NAJA OMAR S1097765

PROVA TEORICA ANALISI 1 23/01/2021

VOTO PROVA 11 GENNAIO: 28

① ENUNCIARE IL PRINCIPIO DI INDUZIONE E UTILIZZARLO PER PROVARE CHE PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ RISULTA $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

② DEFINIRE, TRAMITE L'UTILIZZO DEI QUANTIFICATORI UNIVERSALI, IL SIGNIFICATO DELLA SCRITTURA $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

③ DATO UN INTERVALLO $I \subset \mathbb{R}$ SI FORNISCA LA DEFINIZIONE DI PUNTO DI MASSIMO E MINIMO RELATIVO PER UNA FUNZIONE $f: I \to \mathbb{R}$. ENUNCIARE E DIMOSTRARE IL TEOREMA DI FERMAT.

④ ENUNCIARE E DIMOSTRARE IL CRITERIO INTEGRALE PER SERIE NUMERICHE. UTILIZZARE TALE CRITERIO PER DISCUTERE IL CARATTERE DELLA SERIE ARMONICA GENERALIZZATA.

---

① DATA UNA PROPOSIZIONE P_n, ESSA RISULTA VERA SE:

- P_1 È VERA (PASSO ZERO)
- SUPPONENDO CHE LA PROPOSIZIONE n-ESIMA È VERA, RISULTA VERA P_{n+1} (PASSO INDUTTIVO)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

PASSO ZERO) $(n=1)$ $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{1+1}$ $\quad \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓

PASSO INDUTTIVO) $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1+1}$ $\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+1+1)} = 1 - \frac{1}{n+2}$ ✓

PER INDUZIONE

$$1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+2-1}{n+2} \quad \frac{n+1-1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1\,(n+1)}{n+2\,(n+1)} \quad \frac{n^2+2n+1}{n+2} = \frac{n^2+2n+1}{n+2}$$

② $\forall M > 0 \; \exists \delta > 0 \mid x \in (1, 1+\delta) \Longrightarrow f(x) > M$

$M \to$ QUANTITÀ GRANDE A PIACERE

$\delta \to$ QUANTITÀ PICCOLA A PIACERE

③ DATI $M, m \in I$, M SI DICE MASSIMO RELATIVO DI $f(x)$ IN I, SE ESISTE, QUANDO ~~VERO~~ ~~$\exists x \in I \mid f(x) \le f(M)$~~ ~~$\forall x \in$~~ ~~$f(x-\varepsilon) \le f(M)$~~ $\forall x \in I \Longrightarrow f(x) \le f(M)$

m SI DICE MINIMO RELATIVO, SE ESISTE, QUANDO $\forall x \in I \Longrightarrow f(x) \ge f(m)$

Teorema di Fermat: Data una funzione continua in I e derivabile nei punti interni di I, se in tale intervallo incontra un punto x_0 di massimo/minimo relativo $f'(x_0)=0$

$\boxed{\text{DIMOSTRAZIONE}}$ (caso punto di massimo. Analoga dimostrazione per il punto di minimo)

Detto $R_{f,x_0} = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ il rapporto incrementale e in x_0 si ha un punto di massimo (minimo), varrà che:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\begin{cases} ①\ \geq 0\ (\leq 0)\ \forall x \leq x_0 \Longrightarrow f'(x_0) \geq 0\ (\leq 0) \text{ per la permanenza del segno} \\ ②\ \leq 0\ (\geq 0)\ \forall x \geq x_0 \Longrightarrow f'(x_0) \leq 0\ (\geq 0) \text{ per la permanenza del segno} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} ①\ f'(x_0) \geq 0\ (\leq 0) \\ ②\ f'(x_0) \leq 0\ (\geq 0) \end{cases} \longrightarrow f'(x_0)=0$$

④ Criterio integrale per serie numeriche: Dato l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$, e la serie $\sum_{i=1}^{+\infty} f(i)$, l'integrale e la serie hanno lo stesso carattere

$\boxed{\text{DIMOSTRAZIONE}}$

Supponendo $f(x)$ una funzione non decrescente e $\sum_{i=1}^{+\infty} f(i)$ una serie non decrescente, vale che $f(i) \leq f(x) \leq f(i+1)$, con $x \in [i; i+1]$ e $i \in \mathbb{N}$

Facendo l'integrale di tutti e tre i termini (tra estremi 1 e $+\infty$) e ricordando che $f(i)$ e $f(i+1)$ sono due valori numerici e quindi termini costanti, $\int_1^{+\infty} f(i)\,dx \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_1^{+\infty} f(i+1)\,dx$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} f(i) \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{j=i+1}^{+\infty} f(j) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} f(i) \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{+\infty} f(i) - f(1)$$

Supponendo che l'integrale converge, $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty \Longrightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} f(i) \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$

$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} f(i) < +\infty \Longrightarrow$ anche la serie converge

Supponendo che l'integrale diverge positivamente, $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty \Longrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{+\infty} f(i) - f(1)$

$\Longrightarrow +\infty \leq \sum_{i=1}^{+\infty} f(i) - f(1) \Longrightarrow +\infty = \sum_{i=1}^{+\infty} f(i) \Longrightarrow$ anche la serie diverge

Applicazione → serie armo

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, Confrontata

Sappiamo che tale inte

$\Longrightarrow$ Dal criterio integ

converge $\forall p >$

APPLICAZIONE → SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, CONFRONTATA CON L'INTEGRALE IMPROPRIO $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ CONTINUO IN $[1; +\infty)$,

SAPPIAMO CHE TALE INTEGRALE ALL'INFINITO CONVERGE $\forall p>1$ E DIVERGE $\forall p\leq 1$

$\Rightarrow$ DAL CRITERIO INTEGRALE PER SERIE, SI PUÒ CONCLUDERE CHE LA SERIE ARMONICA CONVERGE $\forall p>1$ E DIVERGE $\forall p\leq 1$