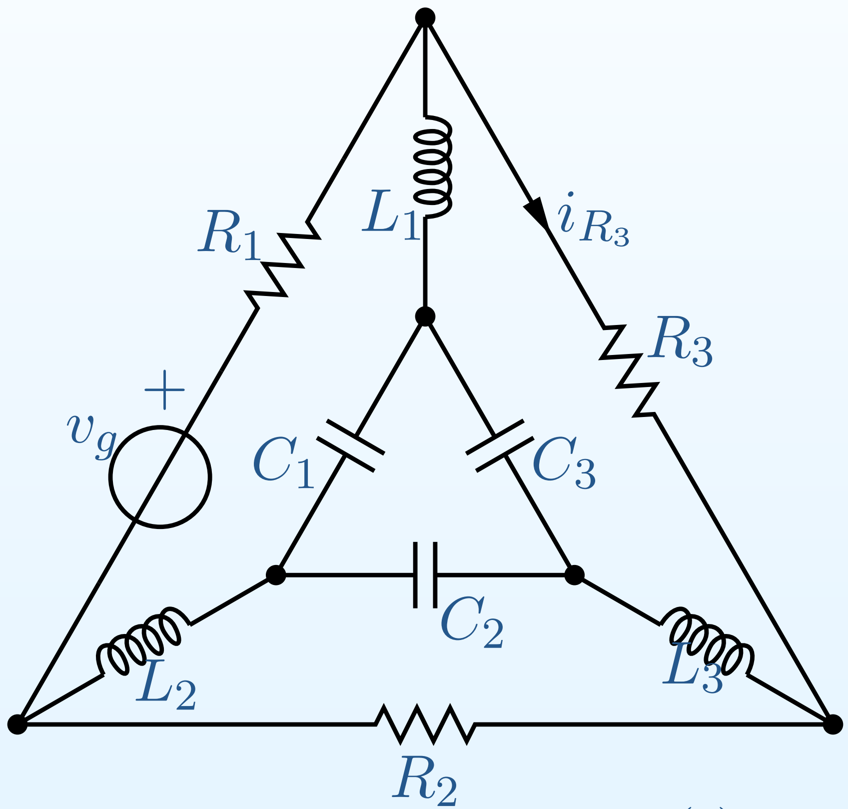
Equazioni topologiche (3)

Valgono le seguenti proprietà:

- Le equazioni topologiche "A" costituiscono un sottoinsieme delle leggi di Kirchhoff alle correnti (LKC) e *sono equazioni indipendenti tra loro.*
- Le equazioni topologiche "B" costituiscono un sottoinsieme delle leggi di Kirchhoff alle tensioni (LKT) e *sono equazioni indipendenti tra loro.*

Obiettivo dei metodi di analisi di circuiti

Dati i valori dei componenti, determinare una o più tensioni e correnti nel circuito. Esempio:



Dati R_1, R_2, R_3, L_1, L_2, L_3, C_1, C_2, C_3 e $v_g(t)$, trovare $i_{R_3}(t)$.

Ipotesi per l’applicazione del MABM

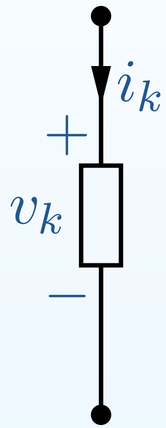
Perché si possa applicare il metodo di analisi su base maglie (MABM), è necessario che il circuito da analizzare contenga *solamente*:

Resistori e generatori indipendenti di tensione (GIT).

Una volta sviluppato il metodo di analisi su base maglie valido in questa ipotesi restrittiva, è possibile estenderlo in modo diretto al caso realistico in cui il circuito contenga anche tutti gli altri componenti.

Metodo di analisi su base maglie

Consideriamo un generico bipolo $k$mo all'interno di un circuito che contiene solo resistori e GIT.



- Se il bipolo è un resistore di valore R_k, allora vale $v_k = R_k i_k$.
- Se il bipolo è un generatore indipendente di tensione di valore v_{gk}, allora vale $v_k = v_{gk}$.
- Per l'ipotesi fatta, non esistono altre possibilità.

Metodo di analisi su base maglie (2)

I due casi precedenti si possono riassumere nella relazione costitutiva di un bipolo generico:

$$v_k = R_k i_k + v_{gk},$$

con la convenzione che:

- se il bipolo è un *resistore*, si intende che $v_{gk} = 0$;
- se il bipolo è un *generatore indipendente di tensione*, si intende che $R_k = 0$.

Per un grafo con R archi, si ha $k = 1, \ldots, R$. Per ogni arco dell'albero e per ogni arco del coalbero si può scrivere una relazione del tipo $v_k = R_k i_k + v_{gk}$.

Metodo di analisi su base maglie (3)

Le relazioni costitutive per gli archi dell'albero si possono riassumere nell'equazione:

$$\mathbf{V}_{\mathrm{a}} = \mathbf{R}_{\mathrm{a}}\mathbf{I}_{\mathrm{a}} + \mathbf{V}_{\mathrm{g,a}},$$

dove:

- $\mathbf{R}_{\mathrm{a}}$ è una matrice $a \times a$ *diagonale* che contiene i valori dei resistori sugli archi dell'albero;
- $\mathbf{V}_{\mathrm{g,a}}$ è un vettore $a \times 1$ che contiene i valori dei generatori indipendenti di tensione sugli archi dell'albero.

Metodo di analisi su base maglie (4)

Analogamente, le relazioni costitutive per gli archi di coalbero si possono riassumere nell'equazione:

$$\mathbf{V}_{\mathrm{c}} = \mathbf{R}_{\mathrm{c}}\mathbf{I}_{\mathrm{c}} + \mathbf{V}_{\mathrm{g,c}},$$

dove:

- $\mathbf{R}_{\mathrm{c}}$ è una matrice $c \times c$ *diagonale* che contiene i valori dei resistori sugli archi del coalbero;
- $\mathbf{V}_{\mathrm{g,c}}$ è un vettore $c \times 1$ che contiene i valori dei generatori indipendenti di tensione sugli archi del coalbero.

Metodo di analisi su base maglie (5)

Riassumendo, sono disponibili le equazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{\mathrm{a}} = \mathbf{R}_{\mathrm{a}}\mathbf{I}_{\mathrm{a}} + \mathbf{V}_{\mathrm{g,a}} \ (a \text{ equazioni}), \\ \mathbf{V}_{\mathrm{c}} = \mathbf{R}_{\mathrm{c}}\mathbf{I}_{\mathrm{c}} + \mathbf{V}_{\mathrm{g,c}} \ (c \text{ equazioni}), \\ \mathbf{V}_{\mathrm{c}} + \mathbf{B}\mathbf{V}_{\mathrm{a}} = \mathbf{0} \ (c \text{ equazioni}), \\ \mathbf{I}_{\mathrm{a}} + \mathbf{A}\mathbf{I}_{\mathrm{c}} = \mathbf{0} \ (a \text{ equazioni}), \end{cases}$$

dove:

- sono *note* le quantità: $\mathbf{R}_{\mathrm{a}}$, $\mathbf{R}_{\mathrm{c}}$, $\mathbf{V}_{\mathrm{g,a}}$, $\mathbf{V}_{\mathrm{g,c}}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$;
- sono *incognite* le quantità: $\mathbf{V}_{\mathrm{a}}$, $\mathbf{V}_{\mathrm{c}}$, $\mathbf{I}_{\mathrm{a}}$, $\mathbf{I}_{\mathrm{c}}$.

Metodo di analisi su base maglie (6)

Le equazioni, in totale, sono:
$a + c + c + a = 2(a + c) = 2(N - 1 + R - N + 1) = 2R$.

Le equazioni sono linearmente indipendenti l'una dall'altra.

Le incognite in totale sono $2R$ (una coppia (v_k, i_k) per ogni ramo del circuito/arco del grafo).

$\boxed{\text{Il sistema risolvente è consistente.}}$

Metodo di analisi su base maglie (7)

Conviene scrivere il sistema risolvente in funzione di un solo gruppo di incognite dette *fondamentali*.

Nel MABM le incognite fondamentali sono le correnti $\mathbf{I}_\mathrm{c}$.

Il sistema risolvente **ridotto** per il metodo di analisi su base maglie si scrive:

$$\mathbf{R}_\mathrm{m}\mathbf{I}_\mathrm{c} = \mathbf{V}_\mathrm{g,m}.$$

Complessità sistema risolvente = Dimensione coalbero (c).

Metodo di analisi su base maglie (8)

Sostituendo le relazioni costitutive:

$$\mathbf{V}_{\mathrm{a}} = \mathbf{R}_{\mathrm{a}}\mathbf{I}_{\mathrm{a}} + \mathbf{V}_{\mathrm{g,a}}, \;\; \mathbf{V}_{\mathrm{c}} = \mathbf{R}_{\mathrm{c}}\mathbf{I}_{\mathrm{c}} + \mathbf{V}_{\mathrm{g,c}},$$

nell'equazione topologica "B":

$$\mathbf{V}_{\mathrm{c}} + \mathbf{B}\mathbf{V}_{\mathrm{a}} = \mathbf{0},$$

si ottiene:

$$\mathbf{R}_{\mathrm{c}}\mathbf{I}_{\mathrm{c}} + \mathbf{V}_{\mathrm{g,c}} + \mathbf{B}(\mathbf{R}_{\mathrm{a}}\mathbf{I}_{\mathrm{a}} + \mathbf{V}_{\mathrm{g,a}}) = \mathbf{0},$$

ovvero:

$$\mathbf{R}_{\mathrm{c}}\mathbf{I}_{\mathrm{c}} + \mathbf{B}\mathbf{R}_{\mathrm{a}}\mathbf{I}_{\mathrm{a}} = -\mathbf{V}_{\mathrm{g,c}} - \mathbf{B}\mathbf{V}_{\mathrm{g,a}}.$$

Metodo di analisi su base maglie (9)

Dalla relazione:

$$\mathbf{R}_{\mathrm{c}}\mathbf{I}_{\mathrm{c}} + \mathbf{B}\mathbf{R}_{\mathrm{a}}\mathbf{I}_{\mathrm{a}} = -\mathbf{V}_{\mathrm{g,c}} - \mathbf{B}\mathbf{V}_{\mathrm{g,a}}.$$

e dalla equazione topologica “A”:

$$\mathbf{I}_{\mathrm{a}} = -\mathbf{A}\mathbf{I}_{\mathrm{c}},$$

si ottiene:

$$\mathbf{R}_{\mathrm{c}}\mathbf{I}_{\mathrm{c}} + \mathbf{B}\mathbf{R}_{\mathrm{a}}(-\mathbf{A}\mathbf{I}_{\mathrm{c}}) = -\mathbf{V}_{\mathrm{g,c}} - \mathbf{B}\mathbf{V}_{\mathrm{g,a}},$$

ovvero:

$$(\mathbf{R}_{\mathrm{c}} - \mathbf{B}\mathbf{R}_{\mathrm{a}}\mathbf{A})\mathbf{I}_{\mathrm{c}} = -\mathbf{V}_{\mathrm{g,c}} - \mathbf{B}\mathbf{V}_{\mathrm{g,a}}.$$

Metodo di analisi su base maglie (10)

Dalla relazione:

$$(\mathbf{R}_{\mathrm{c}} - \mathbf{B}\mathbf{R}_{\mathrm{a}}\mathbf{A})\mathbf{I}_{\mathrm{c}} = -\mathbf{V}_{\mathrm{g,c}} - \mathbf{B}\mathbf{V}_{\mathrm{g,a}}.$$

ponendo:

$$\mathbf{R}_{\mathrm{m}} := \mathbf{R}_{\mathrm{c}} - \mathbf{B}\mathbf{R}_{\mathrm{a}}\mathbf{A},$$
$$\mathbf{V}_{\mathrm{g,m}} := -\mathbf{V}_{\mathrm{g,c}} - \mathbf{B}\mathbf{V}_{\mathrm{g,a}},$$

il sistema risolvente ridotto si scrive $\mathbf{R}_{\mathrm{m}}\mathbf{I}_{\mathrm{c}} = \mathbf{V}_{\mathrm{g,m}}$.

Metodo di analisi su base maglie (11)

Valgono le seguenti proprietà:

- la matrice $\mathbf{R}_\mathrm{m}$ è dimensionalmente omogenea (tutti gli elementi hanno unità di misura Ohm);
- il vettore $\mathbf{V}_{\mathrm{g,m}}$ è dimensionalmente omogeneo (tutti gli elementi hanno unità di misura Volt);
- la matrice $\mathbf{R}_\mathrm{m}$ è simmetrica (cioé vale $\mathbf{R}_\mathrm{m}^\top = \mathbf{R}_\mathrm{m}$).

Metodo di analisi su base maglie (12)

È utile ricordare due proprietà delle matrici:

- Ogni matrice diagonale è anche simmetrica.
- Per ogni coppia di matrici $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{F}$ tali che si possa calcolare il prodotto $\mathbf{EF}$, vale:

$$(\mathbf{EF})^\top = \mathbf{F}^\top \mathbf{E}^\top$$

(notare l'ordine inverso dei prodotti).

Metodo di analisi su base maglie (13)

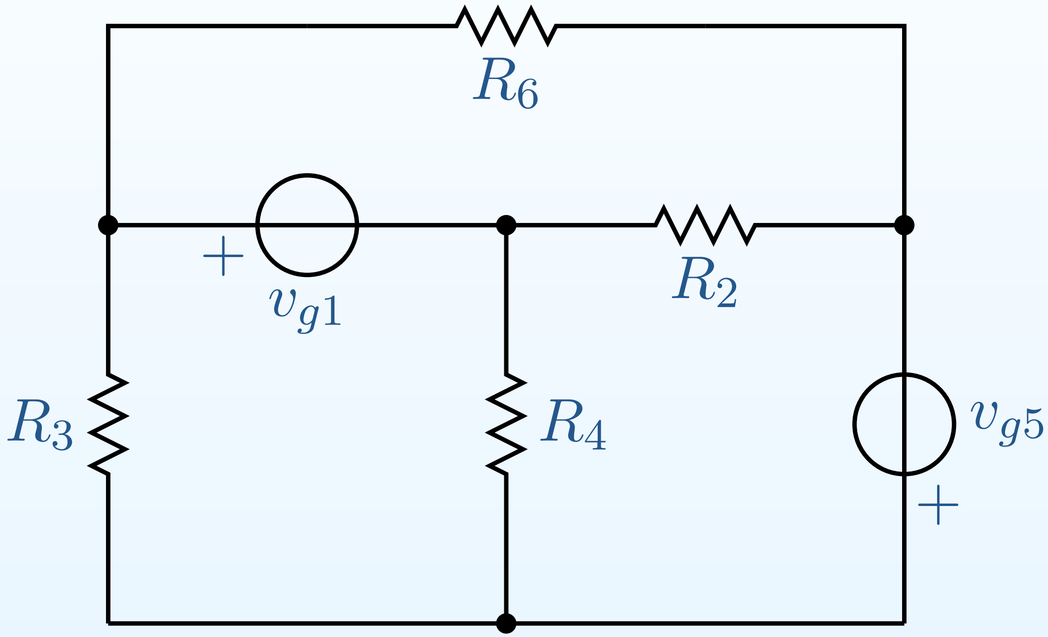
Per dimostrare la proprietà di simmetria si può procedere come segue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{\mathrm{m}}^{\top} &= (\mathbf{R}_{\mathrm{c}} - \mathbf{B}\mathbf{R}_{\mathrm{a}}\mathbf{A})^{\top} \\
&= \mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{\top} - (\mathbf{B}\mathbf{R}_{\mathrm{a}}\mathbf{A})^{\top} \\
&= \mathbf{R}_{\mathrm{c}} - \mathbf{A}^{\top}\mathbf{R}_{\mathrm{a}}^{\top}\mathbf{B}^{\top} \\
&= \mathbf{R}_{\mathrm{c}} - (-\mathbf{B})\mathbf{R}_{\mathrm{a}}(-\mathbf{A}) \\
&= \mathbf{R}_{\mathrm{c}} - \mathbf{B}\mathbf{R}_{\mathrm{a}}\mathbf{A} \\
&= \mathbf{R}_{\mathrm{m}},
\end{aligned}$$

dove si è usata la terza equazione topologica ($\mathbf{B} = -\mathbf{A}^{\top}$).

Esempio di applicazione del MABM

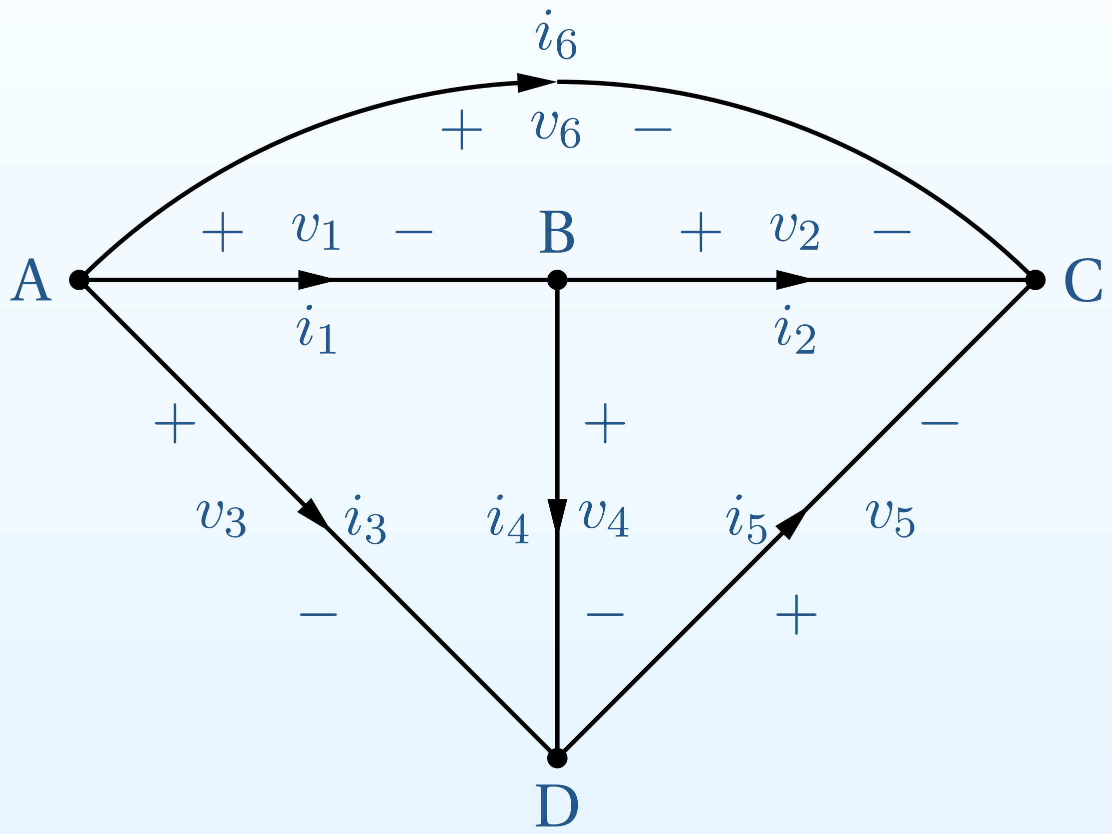
Consideriamo il seguente circuito elettrico:



DATI: R_2, R_3, R_4, R_6, $v_{g1}(t)$, $v_{g5}(t)$.
OBIETTIVO: Scrivere un sistema risolvente per il circuito.

Esempio di applicazione del MABM (2)

Il grafo (con un orientamento) relativo al circuito è:



Esempio di applicazione del MABM (3)

Il grafo relativo al circuito ha:

- $R = 6$ archi,
- $N = 4$ nodi,

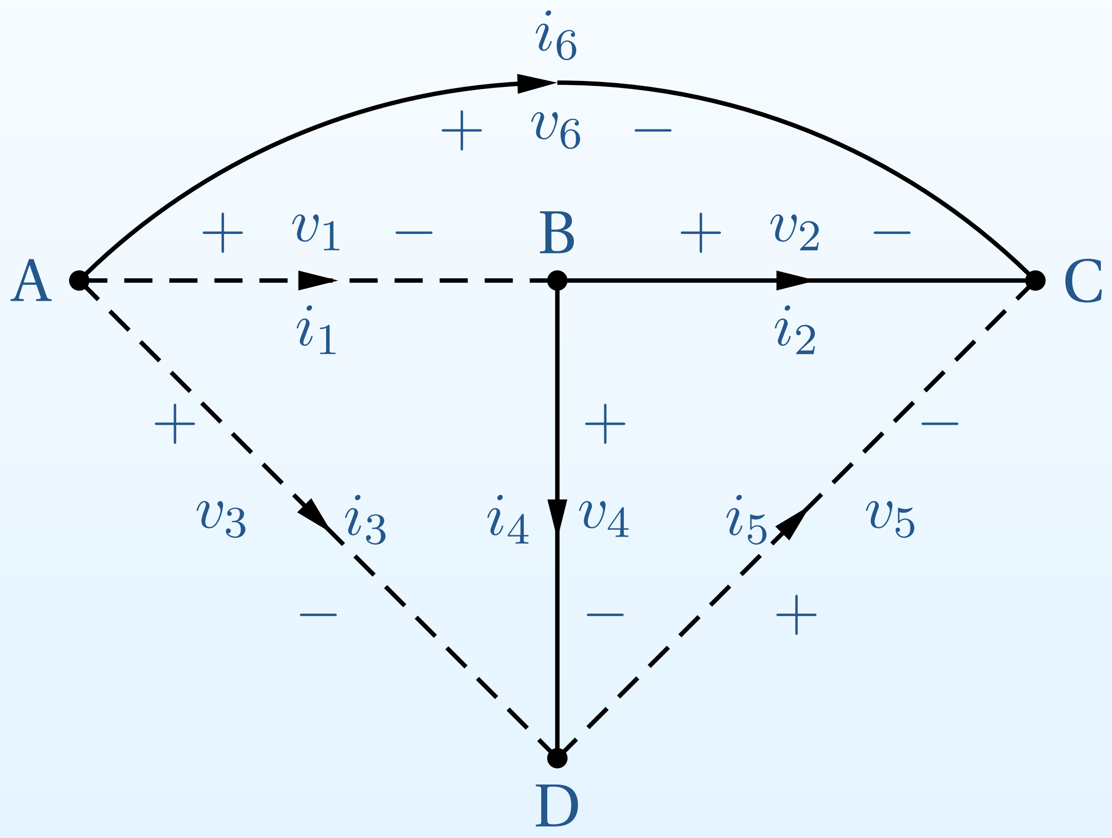
quindi:

- l'albero è costutito da $a = N - 1 = 3$ archi,
- il coalbero è costituito da $c = R - N + 1 = 3$ archi.

Qualsiasi scelta per l'albero e il coalbero deve rispettare queste dimensioni.

Esempio di applicazione del MABM (4)

Si sceglie questa partizione (*albero* = linea continua, *coalbero* = linea tratteggiata):



Esempio di applicazione del MABM (5)

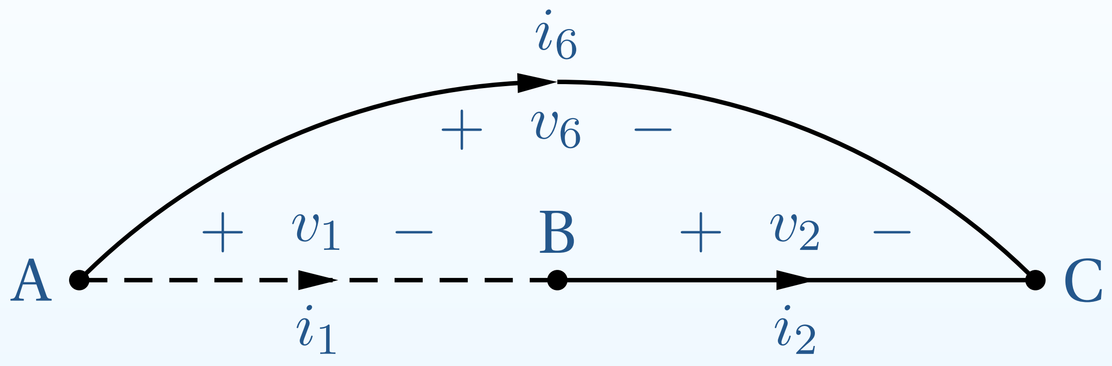
Per la scelta fatta, si pongono:

$$\mathbf{V}_{\mathrm{a}} := \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_6 \end{bmatrix}, \ \mathbf{I}_{\mathrm{a}} := \begin{bmatrix} i_2 \\ i_4 \\ i_6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}_{\mathrm{c}} := \begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{I}_{\mathrm{c}} := \begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \\ i_5 \end{bmatrix}.$$

Esempio di applicazione del MABM (6)

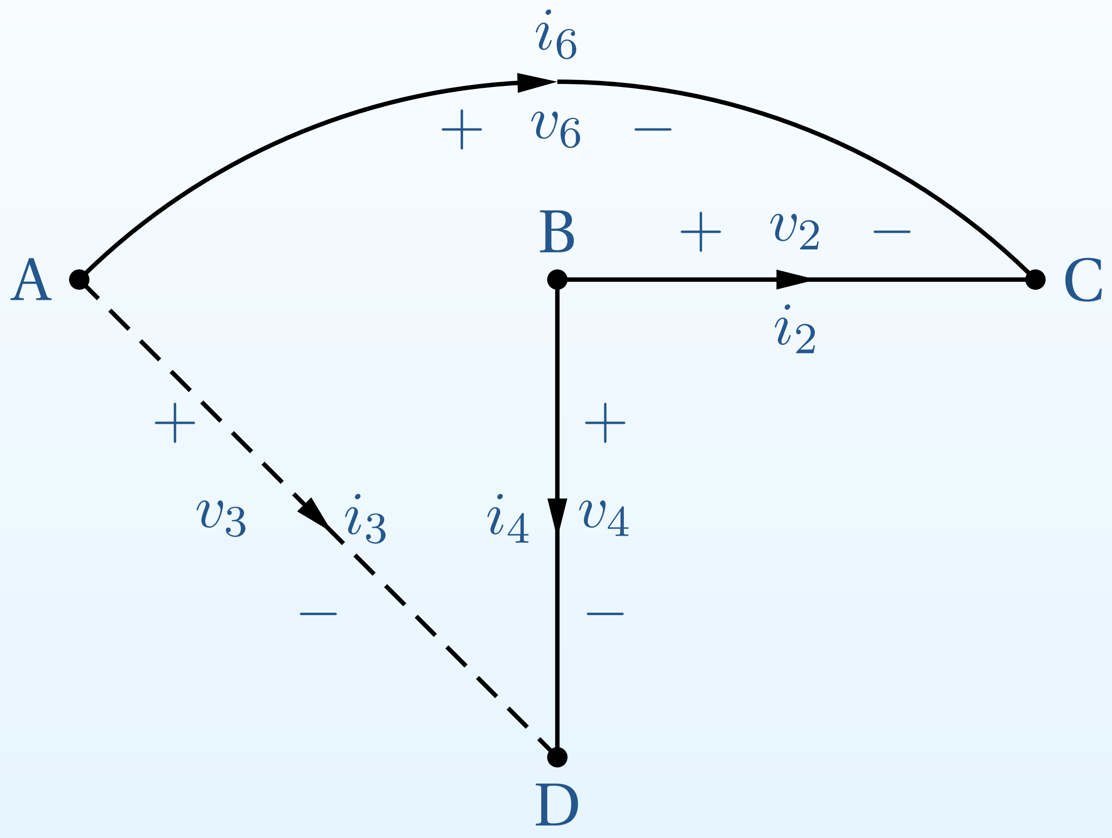
Maglia fondamentale associata all'arco di coalbero 1:



LKT alla maglia fondamentale: $v_1 + v_2 - v_6 = 0$.

Esempio di applicazione del MABM (7)

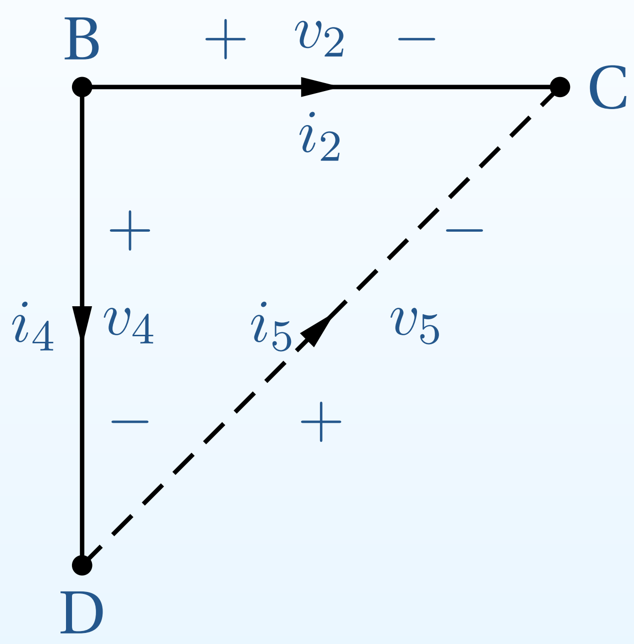
Maglia fondamentale associata all'arco di coalbero 3:



LKT alla maglia fondamentale: $v_3 - v_4 + v_2 - v_6 = 0.$

Esempio di applicazione del MABM (8)

Maglia fondamentale associata all'arco di coalbero 5:



LKT alla maglia fondamentale: $v_5 - v_2 + v_4 = 0$.

Esempio di applicazione del MABM (9)

Le tre equazioni LKT trovate in precedenza:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 - v_6 = 0, \\ v_3 - v_4 + v_2 - v_6 = 0, \\ v_5 - v_2 + v_4 = 0, \end{cases}$$

possono essere sintetizzate nell'equazione topologica "B":

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_\mathrm{c}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_\mathrm{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}.$$

Esempio di applicazione del MABM (10)

Da cui si trova che:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

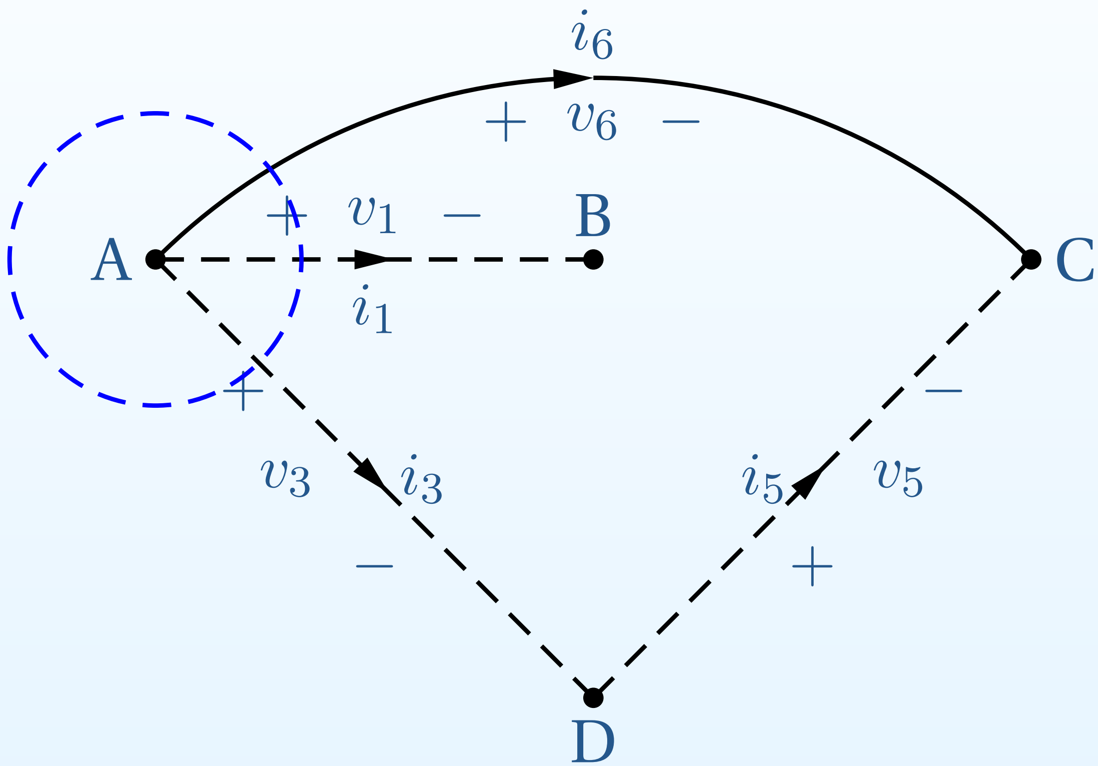
e, quindi, dalla terza equazione topologica ($\mathbf{A} = -\mathbf{B}^\top$):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per verifica, si può determinare direttamente la matrice $\mathbf{A}$.

Esempio di applicazione del MABM (11)

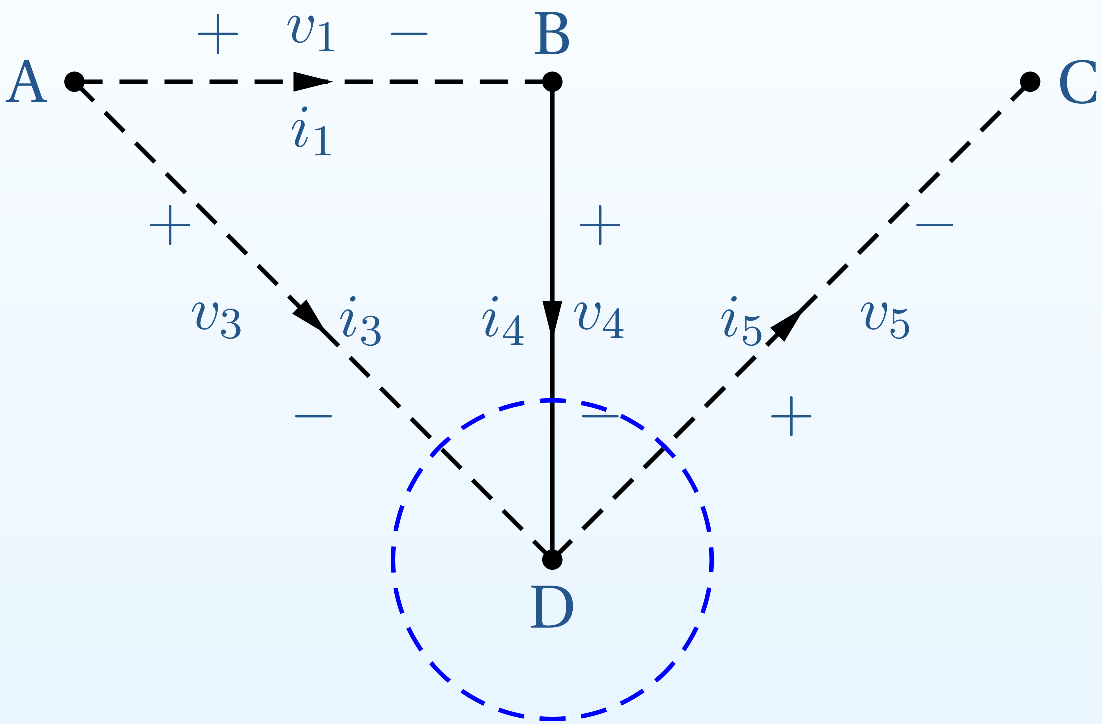
Taglio fondamentale associato all'arco di albero 6:



Equazione LKC al taglio fondamentale: $i_6 + i_1 + i_3 = 0$.

Esempio di applicazione del MABM (12)

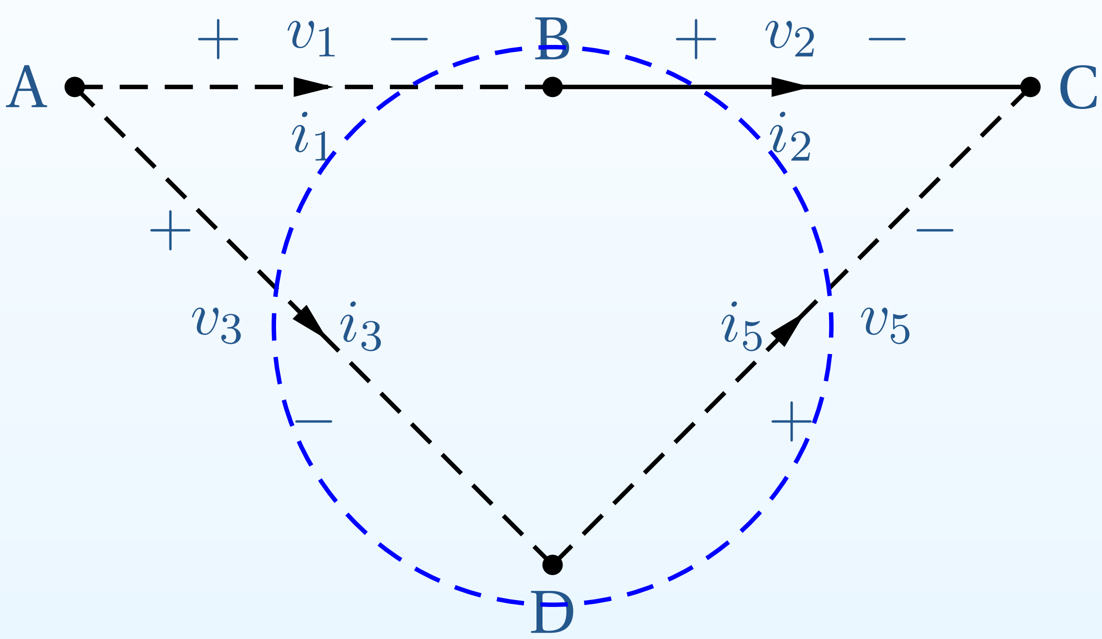
Taglio fondamentale associato all'arco di albero 4:



Equazione LKC al taglio fondamentale: $i_4 + i_3 - i_5 = 0$.

Esempio di applicazione del MABM (13)

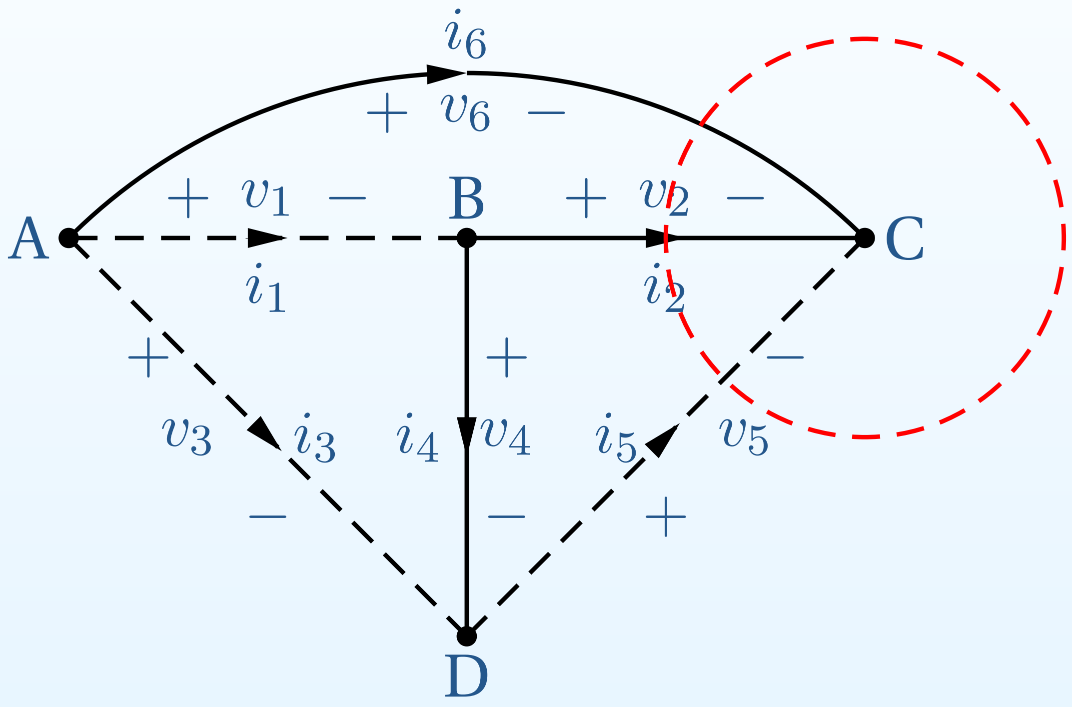
Taglio fondamentale associato all'arco di albero 2:



Equazione LKC al taglio fondamentale: $i_2 - i_1 - i_3 + i_5 = 0$.

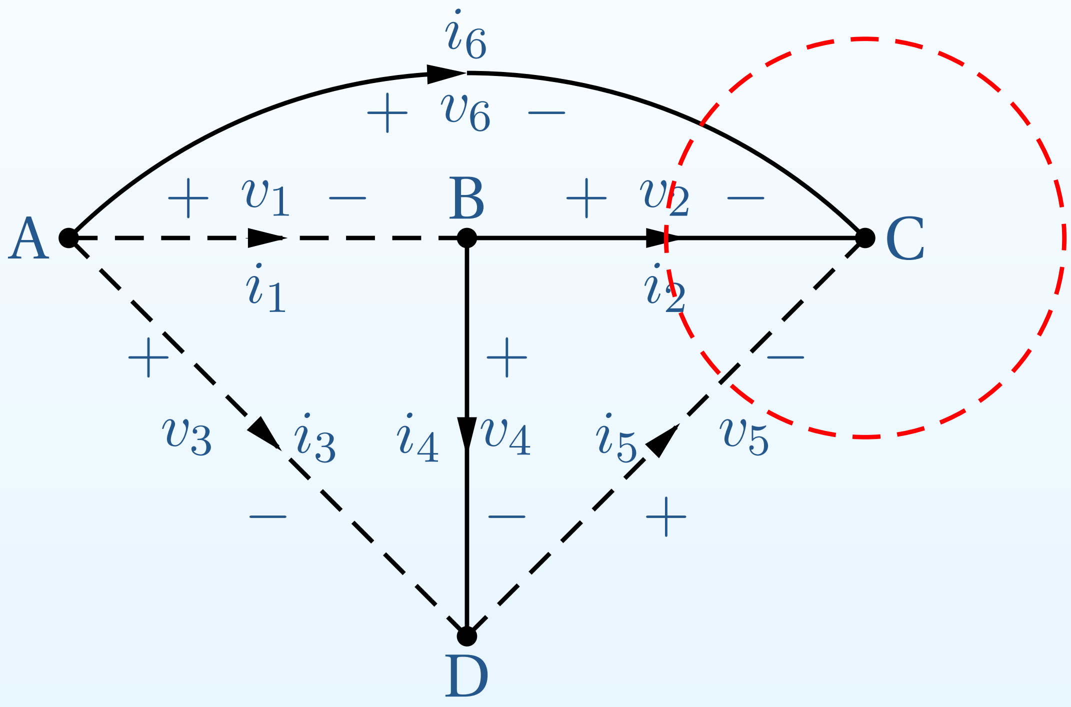
Esempio di applicazione del MABM (14)

- Il taglio evidenziato in rosso è un taglio fondamentale ?



Esempio di applicazione del MABM (14)

- Il taglio evidenziato in rosso è un taglio fondamentale ?



- Questo taglio **non è fondamentale** perché tocca sia l'arco di albero 2 che l'arco di albero 6.

Esempio di applicazione del MABM (15)

Le tre equazioni LKC trovate in precedenza:

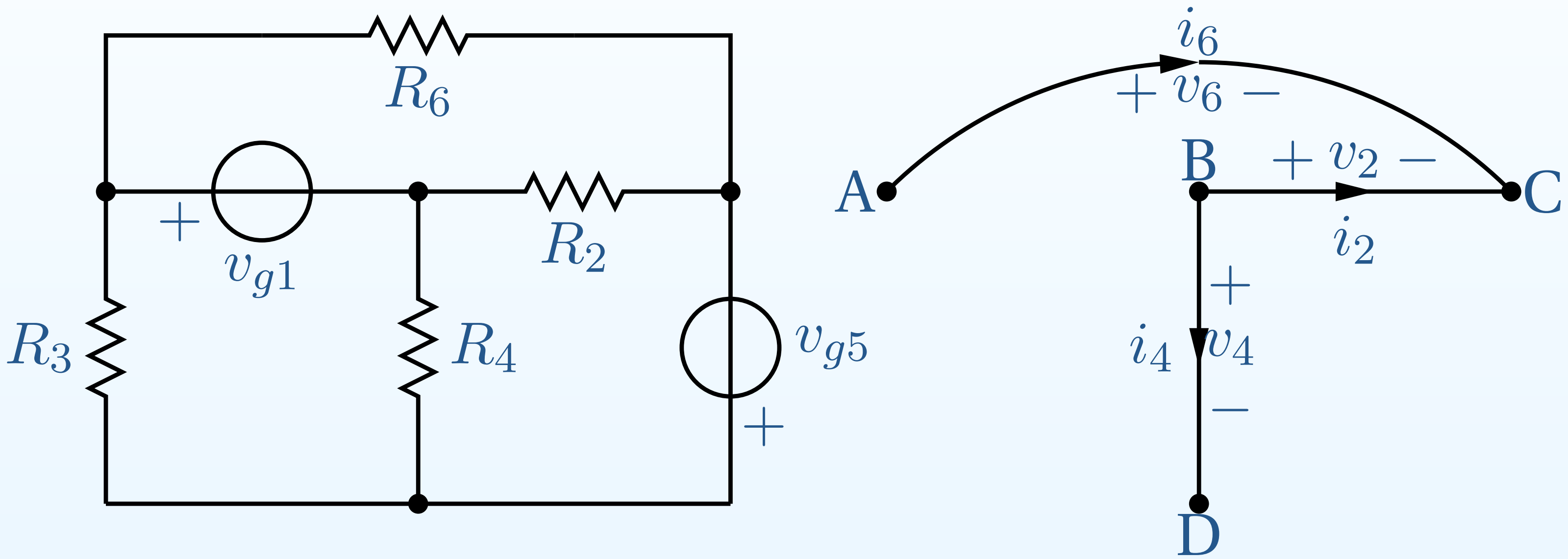
$$\begin{cases} i_2 - i_1 - i_3 + i_5 = 0, \\ i_4 + i_3 - i_5 = 0, \\ i_6 + i_1 + i_3 = 0, \end{cases}$$

possono essere sintetizzate nell'equazione topologica "A":

$$\underbrace{\begin{bmatrix} i_2 \\ i_4 \\ i_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_\mathrm{a}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \\ i_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_\mathrm{c}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}.$$

Esempio di applicazione del MABM (16)

Equazioni costitutive per gli archi dell'albero:



Relazioni costitutive: $v_6 = R_6 i_6$, $v_4 = R_4 i_4$, $v_2 = R_2 i_2$.

Esempio di applicazione del MABM (17)

Le tre relazioni costitutive trovate in precedenza:

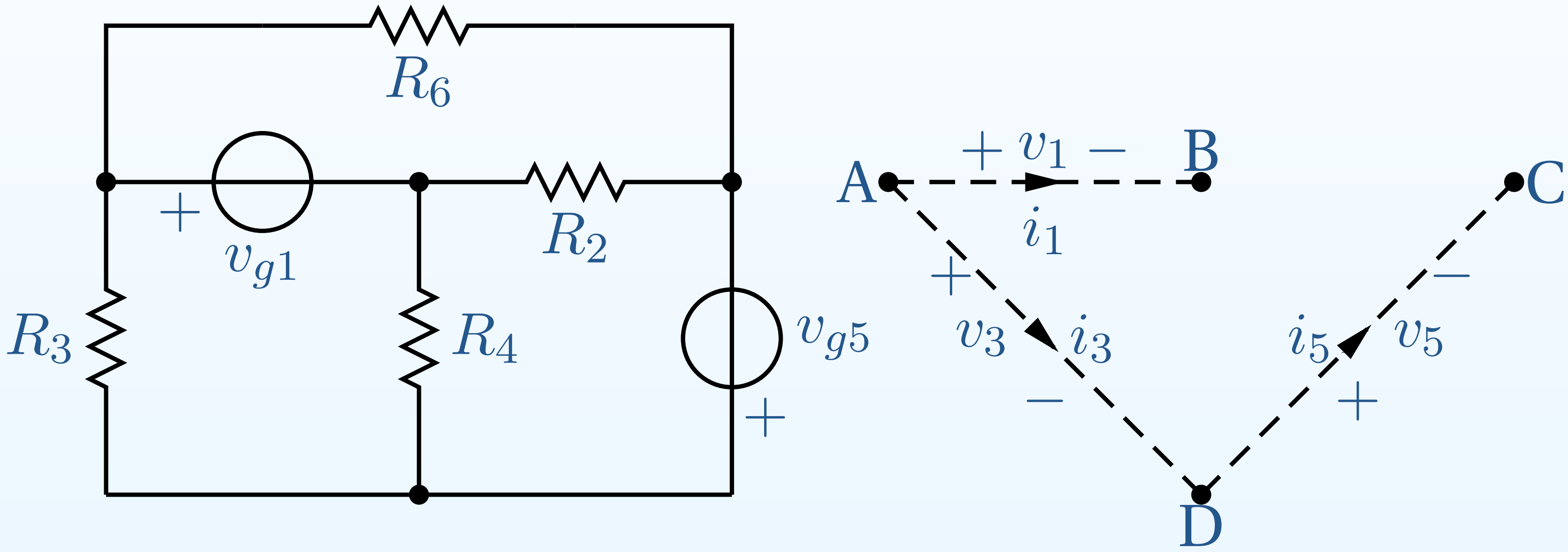
$$\begin{cases} v_2 = R_2 i_2, \\ v_4 = R_4 i_4, \\ v_6 = R_6 i_6, \end{cases}$$

possono essere sintetizzate nell'equazione:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_{\mathrm{a}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_4 & 0 \\ 0 & 0 & R_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_{\mathrm{a}}} \underbrace{\begin{bmatrix} i_2 \\ i_4 \\ i_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_{\mathrm{a}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_{\mathrm{g,a}}}.$$

Esempio di applicazione del MABM (18)

Equazioni costitutive per gli archi del coalbero:



Relazioni costitutive: $v_1 = v_{g1}$, $v_3 = R_3 i_3$, $v_5 = v_{g5}$.

Esempio di applicazione del MABM (19)

Le tre relazioni costitutive trovate in precedenza:

$$\begin{cases} v_1 = v_{g1}, \\ v_3 = R_3 i_3, \\ v_5 = v_{g5}, \end{cases}$$

possono essere sintetizzate nell'equazione:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_\mathrm{c}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_\mathrm{c}} \underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \\ i_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_\mathrm{c}} + \underbrace{\begin{bmatrix} v_{g1} \\ 0 \\ v_{g5} \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_{\mathrm{g,c}}}.$$

Esempio di applicazione del MABM (20)

Per cui si è trovato che:

$$\mathbf{R}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_4 & 0 \\ 0 & 0 & R_6 \end{bmatrix}, \ \mathbf{R}_{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}_{\mathrm{g,a}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{V}_{\mathrm{g,c}} = \begin{bmatrix} v_{g1} \\ 0 \\ v_{g5} \end{bmatrix}.$$

Esempio di applicazione del MABM (21)

Con le istanze trovate di $\mathbf{R}_{\mathrm{a}}$, $\mathbf{R}_{\mathrm{c}}$, $\mathbf{V}_{\mathrm{g,a}}$, $\mathbf{V}_{\mathrm{g,c}}$, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ è possibile determinare il sistema risolvente secondo il MABM.

Occorre ora calcolare:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{\mathrm{m}} = \mathbf{R}_{\mathrm{c}} - \mathbf{B}\mathbf{R}_{\mathrm{a}}\mathbf{A}, \\ \mathbf{V}_{\mathrm{g,m}} = -\mathbf{V}_{\mathrm{g,c}} - \mathbf{B}\mathbf{V}_{\mathrm{g,a}}. \end{cases}$$

Esempio di applicazione del MABM (22)

$$\mathbf{R}_{\mathrm{a}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_4 & 0 \\ 0 & 0 & R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -R_2 & -R_2 & R_2 \\ 0 & R_4 & -R_4 \\ R_6 & R_6 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}\mathbf{R}_{\mathrm{a}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R_2 & -R_2 & R_2 \\ 0 & R_4 & -R_4 \\ R_6 & R_6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -R_2 - R_6 & -R_2 - R_6 & R_2 \\ -R_2 - R_6 & -R_2 - R_4 - R_6 & R_2 + R_4 \\ R_2 & R_2 + R_4 & -R_2 - R_4 \end{bmatrix},$$

Esempio di applicazione del MABM (23)

$$\mathbf{R}_{\mathrm{m}} = \mathbf{R}_{\mathrm{c}} - \mathbf{B}\mathbf{R}_{\mathrm{a}}\mathbf{A} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -R_2 - R_6 & -R_2 - R_6 & R_2 \\ -R_2 - R_6 & -R_2 - R_4 - R_6 & R_2 + R_4 \\ R_2 & R_2 + R_4 & -R_2 - R_4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} R_2 + R_6 & R_2 + R_6 & -R_2 \\ R_2 + R_6 & R_2 + R_3 + R_4 + R_6 & -R_2 - R_4 \\ -R_2 & -R_2 - R_4 & R_2 + R_4 \end{bmatrix}$$

Esempio di applicazione del MABM (24)

$$\mathbf{B}\mathbf{V}_{\mathrm{g,a}} = 0,$$

$$\mathbf{V}_{\mathrm{g,m}} = -\mathbf{V}_{\mathrm{g,c}} - \mathbf{B}\mathbf{V}_{\mathrm{g,a}} = \begin{bmatrix} -v_{g1} \\ 0 \\ -v_{g5} \end{bmatrix}.$$

Quindi il sistema risolvente è:

$$\begin{bmatrix} R_2 + R_6 & R_2 + R_6 & -R_2 \\ R_2 + R_6 & R_2 + R_3 + R_4 + R_6 & -R_2 - R_4 \\ -R_2 & -R_2 - R_4 & R_2 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_{g1} \\ 0 \\ -v_{g5} \end{bmatrix}.$$

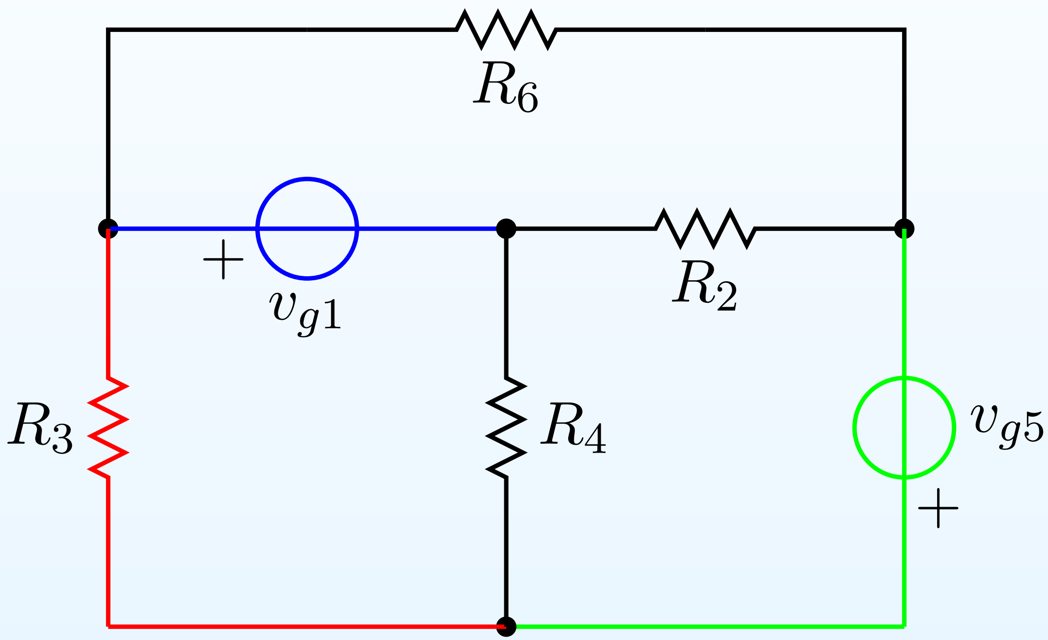
Metodo delle correnti fittizie di maglia

Il metodo delle c.f.m. si basa sulle seguenti idee:

- Si immagina che in ogni maglia fondamentale scorra una corrente fittizia indipendente.
- Poiché ogni arco del coalbero appartiene ad una sola maglia fondamentale, la corrente fittizia di maglia associata ad una maglia fondamentale coincide con la corrente dell'arco di coalbero a cui tale maglia fondamentale è associata.
- La corrente di ogni arco di albero può essere espressa come somma algebrica delle correnti fittizie di maglia associate alle maglie fondamentali di cui tale arco fa parte (segue dall'equazione topologica "A").

Esempio: Metodo delle correnti fittizie di maglia

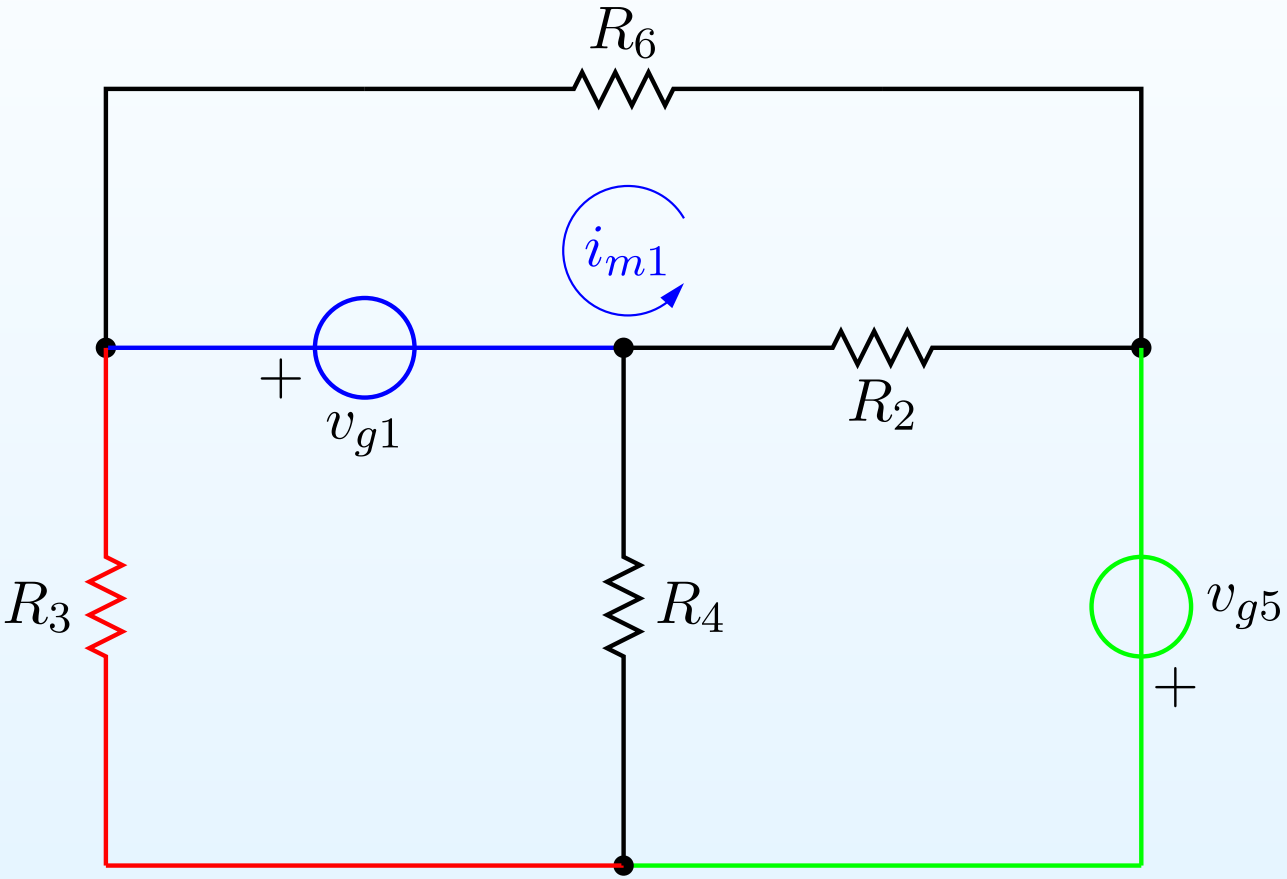
Consideriamo il circuito e l'albero/coalbero sovrapposti:



I rami colorati corrispondono agli archi di coalbero.

Esempio: Metodo delle correnti fittizie di maglia (2)

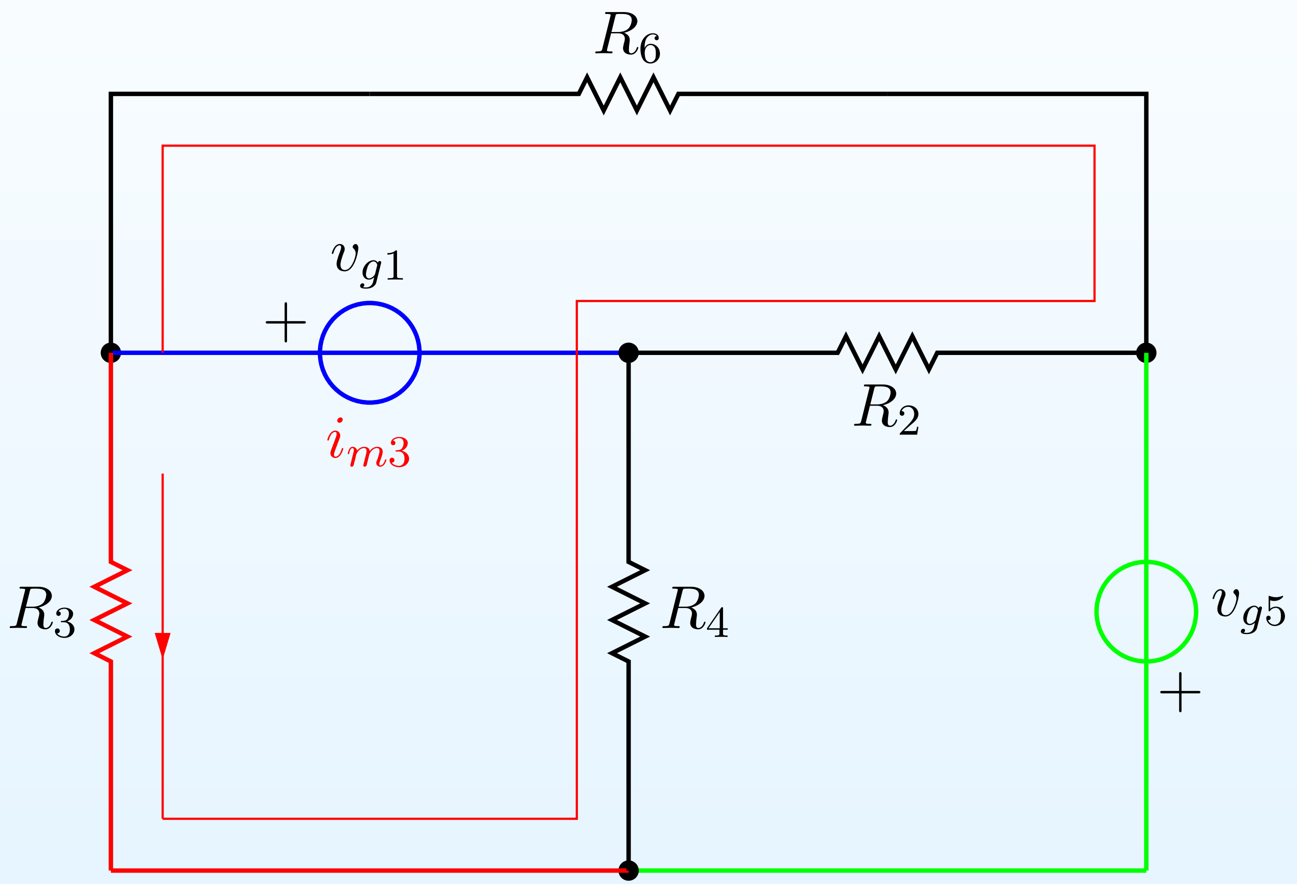
Corrente fittizia di maglia associata all'arco del coalbero 1:



NB: La MF$_1$ è formata da v_{g1}, R_2, R_6.

Esempio: Metodo delle correnti fittizie di maglia (3)

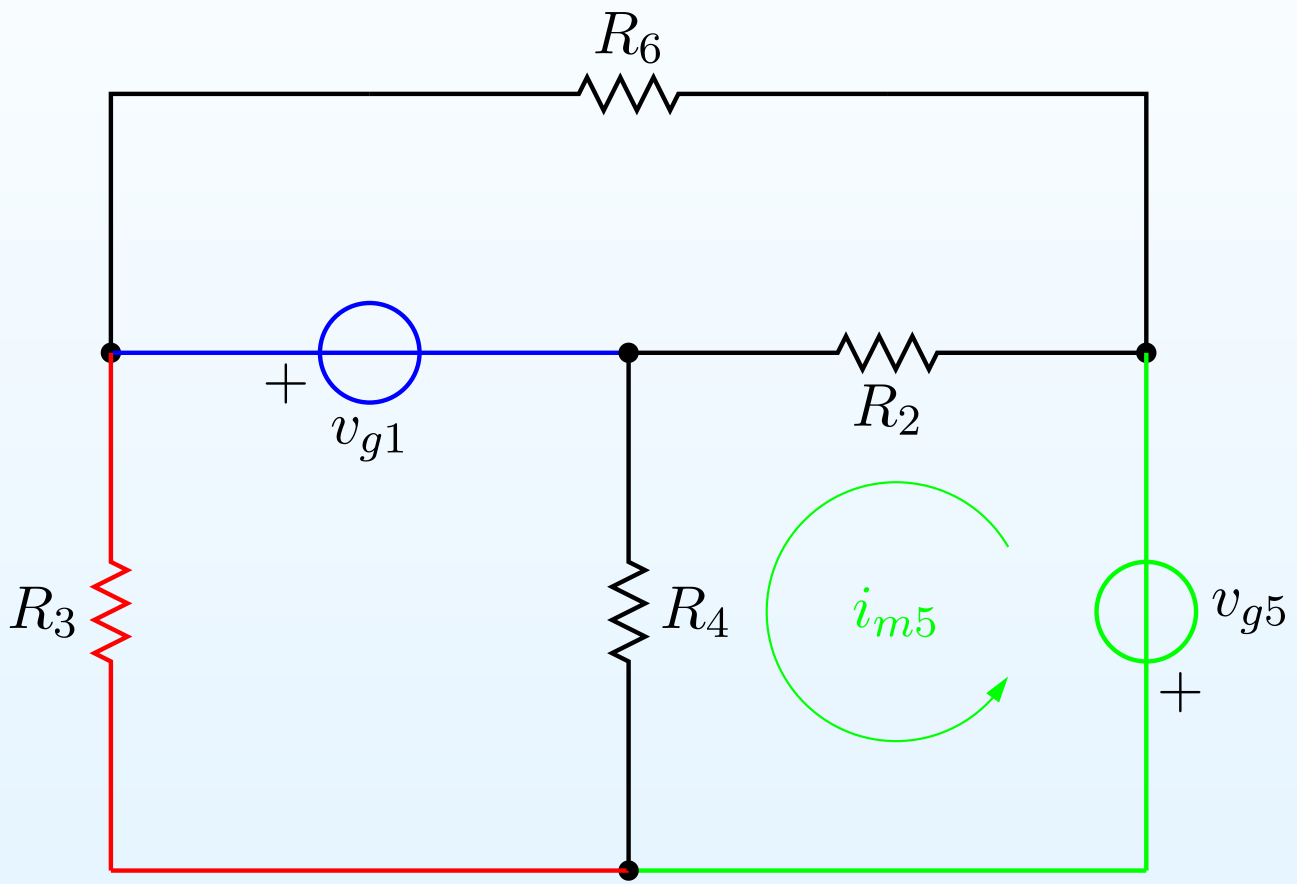
Corrente fittizia di maglia associata all'arco del coalbero 3:



NB: La MF_3 è formata da R_3, R_4, R_2, R_6.

Esempio: Metodo delle correnti fittizie di maglia (4)

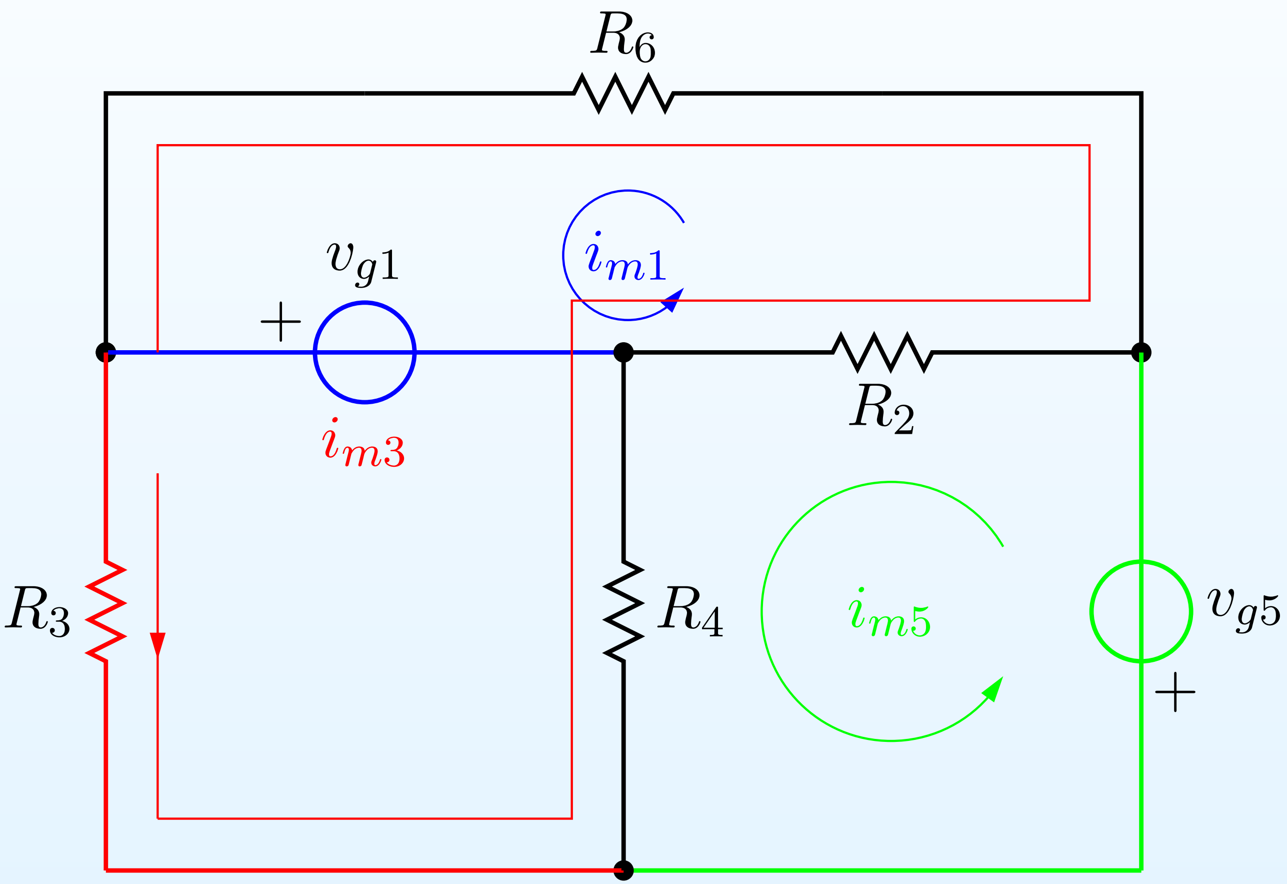
Corrente fittizia di maglia associata all'arco del coalbero 5:



NB: La MF_5 è formata da v_{g5}, R_2, R_4.

Esempio: Metodo delle correnti fittizie di maglia (5)

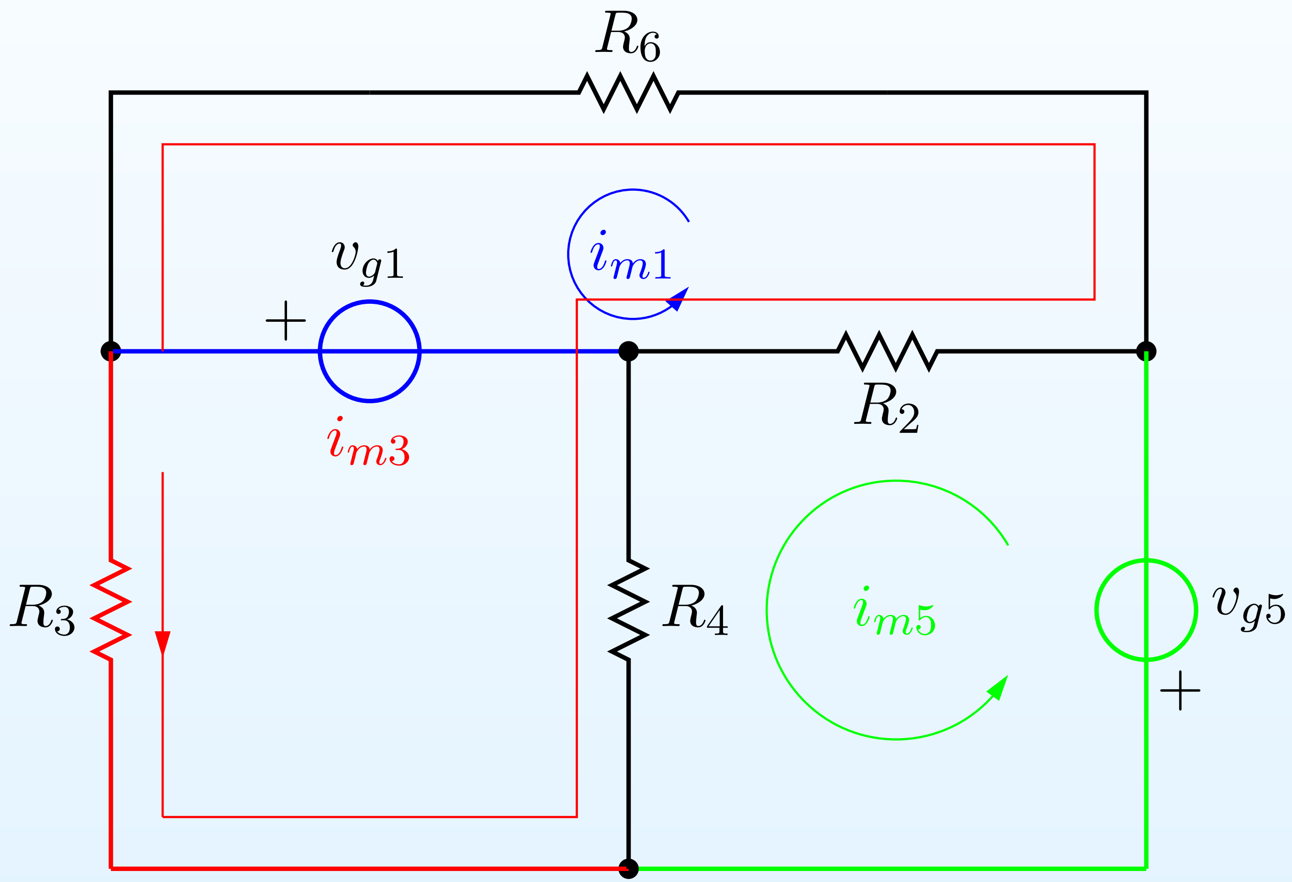
LKT-MF$_1$) $R_6(i_{m1} + i_{m3}) + v_{g1} + R_2(i_{m1} + i_{m3} - i_{m5}) = 0$



Esempio: Metodo delle correnti fittizie di maglia (6)

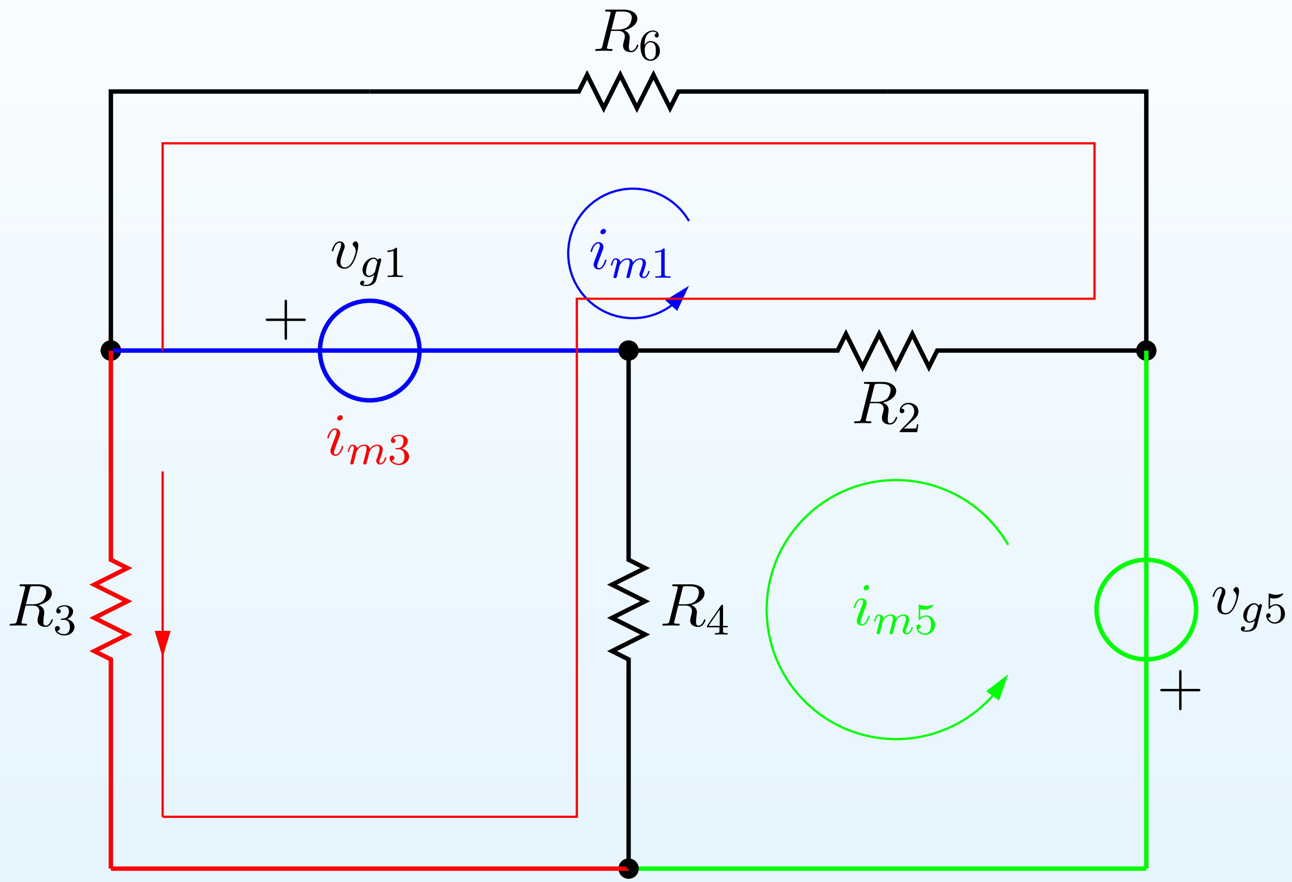
LKT-MF$_3$)

$$R_3 i_{m3} + R_4(i_{m3} - i_{m5}) + R_2(i_{m3} + i_{m1} - i_{m5}) + R_6(i_{m3} + i_{m1}) = 0$$



Esempio: Metodo delle correnti fittizie di maglia (7)

LKT-MF$_5$) $v_{g5} + R_2(i_{m5} - i_{m3} - i_{m1}) + R_4(i_{m5} - i_{m3}) = 0$



Esempio: Metodo delle correnti fittizie di maglia (8)

Le tre equazioni alle maglie trovate:

$$\begin{cases} R_6(i_{m1}+i_{m3})+v_{g1}+R_2(i_{m1}+i_{m3}-i_{m5})=0, \\ R_3 i_{m3}+R_4(i_{m3}-i_{m5})+R_2(i_{m3}+i_{m1}-i_{m5})+R_6(i_{m3}+i_{m1})=0, \\ v_{g5}+R_2(i_{m5}-i_{m3}-i_{m1})+R_4(i_{m5}-i_{m3})=0, \end{cases}$$

danno luogo al sistema risolvente ridotto:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_2+R_6 & R_2+R_6 & -R_2 \\ R_2+R_6 & R_2+R_3+R_4+R_6 & -R_2-R_4 \\ -R_2 & -R_2-R_4 & R_2+R_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_{\mathrm{m}}} \underbrace{\begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m3} \\ i_{m5} \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_{\mathrm{c}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -v_{g1} \\ 0 \\ -v_{g5} \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_{\mathrm{g,m}}}.$$

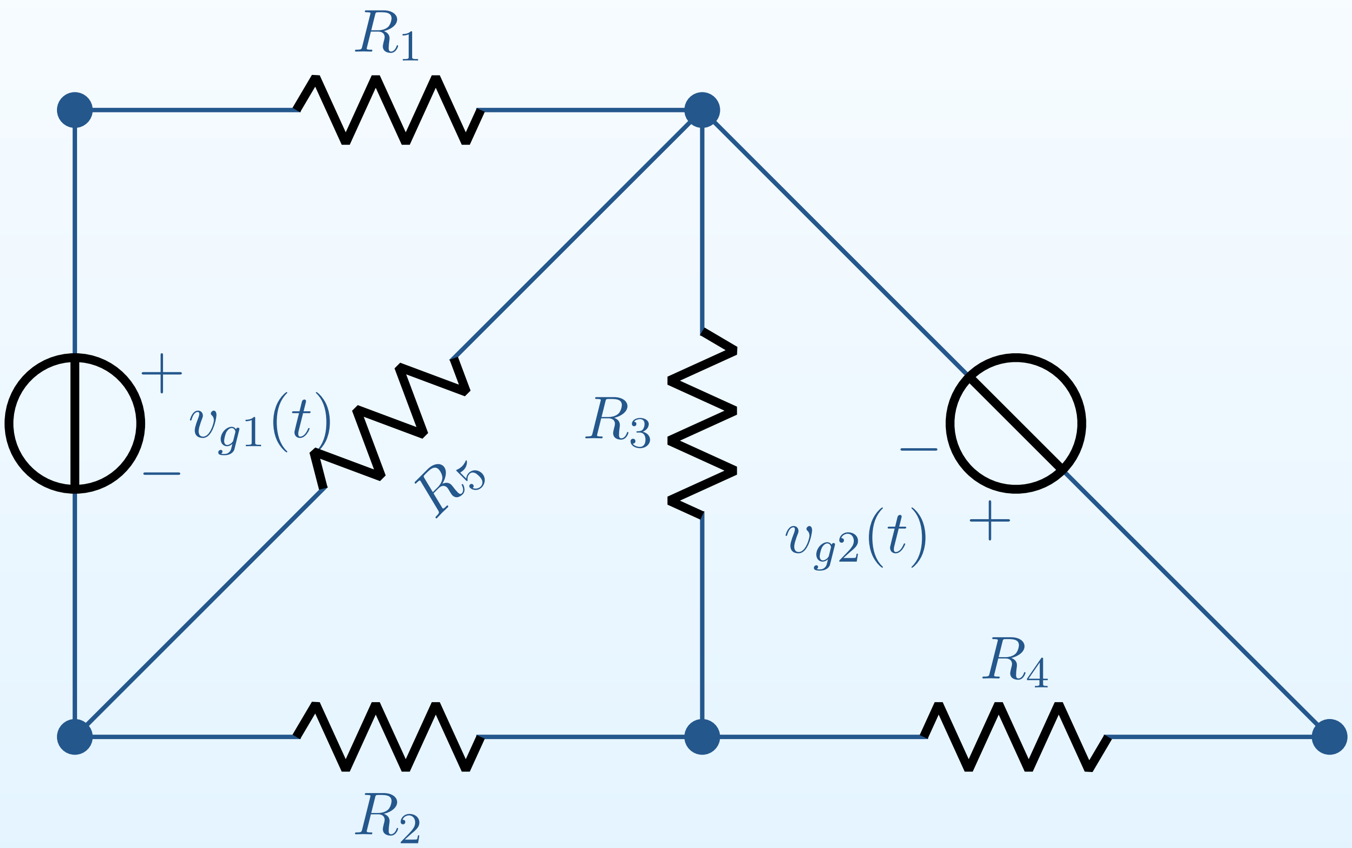
Esempio: Metodo delle correnti fittizie di maglia (9)

Per concludere, si osservi che:

- Le correnti fittizie di maglia coincidono con le correnti degli archi di coalbero ($i_{m1} \equiv i_1$, $i_{m3} \equiv i_3$, $i_{m5} \equiv i_5$).
- La matrice dei coefficienti del sistema risolvente $\mathbf{R}_{\mathrm{m}}$ è simmetrica e omogenea dimensionalmente.
- Il vettore dei termini noti $\mathbf{V}_{\mathrm{g,m}}$ è omogeneo dimensionalmente.

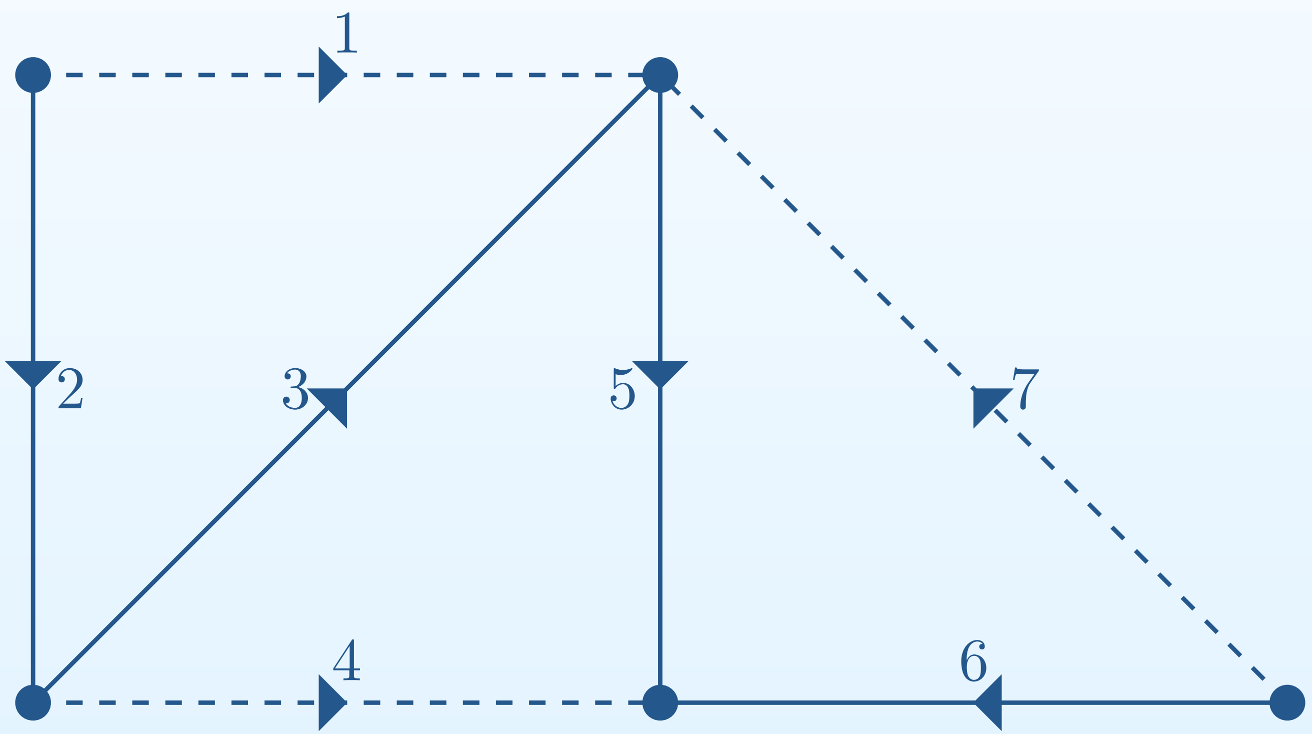
Esercizio: MABM e metodo CFM

Sia dato il seguente circuito, in cui sono da considerarsi noti R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, $v_{g1}(t)$ e $v_{g2}(t)$.



Esercizio: MABM e metodo CFM

Considerando il seguente grafo orientato e la partizione indicata (si veda anche parte finale delle slides sulla topologia circuitale), scrivere il sistema risolvente per il circuito, sia utilizzando il MABM che il metodo delle CFM.



Esercizio: MABM e metodo CFM

Risposta: Il sistema risolvente ridotto è:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_5 & R_5 & 0 \\ R_5 & R_2 + R_3 + R_5 & -R_3 \\ 0 & -R_3 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_4 \\ i_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{g1} \\ 0 \\ -v_{g2} \end{bmatrix}.$$

Risoluzione del sistema risolvente

Il sistema risolvente ridotto $\mathbf{R}_{\mathrm{m}}\mathbf{I}_{\mathrm{c}} = \mathbf{V}_{\mathrm{g,m}}$ cresce rapidamente di dimensione al crescere della dimensione del grafo, conviene quindi risolverlo utilizzando uno strumento di calcolo automatico. In questo corso introdurremo e utilizzeremo

MATLAB (MATrix LABoratory)