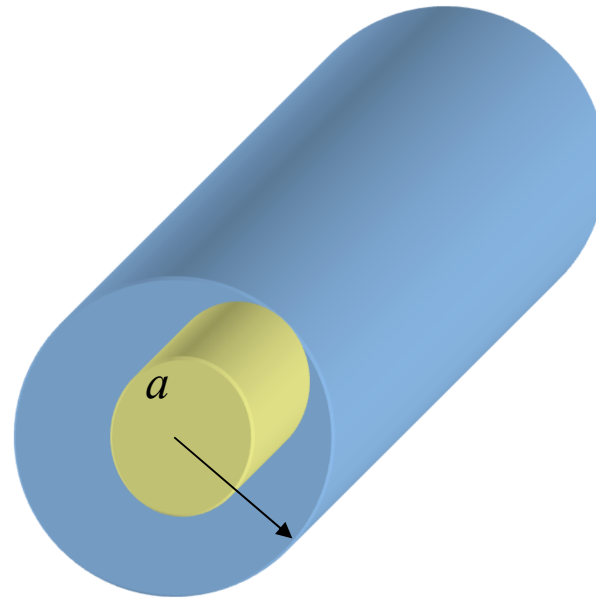
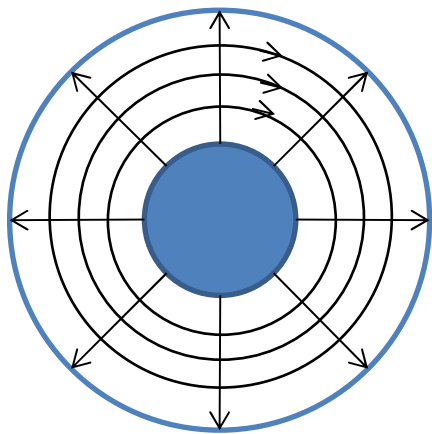


Linee di trasmissione

Supponiamo di avere un cavo coassiale all'interno del quale abbiamo un campo elettromagnetico tempo variante.

Dalle condizioni al contorno sappiamo che il campo elettrico può solamente essere ortogonale al conduttore, possiamo dunque ipotizzare che il campo avrà una direzione radiale come nel caso statico.

Essendo un campo tempo-variante ci sarà anche un campo magnetico ad esso ortogonale, dunque le linee di campo magnetico saranno concentriche con il coassiale, così come avviene nel caso statico



Proviamo a trovare una soluzione al problema elettromagnetico, ipotizzando che la soluzione sia costituita da campi che risultano trasversali all'asse del coassiale

Proprietà dei modi TEM nelle linee di trasmissione 1/4

Partiamo dalle equazioni di Maxwell ed applichiamo le ipotesi fatte (assenza di componenti z dei campi) dividendo il campo e.m. nelle componenti trasversali e longitudinali.

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \times (\vec{E}_{tr} + E_z \hat{\mathbf{z}}) = \left(\nabla_{tr} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \times (\vec{E}_{tr} + E_z \hat{\mathbf{z}}) \\ &= \left(\nabla_{tr} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \times \vec{E}_{tr} = \nabla_{tr} \times \vec{E}_{tr} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \times \vec{E}_{tr} = -\mu \frac{\partial (\vec{H}_{tr} + H_z \hat{\mathbf{z}})}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{H}_{tr}}{\partial t}\end{aligned}$$

Si osservi che il termine $\nabla_{tr} \times \vec{E}_{tr}$ produce un vettore diretto lungo z e che pertanto sarà nullo, mentre il termine $\frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \times \vec{E}_{tr}$ genera un campo vettore nel piano trasversale. Pertanto:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \vec{E}_{tr}(x, y, z, t)}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}_{tr}(x, y, z, t)}{\partial t} \\ \nabla_{tr} \times \vec{E}_{tr}(x, y, z, t) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{tr}(x, y, z, t) = -\nabla_{tr} \Phi(x, y, z, t)\end{aligned}$$

Proprietà dei modi TEM nelle linee di trasmissione 2/4

Quindi, il campo elettrico trasversale risulta essere conservativo nel piano trasversale e perciò può essere espresso come il gradiente di un potenziale scalare funzione delle coordinate trasversali:

$$\nabla_{tr} \times \vec{E}_{tr}(x, y, z, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{tr}(x, y, z, t) = -\nabla_{tr} \Phi(x, y, z, t)$$

Inoltre, il potenziale ed il campo elettrico trasversale devono soddisfare le stesse condizioni al contorno valide anche nel caso statico.

Quindi si può concludere che:

- il campo elettrico trasversale è un campo conservativo;
- nel piano trasversale è possibile definire un potenziale e, quindi, una differenza di potenziale tra due (o più) conduttori, esattamente come nel caso statico, che, però, sarà funzione soltanto di z e t :

$$V(z, t) = -\int_1^2 \vec{E}_{tr}(x, y, z, t) \cdot d\vec{l}$$

- il campo elettrico dinamico nel piano trasversale è uguale a quello valutato nel caso statico;

Proprietà dei modi TEM nelle linee di trasmissione 3/4

Partiamo dall'altra equazione di Maxwell ai rotori ed applichiamo le ipotesi fatte dividendo il campo e.m. nelle componenti trasversali e longitudinali.

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \left(\nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \times (\vec{H}_{tr} + H_z \hat{\mathbf{z}}) \\ &= \left(\nabla_{tr} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \times \vec{H}_{tr} = \nabla_{tr} \times \vec{H}_{tr} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \times \vec{H}_{tr} = \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial (\vec{E}_{tr} + E_z \hat{\mathbf{z}})}{\partial t} = \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}_{tr}}{\partial t}\end{aligned}$$

Si osservi che il termine $\nabla_{tr} \times \vec{H}_{tr}$ produce un vettore diretto lungo z e che pertanto sarà pari alla densità di corrente diretta lungo z , mentre il termine $\frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \times \vec{H}_{tr}$ genera un campo vettore nel piano trasversale. Quindi

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \vec{H}_{tr}(x, y, z, t)}{\partial z} &= \varepsilon \frac{\partial \vec{E}_{tr}(x, y, z, t)}{\partial t} \\ \nabla_{tr} \times \vec{H}_{tr}(x, y, z, t) &= \vec{J}(x, y, z, t)\end{aligned}$$

Proprietà dei modi TEM nelle linee di trasmissione 4/4

Se si effettua il flusso attraverso una superficie trasversale che contenga un conduttore si ottiene

$$\int_S \nabla_{tr} \times \vec{H}_{tr}(x, y, z, t) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{H}_{tr}(x, y, z, t) \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}(x, y, z, t) \cdot d\vec{S} = I(z, t)$$

e quindi è possibile definire nel caso dinamico, sempre nel piano trasversale, una corrente come nel caso statico, legata alla sola componente trasversale del campo magnetico, che, però, sarà funzione di z e t .

Dopo aver visto che la dipendenza dalle coordinate trasversali delle componenti trasversali è la stessa del caso statico ci dobbiamo chiedere se e come sarà la dipendenza dalla coordinata z .

Propagazione dei campi e.m. in una linea di trasmissione

Abbiamo visto che i campi e.m. soddisfano:

$$\hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \vec{H}_{tr}(x, y, z, t)}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}_{tr}(x, y, z, t)}{\partial t} \quad 1)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \vec{E}_{tr}(x, y, z, t)}{\partial z} = -\mu \frac{\partial \vec{H}_{tr}(x, y, z, t)}{\partial t} \quad 2)$$

Inoltre, combinando le due equazioni sopra, cioè derivando la prima rispetto a t e la seconda rispetto a z si ha:

$$\hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial^2 [\vec{H}_{tr}(x, y, z, t)]}{\partial z \partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}_{tr}(x, y, z, t)}{\partial t^2} \quad 1)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial^2 [\vec{E}_{tr}(x, y, z, t)]}{\partial z^2} = -\mu \frac{\partial^2 \vec{H}_{tr}(x, y, z, t)}{\partial z \partial t} \quad 2)$$

Propagazione dei campi e.m. in una linea di trasmissione

Ricordando che

$$\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} \times \vec{E}_{tr}(x, y, z, t) = -\vec{E}_{tr}(x, y, z, t)$$

e sostituendo la seconda nella prima, si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_{tr}}{\partial z^2} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}_{tr}}{\partial t^2} = 0$$

Quindi, risulta che i campi e.m. sono delle onde che si propagano nella direzione di propagazione z .

Equazione di Helmholtz: caso particolare

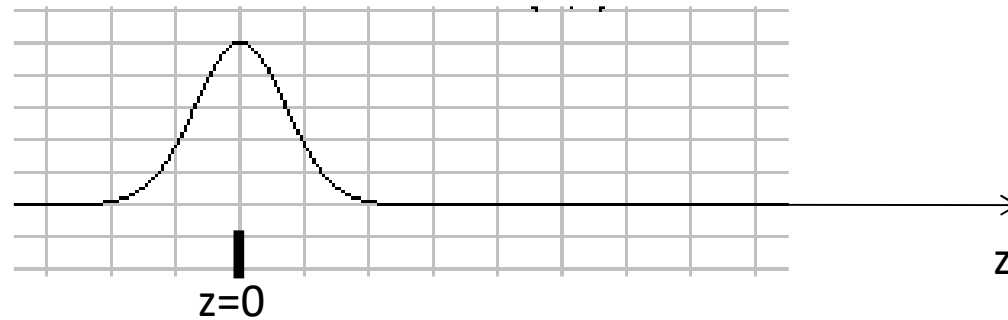
La soluzione dell'equazione differenziale del secondo ordine ottenuta risulta essere una combinazione lineare delle due generiche funzioni del tipo:

$$E_{tr} = Af^+ \left(t - \frac{z}{v} \right) + Bf^- \left(t + \frac{z}{v} \right) \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

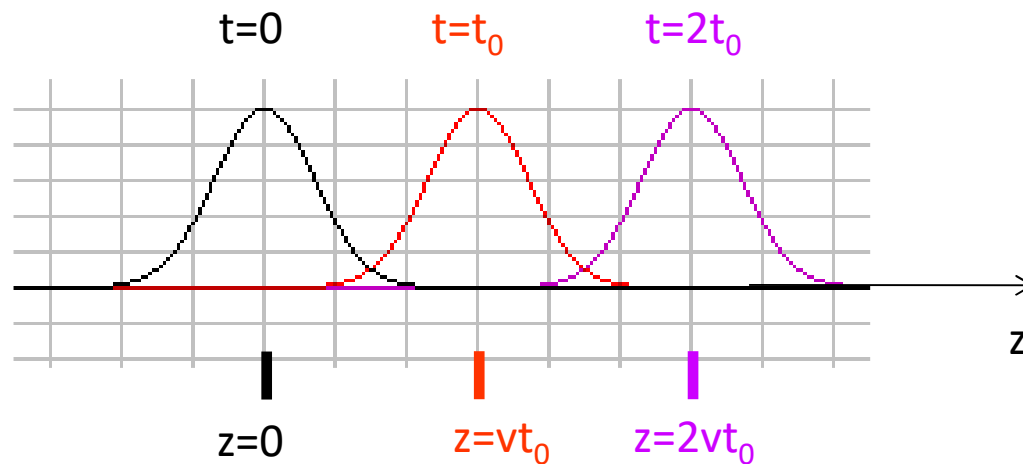
Che cosa rappresentano queste funzioni?

Onda viaggiante

Considerate $f(z) =$



Come è fatta la funzione $g(z,t) = f(t-z/v)$?



$f(t-z/v)$ è un'onda che viaggia nella direzione delle z positive!!

Onda viaggiante

□ La funzione $E_{tr} = f\left(t + \frac{z}{v}\right)$ rappresenta invece
un'onda che viaggia nella direzione delle z negative

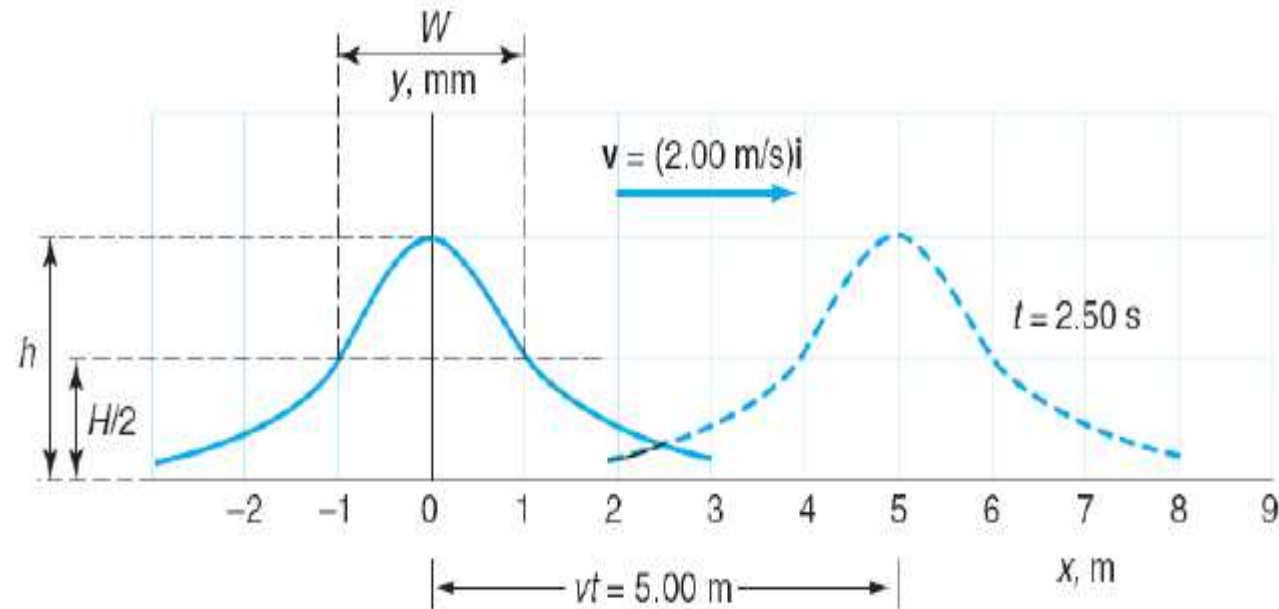
□ A che velocità si muove l'onda?
Dopo un intervallo di tempo Δt , si sposta di un intervallo Δz tale che

$$\frac{\Delta z}{c} = \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta z}{\Delta t} = v$$

□ Cioè: si sposta alla velocità v .

La soluzione descrive un campo che si propaga alla velocità v in direzione di z

Onda viaggiante



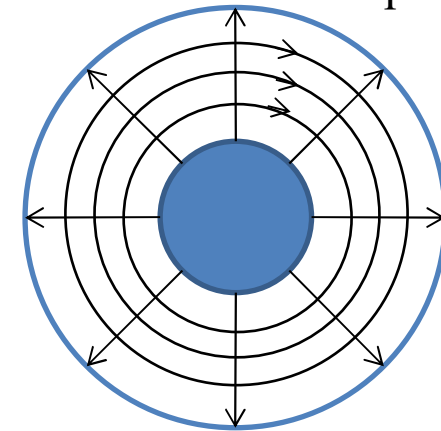
Propagazione senza attenuazione

Campo elettrico dentro il cavo coassiale

Da quanto detto in precedenza, il campo e.m. presente in un cavo coassiale è ottenibile a partire dalle soluzioni ottenute nel caso statico e tenendo conto dell'equazione d'onda sulle componenti trasversali per introdurre la dipendenza da z .

$$\vec{E} = \frac{A}{r} f\left(t - \frac{z}{v}\right) \hat{r}$$

Soddisfa le condizioni al contorno, considerando il coassiale costituito da un conduttore ideale



Verifichiamo che soddisfi l'equazione d'onda in coordinate cilindriche.

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \longrightarrow \quad \nabla^2 E_r - \frac{E_r}{r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_r}{\partial r} \right) - \frac{E_r}{r^2} + \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2}$$

$$\cancel{\frac{A}{r^3} f\left(t - \frac{z}{v}\right)} - \cancel{\frac{A}{r^3} f\left(t - \frac{z}{v}\right)} + \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{v^2} \frac{A}{r} f''\left(t - \frac{z}{v}\right) = \frac{1}{v^2} \frac{A}{r} f''\left(t - \frac{z}{v}\right)$$

cvd

Campo magnetico dentro il cavo coassiale

Utilizzando le equazioni di Maxwell è possibile calcolare anche il campo magnetico

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \vec{H} = \frac{1}{\eta} \frac{A}{r} f\left(t - \frac{z}{v}\right) \hat{\phi}$$

In termini vettoriali possiamo dunque scrivere che dentro al coassiale

$$\vec{H} = \hat{z} \times \frac{\vec{E}}{\eta}$$

Questa relazione vale solamente se l'onda è di tipo TEM. In questo caso il campo è confinato dentro al coassiale

Tensione lungo il coassiale

Se c'è un campo elettrico trasverso abbiamo visto che possiamo definire in modo univoco una tensione sul piano ortogonale alla direzione di propagazione

$$\begin{aligned}\Delta V(z, t) &= V_a(z, t) - V_b(z, t) = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\hat{r} = -\int_b^a \frac{A}{r} f\left(t - \frac{z}{v}\right) \cdot d\hat{r} = \\ &= A \ln\left(\frac{b}{a}\right) f\left(t - \frac{z}{v}\right)\end{aligned}$$

Anche la tensione tra il conduttore interno e quello esterno si comporta come un'onda che si propaga

Possiamo calcolare la costante A in funzione della tensione in $z=0$ e $t=0$

$$V(0) = A \ln\left(\frac{b}{a}\right) f(0) \quad \longrightarrow \quad A = \frac{V(0)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right) f(0)}$$

Corrente lungo il coassiale

Se il campo elettrico è solamente trasverso alla direzione di propagazione possiamo scrivere la legge di Ampere annullando il termine dovuto alla corrente di spostamento

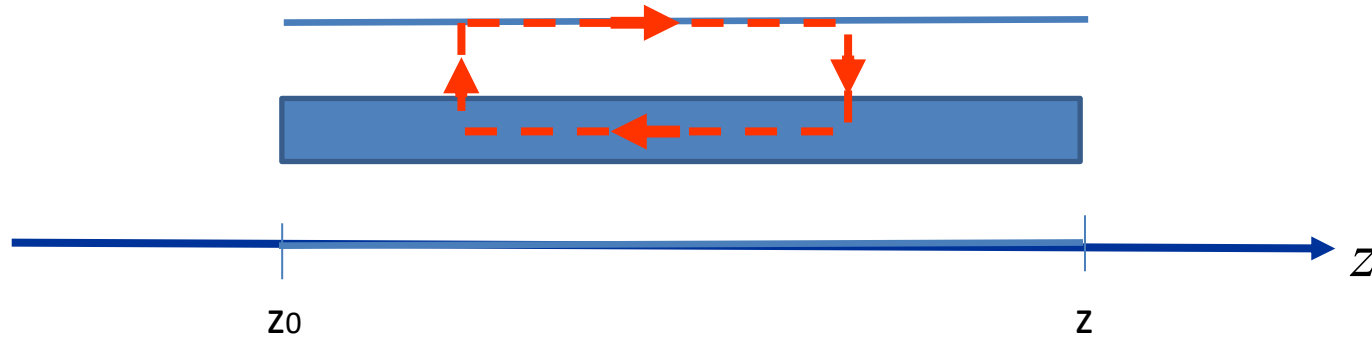
$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad \text{Dove } c \text{ è una circonferenza concentrica al conduttore interno}$$

$$\oint_C \frac{1}{\eta} \frac{A}{r} f\left(t - \frac{z}{v}\right) \hat{\phi} \cdot r d\phi \hat{\phi} = \frac{1}{\eta} A f\left(t - \frac{z}{v}\right) 2\pi = I$$

$$I(z, t) = \frac{1}{\eta} \frac{2\pi V(0)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right) f(0)} f\left(t - \frac{z}{v}\right) \quad \frac{V(z, t)}{I(z, t)} = \frac{\eta \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi}$$

Anche la corrente prodotta dal campo magnetico si comporta come un'onda che si propaga

Equazioni che regolano tensione e corrente



- Circuitazione lungo il percorso tratteggiato:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = v(z) - v(z_0) = -\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Flusso di B concatenato con il rettangolo:

- Dividiamo per Δz entrambi i membri, e calcoliamo il limite del rapporto incrementale per Δz che tende a zero

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}$$

Flusso di B PER UNITA' DI LUNGHEZZA concatenato con il rettangolo:

Equazioni che regolano tensione e corrente

- Ma ricordiamo la definizione di induttanza

$$\psi = Li$$

- quindi

$$\bar{\psi} = \bar{L}i \longrightarrow \text{induttanza PER UNITA' DI LUNGHEZZA}$$

- Allora l'equazione per v diventa

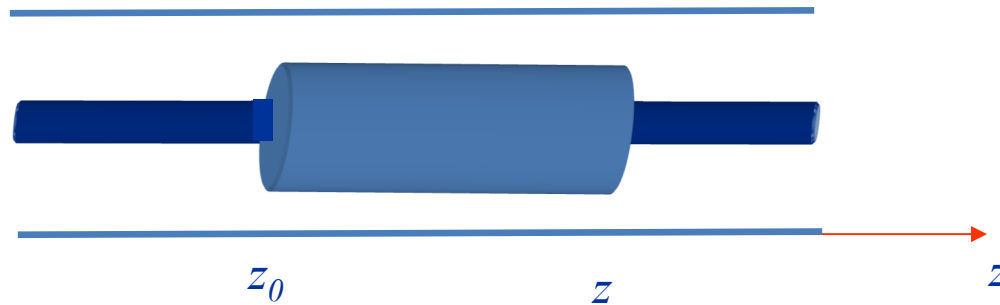
$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\bar{L} \frac{\partial i}{\partial t}$$

Equazioni che regolano tensione e corrente

Dalle condizioni al contorno sappiamo anche che sui due conduttori scorre una corrente, legata alla presenza del campo magnetico

Proviamo a vedere come si comporta la corrente, usando la condizione di continuità della carica in un tubo concentrico al conduttore centrale.

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} ds = -\frac{\partial q}{\partial t}$$



Equazioni che regolano tensione e corrente

- Il flusso della densità di corrente è non nullo solo sulle basi, e pari alle correnti quindi

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} ds = i(z) - i(z_0) = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

- D'altra parte il teorema di Gauss:


Flusso di D  $\phi_D = q$

- Quindi

$$i(z) - i(z_0) = -\frac{\partial \phi_D}{\partial t}$$

- Di nuovo: Dividiamo per Δz entrambi i membri, e calcoliamo il limite del rapporto incrementale per Δz che tende a zero

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{\phi}_D}{\partial t}$$

 Flusso di D per unità di lunghezza

Equazioni del telegrafista

□ Ma avevamo definito la capacità come

$$q = \phi_D = Cv$$

□ quindi

$$\bar{\phi}_D = \bar{C}v$$

□ Allora l'equazione per i diventa

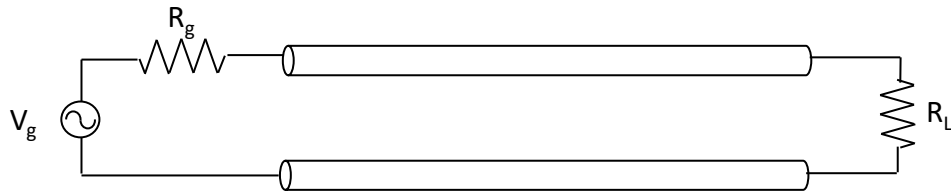
$$\frac{\partial i}{\partial z} = -\bar{C} \frac{\partial v}{\partial t}$$

□ Riassumendo: Le due equazioni che descrivono l'andamento di i e v lungo una linea sono quindi

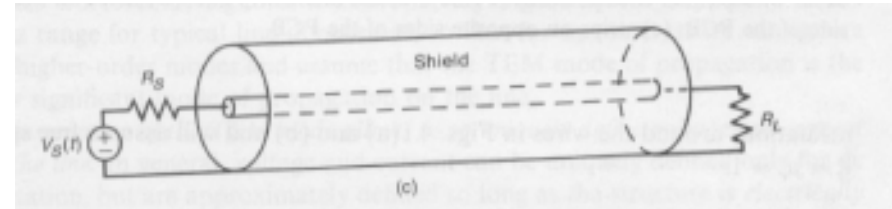
$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial z} = -\bar{L} \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial z} = -\bar{C} \frac{\partial v}{\partial t} \end{cases}$$

□ **Equazioni dei telegrafisti**

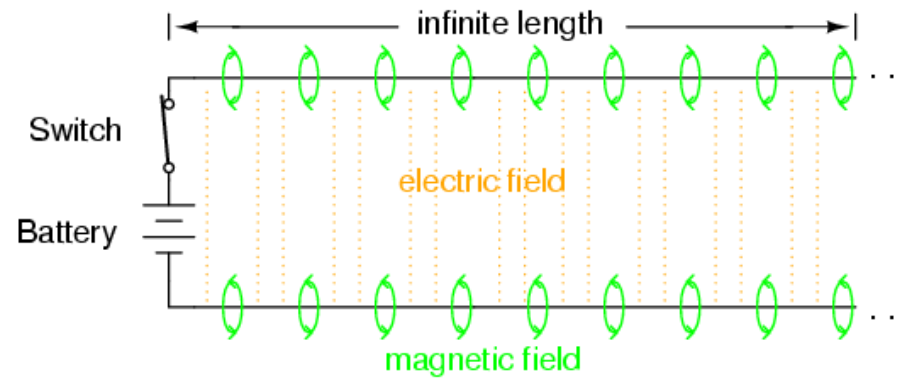
Modello di una linea di trasmissione



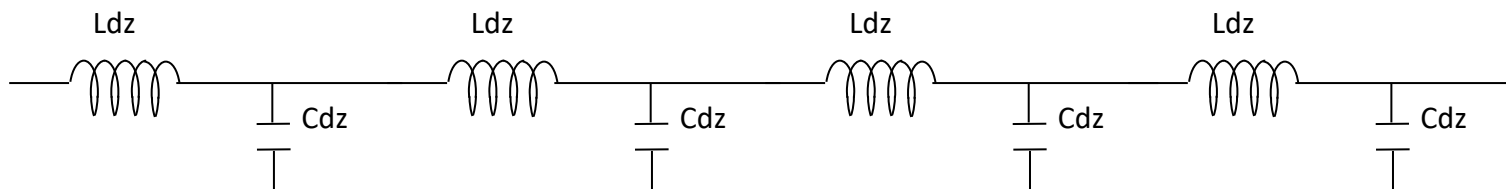
Linea di trasmissione a due conduttori



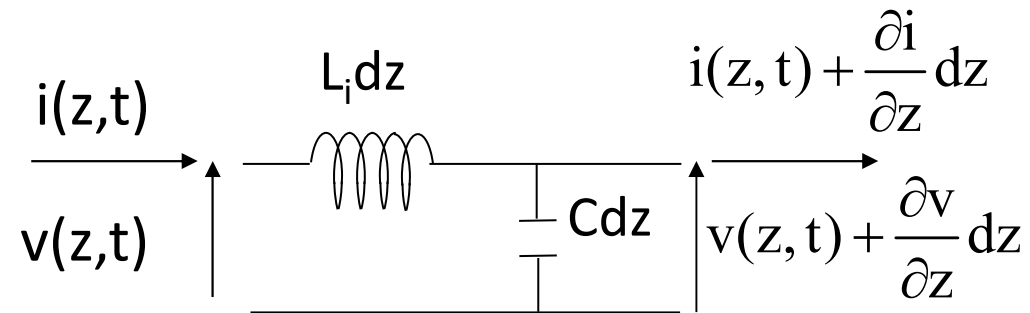
Cavo coassiale



Linee di campo elettrico e magnetico



Cella elementare (Dominio del tempo)



Equazione del telegrafista

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} &= -L_i \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial z} &= -C \frac{\partial v}{\partial t} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Deriviamo rispetto a } z \text{ la prima e rispetto al tempo la seconda e} \\ &\text{inseriamo la prima nella seconda, otteniamo} \\ &\longrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = L_i C \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \text{Equazione d'onda} \\ &\text{La tensione prodotta dal campo elettrico che si propaga} \\ &\text{nel coassiale sotto forma di onda TEM, è anche essa} \\ &\text{un'onda} \end{aligned}$$

La stessa cosa si trova per la corrente $\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = L_i C \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$

Propagazione su una linea

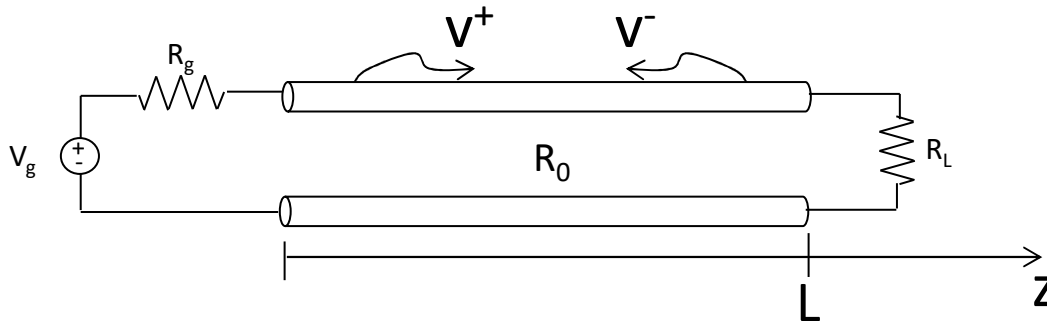
Onde di tensione e di corrente

$$v(z, t) = v^+ \left(t - \frac{z}{v_f} \right) + v^- \left(t + \frac{z}{v_f} \right)$$

$$i(z, t) = \frac{v^+}{R_0} \left(t - \frac{z}{v_f} \right) - \frac{v^-}{R_0} \left(t + \frac{z}{v_f} \right)$$

$$R_0 = \frac{V^+ \left(t - \frac{z}{v} \right)}{I^+ \left(t - \frac{z}{v} \right)} = \sqrt{\frac{L_i}{C}}$$

Resistenza caratteristica



$$v_f = \frac{1}{\sqrt{L_i C}}$$

Velocità di fase

$$v_L = R_L i(L, t) = R_L \left(\frac{v^+ \left(t - \frac{L}{v_f} \right)}{R_0} - \frac{v^- \left(t + \frac{L}{v_f} \right)}{R_0} \right) \quad \text{Condizione al contorno}$$

Parametri della linea

Coefficiente di riflessione al carico:

$$\rho(L) \triangleq \frac{v^-(t + L/v_f)}{v^+(t - L/v_f)}$$

Coefficiente di trasmissione al carico

$$\tau(L) \triangleq \frac{V_L}{v^+(t - L/v_f)}$$

Coefficiente di riflessione

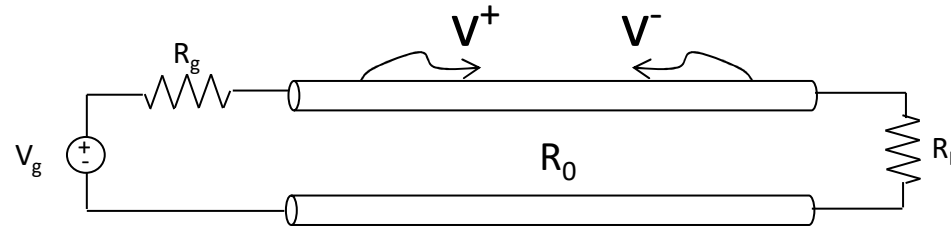
$$\rho(L) \triangleq \frac{v^-(t + L/v_f)}{v^+(t - L/v_f)}$$

Dalla condizione al contorno

$$v_L = \left(v^+ \left(t - \frac{L}{v_f} \right) + v^- \left(t + \frac{L}{v_f} \right) \right) = R_L i(L, t) = R_L \left(\frac{v^+ \left(t - \frac{L}{v_f} \right)}{R_0} - \frac{v^- \left(t + \frac{L}{v_f} \right)}{R_0} \right)$$
$$v^+ \left(t - \frac{L}{v_f} \right) \left(1 - \frac{R_L}{R_0} \right) = -v^- \left(t + \frac{L}{v_f} \right) \left(1 + \frac{R_L}{R_0} \right)$$

$$\rho(L) = \frac{v^- \left(t + \frac{L}{v_f} \right)}{v^+ \left(t - \frac{L}{v_f} \right)} = - \frac{\left(1 - \frac{R_L}{R_0} \right)}{\left(1 + \frac{R_L}{R_0} \right)} = \boxed{\frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}}$$

Carichi non adattati



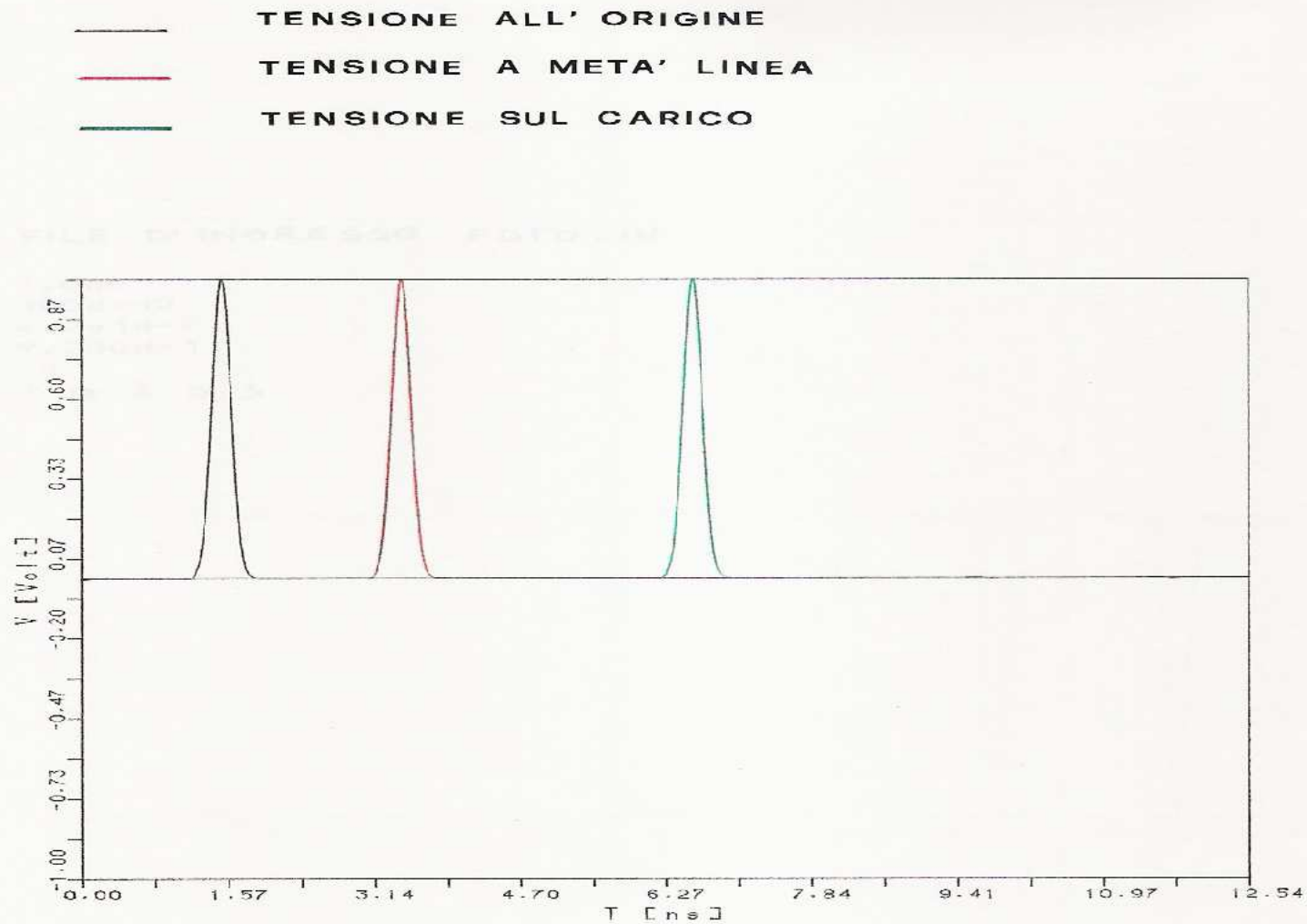
Coefficiente di riflessione al generatore

$$\rho_g(0) = \frac{R_g - R_0}{R_g + R_0}$$

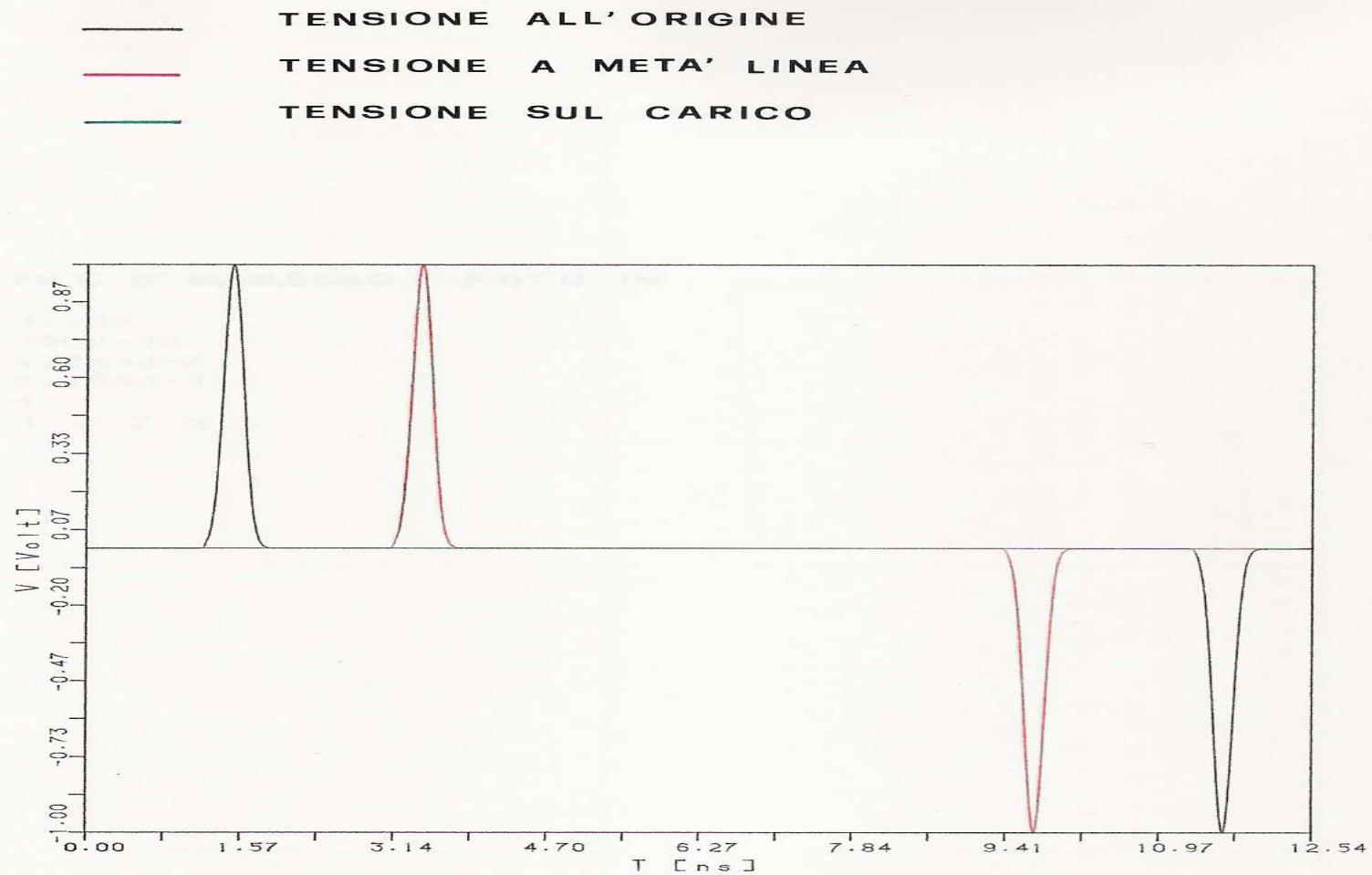
Riflessioni multiple

$$V^- = V^+ \rho_c(L) \qquad V^{-+} = V^- \rho_g(0)$$

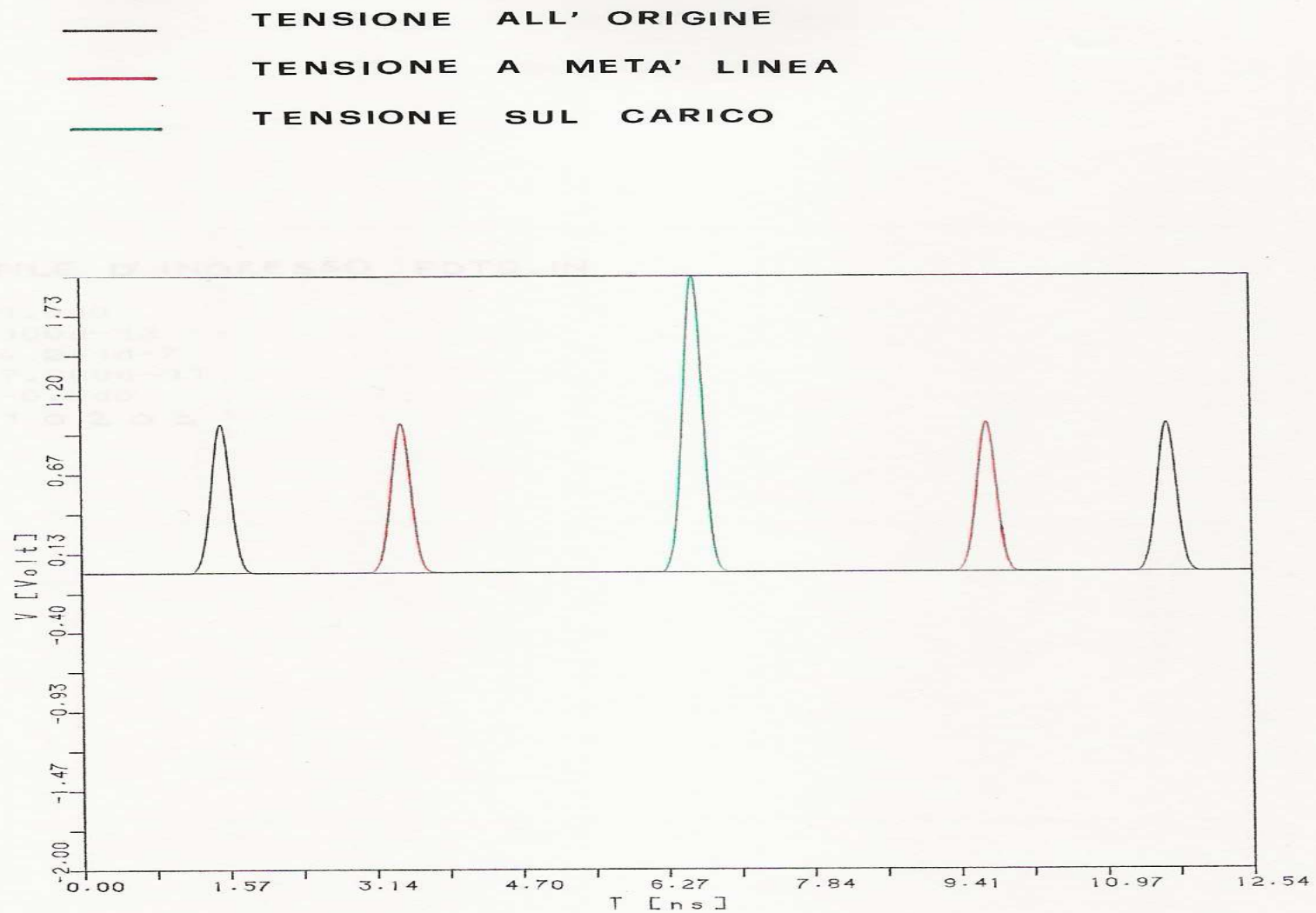
Impulso lungo una linea adattata



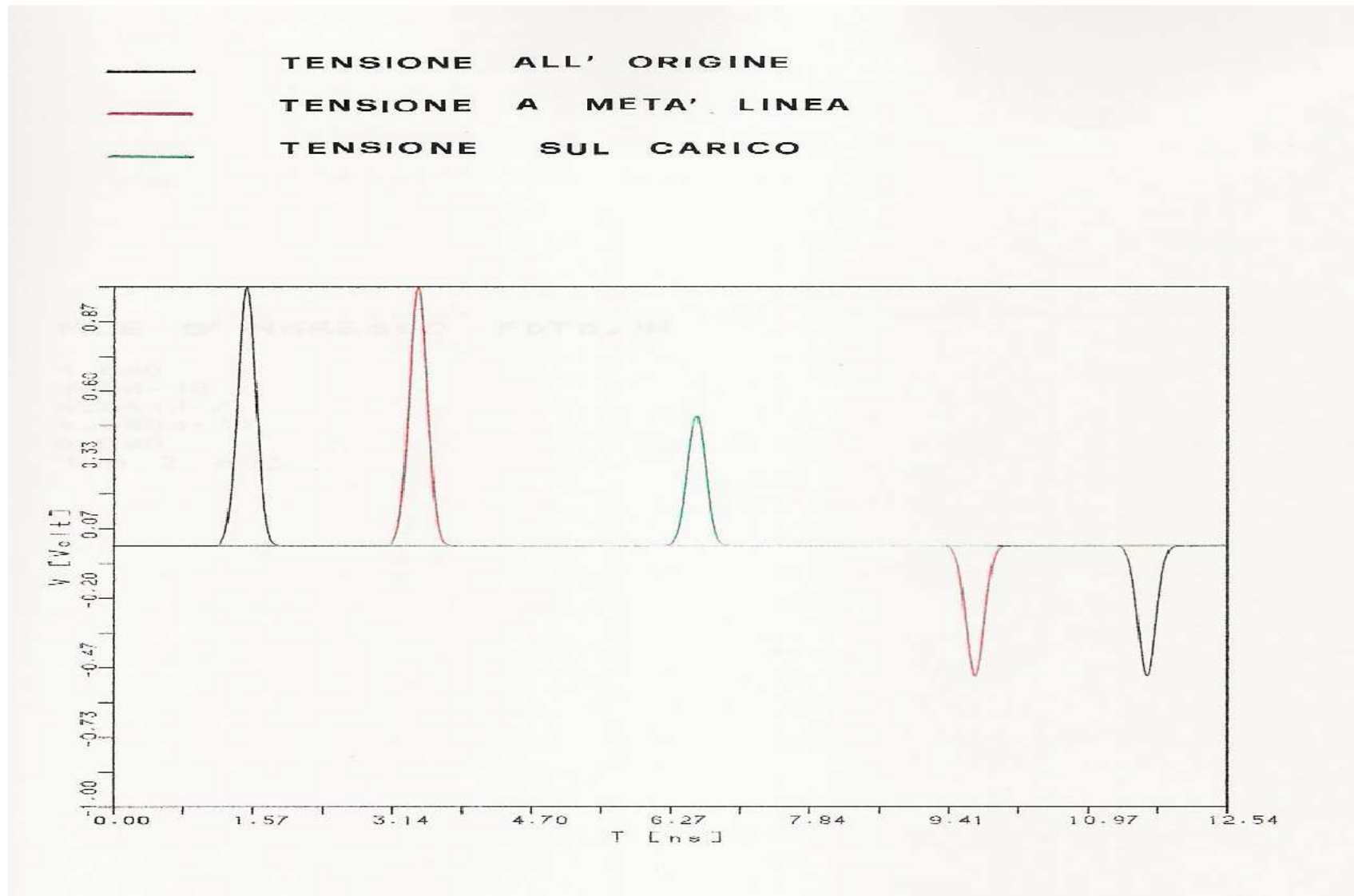
Impulso lungo una linea con $\rho=-1$



Impulso lungo una linea con $\rho=1$



Impulso lungo una linea con $\rho = -0,5$



Propagazione nelle linee: carichi induttivi o capacitivi (dominio del tempo) 1/2

Se il carico fosse un condensatore di capacità C , dovremmo imporre la seguente condizione al contorno:

$$I_L = C \frac{\partial V_L}{\partial t} \Rightarrow I(L, t) = C \frac{\partial V(L, t)}{\partial t}$$

$$\frac{1}{R_0} \left[V^+ \left(t - \frac{L}{v_f} \right) - V^- \left(t + \frac{L}{v_f} \right) \right] = C \frac{\partial}{\partial t} \left[V^+ \left(t - \frac{L}{v_f} \right) + V^- \left(t + \frac{L}{v_f} \right) \right]$$

Quindi, non è possibile definire un coefficiente di riflessione che esprima una diretta proporzionalità tra l'onda riflessa e quella incidente. In ogni caso, vi è sempre un'onda riflessa, necessaria per soddisfare la condizione al contorno sul carico capacitivo.

Es. v^+ =funzione gradino

$$\frac{v^+ \left(t - \frac{L}{v_f} \right)}{R_0} = \frac{v^- \left(t + \frac{L}{v_f} \right)}{R_0} + C \frac{\partial v^- \left(t + \frac{L}{v_f} \right)}{\partial t}$$

$$v^- = v^+(t_0) + 2v^+(t_0)e^{-\frac{t-t_0}{CR_0}}$$

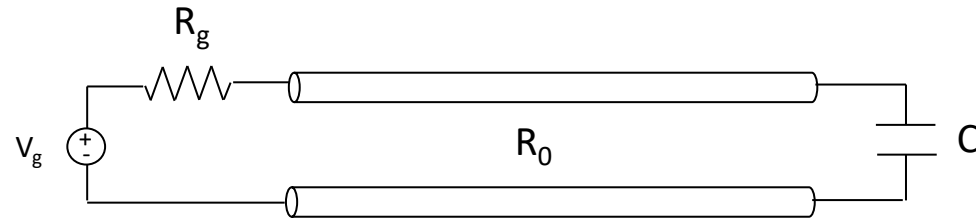
Propagazione nelle linee: carichi induttivi o capacitivi (dominio del tempo) 2/2

Se il carico fosse un induttore di induttanza L , dovremmo imporre la seguente condizione al contorno:

$$V_L = L \frac{\partial I_L}{\partial t} \Rightarrow V(L, t) = L \frac{\partial I(L, t)}{\partial t}$$
$$V^+ \left(t - \frac{L}{v_f} \right) + V^- \left(t + \frac{L}{v_f} \right) = \frac{L}{R_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[V^+ \left(t - \frac{L}{v_f} \right) - V^- \left(t + \frac{L}{v_f} \right) \right]$$

Quindi, non è possibile trovare definire un coefficiente di riflessione che esprima una diretta proporzionalità tra l'onda riflessa e quella incidente. In ogni caso, vi è sempre un'onda riflessa, necessaria per soddisfare la condizione al contorno sul carico induttivo.

Carichi non resistivi



$$i_L = \frac{v^+(t - \frac{L}{v_f})}{R_0} - \frac{v^-(t + \frac{L}{v_f})}{R_0} = C \frac{\partial v(L, t)}{\partial t} = C \frac{\partial \left(v^+(t - \frac{L}{v_f}) + v^-(t + \frac{L}{v_f}) \right)}{\partial t}$$

$$\frac{v^+(t - \frac{L}{v_f})}{R_0} - C \frac{\partial v^+(t - \frac{L}{v_f})}{\partial t} = \frac{v^-(t + \frac{L}{v_f})}{R_0} + C \frac{\partial v^-(t + \frac{L}{v_f})}{\partial t}$$

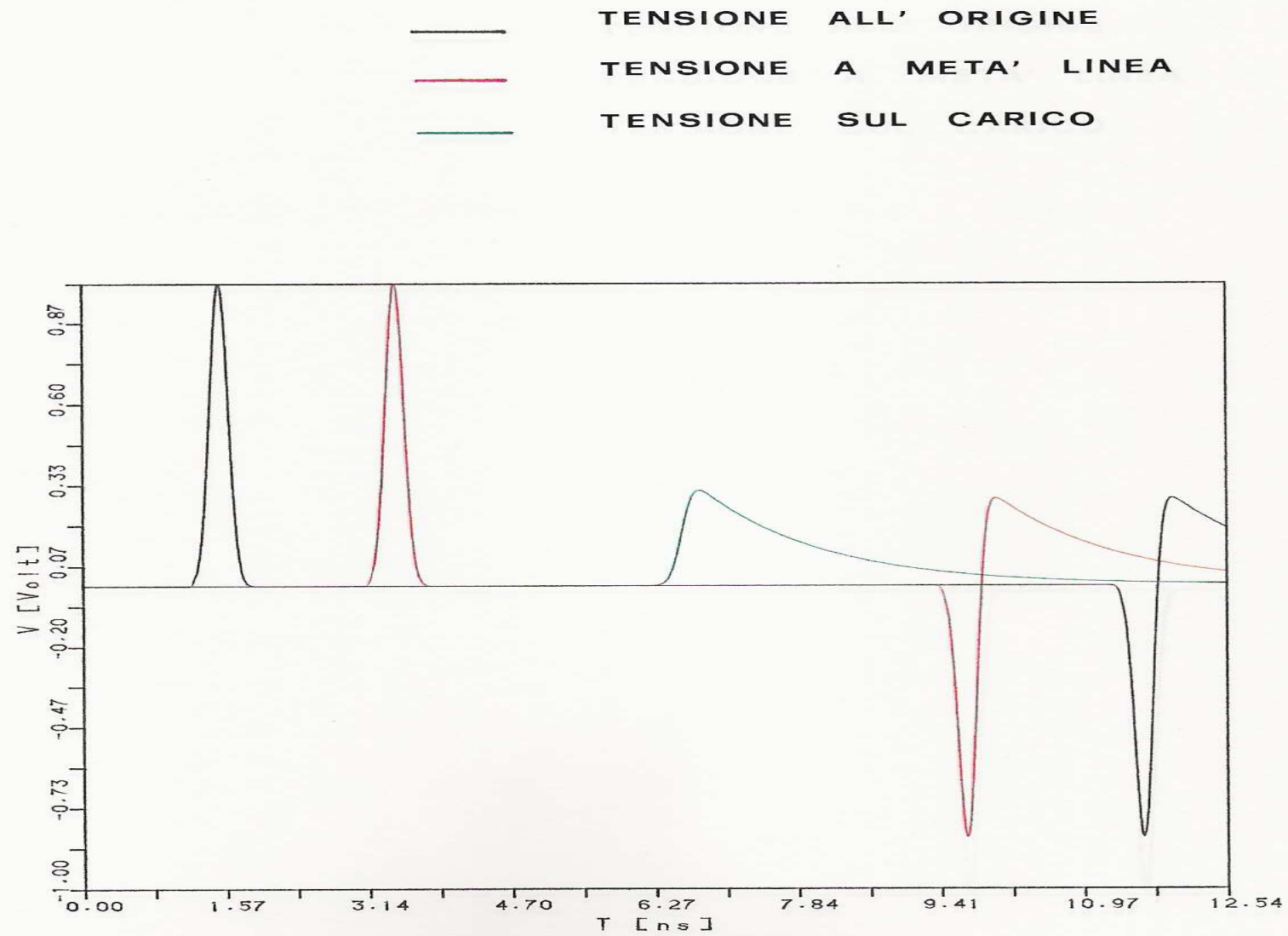
Non è possibile trovare un'espressione per il coefficiente di riflessione

Es. v^+ = funzione gradino

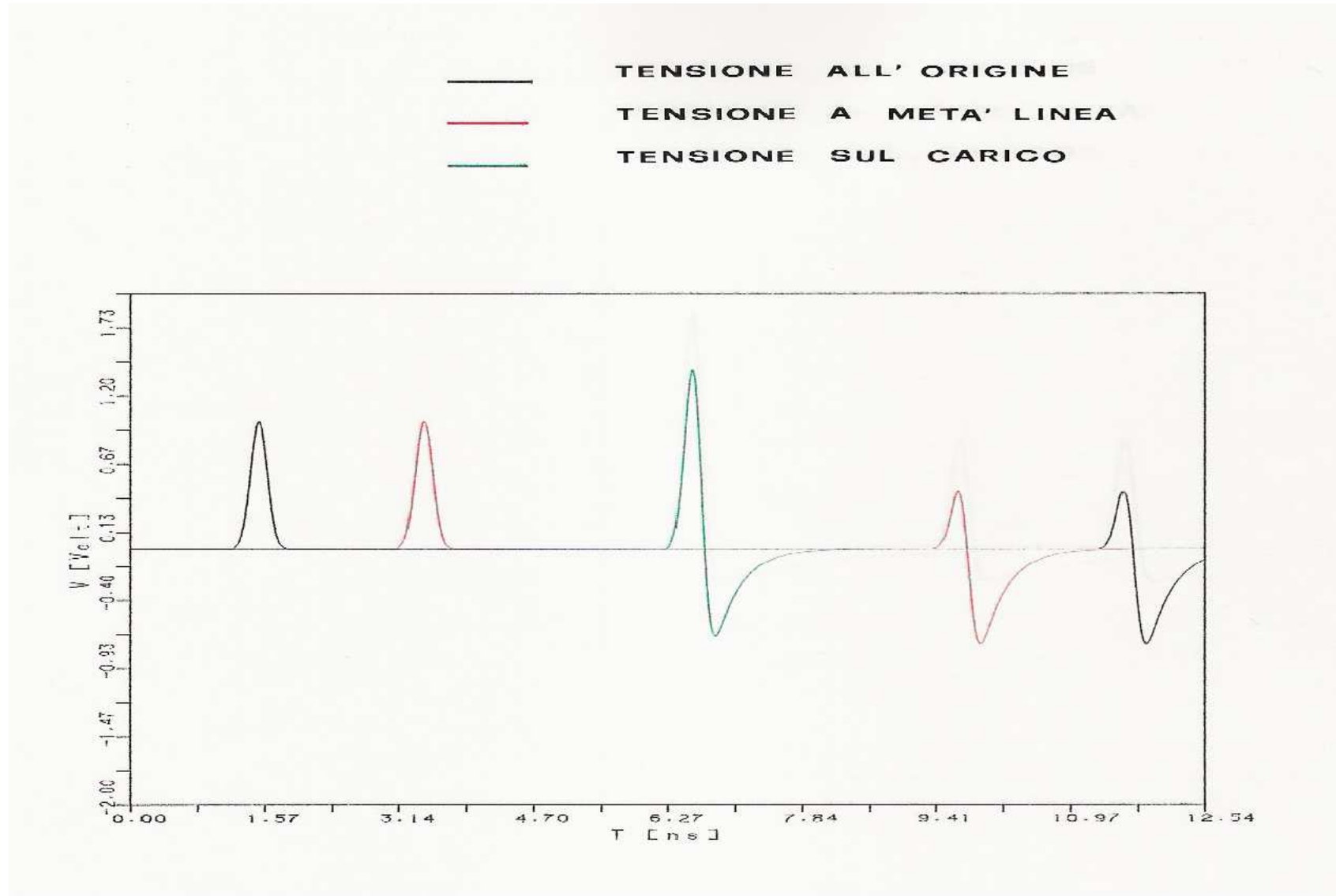
$$\frac{v^+(t - \frac{L}{v_f})}{R_0} = \frac{v^-(t + \frac{L}{v_f})}{R_0} + C \frac{\partial v^-(t + \frac{L}{v_f})}{\partial t}$$

$$v^- = v^+(t_0) + 2v^+(t_0)e^{-\frac{t-t_0}{CR_0}}$$

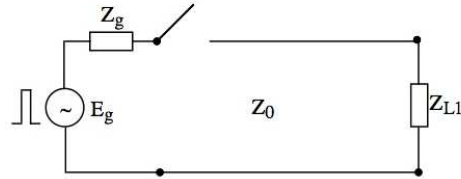
Impulso lungo una linea chiusa su una capacità ($C=20\text{pF}$)



Impulso lungo una linea chiusa su un'induttanza ($L=20\text{nH}$)



Un generatore di tensione alimenta la linea mostrata in figura con un solo impulso di ampiezza 60 V e durata 2 msec, a partire dall'istante $t=0$. Determinare la tensione sul carico Z_{L1} per $0 \leq t \leq 20$ msec supponendo $Z_g=Z_0=50 \Omega$, $Z_{L1}=100 \Omega$ e che il tempo di transito sulla linea sia pari a 10 msec.



L'onda che entra nella linea vale: $V_0^+ = \frac{E_g}{Z_g + Z_0} Z_0 = \frac{E_g}{2} = 30 \text{ V}$.

Sul carico si ha

$$\rho_L = \frac{Z_{L1} - Z_0}{Z_{L1} + Z_0} = \frac{1}{3} \Rightarrow \tau_L = 1 + \rho = \frac{4}{3}$$

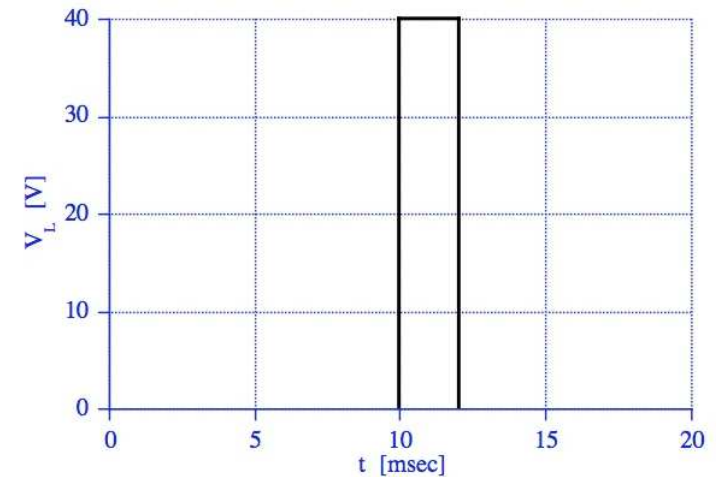
L'onda trasmessa vale dunque

$$V_L = \tau V_0^+ = 40 \text{ V}$$

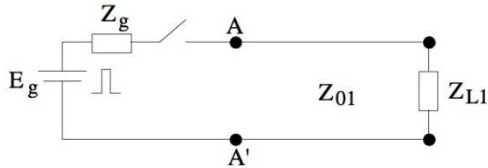
Poiché sul generatore

$$\rho_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} = 0,$$

l'onda riflessa dal carico è completamente assorbita dal generatore e non vi sono ulteriori onde riflesse.



) Nella seguente linea di trasmissione, in cui $Z_g=50 \Omega$, $Z_{01}=200 \Omega$, $Z_{L1}=75 \Omega$, $t_s=1$ msec, il generatore eroga un impulso di ampiezza $E_g=9$ V e durata 1 msec a partire dall'istante $t=0$.



Determinare l'andamento temporale della tensione sul carico per $0 \leq t \leq 8$ msec.

L'impulso di tensione che entra nella linea all'istante $t=0^+$ vale:

$$V^+ = E_g \frac{Z_{01}}{Z_g + Z_{01}} = 7.2 \text{ V}.$$

Il coefficiente di riflessione sul carico Z_{L1} è

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_{01}}{Z_L + Z_{01}} = -\frac{5}{11}$$

mentre alla sezione AA' si ha:

$$\rho_g = \frac{Z_g - Z_{01}}{Z_g + Z_{01}} = -0.6.$$

A $t=1$ msec l'onda V^+ arriva su Z_{L1} producendo un impulso sul carico pari a

$$V_L = (1 + \rho_L)V^+ = 3.927 \text{ V}$$

di durata 1 msec ed un'onda riflessa di valore:

$$V^- = \rho_L V^+ = -3.272 \text{ V}.$$

All'istante $t=2$ msec V^- arriva alla sezione AA' dove viene riflessa generando l'onda:

$$V^{-+} = \rho_g V^- = 1.962 \text{ V}.$$

All'istante $t=3$ msec V^{-+} arriva su Z_{L1} producendo un impulso sul carico pari a

$$V_L = (1 + \rho_L)V^{-+} = 1.07 \text{ V}.$$

Ovviamente, V^{-+} viene riflessa dal carico con ampiezza

$$V^{-+-} = \rho_L V^{-+} = -0.891 \text{ V}$$

che giunge alla sezione AA' all'istante $t=4$ msec; qui V^{-+-} viene riflessa dando luogo a

$$V^{-++-} = \rho_g V^{-+-} = 0.535 \text{ V}.$$

All'istante $t=5$ msec V^{-++-} arriva sul carico ed origina un impulso pari a

$$V_L = (1 + \rho_L)V^{-++-} = 0.291 \text{ V}$$

ed un'onda riflessa di ampiezza

$$V^{-++-+} = \rho_L V^{-++-} = -0.243 \text{ V}.$$

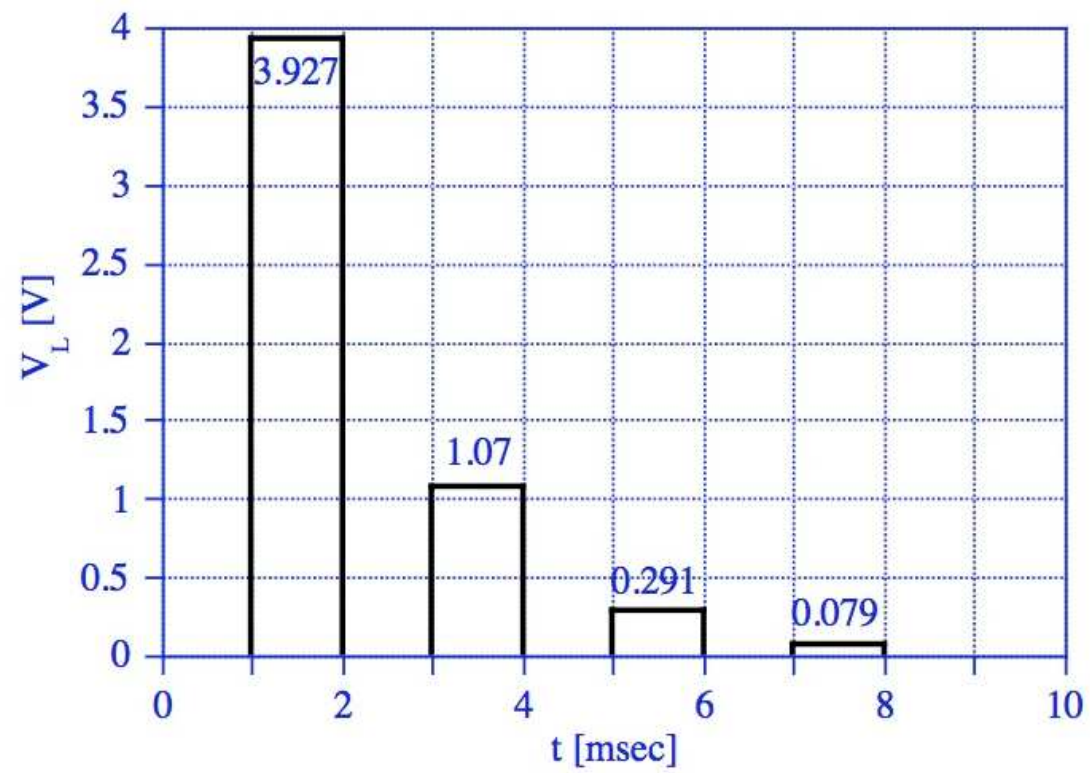
Quest'ultima si riflette sul generatore a $t=6$ msec producendo

$$V^{-++-+-} = \rho_g V^{-++-+} = 0.146 \text{ V}$$

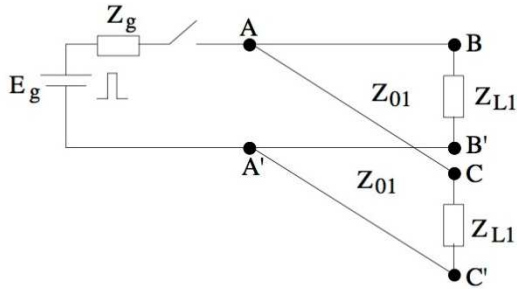
che giunge sul carico a $t=7$ msec con ampiezza:

$$V_L = (1 + \rho_L)V^{-++-+-} = 0.079 \text{ V}.$$

Ricapitolando, l'andamento della tensione sul carico assume la seguente forma:



Nella seguente linea di trasmissione, in cui $t_s=1$ msec, $Z_g=50 \Omega$, $Z_{L1}=50 \Omega$, $Z_{01}=200 \Omega$, il generatore eroga un impulso di ampiezza $E_g=9$ V e durata 1 msec.



I coefficienti di riflessione alle due sezioni finali valgono:

$$\rho_L = \rho_{BB'} = \rho_{CC'} = \frac{Z_{L1} - Z_{01}}{Z_{L1} + Z_{01}} = -0.6 .$$

L'onda di tensione che entra nelle due linee in parallelo alla sezione AA' è data da

$$V^+ = E_g \frac{Z_{01} // Z_{01}}{Z_g + Z_{01} // Z_{01}} = 6 \text{ V} .$$

Questa onda viaggia verso le sezioni BB' e CC' dove giunge a $t=1$ msec, producendo un'onda trasmessa ai carichi pari a

$$V_L = (1 + \rho_L)V^+ = 2.4 \text{ V} .$$

Contemporaneamente vengono generati due impulsi riflessi di ampiezza

$$V^{+-} = \rho_L V^+ = -3.6 \text{ V}$$

che giungono in AA' a $t=2$ msec, dove vedono un coefficiente di riflessione di valore

$$\rho_{AA'} = \frac{Z_g // Z_{01} - Z_{01}}{Z_g // Z_{01} + Z_{01}} = -\frac{2}{3} .$$

A questo punto, l'onda proveniente dalla sezione BB' viene riflessa verso il carico, sommandosi all'onda trasmessa proveniente dalla sezione CC':

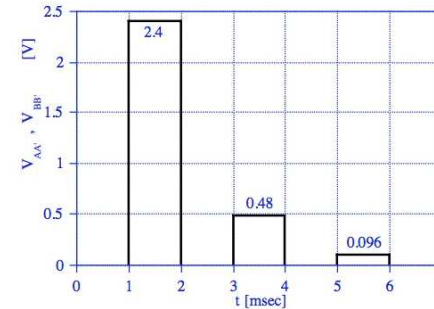
$$V^{+-} = \rho_{AA'} V^{+-} + (1 + \rho_{AA'}) V^{+-} = 1.2 \text{ V} .$$

Ovviamente, un impulso della stessa ampiezza viaggia verso la sezione CC'. Questi due impulsi giungono sui carichi a $t=3$ msec, producendo onde trasmesse e riflesse

$$V_L = (1 + \rho_L)V^{++} = 0.48 \text{ V}$$

$$V^{+-} = \rho_L V^{++} = -0.72 \text{ V}$$

che giungono alla sezione AA' a $t=4$ msec dove si ripete lo stesso meccanismo di riflessione e trasmissione visto prima.



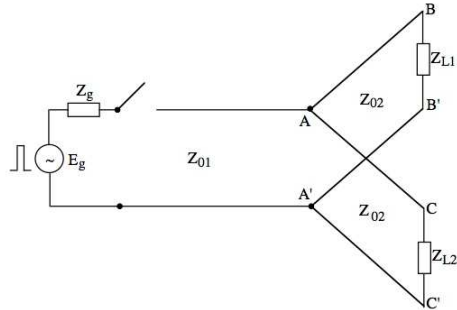
Dunque, due impulsi di ampiezza

$$V^{++} = \rho_{AA'} V^{+-} + (1 + \rho_{AA'}) V^{+-} = 0.24 \text{ V}$$

viaggiano verso i carichi dove vi giungono a $t=5$ msec, producendo:

$$V_L = (1 + \rho_L)V^{++} = 0.096 \text{ V} .$$

Un generatore di tensione alimenta la linea mostrata in figura con un solo impulso di ampiezza 12 V e durata 2 msec, a partire dall'istante $t=0$. Determinare la tensione sui carichi Z_{L1} e Z_{L2} per $0 \leq t \leq 50$ msec supponendo $Z_g = Z_{01} = Z_{L1} = 50 \Omega$, $Z_{02} = 100 \Omega$, $Z_{L2} = 150 \Omega$ e che i tempi di transito su tutte le linee siano pari a 10 msec.



L'onda di tensione che entra nella linea vale

$$V^+ = E_g \frac{Z_{01}}{Z_g + Z_{01}} = 6 \text{ V}.$$

A $t=10$ msec V^+ arriva alla sezione AA' in cui

$$\rho_{AA'} = \frac{Z_{02} // Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} // Z_{02} + Z_{01}} = 0.$$

Quindi tutta l'onda di tensione V^+ passa alle due linee che sono in parallelo. A $t=20$ msec l'onda V^+ arriva sul carico Z_{L1} producendo una tensione pari a

$$V_{Z_{L1}} = (1 + \rho_{BB'}) V^+ = 4 \text{ V}$$

poiché

$$\rho_{BB'} = \frac{Z_{L1} - Z_{02}}{Z_{L1} + Z_{02}} = -\frac{1}{3}.$$

Ovviamente si produce anche un'onda riflessa $V_1^- = \rho_{BB'} V^+ = -2 \text{ V}$ che viaggia verso la sezione AA'. Sempre a $t=20$ msec l'onda V^+ arriva anche sul carico Z_{L2} producendo una tensione

$$V_{Z_{L2}} = (1 + \rho_{CC'}) V^+ = 7.2 \text{ V},$$

poiché

$$\rho_{CC'} = \frac{Z_{L2} - Z_{02}}{Z_{L2} + Z_{02}} = 0.2,$$

ed un'onda riflessa pari a $V_2^- = \rho_{CC'} V^+ = 1.2 \text{ V}$ che viaggia anch'essa verso la sezione AA'.

Le due onde riflesse V_1^- e V_2^- arrivano contemporaneamente alla sezione AA' all'istante $t=30$ msec; entrambe le onde vedono lo stesso coefficiente di riflessione pari a

$$\rho_T = \frac{Z_{02} // Z_{01} - Z_{02}}{Z_{02} // Z_{01} + Z_{02}} = -0.5.$$

A causa di tale disadattamento vengono generate delle onde riflesse, che tornano verso i rispettivi carichi, pari a $\rho_T V_1^-$, $\rho_T V_2^-$, e delle onde trasmesse nelle varie linee.

Di queste, le onde trasmesse nella linea collegata al generatore vengono tutte assorbite dal generatore stesso in quanto adattato, mentre le altre si propagano verso i carichi.

In totale, in ciascuna delle due linee collegate ai carichi si hanno le seguenti onde:

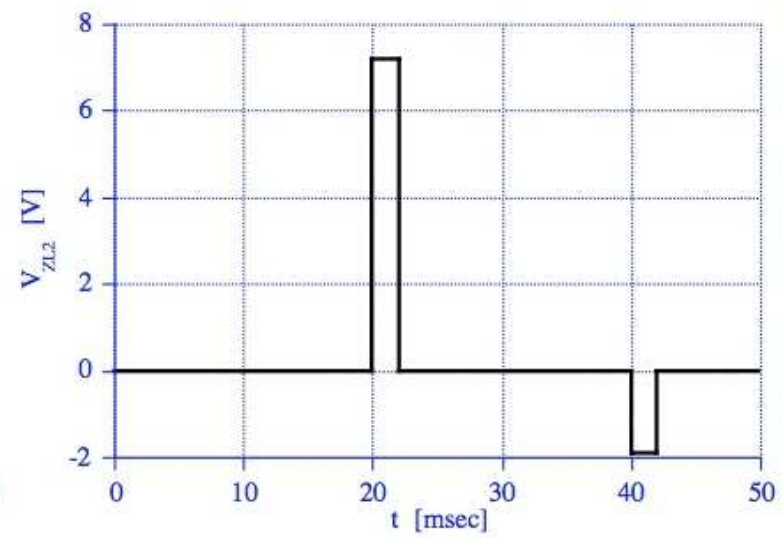
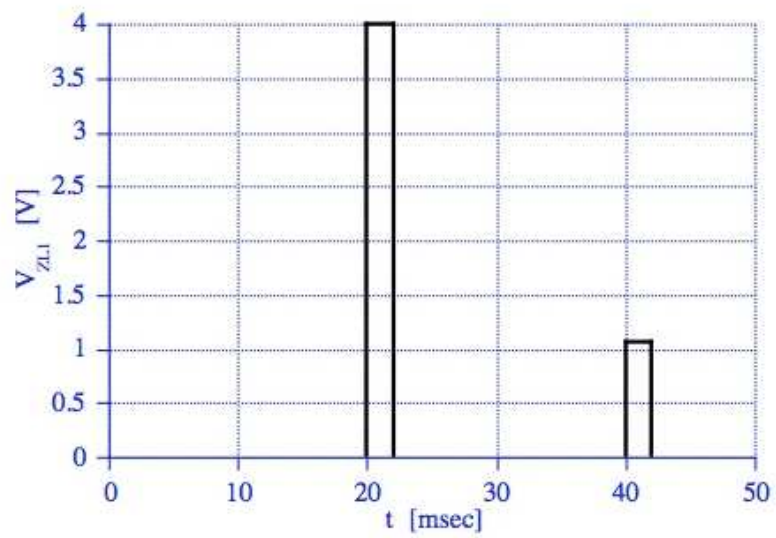
$$\text{linea 1: } V_1'^+ = \rho_T V_1^- + (1 + \rho_T) V_2^- = 1.6 \text{ V}$$

$$\text{linea 2: } V_2'^+ = \rho_T V_2^- + (1 + \rho_T) V_1^- = -1.6 \text{ V}.$$

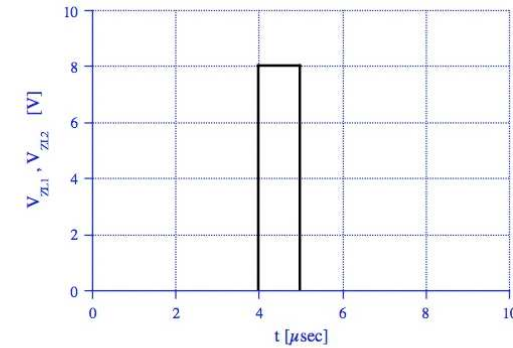
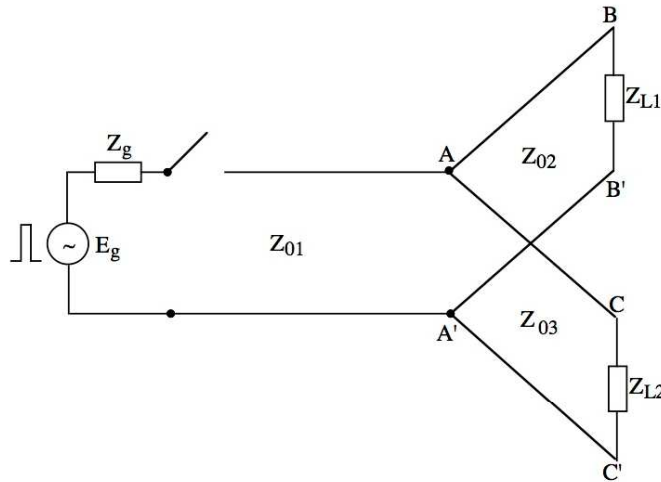
A $t=40$ msec le onde $V_1'^+$ e $V_2'^+$ arrivano sui carichi generando delle onde trasmesse agli stessi pari a

$$V_{Z_{L1}}' = (1 + \rho_{BB'}) V_1'^+ = 1.06 \text{ V}$$

$$V_{Z_{L2}}' = (1 + \rho_{CC'}) V_2'^+ = -1.92 \text{ V}.$$



) Un generatore di tensione alimenta la linea mostrata in figura con un solo impulso di ampiezza 12 V e durata 1 μsec , a partire dall'istante $t=0$. Determinare la tensione sui carichi per $0 \leq t \leq \infty$ supponendo $Z_g=30 \Omega$ $Z_{01}=60 \Omega$ $Z_{02}=100 \Omega$ $Z_{03}=150 \Omega$ $Z_{L1}=100 \Omega$ $Z_{L2}=150 \Omega$ e che i tempi di transito su tutte le linee siano pari a 2 μsec . Valutare inoltre l'energia che attraversa le sezioni AA', BB', CC' verificando il bilancio energetico.



L'energia associata alle sezioni AA', BB' e CC' è data da:

$$U_{AA'} = \int_{2\mu\text{sec}}^{3\mu\text{sec}} \frac{V_{AA'}^2}{Z_{//}} dt = \int_{2\mu\text{sec}}^{3\mu\text{sec}} \frac{V^2}{Z_{//}} dt = 1.066 \mu\text{J}$$

$$U_{BB'} = \int_{4\mu\text{sec}}^{5\mu\text{sec}} \frac{V_{L1}^2}{Z_{L1}} dt = 0.64 \mu\text{J} \quad U_{CC'} = \int_{4\mu\text{sec}}^{5\mu\text{sec}} \frac{V_{L2}^2}{Z_{L2}} dt = 0.426 \mu\text{J}.$$

L'onda di tensione che entra nel circuito all'istante $t = 0^+$ vale

$$V^+ = \frac{E_g}{Z_g + Z_{01}} Z_{01} = 8 \text{ V}$$

e arriva alla sezione AA' all'istante $t = 2 \mu\text{sec}$ dove vede un coefficiente di riflessione

$$\rho_{AA'} = \frac{Z_{//} - Z_{01}}{Z_{//} + Z_{01}} = 0$$

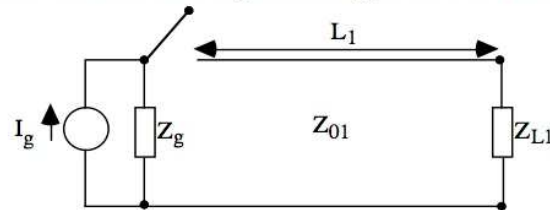
perchè $Z_{//} = Z_{02} // Z_{03} = 60 \Omega$. L'onda incidente di tensione viene completamente trasmessa nelle due linee che, a loro volta, risultano adattate. Quindi la tensione che si stabilisce ai capi dei carichi delle due linee all'istante $t = 4 \mu\text{sec}$ è esattamente uguale all'onda incidente V^+ .

E' data la linea di trasmissione mostrata in figura in cui $I_g=3$ A (in continua), $Z_g=Z_{01}=50 \Omega$, $Z_{L1}=100 \Omega$.

Supponendo che l'interruttore si chiuda a $t=0$, determinare:

- l'andamento della corrente sul carico Z_{L1} per $0 \leq t \leq 20$ msec ;
- il valore della corrente e della tensione sul carico a regime.

Supporre che il tempo di transito dei segnali lungo la linea sia pari a 2 msec.



All'istante $t=0$ la corrente che entra nella linea vale

$$I_0^+ = I_g \frac{Z_g}{Z_{01} + Z_g} = \frac{I_g}{2} = 1.5 \text{ A}$$

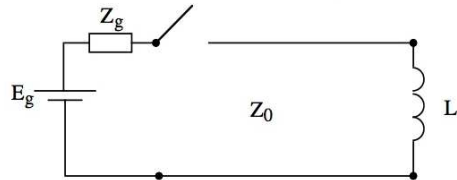
perchè il generatore vede un parallelo tra Z_g e Z_0 . Dopo $t=t_s=2$ msec sul carico arriva un'onda di corrente pari a

$$I_L = \tau I_0^+ = \frac{2Z_0}{Z_0 + Z_L} I_0^+ = 1 \text{ A}$$

e viene riflessa un'onda che però viene completamente assorbita dal generatore, poichè quest'ultimo è adattato. Quindi la corrente sul carico vale 1 A per $t \geq 2$ msec.

Un generatore di tensione in continua alimenta la linea mostrata in figura a partire dall'istante $t=0$. Determinare la tensione sull'induttanza L per $0 \leq t \leq \infty$ supponendo $E_g=10$ V, $Z_g=Z_0=50 \Omega$, $L=10$ mH e che il tempo di transito lungo la linea sia pari a $4 \mu\text{sec}$. (Supporre che la corrente che fluisce inizialmente nell'induttanza sia nulla).

(Sugg.: imporre l'equazione differenziale che regola tensione e corrente ai capi dell'induttanza in termini di onde incidenti e riflesse).



L'onda di tensione che entra nella linea all'istante $t=0^+$ vale:

$$V_{0+} = E_g \frac{Z_0}{Z_0 + Z_g} = \frac{E_g}{2}.$$

Ai capi dell'induttanza si ha $V_L = L \frac{dI_L}{dt}$ con

$$V_L(t) = V_+(t) + V_-(t), I_L = \frac{1}{Z_0} [V_+(t) - V_-(t)].$$

Del resto l'onda progressiva è costante nel tempo e pari a $V_+(t) = V_{0+}$. Quindi l'equazione differenziale diventa

$$\frac{dV_-(t)}{dt} + \frac{Z_0 V_-(t)}{L} = -\frac{Z_0 V_{0+}}{L}$$

la cui soluzione è

$$V_-(t) = Be^{\frac{t}{\tau}} - V_{0+} \quad V$$

con $\tau = \frac{L}{Z_0} = 0.2 \text{ msec}$.

Poiché la condizione iniziale assicura che la corrente che scorre inizialmente nell'induttanza è nulla, si ha

$$I_L(t_0) = \frac{1}{Z_0} [V_+(t_0) - V_-(t_0)] = \frac{1}{Z_0} \left[2V_{0+} - Be^{\frac{t_0}{\tau}} \right] = 0$$

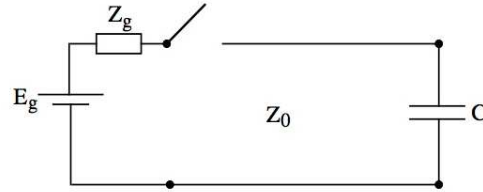
con $t_0 = 4 \mu\text{sec}$ (corrispondente al tempo di transito delle onde sulla linea) e quindi

$$I_L(t) = \frac{2V_{0+}}{Z_0} \left[1 - e^{\frac{t-t_0}{\tau}} \right] = \frac{E_g}{Z_0} \left[1 - e^{\frac{t-t_0}{\tau}} \right] A \quad t \geq t_0$$

$$V_L(t) = V_+(t) + V_-(t) = 2V_{0+}e^{\frac{t-t_0}{\tau}} = E_g e^{\frac{t-t_0}{\tau}} \quad V \quad t \geq t_0.$$

Infine, poiché il generatore è adattato, le onde riflesse dall'induttanza vengono tutte assorbite e quindi non causano riflessioni multiple.

Un generatore di tensione in continua alimenta la linea mostrata in figura a partire dall'istante $t=0$. Determinare la tensione sul condensatore C per $0 \leq t \leq 4 \mu\text{sec}$ supponendo $E_g=10 \text{ V}$, $Z_g=Z_0=50 \Omega$, $C=10 \mu\text{F}$ e che il tempo di transito lungo la linea sia pari a $2 \mu\text{sec}$. (Supporre il condensatore inizialmente scarico).



con $t_0 = 2 \mu\text{sec}$ (corrispondente al tempo di transito delle onde sulla linea) e quindi

$$V_c(t) = V_+(t) + V_-(t) = 2V_{0+} \left[1 - e^{-\frac{t-t_0}{CZ_0}} \right] = E_g \left[1 - e^{-\frac{t-t_0}{CZ_0}} \right] V.$$

Infine, poiché il generatore è adattato, le onde riflesse dal condensatore vengono tutte assorbite e quindi non causano riflessioni multiple.

L'onda di tensione che entra nella linea all'istante $t=0^+$ vale :

$$V_{0+} = E_g \frac{Z_0}{Z_0 + Z_g} = \frac{E_g}{2}.$$

Ai capi del condensatore si ha $I_c = C \frac{dV_c}{dt}$ con

$$V_c(t) = V_+(t) + V_-(t), I_c = \frac{1}{Z_0} [V_+(t) - V_-(t)].$$

Del resto l'onda progressiva è costante nel tempo e pari a $V_+(t) = V_{0+}$. Quindi l'equazione differenziale diventa

$$\frac{dV_-(t)}{dt} + \frac{V_-(t)}{CZ_0} = \frac{V_{0+}}{CZ_0}$$

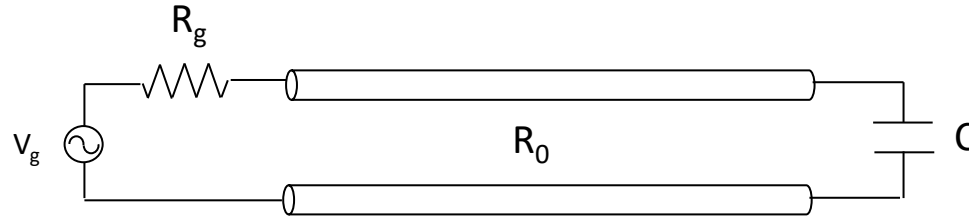
la cui soluzione è

$$V_-(t) = V_{0+} + Ae^{-\frac{t}{CZ_0}} V.$$

Poiché la condizione iniziale dice che il condensatore è scarico, si ha

$$V_c(t_0) = V_+(t_0) + V_-(t_0) = 2V_{0+} + Ae^{-\frac{t_0}{CZ_0}} = 0$$

Carichi non resistivi: regime sinusoidale



$$\frac{v^+(t - \frac{L}{v_f})}{R_0} - C \frac{\partial v^+(t - \frac{L}{v_f})}{\partial t} = \frac{v^-(t + \frac{L}{v_f})}{R_0} + C \frac{\partial v^-(t + \frac{L}{v_f})}{\partial t}$$

In questo caso i segnali sono sinusoidali

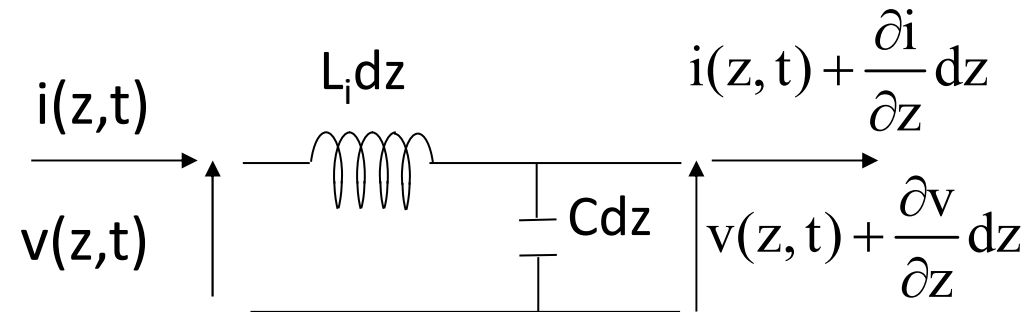
$$v^+(t - \frac{L}{v_f}) = v^+ \cos(\omega t - \beta L + \phi^+) \quad v^-(t + \frac{L}{v_f}) = v^- \cos(\omega t + \beta L + \phi^-)$$

$$\frac{v^+ \cos(\omega t - \beta L + \phi^+)}{R_0} - C \frac{\partial \cos(\omega t - \beta L + \phi^+)}{\partial t} = \frac{v^- \cos(\omega t + \beta L + \phi^-)}{R_0} + C \frac{\partial \cos(\omega t + \beta L + \phi^-)}{\partial t}$$

$$v^+ \cos(\omega t - \beta L + \phi^+) + \omega C Z_0 v^+ \sin(\omega t - \beta L + \phi^+) = v^- \cos(\omega t + \beta L + \phi^-) + \omega C Z_0 v^- \sin(\omega t + \beta L + \phi^-)$$

?

Cella elementare (Dominio dei fasori)



Equazioni telegrafisti

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V(z)}{\partial z} &= -j\omega L_i I(z) \\ \frac{\partial I(z)}{\partial z} &= -j\omega C V(z) \end{aligned} \right\}$$

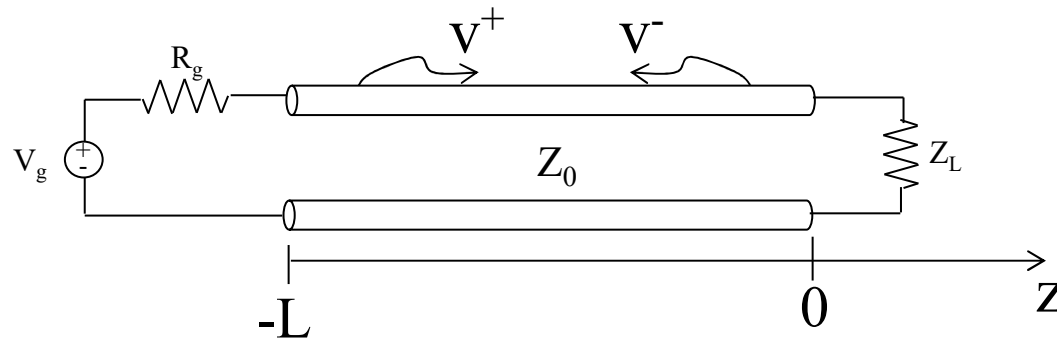
Equazioni d'onda

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = -\omega^2 L_i C V(z) = -\beta^2 V(z)$$



$$\frac{\partial^2 I(z)}{\partial z^2} = -\omega^2 L_i C I(z) = -\beta^2 I(z)$$

Equazioni del telegrafista



La soluzione delle equazione d'onda per la tensione:

$$V(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z} \quad \beta = \omega \sqrt{LC}$$

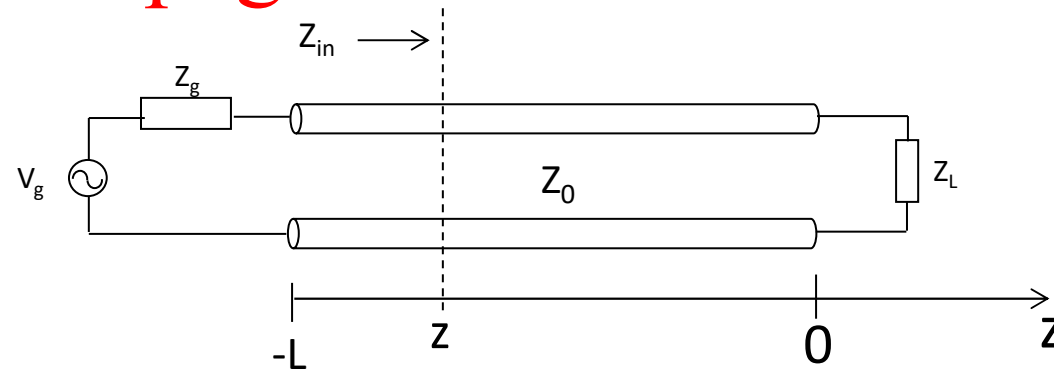
Sostituendo la soluzione in una delle equazioni del telegrafista otteniamo per la corrente:

$$I(z) = \frac{V^+ e^{-j\beta z}}{Z_0} - \frac{V^- e^{j\beta z}}{Z_0} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Condizione al contorno sul carico

$$\begin{aligned} V_L = V(0) &= \left[V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z} \right]_{z=0} = V^+ + V^- = \\ &= Z_L I_L = Z_L I(0) = \frac{Z_L}{Z_0} \left[V^+ e^{-j\beta z} - V^- e^{j\beta z} \right]_{z=0} = \frac{Z_L}{Z_0} [V^+ - V^-] \end{aligned}$$

Propagazione su una linea



$$V(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{+j\beta z}$$

$$I(z) = \frac{V^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{V^-}{Z_0} e^{+j\beta z}$$

$$\beta = \frac{\omega}{v_f} = \omega \sqrt{L_i C} \quad \text{Costante di propagazione}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_i}{C}} \quad \text{Impedenza caratteristica}$$

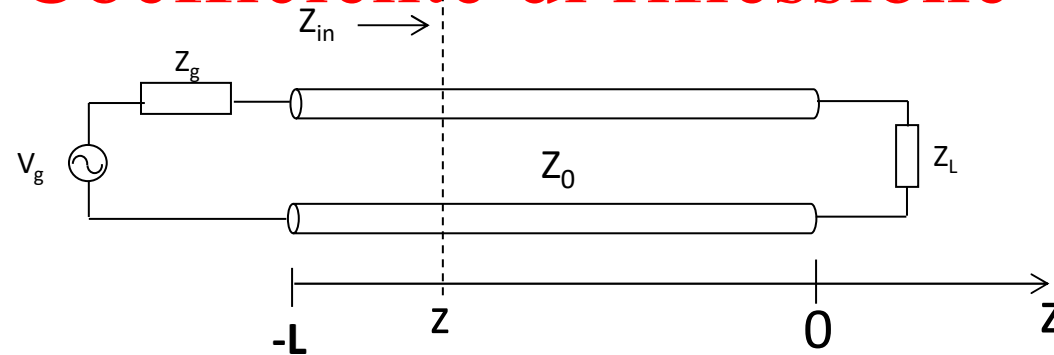
$$\rho(z) \triangleq \frac{V^- e^{j\beta z}}{V^+ e^{-j\beta z}} = \frac{V^-}{V^+} e^{2j\beta z} = \rho(0) e^{2j\beta z}$$

Coefficiente di riflessione della linea

$$Z_{IN}(z) \triangleq \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{+j\beta z}}{\frac{V^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{V^-}{Z_0} e^{+j\beta z}}$$

Impedenza di ingresso

Coefficiente di riflessione



E' possibile definire il coefficiente di riflessione NON soltanto sul carico, ma in ogni punto della linea:

$$\rho(z=0) = \rho_L = \frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad \text{Coefficiente di riflessione al carico}$$

$$\rho(z=-L) = \frac{V^- e^{-j\beta L}}{V^+ e^{j\beta L}} = \frac{V^-}{V^+} e^{-2j\beta L} = \rho(0) e^{-2j\beta L} = \rho_L e^{-2j\beta L}$$

Proprietà del coefficiente di riflessione (dominio dei fasori)

$$\rho(z = -L) = \rho_L e^{-2j\beta L} \quad \rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = |\rho_L| e^{j\phi_L}$$

Il coefficiente di riflessione gode di alcune proprietà:

- è una quantità complessa;
- sul carico è puramente reale se il carico è reale, ma negli altri punti della linea risulta complesso
- $0 \leq |\rho| \leq 1$
- è una funzione periodica di periodo $\lambda/2$:

$$2\beta L_{\text{periodo}} = 2\pi \quad \frac{2\pi}{\lambda} L_{\text{periodo}} = \pi \quad \Rightarrow \quad L_{\text{periodo}} = \frac{\lambda}{2}$$

Impedenza di ingresso 1/2

Se una linea è collegata ad un carico di qualunque genere, si definisce impedenza di ingresso il rapporto tra la tensione e la corrente in una certa sezione della linea. Viene definita di “ingresso” perché può essere definita come l’impedenza vista da una certa sezione guardando verso la sezione del carico:

$$\begin{aligned} Z_{\text{ing}} &= \frac{V(z = -L)}{I(z = -L)} = Z_0 \frac{V^+ e^{j\beta L} + V^- e^{-j\beta L}}{V^+ e^{j\beta L} - V^- e^{-j\beta L}} = Z_0 \frac{1 + \frac{V^- e^{-j\beta L}}{V^+ e^{j\beta L}}}{1 - \frac{V^- e^{-j\beta L}}{V^+ e^{j\beta L}}} = \\ &= Z_0 \frac{1 + \rho_L e^{-2j\beta L}}{1 - \rho_L e^{-2j\beta L}} = Z_0 \frac{Z_L \cos(\beta L) + jZ_0 \sin(\beta L)}{Z_0 \cos(\beta L) + jZ_L \sin(\beta L)} \end{aligned}$$

Anche l’impedenza di ingresso è una funzione periodica con periodo $\lambda/2$. Quindi, a distanza di $\lambda/2$ (e valori multipli) dal carico si ritrova una impedenza di ingresso pari all’impedenza del carico.

Impedenza di ingresso 2/2

$$Z_{\text{ing}} = Z_0 \frac{Z_L \cos(\beta L) + jZ_0 \sin(\beta L)}{Z_0 \cos(\beta L) + jZ_L \sin(\beta L)}$$

L'impedenza di ingresso cambia il suo valore lungo la linea passando ciclicamente da valori resistivi-capacitivi a valori resistivi-induttivi.

[APPLET: le linee di trasmissione nel dominio dei fasori](http://www.amanogawa.com/archive/transmissionA.html)

<http://www.amanogawa.com/archive/transmissionA.html>

Carico adattato

Si definisce carico adattato una impedenza di carico di valore uguale all'impedenza caratteristica della linea a cui è collegato:

$$Z_L = Z_0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 0 \Rightarrow \rho(-L) = \rho_L e^{-2j\beta L} = 0 \\ Z_{\text{ing}} = Z_0 \frac{Z_L \cos(\beta L) + jZ_0 \sin(\beta L)}{Z_0 \cos(\beta L) + jZ_L \sin(\beta L)} = Z_0 \end{array} \right.$$

Se il carico è adattato alla linea, non vi sono onde riflesse e l'impedenza di ingresso coincide sempre con l'impedenza caratteristica (=impedenza di carico) in ogni sezione della linea.

Impedenza di ingresso di un tratto di linea

□ Vediamo alcuni casi particolari:

- Se chiudiamo su un corto $Z_{in} = jZ_0 \tan \beta l$

Cioè un carico reattivo (puramente immaginario). Notate che con argomento $\pi/2$ la tangente diventa infinita: quindi il corto si trasforma in un circuito aperto! La lunghezza corrispondente è $\lambda/4$. Ridiventa un corto a π , cioè ovviamente a $\lambda/2$ (e così via)

- Se chiudiamo su un aperto (carico infinito) $Z_{in} = -jZ_0 \cot \beta l$

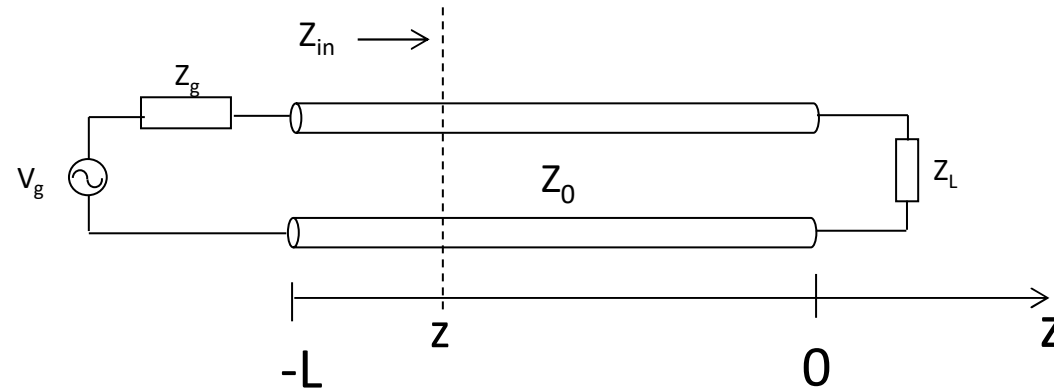
Cioè un comportamento esattamente duale

Notate anche che il corto ha una impedenza immaginaria positiva (quindi induttiva) fino a $\lambda/4$ e poi diventa negativa (capacitiva), e via dicendo. Il contrario per il circuito aperto

- Nel caso particolare di argomento $\pi/2$ ($\lambda/4$) il coseno è nullo, e

$$Z_{in} = \frac{Z_0^2}{R_L}$$

Tensione e corrente lungo la linea



$$V(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{+j\beta z} = V^+ \left(e^{-j\beta z} + \rho(0) e^{+j\beta z} \right) =$$

$$V^+ \left((1 + \rho(0) - \rho(0)) e^{-j\beta z} + \rho(0) e^{+j\beta z} \right) = V^+ \left((1 - \rho(0)) e^{-j\beta z} + \rho(0) (e^{+j\beta z} + e^{-j\beta z}) \right)$$

$$V(z) = \underbrace{V^+ (1 - \rho(0)) e^{-j\beta z}}_{\text{Onda viaggiante}} + \underbrace{2V^+ \rho(0) \cos \beta z}_{\text{Onda stazionaria}}$$

Onda viaggiante

Onda stazionaria

Esempio onda v+s