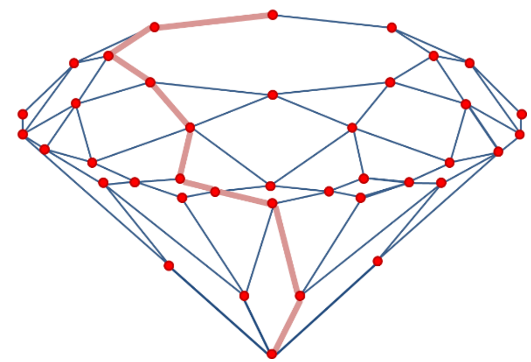
Università Politecnica delle Marche

Programmazione Lineare

ver 3.0.0



Fabrizio Marinelli

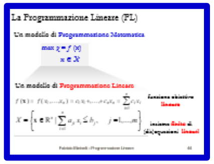
fabrizio.marinelli@staff.univpm.it

tel. 071 - 2204823

- Richiami di Algebra Lineare
- Introduzione alla Prog. Lineare (PL)
- Ottimizzazione convessa e PL
- Geometria della PL
- Sistemi di eq. Lineari e PL

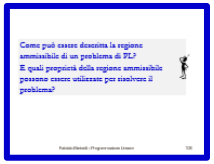
- Richiami di Algebra Lineare

- Introduzione alla Prog. Lineare (PL)

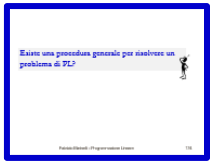


- Ottimizzazione convessa e PL

- Geometria della PL



- Sistemi di eq. Lineari e PL



Richiami di Algebra Lineare

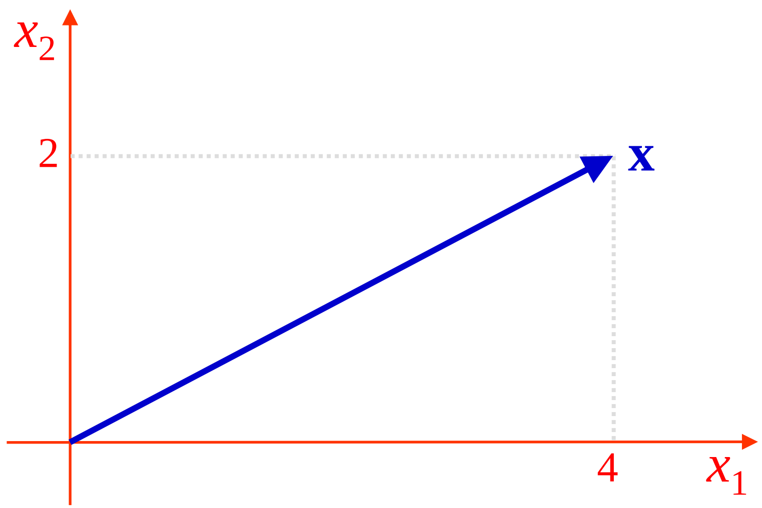
(Vercellis appendice A.2)

Vettori

- **[Definizione]** un vettore $\mathbf{x} \in \mathsf{R}^n$ è una n-pla di numeri reali $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e rappresenta un punto nello spazio R^n .
  Ogni elemento x_i del vettore è detta componente (o coordinata).

- **[Esempio]**

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$



[Definizioni]

- la trasposta di un vettore $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n$ (indicata con $\mathbf{x}^T$) è il vettore riga $[x_1 \dots x_n]$.
- Il versore $\mathbf{e}_i$ è il vettore $[0,\dots,1,\dots0]^T$ in cui la componente i-esima è 1

Vettori: operazioni elementari

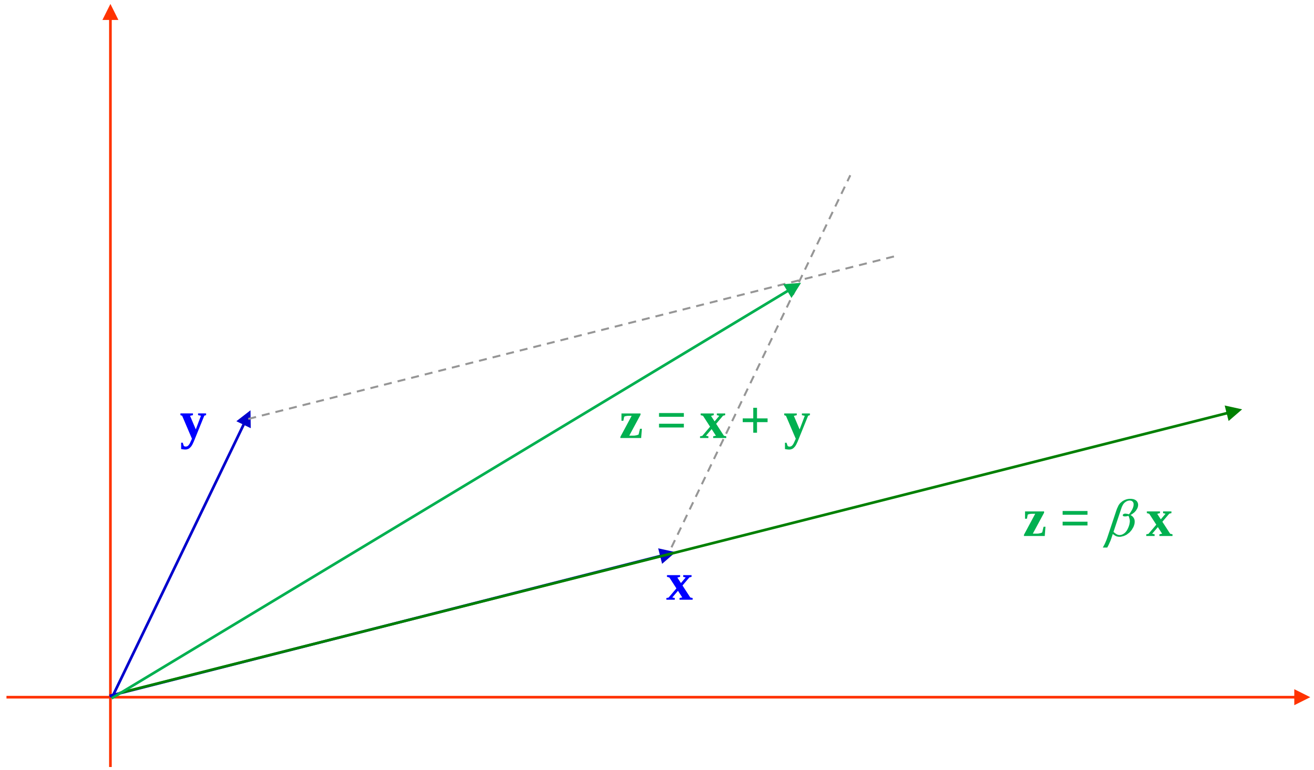
- Somma $\qquad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{z}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 = x_1 + y_1 \\ \vdots \\ z_n = x_n + y_n \end{bmatrix}$$

- Prodotto per uno scalare $\qquad \beta\mathbf{x} = \mathbf{z}$

$$\beta \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 = \beta x_1 \\ \vdots \\ z_n = \beta x_n \end{bmatrix}$$

Vettori: operazioni elementari



$\mathbf{x} = (4,1)$

$\mathbf{y} = (1, 2)$

$\beta = 2$

Combinazioni lineari

- **[Definizione]** il vettore $\mathbf{y} \in R^n$ è una combinazione lineare dei k vettori $\mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_k \in R^n$ se esistono k valori $\alpha_1,\ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}_i = \alpha_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{bmatrix} + \cdots + \alpha_k \begin{bmatrix} x_{k1} \\ \vdots \\ x_{kn} \end{bmatrix}$$

Vettori e combinazioni lineari: esempi

- **[Esempio 1]**
  Il vettore $\mathbf{y} = (5,4)$ è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{x}_1 = (4,1)$ e $\mathbf{x}_2 = (1, 2)$?
  Si tratta di determinare i coefficienti α_1 e α_2 tali che

  $$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}\alpha_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\alpha_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{ovvero di risolvere il sistema} \quad \begin{cases} 4\alpha_1 + \alpha_2 = 5 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 4 \end{cases}$$

  la cui soluzione è: $\alpha_1 = 6/7$ e $\alpha_2 = 11/7$

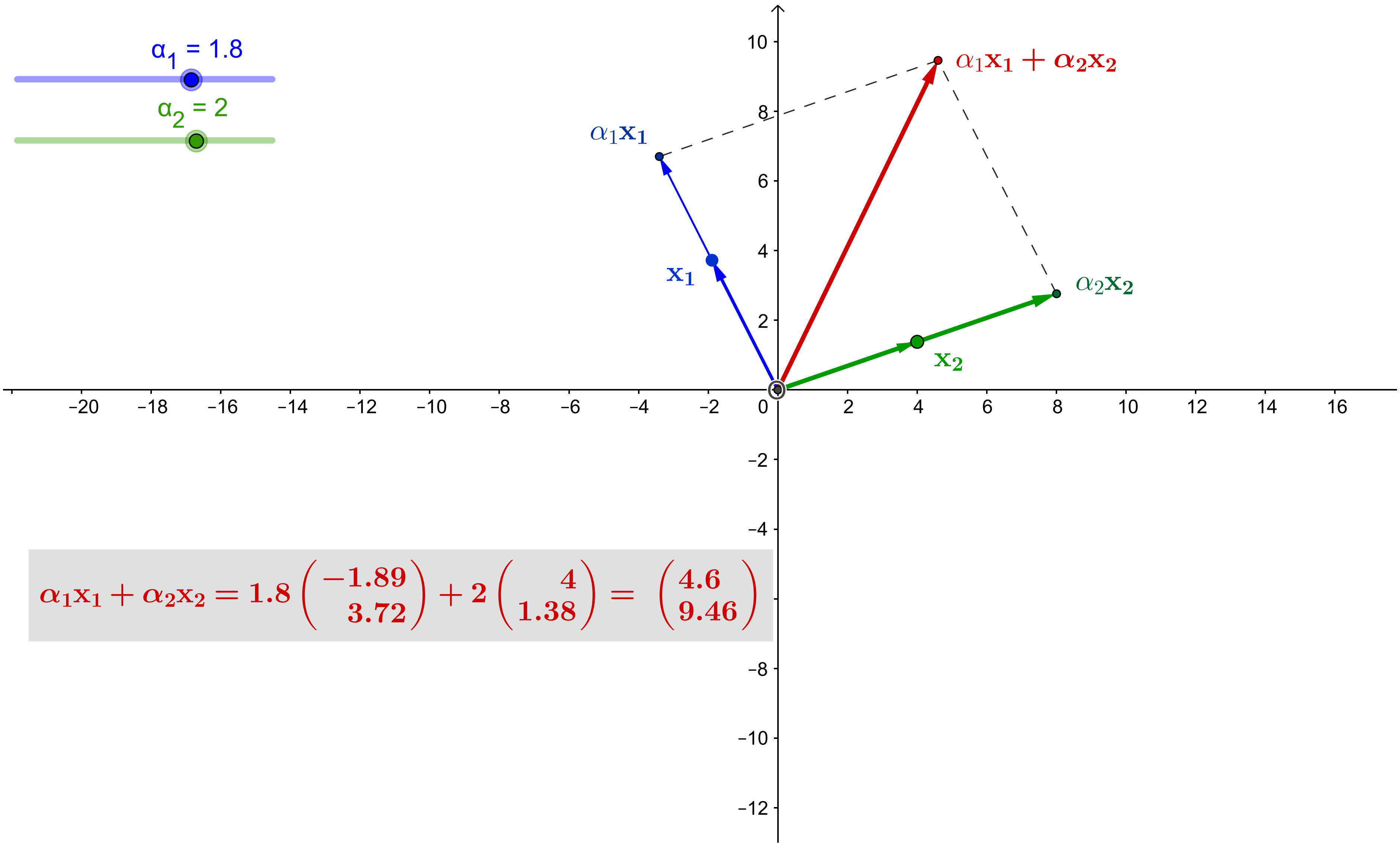
- **[Esempio 2]** E il vettore $\mathbf{y} = (-2, -1)$ è combinazione lineare di $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$?

  Si tratta di determinare i coefficienti α_1 e α_2 tali che

  $$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}\alpha_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\alpha_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{ovvero di risolvere il sistema} \quad \begin{cases} 4\alpha_1 + \alpha_2 = -2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = -1 \end{cases}$$

  la cui soluzione è: $\alpha_1 = -3/7$ e $\alpha_2 = -2/7$

Combinazioni lineari



$$\boldsymbol{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 1.8 \begin{pmatrix} -1.89 \\ 3.72 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1.38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.6 \\ 9.46 \end{pmatrix}}$$

Spazi lineari

[Definizione] l'insieme $S \subseteq R^n$ è uno spazio lineare reale (o spazio vettoriale) se è chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione, cioè se ogni combinazione lineare di suoi elementi resta nell'insieme:

$$(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \mathbf{z} \in S \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S \quad \text{e} \quad \forall \alpha, \beta \in R$$

- **[Osservazione]** ogni spazio lineare contiene il vettore nullo.

- **[Definizione]** $S \subset V$ è un sottospazio lineare dello spazio lineare V se e solo se S è uno spazio lineare

Indipendenza lineare

- **[Definizione]** Un insieme S di m vettori $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m \in R^n$ si dice linearmente indipendente se e solo se l'unico modo per esprimere il vettore nullo come combinazione lineare di $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m$ è utilizzando coefficienti tutti nulli, cioè

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad \forall i}$$

Indipendenza lineare

- **[Osservazioni]**

1. Un sottoinsieme di un insieme S linearmente indipendente è linearmente indipendente.
2. L'insieme $\{\mathbf{0}_n\}$ è linearmente dipendente, quindi ogni insieme S contenente $\mathbf{0}_n$ è linearmente dipendente.
3. Ogni insieme S costituito da un solo elemento diverso dal vettore nullo è linearmente indipendente.

basi

Sia B una collezione di vettori qualsiasi di R^n.

- **[Definizione]** L'insieme di tutte le combinazioni lineari di elementi di B si dice involucro lineare di B oppure sottospazio generato da B e si indica con $lin(B)$.

- **[Definizione]** L'insieme B si dice base di un insieme S se i vettori di B sono linearmente indipendenti e se $S = lin(B)$.

basi

- Data una base $B = \{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m\}$ e un vettore $\mathbf{y} \in S \setminus B$, si definisce rappresentazione di $\mathbf{y}$ rispetto a B il vettore $(\alpha_1,\ldots, \alpha_m)$ tale che

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i$$

- La base $B = \{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m\}$ formata dai versori è detta base canonica

- Data una base $B = \{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m\}$, l'insieme $B \cup \{\mathbf{y}\}$ con $\mathbf{y} \in S \setminus B$, è sempre un insieme linearmente dipendente.

basi

- **[Teorema]** [**Steinitz**] Tutte le basi di un dato spazio lineare S hanno **lo stesso numero** di elementi.

- **[Definizione]** il numero di elementi di una base di uno spazio lineare S è detto rango lineare (o dimensione) di S e si indica con rango(S).

Esercizi

1. Dimostrare che una qualsiasi retta passante per l'origine è un sottospazio lineare di R^2
2. Dimostrare che ogni coppia di punti che individuano una retta che non passa per l'origine forma una base di R^2.
3. Dimostrare che nessun vettore di una base B può essere espresso come combinazione lineare degli altri vettori di B.

Matrici

- **[Definizione]** una matrice $\mathbf{A} \in \mathrm{R}^{m \times n}$ è una tabella di $m{\cdot}n$ scalari organizzati in m righe e n colonne.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 6 & 5 & 1 & -1 \\ -2 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

elemento a_{23}

indice di colonna

indice di riga

- $(m \times n)$ è la dimensione della matrice.
- se $m = n$ la matrice è detta quadrate di ordine n.
- un vettore è una matrice di dimensione $(m \times 1)$.

Notazione

- A seconda dei casi una matrice **A** con *m* righe e *n* colonne può essere rappresentata
  - con un suo elemento generico $\mathbf{A} = [a_{ij}]$
  - con la sua dimensione $\mathbf{A}(m \times n)$
  - per esteso

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

  - come collezione di vettori colonna $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{A}_n]$
  - come collezione di vettori riga

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{a}_m^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

Operazioni su matrici

- Consideriamo due matrici $\mathbf{A}(m \times n)$ e $\mathbf{B}(m \times n)$

  - Somma: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$ $\quad [c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}]$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 7 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

  - Prodotto per uno scalare: $\beta\mathbf{A} = \mathbf{C}$ $\quad [c_{ij} = \beta\, a_{ij}]$

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 9 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

Operazioni su matrici

- Il prodotto tra le matrici **A**($m \times p$) e **B**($q \times n$), definito **se e solo se** $p = q$, è la matrice **C**($m \times n$) in cui l'elemento c_{ij} è:

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \qquad i = 1,\ldots,m \quad j = 1,\ldots,n}$$

- **[Osservazione]** Il prodotto scalare di due vettori **x** e **y** è in effetti un prodotto tra matrici di dimensione ($1 \times m$) e ($m \times 1$).

Operazioni su matrici: proprietà del prodotto

- non è commutativo

  in generale $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$

in particolare:

- $\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_i = \mathbf{A}_i$ (colonna i-esima di $\mathbf{A}$)
- $\mathbf{e}_i^T\mathbf{A} = \mathbf{a}_i$ (riga i-esima di $\mathbf{A}$)

- è associativo

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$$

- gode della prop. distributiva destra e sinistra

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{C} \quad \text{e}$$

$$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{C}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{C}\cdot\mathbf{B}$$

Matrici particolari: trasposta

- La matrice trasposta $\mathbf{A}^T$ di una matrice $\mathbf{A}(m \times n)$ si ottiene scambiando le righe con le colonne (per ogni elemento si ha quindi $a_{ij} \rightarrow a_{ji}$)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

  - $\mathbf{A}^T$ ha dimensione $(n \times m)$
  - $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
  - $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
  - $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$

Matrici particolari: nulla

- La matrice nulla $\mathbf{O}(m \times n)$ è quella composta da tutti zero:

$$\mathbf{O}(m \times n) \qquad a_{ij} = 0 \ \forall i, j$$

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$
  - $\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{O}$
  - $\mathbf{O} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{O}$

Matrici quadrate

- matrice identità

  $\mathbf{I}(n \times n) \qquad a_{ii} = 1,\ a_{ij} = 0\ \forall i \neq j$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- matrice diagonale

  $\mathbf{A}(n \times n) \qquad a_{ij} = 0\ \forall i \neq j$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

- matrice triangolare sup.

  $\mathbf{A}(n \times n) \quad a_{ij} \geq 0\ \forall i \leq j,\ a_{ij} = 0\ \forall i > j$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Matrici quadrate

- matrice simmetrica

  $\mathbf{A}(n \times n) \qquad a_{ij} = a_{ji}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \\ -2 & 6 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

- matrice invertibile: matrice che ammette la sua inversa
  - $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$
  - $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
  - $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$
  - $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$

Determinante di una matrice

- **[Definizione]** Data una matrice quadrata **A** di *ordine* $n \geq 2$, la matrice quadrata di ordine $n-1$ che si ottiene cancellando la k-esima riga e j-esima colonna da **A** si chiama minore $\mathbf{A}_{kj}$ di **A**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \\ -2 & 6 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{23} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -2 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinante di una matrice

- Il determinante det(**A**) di una matrice quadrata **A**($n \times n$) di ordine $n \geq 1$ è una funzione lineare delle righe di **A** a valori reali. La formula generale per calcolare det(**A**) è

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} (-1)^{k+j} \det(\mathbf{A}_{kj}) \qquad \text{per } 1 \leq k \leq n \text{ fissato}$$

Determinante di una matrice

- Il determinante det(**A**) di una matrice quadrata **A**($n \times n$) di ordine $n \geq 1$ è una funzione lineare delle righe di **A** a valori reali. La formula generale per calcolare det(**A**) è

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \boxed{(-1)^{k+j} \det(\mathbf{A}_{kj})} \qquad \text{per } 1 \leq k \leq n \text{ fissato}$$

cofattore (o complemento algebrico) dell'elemento a_{kj}

[Nota] Il cofattore di a_{kj} è il determinante della matrice che si ottiene sostituendo la k-esima riga di **A** con il vettore unitario $\mathbf{e}_j$

Determinante di una matrice

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j}\det(\mathbf{A}_{kj}) \qquad \text{per } 1 \le k \le n \text{ fissato}$$

Il determinante è definito ricorsivamente.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} \qquad \det(\mathbf{A}) = a_{11}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinante di una matrice

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} (-1)^{k+j} \det(\mathbf{A}_{kj}) \qquad \text{per } 1 \le k \le n \text{ fissato}$$

Il determinante è definito ricorsivamente.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \det\left(\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) - a_{12} \det\left(\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}\right) + a_{13} \det\left(\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\right)$$

Determinante di una matrice

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} (-1)^{k+j} \det(\mathbf{A}_{kj}) \qquad \text{per } 1 \le k \le n \text{ fissato}$$

[casi particolari]

se **A** è una matrice diagonale o triangolare superiore allora

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

[esercizio] quante operazioni aritmetiche richiede il calcolo del determinante di una matrice di ordine n?

Proprietà del determinante

1. per ogni colonna $\mathbf{A}_k$ e $t \in \mathrm{R}$ si ha

   $$\det(\mathbf{A}_1 \mid \ldots \mid t\mathbf{A}_k \mid \ldots \mid \mathbf{A}_n) = t \det(\mathbf{A}_1 \mid \ldots \mid \mathbf{A}_k \mid \ldots \mid \mathbf{A}_n)$$

2. per ogni colonna $\mathbf{A}_k$ e $\mathbf{c} \in \mathrm{R}^n$ si ha

   $$\det(\mathbf{A}_1 \mid \ldots \mid \mathbf{A}_k + \mathbf{c} \mid \ldots \mid \mathbf{A}_n) = \det(\mathbf{A}_1 \mid \ldots \mid \mathbf{A}_k \mid \ldots \mid \mathbf{A}_n) + \det(\mathbf{A}_1 \mid \ldots \mid \mathbf{c} \mid \ldots \mid \mathbf{A}_n)$$

3. $\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{A})$ se scambio due colonne di $\mathbf{A}$ tra loro
4. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$
5. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ **se e solo se** tutti i vettori colonna di $\mathbf{A}$ sono <u>linearmente indipendenti</u>
6. $\det(\mathbf{I}) = 1$
7. $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$
8. $\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1 / \det(\mathbf{A})$

- In base alla 4. le proprietà 1., 2., 3. e 5. possono anche essere enunciate per righe.

Rango di una matrice

- **[Definizione]** $\mathbf{A}(n \times n)$ è detta matrice non singolare se $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

- **[Definizione]** Il rango di una matrice $\mathbf{A}(m \times n)$, indicato anche con $\mathrm{rank}(\mathbf{A})$, è il massimo ordine tra tutte le sottomatrici non singolari di $\mathbf{A}$.

- **[Osservazioni]**
  - Dalla definizione segue che $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$.
  - Se $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \min(m, n)$ la matrice $\mathbf{A}$ si dice di rango pieno.
  - Una matrice quadrata è di rango pieno se e solo se è non singolare.

Esercizi

1. Verificare le proprietà 1-8 dei determinanti con i seguenti dati

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad t = 4$$

2. Dimostrare la proprietà 8 dei determinanti.
3. Sia $\mathbf{A}'$ la matrice ottenuta da $\mathbf{A}(n \times n)$ sommando ad una riga $\mathbf{a}_j^T$ una combinazione lineare delle righe di $\mathbf{A}$.
   Dimostrare che $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}')$

Trasformazioni lineari e matrici

- **[Definizione]** Siano V e W due spazi lineari. Una trasformazione T: $V \to W$ è lineare se conserva l'addizione e la moltiplicazione per scalari

$$T(a\mathbf{x}+b\mathbf{y}) = aT(\mathbf{x})+bT(\mathbf{y}) \qquad a,b \in \mathrm{R}, \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in V, \quad T(\mathbf{x}),T(\mathbf{y}) \in W$$

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(\mathbf{x}_i) \qquad a_i \in \mathrm{R}, \quad \mathbf{x}_i \in V, \quad T(\mathbf{x}_i) \in W$$

- **[Proposizione]** Ogni trasformazione lineare T:$V \to W$ con $V \subseteq \mathrm{R}^n$ e $W \subseteq \mathrm{R}^m$ è rappresentabile da una matrice A con m righe e n colonne detta matrice associata a T

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Trasformazioni lineari e matrici

- Infatti se $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ è la base canonica di V, allora $\mathbf{x} \in V$ può essere scritto come

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$$

Se $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ è una base di W e $a_{1i}, \ldots, a_{mi}$ la rappresentazione di $T(\mathbf{e}_i) \in W$, si può scrivere

$$T(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \mathbf{w}_j$$

$$T(\mathbf{x}) = T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \mathbf{w}_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \mathbf{w}_j x_i$$

Una matrice **A** che ha n colonne, una per ogni m-pla $(a_{1i}, \ldots, a_{mi})$ che definisce $T(\mathbf{e}_i)$, è una matrice che descrive la trasformazione lineare

Trasformazioni lineari e matrici

- Quindi, se T è una trasformazione lineare da R^n in R^m si ha

$$\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) \qquad \text{con } \mathbf{x} \in R^n \text{ e } \mathbf{y} \in R^m$$

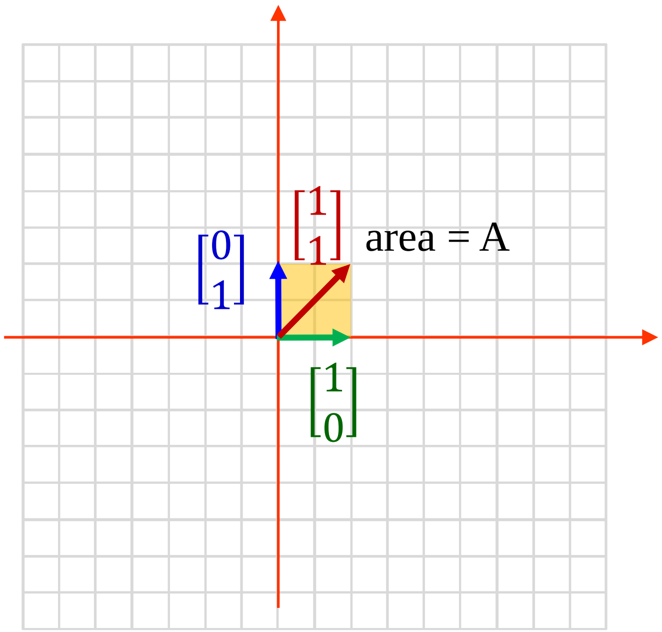
o equivalentemente

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \text{con } \mathbf{A}\ (m \times n)$$

- In particolare, se T è una trasformazione lineare da R^n in R si ha

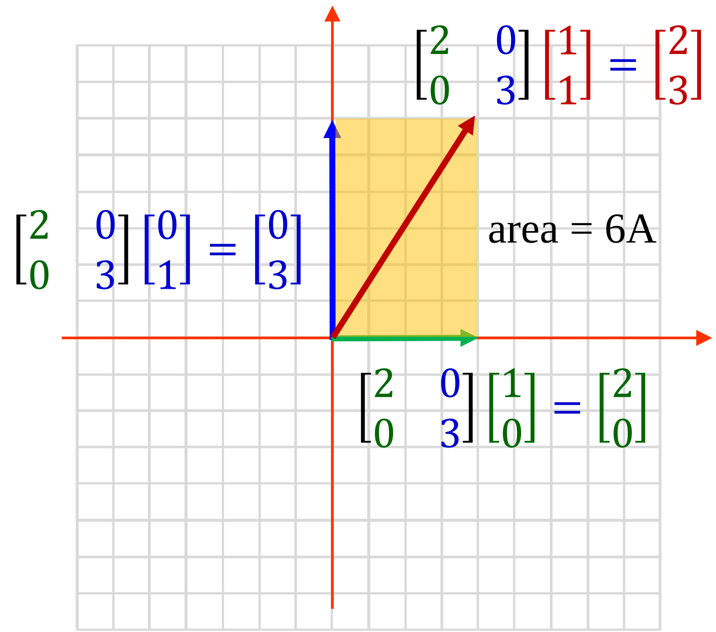
$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = y \qquad \text{con } \mathbf{c} \in R^n$$

Trasformazioni lineari e determinanti: esempi



Trasformazione lineare

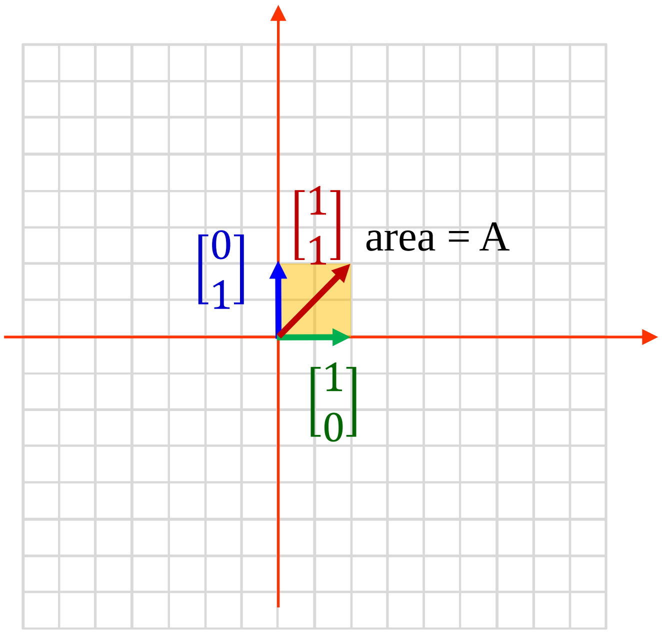
$$\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$$



Una trasformazione lineare in generale modifica le aree. Il fattore di scala della trasformazione è il determinante della trasformazione

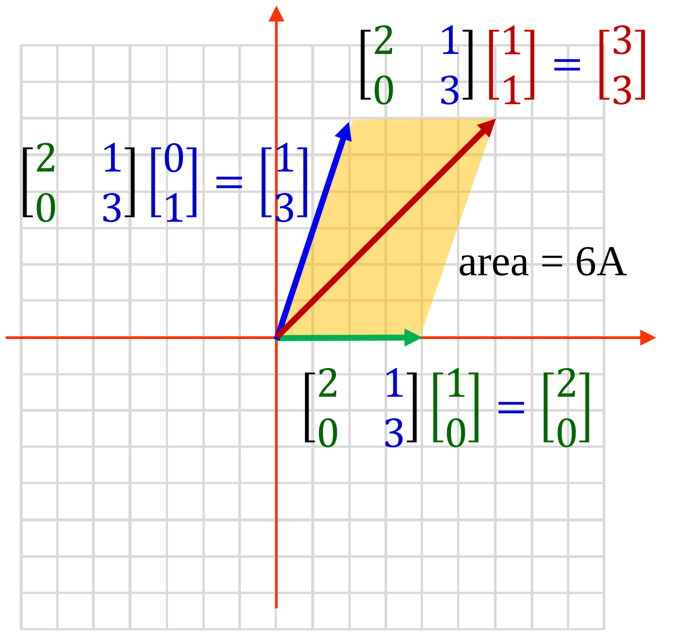
$$det\left(\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\right) = 6$$

Trasformazioni lineari e determinanti: esempi



Trasformazione lineare

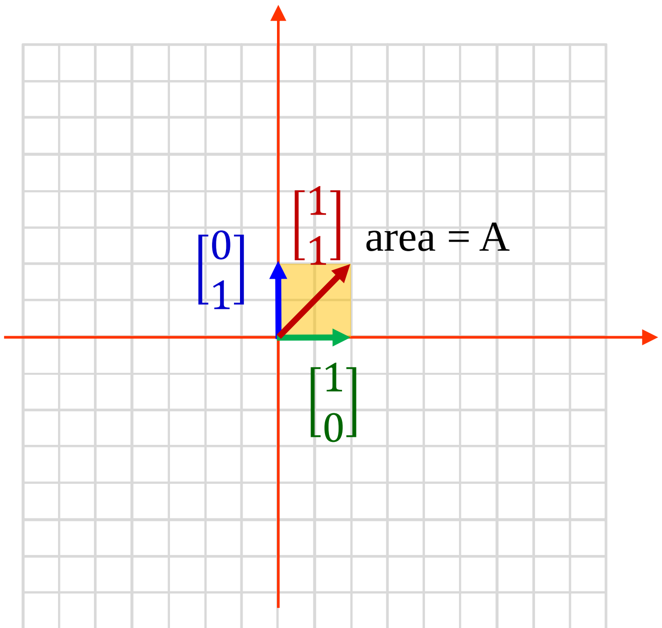
$$\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{bmatrix}$$



Una trasformazione lineare in generale modifica le aree. Il fattore di scala della trasformazione è il determinante della trasformazione

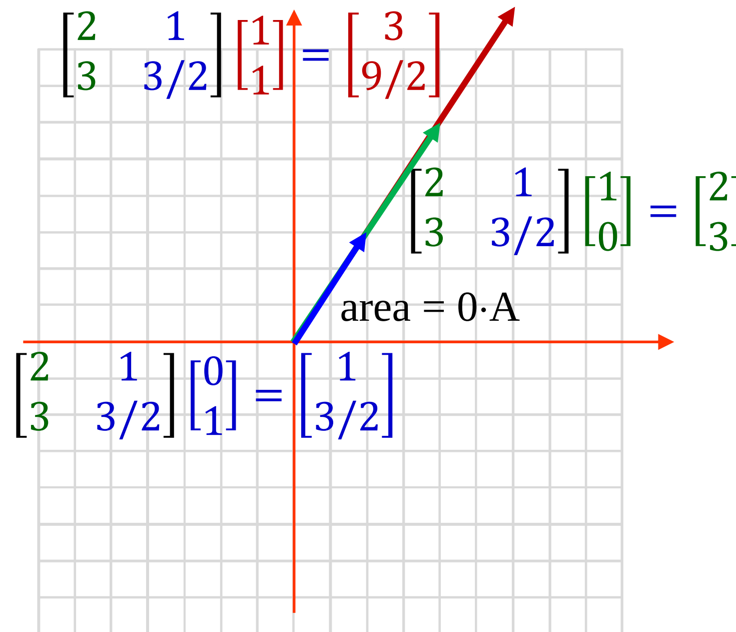
$$det\left(\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{bmatrix}\right)=6$$

Trasformazioni lineari e determinanti: esempi



Trasformazione lineare

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3/2 \end{bmatrix}$$



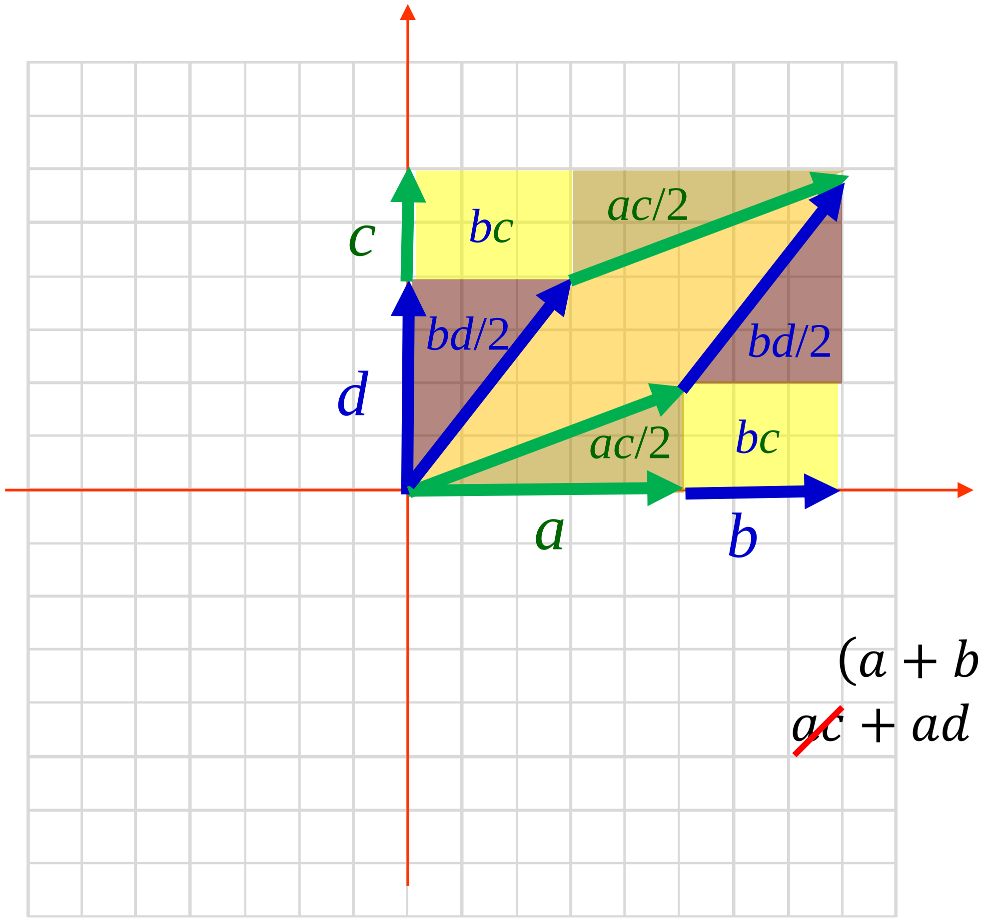
$$det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3/2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Se il determinante è 0, perdo una o più dimensioni e l'area collassa in un segmento o in punto e di conseguenza si annulla.

[domanda] Qual è il significato geometrico di un determinante negativo?

determinante: interpretazione geometrica

$$det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - cb$$



$$(a+b)(c+d) - 2bc - ac - bd =$$
$$\cancel{ac} + ad + bc + \cancel{bd} - 2bc - \cancel{ac} - \cancel{bd} =$$
$$ad - bc$$

Programmazione Lineare
(introduzione)

(Vercellis cap. 3.1)

La Programmazione Lineare (PL)

Un modello di Programmazione Matematica

$$\max z = f(\mathbf{x})$$
$$\mathbf{x} \in X$$

Un modello di Programmazione Lineare

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 +, \dots, + c_n x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

funzione obiettivo **lineare**

$$X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathrm{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \le b_j, \quad j = 1, \dots, m \right\}$$

insieme **finito** di (dis)equazioni **lineari**

Notazione e definizioni di base

$$\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}$$

- $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ *funzione obiettivo*
- $X = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}\}$ *regione ammissibile*

Incognite del problema

- $\mathbf{x} \in R^n$ vettore delle *variabili decisionali*. Ogni $\mathbf{x} \in X$ è una soluzione ammissibile (cioè un vettore che soddisfa tutti i vincoli) mentre ogni $\mathbf{y} \notin X$ è una soluzione inammissibile.
- $z \in R$ *valore* che assume la funzione obiettivo in corrispondenza di una soluzione $\mathbf{x} \in X$

Parametri del problema

- $\mathbf{c} \in R^n$ vettore dei coefficienti (di *costo* o di *profitto*) della f.o.
- $\mathbf{b} \in R^m$ vettore dei *termini noti* dei vincoli
- $\mathbf{A} \in R^{m \times n}$ matrice dei coefficienti dei vincoli (matrice *tecnologica*)

Ipotesi della Programmazione Lineare

- Un problema è rappresentato correttamente da un modello di programmazione lineare se
  - **Divisibilità:** variabili con valori frazionari
  - **Certezza:** coefficienti costanti e noti a priori
  - **Linearità:** relazioni esclusivamente di tipo lineare:

$$c_1 x_1 +, \dots, + c_n x_n$$

- **Proporzionalità**: contributo proporzionale al valore assunto: non ci sono economie di scala
- **Additività**: i contributi possono essere solo sommati

"In un'approssimazione del primo ordine il mondo è lineare"
Robert Simons

Programmazione lineare (PL): esempio

Un esempio di problema di programmazione lineare con 2 variabili e 4 vincoli:

$$\max z = x_1 + 3x_2$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{C1:} & 6x_1 + 10x_2 & \leq & 30 \\
\text{C2:} & 3x_1 + 2x_2 & \geq & 6 \\
\text{C3:} & x_1 - 2x_2 & \geq & -1 \\
\text{C4:} & x_2 & \geq & 1/2
\end{array}$$

Possiamo rappresentare graficamente il problema…

Esempio: un problema di PL in R^2

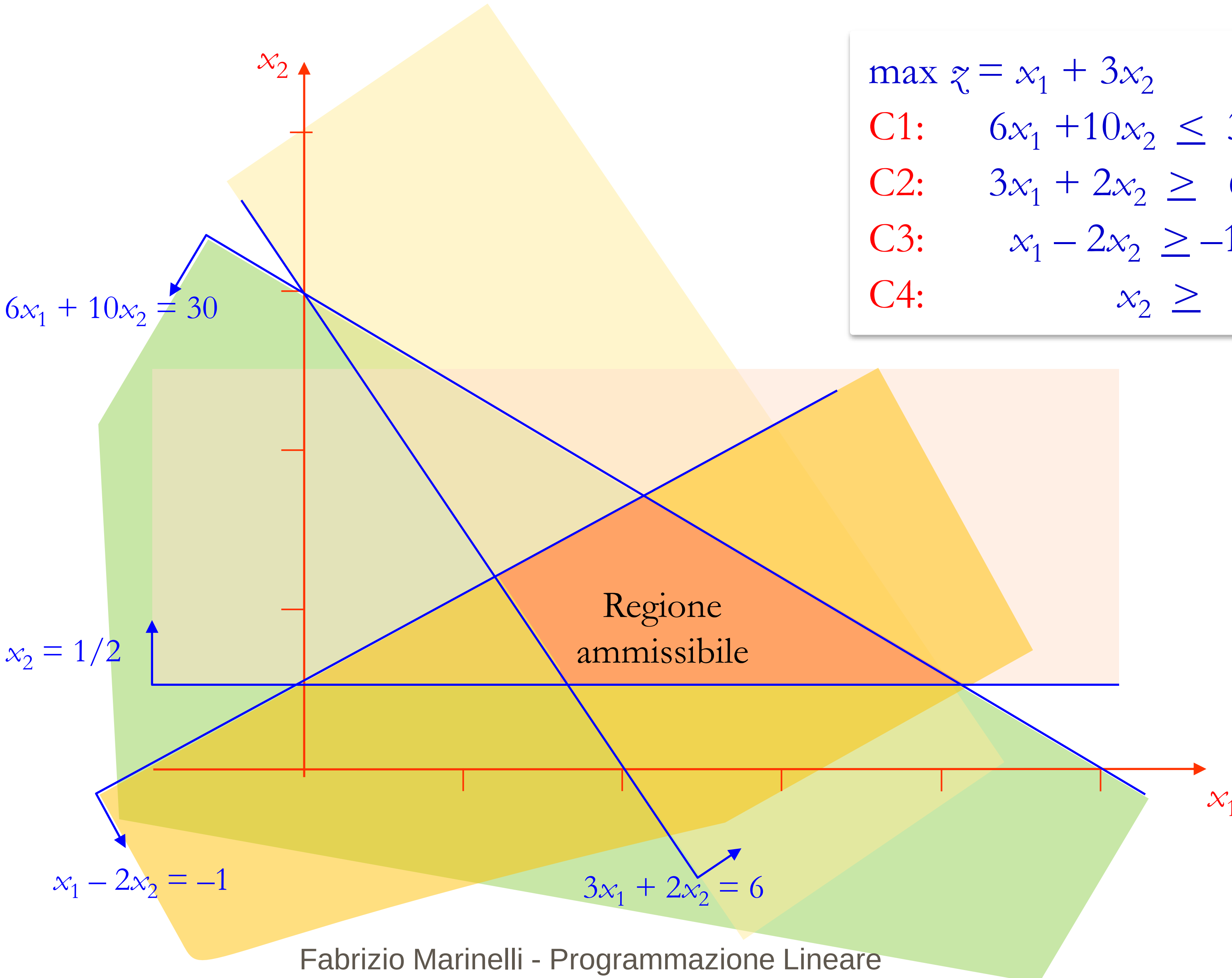
$\max z = x_1 + 3x_2$

C1: $6x_1 + 10x_2 \leq 30$

C2: $3x_1 + 2x_2 \geq 6$

C3: $x_1 - 2x_2 \geq -1$

C4: $x_2 \geq 1/2$



Esempio: un problema di PL in R^2

$$\max z = x_1 + 3x_2$$

C1: $6x_1 + 10x_2 \leq 30$

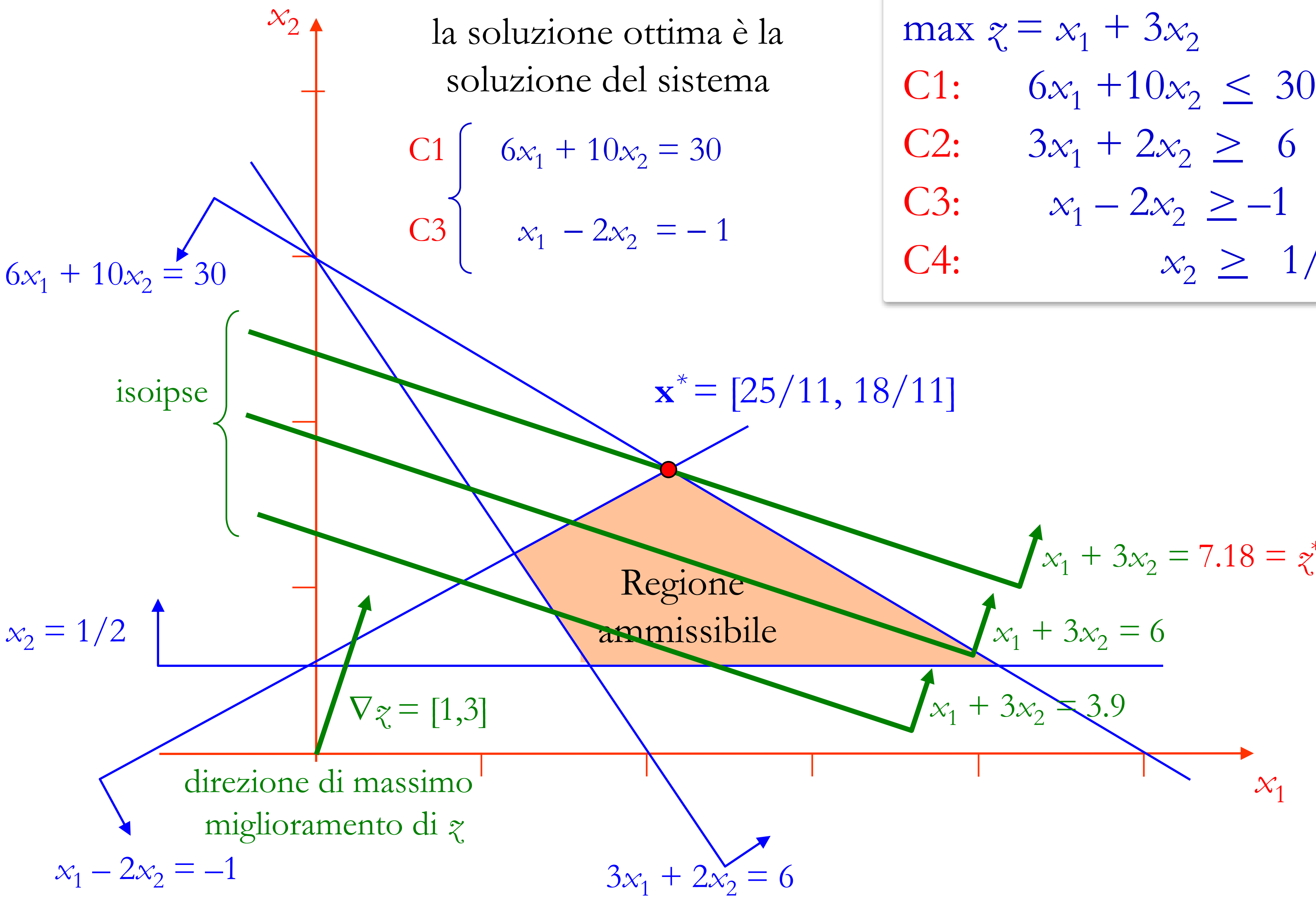
C2: $3x_1 + 2x_2 \geq 6$

C3: $x_1 - 2x_2 \geq -1$

C4: $x_2 \geq 1/2$

la soluzione ottima è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} 6x_1 + 10x_2 = 30 & \text{C1} \\ x_1 - 2x_2 = -1 & \text{C3} \end{cases}$$



Esempio: un problema di PL in R^2

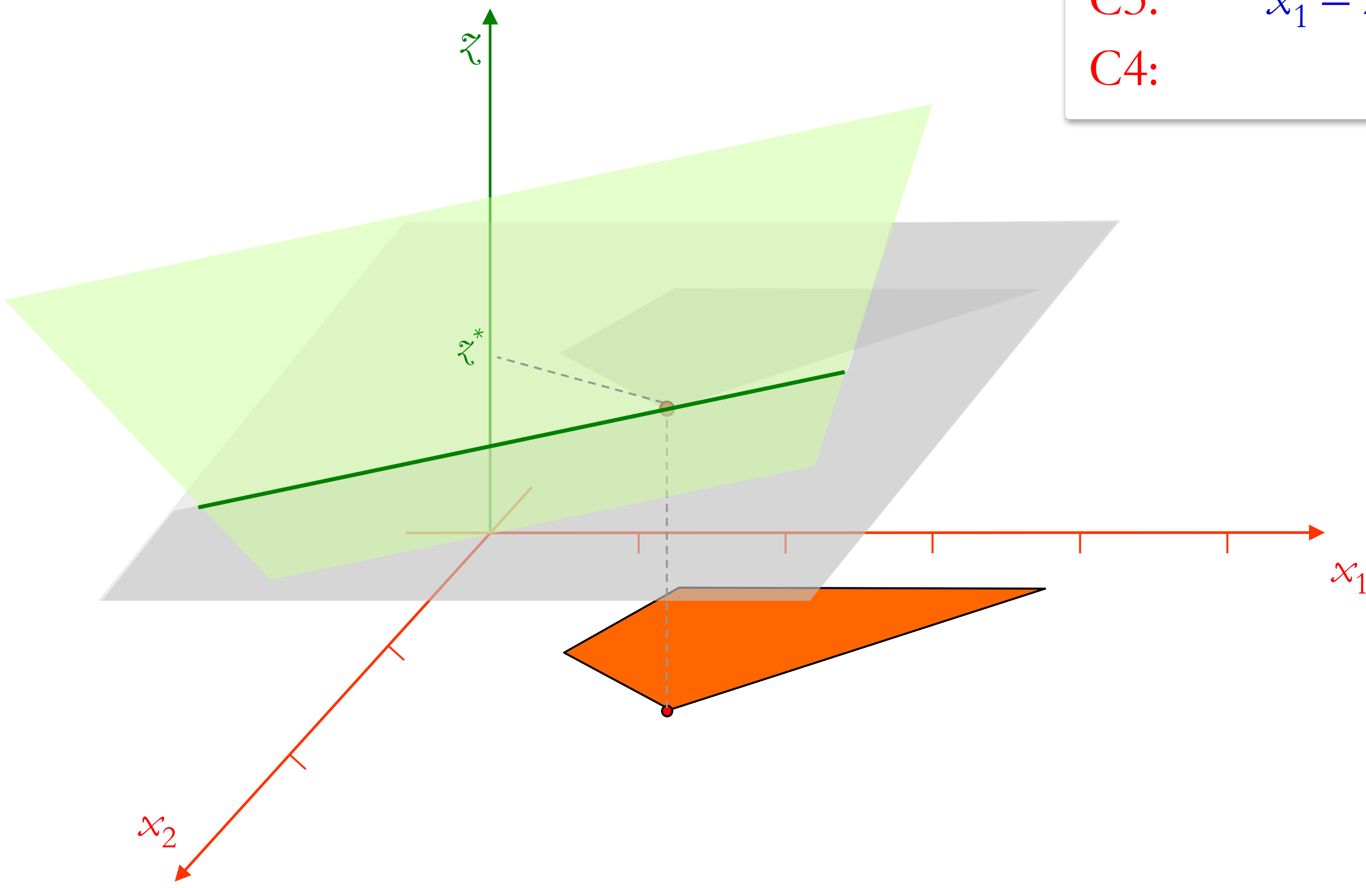
$\max z = x_1 + 3x_2$

C1: $6x_1 + 10x_2 \leq 30$

C2: $3x_1 + 2x_2 \geq 6$

C3: $x_1 - 2x_2 \geq -1$

C4: $x_2 \geq 1/2$



Un esempio

Notazione e definizioni di base

- Isoipsa: luogo dei punti nei quali la funzione obiettivo $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ assume un prefissato valore z' (in R^2 ogni isoipsa è una retta).
  L'intersezione di una isoipsa $z' = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ con la *regione ammissibile* determina tutte le soluzioni del problema di valore z'.

- Direzione di massimo miglioramento: in un problema di massimo è dato dal gradiente della funzione obiettivo:

$$\boxed{\nabla z = \frac{\partial z}{\partial x_i} \qquad i = 1,\ldots,n}$$

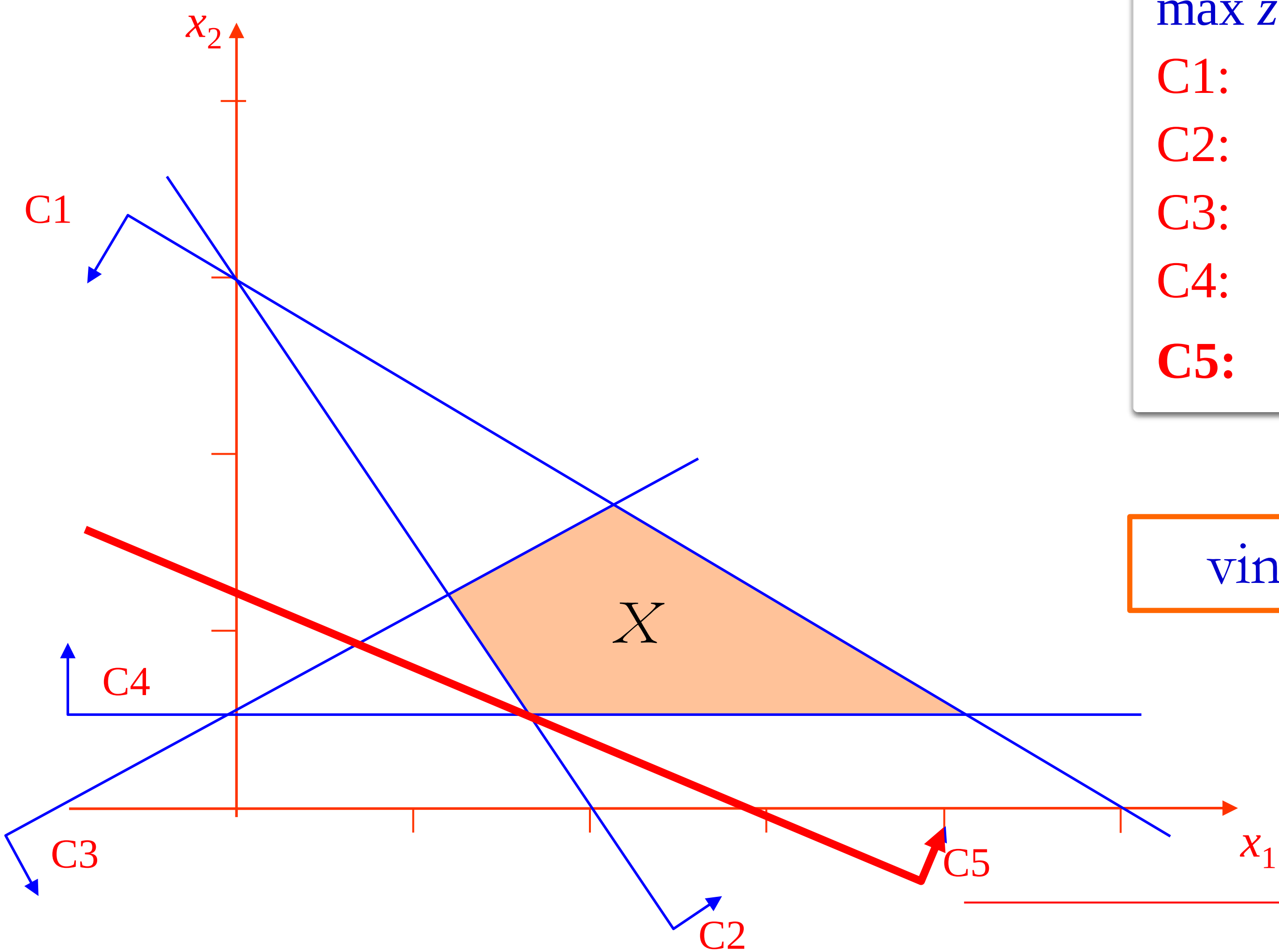
Nel caso di problema di minimo è l'antigradiente

Notazione e definizioni di base

- La soluzione $\mathbf{y}$ rende attivo il vincolo $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq b$ se $\mathbf{a}^T\mathbf{y} = b$
- La soluzione $\mathbf{y}$ rende inattivo il vincolo $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq b$ se $\mathbf{a}^T\mathbf{y} < b$

- Il vincolo $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq b$ è ridondante rispetto al sistema di vincoli $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ se ogni soluzione di $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ è anche una soluzione di $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq b$

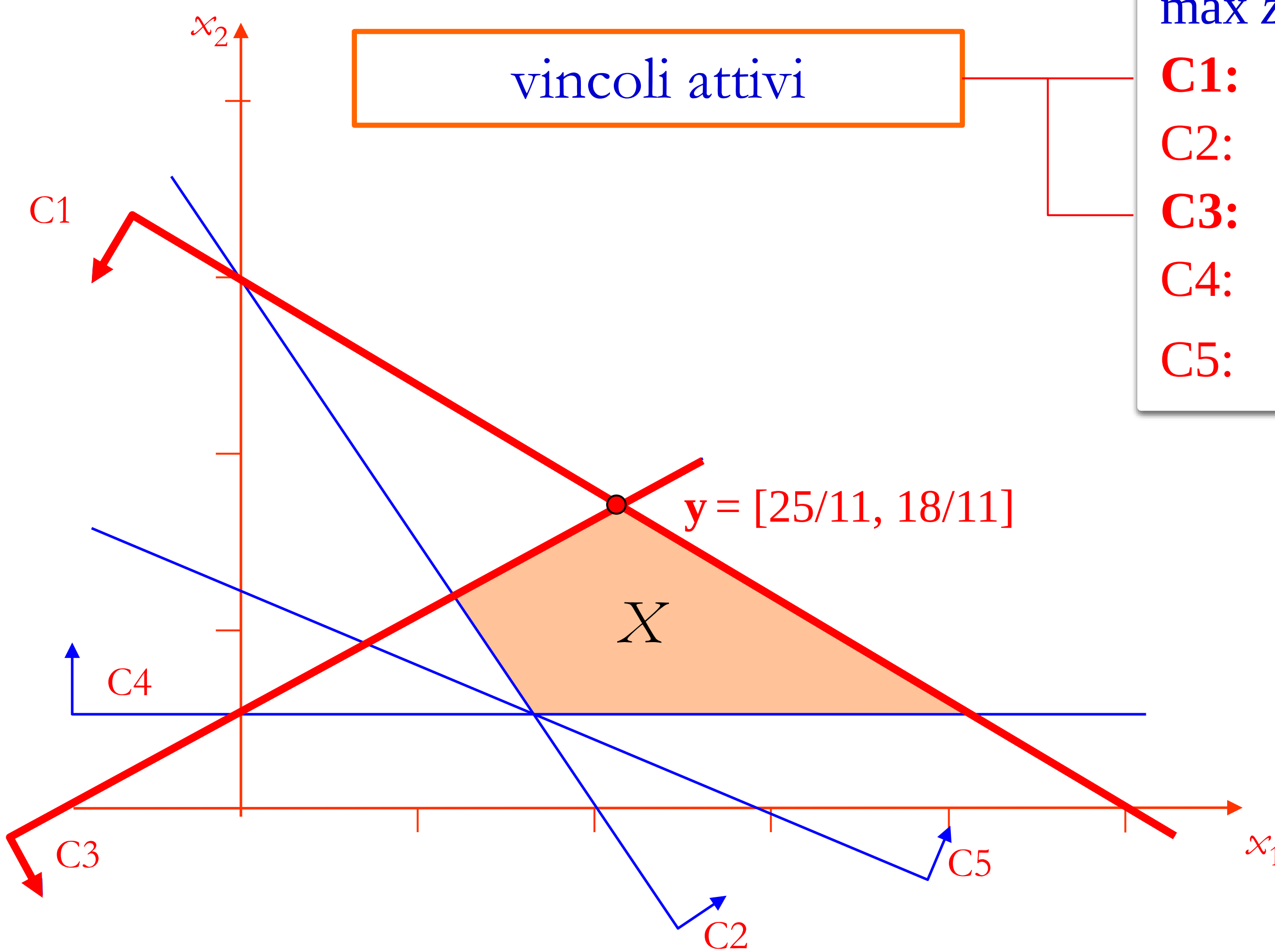
Notazione e definizioni di base



$$
\begin{array}{lrcl}
 & \max z = x_1 + 3x_2 & & \\
\text{C1:} & 6x_1 + 10x_2 & \le & 30 \\
\text{C2:} & 3x_1 + 2x_2 & \ge & 6 \\
\text{C3:} & x_1 - 2x_2 & \ge & -1 \\
\text{C4:} & x_2 & \ge & \tfrac{1}{2} \\
\textbf{C5:} & \mathbf{3x_1 + 8x_2} & \mathbf{\ge} & \mathbf{9}
\end{array}
$$

vincolo ridondante

Notazione e definizioni di base



$\max z = x_1 + 3x_2$

C1: $\mathbf{6y_1 + 10y_2 = 30}$

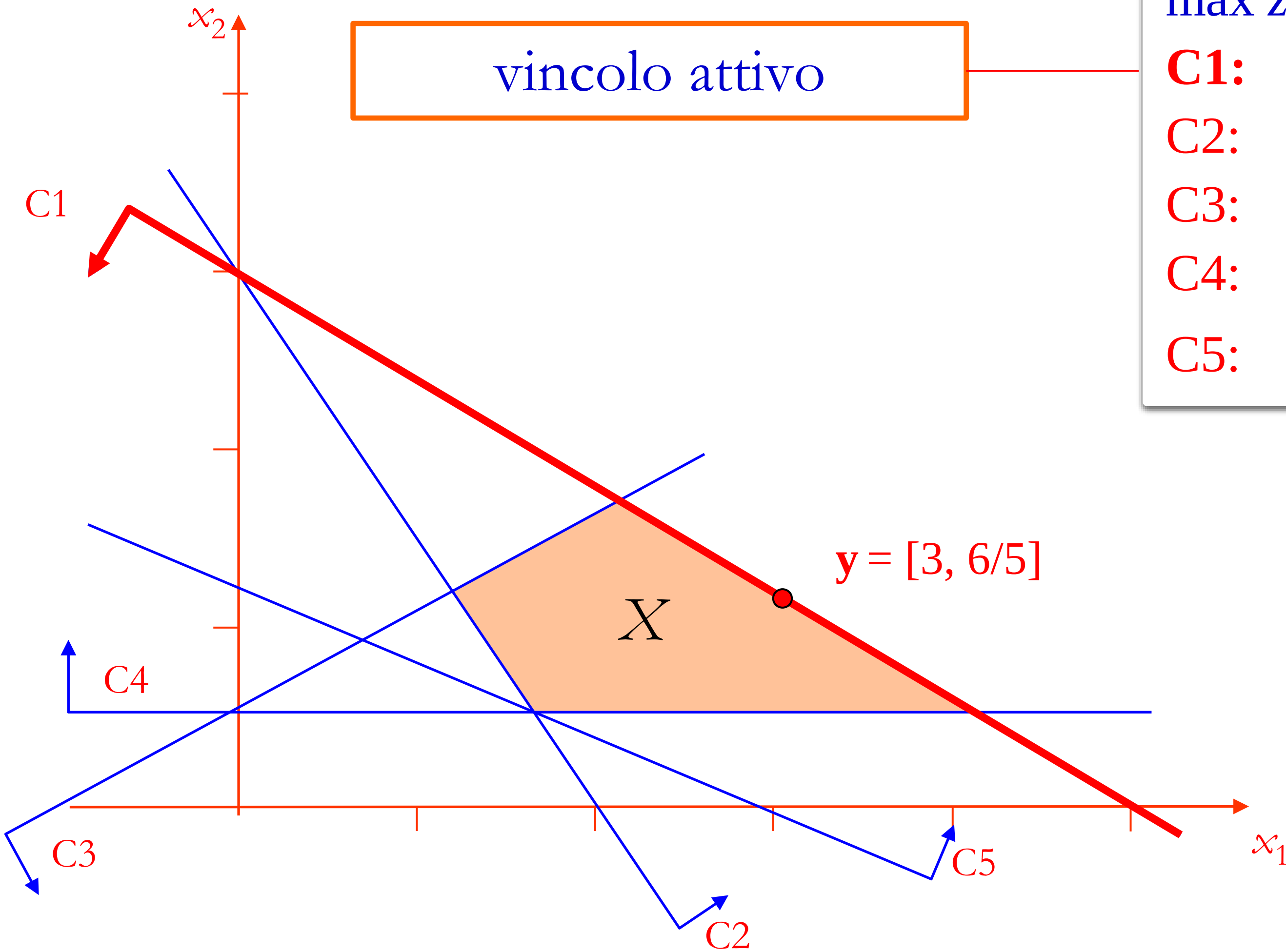
C2: $3y_1 + 2y_2 > 6$

C3: $\mathbf{y_1 - 2y_2 = -1}$

C4: $y_2 > ½$

C5: $3y_1 + 8y_2 > 9$

Notazione e definizioni di base



$\max z = x_1 + 3x_2$

C1: $\mathbf{6y_1 + 10y_2 = 30}$

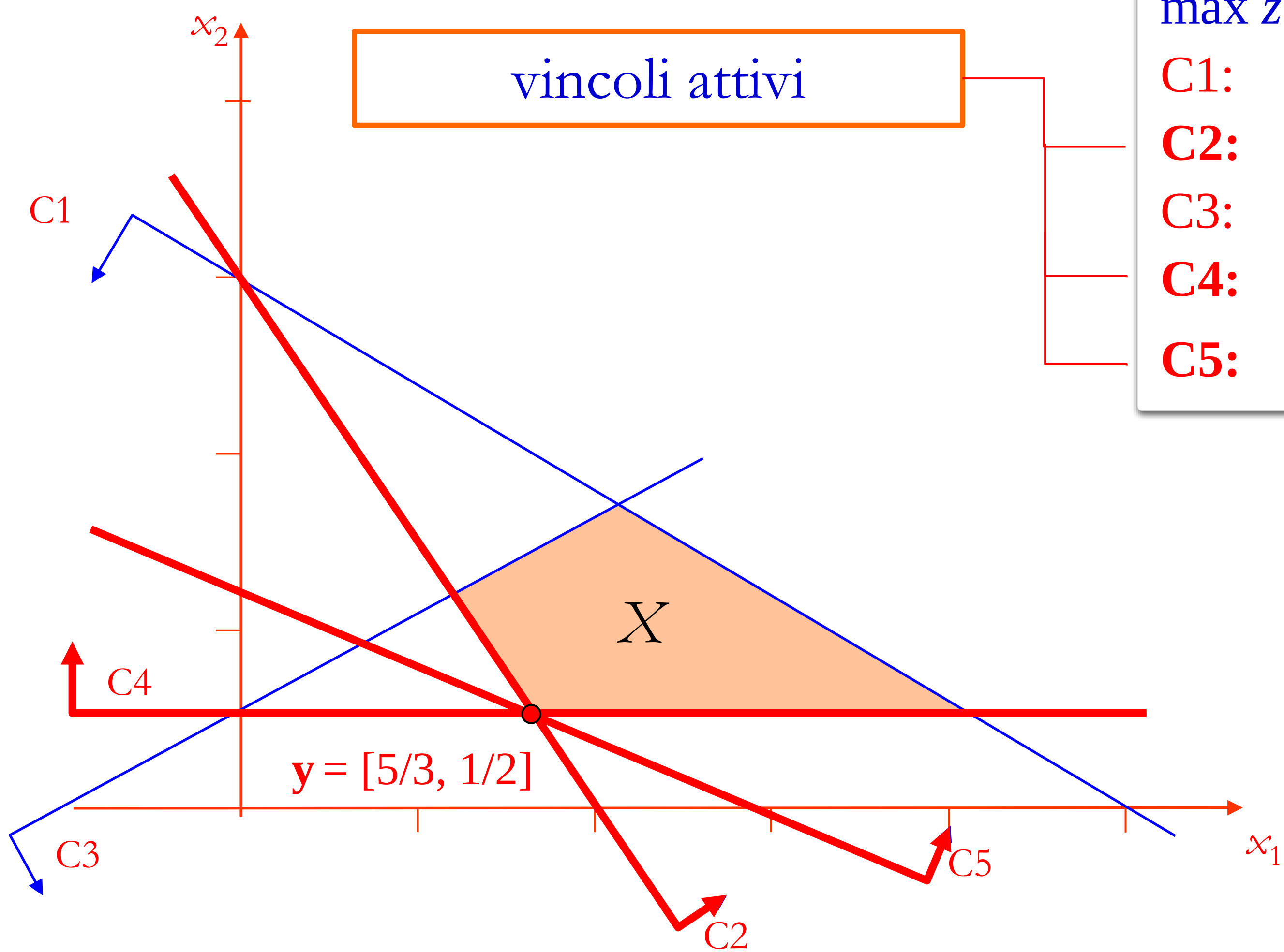
C2: $3y_1 + 2y_2 > 6$

C3: $y_1 - 2y_2 > -1$

C4: $y_2 > ½$

C5: $3y_1 + 8y_2 > 9$

Notazione e definizioni di base



$\max z = x_1 + 3x_2$

C1: $6y_1 + 10y_2 < 30$

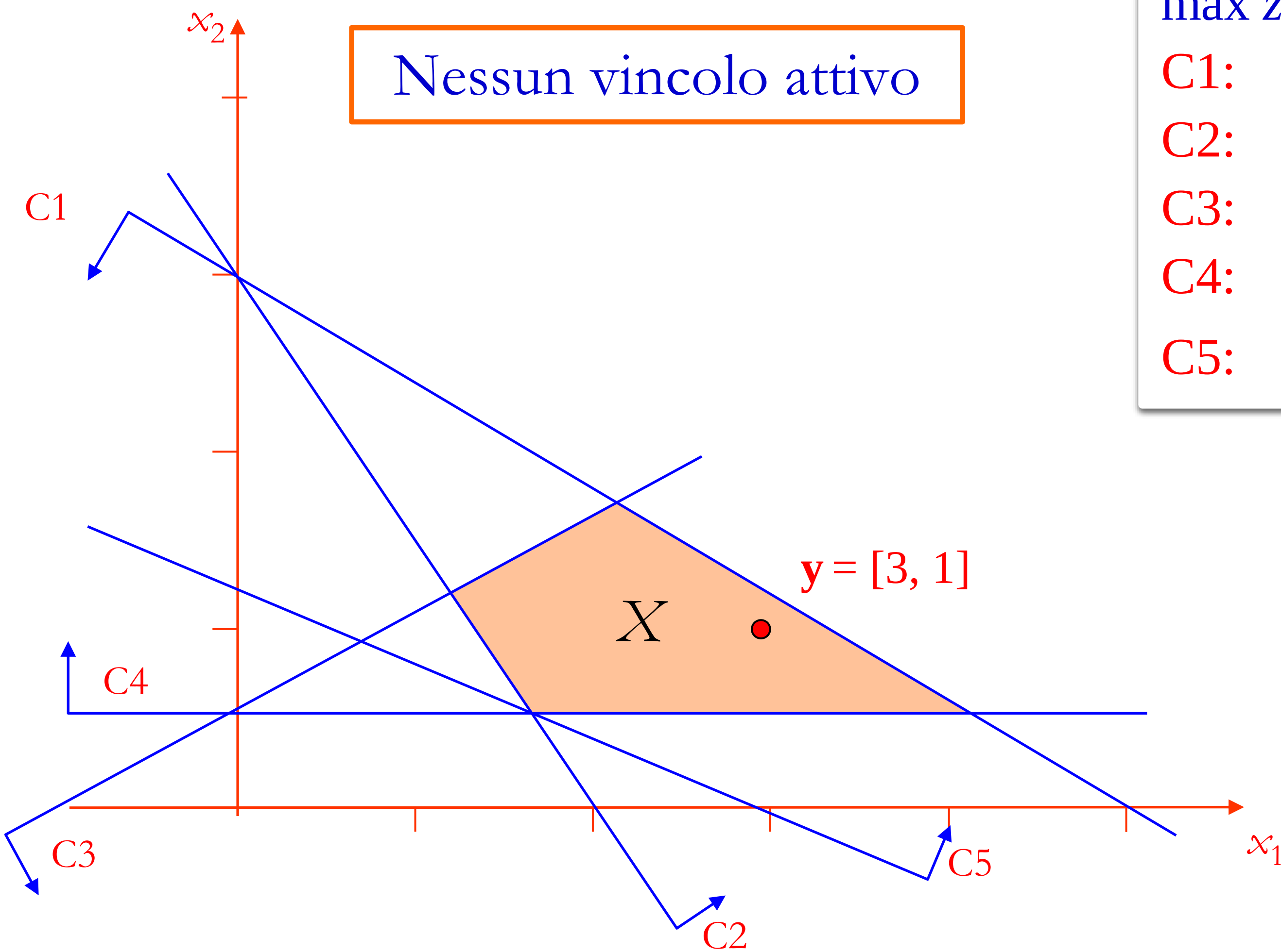
C2: $\mathbf{3y_1 + 2y_2 = 6}$

C3: $y_1 - 2y_2 > -1$

C4: $\mathbf{y_2 = ½}$

C5: $\mathbf{3y_1 + 8y_2 = 9}$

Notazione e definizioni di base



$$\max z = x_1 + 3x_2$$

C1: $6y_1 + 10y_2 < 30$

C2: $3y_1 + 2y_2 > 6$

C3: $y_1 - 2y_2 > -1$

C4: $y_2 > ½$

C5: $3y_1 + 8y_2 > 9$

Esempio: mix produttivo

[Problema] La società *Merlin* produce i concimi *prato starter* (tipo A) e *prato estate* (tipo B) che vende rispettivamente a 25 e 28 €/Kg. Considerando la composizione dei singoli concimi e le disponibilità in magazzino (vedi tabella) quanti Kg di tipo A e B deve produrre la società (ipotizzando una domanda illimitata) per massimizzare il ricavo dal magazzino esistente?

	qtà per Kg		
	Azoto	Potassio	Magnesio
tipo A	0.40	0.10	0.10
tipo B	0.24	0.31	0.00
disponibilità	240	160	50

Mix produttivo: modello

Variabili decisionali

$x_A \in R$ = quantità (in Kg) che si decide di produrre del concime di tipo A
$x_B \in R$ = quantità (in Kg) che si decide di produrre del concime di tipo B

Funzione obiettivo

Il ricavo totale (che si vuole massimizzare) è dato da $25x_A + 28x_B$

Vincoli

1. La quantità totale di azoto richiesta non può essere superiore alla disponibilità di azoto in magazzino

$$0.4x_A + 0.24x_B \leq 240$$

   Lo stesso tipo di limitazione vale per il potassio e il magnesio

2. Le quantità che si decide di produrre non possono essere negative

$$x_A, x_B \geq 0$$

Mix produttivo: modello completo

$$z^* = \max 25x_A + 28x_B$$

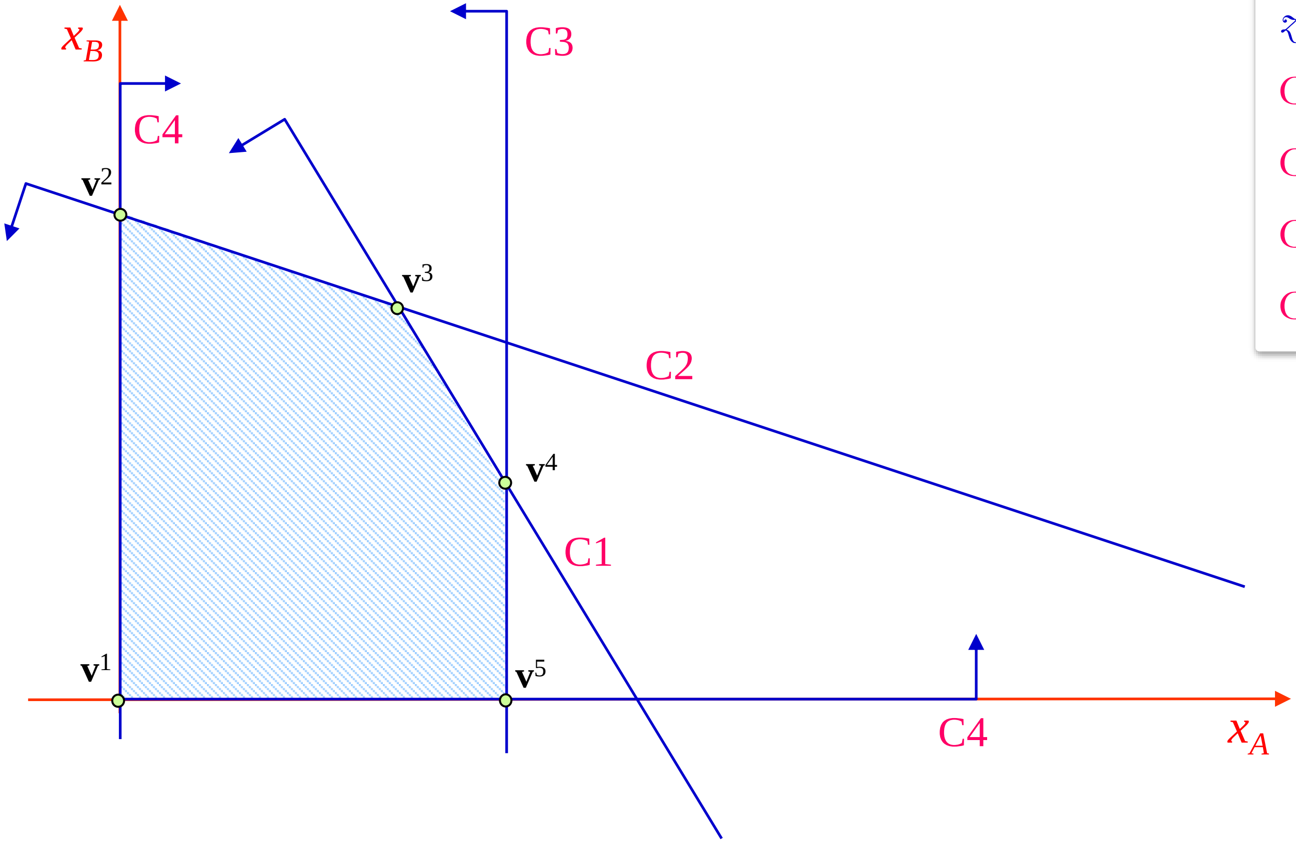
C1: $0.4x_A + 0.24x_B \leq 240$ Vincolo sulla disponibilità di azoto

C2: $0.1x_A + 0.31x_B \leq 160$ Vincolo sulla disponibilità di potassio

C3: $0.1x_A \leq 50$ Vincolo sulla disponibilità di magnesio

C4: $x_A , x_B \geq 0$ Vincoli di non negatività

Mix produttivo: soluzione geometrica



$$z^* = \max\ 25x_A + 28x_B$$

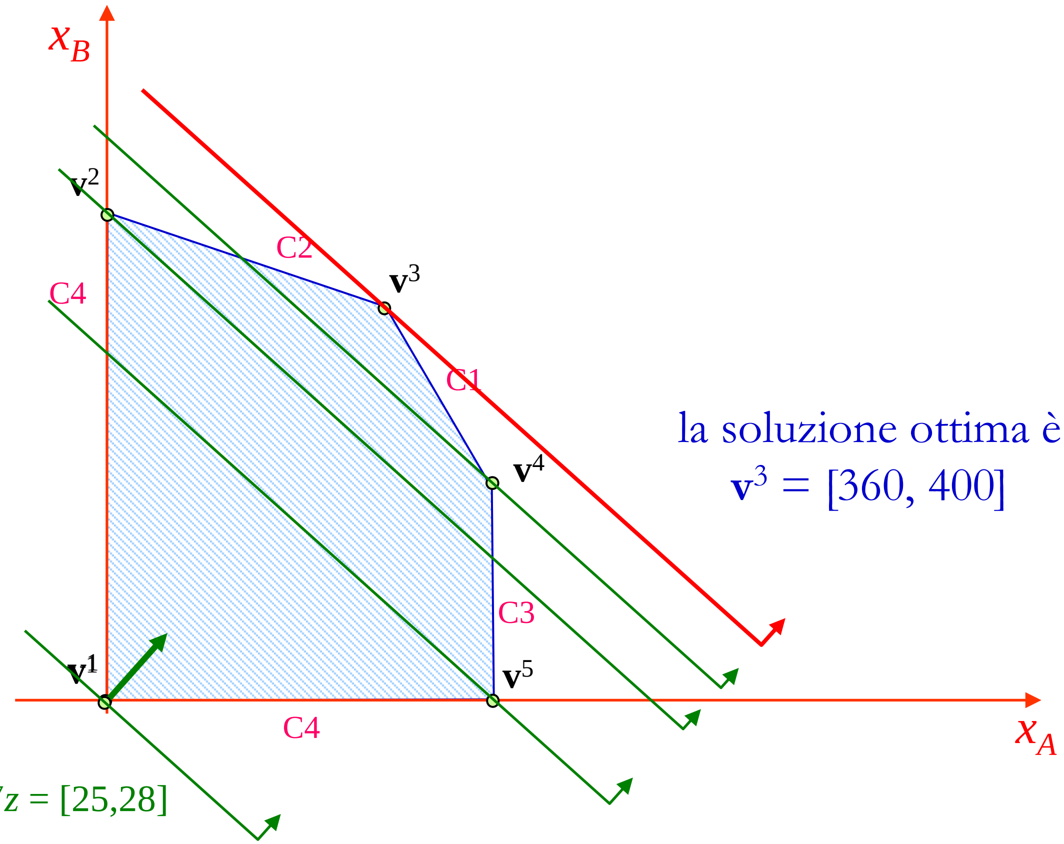
C1: $0.4x_A + 0.24x_B \leq 240$

C2: $0.1x_A + 0.31x_B \leq 160$

C3: $0.1x_A \leq 50$

C4: $x_A, x_B \geq 0$

Mix produttivo: soluzione geometrica



$$z^* = \max\ 25x_A + 28x_B$$

C1:	$0.4x_A + 0.24x_B$	≤ 240
C2:	$0.1x_A + 0.31x_B$	≤ 160
C3:	$0.1x_A$	≤ 50
C4:	$x_A, x_B \geq 0$	

la soluzione ottima è
$\mathbf{v}^3 = [360, 400]$

la soluzione ottima è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} 0.4x_A + 0.24x_B = 240 & \text{C1} \\ 0.1x_A + 0.31x_B = 160 & \text{C2} \end{cases}$$

- Si trasla la funzione obiettivo lungo la direzione di crescita fintanto che l'intersezione con la regione ammissibile risulti non vuota. L'ultimo punto "toccato" è la soluzione ottima.

Algoritmo geometrico del simplesso (prob. max)

Step 1: definizione di regione ammissibile e funzione obiettivo

1. disegna la retta associata ad ogni vincolo e individua la regione del piano che soddisfa il vincolo:
   - un vincolo di uguaglianza è soddisfatto solo dai punti della retta;
   - un vincolo di $\geq$ o $\leq$ è soddisfatto da tutti i punti di un semipiano; per capire quale, prova il punto (0,0).
2. Evidenzia la regione ammissibile (l'intersezione di tutti i semipiani che soddisfano i vincoli)
3. Disegna la funzione obiettivo e il suo gradiente

Algoritmo geometrico del simplesso (prob. max)

Step 2: determinazione della soluzione ottima

1. Individua un vertice **x** di partenza e calcola il valore z della funzione obiettivo
2. Individua la coppia di vertici **y** e **w** adiacenti al vertice corrente e calcola i valori y e w della funzione obiettivo

   un vertice si determina risolvendo un sistema lineare di (almeno) 2 equazioni in 2 incognite.

3. Se $z \geq y$ e $z \geq w$ allora **x** è una soluzione ottima e z è il valore ottimo. FINE
4. Se $z < y$ il punto **y** è il nuovo vertice corrente altrimenti **w** è il nuovo vertice corrente
5. Torna al passo 2.

Informazioni fornite dalla soluzione

- Il ricavo massimo è $z^* = 25\cdot360 + 28\cdot400 = 20200$ € e si ottiene producendo $x_A = 360$ Kg di *prato starter* e $x_B = 400$ Kg di *prato estate*.
- Le disponibilità critiche di magazzino sono l'azoto e il potassio, infatti i vincoli C1 e C2 sono soddisfatti all'uguaglianza dalla soluzione ottima.
- D'altra parte il magnesio è disponibile in quantità sovrabbondante: all'ottimo si ha:
  - $0.1 \cdot 360 = 36 < 50$

  e quindi avanzano 14 Kg di magnesio

Esercizi

Risolvere geometricamente i seguenti problemi di PL:

$$
\begin{aligned}
\max z &= 6x_1 + 5x_2 \\
&\frac{5}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_2 \le 10 \\
&\frac{5}{3}x_1 + 2x_2 \le 10 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max z &= 5x_1 + 15x_2 \\
&x_2 \le 5 \\
&x_1 + x_2 \le 8 \\
&\frac{16}{3}x_1 + 2x_2 \le 32 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min z &= x_1 + 4x_2 \\
&x_1 \ge 2 \\
&x_1 + 4x_2 \ge 8 \\
&x_1 - x_2 \le 4 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min z &= x_1 + x_2 \\
&2x_1 + x_2 \ge 16 \\
&x_1 + \frac{3}{2}x_2 \ge 12 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Domande

- Esiste sempre una soluzione ottima di un problema di PL? E le soluzioni ottime hanno proprietà particolari ?

- Come può essere descritta la regione ammissibile di un problema di PL? E quali proprietà della regione ammissibile possono essere utilizzate per risolvere il problema?

- Esiste una procedura generale per risolvere un problema di PL? Se sì, quanto è onerosa in termini di tempo di calcolo?

- Come cambiano le soluzioni ottime quando cambiano i parametri del problema?

Programmazione lineare con $n > 3$ variabili

Per esempio in un problema di PL con 4 variabili

$$\max z = 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 7x_4$$

$$\begin{array}{ll}
C1: & 5x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 7 \\
C2: & 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 12 \\
C3: & -x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 9
\end{array}$$

la funzione obiettivo e i vincoli definiscono oggetti 3-dimensionali in $\mathbb{R}^4$ la cui intersezione… cos'è ?

Esiste sempre una soluzione ottima di un problema di PL? E le soluzioni ottime hanno proprietà particolari ?

Ottimizzazione convessa e Programmazione Lineare

(Vercellis cap. 7.3)

Ottimizzazione convessa

problema di ottimizzazione convessa (in forma di minimo)

$$z = \min \boxed{f(\mathbf{x})}$$
$$\mathbf{x} \in \boxed{X}$$

la funzione obiettivo
$f : X \to \mathbb{R}$ è convessa

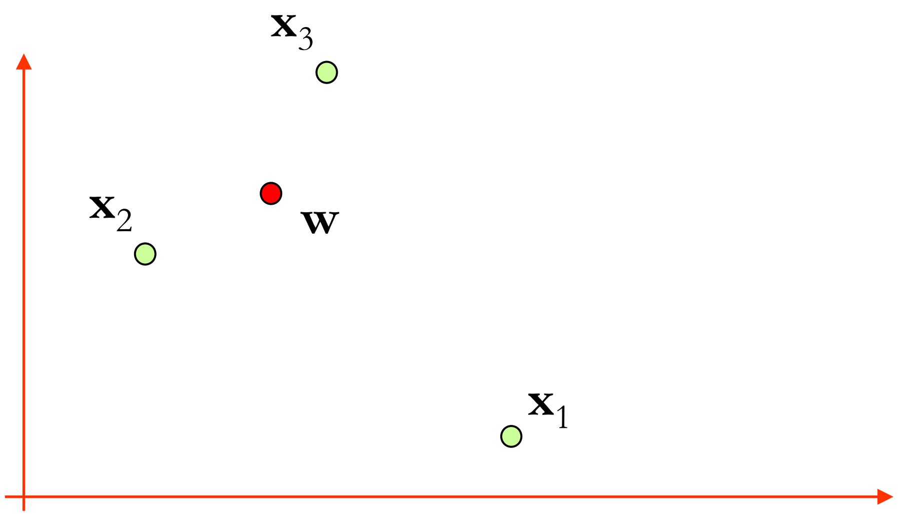
la regione ammissibile X è un
insieme convesso

Combinazioni *convesse*

[Definizione] il vettore **w** è combinazione convessa di *m* vettori $\mathbf{x}_1,\ldots,$ $\mathbf{x}_m \in R^n$ se e solo se può essere scritto come

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i \qquad \text{con} \qquad \boxed{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,\ \lambda_1,\ldots,\lambda_m \geq 0}$$

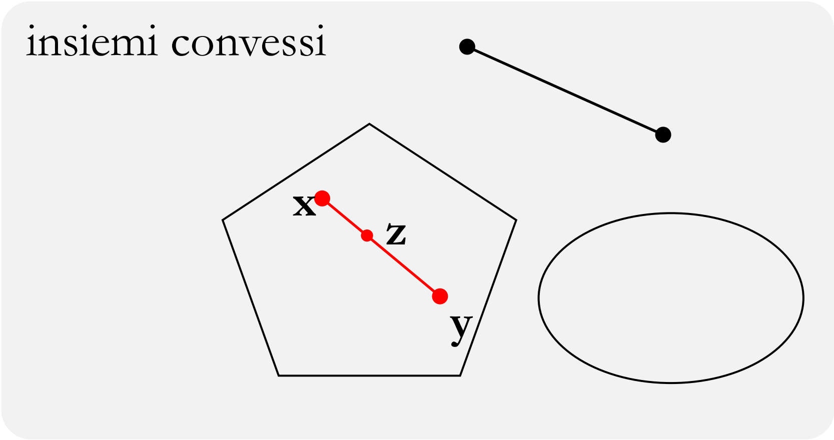
il vettore $\mathbf{w} = (4,5)$ è
combinazione convessa dei vettori
$\mathbf{x}_1 = (8,1)$, $\mathbf{x}_2 = (2,4)$ e $\mathbf{x}_3 = (5,7)$
con coefficienti
$\lambda_1 = 1/9$, $\lambda_2 = 4/9$, $\lambda_3 = 4/9$

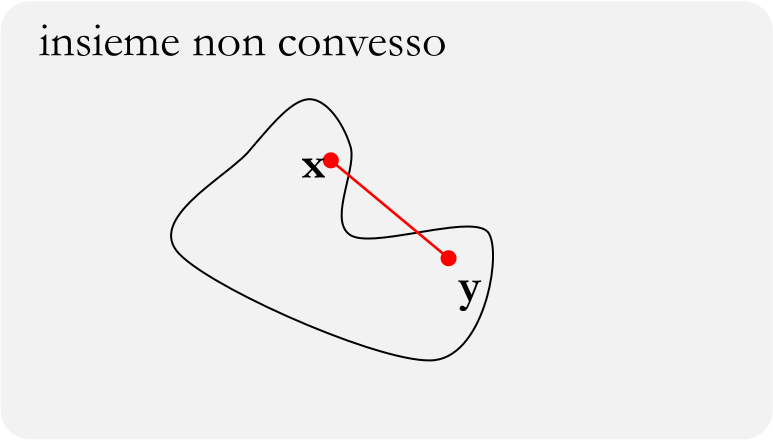


Insiemi convessi

[Definizione] un insieme $Q \subseteq R^n$ è convesso se $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ ogni loro combinazione convessa appartiene a Q, cioè:

$$\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in Q \quad \text{per ogni } \lambda \in [0,1]$$



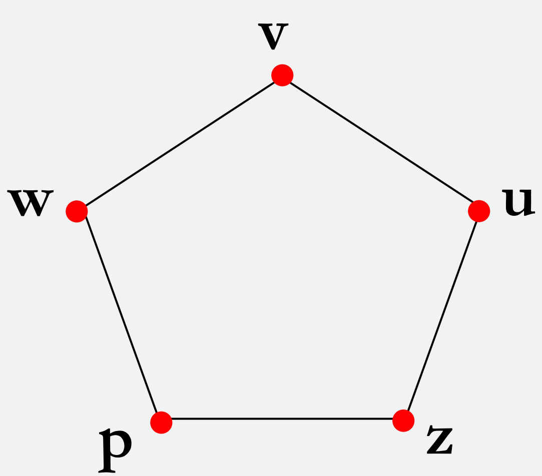


Punti estremi

[Definizione] un punto **w** di un insieme convesso Q si dice estremo se non esiste alcuna coppia di punti distinti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$ tale che **w** sia combinazione convessa *non banale* di **x** e **y** cioè:

$$\boxed{\forall\ 0 < \lambda < 1 \text{ e } \forall\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in Q \quad \text{risulta} \quad \mathbf{w} \neq \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}}$$

L'insieme dei punti estremi di Q si indica con *ext*(Q).



$$ext(Q) = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{p}, \mathbf{z}, \mathbf{u}\}$$

Insiemi convessi

[Proposizione] L'intersezione di 2 insiemi convessi X e Y è un insieme convesso.

[Dim]

Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ due punti arbitrari dell'insieme $X \cap Y$.

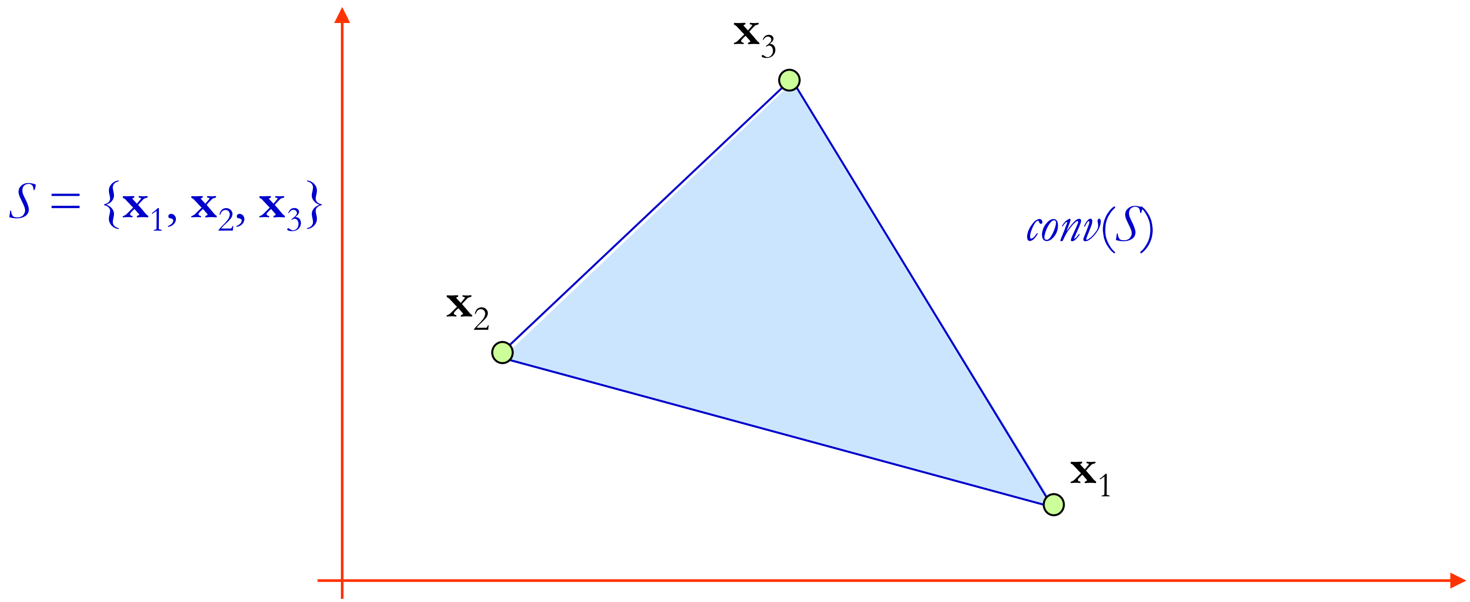
Per ogni $\lambda \in [0,1]$

- il punto $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in X$ perché X è convesso
- il punto $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in Y$ perché Y è convesso

quindi il punto $\mathbf{z} \in X \cap Y$ ■

Involucro convesso

[Definizione] L'involucro convesso di $S = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\} \subseteq R^n$ è l'insieme $conv(S) \subseteq R^n$ di tutte le combinazioni convesse di vettori in S.



Involucro convesso

Non è ovvio perché le definizioni sono diverse: quella di insieme convesso si basa su **coppie** di vettori mentre quella di involucro convesso considera un **numero finito** di vettori

[Teorema]

L'insieme S è convesso se e solo se $S = conv(S)$

[Dim]

$S \subseteq conv(S)$: direttamente dalla definizione di involucro convesso.

$conv(S) \subseteq S$: sia $Q = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\} \subseteq S$ un insieme di vettori in S e si consideri una loro qualsiasi combinazione convessa $\mathbf{y}$.

Per definizione $\mathbf{y} \in conv(S)$. Dimostriamo per induzione sulla cardinalità di Q che $\mathbf{y} \in S$.

Se $|Q| = 2$ la condizione è vera poiché S è convesso.

Se $|Q| = k$ si possono verificare 2 casi:

- $\lambda_k = 1$ e la condizione è banalmente vera poiché $\mathbf{a}_k \in S$
- $\mathbf{y}$ può essere visto come combinazione convessa di due vettori in S: il vettore $\mathbf{a}_k$, e un vettore, combinazione convessa dei primi $k - 1$ vettori, che per induzione è in S. ■

Involucro convesso

[Corollari] dato un insieme S

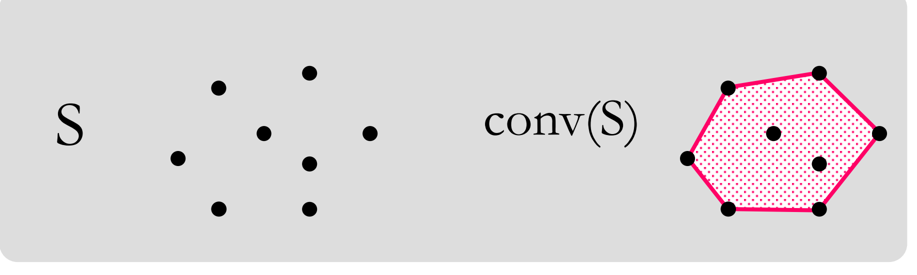
- $conv(S)$ è convesso
- $conv(S)$ è minimale, i.e., è contenuto in tutti gli insiemi convessi che contengono S

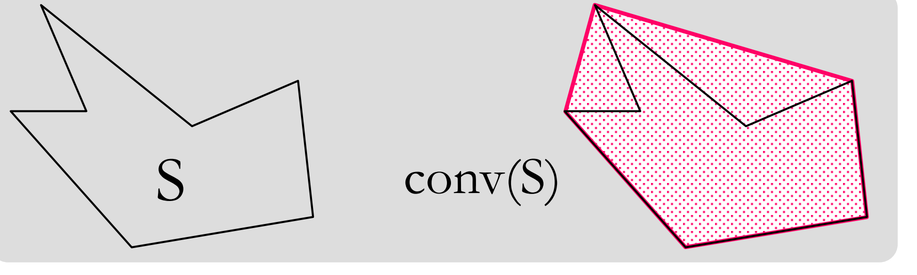
[dim] Infatti sia $C \supseteq S$ e convesso. Segue che

$$C = conv(C) \supseteq conv(S)$$

quindi $C \supseteq conv(S)$ ∎

($conv(S)$ è l'intersezione di <u>tutti</u> gli insiemi convessi che contengono S)

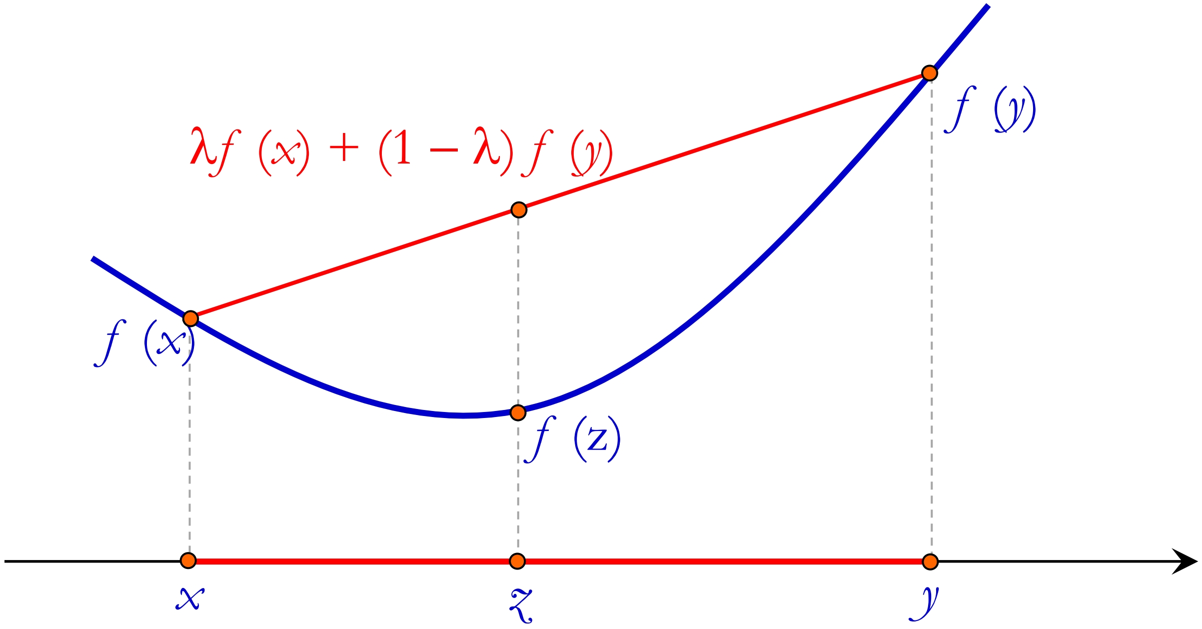




Funzioni convesse

[Definizione] una funzione $f: R^n \to R^n$ è convessa se $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$, $\lambda \in [0,1]$ e $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}$ si ha

$$\boxed{f(\mathbf{z}) \quad \leq \quad \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y})}$$



Funzioni convesse

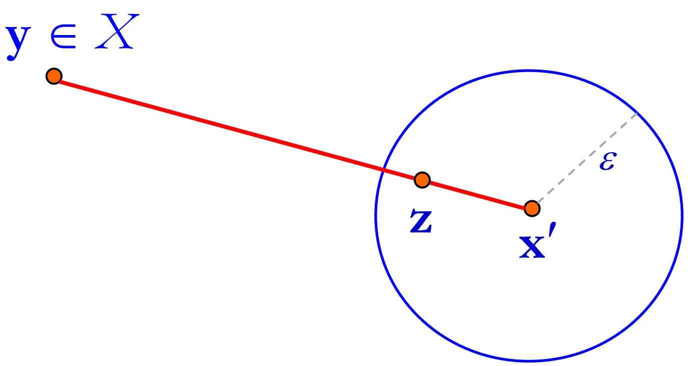
- una funzione f è concava se $-f$ è convessa.
- Una funzione lineare è contemporaneamente concava e convessa
- Date m funzioni convesse g_i: $R^n \rightarrow R$, l'insieme

$$X = \{\mathbf{x} \in R^n \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1,..,m\}$$

è un insieme convesso

Minimi locali e globali

[Proposizione] Sia P un problema di ottimizzazione convessa (in forma di minimo). Ogni minimo locale $\mathbf{x}'$ di P è anche un minimo globale.



Sia $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x}' + (1 - \lambda)\mathbf{y}$ con $\lambda \in (0,1)$ una comb. convessa di $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{y}$ contenuta nell'intorno di ottimalità di $\mathbf{x}'$

- $\mathbf{z} \in X$ perché X è un insieme convesso;
- $f(\mathbf{x}') \leq f(\mathbf{z})$ dato che $\mathbf{x}'$ è un minimo locale;
- $f(\mathbf{z}) = f(\lambda\mathbf{x}' + (1 - \lambda)\mathbf{y})$
  $\leq \lambda f(\mathbf{x}') + (1 - \lambda) f(\mathbf{y})$ dato che f è convessa;

cioè $(1 - \lambda) f(\mathbf{x}') \leq (1 - \lambda) f(\mathbf{y})$

dividendo per $(1 - \lambda) > 0$ si ottiene la tesi.

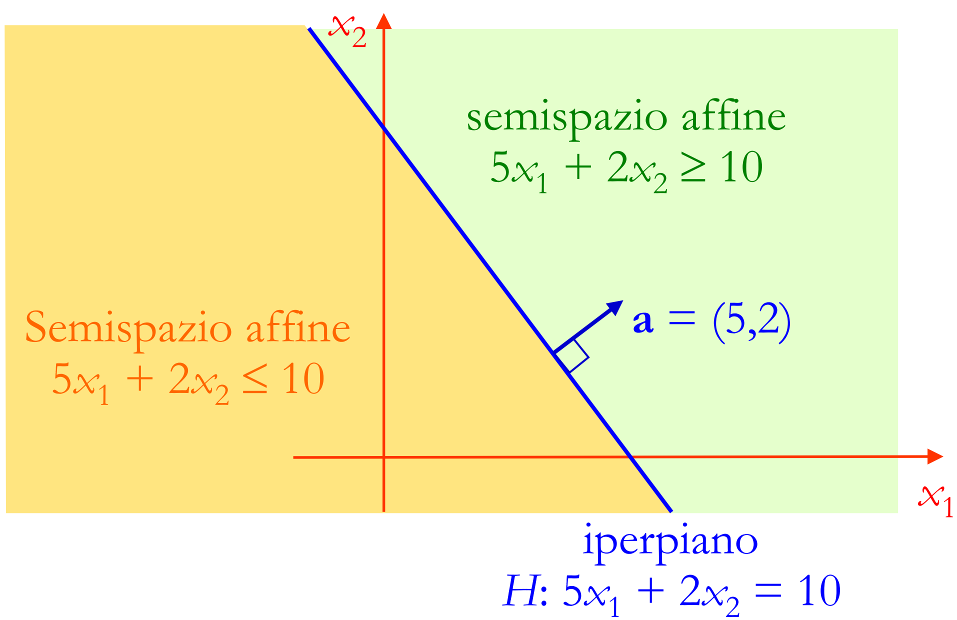
■

iperpiani e semispazi affini

- **[Definizione]** Siano $\mathbf{a} \in \mathrm{R}^n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $b \in \mathrm{R}$.
  L'insieme $H = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n : \mathbf{a}^\mathrm{T}\mathbf{x} = b\} \subseteq \mathrm{R}^n$ si dice iperpiano.
  L'insieme $S = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n : \mathbf{a}^\mathrm{T}\mathbf{x} \leq b\} \subseteq \mathrm{R}^n$ si dice semispazio (affine) chiuso.

- **[Esempio]** In R^2 gli iperpiani sono rette e i semispazi affini sono semipiani.

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^2 : 5x_1 + 2x_2 = 10\}$$



Il vettore $\mathbf{a}$ è detto vettore normale di H perché è sempre ortogonale a H

[Dim]
- se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in H$ allora $\mathbf{a}^\mathrm{T}\mathbf{x} = b$ e $\mathbf{a}^\mathrm{T}\mathbf{y} = b$
- segue che $\mathbf{a}^\mathrm{T}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$
- cioè $\mathbf{a}$ è ortogonale al vettore $(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ che è un vettore che giace su H

iperpiani e semispazi affini: convessità

[Proposizione] un semispazio chiuso è un insieme convesso

applicazione diretta della definizione di insieme convesso

Sia $S = \{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq b\} \subseteq R^n$ un semispazio chiuso.

Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ e $\lambda \in [0,1]$ si ha

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}^T(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \\ = \; & \lambda\mathbf{a}^T\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{a}^T\mathbf{y} \\ \leq \; & \lambda b + (1-\lambda)b = b \end{aligned}$$

Quindi $\mathbf{z} = (\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \in S$.

[Proposizione] un iperpiano è un insieme convesso

Un iperpiano è l'intersezione di due semispazi chiusi, e quindi convessi.

Segue che anche l'iperpiano è un insieme convesso.

Ottimizzazione convessa e PL

- **[Proposizione]** Un problema di PL è un problema di ottimizzazione convessa. Infatti,
  1. la f.o. è lineare quindi convessa;
  2. ogni vincolo è un iperpiano o un semispazio affine quindi un insieme convesso;
  3. l'intersezione di insiemi convessi è un insieme convesso.

- **[Corollario]** Un ottimo locale di un problema di PL è una soluzione ottima del problema

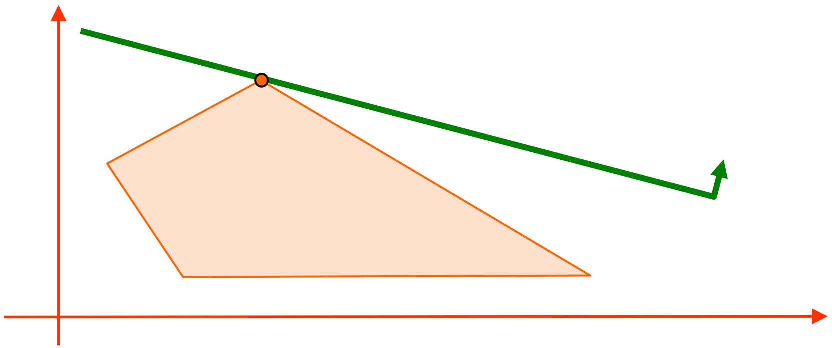
- **[Corollario]** Le soluzioni ottime di un problema di PL sono *punti di frontiera* della sua regione ammissibile.

Soluzione di un problema di PL

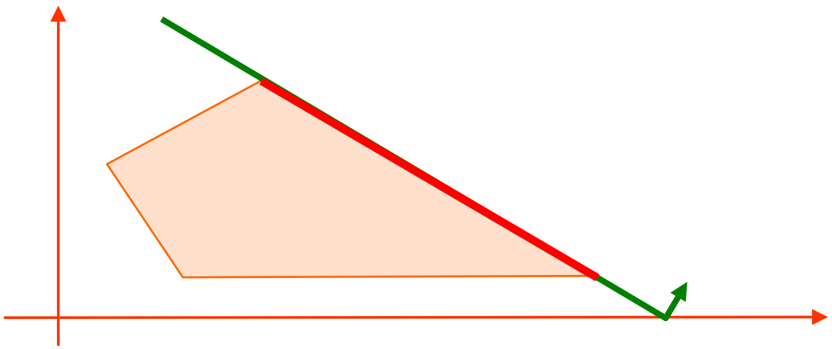
- Un problema di PL (in forma di massimo) può
  1. essere *ammissibile* con una o più *soluzioni ottime finite*.
     La soluzione $\mathbf{x} \in X$ è ottima se $\forall \mathbf{y} \in X \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \mathbf{c}^T\mathbf{y}$.
  2. essere vuoto o *inammissibile* ($X = \emptyset$)
  3. essere *illimitato* superiormente; ciò accade quando
     $\forall \delta \in R \quad \exists \mathbf{x} \in X : \mathbf{c}^T\mathbf{x} > \delta$

Risolvere un problema di PL significa determinare se è *illimitato* o *inammissibile*, ovvero produrre **una** soluzione *ottima finita*.

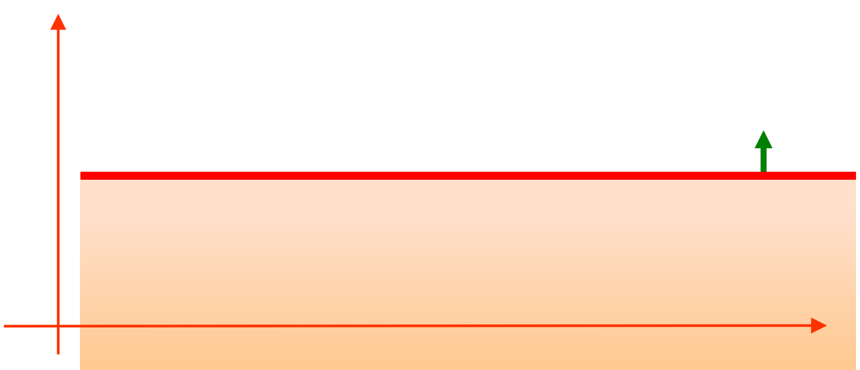
Soluzione: ottimo di valore finito



- soluzione ottima unica

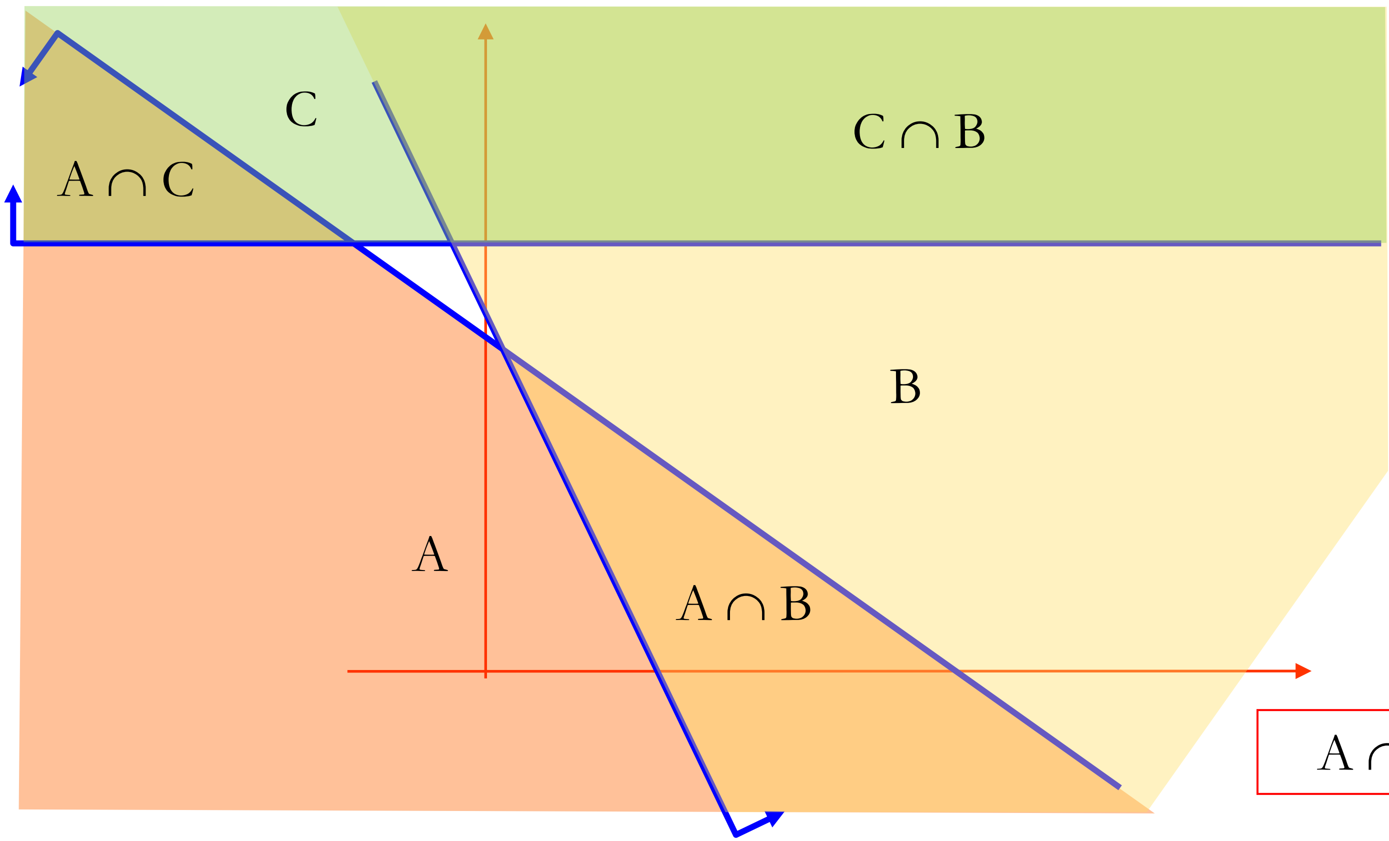


- Se le soluzioni ottime sono più di una, sono necessariamente in numero infinito e formano un insieme convesso limitato (es. in R^2 è un segmento)



- o non limitato (es in R^2 è una (semi)-retta)

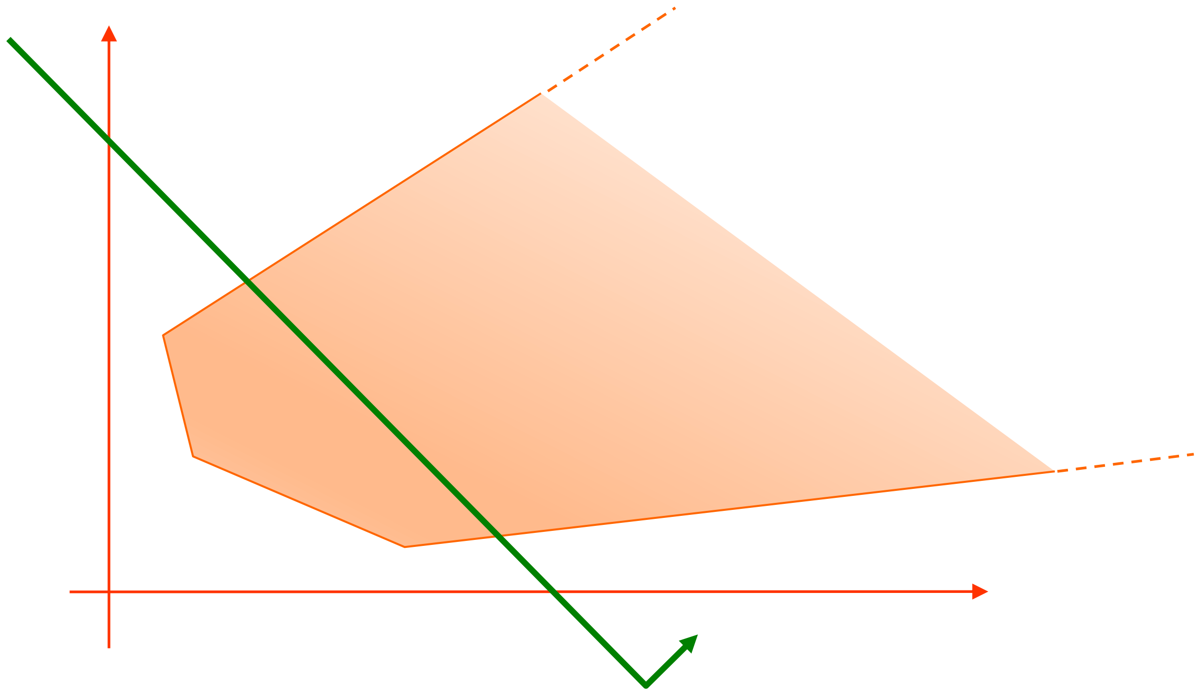
Soluzione: problema inammissibile



$A \cap B \cap C = \varnothing$

- L'intersezione dei tre semipiani A, B e C è vuota; nessun punto soddisfa <u>contemporaneamente</u> i tre vincoli del problema

Soluzione: problema illimitato



- Il valore della funzione obiettivo può crescere senza limite.
- **[Nota]** Un problema illimitato ha necessariamente una regione ammissibile illimitata ma in generale non è vero il contrario: un problema con regione ammissibile illimitata può avere una soluzione ottima finita.

Soluzione di un problema di PL (…ancora)

- Un problema di PL (in forma di minimo) può
  1. essere *ammissibile* con una o più *soluzioni ottime finite*.
     La soluzione $\mathbf{x} \in X$ è ottima se $\forall \mathbf{y} \in X \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{y}$.
  2. essere vuoto o *inammissibile* ($X = \emptyset$)
  3. essere *illimitato* inferiormente; ciò accade quando
     $\forall \delta \in R \quad \exists \mathbf{x} \in X \ : \ \mathbf{c}^T\mathbf{x} < \delta$

Soluzione di un problema di PL *in pratica*

- Nella maggior parte dei casi pratici (**ma non sempre!**) un problema reale di ottimizzazione ammette una soluzione ottima finita (non ha molto senso un profitto che tende a $+\infty$ o impossibile da realizzare …). Tuttavia il modello di PL che descrive il problema potrebbe
  1. avere *infinite soluzioni ottime*: il modello probabilmente non tiene conto di ulteriori criteri di utilità e/o vincoli che nel problema reale sono rilevanti.
  2. essere *inammissibile*: alcuni vincoli sono erroneamente in contraddizione.
  3. essere *illimitato*: il modello non tiene conto di vincoli che nel problema reale sono rilevanti.

Equivalenza tra problemi di PL

Due problemi di PL, P_1 con regione ammissibile X_1 e P_2 con regione ammissibile X_2, sono *equivalenti* <u>se e solo se</u>

- sono entrambi inammissibili, oppure se
- sono entrambi illimitati, oppure se
- esistono due trasformazioni $\theta: X_1 \rightarrow X_2$ e $\sigma: X_2 \rightarrow X_1$ tali che

  $\forall \mathbf{x} \in P_1$ esiste una soluzione $\theta(\mathbf{x})$ di P_2 di **pari costo** e

  $\forall \mathbf{x} \in P_2$ esiste una soluzione $\sigma(\mathbf{x})$ di P_1 di **pari costo**

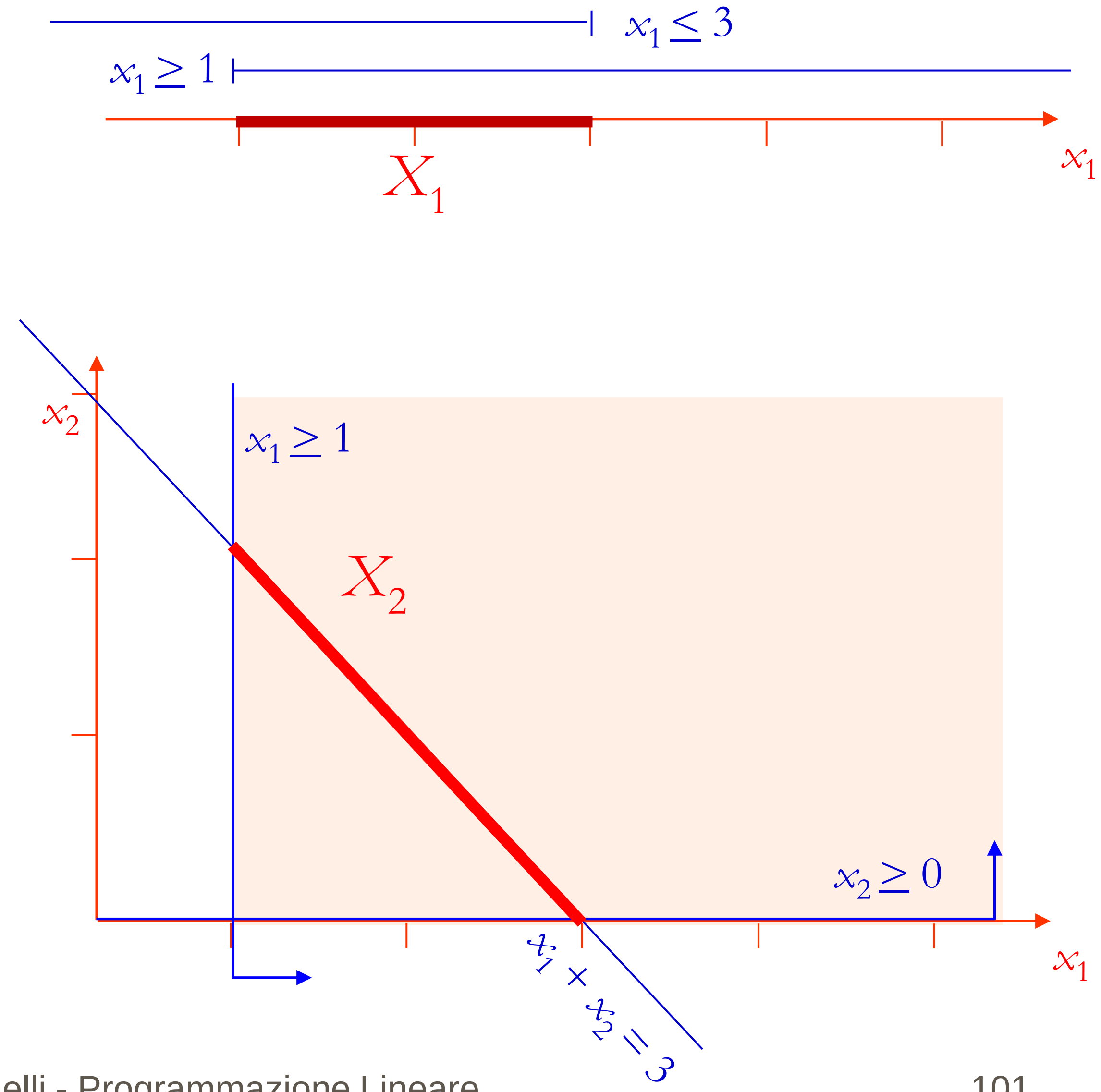
[Nota] L'equivalenza dei problemi di PL non riguarda la dimensione dei problemi (numero di variabili e vincoli)

Equivalenza tra problemi di PL: esempio

$$\mathrm{P}_1\text{: } \min z = 2\,x_1$$
$$x_1 \le 3$$
$$x_1 \ge 1$$

$$\theta(x_1) = (x_1,\, 3 - x_1)$$
$$\sigma(x_1, x_2) = (x_1)$$

$$\mathrm{P}_2\text{: } \min z = 2\,x_1$$
$$x_1 + x_2 = 3$$
$$x_1 \ge 1$$
$$x_2 \ge 0$$



Trasformazioni (1)

Le seguenti regole trasformano un problema di PL in uno equivalente che tuttavia può avere un **numero diverso** di variabili e vincoli.

- **[Regola 1]**

  $$\max \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \equiv -\min (-\mathbf{c})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$

  Un problema di massimo si trasforma in un problema di minimo equivalente cambiando il segno ai coefficienti di costo

- **[Regola 2]**

  $$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq b \equiv \begin{cases} \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + s = b \\ s \geq 0 \end{cases}$$

  Un vincolo di $\leq$ si trasforma in un vincolo di uguaglianza <u>sommando</u> a $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ una variabile non negativa (detta *variabile di slack*)

- **[Regola 3]**

  $$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geq b \equiv \begin{cases} \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - s = b \\ s \geq 0 \end{cases}$$

  Un vincolo di $\geq$ si trasforma in un vincolo di uguaglianza <u>sottraendo</u> a $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ una variabile non negativa (detta *variabile di surplus*)

Trasformazioni (2)

- **[Regola 4]**

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geq b \equiv (-\mathbf{a})^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq -b$$

Un vincolo di $\geq$ si trasforma in un vincolo di $\leq$ (e viceversa) cambiando il segno dei coefficienti e del termine noto

- **[Regola 5]**

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = b \equiv \begin{cases} \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq b \\ \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geq b \end{cases}$$

Un vincolo di uguaglianza può essere sostituito da una coppia di vincoli di $\leq$ e $\geq$

- **[Regola 6]**

$$x \in \mathrm{R} \equiv \begin{cases} x = x^{+} - x^{-} \\ x^{+} \geq 0, x^{-} \geq 0 \end{cases}$$

Una variabile non vincolata può essere rimpiazzata dalla differenza di due variabili vincolate.
In alternativa x può essere ricavata da una equazione e sostituita negli altri vincoli.

Forme dei problemi di PL

- Problema in *forma generale*: $z = \max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}: \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in R^n\}$

  $z = \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}: \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in R^n\}$

- Problema in *forma standard*: $z = \max/\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}: \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in R^n\}$

- Utilizzando le Regole 1 – 6, un problema in forma generale può sempre essere posto in forma standard e viceversa.

[Proposizione] **Ogni** problema di PL può essere posto in forma generale o standard.

Esempio

Si vuole trasformare il seguente problema in forma standard di max

$$
\begin{aligned}
z = \min\ 5x_1 + 8x_2 - 3x_3 & \\
5x_1 - 2x_2 & \leq 15 \\
x_1 + 2x_3 & \geq 9 \\
4x_1 - 7x_2 - 2x_3 & = 13 \\
x_1 & \geq 0 \\
x_3 & \leq 0
\end{aligned}
$$

1. Trasformo il problema in problema di massimo [Regola 1]

$$
\begin{aligned}
z = -\max\ -5x_1 - 8x_2 + 3x_3 & \\
5x_1 - 2x_2 & \leq 15 \\
x_1 + 2x_3 & \geq 9 \\
4x_1 - 7x_2 - 2x_3 & = 13 \\
x_1 & \geq 0 \\
x_3 & \leq 0
\end{aligned}
$$

Esempio (cont.)

2. Cambio il segno alla variabile x_3 [Regola 4]

$$
\begin{aligned}
z = -\max -5x_1 - 8x_2 - 3x_3 & \\
5x_1 - 2x_2 &\leq 15 \\
x_1 - 2x_3 &\geq 9 \\
4x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= 13 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

3. Elimino la variabile libera x_2 [Regola 6]

$$
\begin{aligned}
z = -\max -5x_1 - 8(x^+_2 - x^-_2) - 3x_3 & \\
5x_1 - 2(x^+_2 - x^-_2) &\leq 15 \\
x_1 - 2x_3 &\geq 9 \\
4x_1 - 7(x^+_2 - x^-_2) + 2x_3 &= 13 \\
x_1, x^-_2, x^+_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Esempio (cont.)

4. Trasformo il vincolo di ≤ in un vincolo di uguaglianza [Regola 2]

$$z = -\max -5x_1 - 8x^+_2 + 8x^-_2 - 3x_3$$
$$5x_1 - 2x^+_2 + 2x^-_2 + s_1 = 15$$
$$x_1 - 2x_3 \geq 9$$
$$4x_1 - 7x^+_2 + 7x^-_2 + 2x_3 = 13$$
$$x_1,\ x^-_2,\ x^+_2,\ x_3,\ s_1 \geq 0$$

5. Trasformo il vincolo di ≥ in un vincolo di uguaglianza [Regola 3]

$$z = -\max -5x_1 - 8x^+_2 + 8x^-_2 - 3x_3$$
$$5x_1 - 2x^+_2 + 2x^-_2 + s_1 = 15$$
$$x_1 - 2x_3 - s_2 = 9$$
$$4x_1 - 7x^+_2 + 7x^-_2 + 2x_3 = 13$$
$$x_1,\ x^-_2,\ x^+_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2 \geq 0$$

Come può essere descritta la regione ammissibile di un problema di PL?

E quali proprietà della regione ammissibile possono essere utilizzate per risolvere il problema?

Geometria della PL:
Rappresentazione di poliedri

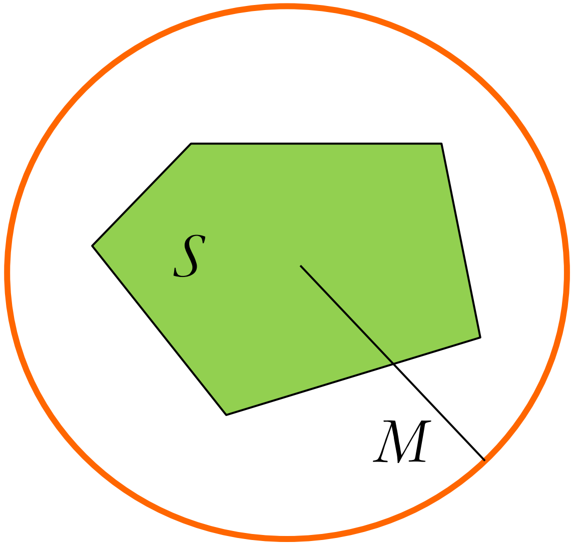
(Vercellis capp. 3.2 e 7.3)

poliedri e politopi: rappresentazione *esterna*

[Definizione] Un poliedro è l'intersezione di un numero finito m di semispazi chiusi di R^n.

[Definizione] Un politopo è un poliedro limitato.

Un insieme $S \subset R^n$ si dice limitato se esiste una costante M tale che ogni componente di ogni elemento di S è limitato, in valore assoluto, da M.



poliedri e politopi: rappresentazione *esterna*

[Osservazione] Ogni sistema con un numero finito di equazioni/disequazioni lineari definisce un poliedro. In particolare:

- $\emptyset$, H, S, R^n sono poliedri;
- la regione ammissibile $X = \{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\} \subseteq R^n$ di un problema di PL è un poliedro indicato con P(**A**, **b**);
- una sfera **non è** un poliedro.

poliedri e politopi: convessità

[Proposizione] Ogni poliedro $P(\mathbf{A},\mathbf{b})$ è un insieme convesso.

[dim] Un semispazio affine è un insieme convesso e l'intersezione di insiemi convessi è convesso.

■

Ovvero, direttamente dalla definizione di convessità:

- Se $\mathbf{u},\mathbf{v} \in P(\mathbf{A},\mathbf{b})$ allora $\mathbf{Au} \leq \mathbf{b}$ e $\mathbf{Av} \leq \mathbf{b}$ e per ogni combinazione convessa $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{u} + (1 - \lambda)\mathbf{v}$ di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ si ha:
- $\mathbf{Az} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{u} + (1 - \lambda)\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{Au} + (1 - \lambda)\mathbf{Av} \leq \lambda\mathbf{b} + (1 - \lambda)\mathbf{b} = \mathbf{b}$

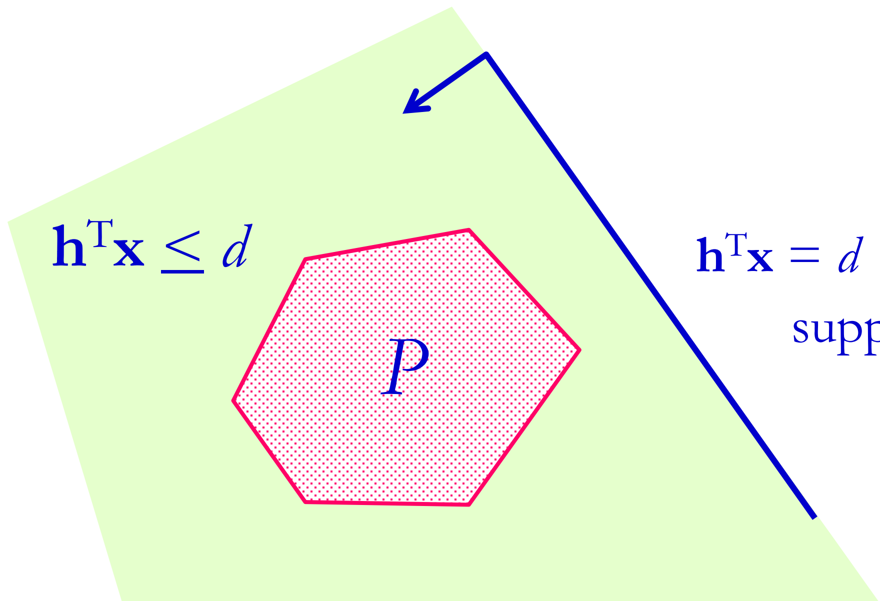
$\mathbf{u},\mathbf{v} \in P(\mathbf{A},\mathbf{b})$ e $0 \leq \lambda_i \leq 1$

■

Disuguaglianze valide e iperpiani di supporto

[Definizione] $\mathbf{h}^T\mathbf{x} \leq d$ è una disuguaglianza valida per un poliedro $P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \subseteq R^n$ se

$$P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{h}^T\mathbf{x} \leq d\}$$



$\mathbf{h}^T\mathbf{x} = d$ è detto iperpiano di supporto di $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$

$$P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \{\mathbf{x} \mid \mathbf{h}^T\mathbf{x} \leq d\} = P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$$

Disuguaglianze valide e iperpiani di supporto

Una disuguaglianza $\mathbf{h}^T\mathbf{x} \leq d$ valida per $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ è soddisfatta da ogni punto di $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, cioè

$$P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \{\mathbf{x} \mid \mathbf{h}^T\mathbf{x} \leq d\} = P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$$

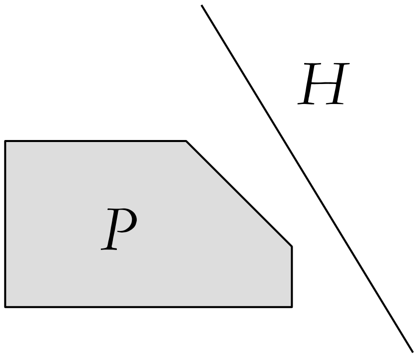
quindi

aggiungendo $\mathbf{h}^T\mathbf{x} \leq d$ al sistema di (dis)equazioni $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ che definisce $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, l'insieme delle soluzioni del sistema non cambia.

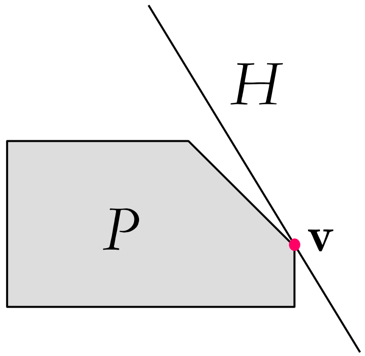
vertici, spigoli e facce

[Definizione] Sia $P \subseteq \mathrm{R}^n$ e $H = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n : \mathbf{h}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = d\}$ un suo iperpiano di supporto. L'insieme $F = H \cap P$ si dice faccia di P.

- Se $F = \emptyset$, allora F si dice faccia vuota di P.



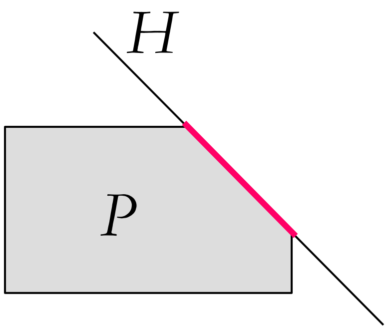
- Se $\dim(F) = 0$, allora $F = \{\mathbf{v}\}$, e il vettore $\mathbf{v}$ si dice vertice di P.



vertici, spigoli e facce

[Definizione] Sia $P \subseteq \mathrm{R}^n$ e $H = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n : \mathbf{h}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = d\}$ un suo iperpiano di supporto. L'insieme $F = H \cap P$ si dice faccia di P.

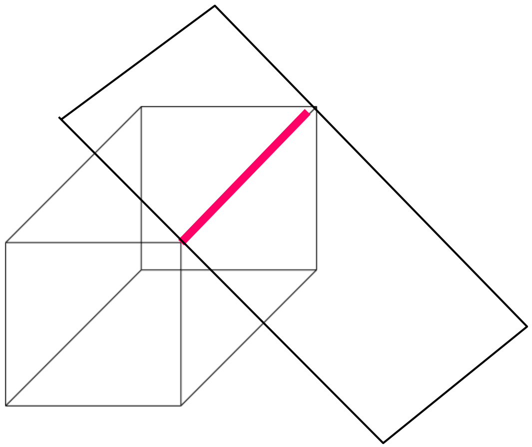
- Se $\dim(F) = 1$, allora F si dice spigolo di P.
- Se $\dim(F) = \dim(P) - 1$, allora F si dice faccia massimale (o *facet*) di P.



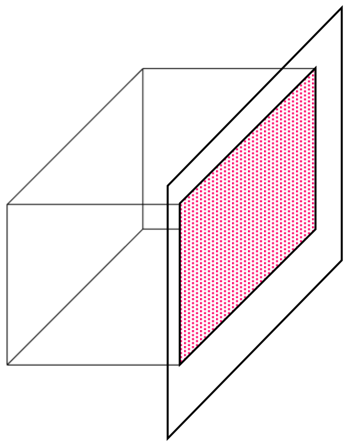
$\dim(F) = 1 = \dim(P) - 1$

vertici, spigoli e facce

[Definizione] Sia $P \subseteq \mathrm{R}^n$ e $H = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n : \mathbf{h}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = d\}$ un suo iperpiano di supporto. L'insieme $F = H \cap P$ si dice faccia di P.



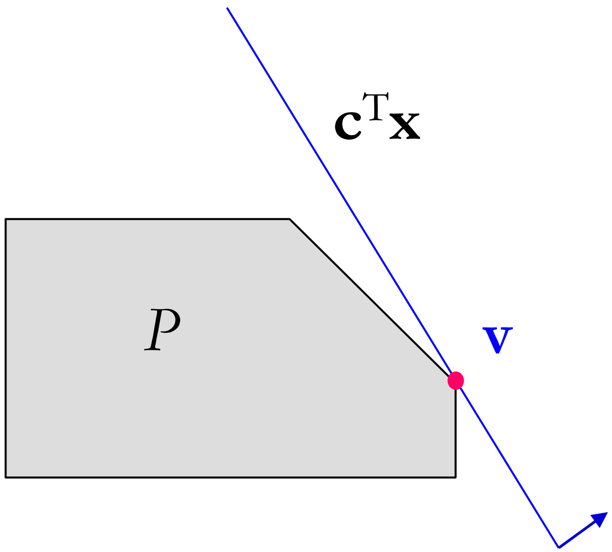
- Se $\dim(F) = 1$, allora F si dice spigolo di P.



- Se $\dim(F) = \dim(P) - 1$, allora F si dice faccia massimale (o *facet*) di P.

Vertici: definizione alternativa

[Definizione] un punto $\mathbf{v}$ di un poliedro P si dice vertice di P se esiste un vettore $\mathbf{c}$ tale che $\mathbf{c}^T\mathbf{v} > \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ per tutti gli $\mathbf{x} \in P$ diversi da $\mathbf{v}$

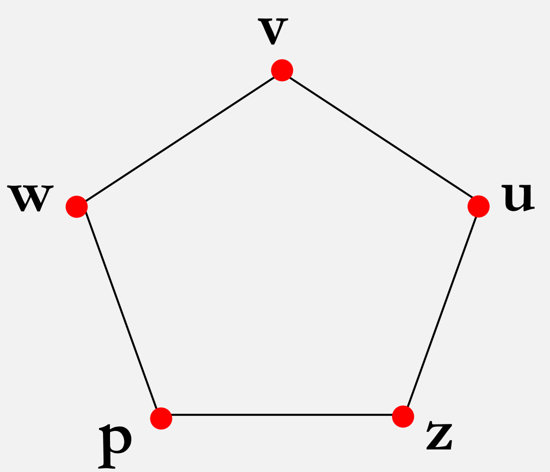


In altre parole $\mathbf{v}$ è un vertice di P se esiste **una qualche** funzione obiettivo $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ per la quale $\mathbf{v}$ è **l'unica** soluzione ottima del problema di PL associato a P.

Vertici e punti estremi

Nella Programmazione Lineare vertici e facce di un poliedro giocano un ruolo particolarmente importante.

[Teorema 3.2.7] L'insieme dei **vertici** di un poliedro P coincide con l'insieme $ext(P)$ dei suoi **punti estremi**.



$$ext(P) = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{p}, \mathbf{z}, \mathbf{u}\}$$

$$\equiv$$

$$\text{vertici di } P = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{p}, \mathbf{z}, \mathbf{u}\}$$

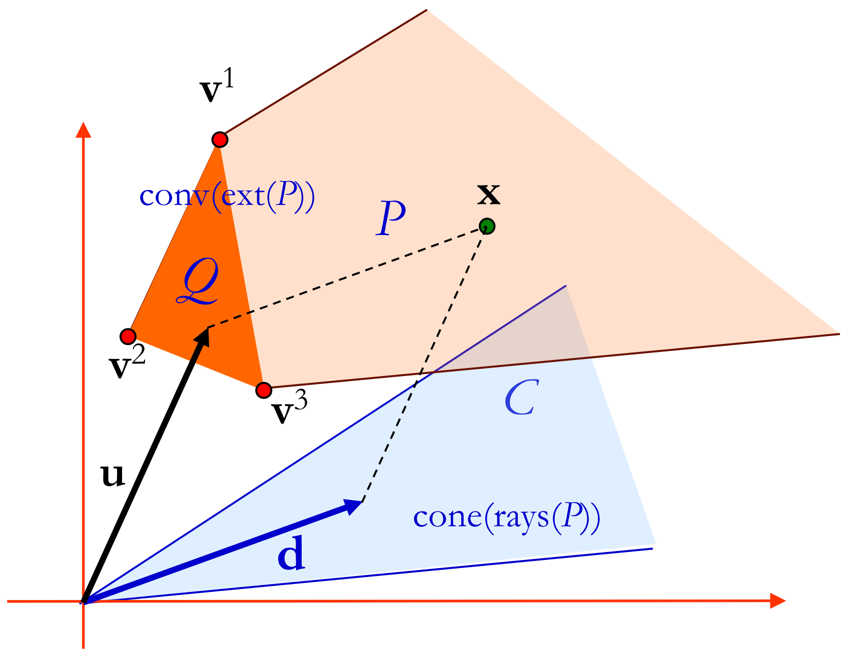
poliedri e politopi: rappresentazione *esterna*

- La rappresentazione esterna fornisce un test di appartenenza di un punto a un poliedro ma non dice come esprimere analiticamente gli (infiniti) punti di un poliedro. In particolare non dice che un poliedro può essere finitamente generato (analogamente ad uno spazio lineare)

- Utilizzando la rappresentazione esterna è possibile dimostrare che **se l'insieme delle soluzioni ottime di un problema di *PL* non è vuoto**, allora almeno una soluzione ottima si troverà in un vertice **[Teorema 3.2.12]**
  …però per avere una <u>caratterizzazione</u> dell'esistenza di una soluzione ottima occorre un altro tipo di rappresentazione.

Rappresentazione *interna* di un poliedro

Ogni poliedro P è la somma vettoriale di un **politopo** Q e di un **cono poliedrale** C

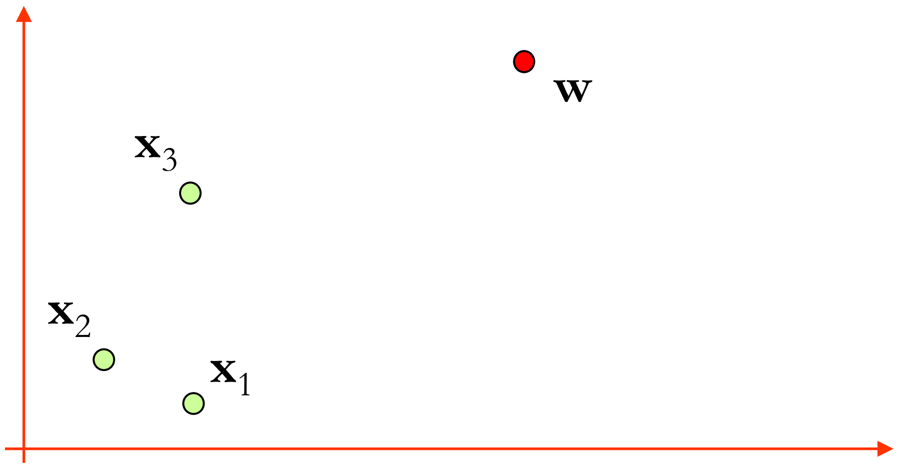


Combinazioni *coniche*

[Definizione] il vettore $\mathbf{w}$ è combinazione conica di m vettori $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in R^n$ se e solo se esistono m numeri reali tali che

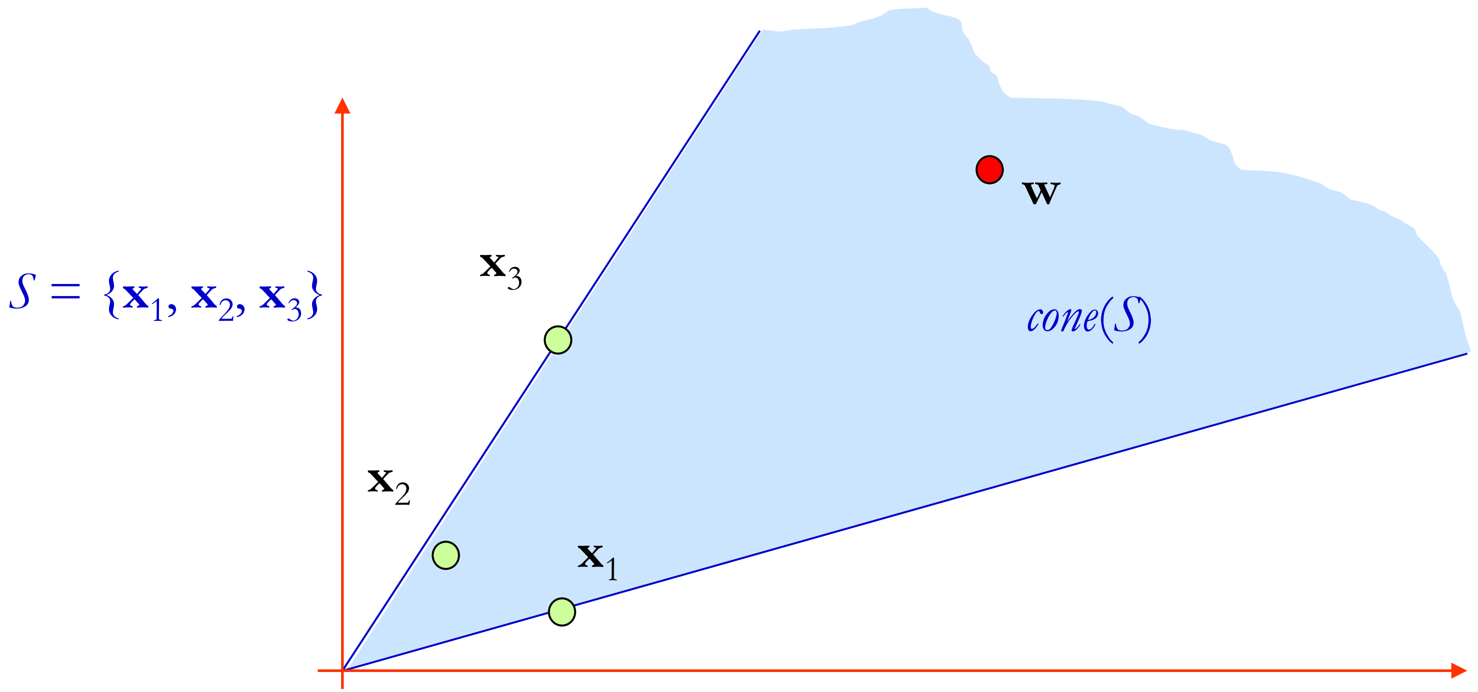
$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i \quad \text{con} \quad \boxed{\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0}$$

il vettore $\mathbf{w} = (6.5, 4.5)$ è combinazione conica dei vettori $\mathbf{x}_1 = (2, 0.5)$, $\mathbf{x}_2 = (1,1)$ e $\mathbf{x}_3 = (2,3)$ con coefficienti $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0.5$, $\lambda_3 = 1$



Involucro conico

[Definizione] L'involucro conico di $S = \{\mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ è l'insieme $cone(S) \subseteq \mathbb{R}^n$ di <u>tutte e sole</u> le combinazioni coniche di vettori in S.



- ogni involucro conico contiene il vettore nullo $\mathbf{0}$ (dato che $\mathbf{0}$ è ottenibile dalla combinazione conica di qualsiasi insieme finito e non vuoto di vettori S).

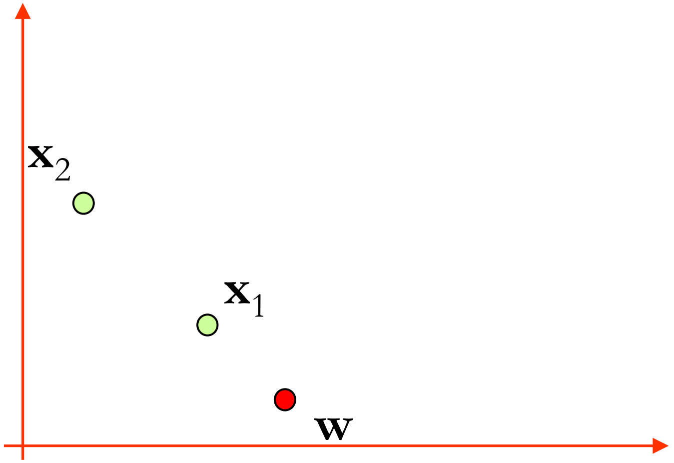
Combinazioni *affini*

[Definizione] il vettore $\mathbf{w}$ è combinazione affine di m vettori $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m \in R^n$ se e solo se esistono m numeri reali $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ tali che

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i \quad \text{con} \quad \boxed{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1}$$

il vettore $\mathbf{w} = (4,1)$ è combinazione affine dei vettori $\mathbf{x}_1 = (3,2)$ e $\mathbf{x}_2 = (1,4)$ con coefficienti

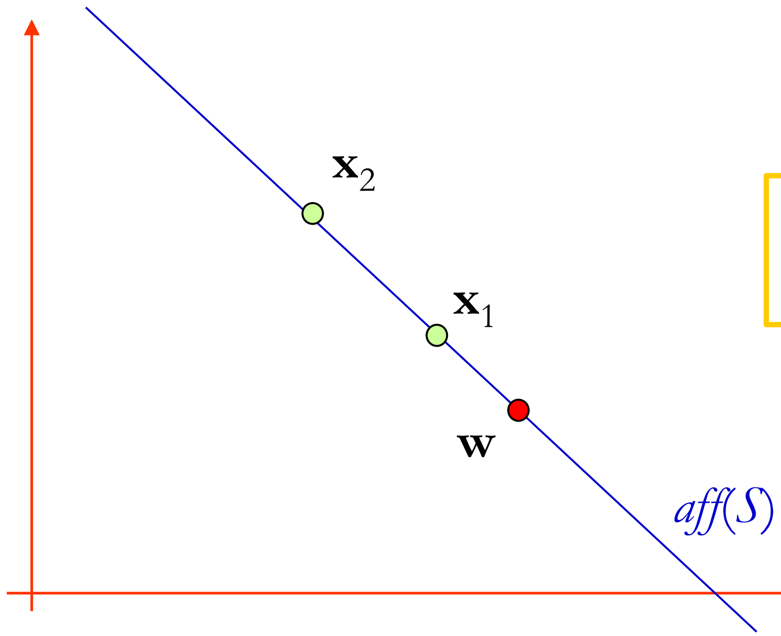
$\lambda_1 = 1.5$, $\lambda_2 = -0.5$



Involucro *affine*

[Definizione] L'involucro affine di $S = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\} \subseteq R^n$ è l'insieme $aff(S) \subseteq R^n$ di tutte e sole le combinazioni affini di vettori in S.

$S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$



L'involucro affine di 2 punti in R^2 è una retta

Riepilogo

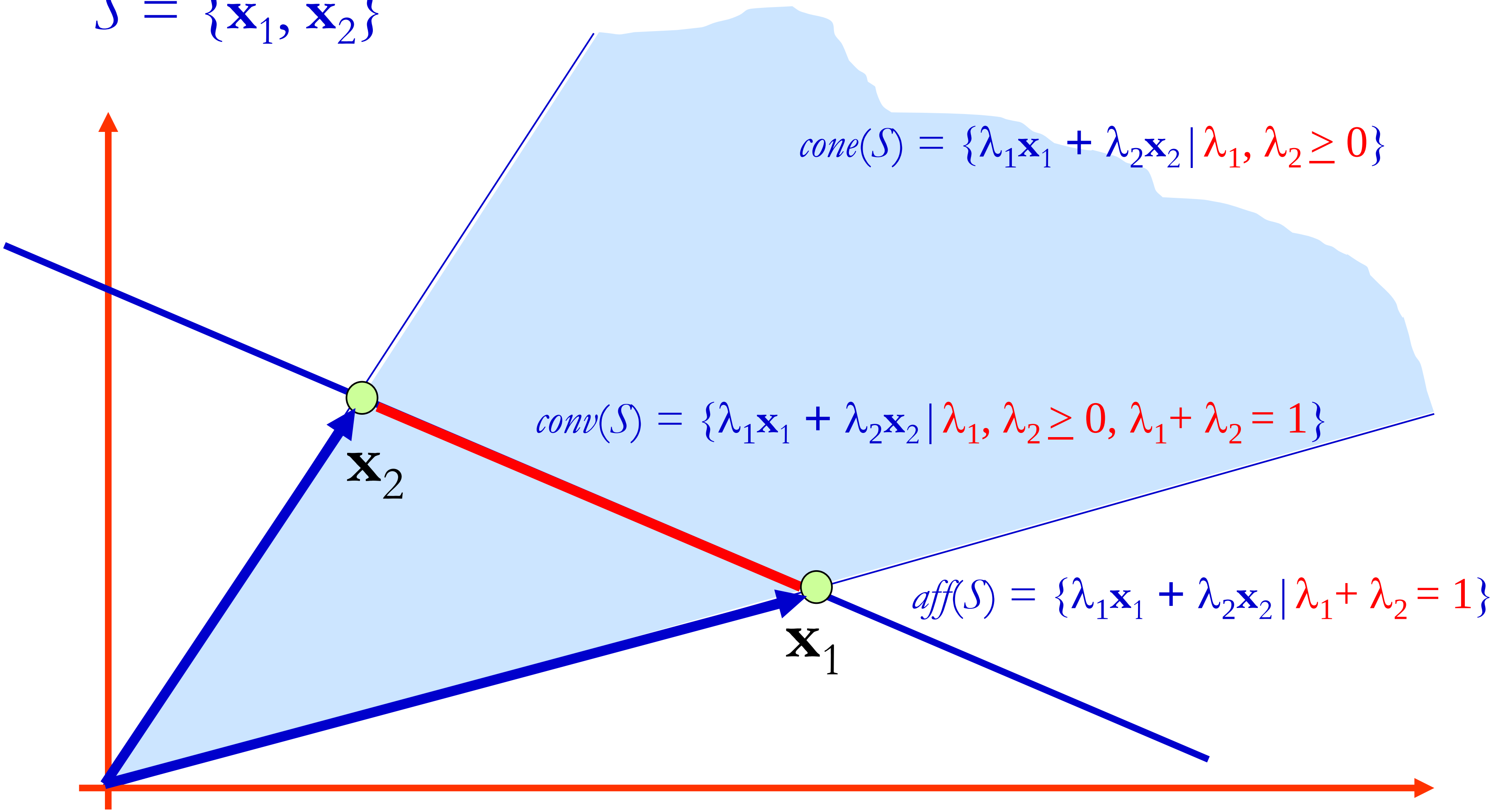
Sia S un insieme di m vettori $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m \in \mathrm{R}^n$

combinazione	coefficienti	insieme generato
lineare	$\lambda_i \in \mathrm{R}$	Involucro lineare *lin*(S)
conica	$\lambda_i \geq 0$	Involucro conico *cone*(S)
affine	$\Sigma\lambda_i = 1$	Involucro affine *aff*(S)
convessa	$\lambda_i \geq 0,\ \Sigma\lambda_i = 1$	Involucro convesso *conv*(S)

Riepilogo

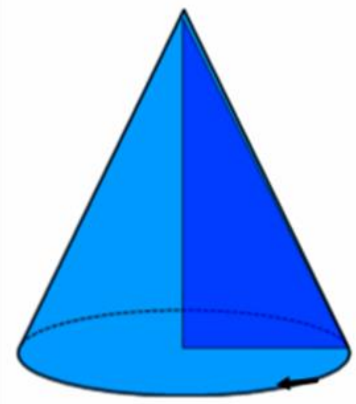
$lin(S) = \{\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2\} \equiv R^2$

$S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$

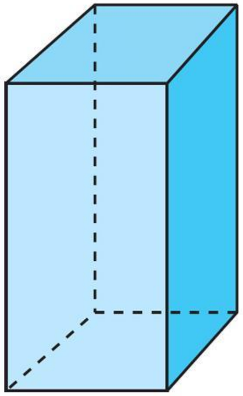


Coni e poliedri

- Una definizione «sensoriale»



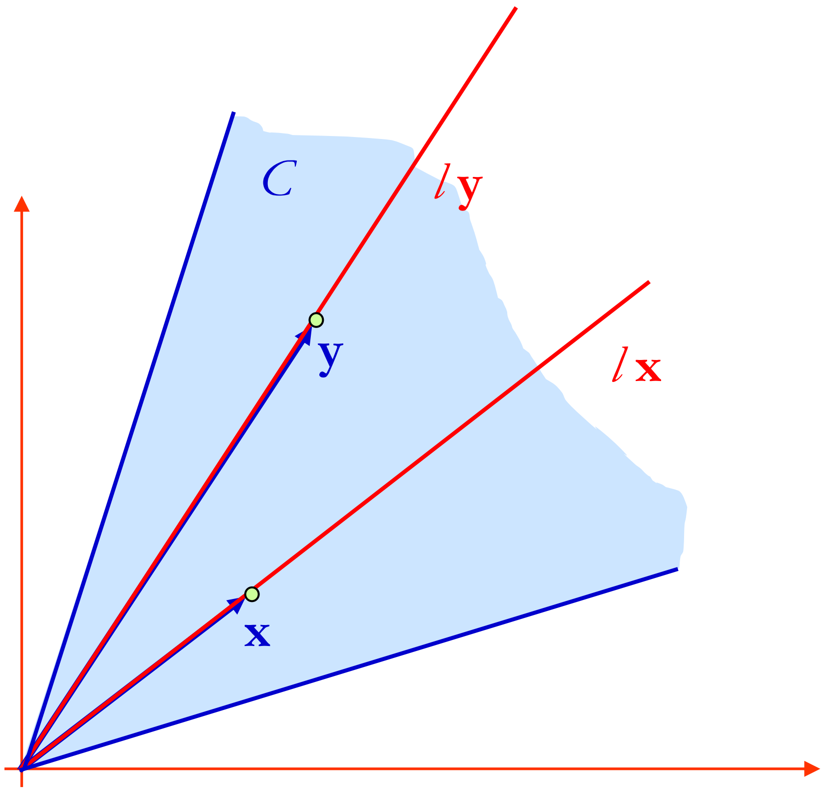
[wikipedia] il **cono** è un solido di rotazione che si ottiene ruotando un triangolo rettangolo intorno a uno dei suoi cateti. L'asse del cono è il cateto intorno a cui il solido è costruito; la base del cono è altresì il cerchio ottenuto dalla rotazione dell'altro cateto. Il vertice del cono è, infine, il punto dell'asse opposto a quello dell'intersezione con la sua base.

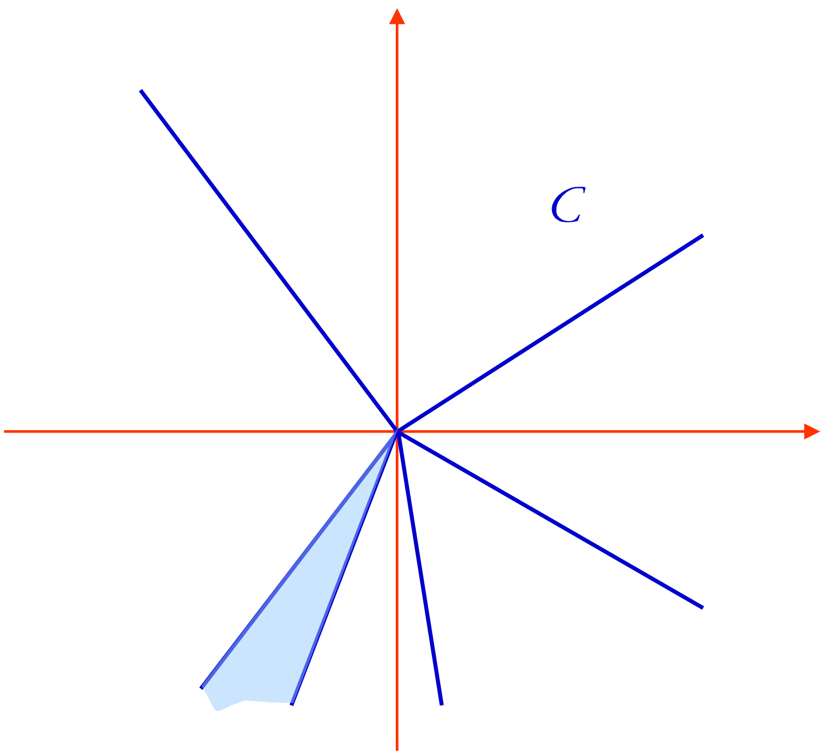


[wikipedia] un **poliedro** è un solido delimitato da un numero finito di facce piane poligonali. Come primi poliedri da prendere in considerazione, per la loro semplicità, vi sono i cubi, i parallelepipedi, le piramidi e i prismi.

Coni

[Definizione 7.3.1] un insieme $C \subseteq R^n$ è un cono se <u>per ogni</u> $\mathbf{x} \in C$ e per ogni $l \geq 0$ si ha $l\,\mathbf{x} \in C$, cioè se l'insieme $\{l\,\mathbf{x} : l \geq 0\}$ (che descrive una *semiretta* puntata nell'origine) è completamente contenuta in C.





Coni

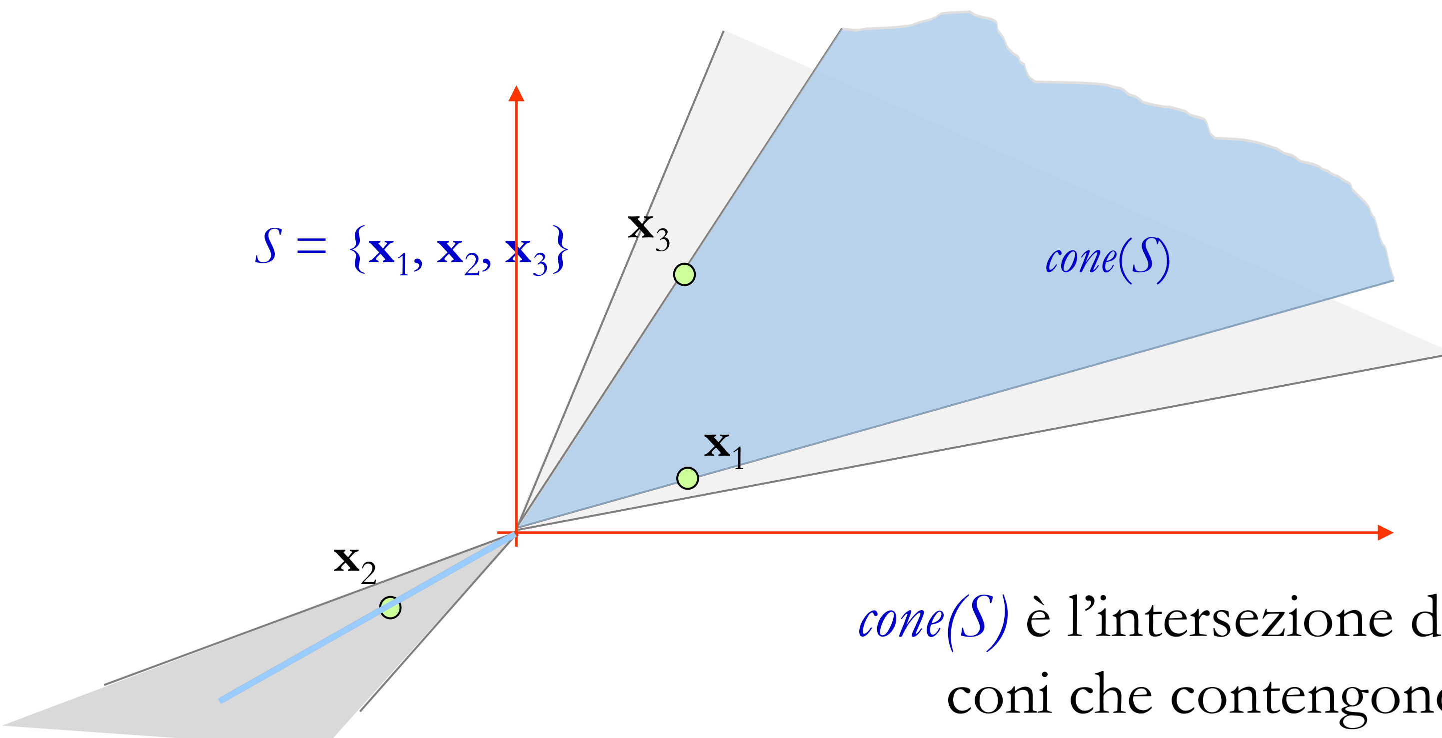
- Direttamente dalla definizione segue che ogni cono contiene il vettore $\mathbf{0}$ e che l'insieme $\{\mathbf{0}\}$ è un cono;
- Tuttavia, un cono non è in generale un insieme convesso, e se è convesso non è in generale un poliedro

[Domande]

- Un insieme di semirette centrate nell'origine formano un cono?
- Quanti punti estremi ha un cono convesso? Quali sono?

Involucro conico

Analogamente alla considerazione fatta sugli involucri convessi, si può dimostrare che S è un cono se e solo se $S = cone(S)$ e che l'involucro conico $cone(S)$ di un insieme di punti $S = \{\mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ è minimale, cioè è contenuto in tutti i coni che contengono S

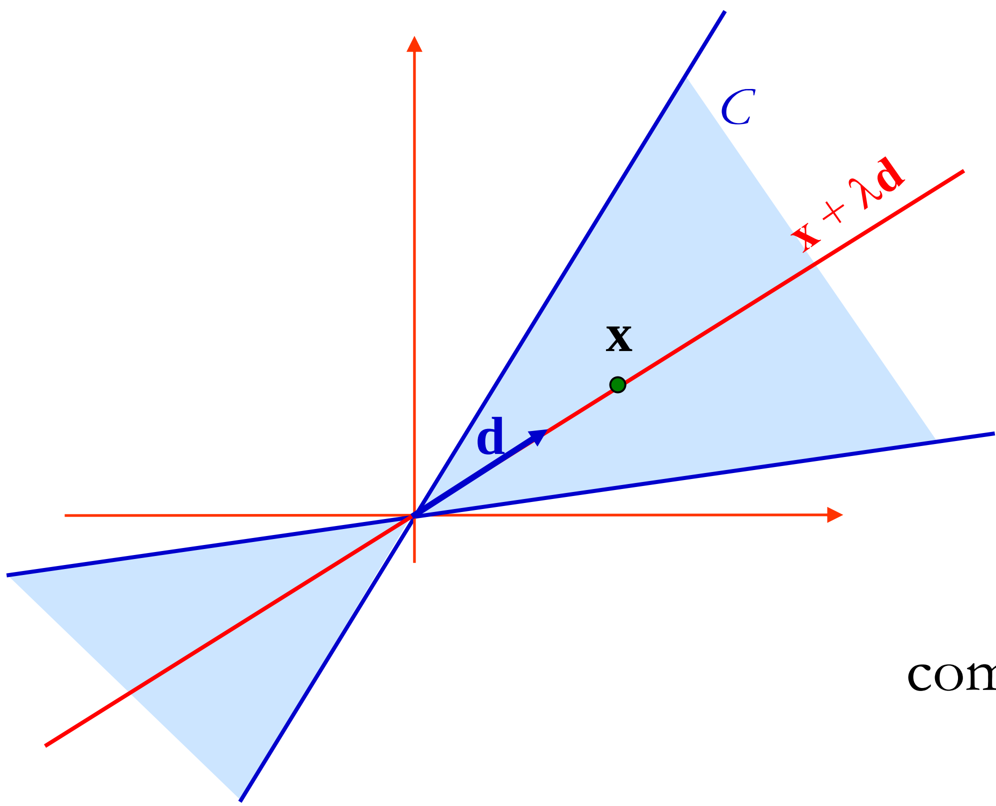


$cone(S)$ è l'intersezione di <u>tutti</u> i coni che contengono S

Coni e rette

[Definizione] Il cono C contiene una retta se <u>esiste</u> un $\mathbf{x} \in C$ e un vettore <u>non nullo</u> $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ tale che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si abbia

$$\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d} \quad \in \quad C$$

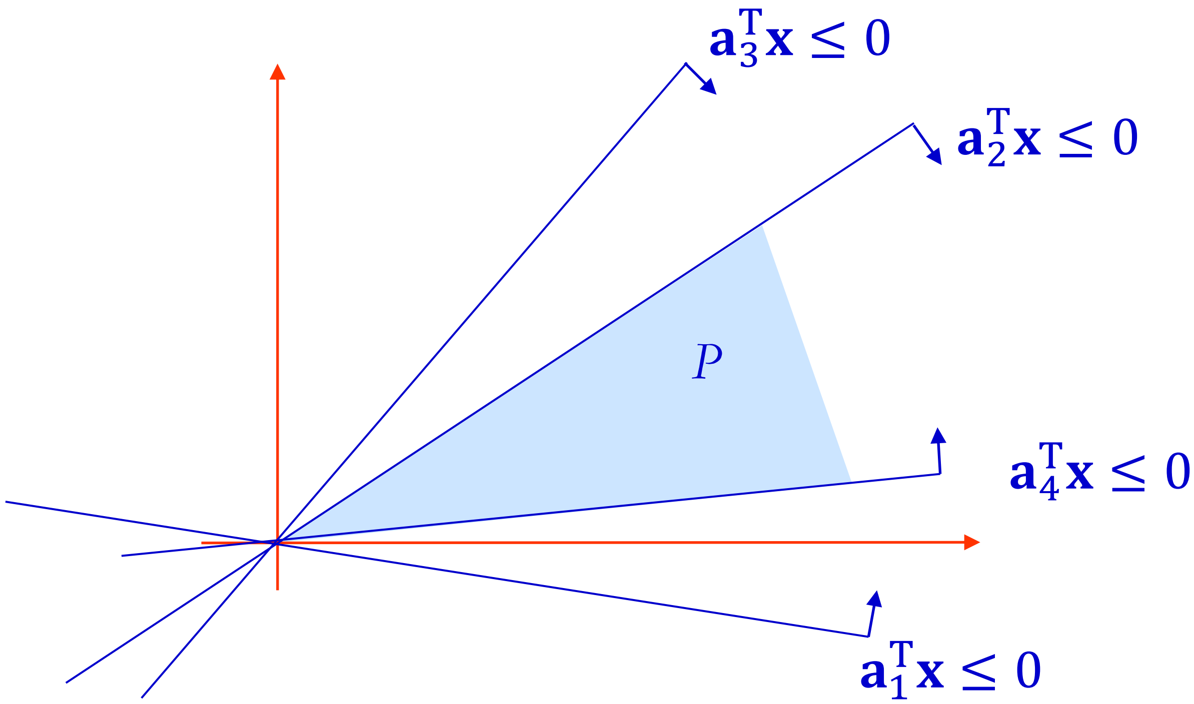


come è fatto un cono <u>convesso</u> che contiene una retta?

Coni poliedrali

[Definizione 7.3.2] un cono poliedrale è il poliedro

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$$



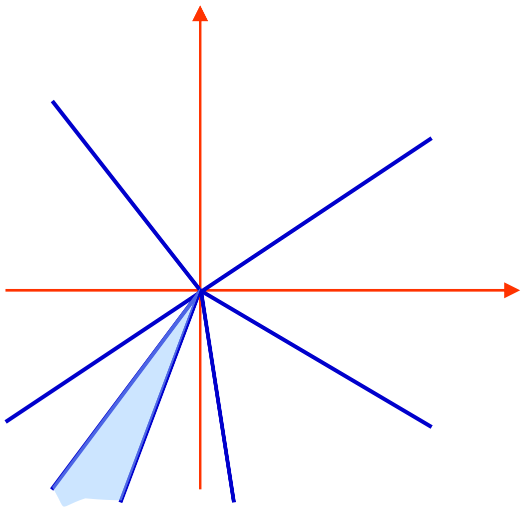
Coni poliedrali e rette

[Definizione] Un cono poliedrale si dice puntato se contiene un punto estremo. In tal caso il punto estremo è unico ed è necessariamente $\{\mathbf{0}\}$

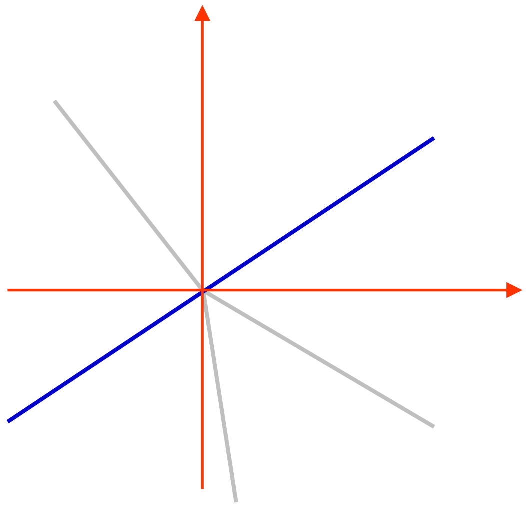
[Teorema 7.3.1] Un cono poliedrale $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$ è puntato se e solo se

- **non contiene** una retta, o analogamente
- $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$ ha n vettori riga linearmente indipendenti

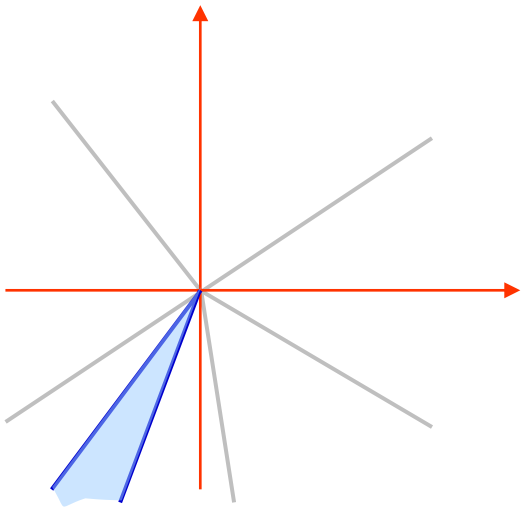
Riassumendo…



Coni



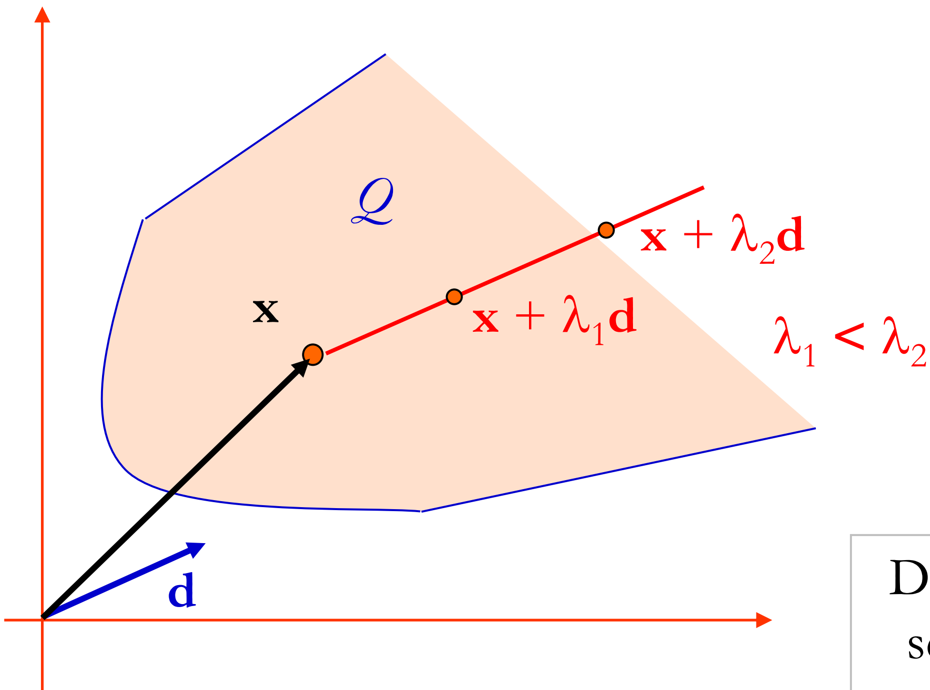
Coni
poliedrali
non puntati



Coni
poliedrali
puntati

direzioni di recessione di un insieme convesso

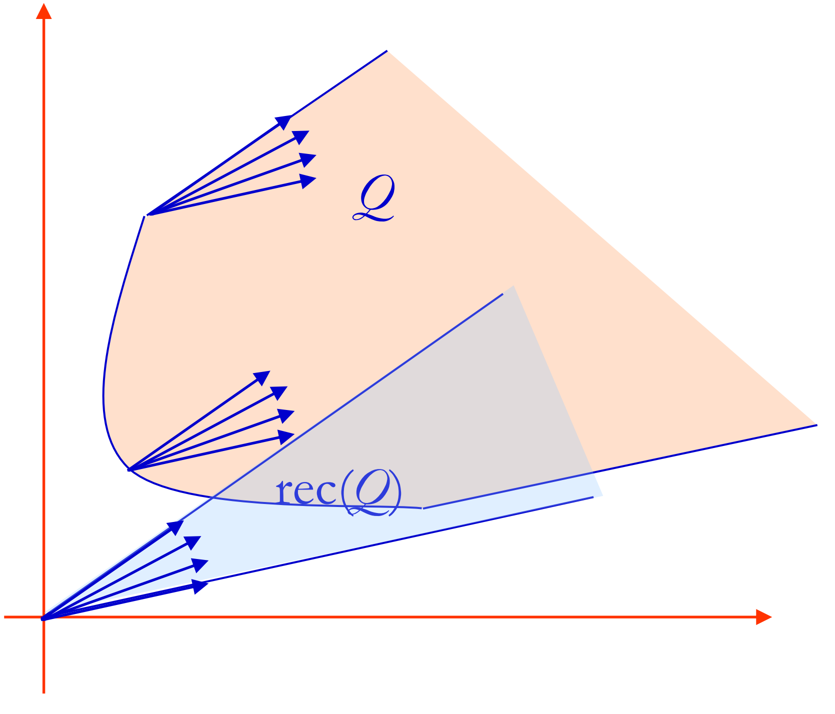
[Definizione 7.3.4] Un vettore $\mathbf{d} \in R^n$ si dice direzione di recessione (o raggio) di un insieme convesso $\mathcal{Q} \subseteq R^n$ se per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{Q}$ e per ogni $\lambda \geq 0$ la semiretta $\mathbf{x} + \lambda\,\mathbf{d}$ è completamente contenuta in $\mathcal{Q}$.



Dalla definizione segue immediatamente che se il vettore $\mathbf{d}$ è una direzione di recessione allora lo è anche ogni vettore $\lambda\,\mathbf{d}$ con $\lambda \geq 0$

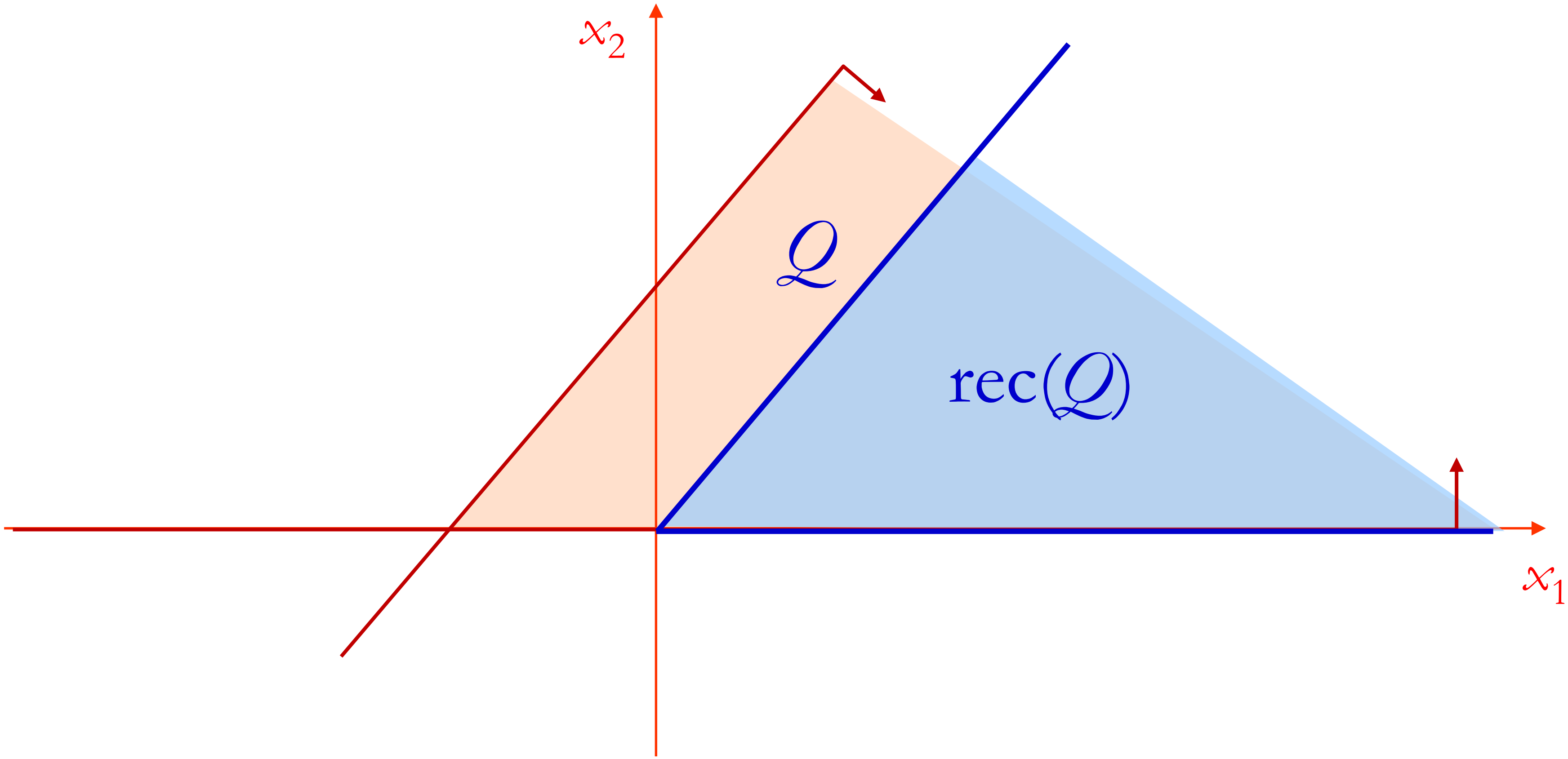
Cono di recessione di un insieme convesso

[Definizione 7.3.5] L'insieme di tutte le direzioni di recessione di $\mathcal{Q}$ si dice cono di recessione di $\mathcal{Q}$, e si indica con rec($\mathcal{Q}$).



Cono di recessione: esempi

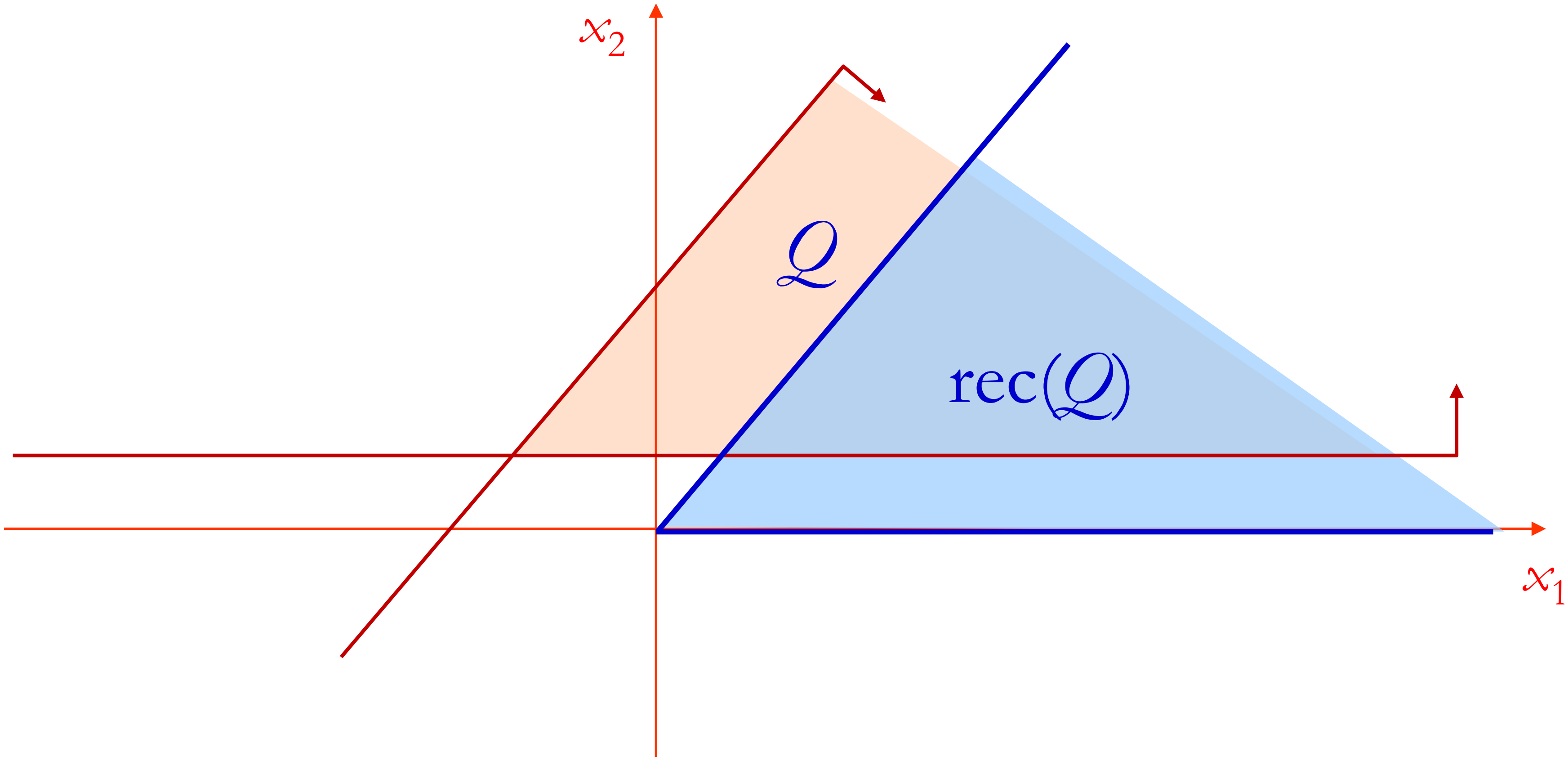
$\mathcal{Q} = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^2 \colon x_2 \geq 0;\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6\}$



rec($\mathcal{Q}$) può essere contenuto in $\mathcal{Q}$

Cono di recessione: esempi

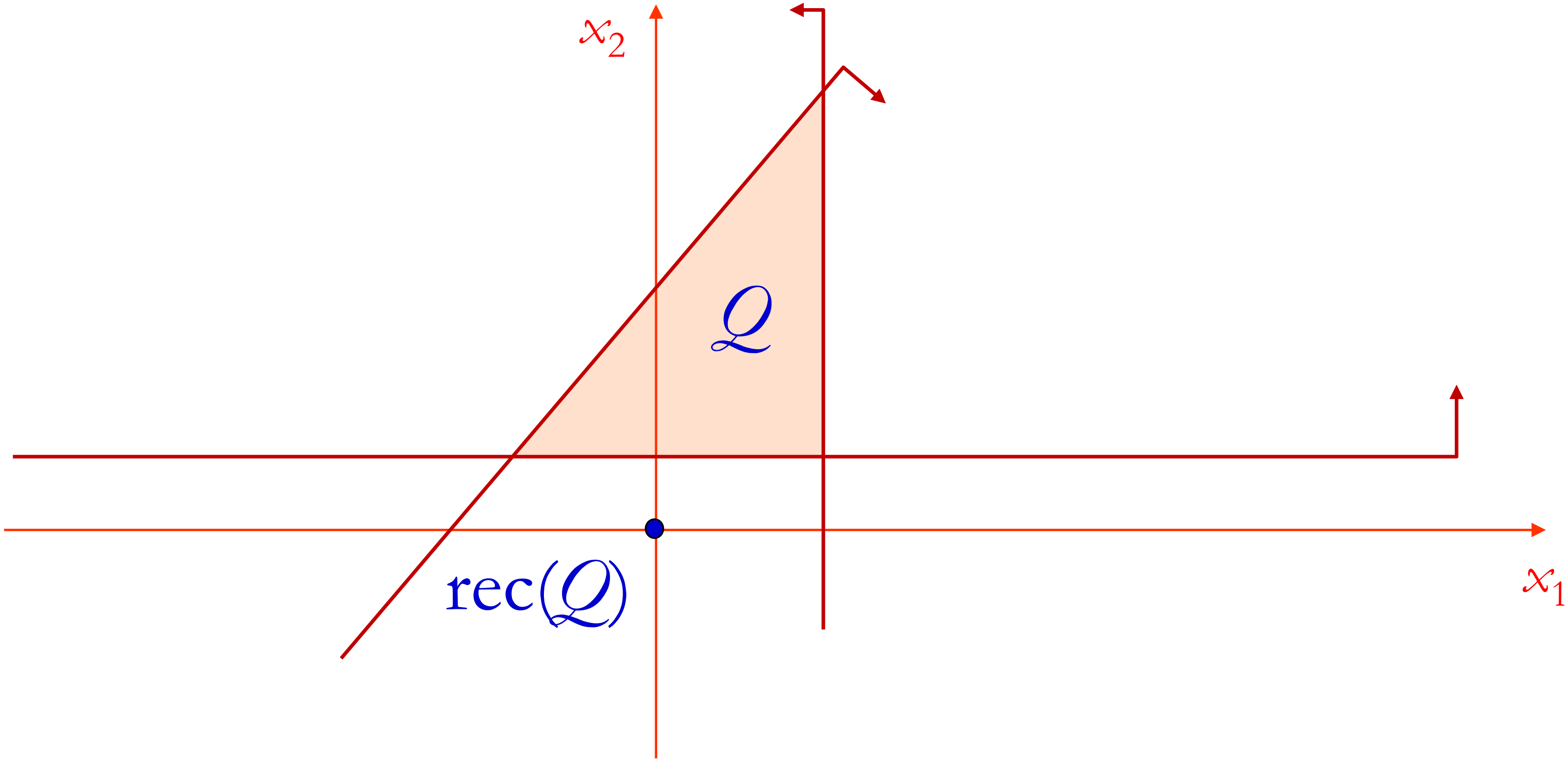
$\mathcal{Q} = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^2\colon x_2 \geq 1;\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6\}$



rec($\mathcal{Q}$) non è necessariamente contenuto in $\mathcal{Q}$

Cono di recessione: esempi

$\mathcal{Q} = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^2 \colon x_2 \geq 1;\ x_1 \leq 2;\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6\}$

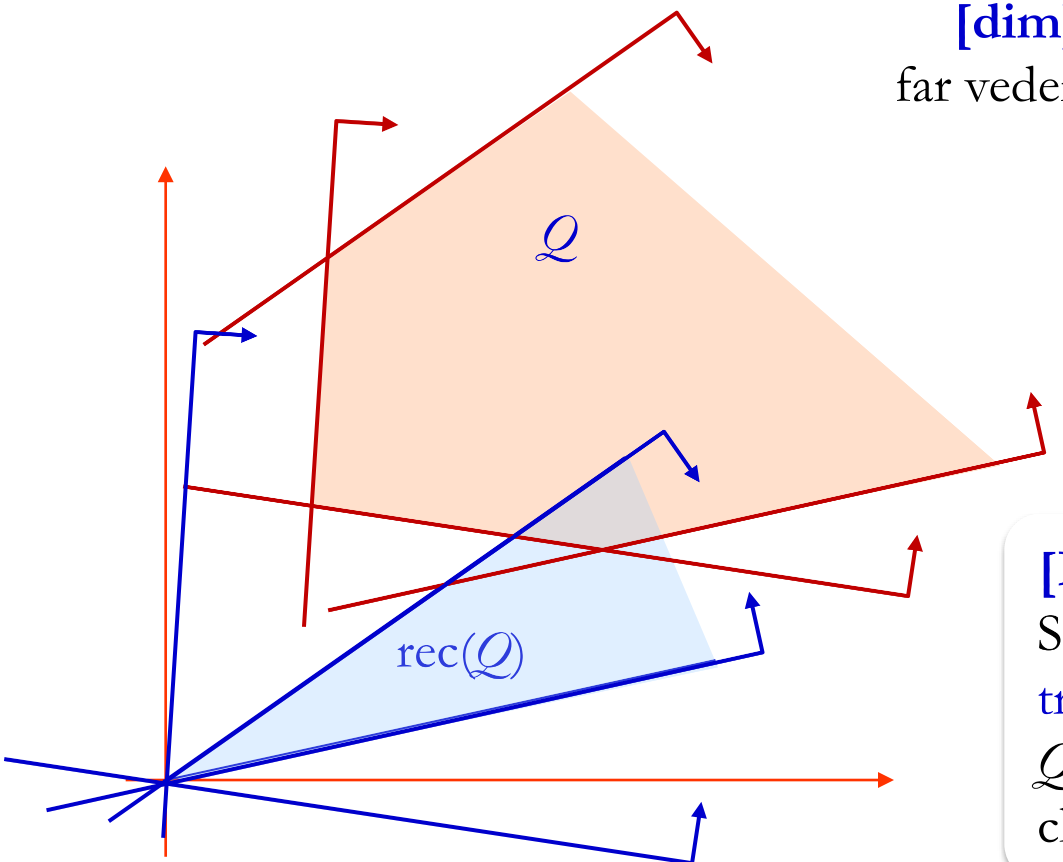


Se $\mathcal{Q}$ è limitato, rec($\mathcal{Q}$) $= \{\mathbf{0}\}$

Cono di recessione e cono poliedrale

[Teorema 7.3.3] il cono di recessione rec(P) di un poliedro non vuoto $P = \{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$ coincide con il cono poliedrale $C = \{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}\}$

[dim] Per dimostrare che rec(P) $\equiv C$ si può far vedere che l'uno include l'altro e viceversa.



[Interpretazione geometrica]
Se Q è un poliedro, rec(Q) si individua traslando ogni iperpiano che definisce Q fino a intercettare l'origine, e quello che si ottiene è un cono poliedrale.

Cono di recessione e cono poliedrale

1. $C \subseteq \text{rec}(P)$, cioè ogni soluzione di $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}$ è una dir. di recessione di P

- Sia $\underline{\mathbf{d}}$ una soluzione del sistema $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}$.
- Dalla definizione, il vettore $\underline{\mathbf{d}}$ è una direzione di recessione di P se $\forall \mathbf{x} \in P$ e $\forall l > 0$ si ha $(\mathbf{x} + l\,\underline{\mathbf{d}}) \in P$.

- Il punto $(\mathbf{x} + l\,\underline{\mathbf{d}}) \in P$ se $\quad \mathbf{A}(\mathbf{x} + l\,\underline{\mathbf{d}}) \leq \mathbf{b}$ cioè se
  $\mathbf{Ax} + l\,\mathbf{A}\underline{\mathbf{d}} \leq \mathbf{b}$. In effetti

$$\underbrace{\mathbf{Ax} + l\,\mathbf{A}\underline{\mathbf{d}} \leq \mathbf{Ax}}_{\text{dato che } l > 0 \text{ e } \mathbf{A}\underline{\mathbf{d}} \leq \mathbf{0}} \leq \mathbf{b}$$

dato che $\mathbf{x} \in P$

Cono di recessione e cono poliedrale

2. $\text{rec}(P) \subseteq C$, cioè ogni dir. di recessione di P è una soluzione di $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}$

- Per assurdo sia $\underline{\mathbf{d}}$ una dir. di recessione di P ma che però non soddisfa una delle disequazioni di $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}$, poniamo l'$i$-esima (cioè si ha $\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{d}} > 0$).
- $\underline{\mathbf{d}} \in \text{rec}(P)$ quindi $\forall \mathbf{x} \in P$ e $\forall l > 0$ deve essere $\mathbf{A}(\mathbf{x} + l\,\underline{\mathbf{d}}) \leq \mathbf{b}$ e ciò vale in particolare per l' i-esimo vincolo:

$$\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} + l\,\underline{\mathbf{d}}) \leq b_i \qquad \text{cioè}$$

$$\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + l\,\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{d}} \leq b_i$$

dato che $\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{d}} > 0$ e b_i è una quantità finita, il vincolo non può essere soddisfatto $\forall l > 0$ ma solo per i valori $l \leq [b_i - \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x}]/\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{d}}$.

Quindi, se $\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{d}} > 0$ allora $\underline{\mathbf{d}} \notin \text{rec}(P)$ ■

Cono di recessione e cono poliedrale

Analogamente, il cono di recessione $\mathrm{rec}(P)$

- di un poliedro non vuoto $P = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n \colon \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}\}$ coincide con il cono poliedrale $C = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n \colon \mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}\}$
- di un poliedro non vuoto $P = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n \colon \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ coincide con il cono poliedrale $C = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n \colon \mathbf{Ax} = \mathbf{0}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

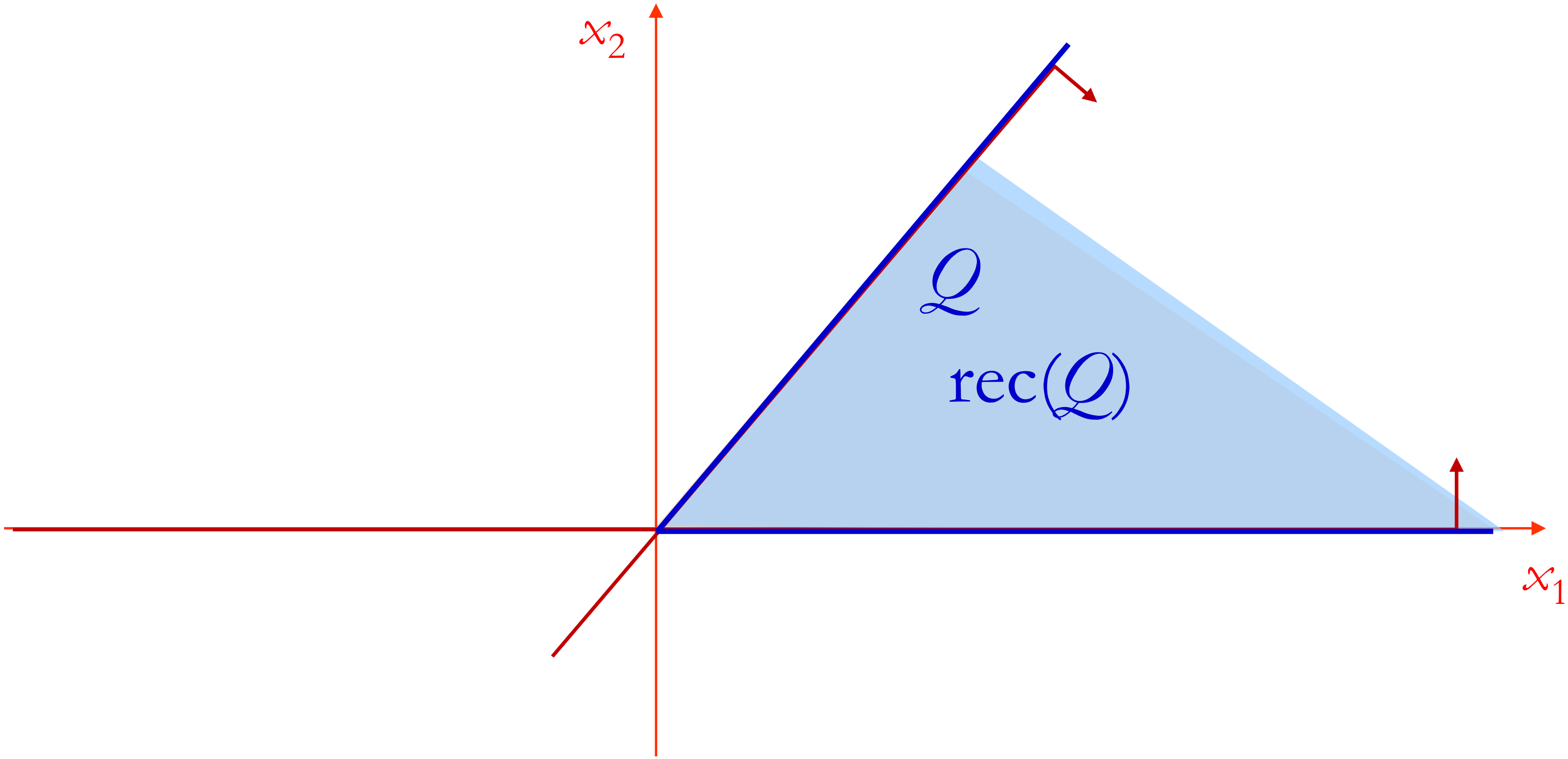
[Corollario] dato un cono poliedrale $C = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n \colon \mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}\}$ si ha che

$$C \equiv \mathrm{rec}(C)$$

Cioè, ogni punto di un cono poliedrale è una sua direzione di recessione e viceversa

Cono di recessione: esempi

$\mathcal{Q} = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^2 \colon x_2 \geq 0; -3x_1 + 2x_2 \leq 0\}$



se $\mathcal{Q}$ è un cono poliedrale allora rec($\mathcal{Q}$) coincide con $\mathcal{Q}$

Coni e politopi finitamente generati

[Definizione 7.3.17] un cono $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto finitamente generato se esiste un sottoinsieme finito $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r\} \subset C$ di suoi punti tale che

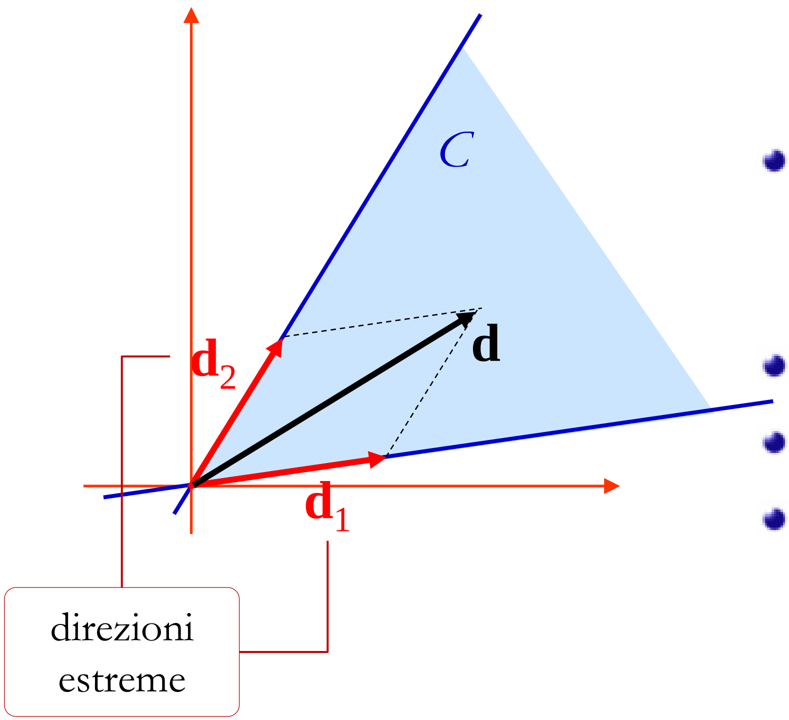
$$C = cone(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \middle| \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{y}_i \, , \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}\right\}$$

[Definizione 7.3.18] un politopo $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto finitamente generato se esiste un sottoinsieme finito $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\} \subset P$ di suoi punti tale che

$$P = conv(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \middle| \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \mathbf{w}_i \, , \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1\right\}$$

Raggi estremi (o direzioni estreme)

[Definizione 7.3.7] Un raggio $\mathbf{d}$ di un cono poliedrale $C = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n \colon \mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}\}$ è detta estremo se rende attivi $(n - 1)$ vincoli di $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}$.



- $\mathbf{d}$ è un raggio estremo (o direzione estrema) di C se non esprimile come combinazione conica <u>non banale</u> degli altri raggi.
- I raggi estremi di C formano facce massimali di C
- L'insieme dei raggi estremi è indicato con rays(C)
- rays(C) è un insieme **finito** di punti

Coni poliedrali: rappresentazione *interna*

[Teorema 7.3.8] Un cono è poliedrale se e solo se è finitamente generato

quindi se C è un cono poliedrale allora esiste un sottoinsieme finito $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r\} \subset C$ di suoi punti tale che $C = cone(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r)$

[Teorema 7.3.12] Un cono poliedrale puntato coincide con l'involucro conico dei suoi raggi estremi, cioè

$$C = cone(rays(C))$$

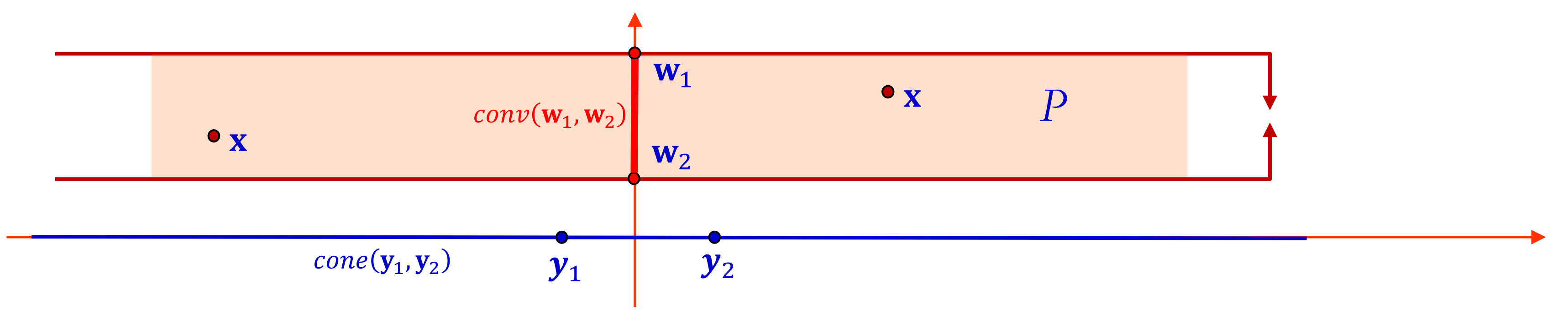
ossia, ogni punto di C può essere espresso come combinazione conica dei suoi raggi estremi (che costituiscono un sottoinsieme finito di punti di C)

Poliedri: rappresentazione *interna*

[Teorema 7.3.9] Resolution Theorem (Weyl-Minkowski, 1936)
Un insieme P è un poliedro se e solo se è la somma vettoriale di un politopo finitamente generato e un cono finitamente generato.

Più precisamente, $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è un poliedro se e solo se esistono 2 insiemi di vettori $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\}$ tali che

$$P = conv(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s) + cone(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{w}_r)$$



Poliedri: rappresentazione *interna*

[Teorema 7.3.9] Resolution Theorem (Weyl-Minkowski, 1936)
Un insieme P è un poliedro <u>se e solo se</u> è la somma vettoriale di un politopo finitamente generato e un cono finitamente generato.

In particolare, se il poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è un <u>cono poliedrale</u> basta considerare un politopo vuoto dato che

$$P = cone(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{w}_r)$$

Inoltre sappiamo che

$$P = cone(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{w}_r) \equiv rec(P)$$

ma si può dimostrare che $cone(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{w}_r)$ coincide con $rec(P)$ in generale

Poliedri: rappresentazione *interna*

[Teorema 7.3.10] Un poliedro P può essere espresso come somma vettoriale di un politopo finitamente generato e del cono di recessione $rec(P)$

$$P = conv(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s) + rec(P)$$

Inoltre, se un poliedro P possiede almeno un punto estremo:

[Teorema 7.3.11] P può essere espresso come somma vettoriale dell'involucro dei suoi punti estremi e del cono di recessione

$$P = conv(ext(P)) + rec(P)$$

…ricapitolando

[Teorema 7.3.9] Resolution Theorem (Weyl-Minkowski, 1936)
Un insieme P è un poliedro se e solo se è la somma vettoriale di un politopo finitamente generato e un cono finitamente generato.

$P \subseteq \mathbb{R}^n$ è un poliedro se e solo se esistono 2 insiemi di vettori $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\}$ tali che

$$P = \boxed{conv(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s)} + \boxed{cone(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{w}_r)}$$

[Teorema 7.3.11]

$\equiv conv(ext(P))$ se P possiede almeno un punto estremo

[Teorema 7.3.10]

$\boxed{\equiv rec(P)}$

[Teorema 7.3.12]

$\equiv cone(rays(P))$ se P possiede almeno un punto estremo

…ricapitolando

Un insieme convesso P con **almeno un punto estremo** è un poliedro se e solo se ogni punto $\mathbf{x} \in P$ può essere espresso come

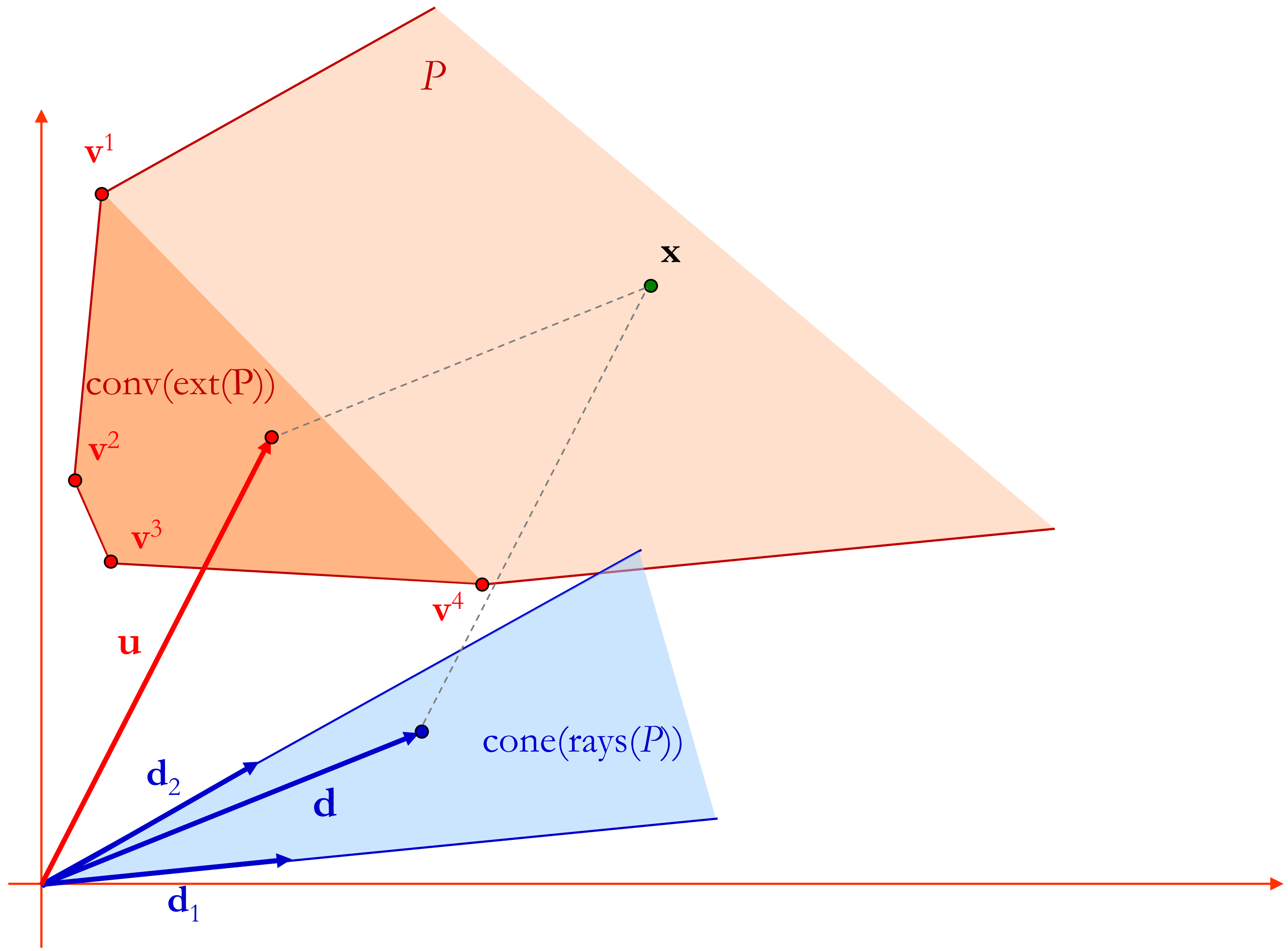
$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{d}$$

con $u \in conv(ext(P))$ e $d \in cone(rays(P))$

[Corollari]

- Un poliedro P è un polìtopo se e solo se $\text{rec}(P) = \{\mathbf{0}\}$.
- Un poliedro P è un polìtopo se e solo se coincide con l'involucro convesso dei suoi punti estremi.

Poliedri: rappresentazione *interna*



Rette e Vertici

[Teorema 3.2.11] un poliedro non vuoto P ha almeno un vertice **se e solo se** non contiene alcuna retta

Se un problema di PL in *forma standard* ammette soluzione allora il poliedro associato ha almeno un vertice

Rappresentazione *interna*: esercizio

[Esercizio]

$P = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^2: -x_1 + 2x_2 \geq 2,\ x_1 - x_2 \geq -2,\ 5x_1 + 3x_2 \geq 15\}$

- verificare che $(3, 3) \in P$
- trovare $\mathbf{u} \in conv(ext(P))$, e una direzione di recessione $\mathbf{d}$ tali che $(3, 3) = \mathbf{u} + \mathbf{d}$

Teorema fondamentale della PL

Sia $z = \max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}: \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in R^n\}$ un problema di PL in forma generale e P il poliedro associato, che supponiamo **non vuoto** e con **almeno un vertice**. Allora

[Teorema]

1. Se **esiste** una direzione di recessione $\mathbf{d}$ di P tale che $\mathbf{c}^T\mathbf{d} > 0$ allora il problema di PL è illimitato;
2. Se **per ogni** direzione di recessione $\mathbf{d}$ di P si ha $\mathbf{c}^T\mathbf{d} \leq 0$ allora il problema di PL ammette ottimo finito. Inoltre, esiste una soluzione ottima che è un punto estremo di P.

Teorema fondamentale della PL

[Dim 1.] Si supponga per assurdo che il problema ammetta un ottimo finito $\mathbf{x}^*$, cioè un $\mathbf{x}^*$ tale che

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^* \neq +\infty \qquad \text{e} \qquad \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) \geq 0 \;\; \text{per ogni } \mathbf{x} \in P$$

Per ipotesi $\mathbf{d}$ è una direzione di recessione di P cioè per ogni $\lambda > 0$ e per ogni $\mathbf{y} \in P$ si ha $\mathbf{y} + \lambda\mathbf{d} \in P$. Quindi

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}^* - \mathbf{y} - \lambda\mathbf{d}) \geq 0 \qquad \text{per ogni } \lambda > 0 \text{ e } \mathbf{y} \in P$$

cioè
$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^* - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} - \lambda\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} \geq 0$$

da cui
$$\lambda\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} \leq \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}^* - \mathbf{y})$$

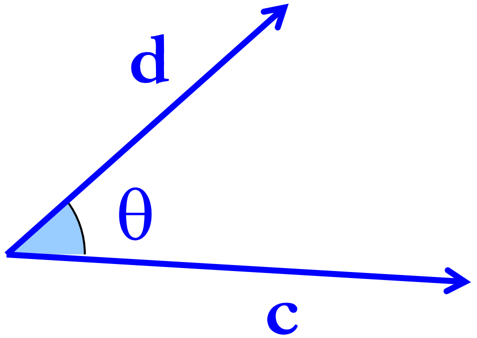
ma questa relazione è in generale falsa. Infatti $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}^* - \mathbf{y})$ è una quantità finita mentre $\lambda\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{d}$ può crescere senza limite dato che $\lambda > 0$ e per ipotesi $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} > 0$.

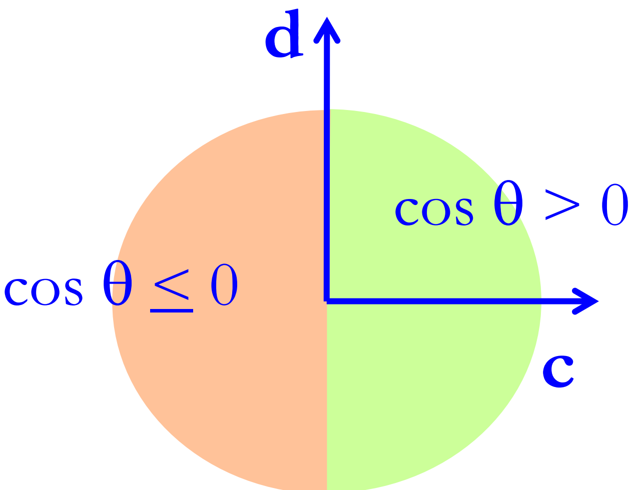
$\blacksquare$

Teorema fondamentale della PL

… geometricamente:

$\mathbf{c}^T\mathbf{d}$ è il *prodotto scalare* tra i vettori **c** e **d**, anche definito come $|\mathbf{c}|\,|\mathbf{d}|\cos\theta$





Se $\mathbf{c}^T\mathbf{d} > 0$ (cioè se $\cos\theta > 0$) vuol dire che esiste una direzione di recessione concorde con il gradiente della funzione obiettivo

Teorema fondamentale della PL

[dim 2.]

Ordiniamo i punti estremi $ext(P) = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ di P per valori non crescenti della funzione obiettivo (cioè tali che $\mathbf{c}^T\mathbf{v}_1 \geq \mathbf{c}^T\mathbf{v}_2 \geq \ldots \geq \mathbf{c}^T\mathbf{v}_p$).

Teorema di Weyl: ogni $\mathbf{x} \in P$ si può esprimere come $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{d}$, con $\mathbf{u} \in conv(ext(P))$ e $\mathbf{d}$ direzione di recessione. Quindi

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}^T\mathbf{u} + \mathbf{c}^T\mathbf{d} \qquad \text{per ogni } \mathbf{x} \in P$$

$$\mathbf{c}^T\mathbf{u} + \mathbf{c}^T\mathbf{d} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{u} \qquad \text{dato che per ipotesi } \mathbf{c}^T\mathbf{d} \leq 0$$

Teorema fondamentale della PL

Siccome $\mathbf{u}$ è una combinazione convessa di punti estremi di P, si ha

$$\mathbf{c}^T\mathbf{u} = \mathbf{c}^T(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_p\mathbf{v}_p) \quad \text{con} \quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_p = 1,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_p \geq 0$$

$$= \lambda_1\mathbf{c}^T\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_p\mathbf{c}^T\mathbf{v}_p$$

e sfruttando l'ipotesi dell'ordinamento, cioè che $\mathbf{c}^T\mathbf{v}_1 \geq \mathbf{c}^T\mathbf{v}_k$ $(k = 2,\ldots,p)$, posso sostituire ogni $\mathbf{c}^T\mathbf{v}_k$ con $\mathbf{c}^T\mathbf{v}_1$ e scrivere

$$\mathbf{c}^T\mathbf{u} \leq (\lambda_1 + \ldots + \lambda_p)\mathbf{c}^T\mathbf{v}_1 \qquad \text{ma } \lambda_1 + \ldots + \lambda_p = 1 \text{ quindi}$$

$$\mathbf{c}^T\mathbf{u} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{v}_1$$

$\boxed{\text{Ricapitolando } \mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{u} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{v}_1 \text{ per ogni } \mathbf{x} \in P \text{, quindi } \mathbf{v}_1 \in ext(P) \text{ è una soluzione ottima per } P.}$

■

Teorema fondamentale della PL: riassunto

- **Caso 1.** regione ammissibile non vuota e limitata
  - esiste una soluzione ottima. Inoltre, esiste una soluzione ottima che è un punto estremo (cioè un vertice).

- **Caso 2.** regione ammissibile non vuota e non limitata
  - esiste una soluzione ottima che è un punto estremo (cioè un vertice), oppure
  - esiste una soluzione ottima ma nessuna soluzione ottima è un punto estremo (e questo può accadere solo se la regione ammissibile non ha punti estremi), oppure
  - il problema è illimitato (il valore della f.o. è $+\infty$)

Osservazioni

- Il teorema fondamentale della PL ci dice come risolvere un problema di PL non vuoto, ma per poterlo utilizzare è necessario conoscere la *rappresentazione interna* del poliedro.

- In generale però un problema di PL è descritto da un numero finito di equazioni/disequazioni lineari (*rappresentazione esterna*).

- Per problemi con al più 3 variabili si può utilizzare la soluzione geometrica, ma per risolvere problemi con più di 3 variabili è necessaria una descrizione *analitica* dei vertici.

- Se il problema è posto in forma standard P: $\max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}: \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$, una qualsiasi soluzione ammissibile di P è *anche* una soluzione del sistema di equazioni lineari $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (ma attenzione! non vale il viceversa)

Esiste una procedura generale per risolvere un problema di PL?

Sistemi di equazioni lineari

e

Programmazione lineare

(Vercellis cap. 3.2 e appendice A.3)

Sistemi di equazioni lineari

Un sistema di equazioni lineari in m equazioni e n incognite (con $m \leq n$) ha la seguente forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ,\ldots, + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ,\ldots, + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ,\ldots, + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sistemi di equazioni lineari

In forma compatta il sistema si scrive

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad \text{con } \mathbf{A}(m \times n),\ \mathbf{x} \in \mathrm{R}^n,\ \mathbf{b} \in \mathrm{R}^m$$

oppure

$$\mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{A}_n x_n = \mathbf{b}$$

o anche

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1{}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = b_1 \\ \quad \vdots \\ \mathbf{a}_m{}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = b_m \end{cases}$$

La matrice $\mathbf{A}|\mathbf{b}$ ottenuta giustapponendo il vettore **b** alla matrice **A** viene detta matrice *estesa* (o *completa*).

Sistemi di equazioni lineari

Sia $X = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$ l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

- Si dice che il sistema è incompatibile se $X = \varnothing$
- Si dice che il sistema è compatibile se $X \neq \varnothing$

Riscrivendo il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ come

$$\mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_2 x_2 + \ldots \mathbf{A}_n x_n = \mathbf{b}$$

è facile osservare che le componenti di una soluzione $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ del sistema corrispondono ai coefficienti di una combinazione lineare dei vettori colonna della matrice $\mathbf{A}$ che descrive il termine noto $\mathbf{b}$.

Sistemi di equazioni lineari

[Teorema] Rouché-Capelli

Il sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{A}(m \times n)$, è compatibile <u>se e solo se</u>

$$rank(\mathbf{A}) = rank(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$$

Sistemi di equazioni lineari

Casi

1. $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = k < n$

   $n - k$ gradi di libertà: infinite soluzioni

2. $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = n$

   A è una base di R^n: soluzione unica

3. $\text{rank}(\mathbf{A}) \neq \text{rank}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b})$

   $\text{rank}(\mathbf{A}) < \text{rank}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b})$: sistema incompatibile

Soluzione di sistemi quadrati di eq. lineari

Si vuole risolvere il sistema lineare

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad \text{in } n \text{ eq. e } n \text{ incognite e } \mathrm{rank}(\mathbf{A}) = n$$

Idea: risolvere il sistema equivale a calcolare la matrice inversa:
Se $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = n$ allora $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ e esiste $\mathbf{A}^{-1}$. Quindi si può scrivere

quindi

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}}$$

Soluzione di sistemi quadrati di eq. lineari

Soluzione del sistema:

- Metodo algebrico (calcolo di $n^2 + 1$ determinanti)

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \frac{(cof\ \mathbf{A})^{\mathrm{T}}}{\det(\mathbf{A})}}$$

con $[cof\ a_{ij}] = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$

- Regola di *Cramer* (calcolo di «soli» $n + 1$ determinanti)

$$\boxed{x_i = \frac{\det(\mathbf{A}^{(i)})}{\det(\mathbf{A})}}$$

$\mathbf{A}^{(i)}$: matrice ottenuta sostituendo la i-esima colonna di **A** con il vettore **b**

[nota] Il calcolo del determinante di una matrice $\mathbf{A}(n \times n)$ richiede $n!$ moltiplicazioni.

Operazioni elementari

[Definizione] due sistemi di (dis)equazioni sono equivalenti se e solo se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

[Definizione] operazioni elementari su una matrice $\mathbf{A}$

- moltiplicare una riga (o colonna) per una costante <u>non nulla</u>
- sommare ad una riga (o colonna) una combinazione lineare delle altre
- cambiare l'ordine delle righe (o delle colonne)

[Teorema] le operazioni elementari sulla matrice estesa $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b})$ di un sistema di equazioni lineari $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ conducono a una matrice estesa $(\mathbf{A}'\,|\,\mathbf{b}')$ di un sistema di equazioni lineari *equivalente*.

Metodo di Gauss-Jordan

Il metodo di Gauss-Jordan è una procedura iterativa che trasforma, tramite una serie di operazioni di ***pivot***, il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nel sistema

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Un'operazione di pivot consiste in una serie di *operazioni elementari* sul sistema. Il pivot quindi trasforma il sistema in un sistema equivalente.

Operazione di pivot: esempio

pivot sull'elemento a_{23}

1. si divide la riga 2 per a_{23}

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \boxed{2} & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

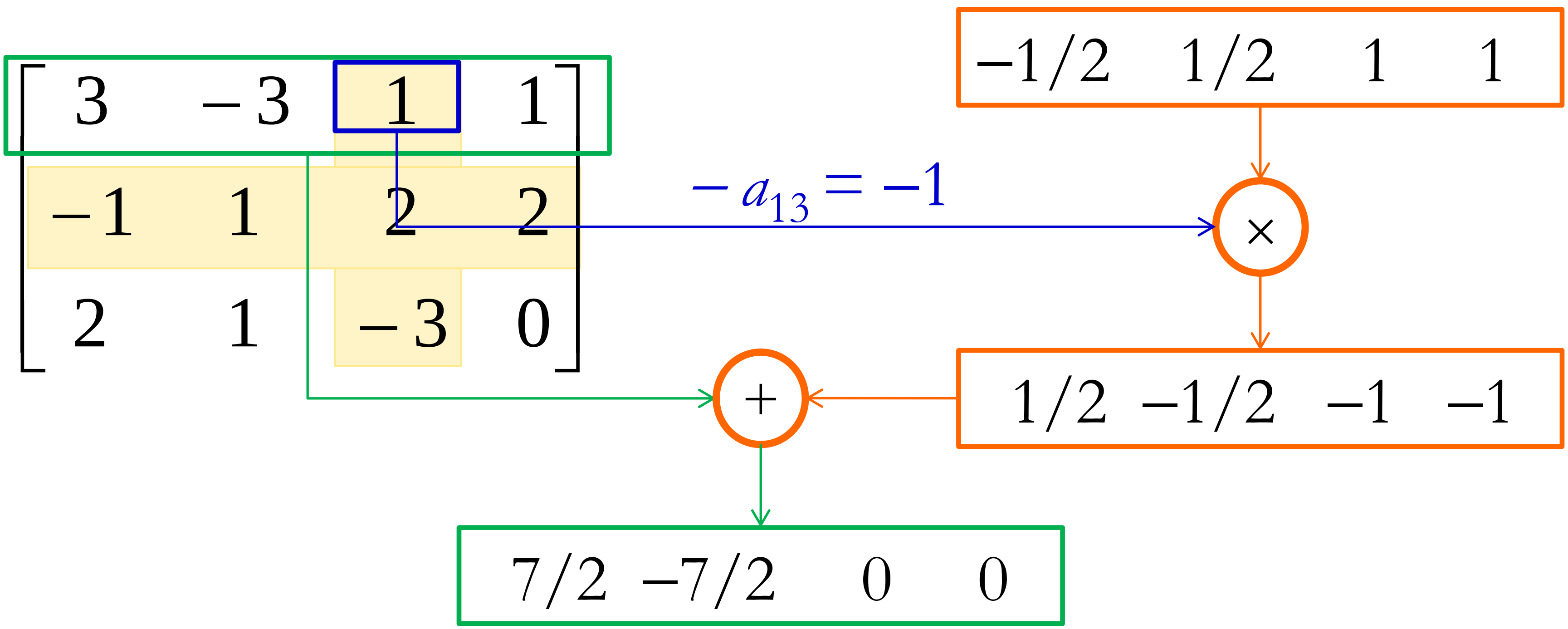
$$/$$

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Operazione di pivot: esempio

pivot sull'elemento a_{23}

2. si somma ad ogni riga $h \neq 2$ la riga 2 ottenuta al passo precedente moltiplicata per $-\, a_{h3}$



Operazione di pivot: esempio

pivot sull'elemento a_{23}

2. si somma ad ogni riga $h \neq 2$ la riga 2 ottenuta al passo precedente moltiplicata per $-a_{h3}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & \boxed{-3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-a_{33} = 3 \qquad \times$$

$$\begin{bmatrix} -3/2 & 3/2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$+$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 5/2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Operazione di pivot: esempio

pivot sull'elemento a_{23}

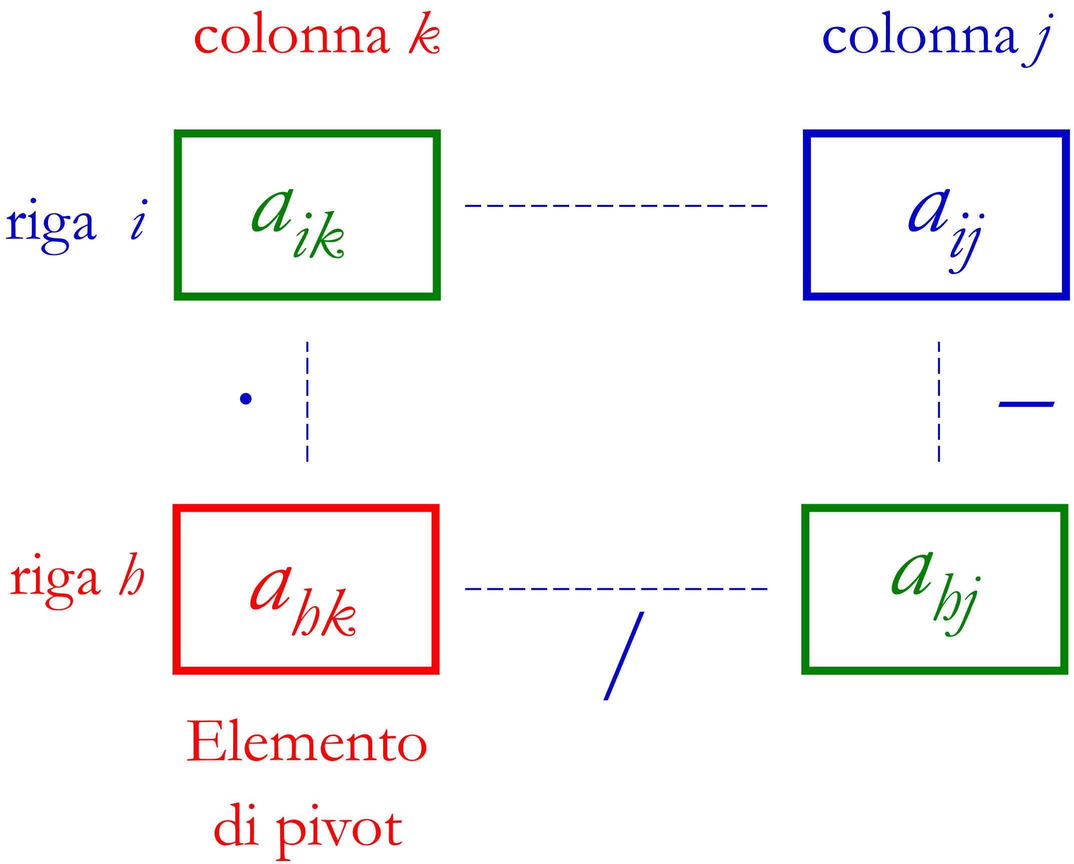
prima

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

dopo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7/2 & -7/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 5/2 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Operazione di pivot



$$a_{ij} = a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{hj} / a_{hk}$$

Operazione di pivot

- Il pivot sull'elemento $a_{hk} \neq 0$ della matrice $\mathbf{A}$ consiste nelle seguenti operazioni
  1. si divide la riga h di $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b})$ per a_{hk}
  2. si somma ad ogni riga $i \neq h$ la nuova riga h ottenuta al passo precedente moltiplicata per $-\,a_{ik}$

lo scopo del pivot è trasformare la colonna k-esima nel versore $\mathbf{e}_h$:

- con il passo 1. si ottiene $a_{hk} = 1$
- con il passo 2. si ottiene $a_{ik} = 0$ per $i \neq h$

Interpretazione dell'operazione di pivot

Il pivot sull'elemento a_{hk} equivale a risolvere la h-esima equazione rispetto alla variabile x_k e sostituire x_k in tutte le altre equazioni.

[Esempio]

pivot su a_{23}

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 \quad + x_3 = 1 \\ -x_1 \quad + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 \quad + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

Risolvo la seconda equazione rispetto alla variabile x_3

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 \quad + x_3 = 1 \\ x_3 = 1 + 1/2\, x_1 - 1/2 x_2 \\ 2x_1 \quad + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

Interpretazione dell'operazione di pivot

Il pivot sull'elemento a_{hk} equivale a risolvere la h-esima equazione rispetto alla variabile x_k e sostituire x_k in tutte le altre equazioni.

[Esempio]

Sostituisco x_3 nella prima e terza equazione

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 \quad + 1 + 1/2\, x_1 - 1/2 x_2 = 1 \\ x_3 = 1 + 1/2\, x_1 - 1/2 x_2 \\ 2x_1 \quad + x_2 - 3(1 + 1/2\, x_1 - 1/2 x_2) = 0 \end{cases}$$

Riordino i termini

$$\begin{cases} 7/2 x_1 - 7/2 x_2 \qquad = 0 \\ -1/2 x_1 + 1/2 x_2 + x_3 = 1 \\ 1/2 x_1 + 5/2 x_2 \qquad = 3 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 7/2 & -7/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 5/2 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Metodo di Gauss-Jordan: algoritmo

Sia $(\mathbf{A}^{(0)} \,|\, \mathbf{b}^{(0)})$ la matrice estesa del sistema di partenza e $(\mathbf{A}^{(i-1)} \,|\, \mathbf{b}^{(i-1)})$ la matrice estesa al passo *i*-esimo.

Le operazioni del passo *i*-esimo sono:

- se l'*i*-esima riga di $\mathbf{A}^{(i-1)}$ è il vettore nullo e $b_i^{(i-1)} \neq 0$ il sistema è incompatibile;
- se l'*i*-esima riga della matrice estesa $(\mathbf{A}^{(i-1)} \,|\, \mathbf{b}^{(i-1)})$ è il vettore nullo allora l'*i*-esima equazione del sistema è ridondante e può essere eliminata;
- Individuare una colonna *k* tale che $a_{ik}^{(i-1)} \neq 0$ e effettuare il **pivot** su $a_{ik}^{(i-1)}$

Esempio: sistema con unica soluzione

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

<u>1° iterazione</u>: pivot su a_{11}

$$(\mathbf{A}^{(0)} \mid \mathbf{b}^{(0)}) = \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \mathbf{b}^{(0)} \\ 3 & -3 & 1 & 1 \\ \boxed{-1} & 1 & 2 & 2 \\ \boxed{2} & 1 & -3 & 1 \end{array} \quad \boxed{/\ 3}$$

$$\boxed{1} \cdot \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1/3 & 1/3 \end{array}$$

$$= \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1/3 & 1/3 \end{array} \quad + \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1/3 & 1/3 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ & & & \end{array}$$

$$\boxed{-2} \cdot \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1/3 & 1/3 \end{array}$$

$$= \begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2/3 & -2/3 \end{array} \quad + \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 7/3 & 7/3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 7/3 & 7/3 \\ 0 & 3 & -11/3 & 1/3 \end{array} = (\mathbf{A}^{(1)} \mid \mathbf{b}^{(1)})$$

Esempio: sistema con unica soluzione

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

<u>2° iterazione</u>: pivot su a_{23}

$$(\mathbf{A}^{(1)} \mid \mathbf{b}^{(1)}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \mathbf{b}^{(1)} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \boxed{1/3} & 1/3 \\ 0 & 0 & 7/3 & 7/3 \\ 0 & 3 & \boxed{-11/3} & 1/3 \end{array}\right] \end{array} \quad / \, (7/3)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & & \end{array}\right]$$

$-1/3 \cdot \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$

$= \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1/3 & -1/3 \end{array} \; +$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -11/3 & 1/3 \end{array}\right]$$

$11/3 \cdot \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$

$= \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 11/3 & 11/3 \end{array} \; +$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right] = (\mathbf{A}^{(2)} \mid \mathbf{b}^{(2)})$$

Esempio: sistema con unica soluzione

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 \quad + x_3 = 1 \\ -x_1 \quad + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 \quad + x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\underline{2° \text{ iterazione}}\text{: pivot su } a_{32}}$

$$\begin{array}{c} \\ (\mathbf{A}^{(2)} \,|\, \mathbf{b}^{(2)}) = \end{array} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \mathbf{b}^{(2)} \\ \end{array}$$

$$(\mathbf{A}^{(2)} \,|\, \mathbf{b}^{(2)}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right] \quad \boxed{/\ 3}$$

$$= \begin{array}{|ccc|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \; + \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 \end{array}\right]$$

$$\boxed{0} \cdot \begin{array}{|ccc|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 4/3 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|ccc|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 4/3 \\ \hline \end{array} \; + \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 \end{array}\right]$$

$$\boxed{1} \cdot \begin{array}{|ccc|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 4/3 \\ \hline \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 \end{array}\right] = (\mathbf{A}^{(3)} \,|\, \mathbf{b}^{(3)})$$

Esempio: sistema con unica soluzione

$$= (\mathbf{A}^{(3)} \mid \mathbf{b}^{(3)}) \quad \begin{array}{|ccc|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 \\ \hline \end{array}$$

$$= (\mathbf{A}^{(3)} \mid \mathbf{b}^{(3)}) \quad \begin{array}{|ccc|c|} \hline 1x_1 & 0x_2 & 0x_3 & = 4/3 \\ 0x_1 & 0x_2 & 1x_3 & = 1 \\ 0x_1 & 1x_2 & 0x_3 & = 4/3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4/3 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = 4/3 \end{cases}$$

La soluzione (unica) del sistema è $x_1 = 4/3$, $x_2 = 4/3$, $x_3 = 1$

Esempio: sistema con infinite soluzioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 15 \end{cases}$$

1° iterazione: pivot su a_{11}

$$(\mathbf{A}^{(0)} \mid \mathbf{b}^{(0)}) = \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \mathbf{b}^{(0)} \\ \hline 1 & 1 & -1 & 4 \\ \boxed{2} & -1 & 3 & 7 \\ \boxed{4} & 1 & 1 & 15 \end{array} \quad / \, 1$$

$$-2 \cdot \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \end{array} = \begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 2 & -8 \end{array} \; +$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ & & & \end{array}$$

$$-4 \cdot \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \end{array} = \begin{array}{ccc|c} -4 & -4 & 4 & -16 \end{array} \; +$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \end{array} = (\mathbf{A}^{(1)} \mid \mathbf{b}^{(1)})$$

Esempio: sistema con infinite soluzioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 15 \end{cases}$$

2° iterazione: pivot su a_{22}

$$(\mathbf{A}^{(1)} \mid \mathbf{b}^{(1)}) = \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \mathbf{b}^{(1)} \\ \hline 1 & \boxed{1} & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & \boxed{-3} & 5 & -1 \end{array} \quad / -3$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & -5/3 & 1/3 \end{array} \cdot (-1) = \begin{array}{cccc} 0 & -1 & 5/3 & -1/3 \end{array} \; +$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -5/3 & 1/3 \\ & & & \end{array}$$

$$3 \cdot \begin{array}{cccc} 0 & 1 & -5/3 & 1/3 \end{array} = \begin{array}{cccc} 0 & 3 & -5 & 1 \end{array} \; +$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2/3 & 11/3 \\ 0 & 1 & -5/3 & 1/3 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2/3 & 11/3 \\ 0 & 1 & -5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} = (\mathbf{A}^{(2)} \mid \mathbf{b}^{(2)})$$

Esempio: sistema con infinite soluzioni

$$= (\mathbf{A}^{(2)} \,|\, \mathbf{b}^{(2)})$$

1	0	2/3	11/3
0	1	–5/3	1/3
0	0	0	0

equazione ridondante

$$= (\mathbf{A}^{(2)} \,|\, \mathbf{b}^{(2)})$$

$1x_1$	$0x_2$	$2/3x_3$	$= 11/3$
$0x_1$	$1x_2$	$-5/3x_3$	$= 1/3$
$0x_1$	$0x_2$	$0x_3$	$= 0$

$$\begin{cases} x_1 + 2/3x_3 = 11/3 \\ x_2 \; -5/3\, x_3 = 1/3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 11/3 - 2/3x_3 \\ x_2 = 1/3 + 5/3\, x_3 \end{cases}$$

Esistono infinite soluzioni del sistema, una per ogni $x_3 \in R$

Esempio: sistema incompatibile

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -8 \end{cases}$$

1° iterazione: pivot su a_{11}

$$(\mathbf{A}^{(0)} \mid \mathbf{b}^{(0)}) = \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \mathbf{b}^{(0)} \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ \boxed{2} & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{5} & 5 & -3 & -8 \end{array}\right] \quad \boxed{/\ 1}$$

$$\boxed{-2} \cdot \boxed{1 \quad 1 \quad -1 \quad -3}$$
$$= \boxed{-2 \quad -2 \quad 2 \quad 6} \; +$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ & & & \end{array}\right]$$

$$\boxed{-5} \cdot \boxed{1 \quad 1 \quad -1 \quad -3}$$
$$= \boxed{-5 \quad -5 \quad 5 \quad 15} \; +$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 5 & 5 & -3 & -8 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{array}\right] = (\mathbf{A}^{(1)} \mid \mathbf{b}^{(1)})$$

Esempio: sistema incompatibile

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -8 \end{cases}$$

$\underline{2° \text{ iterazione}}$: pivot su a_{23}

$$(\mathbf{A}^{(1)} \mid \mathbf{b}^{(1)}) = \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \mathbf{b}^{(1)} \\ 1 & 1 & \boxed{-1} & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 7 \end{array} \quad / \, 3$$

$$1 \cdot \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} = \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \; +$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ & & & \end{array}$$

$$-2 \cdot \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} = \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \; +$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} = (\mathbf{A}^{(2)} \mid \mathbf{b}^{(2)})$$

Esempio: sistema incompatibile

$= (\mathbf{A}^{(2)} \mid \mathbf{b}^{(2)})$

1	1	0	–1
0	0	1	2
0	0	0	3

equazione impossibile

$= (\mathbf{A}^{(2)} \mid \mathbf{b}^{(2)})$

$1x_1$	$1x_2$	$0x_3$	$= -1$
$0x_1$	$0x_2$	$1x_3$	$= 2$
$0x_1$	$0x_2$	$0x_3$	$= 3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

Il sistema non ha soluzione. Infatti $\text{rank}(\mathbf{A}) < 3$ (dato che $\det(\mathbf{A}) = 0$) e $\text{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = 3$

A			**b**
1	1	–1	–3
2	2	1	0
5	5	–3	–8

Calcolo della matrice inversa

- Il metodo di Gauss-Jordan può essere utilizzato per ottenere la matrice inversa di una matrice $\mathbf{A}$. E' sufficiente considerare la matrice $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$ e trasformarla in $[\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}]$ per mezzo di al più n operazioni di pivot.

sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ di equazioni lineari:

- Si trasforma $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$ in $[\mathbf{I} \mid \mathbf{b}']$
- Si deduce che la soluzione è $\mathbf{x} = \mathbf{b}'$

equazione *matriciale* $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$

- Si trasforma $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$ in $[\mathbf{I} \mid \mathbf{A}']$
- Si deduce che la soluzione è $\mathbf{X} = \mathbf{A}'$ ma siccome l'equazione matriciale è $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ si deduce che $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$, quindi $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}'$.

Esercizi

[Esercizio] Qual è una stima ragionevole del numero di operazioni aritmetiche richieste dal metodo di Gauss-Jordan per risolvere un sistema di n equazioni lineari in n incognite?

Esercizi

Determinare i valori di k che rendono il sistema compatibile.

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 6x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 11x_4 = k \end{cases}$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema ammette più di una soluzione.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 6x_3 = k \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 2 \end{cases}$$

Discutere e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = \alpha + 8 \\ (\alpha - 4)x_1 + x_2 = -10 \end{cases}$$

Soluzione di sistemi di equazioni lineari ($m < n$)

Si vuole risolvere il sistema lineare

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

- in m equazioni e n incognite ($m < n$),
- $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A} | \mathbf{b})$ (sistema compatibile) e
- $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$ (matrice $\mathbf{A}(m \times n)$ di rango pieno, ossia sistema senza equazioni ridondanti)

[Osservazione] Il metodo di Gauss-Jordan può essere facilmente adattato per risolvere sistemi non quadrati di questa forma.

Esempio: Gauss-Jordan su sistemi non quadrati

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad + x_4 = 7 \\ x_2 \quad + x_3 \quad + x_4 + x_5 = 24 \\ x_1 - 3x_3 + 2x_5 = 8 \end{cases}$$

$$(\mathbf{A}^{(0)} \,|\, \mathbf{b}^{(0)}) = \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \mathbf{b} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 24 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right] \end{array}$$

pivot su a_{11}

$$(\mathbf{A}^{(1)} \,|\, \mathbf{b}^{(1)}) = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

pivot su a_{23}

$$(\mathbf{A}^{(2)} \,|\, \mathbf{b}^{(2)}) = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 73 \end{array}\right]$$

pivot su a_{35}

$$(\mathbf{A}^{(3)} \,|\, \mathbf{b}^{(3)}) = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 4/5 & 1 & 3/5 & 0 & 47/5 \\ 0 & 1/5 & 0 & 2/5 & 1 & 73/5 \end{array}\right]$$

Esempio: Gauss-Jordan su sistemi non quadrati

$$(\mathbf{A}^{(3)} \mid \mathbf{b}^{(3)}) = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 4/5 & 1 & 3/5 & 0 & 47/5 \\ 0 & 1/5 & 0 & 2/5 & 1 & 73/5 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ 4/5x_2 + x_3 + 3/5x_4 = 47/5 \\ 1/5x_2 + 2/5x_4 + x_5 = 73/5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 7 - 2x_2 - x_4 \\ x_3 = 47/5 - 4/5\, x_2 - 3/5\, x_4 \\ x_5 = 73/5 - 1/5\, x_2 - 2/5\, x_4 \end{cases}$$

Ponendo $x_2 = x_4 = 0$ si ottiene la soluzione

$$\begin{cases} x_1 = 7 \\ x_3 = 47/5 \\ x_5 = 73/5 \end{cases}$$

Esempio: Gauss-Jordan su sistemi non quadrati

$$(\mathbf{A}^{(3)}\,|\,\mathbf{b}^{(3)}) =$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\mathbf{b}^{(3)}$
1	2	0	1	0	7
0	4/5	1	3/5	0	47/5
0	1/5	0	2/5	1	73/5

Notare che questa soluzione è stata ottenuta invertendo la matrice quadrata **B** formata dai coefficienti delle variabili x_1, x_3 e x_5

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 24 \\ x_1 - 3x_3 + 2x_5 = 8 \end{cases}$$

$$(\mathbf{A}^{(0)}\,|\,\mathbf{b}^{(0)}) =$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\mathbf{b}^{(0)}$
1	2	0	1	0	7
0	1	1	1	1	24
1	0	–3	0	2	8

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrice di base

[Definizione] Una matrice di base è una sottomatrice quadrata $\mathbf{B}$ di $\mathbf{A}(m \times n)$ non singolare, cioè con $\det(\mathbf{B}) \neq 0$, e di ordine m.

Si dice che $\mathbf{B}(m \times m)$ è una matrice *di base* perché è formata da m vettori linearmente indipendenti che quindi costituiscono una base per lo spazio vettoriale R^m.

$\mathbf{A}(3 \times 5)$ e $\mathbf{b}$:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\mathbf{b}$
1	2	0	1	0	7
0	1	1	1	1	24
1	0	–3	0	2	8

$$\mathbf{B}(3 \times 3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{B}$ è una matrice *di base* perché è quadrata di ordine 3 e non singolare

Soluzione di sistemi di equazioni lineari

Una volta individuata una matrice di base **B**, la matrice **A** può essere riscritta separando le colonne in base dalle colonne fuori base:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{N}] \qquad \text{con } \mathbf{B}(m \times m) \text{ e } \mathbf{N}(m \times n - m)$$

$$\begin{array}{ccccc|c} \multicolumn{3}{c}{\mathbf{B}(3\times3)} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{N}(3\times2)} & \mathbf{b} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 24 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 8 \\ \hline x_1 & x_3 & x_5 & x_2 & x_4 & \end{array}$$

Soluzione di sistemi di equazioni lineari

Coerentemente, il vettore $\mathbf{x}$ delle incognite può essere scritto come:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} \begin{array}{ll} m \text{ componenti:} & \text{variabili di base} \\ n - m \text{ componenti:} & \text{variabili fuori base} \end{array}$$

$\mathbf{B}(3\times3)$			$\mathbf{N}(3\times2)$		$\mathbf{b}$
1	0	0	2	1	7
0	1	1	1	1	24
1	–3	2	0	0	8
x_1	x_3	x_5	x_2	x_4	

$$\mathbf{x} = \begin{array}{l} \\ \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_2 \\ x_4 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{x}_B \\ \\ \mathbf{x}_N \end{array}$$

Soluzione di sistemi di equazioni lineari

Con questa notazione, il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ può essere riscritto come:

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{N}]\begin{bmatrix} \mathbf{x}_\mathrm{B} \\ \mathbf{x}_\mathrm{N} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad \text{cioè}$$

$$\boxed{\mathbf{B}\cdot\mathbf{x}_\mathrm{B} + \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_\mathrm{N} = \mathbf{b}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 24 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Soluzione di sistemi di equazioni lineari

Applicare il metodo di Gauss-Jordan equivale a invertire **B** (l'inversa $\mathbf{B}^{-1}$ esiste perché **B** è non singolare). Analiticamente:

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_N = \mathbf{b}$$ pre-moltiplicando per $\mathbf{B}^{-1}$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\cdot\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$ cioè

$$\boxed{\mathbf{I}\cdot\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}}$$

$$(\mathbf{A}^{(3)}\,|\,\mathbf{b}^{(3)}) = \begin{array}{ccccc|c} & \mathbf{I} & & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 4/5 & 3/5 & 47/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 73/5 \\ \hline x_1 & x_3 & x_5 & x_2 & x_4 & \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4/5 & 3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 47/5 \\ 73/5 \end{bmatrix}$$

Soluzione di sistemi di equazioni lineari

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$$ da cui

$$\boxed{\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_N}$$

Segue che le (infinite) soluzioni del sistema **associate alla base** $\mathbf{B}$ sono :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}$$

Il sistema ha $n - m > 0$ gradi di libertà, dato che le $n - m$ componenti non in base di $\mathbf{x}_N$ possono assumere valori arbitrari.

Ponendo $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ si ottiene la soluzione:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Soluzione di Base (Ammissibile) – SBA

[Definizione] La particolare soluzione $\mathbf{x} = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}]$ del sistema, che si ottiene annullando le componenti fuori base, è detta soluzione di base associata alla matrice di base $\mathbf{B}$

Considerando il problema di PL in forma standard

$$P\text{: } \max\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\text{: } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{x} \in \mathrm{R}^{n}\}$$ allora

[Definizione] Se $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ allora $\mathbf{x} = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}]$ è *anche* una soluzione del problema P e per questo è detta soluzione di base **ammissibile**, in breve SBA, di P

Soluzione di Base (Ammissibile) – SBA

Il sistema finale rispetto alla Base $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ è:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4/5 & 3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 47/5 \\ 73/5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ x_3 + 4/5\, x_2 + 3/5\, x_4 = 47/5 \\ x_5 + 1/5\, x_2 + 2/5\, x_4 = 73/5 \end{cases}$$

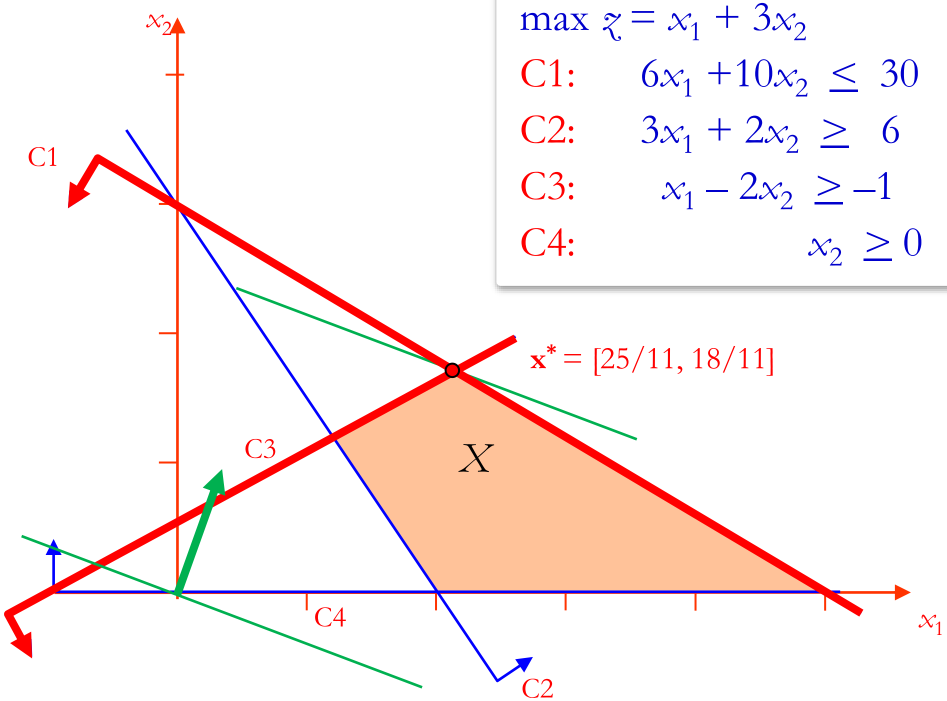
Ponendo $\mathbf{x_N} = \mathbf{0}$ si ottiene

$$\begin{cases} x_1 = 7 \\ x_3 = 47/5 \\ x_5 = 73/5 \end{cases}$$

La soluzione di base è $\mathbf{x} = [\underbrace{7 \quad 47/5 \quad 73/5}_{\mathbf{x_B}} \quad \underbrace{0 \quad 0}_{\mathbf{x_N}}]$

La soluzione è anche una soluzione di base ammissibile

Un algoritmo per la PL (… un primo tentativo)



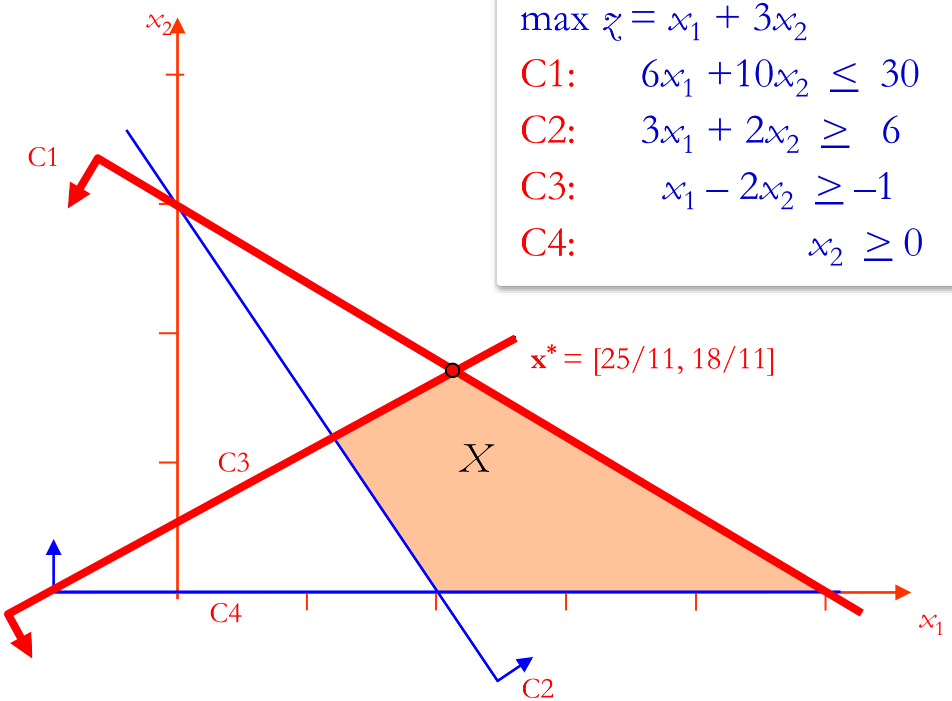
$$\begin{array}{lrl}
\max & z = & x_1 + 3x_2 \\
C1: & 6x_1 + 10x_2 & \leq 30 \\
C2: & 3x_1 + 2x_2 & \geq 6 \\
C3: & x_1 - 2x_2 & \geq -1 \\
C4: & x_2 & \geq 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrl}
\max & z = & x_1 + 3x_2 \\
C1: & 6x_1 + 10x_2 + x_3 & = 30 \\
C2: & 3x_1 + 2x_2 - x_4 & = 6 \\
C3: & x_1 - 2x_2 - x_5 & = -1 \\
C4: & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0
\end{array}$$

forma standard

[Osservazione] La soluzione ottima $\mathbf{x}^*$ è un vertice del poliedro (intersezione di 2 rette) … ma è anche una Soluzione di Base Ammissibile del problema posto in forma standard.

Un algoritmo per la PL (… un primo tentativo)



$$\begin{array}{llcl}
\max & z = x_1 + 3x_2 & & \\
\text{C1:} & 6x_1 + 10x_2 & \leq & 30 \\
\text{C2:} & 3x_1 + 2x_2 & \geq & 6 \\
\text{C3:} & x_1 - 2x_2 & \geq & -1 \\
\text{C4:} & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcl}
\max & z = x_1 + 3x_2 & & \\
\text{C1:} & 6x_1 + 10x_2 + x_3 & = & 30 \\
\text{C2:} & 3x_1 + 2x_2 - x_4 & = & 6 \\
\text{C3:} & x_1 - 2x_2 - x_5 & = & -1 \\
\text{C4:} & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

forma standard

[Esercizio]

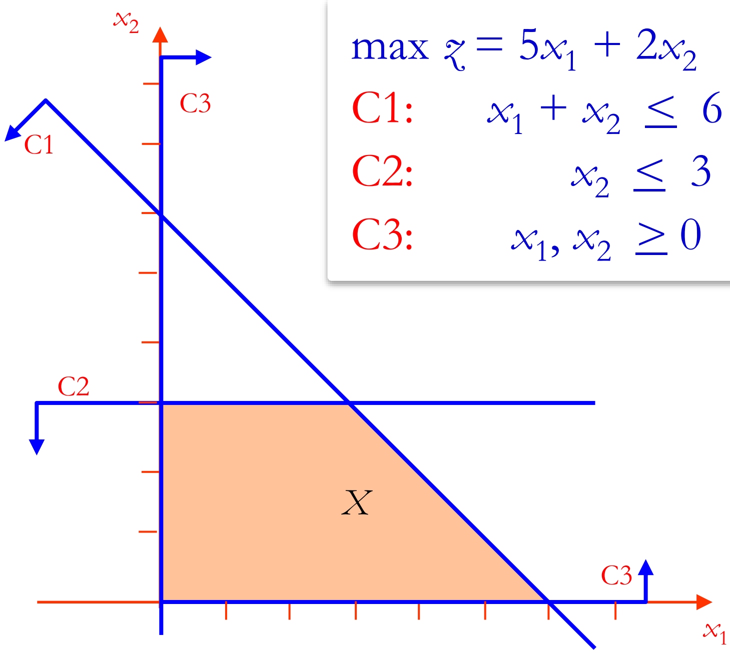
- Qual è la soluzione del problema in forma standard corrispondente alla soluzione ottima $\mathbf{x}^* = [25/11, 18/11]$ del problema originale?
- Qual è la base associata alla soluzione $\mathbf{x}^* = [25/11, 18/11]$?

Un algoritmo per la PL (… un primo tentativo)

[Algoritmo *naïf*]

- Poni il problema di PL in forma standard;
- Enumera tutte le basi e valuta tutte le SBA
- Seleziona la SBA con il miglior valore della funzione obiettivo

Un algoritmo per la PL: esempio



$$\begin{array}{ll} \max z = 5x_1 + 2x_2 & \\ \text{C1:} & x_1 + x_2 \leq 6 \\ \text{C2:} & x_2 \leq 3 \\ \text{C3:} & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max z = 5x_1 + 2x_2 & \\ \text{C1:} & x_1 + x_2 + s_1 = 6 \\ \text{C2:} & x_2 + s_2 = 3 \\ \text{C3:} & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

forma standard

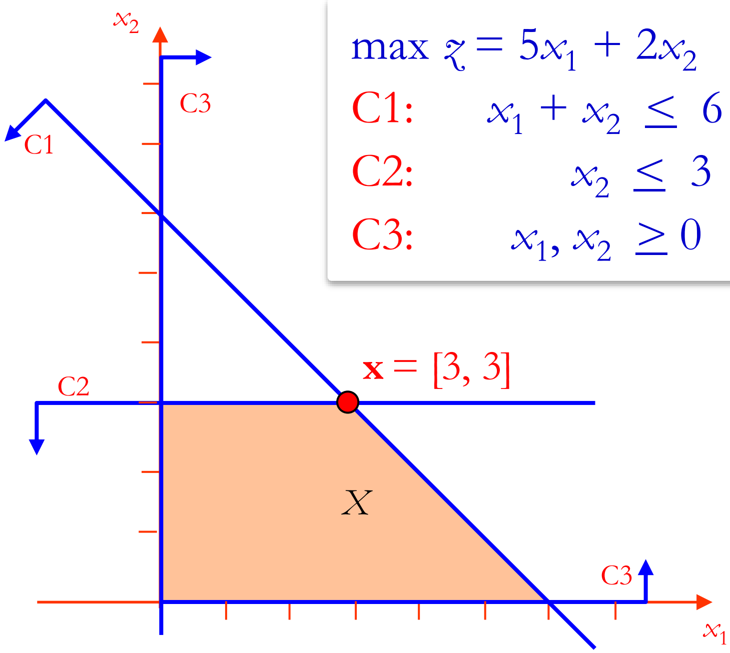
$$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \mathbf{b} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

Quante sono le possibili basi?

Sono pari a tutti i modi di scegliere 2 delle 4 colonne della matrice $\mathbf{A}$

$$\boxed{\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6}$$

Un algoritmo per la PL: esempio – 1° base



$$\begin{aligned} \max\ z &= 5x_1 + 2x_2 \\ \text{C1:}\quad x_1 + x_2 &\le 6 \\ \text{C2:}\quad x_2 &\le 3 \\ \text{C3:}\quad x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

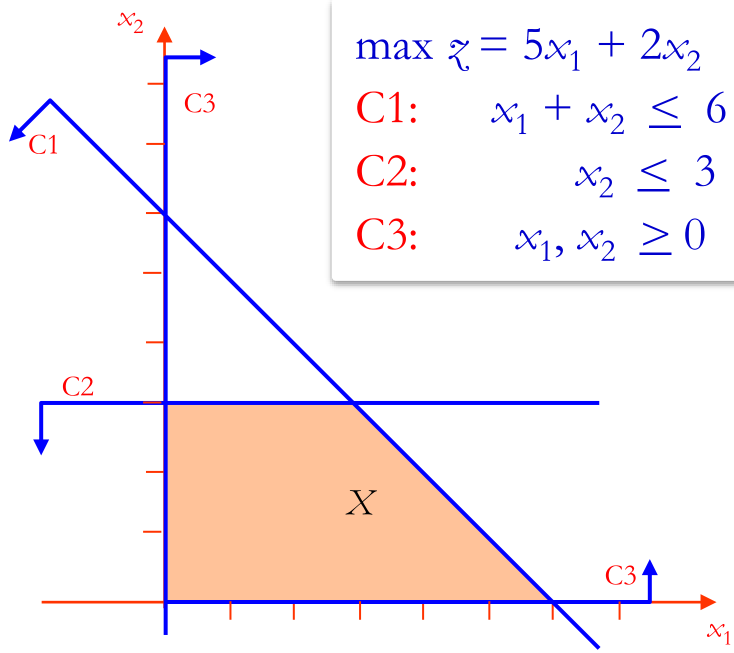
$$\begin{aligned} \max\ z &= 5x_1 + 2x_2 \\ \text{C1:}\quad x_1 + x_2 + s_1 &= 6 \\ \text{C2:}\quad x_2 + s_2 &= 3 \\ \text{C3:}\quad x_1, x_2, s_1, s_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

forma standard

$$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \mathbf{b} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

Base	Gauss-Jordan	Soluzione di base	valore f.o.
$\mathbf{B} = \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} x_1 + s_1 - s_2 = 3 \\ x_2 + s_2 = 3 \end{cases}$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ SBA	$z = 21$

Un algoritmo per la PL: esempio – 2° base



$\max z = 5x_1 + 2x_2$
C1: $x_1 + x_2 \leq 6$
C2: $x_2 \leq 3$
C3: $x_1, x_2 \geq 0$

$\max z = 5x_1 + 2x_2$
C1: $x_1 + x_2 + s_1 = 6$
C2: $x_2 + s_2 = 3$
C3: $x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

forma standard

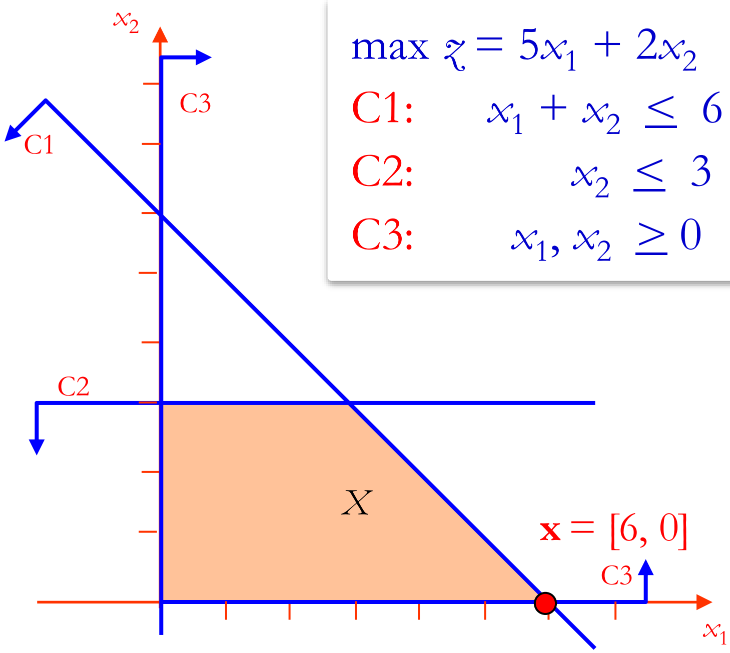
$$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \mathbf{b} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

Base	Gauss-Jordan	Soluzione di base	valore f.o.

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & s_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

La matrice è singolare ($\det(\mathbf{B}) = 0$) quindi **<u>non è</u>** una matrice di base

Un algoritmo per la PL: esempio – 3° base



$$\begin{aligned} \max\ z &= 5x_1 + 2x_2 \\ \text{C1:}\quad & x_1 + x_2 \le 6 \\ \text{C2:}\quad & x_2 \le 3 \\ \text{C3:}\quad & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ z &= 5x_1 + 2x_2 \\ \text{C1:}\quad & x_1 + x_2 + s_1 = 6 \\ \text{C2:}\quad & x_2 + s_2 = 3 \\ \text{C3:}\quad & x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0 \end{aligned}$$

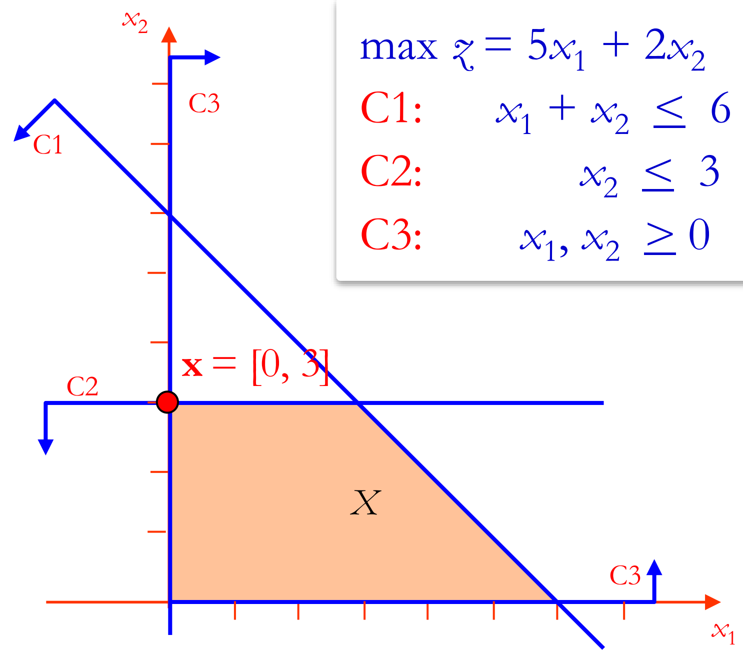
forma standard

$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) =$

x_1	x_2	s_1	s_2	$\mathbf{b}$
1	1	1	0	6
0	1	0	1	3

Base	Gauss-Jordan	Soluzione di base	valore f.o.
$\mathbf{B} = \begin{array}{cc} x_1 & s_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \end{array}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + s_1 = 6 \\ x_2 + s_2 = 3 \end{cases}$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ SBA	$z = 30$

Un algoritmo per la PL: esempio – 4° base



$$\begin{aligned} \max\ z &= 5x_1 + 2x_2 \\ \text{C1:}\quad & x_1 + x_2 \le 6 \\ \text{C2:}\quad & x_2 \le 3 \\ \text{C3:}\quad & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

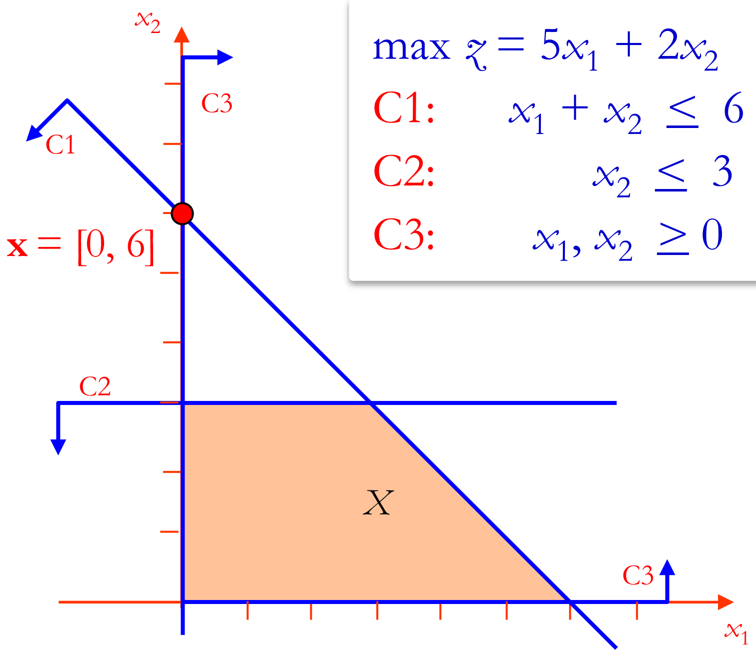
$$\begin{aligned} \max\ z &= 5x_1 + 2x_2 \\ \text{C1:}\quad & x_1 + x_2 + s_1 = 6 \\ \text{C2:}\quad & x_2 + s_2 = 3 \\ \text{C3:}\quad & x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0 \end{aligned}$$

forma standard

$$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \mathbf{b} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

Base	Gauss-Jordan	Soluzione di base	valore f.o.
$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_2 & s_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{cases} x_1 + s_1 - s_2 = 3 \\ x_2 + s_2 = 3 \end{cases}$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ SBA	$z = 6$

Un algoritmo per la PL: esempio – 5° base



$$\max z = 5x_1 + 2x_2$$
C1: $x_1 + x_2 \le 6$
C2: $x_2 \le 3$
C3: $x_1, x_2 \ge 0$

$$\max z = 5x_1 + 2x_2$$
C1: $x_1 + x_2 + s_1 = 6$
C2: $x_2 + s_2 = 3$
C3: $x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0$

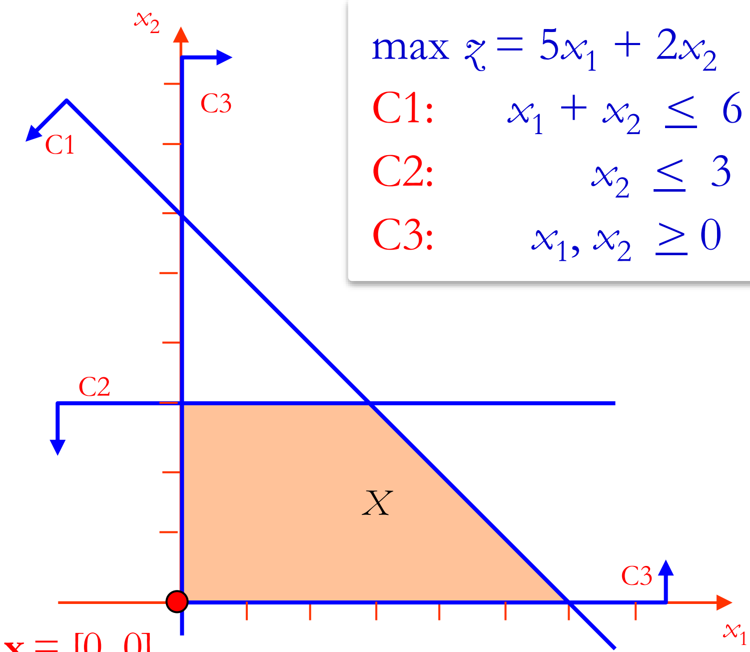
forma standard

$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) =$

x_1	x_2	s_1	s_2	$\mathbf{b}$
1	1	1	0	6
0	1	0	1	3

Base	Gauss-Jordan	Soluzione di base	valore f.o.
$\mathbf{B} = \begin{array}{cc} x_2 & s_2 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + s_1 = 6 \\ -x_1 - s_1 + s_2 = -3 \end{cases}$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$	no SBA

Un algoritmo per la PL: esempio – 6° base



$\mathbf{x} = [0, 0]$

$$\max z = 5x_1 + 2x_2$$
C1: $x_1 + x_2 \leq 6$
C2: $x_2 \leq 3$
C3: $x_1, x_2 \geq 0$

$$\max z = 5x_1 + 2x_2$$
C1: $x_1 + x_2 + s_1 = 6$
C2: $x_2 + s_2 = 3$
C3: $x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

forma standard

$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) =$

x_1	x_2	s_1	s_2	$\mathbf{b}$
1	1	1	0	6
0	1	0	1	3

Base	Gauss-Jordan	Soluzione di base	valore f.o.
$\mathbf{B} = \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + s_1 = 6 \\ x_2 + s_2 = 3 \end{cases}$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ SBA	$z = 0$

Un algoritmo per la PL: riepilogo

Base	Soluzione di base	valore f.o.	
$x_1 \quad x_2$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = [3 \quad 3 \quad 0 \quad 0]$	$z = 21$	
$x_1 \quad s_1$	matrice non di base		
$x_1 \quad s_2$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = [6 \quad 0 \quad 0 \quad 3]$	$z = 30$	Soluzione ottima
$x_2 \quad s_1$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = [0 \quad 3 \quad 3 \quad 0]$	$z = 6$	
$x_2 \quad s_2$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = [0 \quad 6 \quad 0 \quad -3]$	no SBA	
$s_1 \quad s_2$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = [0 \quad 0 \quad 6 \quad 3]$	$z = 0$	

Domande

L'algoritmo *naïf* enumera basi e valuta SBA.

1. L'algoritmo è «corretto»? Se il problema ammette ottimo finito, **esiste sempre** una SBA soluzione ottima del problema?
2. L'algoritmo è completo? Risolve un **qualsiasi** problema di PL?
3. L'algoritmo è finito? Termina in un **numero finito** di passi?
4. L'algoritmo è efficiente? **Quante operazioni** esegue?

Correttezza: la teoria ci aiuta?

Il teorema fondamentale della PL afferma che se esiste una soluzione ottima, esiste un vertice ottimo.

Se il problema è posto in forma standard, il metodo di Gauss-Jordan permette di calcolare analiticamente una soluzione (ammissibile) di base

La correttezza dell'algoritmo dipende dal legame che esiste tra **vertici** e **SBA**

Vertici: caratterizzazione analitica

problema di PL : $P: \max \{\mathbf{c}^T\mathbf{x}: \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathrm{R}^n\}$ $\mathbf{A}(m \times n)$ con $m \geq n$

poliedro associato: $P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \mathrm{R}^n$

Sia $\mathbf{v}$ una soluzione ammissibile di P e $\mathbf{E}$ la sottomatrice di $\mathbf{A}$ dei vincoli che in $\mathbf{v}$ sono attivi (compresi gli eventuali vincoli di non negatività).

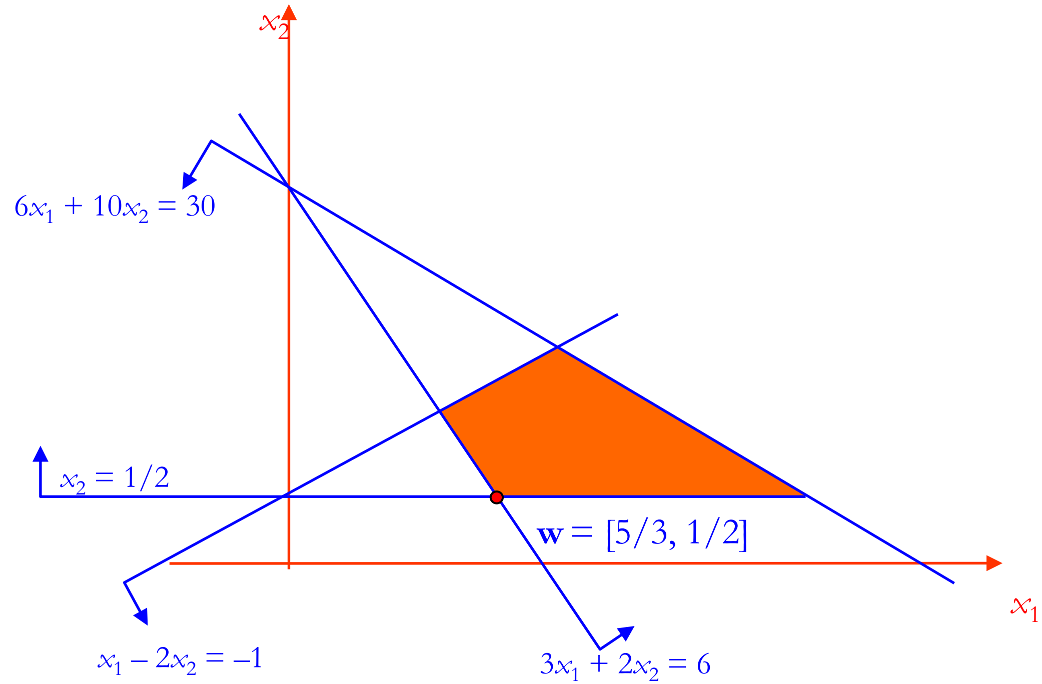
[Teorema 3.2.5] di caratterizzazione analitica dei vertici
Il punto $\mathbf{v}$ è un vertice di $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ se e solo se $\mathrm{rank}(\mathbf{E}) = n$.

[Corollari]

- Un vertice $\mathbf{v}$ di P è soluzione unica del sistema $\mathbf{E}\mathbf{x} = \mathbf{b}_E$
- Un poliedro in R^n definito da una matrice $\mathbf{A}(m \times n)$ con $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) < n$ non possiede vertici.

Vertici: esempio (1)

$$\max z = x_1 + 3x_2$$
$$\begin{aligned} 6x_1 + 10x_2 &\leq 30 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ x_1 - 2x_2 &\geq -1 \\ x_2 &\geq 1/2 \end{aligned}$$



$\mathbf{w} = [5/3, 1/2]$ è una soluzione ammissibile che rende attivi il 2° e 4° vincolo.

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} < \\ = \\ > \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 6 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

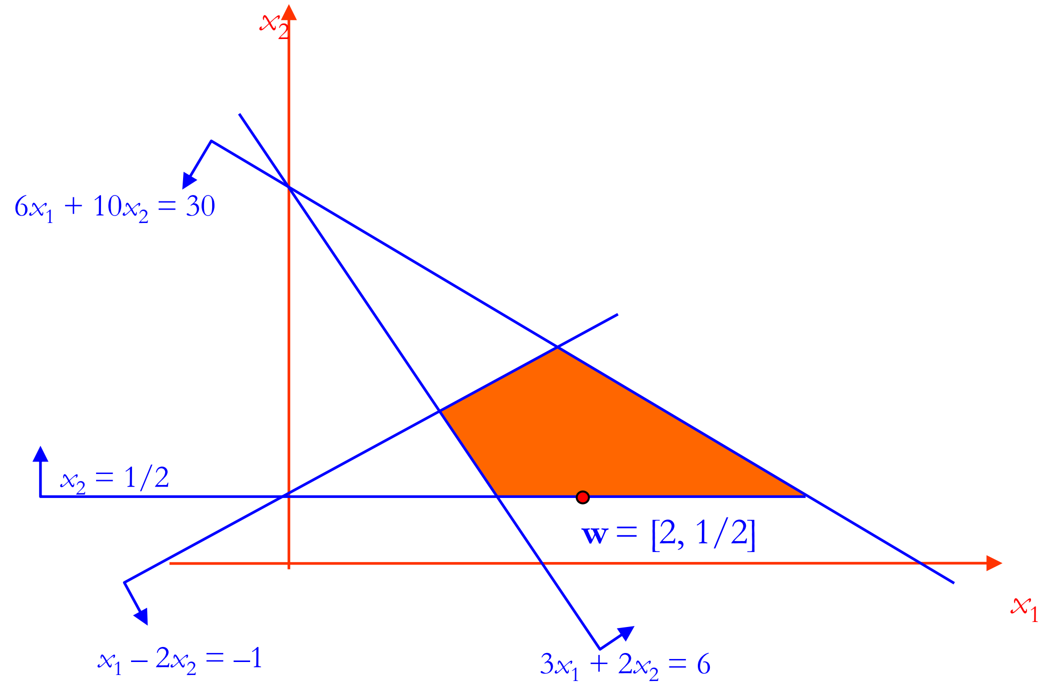
La matrice $\mathbf{E}$ è

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{rank}(\mathbf{E}) = 2$ quindi $\mathbf{w}$ è un vertice

Vertici: esempio (2)

$$\max z = x_1 + 3x_2$$
$$6x_1 + 10x_2 \leq 30$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$
$$x_1 - 2x_2 \geq -1$$
$$x_2 \geq 1/2$$



$\mathbf{w} = [2, 1/2]$ è una soluzione ammissibile che rende attivo il solo 4° vincolo.

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} < \\ > \\ > \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 6 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

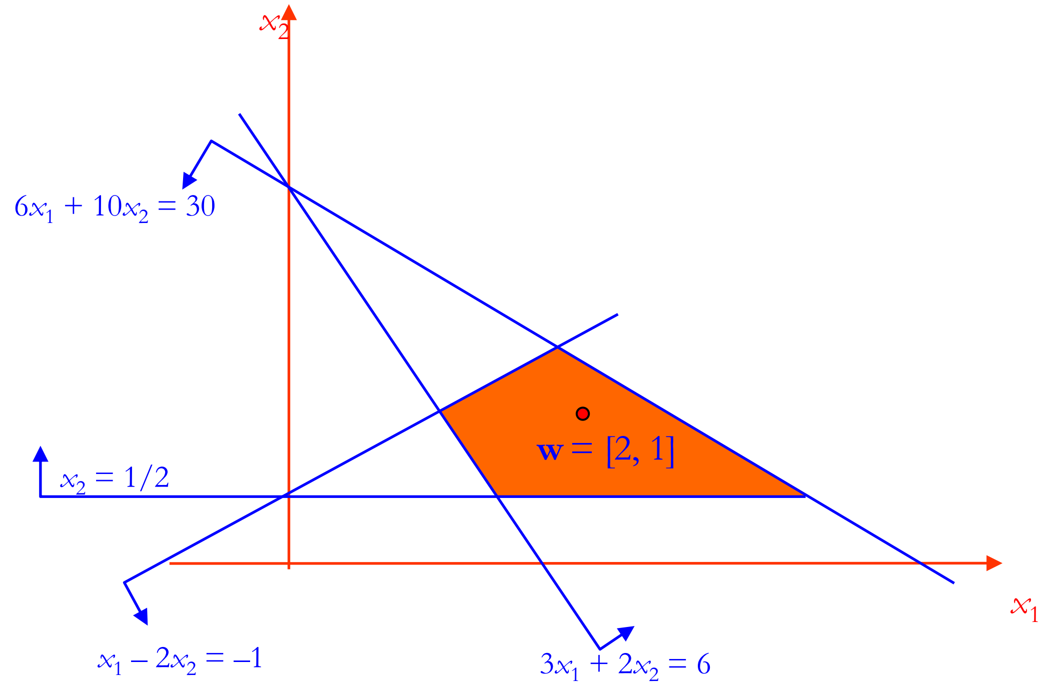
La matrice **E** è

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(\mathbf{E}) = 1$ quindi **w** **non** è un vertice

Vertici: esempio (3)

$$\begin{aligned} \max z = x_1 + 3x_2 & \\ 6x_1 + 10x_2 &\leq 30 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ x_1 - 2x_2 &\geq -1 \\ x_2 &\geq 1/2 \end{aligned}$$



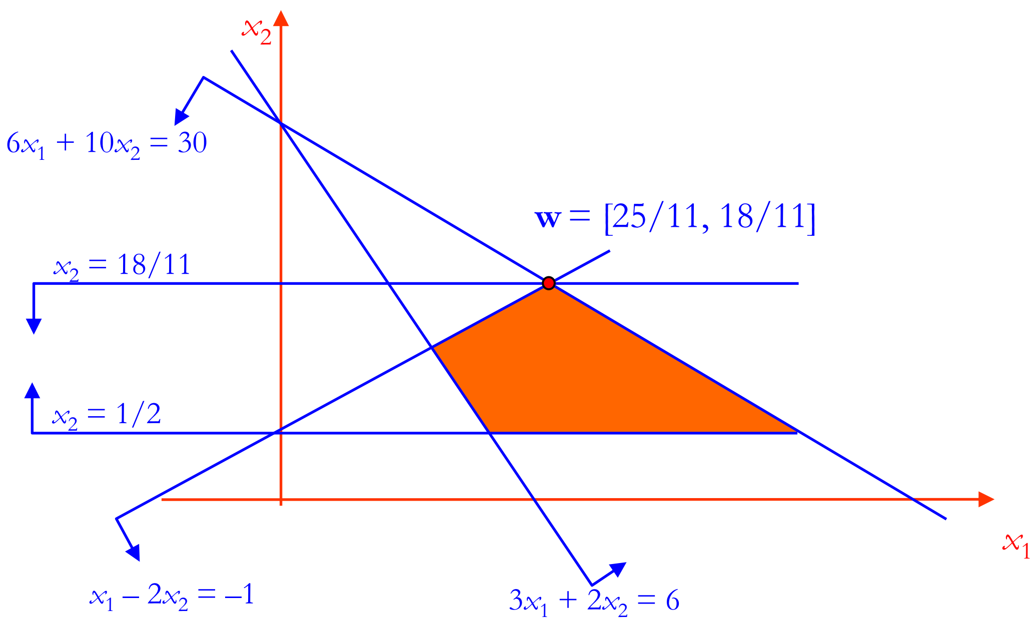
$\mathbf{w} = [2, 1]$ è una soluzione ammissibile che non rende attivo alcun vincolo.

$$\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} < \\ > \\ > \\ > \end{matrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 6 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{E}$ è vuota,
$\text{rank}(\mathbf{E}) = 0$ quindi **w non** è un vertice

Vertici: osservazioni

- rank(**E**) = n significa che **E** ha almeno n righe, ma può averne anche di più. Il teorema quindi dice che un vertice soddisfa all'uguaglianza almeno n vincoli.
- In R^2 un punto di un poliedro è un vertice se e solo se è l'intersezione di *almeno* 2 rette.



$$\begin{aligned}
\max\ z = x_1 + 3x_2 & \\
6x_1 + 10x_2 &\le 30\\
3x_1 + 2x_2 &\ge 6\\
x_1 - 2x_2 &\ge -1\\
x_2 &\ge 1/2\\
x_2 &\le 18/11
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\max\ z = x_1 + 3x_2 & \\
6 \cdot 25/11 + 10 \cdot 18/11 &= 30\\
3 \cdot 25/11 + 2 \cdot 18/11 &> 6\\
25/11 - 2 \cdot 18/11 &= -1\\
18/11 &> 1/2\\
18/11 &= 18/11
\end{aligned}$$

Vertici e SBA

problema di PL : P: max $\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}: \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathrm{R}^n\}$ $\mathbf{A}(r \times n)$ con $r \geq n$

poliedro associato: $P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \mathrm{R}^n$

Supponiamo che i r vincoli siano m di uguaglianza e n di non negatività (cioè che il problema sia in <u>forma standard</u>)

$$P: \max \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$
$$\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$$
$$\mathbf{I}\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$\mathbf{A}'(m \times n)$

$\mathbf{I}\ (n \times n)$

Vertici e SBA

Sia $\mathbf{B}$ $(m \times m)$ una base ammissibile e $\mathbf{p} = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}]$ la SBA corrispondente.

P: max $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$

$\mathbf{A}'\mathbf{p} = \mathbf{b}'$ — m vincoli di uguaglianza +

$\mathbf{p_N} = \mathbf{0}$ — $n - m$ vincoli di uguaglianza +

$\mathbf{p_B} \geq \mathbf{0}$ — $k < m$ vincoli di uguaglianza

$n + k$ vincoli di uguaglianza

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}' \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{array}{l} (m \times n) \\ (n - m + k \times n) \end{array}$$

- $\mathbf{p}$ è una soluzione ammissibile
- la sottomatrice $\mathbf{E}$ dei vincoli che $\mathbf{p}$ rende attivi ha almeno n righe ed è di rango pieno.

> per il teorema di caratterizzazione dei vertici $\mathbf{p}$ è un vertice

Vertici e SBA: esempio

$$\max z = 5x_1 + 2x_2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$x_2 + x_4 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{2} \times \mathbf{2}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ è la base associata alle variabili x_1 e x_2

$\mathbf{p} = [3, 3, 0, 0]$ è la SBA corrispondente.

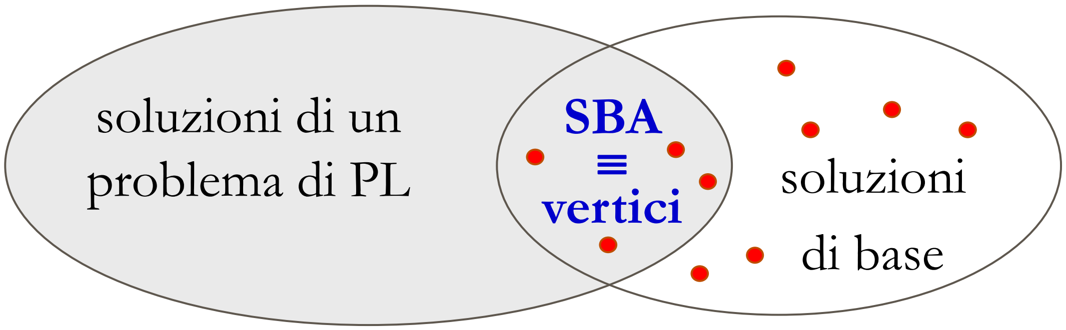
$$\max z = 5x_1 + 2x_2$$
$$3 + 3 + 0 + 0 = 6$$
$$3 + 0 + 0 = 3$$
$$3 > 0$$
$$3 > 0$$
$$0 = 0$$
$$0 = 0$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(\mathbf{E}) = 4$$

$\mathbf{p}$ è un vertice

Vertici e SBA

[Teorema] Un vettore **v** è una SBA di un problema P di PL **se e solo se** è un vertice del poliedro associato $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.



Enumerare le SBA di P equivale a enumerare i vertici del poliedro $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$

Nonostante le variabili siano continue, un problema di PL ha una struttura discreta: se esiste, si può ottenere una soluzione ottima generando esplicitamente tutte le SBA

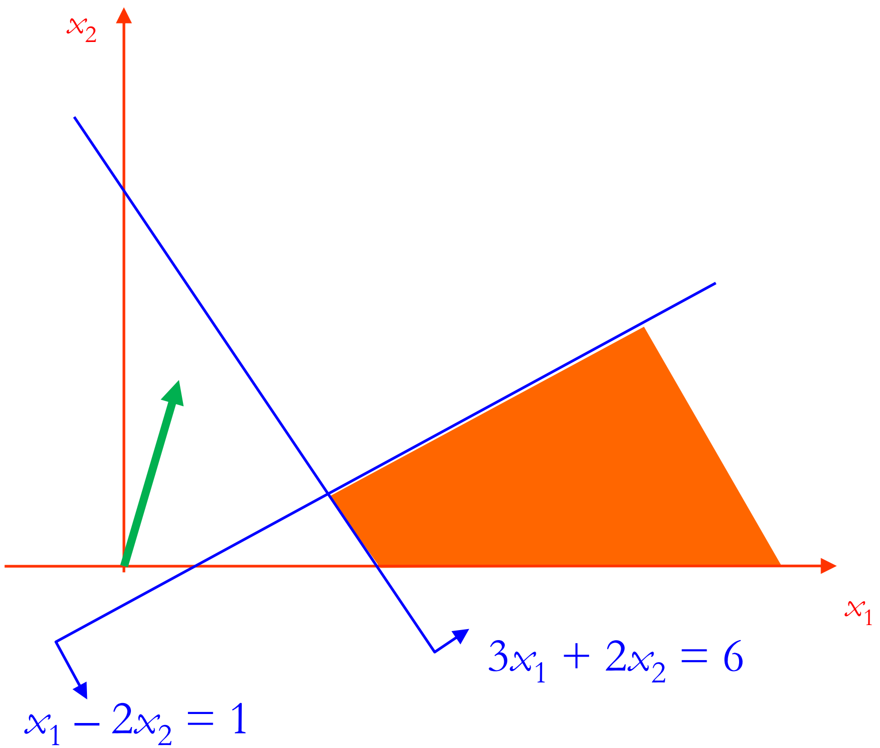
Domande

L'algoritmo *naïf* enumera basi e valuta SBA.

OK L'algoritmo è «corretto»: enumerare le SBA coincide con enumerare i vertici

2. L'algoritmo è completo? Risolve un **qualsiasi** problema di PL?
3. L'algoritmo è finito? Termina in un **numero finito** di passi?
4. L'algoritmo è efficiente? **Quante operazioni** esegue?

L'algoritmo è completo?



$$\begin{aligned} \max z = x_1 + 3x_2 & \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ x_1 - 2x_2 &\geq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Il problema è evidentemente illimitato superiormente

$$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \mathbf{b} \\ \hline 3 & 2 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

forma standard

L'algoritmo è completo?

Base	Soluzione di base	valore f.o.	
$x_1 \quad x_2$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = [7/4 \quad 3/8 \quad 0 \quad 0]$	$z = 23/8$	Soluzione ottima
$x_1 \quad s_1$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = [1 \quad 0 \quad -3 \quad 0]$	no SBA	
$x_1 \quad s_2$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = [2 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$	$z = 2$	
$x_2 \quad s_1$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = [0 \quad -1/2 \quad -7 \quad 0]$	no SBA	
$x_2 \quad s_2$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = [0 \quad 3 \quad 0 \quad -7]$	no SBA	
$s_1 \quad s_2$	$[\mathbf{x}, \mathbf{s}] = [0 \quad 0 \quad -6 \quad -1]$	no SBA	

ERRORE

Domande

L’algoritmo *naïf* enumera basi e valuta SBA.

1. L’algoritmo è «corretto»? Se il problema ammette ottimo finito, **esiste sempre** una SBA soluzione ottima del problema?

NO L’algoritmo non è completo: non è in grado di riconoscere un problema illimitato.

4. L’algoritmo è efficiente? **Quante operazioni** esegue?

Un algoritmo per la PL: finitezza

Il numero di basi (e di SBA) è **al più** pari ai possibili modi di scegliere m tra le n colonne della matrice $\mathbf{A}(m \times n)$ – le *combinazioni semplici*. Questa quantità è data dal *coefficiente binomiale*

$$\boxed{C_{(n,m)} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}}$$

$C_{(n,m)}$ è un **numero finito** che rappresenta una **limitazione superiore** al numero di SBA (in generale non tutte le sottomatrici $m \times m$ sono matrici di base e non tutte le matrici di base sono ammissibili).

SBA sono in corrispondenza biunivoca con vertici, quindi

[Teorema] Ogni poliedro ha un numero finito di vertici.

Domande

L'algoritmo *naïf* enumera basi e valuta SBA.

1. L'algoritmo è «corretto»? Se il problema ammette ottimo finito, **esiste sempre** una SBA soluzione ottima del problema?
2. L'algoritmo è completo? Risolve un **qualsiasi** problema di PL?

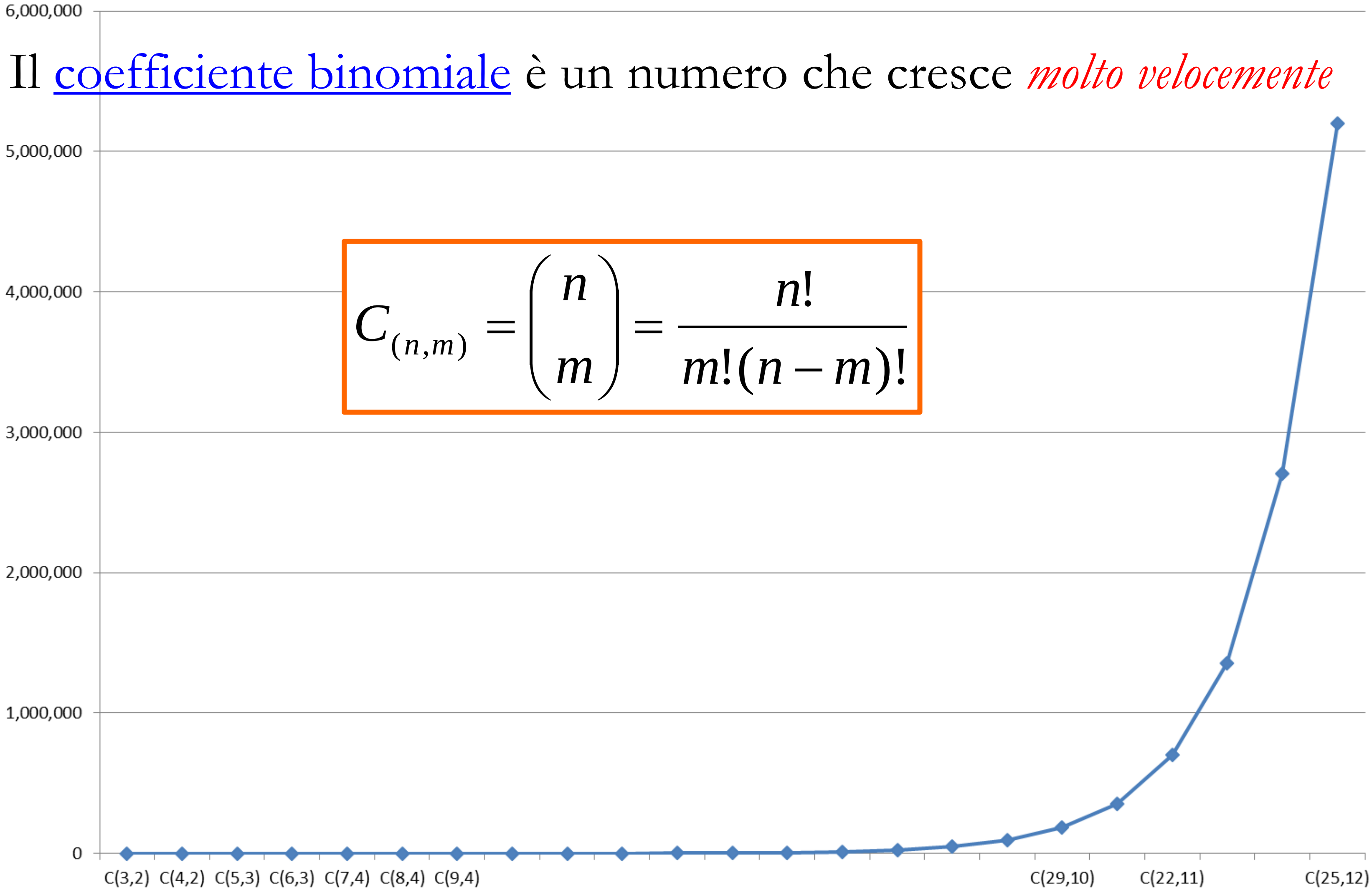
OK L'algoritmo è finito

4. L'algoritmo è efficiente? **Quante operazioni** esegue?

Un algoritmo per la PL: efficienza

Il coefficiente binomiale è un numero che cresce *molto velocemente*

$$C_{(n,m)} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$



Domande

L'algoritmo *naïf* enumera basi e valuta SBA.

1. L'algoritmo è «corretto»? Se il problema ammette ottimo finito, **esiste sempre** una SBA soluzione ottima del problema?
2. L'algoritmo è completo? Risolve un **qualsiasi** problema di PL?
3. L'algoritmo è finito? Termina in un **numero finito** di passi?

NO Nel caso peggiore, l'algoritmo effettua un numero esponenziale di iterazioni

Testi di approfondimento

1. A. Sassano
   Modelli e Algoritmi della Ricerca Operativa
   Franco Angeli, Milano, 1999

2. M. Fischetti
   Lezioni di Ricerca Operativa
   Edizioni Libreria Progetto Padova, 1999

3. D. Bertsimas and J.N. Tsitsiklis
   Introduction to Linear Optimization
   Athena Scientific, Belmont, Massachusetts

4. Nemhauser G.L. and L. A. Wolsey
   Integer and Combinatorial Optimization
   John Wiley & Sons, Inc, New York, 1988.

Appendice:

Spazi affini

Vettori *affinemente* dipendenti

- Una combinazione affine è una <u>particolare</u> combinazione lineare.

- **[Definizione]** I vettori $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m \in R^n$ si dicono *affinemente dipendenti* se e solo se esistono m numeri reali $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ tali che:

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_m \mathbf{x}_m = 0$$

I vettori $\mathbf{a}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 2)$ sono affinemente dipendenti in quanto

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1 \quad \text{e} \quad 2\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = 0$$

- Ogni insieme S contenente il vettore $\mathbf{0}$ è affinemente **dipendente**.
- Ogni insieme S costituito da un solo elemento diverso da $\mathbf{0}$ è affinemente **indipendente**.

Dipendenza affine e lineare

- La dip. affine implica la dip. lineare (ma non viceversa)

o equivalentemente

- L'indip. lineare implica l'indip. affine (ma non viceversa)

dipendenza affine $\Rightarrow$ dipendenza lineare

$\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$ sono anche coeff. di una combinazione lineare

indipendenza lineare $\Rightarrow$ indipendenza affine

$\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$ non sono i coeff. di una combinazione affine

I vettori $\mathbf{a}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 0)$ sono linearmente indipendenti e quindi affinemente indipendenti.

Dipendenza affine e lineare

- La dip. affine implica la dip. lineare (ma non viceversa)

o equivalentemente

- L'indip. lineare implica l'indip. affine (ma non viceversa)

dipendenza lineare $\not\Rightarrow$ dipendenza affine

indipendenza affine $\not\Rightarrow$ indipendenza lineare

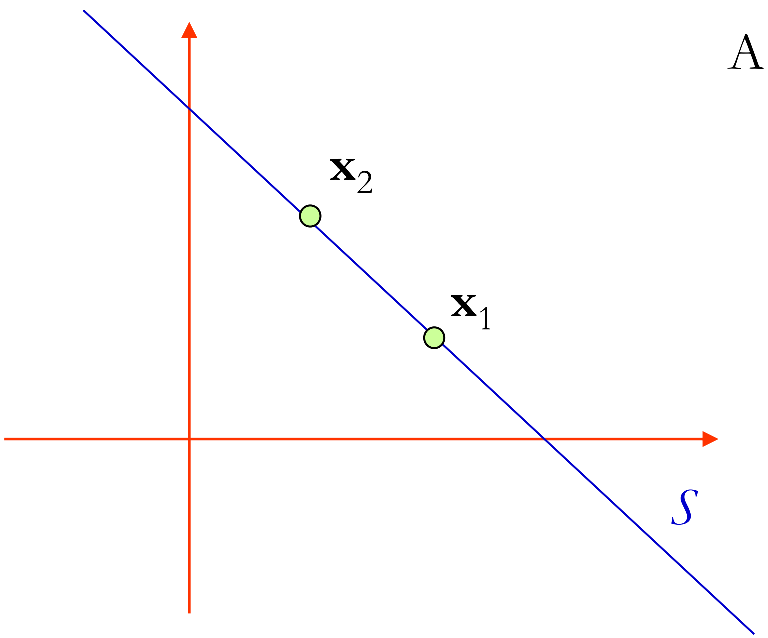
I vettori $\mathbf{a}_1 = (3/2, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2)$ e $\mathbf{a}_3 = (2, 2)$ sono palesemente linearmente dipendenti ($\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$) ma *affinemente indipendenti*:

$$\begin{cases} 3/2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

è palesemente incompatibile

Spazio *affine*

[Definizione] l'insieme $S \subseteq R^n$ è uno spazio affine se ogni combinazione affine di suoi elementi è un elemento di S.

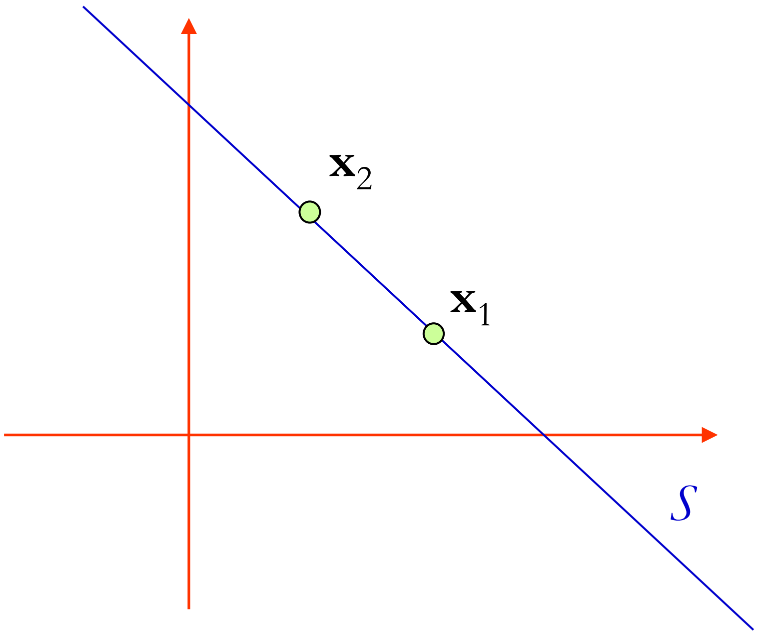


A differenza delle combinazioni lineari, non è sempre possibile ottenere il vettore nullo mediante combinazione affine dato che $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$.

Il vettore **0** può **non** far parte di un sottospazio affine

Spazio *affine*

[Definizione] l'insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è uno spazio affine se ogni combinazione affine di suoi elementi è un elemento di S.



una retta **non** passante per l'origine è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^2$

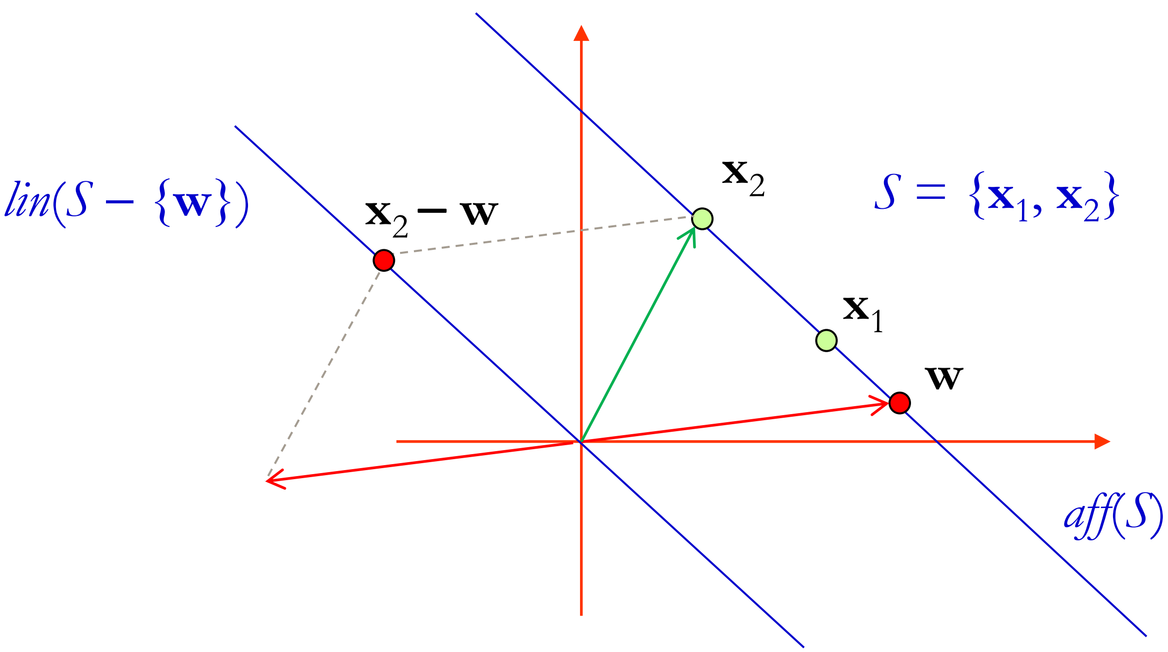
Uno spazio affine non vuoto è la *traslazione* di uno spazio lineare.

Spazio *affine*

- Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{R}^n$ uno spazio affine non vuoto. Per ogni $\mathbf{w} \in \mathcal{S}$, l'insieme

$$\boxed{\mathcal{S}' = \mathcal{S} - \{\mathbf{w}\} = \{\mathbf{x} - \mathbf{w} : \mathbf{x} \in \mathcal{S}\}}$$

è uno spazio lineare.



Esercizi

- Dimostrare che l'insieme delle soluzioni di un sistema di m equazioni omogenee in n incognite $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ è uno spazio lineare di dimensione $n - \text{rank}(\mathbf{A})$.

- Dimostrare che l'insieme delle soluzioni di un sistema di m equazioni in n incognite $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è uno spazio affine di dimensione $n - \text{rank}(\mathbf{A})$.

Insiemi e involucri

Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$

- S è uno spazio affine se e solo se coincide con $aff(S)$
- S è un cono convesso se e solo se coincide con $cone(S)$
- S è un insieme convesso se e solo se coincide con $conv(S)$