Conduzione

Prof. Ing. Alberto Salioni

Conduzione

Definizione:

Per conduzione termica si intende la trasmissione di calore per contatto molecolare diretto.

Il principio alla base della conduzione è diverso a seconda della struttura fisica del corpo: se la conduzione termica avviene nei gas è dovuta alla diffusione atomica e molecolare, se invece avviene nei liquidi e nei solidi è a causa di onde elastiche; nei materiali metallici il fenomeno è principalmente dovuto alla diffusione degli elettroni liberi dato che è trascurabile il contributo dell'oscillazione elastica del reticolo cristallino.

Conduzione

$$\overline{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\overline{\nabla T} = gradT = \vec{i}\,\frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\overline{\nabla} \cdot \vec{v} = div\vec{v}$$

$$\overline{\nabla} \times \vec{v} = rot\vec{v}$$

$$\left(\overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla}\right)T = laplaciano\ di\ T =$$

$$= \left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\vec{i}\,\frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial T}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Conduzione

definendo...

$\vec{q}$: vettore flusso di calore $\left[\dfrac{W}{m^2}\right]$

k : conduttività termica $\left[\dfrac{W}{mK}\right]$

σ : potenza generata nell' unità di volume $\left[\dfrac{W}{m^3}\right]$

Conduzione

$$\frac{d}{dt}\int_v udm = \sum\dot{\overleftarrow{Q}} + \dot{Q}_{gen} =$$

$$= \frac{d}{dt}\int_v c_v T\rho dV = -\int_s \vec{q}\cdot\vec{n}dS + \int_v \sigma dV$$

Per il teorema della divergenza

$$\frac{d}{dt}\int_v c_v T\rho dV = -\int_v div\vec{q}dV + \int_v \sigma dV$$

Ed essendo, per il postulato di Fourier $\vec{q} = -kgradT$

$$\frac{d}{dt}\int_v c_v T\rho dV = -\int_v div(-kgradT)dV + \int_v \sigma dV$$

Conduzione

Poiché V non è funzione di T e ipotizzando che k non dipenda dalla posizione

$$\int_v \frac{\partial}{\partial t} c_v \rho T dV - \int_v k \nabla^2 T dV - \int_v \sigma dV = 0$$

$$\int_v \left(\frac{\partial}{\partial t} c_v \rho T - k \nabla^2 T - \sigma \right) dV = 0$$

Deve valere per ogni dV

$$\frac{\partial}{\partial t}(c_v \rho T) = k \nabla^2 T + \sigma$$

Ed infine si ricava...

Equazione di Fourier

$$\frac{\rho c_v}{k}\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{\sigma}{k}$$

L'equazione di bilancio energetico (**EQUAZIONE DI FOURIER**) è una equazione differenziale alle derivate parziali, lineare in $T = f(x, y, z, t)$ del 2° ordine rispetto a x, y, z e del 1° ordine rispetto a t.

Casi particolari dell'equazione di Fourier

1) Assenza di generazione di potenza:

$$\sigma = 0 \Rightarrow \nabla^2 T = \frac{\rho c_v}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

2) Regime stazionario (e prende il nome di **eq. di Poisson**):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla^2 T + \frac{\sigma}{k} = 0$$

3) 1+2 (e prende il nome di **eq. di Laplace**):

$$\sigma = 0; \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla^2 T = 0$$

Conduzione

CONDIZIONI AL CONTORNO

Problema di Dirichlet $\rightarrow T$

Condizioni al contorno spaziali
(essendo del 2° ordine rispetto a x,y,z
le condizioni possono essere imposte
sia su T che su $\dot{q}$)

Problema di Neumann $\rightarrow \dot{q} = -k\,\frac{\partial T}{\partial x}$

Condizioni iniziali (al contorno temporale)

Sistemi di coordinate

Nell’impostare il problema differenziale è importante scegliere il sistema di coordinate che permetta di eliminare una o più variabili indipendenti. Noi analizzeremo i seguenti sistemi di coordinate:

COORDINATE CARTESIANE

COORDINATE CILINDRICHE

COORDINATE SFERICHE

Coordinate cartesiane

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\sigma(x,y,z,t)}{k} = \frac{\rho c_v}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Caso particolare dotato di simmetria (geometria + condizioni al contorno):

Parete piana infinita secondo le direzioni y e z, T = T (x)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\sigma(x,t)}{k} = \frac{\rho c_v}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Che, in caso di regime stazionario, diventa...

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\sigma}{k} = 0 \overset{\int dx}{\Rightarrow} \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\sigma}{k}x + A$$

$$T = -\frac{\sigma}{2k}x^2 + Ax + B$$

$$\dot{q} = -k\frac{\partial T}{\partial x} = -k\left(-\frac{\sigma}{k}\cdot x + A\right) = \sigma \cdot x - A \cdot k$$

Coordinate cartesiane

Lastra piana monostrato senza generazione di potenza

In assenza di generazione di potenza, ponendo le seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{cases} T = T_1 \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = B \\ T = T_2 \quad x = s \quad \Rightarrow \quad T_2 = A \cdot s + T_1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{T_2 - T_1}{s} \end{cases}$$

si ottiene

$$T = Ax + B = \frac{T_2 - T_1}{s} x + T_1$$

$$\dot{q} = -k \frac{\partial T}{\partial x} = -k \left(\frac{T_2 - T_1}{s} \right) = -\frac{\Delta T}{R}$$

Coordinate cilindriche

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\sigma(r,\varphi,z,t)}{k} = \frac{\rho c_v}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Caso particolare dotato di simmetria (geometria + condizioni al contorno):

Cilindro pieno o cavo di altezza infinita, $T = T(r)$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\sigma(r,t)}{k} = \frac{\rho c_v}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Che, in caso di regime stazionario diventa…

$$T = -\frac{\sigma}{4k}r^2 + A\ln\frac{r}{B} = -\frac{\sigma}{4k}r^2 + A\ln(r) + C$$

Coordinate cilindriche

Cilindro indefinito

Il flusso termico dipende solo dal flusso radiale : $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\sigma}{k} = 0$

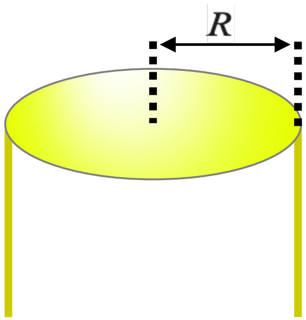
$$\frac{1}{r}\frac{\partial\left(\frac{\partial T}{\partial r}r\right)}{\partial r} = -\frac{\sigma}{k} \Rightarrow \frac{\partial\left(\frac{\partial T}{\partial r}r\right)}{\partial r} = -\frac{\sigma}{k}r \overset{\int dx}{\Rightarrow} r\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -\frac{\sigma}{2k}r^2 + C$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -\frac{\sigma}{2k}r + \frac{C}{r} \overset{\int dx}{\Rightarrow} T = -\frac{\sigma}{4k}r^2 + Cln(r) + D$$

$$\dot{q} = -k\frac{\partial T}{\partial r} = -k\left(-\frac{\sigma}{2k}r + \frac{C}{r}\right) = \frac{\sigma}{2}r - \frac{k}{r}C$$

Coordinate cilindriche

Barra cilindrica piena (con generazione di potenza)
ponendo le seguenti condizioni al contorno:



$$T = -\frac{\sigma}{4k}r^2 + Cln(r) + D \overset{\frac{\partial}{\partial r}}{\Rightarrow} \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\sigma}{2k}r + \frac{C}{r}$$

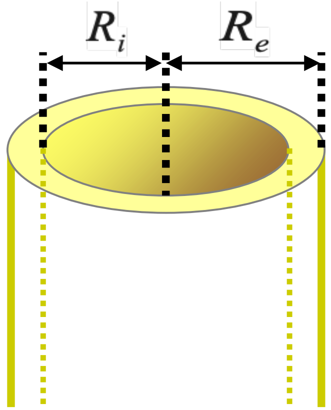
$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial r} \|_{r=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \\ T = T_2 \quad r = R \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{\sigma}{4k}r^2 + D \quad \Rightarrow \quad D = T_2 + \frac{\sigma}{4k}R^2 \end{cases}$$

$$T = \frac{\sigma}{4k}(R^2 - r^2) + T_2 \overset{\frac{\partial}{\partial r}}{\Rightarrow} \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\sigma}{2k}r$$

$$\dot{q}_{aerico} = -k\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\sigma}{2}r \qquad \dot{q}_{perunita'dilunghezza} = \pi r^2 \sigma$$

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot areascambiotermico = \frac{\sigma}{2}r \cdot 2\pi r L = \pi r^2 L\sigma = V\sigma$$

Coordinate cilindriche



Barra cilindrica piena (senza generazione di potenza)
ponendo le seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{cases} T = T_i \quad r = R_i \quad \Rightarrow \quad T_i = C ln(R_i) + D \\ T = T_e \quad r = R_e \quad \Rightarrow \quad T_e = C ln(R_e) + D \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad T_e - T_i = C(ln(R_e) - ln(R_i))$$

$$T = C ln(r) + D = \frac{T_e - T_i}{ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} ln(r) + T_i - \frac{T_e - T_i}{ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} ln(R_i) = T_i + \frac{T_e - T_i}{ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} ln\left(\frac{r}{R_i}\right)$$

$$\dot{q}_{aerico} = -k\frac{\partial T}{\partial r} = k\frac{(T_i - T_e)}{ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}\left(\frac{1}{r}\right) \qquad \dot{q}_{perunita'dilunghezza} = \frac{2\pi k}{ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}(T_i - T_e)$$

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot areascambiotermico = -k\frac{\partial T}{\partial r} = k\frac{(T_i - T_e)}{ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}\left(\frac{1}{r}\right) \cdot 2\pi r L = k\frac{(T_i - T_e)}{ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \cdot 2\pi L = cost$$

Coordinate sferiche

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \vartheta^2}+\frac{cotg\vartheta}{r^2}\frac{\partial T}{\partial \vartheta}+\frac{1}{r^2 sen^2\vartheta}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}+\frac{\sigma(r,\vartheta,\varphi,t)}{k}=\frac{\rho c_v}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Caso particolare dotato di simmetria (geometria + condizioni al contorno):

Sfera piena o cava, $T = T(r)$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\sigma(r,t)}{k}=\frac{\rho c_v}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Che, in caso di regime stazionario diventa… $T=-\frac{\sigma}{6k}r^2+\frac{A}{r}+B$

Conduzione attraverso una parete

Considerando costanti le temperature dell'aria all'interno e all'esterno dell'edificio, la trasmissione del calore per <u>Conduzione attraverso una parete</u> di un edificio può essere considerata:

-**Stazionaria**
-**Mono dimensionale**

Se non vi è alcuna generazione interna di calore, per il primo principio:

Pot. Termica entrante - Pot. Termica Uscente = Pot. Termica acc

ovvero:

$$\dot{Q}_e - \dot{Q}_u = \frac{dE_{parete}}{dT}$$

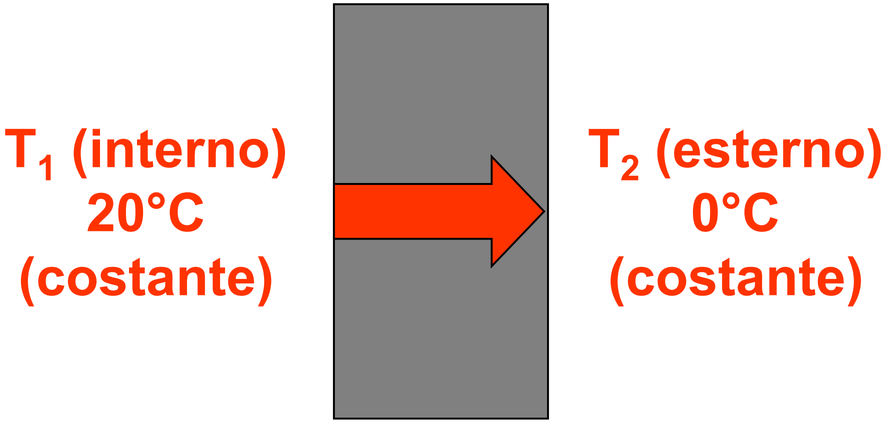
Condizione al contorno

Conduzione attraverso una parete

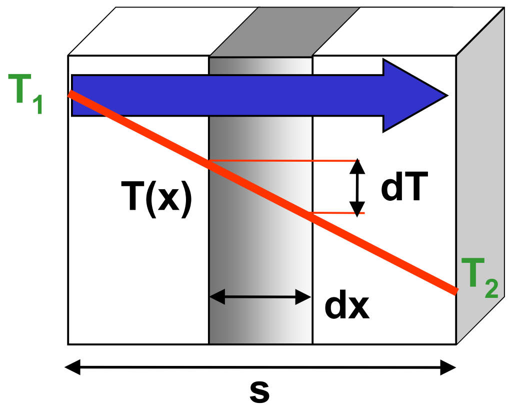
Poiché in condizioni <u>stazionarie</u> la potenza termica accumulata deve essere nulla,
il flusso termico attraverso la parete deve essere costante.

$$\dot{Q}_{cond} = cost$$

in quanto il flusso termico entrante deve uguagliare il flusso termico uscente.



Conduzione attraverso una parete



$\dot{Q}_{cond}$

In condizioni stazionarie e in assenza di generazione interna, la distribuzione di temperatura in una parete piana è una linea retta

$$T = Ax + B$$

Separando le variabili nell'equazione di Fourier e integrando da x = 0 dove T(0) = T_1 a x = s dove T(s) = T_2, si ottiene:

$$\int_{x=0}^{s} \dot{Q}_{cond}\, dx = -\int_{T=T_1}^{T_2} kA\, dT$$

Dove k/s = **conduttanza** della parete [W/m^{2}K]

s/k = **resistenza termica** della parete al passaggio del calore [m^{2}K/W]

$$\dot{Q}_{cond} = -\frac{kA}{s}\Delta T$$

d'ora in avanti chiamiamo **RESISTENZA TERMICA** la resistenza termica riferita alla potenza areica

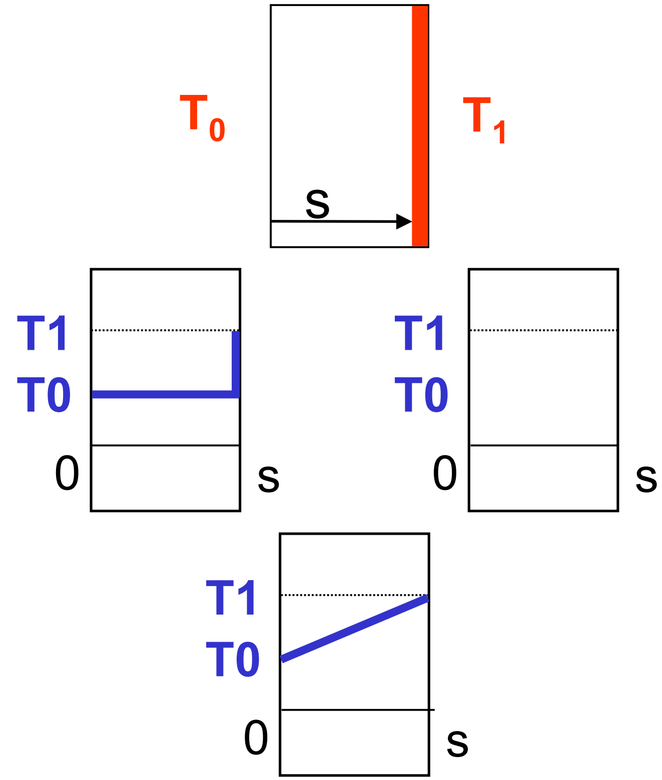
Conduzione attraverso una parete

La proporzionalità diretta tra la quantità di calore e l'incremento di temperatura a parità di spessore è dimostrabile dalla seguente esperienza.

Si porta istantaneamente la faccia destra di una lastra ad una temperatura $T_1 > T_0$

Durante il **transitorio** T è funzione, oltre che della coordinata s anche del tempo τ. Non si è quindi in regime stazionario o permanente

Nella condizione **a regime** l'andamento del profilo delle temperature è lineare



Conduzione attraverso una parete

La relazione $\dot{Q}_{cond} = -\frac{kA}{s}\Delta T$ avendo posto $\frac{s}{k} = R_C$ (resistenza termica) può anche essere espressa nella forma $\dot{Q}_{cond} = -\frac{1}{R_C}A\Delta T$

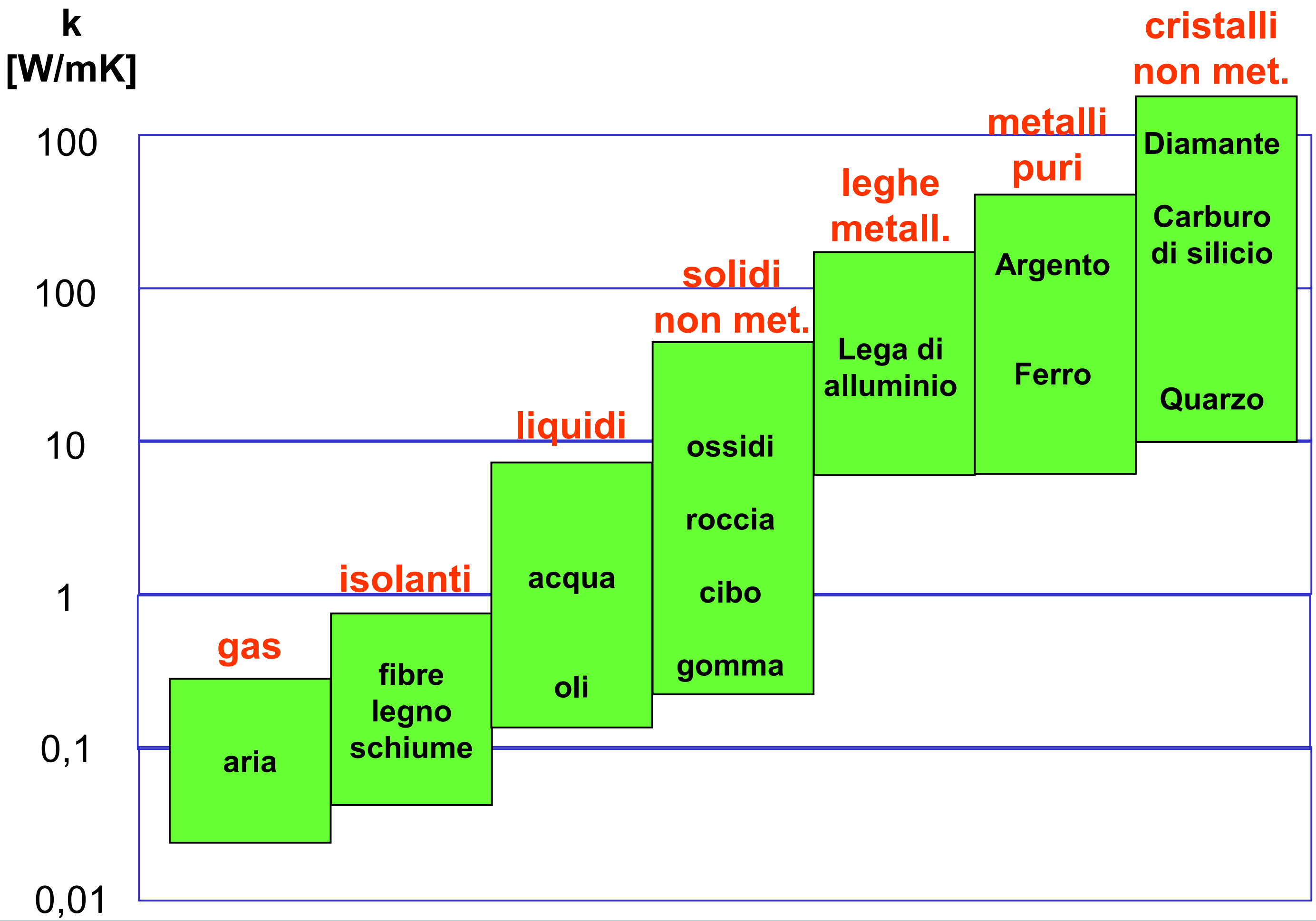
dalla quale si evidenzia come Q_{cond} sia **inversamente proporzionale alla resistenza termica** del materiale

La **resistenza termica** a sua volta è:

- direttamente proporzionale allo spessore della parete;
- inversamente proporzionale alla conducibilità k della parete

A parità di spessore, offriranno una maggiore resistenza termica al passaggio di calore la pareti costituite da materiali con k più piccola

Grafico di resistenza termica



Parete piana monostrato

Abbiamo esaminato il fenomeno della **trasmissione del calore per Conduzione** ed abbiamo appreso che, considerando che in una parete piana:

- il flusso di calore sia **mono direzionale**, ossia normale alla superficie della parete;
- non vi sia alcuna generazione interna di calore;
- il **regime sia stazionario**, ossia che sia superata la fase transitoria e che la distribuzione delle temperature all'interno della parete non risenta del tempo t.

La quantità di calore che attraversa la parete nell'unità di tempo, (la potenza termica) integrando la relazione di Fourier, risulta:

$$\dot{Q}_{cond} = -\frac{kA}{s}\Delta T$$

$$\dot{Q}_{cond} = -\frac{1}{R_{tot}}A\Delta T$$

$$R_{tot} = \sum \frac{s_n}{k_n}$$

R_T è la resistenza termica totale, ossia la sommatoria delle resistenze di ogni singolo strato di materiale considerato isotropo.

La resistenza al passaggio di calore per Conduzione è direttamente proporzionale allo spessore S ed inversamente proporzionale alla conducibilità termica k.

Modellizzazione parete cilindrica Indefinita

Ipotizzando che la trasmissione di calore avvenga in direzione radiale e stazionariamente

$$\dot{Q} = -kA\frac{dT}{dr} \qquad \vec{q} = -k\,gradT$$

Separando le variabili nell'equazione di Fourier, ricordando che l'area attraverso la quale viene scambiato il calore è quella laterale del cilindro, e integrando da $r = r_1$ dove $T(r_1) = T_1$ a $r = r_2$ dove $T(r_2) = T_2$, si ottiene:

$$\int_{r_1}^{r_2}\frac{\dot{Q}}{A} = -\int_{T_1}^{T_2}k\frac{dT}{dr} \qquad \frac{\dot{Q}}{2\pi L}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = -k\int_{T_1}^{T_2}dT \qquad \dot{Q} = \frac{-2\pi k}{ln\frac{r_2}{r_1}}L\,\Delta T$$

$$\dot{Q}_{cond} = -\frac{1}{R_{tot}}L\,\Delta T \qquad R_{cil\ x\ unità\ di\ lungh} = \frac{ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi k}$$

Modellizzazione per sfere

Con procedimento analogo ai cilindri,
per le sfere ($A = 4\pi r^2$) si ottiene:

$$\dot{Q} = 4\pi r_1 r_2 k \frac{(T_1 - T_2)}{(r_2 - r_1)}$$

Note per lo studente

Note per lo studente

Note per lo studente

Note per lo studente