A.A. 2021-2022

Elementi di Elettronica (INF)

Prof. Paolo Crippa

Circuiti Logici Combinatori – P2

Minimizzazione dei Circuiti Combinatori

Scopo della minimizzazione

- Riduzione costo
- Riduzione area occupata
- Riduzione ritardo
- Riduzione potenza dissipata

Molti dei metodi si basano sui teoremi

$$\mathbf{pterm} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{pterm} \cdot \overline{\mathbf{y}} = \mathbf{pterm}$$

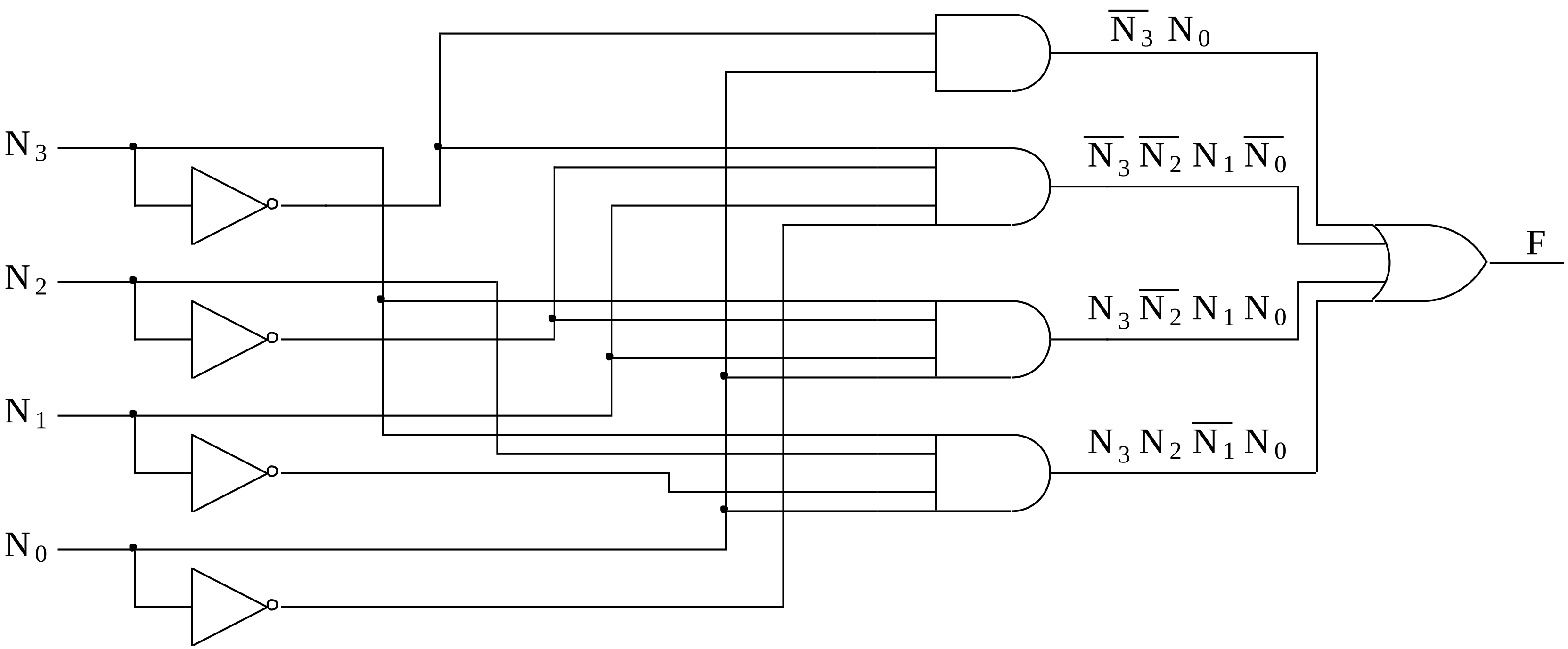
$$\left(\mathbf{sterm} + \mathbf{y}\right) \cdot \left(\mathbf{sterm} + \overline{\mathbf{y}}\right) = \mathbf{sterm}$$

<u>*Esempio:*</u> $\sum_{N_3N_2N_1N_0}(1,3,5,7,2,11,13)$

$$= \overline{N_3}\cdot\overline{N_2}\cdot\overline{N_1}\cdot N_0 + \overline{N_3}\cdot\overline{N_2}\cdot N_1\cdot N_0 + \overline{N_3}\cdot N_2\cdot\overline{N_1}\cdot N_0 + \overline{N_3}\cdot N_2\cdot N_1\cdot N_0 + \cdots$$

$$= \left(\overline{N_3}\cdot\overline{N_2}\cdot\overline{N_1}\cdot N_0 + \overline{N_3}\cdot\overline{N_2}\cdot N_1\cdot N_0\right) + \left(\overline{N_3}\cdot N_2\cdot\overline{N_1}\cdot N_0 + \overline{N_3}\cdot N_2\cdot N_1\cdot N_0\right) + \cdots$$

$$= \overline{N_3}\cdot\overline{N_2}\cdot N_0 + \overline{N_3}\cdot N_2\cdot N_0 + \cdots \;=\; \overline{N_3}\cdot N_0 + \cdots$$

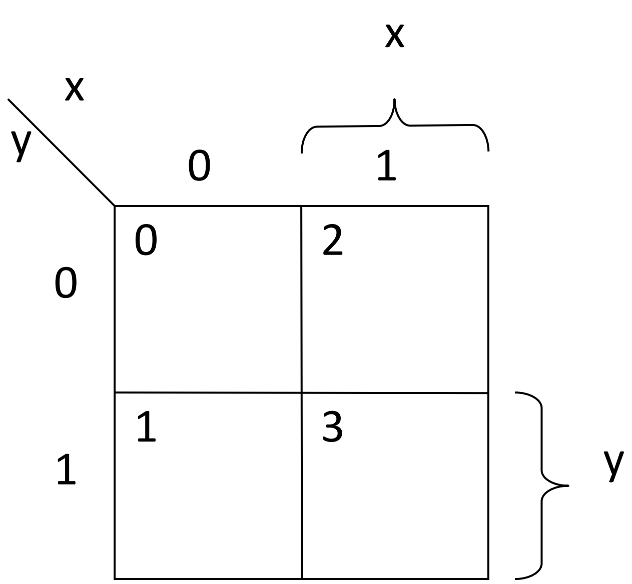


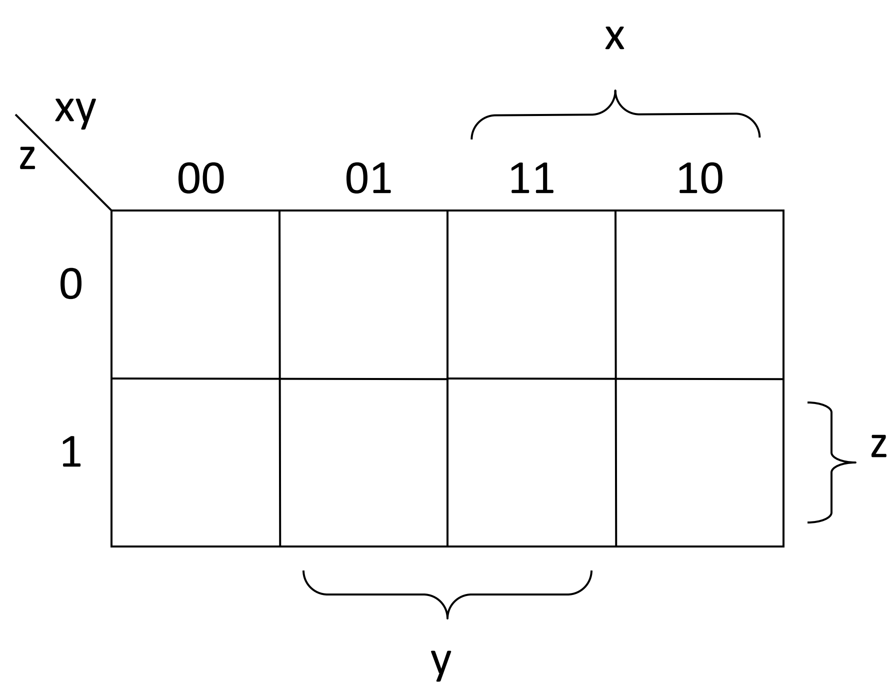
Mappe di Karnaugh

Una mappa di Karnaugh è una rappresentazione grafica della tabella della verità di una funzione logica

Ogni cella della mappa contiene il valore della funzione

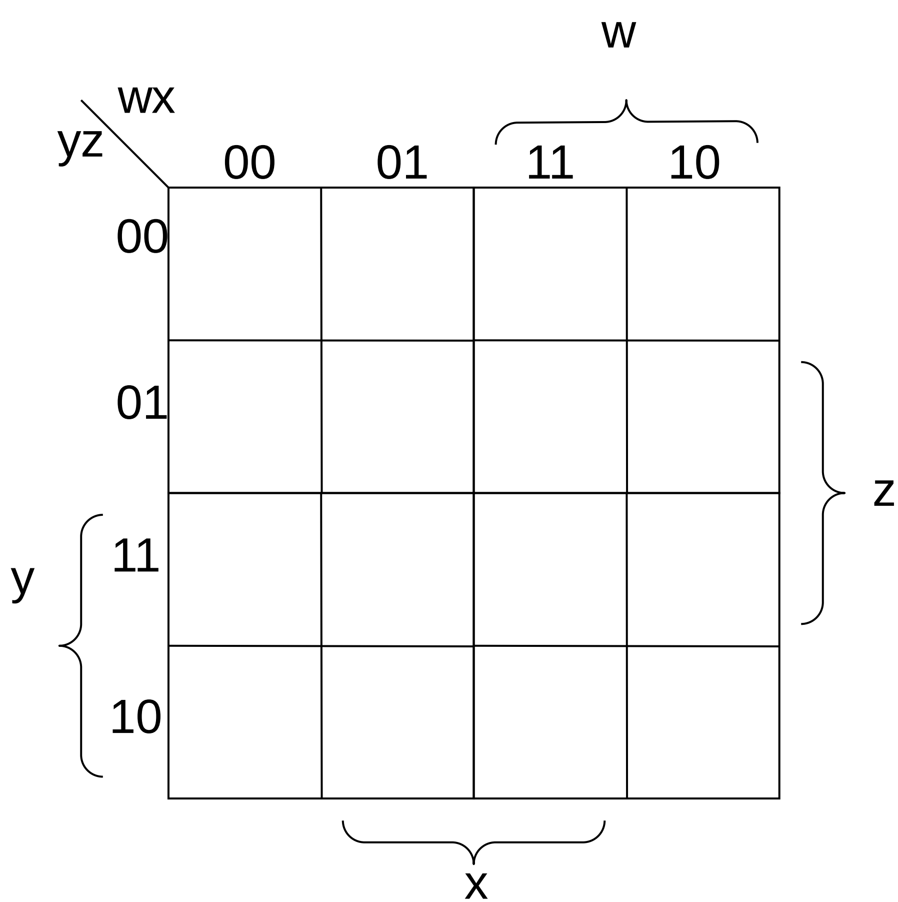
Le celle sono ordinate in modo tale che due celle adiacenti differiscono solo per il valore di una variabile di ingresso (un solo bit)





Mappe di Karnaugh

Ogni regione indicata con una parentesi { e una variabile **v** rappresenta una parte della mappa in cui la variabile assume il valore 1, v = 1.



Mappe di Karnaugh

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

A

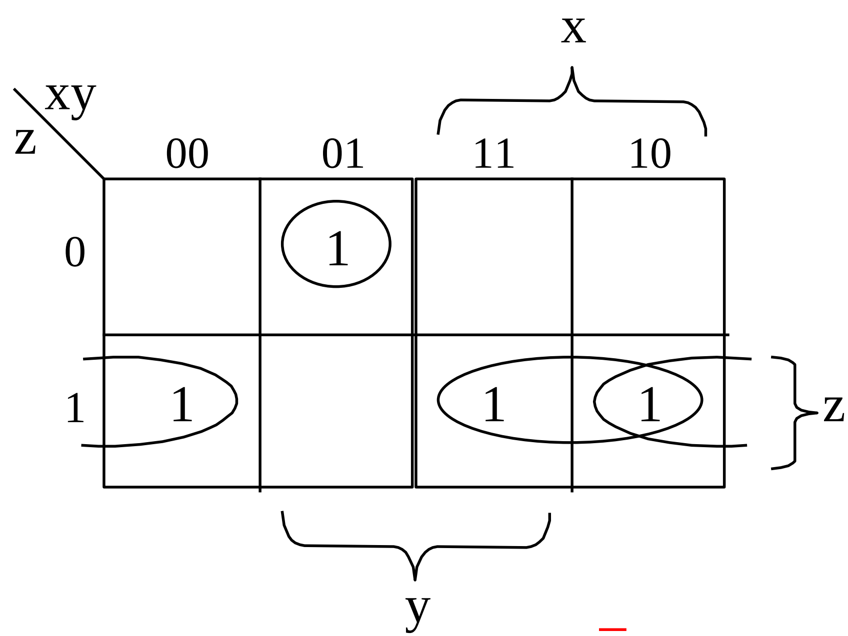
B

C

D

Mappe di Karnaugh

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



$$F = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z + \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot y \cdot z$$

- Ogni combinazione di ingresso corrispondente ad 1 nella mappa (e nella tabella della verità) rappresenta un mintermine.
- Nella mappa di Karnaugh, coppie di celle con un 1 che siano adiacenti corrispondono a mintermini che differiscono per una sola variabile.

Ad esempio:

$$(\text{minterm})_i + (\text{minterm})_{i+1} = \text{term} \cdot y + \text{term} \cdot \overline{y} = \text{term}$$

$\Rightarrow$ <u>Si ottiene una semplificazione della rappresentazione algebrica</u>

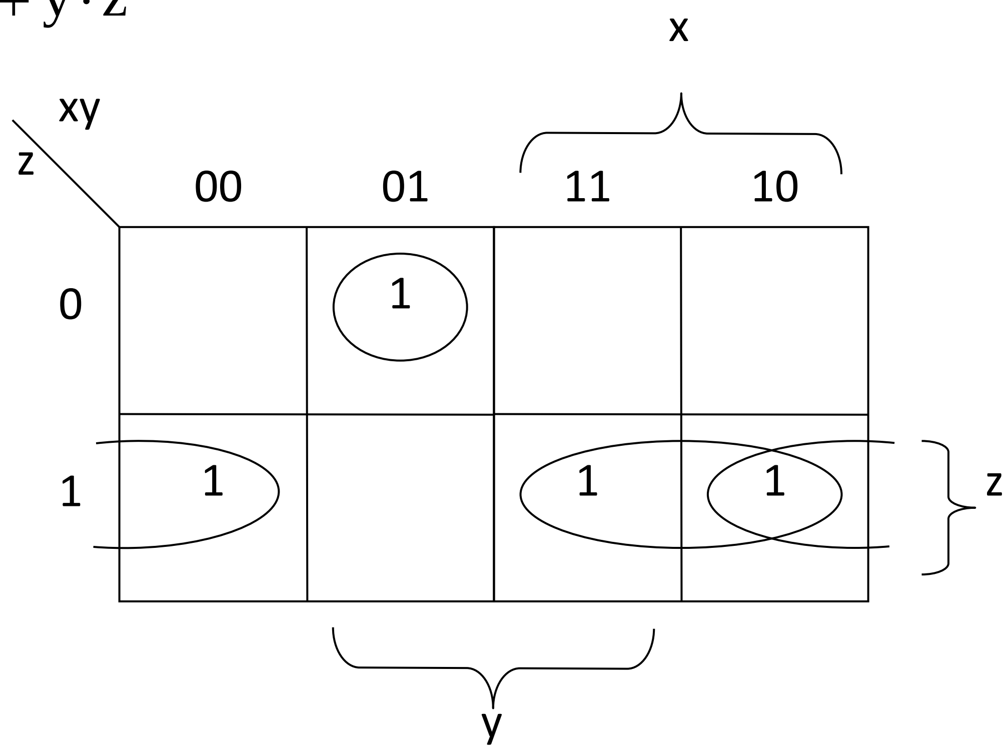
Mappe di Karnaugh

Si ottiene la rappresentazione minimale cerchiando (e dove possibile combinando) tutte le celle a 1 $\Rightarrow$ la somma dei termini è la rappresentazione minimale.

$$F = \cdots + x \cdot y \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot z = \ldots + (x \cdot z) \cdot y + (x \cdot z) \cdot \overline{y} = \ldots + (x \cdot z)$$

$$F = x \cdot \overline{y} \cdot z + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z + \ldots = (x + \overline{x}) \cdot \overline{y} \cdot z + \ldots = \overline{y} \cdot z + \ldots$$

$$F = \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot z + \overline{y} \cdot z$$



Mappe di Karnaugh

$$F = \sum_{xyz}(0,1,4,5,6) = \bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z} + \bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z + x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z} + x\cdot\bar{y}\cdot z + x\cdot y\cdot\bar{z}$$

$$= \left(\bar{x}\cdot\bar{y}\right)\cdot\left(\bar{z}+z\right) + \left(x\cdot\bar{y}\right)\cdot\left(\bar{z}+z\right) + x\cdot y\cdot\bar{z}$$

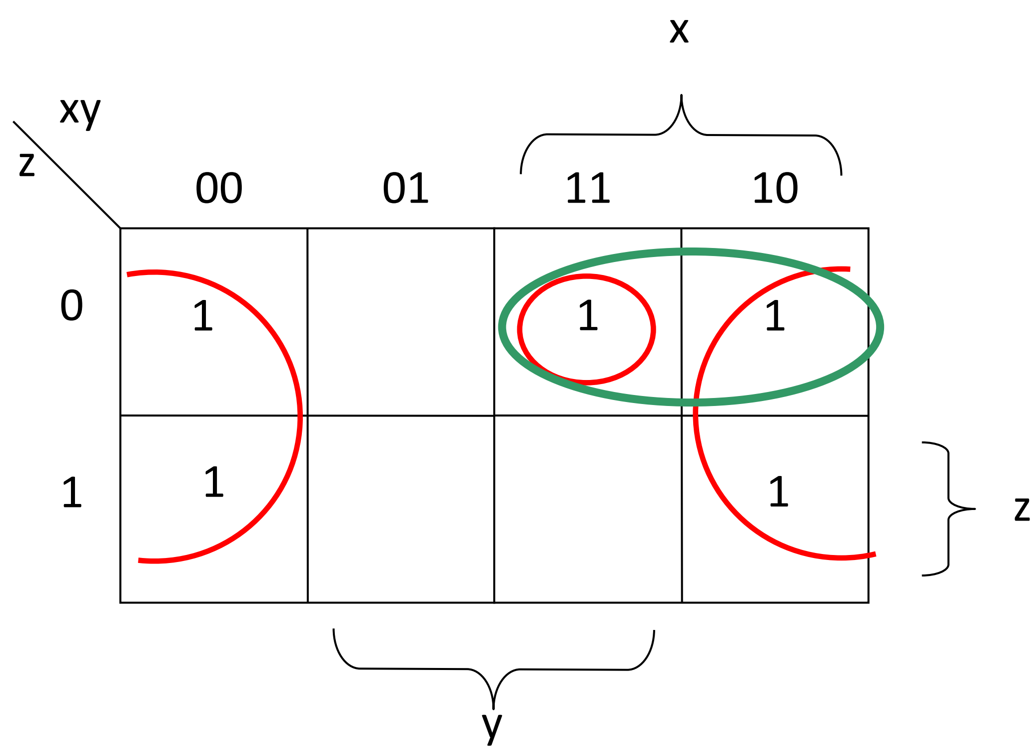
$$= \bar{x}\cdot\bar{y} + x\cdot\bar{y} + x\cdot y\cdot\bar{z}$$

$$= \left(\bar{x}+x\right)\cdot\bar{y} + x\cdot y\cdot\bar{z}$$

$$= \bar{y} + x\cdot y\cdot\bar{z}$$

$$= \bar{y} + x\cdot y\cdot\bar{z} + x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}$$

$$= \bar{y} + x\cdot\bar{z}$$



Regola Generale di Combinazione nella K-map

Un set di 2^i 1-celle può essere combinato se ci sono **i** variabili che assumono tutte le 2^i combinazioni all'interno del set, mentre le rimanenti **n-i** variabili hanno lo stesso valore.

Il termine prodotto corrispondente ha **n-i** letterali.

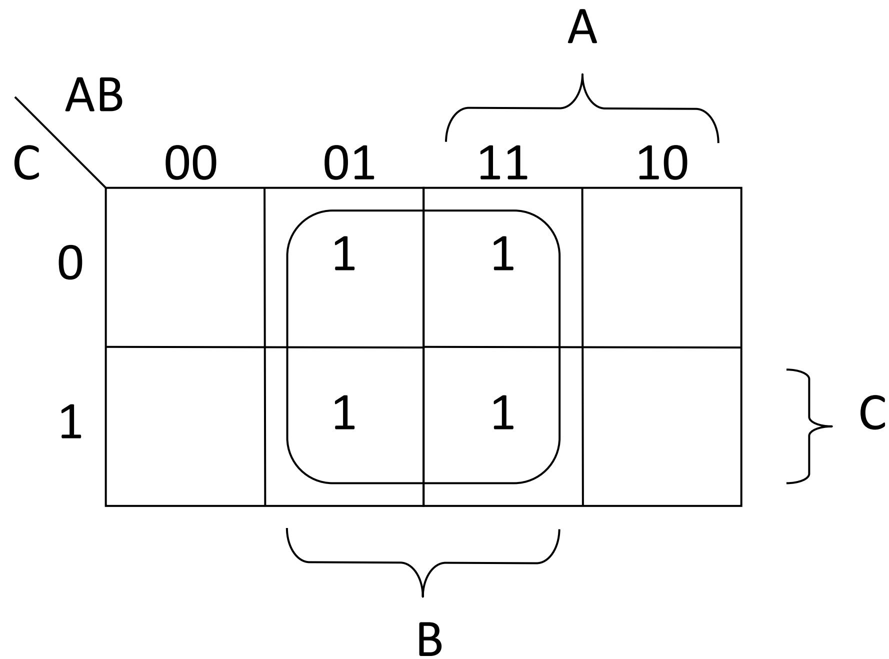
In questo caso le 1-celle vengono cerchiate con rettangoli.

$$f = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$$

$$= B \cdot (\overline{A} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot C + A \cdot \overline{C} + A \cdot C) = B$$

Regola Generale di Combinazione nella K-map

B si mantiene ad 1 nel rettangolo

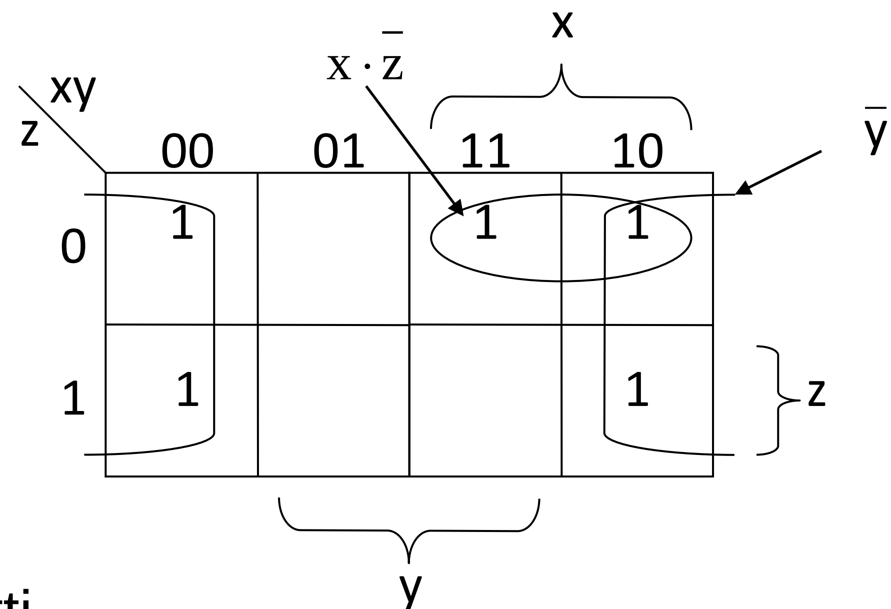


$$f = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$$

$$f = \overline{A} \cdot B \cdot \left(\overline{C} + C\right) + A \cdot B \cdot \left(\overline{C} + C\right) = \overline{A} \cdot B + A \cdot B = B$$

Esempio

$$F=\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}+\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z+x\cdot y\cdot\overline{z}+x\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}+x\cdot\overline{y}\cdot z$$



$$F=x\cdot\overline{z}+\overline{y}$$

Infatti

termine aggiuntivo

$$F=\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}+\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z+x\cdot\overline{y}\cdot z+x\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}+\left(x\cdot y\cdot\overline{z}+x\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}\right)$$

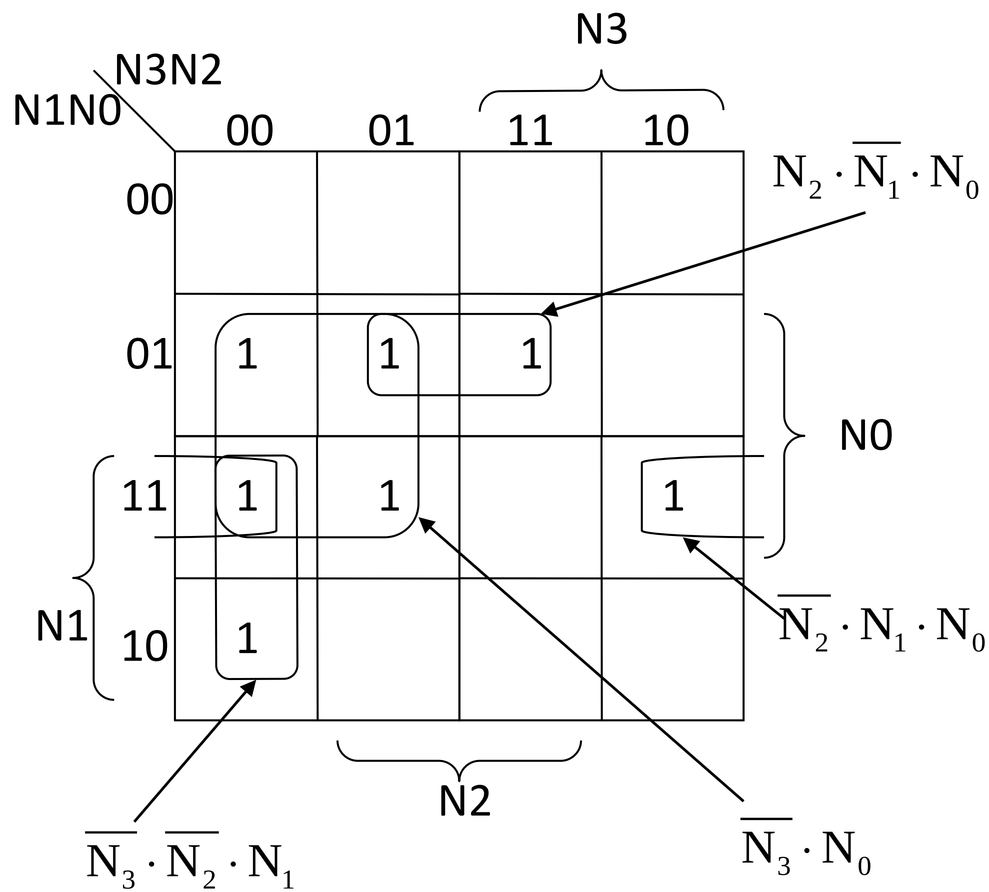
$$=\overline{y}\cdot\left(\overline{x}\cdot\overline{z}+\overline{x}\cdot z+x\cdot z+x\cdot\overline{z}\right)+x\cdot\overline{z}$$

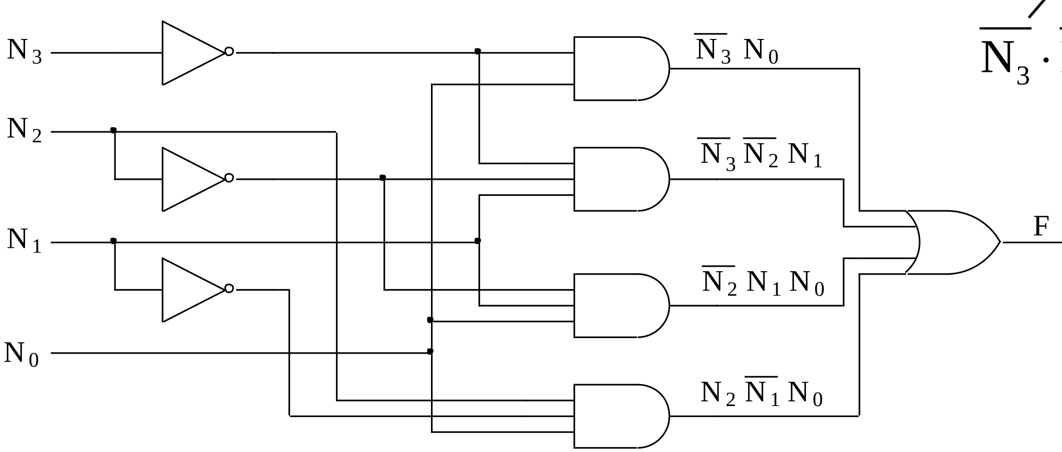
$$=\overline{y}\cdot\left(\overline{x}+x\right)+x\cdot\overline{z}=\overline{y}+x\cdot\overline{z}$$

Esempio

$$F = \sum_{N_3 N_2 N_1 N_0} (1,2,3,5,7,11,13)$$

$$F = \overline{N_3} \cdot N_0 + \overline{N_3} \cdot \overline{N_2} \cdot N_1 + \overline{N_2} \cdot N_1 \cdot N_0 + N_2 \cdot \overline{N_1} \cdot N_0$$





Definizioni Generali: Somma Minimale

Somma minimale di una $F(x_1,\ldots,x_n)$ è una somma di prodotti che rappresenta F tale che una qualsiasi altra espressione di F ha un numero di prodotti maggiore, e ogni espressione con lo stesso numero di prodotti ha un numero maggiore di letterali.

esempio (dal teorema del consenso) somma minimale

$$f = \boldsymbol{a \cdot b + \overline{a} \cdot c + b \cdot c = a \cdot b + \overline{a} \cdot c}$$

Definizioni Generali: Implicante

Una funzione logica $P(x_1,\ldots,x_n)$ *implica* (**implicante**) una funzione $F(x_1,\ldots,x_n)$ se per ogni combinazione degli ingressi tali che P = 1, allora risulta F = 1.

$$P \Rightarrow F \qquad P \text{ " implica " } F \qquad F \text{ include } P \qquad F \text{ copre } P$$

$$F = x + y \cdot z \qquad\qquad P = x \cdot z + x \cdot \overline{y}$$

z \ xy	00	01	11	10
0			1	1
1		1	1	1

z \ xy	00	01	11	10
0				1
1			1	1

Definizioni Generali: Implicante

Esempio:

a	**b**	**c**	**F**
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

La funzione $P = a \cdot b$ implica F

La funzione $P = \overline{a} \cdot \overline{b}$ non implica F

La funzione $P = a$ implica F

Definizioni Generali: Implicante Primo

Un **implicante primo** di una $F(x_1,\ldots,x_n)$ è un prodotto normale di termini $P(x_1,\ldots,x_n)$ che implica F, tale che se viene rimossa una qualsiasi variabile da P, allora il prodotto risultante non implica F.

Esempio:

Esaminando la F degli esempi precedenti, si osserva che:

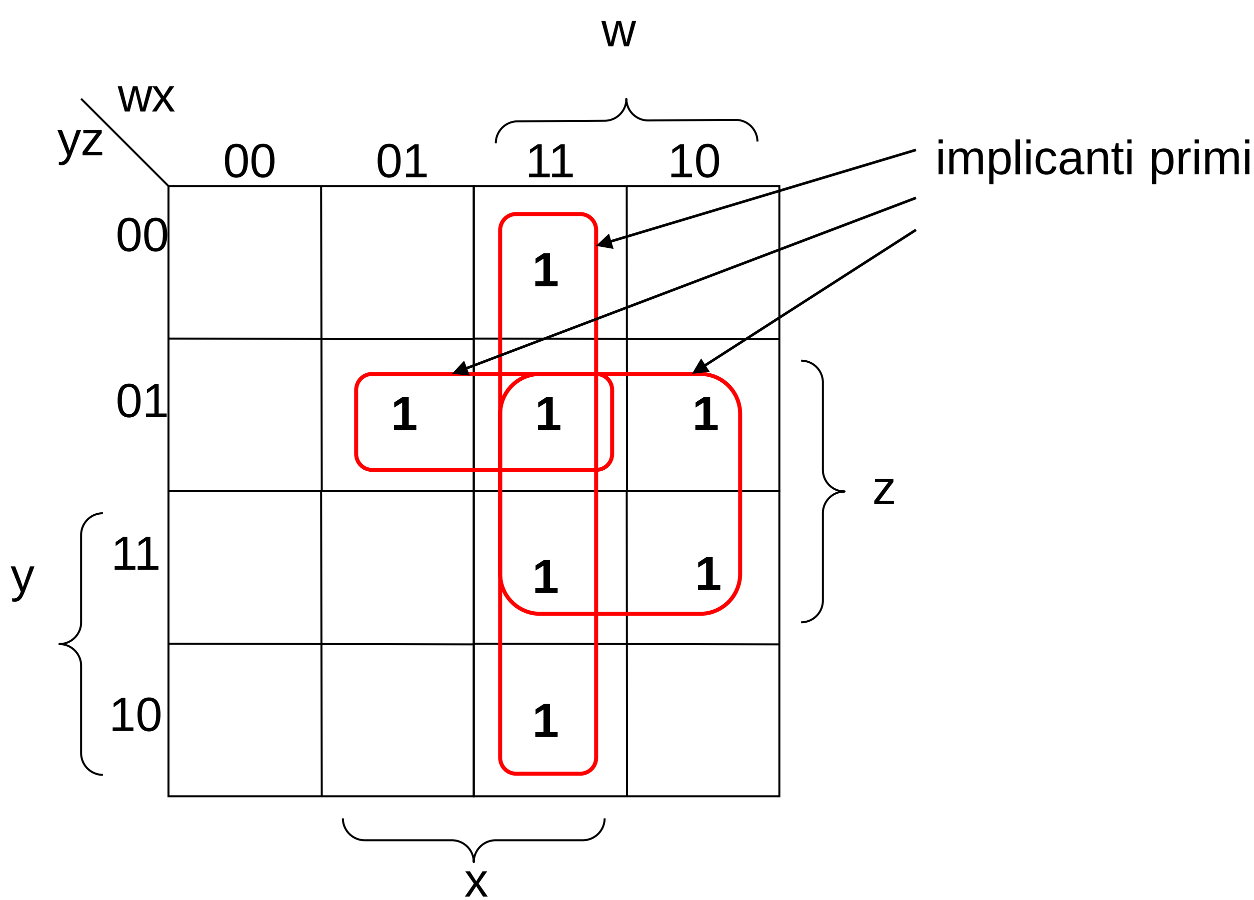
$P = a \cdot b$ non è un implicante primo

poiché se si elimina b, a è un implicante

$P = a$ è un implicante primo

Implicante Primo e K-map

Nella mappa di Karnaugh un implicante primo di F è un set cerchiato di 1-celle, tale che se si prova ad allargare, coprirà uno o più zeri.

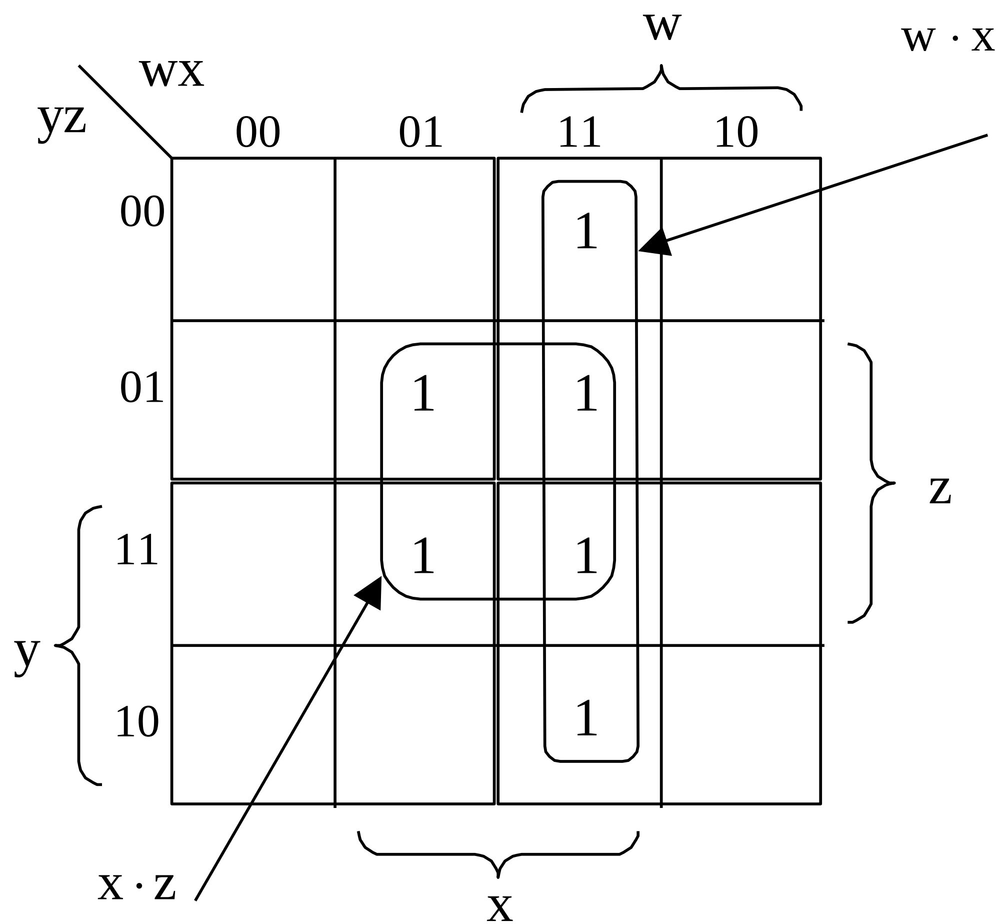


Teorema degli Implicanti Primi

Def.: **Una somma minimale è una somma di implicanti primi**

Esempio:

$$F = \sum_{wxyz} (5, 7, 12, 13, 14, 15)$$

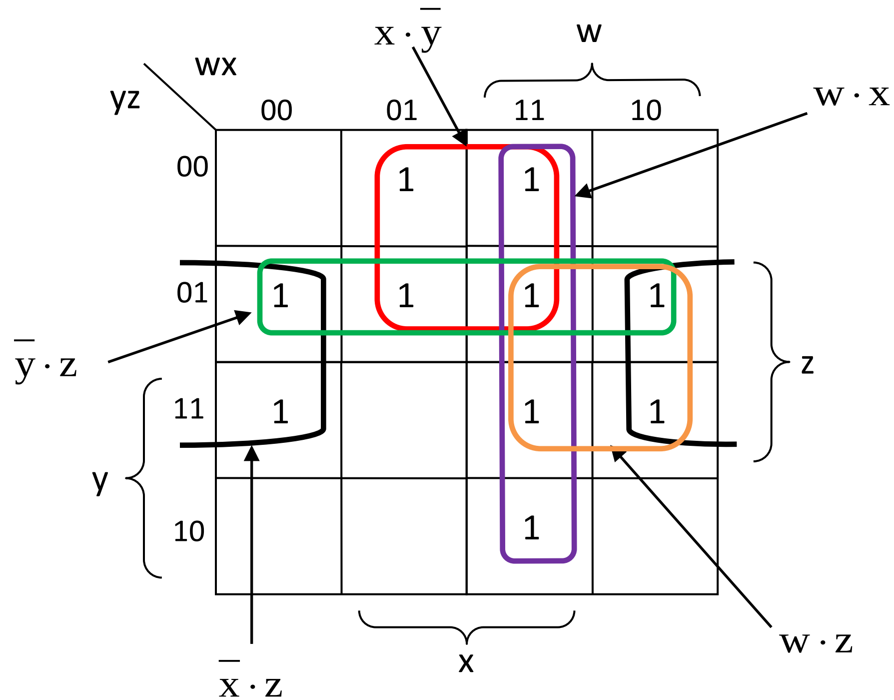


$$F = x \cdot z + w \cdot x$$

Definizioni Generali: Somma Completa

La somma di *tutti* gli implicanti primi di una funzione è detta **somma completa**.

Esempio: $F = \sum_{wxyz}(1,3,4,5,9,11,12,13,14,15)$



Ci sono 5 implicanti primi :

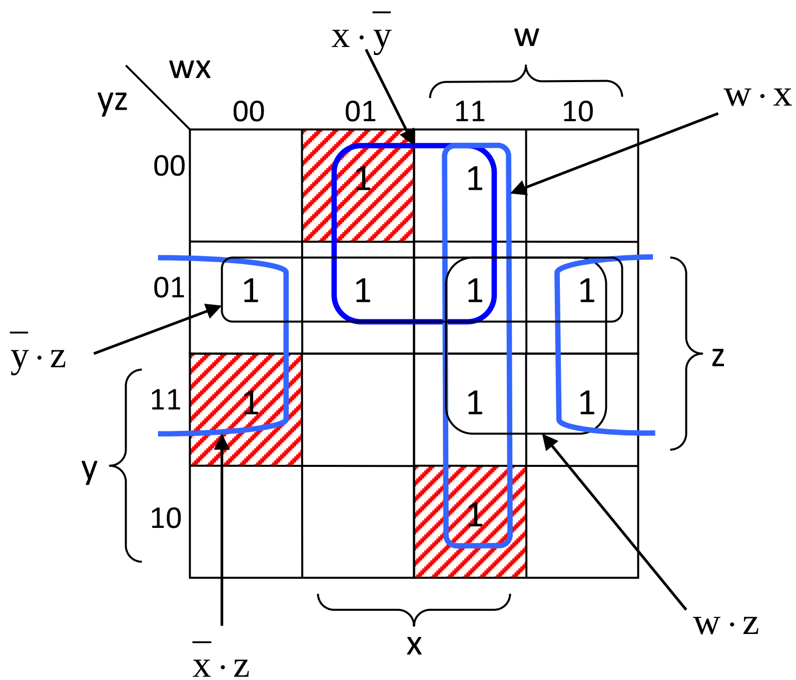
$$\left(w \cdot x\ ,\ w \cdot z\ ,\ x \cdot \bar{y}\ ,\ \bar{x} \cdot z\ ,\ \bar{y} \cdot z\right)$$

quindi la somma completa è:

$$F = w \cdot x + w \cdot z + x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot z + \bar{y} \cdot z$$

Definizioni Generali: Cella Singolare e Implicante Primo Essenziale

Una **cella singolare** è coperta da *un solo* implicante primo (celle tratteggiate)
Un **Implicante primo essenziale** copre una o più 1-celle singolari (linee blu)



Poiché un implicante primo essenziale copre diverse 1-celle singolari, *deve essere incluso* in ogni somma minimale.
Nell'esempio gli implicanti primi essenziali sono: $x \cdot \overline{y},\ \overline{x} \cdot z,\ w \cdot x$

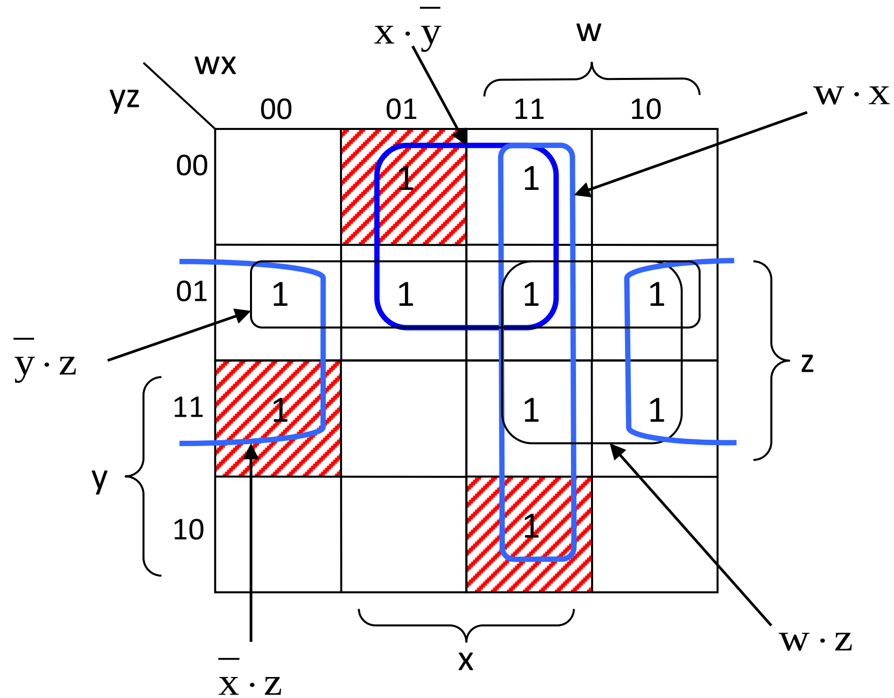
Tutte le 1-celle sono coperte dagli implicanti primi essenziali perciò la rappresentazione minimale è: $F = x \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot z + w \cdot x$

Somma Completa vs. Somma Minimale

La somma completa *non* è sempre minimale.

Esempio:

$$F = \sum_{wxyz}(1,3,4,5,9,11,12,13,14,15)$$



Ci sono 5 implicanti primi :

$$\left(w \cdot x\,,\ w \cdot z\,,\ x \cdot \overline{y}\,,\ \overline{x} \cdot z\,,\ \overline{y} \cdot z\right)$$

somma completa li include tutti e 5:

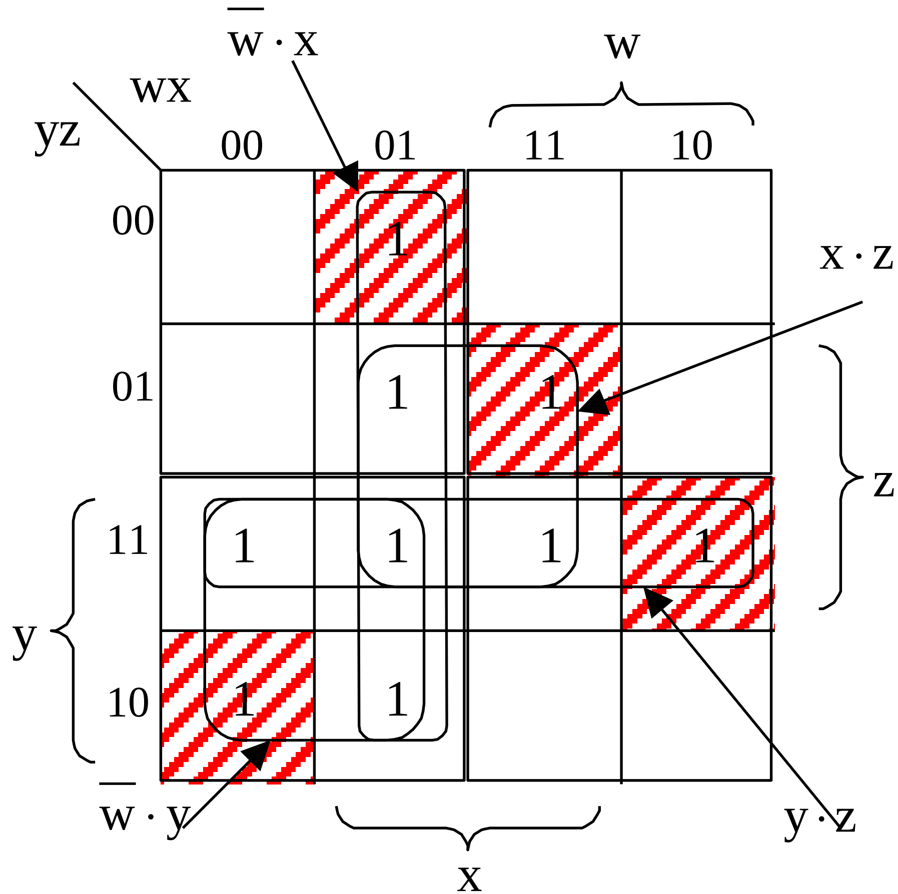
$$F = w \cdot x + w \cdot z + x \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot z + \overline{y} \cdot z$$

ma la somma minimale ne include solo 3:

$$F = w \cdot x + x \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot z$$

Celle Singolari e Implicanti Primi Essenziali

$$F = \sum_{wxyz}(2,3,4,5,6,7,11,13,15)$$



In questo caso tutti gli implicanti sono essenziali e quindi sono tutti inclusi nella somma minimale.

$$F = \overline{w} \cdot y + \overline{w} \cdot x + x \cdot z + y \cdot z$$

Osservazione Importante

La somma minimale può comprende non solo gli implicanti primi essenziali …

… ma anche implicanti primi non essenziali

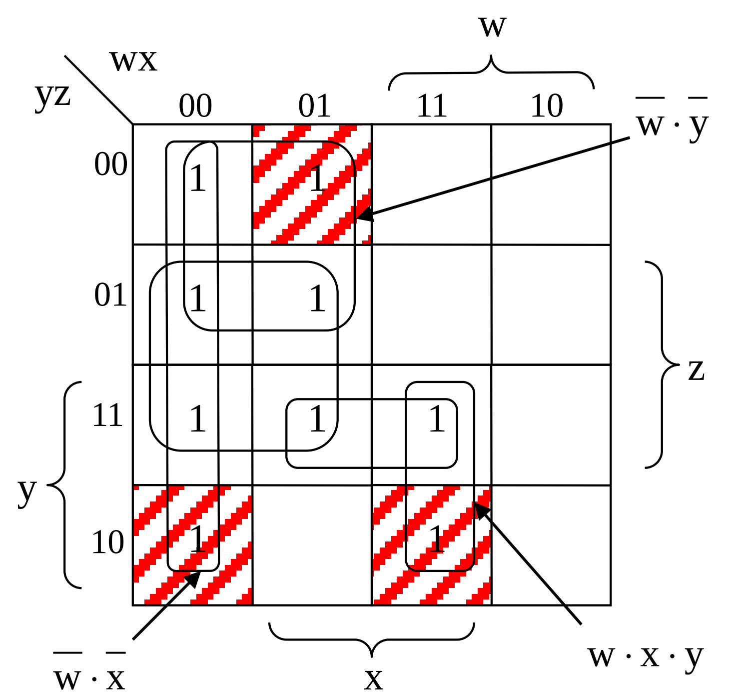
Esempio 1

$$F = \sum_{wxyz} (0,1,2,3,4,5,7,14,15)$$

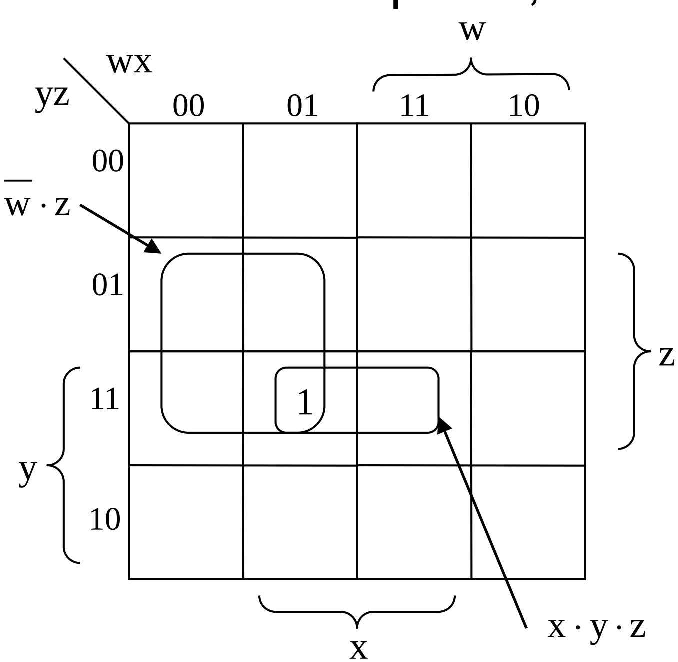
Gli implicanti primi essenziali sono:

$$\overline{w} \cdot \overline{x} \;,\; \overline{w} \cdot \overline{y} \;,\; w \cdot x \cdot y$$

In questo caso non coprono tutte le celle



Rimuovendo gli implicanti primi essenziali
e le 1-celle che ricoprono, si ottiene …



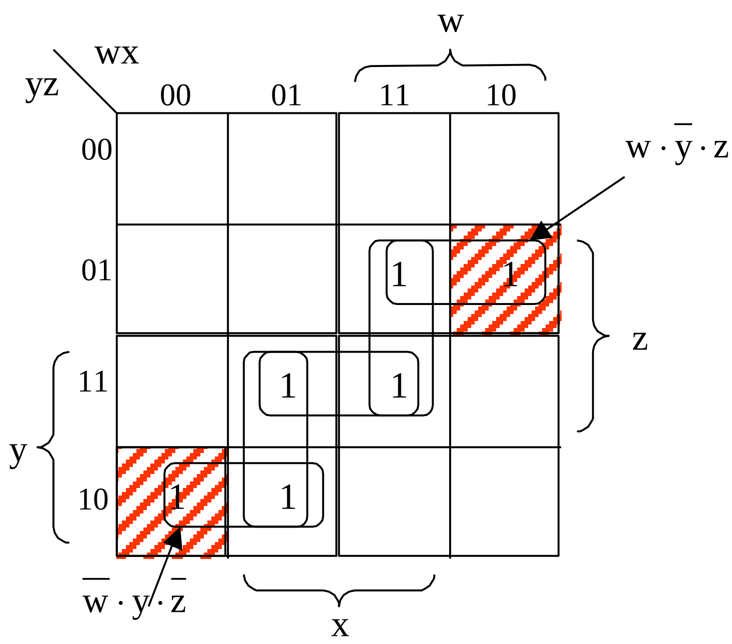
… una sola 1-cella che non è coperta
e due implicanti che la coprono

Gli implicanti sono: $\overline{w} \cdot z, \;\; x \cdot y \cdot z$

$$F = \overline{w} \cdot \overline{x} + \overline{w} \cdot \overline{y} + w \cdot x \cdot y + \overline{w} \cdot z$$

Esempio 2

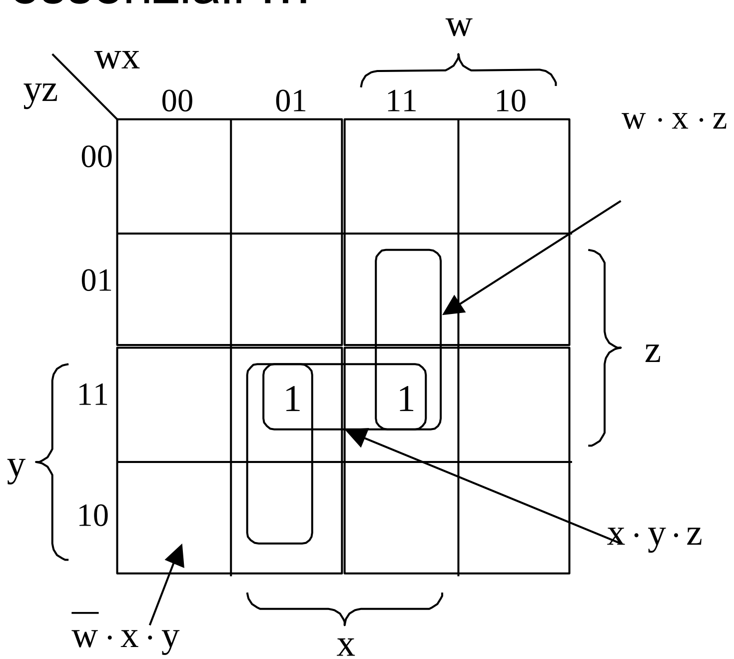
$$F = \sum_{wxyz} (2,6,7,9,13,15)$$



Gli implicanti primi essenziali sono:

$$w \cdot \bar{y} \cdot z \qquad \bar{w} \cdot y \cdot \bar{z}$$

Rimuovendo gli implicanti primi essenziali …



… due 1-celle non sono coperte e 3 implicanti le coprono:

$$\bar{w} \cdot x \cdot y, \; x \cdot y \cdot z, \; w \cdot x \cdot z$$

Di questi, $x \cdot y \cdot z$ copre entrambe le 1-celle

$$F = w \cdot \bar{y} \cdot z + \bar{w} \cdot y \cdot \bar{z} + x \cdot y \cdot z$$

Eclissi di Implicanti

- **Definizione**

  Dati due implicanti P e Q in una mappa ridotta, si dice che **P eclissa Q** (si scrive P…Q) se P copre almeno tutte le celle coperte da Q.

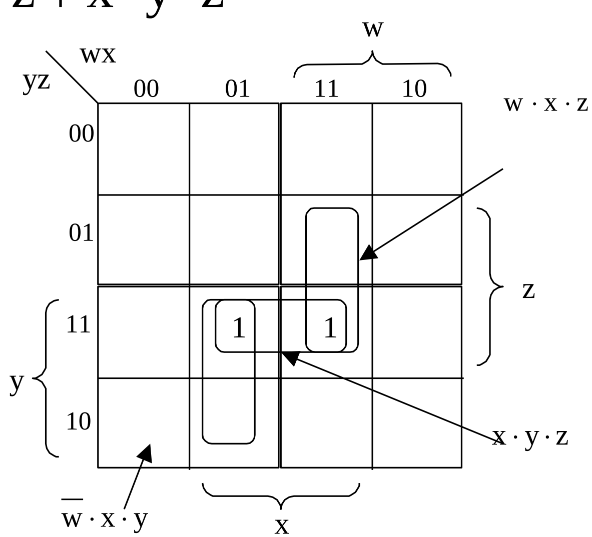
- Se il costo di P e Q è lo stesso e P eclissa Q allora Q può essere rimosso.

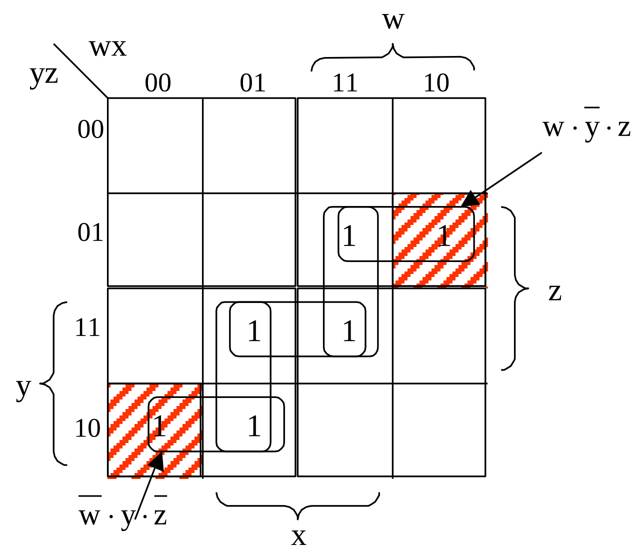
Nell'esempio

$x \cdot y \cdot z$ eclissa $\overline{w} \cdot x \cdot y$ e $w \cdot x \cdot z$ (che possono essere rimossi)

$x \cdot y \cdot z$ è l'implicante secondario che deve essere incluso nella somma

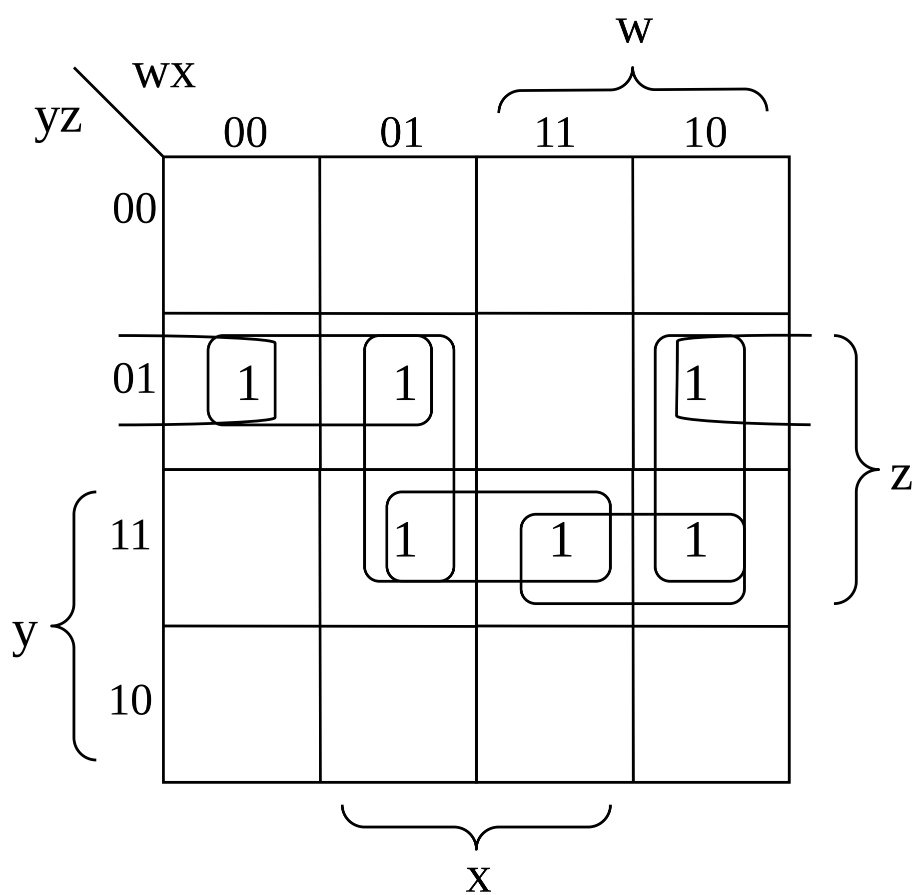
$$F = w \cdot \overline{y} \cdot z + \overline{w} \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot y \cdot z$$





Esempio 3

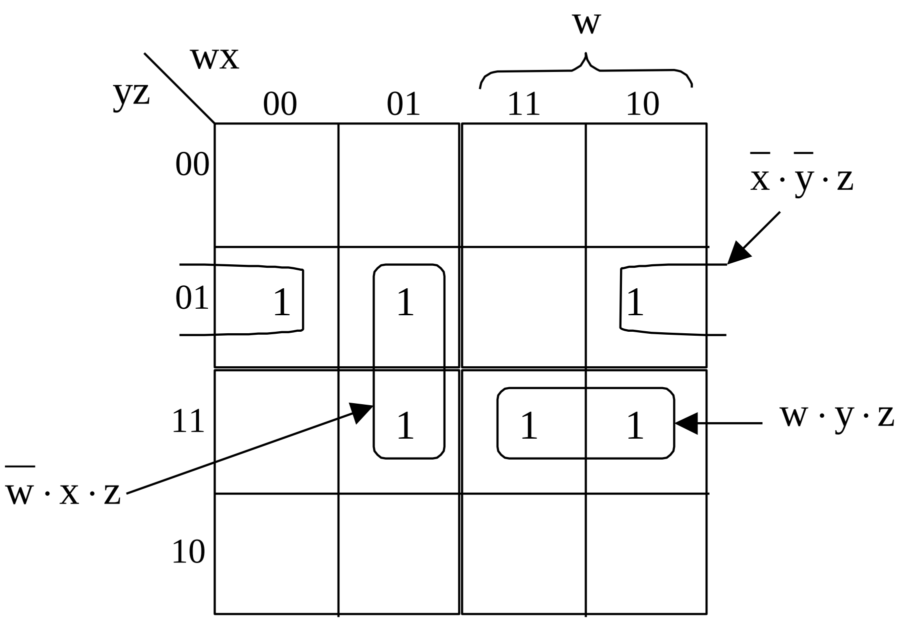
$$F = \sum_{wxyz}(1,5,7,9,11,15)$$

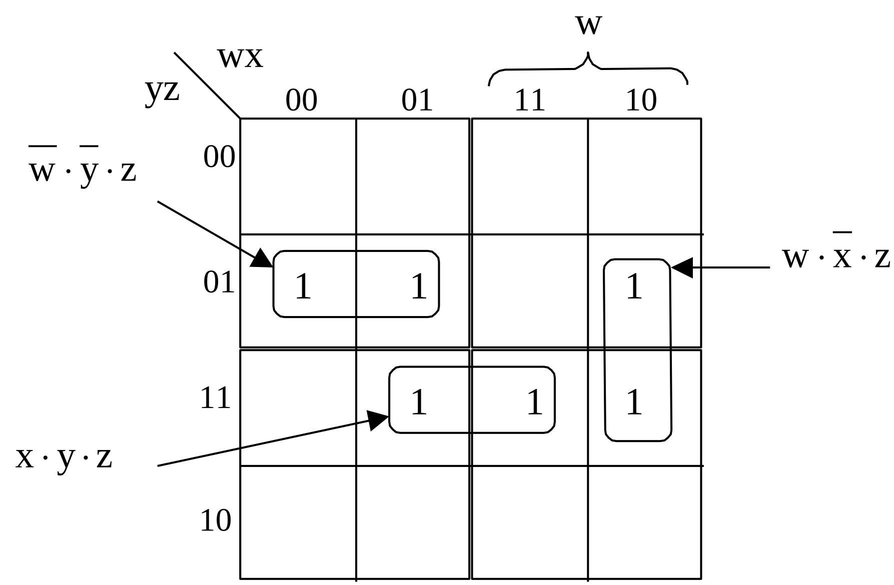


In questo caso non ci sono implicanti primi essenziali.

Branching Method

Si fissa un implicante e si aggiungono gli altri implicanti, trattandoli come essenziali, fino a coprire tutte le 1-celle





$$F = \bar{w} \cdot x \cdot z + w \cdot y \cdot z + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$$

$$F = x \cdot y \cdot z + w \cdot \bar{x} \cdot z + \bar{w} \cdot \bar{y} \cdot z$$

Semplificazione di Prodotti di Somma (POS)

- Usando il principio di dualità si può minimizzare un'espressione POS facendo riferimento agli "zeri" nella k-map.

$$F = \overline{\left(\overline{F}\right)} = \overline{\left(\sum_i m_i\right)} = \overline{\left(m_1 + m_2 + \cdots\right)} = \overline{m_1} \cdot \overline{m_2} \cdot \ \cdots = M_1 \cdot M_2 \cdot \ \cdots$$

- Si trova la rappresentazione minimale per $\overline{F}$ con la k-map

$$\overline{F} = \sum_i m_i$$

- Si usa poi il teorema di De Morgan per rappresentare la F come prodotto di somma.

Semplificazione di Prodotti di Somma (POS)

F

z \ xy	00	01	11	10
0	1		1	1
1	1			1

$\overline{\mathbf{F}}$

z \ xy	00	01	11	10
0		1		
1		1	1	

$\bar{x} \cdot y$

$y \cdot z$

$$\overline{F}_{min} = y \cdot z + \bar{x} \cdot y$$

$$F_{min} = \overline{\left(\overline{F}_{min}\right)} = \overline{\left(y \cdot z + \bar{x} \cdot y\right)} = \overline{\left(y \cdot z\right)} \cdot \overline{\left(\bar{x} \cdot y\right)} = \left(\bar{y} + \bar{z}\right) \cdot \left(x + \bar{y}\right)$$

Minimizzazione con Ingressi "don't care"

$$F = \sum_{N_3N_2N_1N_0} (1,2,3,5,7) + d(10,11,12,13,14,15)$$

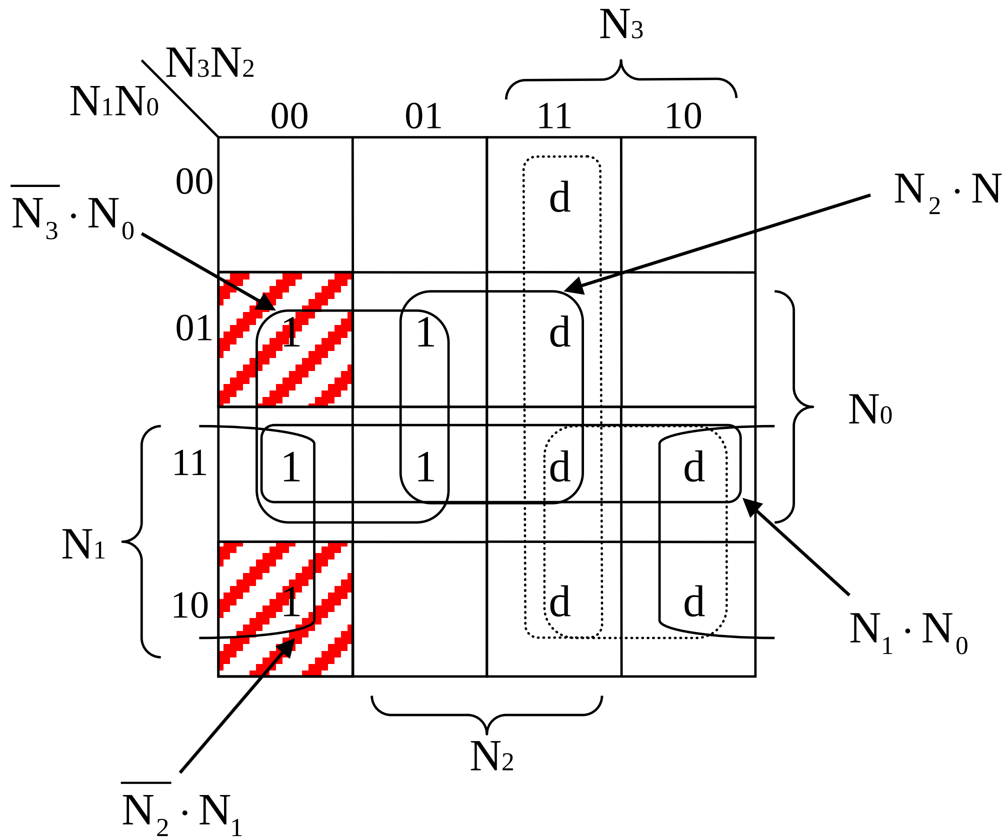
Procedura per determinare gli implicanti primi

Si includono le d-celle nei gruppi di 1-celle per rendere i gruppi più lunghi possibile.

$$N_2 \cdot N_0 \ , \quad \overline{N_2} \cdot N_1, \quad N_1 \cdot N_0$$

Nell'esempio si trovano due implicanti primi essenziali

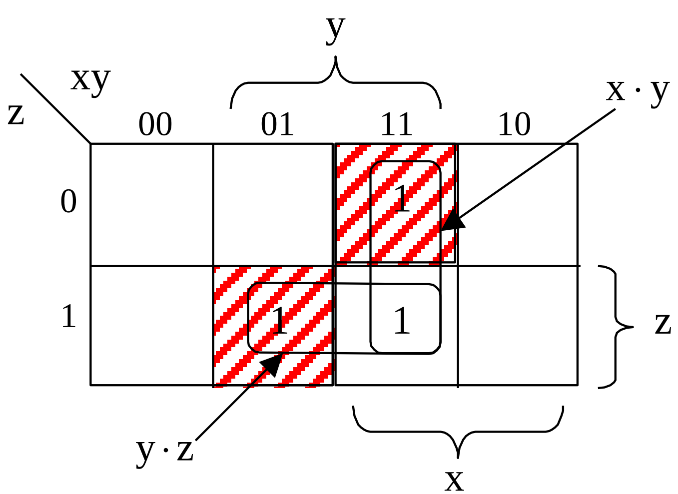
$$\Rightarrow \overline{N_3} \cdot N_0 \ , \quad \overline{N_2} \cdot N_1$$

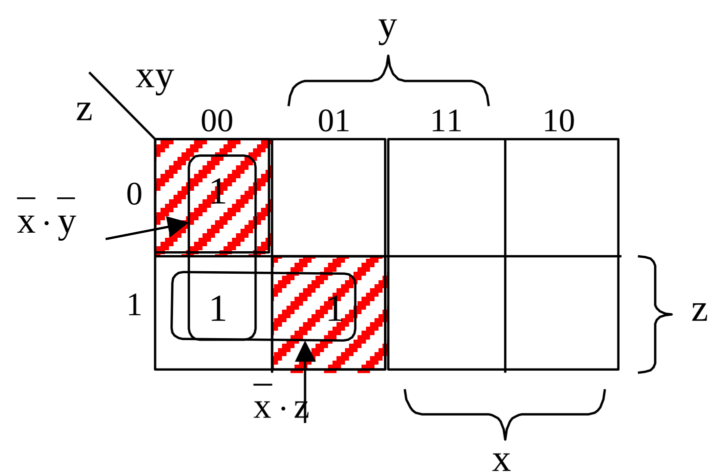


$$F = \overline{N_3} \cdot N_0 + \overline{N_2} \cdot N_1$$

Minimizzazione di Funzioni ad Uscite Multiple

$$F = \sum(3,6,7) \qquad G = \sum_{xyz}(0,1,3)$$

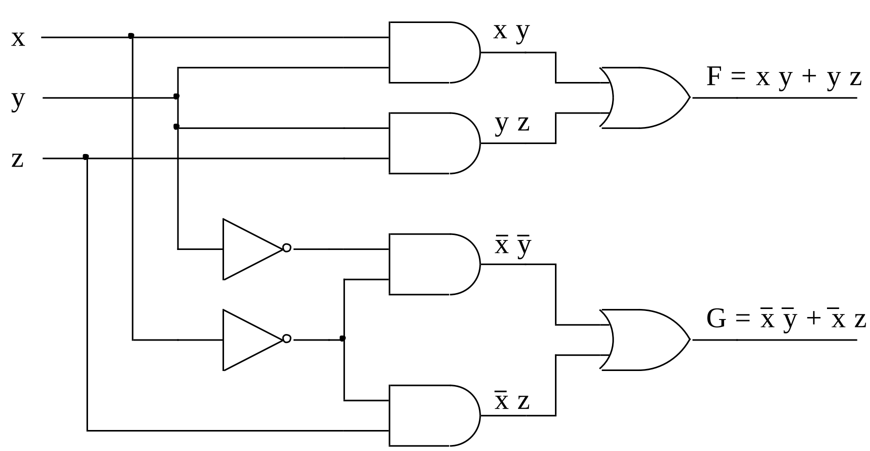




$$F = x \cdot y + y \cdot z$$

Trattando le funzioni indipendenti

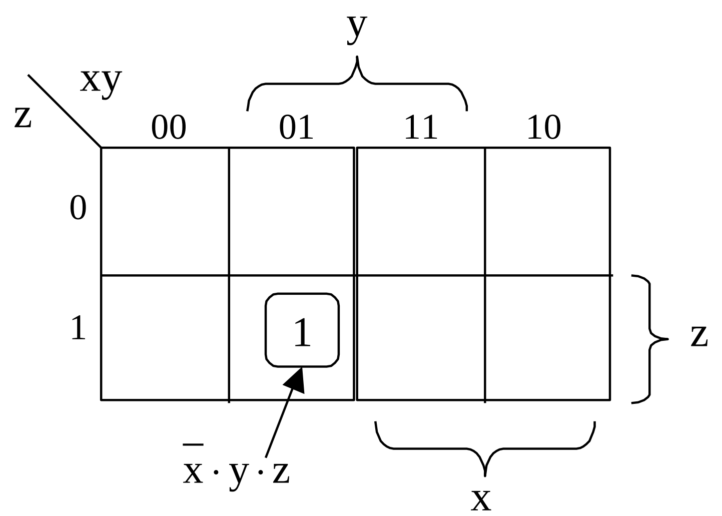
$$G = \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot z$$

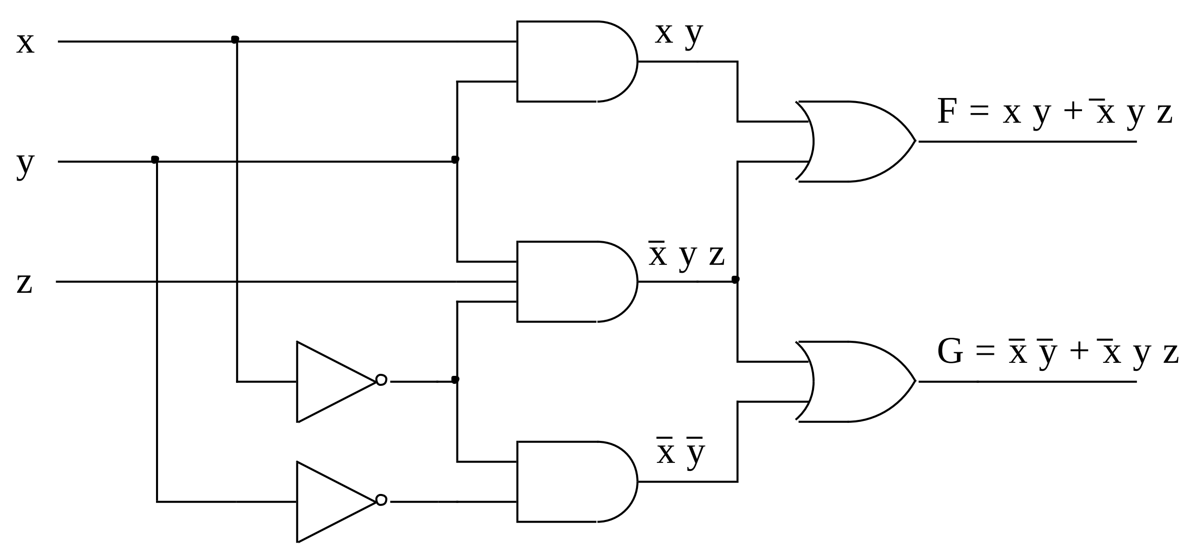


Minimizzazione di Funzioni ad Uscite Multiple

L'implicante $\bar{x} \cdot y \cdot z$ è comune alle due funzioni.

$$\begin{cases} F = x \cdot y + \bar{x} \cdot y \cdot z \\ G = \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y \cdot z \end{cases}$$





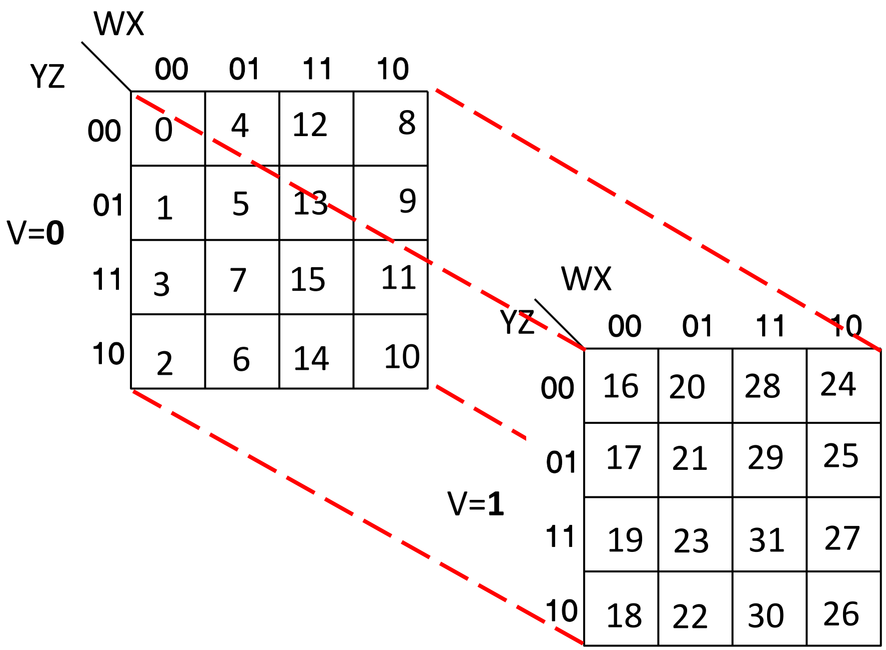
Mappe a 5 Variabili

- La sintesi tramite mappe può effettuarsi anche per 5 variabili (es. *V, W, X, Y, Z*)
  - Con l'uso della simmetria speculare
    - Rispetto a un asse verticale
  - Con la sovrapposizione di 2 piani da 4 variabili
    - Secondo il valore della quinta variabile 0, 1
- Si possono formare implicanti in modi diversi
  - Sulle singole mappe
    - Con $V = 0$ nei termini prodotto ci sarà $\overline{V}$
    - Con $V = 1$ nei termini prodotto ci sarà V
  - A cavallo delle due mappe in posti corrispondenti
    - Nel termine non apparirà V

Mappe a 5 Variabili

YZ \ VWX	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	4	12	8	24	28	20	16
01	1	5	13	9	25	29	21	17
11	3	7	15	11	27	31	23	19
10	2	6	14	10	26	30	22	18

Mappe a 5 Variabili



V=0

YZ \ WX	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

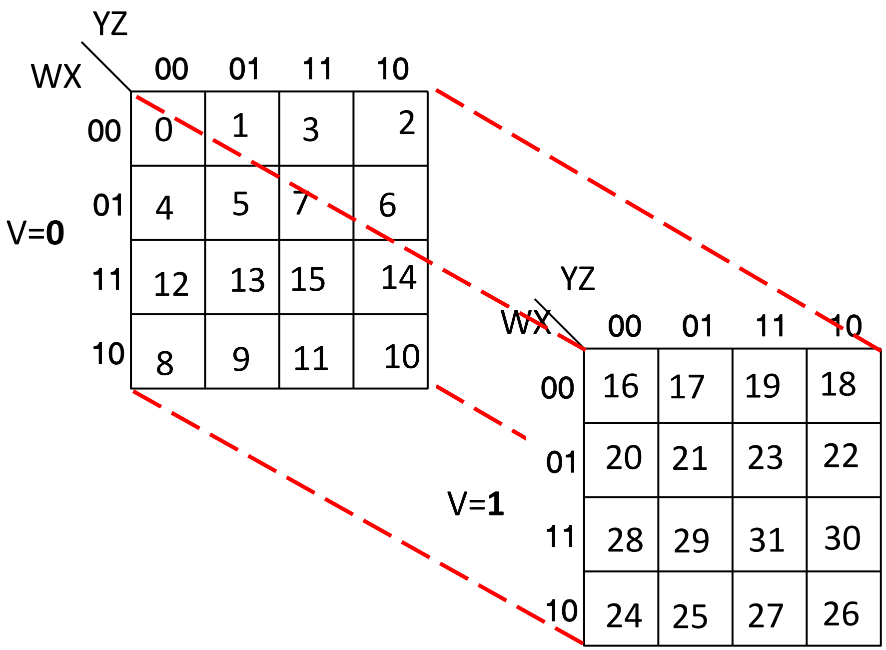
V=1

YZ \ WX	00	01	11	10
00	16	20	28	24
01	17	21	29	25
11	19	23	31	27
10	18	22	30	26

Mappe a 5 Variabili

vw \ xyz	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

Mappe a 5 Variabili



V=0

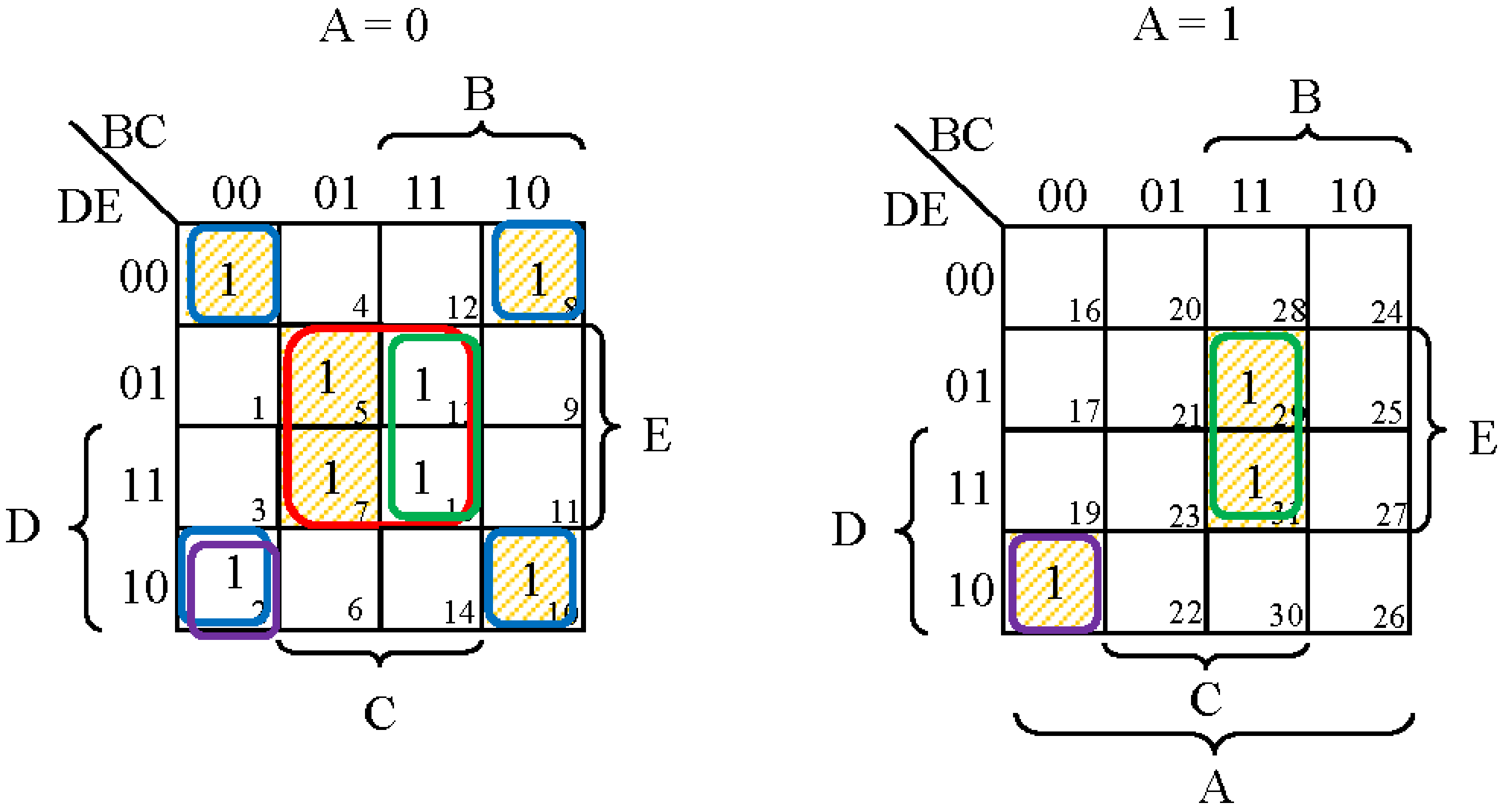
WX \ YZ	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

V=1

WX \ YZ	00	01	11	10
00	16	17	19	18
01	20	21	23	22
11	28	29	31	30
10	24	25	27	26

Esempio

$$F = \sum_{ABCDE}(0,2,5,7,8,10,13,15,18,29,31)$$



$$F = \overline{A}\cdot C\cdot E + B\cdot C\cdot E + \overline{A}\cdot\overline{C}\cdot\overline{E} + \overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D\cdot\overline{E}$$

Mappe a 6 Variabili

- La sintesi tramite mappe può spingersi al massimo fino a 6 variabili
  - Con l'uso della simmetria speculare
    - Sui due assi orizzontale e verticale
  - Con la sovrapposizione di 4 piani da 4 variabili
    - Secondo le sequenze di combinazioni 00, 01, 11, 10
- Oltre le 6 variabili (già impegnative da gestire con le mappe) si usano metodi algoritmici
  - Algoritmo di Quine-McCluskey

Mappe a 6 Variabili

XYZ \ UVW	000	001	011	010	110	111	101	100
000	0	8	24	16	48	56	40	32
001	1	9	25	17	49	57	41	33
011	3	11	27	19	51	59	43	35
010	2	10	26	18	50	58	42	34
110	6	14	30	22	54	62	46	38
111	7	15	31	23	55	63	47	39
101	5	13	29	21	53	61	45	37
100	4	12	28	20	52	60	44	36

Mappe a 6 Variabili

UV=**00**

YZ \ WX	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

UV=**01**

YZ \ WX	00	01	11	10
00	16	20	28	24
01	17	21	29	25
11	19	23	31	27
10	18	22	30	26

UV=**11**

YZ \ WX	00	01	11	10
00	48	52	60	56
01	49	53	61	57
11	51	55	63	59
10	50	54	62	58

UV=**10**

YZ \ WX	00	01	11	10
00	32	36	44	40
01	33	37	45	41
11	35	39	47	43
10	34	38	46	42

Mappe a 6 Variabili

UV=00

YZ \ WX	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

UV=10

YZ \ WX	00	01	11	10
00	32	36	44	40
01	33	37	45	41
11	35	39	47	43
10	34	38	46	42

UV=01

YZ \ WX	00	01	11	10
00	16	20	28	24
01	17	21	29	25
11	19	23	31	27
10	18	22	30	26

UV=11

YZ \ WX	00	01	11	10
00	48	52	60	56
01	49	53	61	57
11	51	55	63	59
10	50	54	62	58

Metodo di Quine – Mc Cluskey

- Viene usato con un numero di variabili > 6.

  In questo caso le k-map non possono essere utilizzate.

  Esempio: $f = \sum_{ABCD} (1,2,4,5,6,10,12,13,14)$

- Si formano gruppi di mintermi con lo stesso numero di 1.

	A	B	C	D	
1	0	0	0	1	G_1 gruppo con un solo "1"
2	0	0	1	0	
4	0	1	0	0	
5	0	1	0	1	G_2 gruppo con due "1"
6	0	1	1	0	
10	1	0	1	0	
12	1	1	0	0	
13	1	1	0	1	G_3 gruppo con tre "1"
14	1	1	1	0	

Metodo di Quine – Mc Cluskey

- Ogni termine di un gruppo viene confrontato con ogni termine del gruppo successivo. Se due termini differiscono per una sola variabile allora si usa il teorema $A \cdot B + \overline{A} \cdot B = B$ e si elimina la variabile.

- I due termini vengono indicati con una "X".

- Si costruisce un'altra tabella dove le variabili eliminate sono indicate con "-".

		A	B	C	D	
X	1	0	0	0	1	G1
X	2	0	0	1	0	G1
X	4	0	1	0	0	G1
X	5	0	1	0	1	G2
X	6	0	1	1	0	G2
X	10	1	0	1	0	G2
X	12	1	1	0	0	G2
X	13	1	1	0	1	G3
X	14	1	1	1	0	G3

	A	B	C	D
1, 5	0	-	0	1
2, 6	0	-	1	0
2, 10	-	0	1	0
4, 5	0	1	0	-
4, 6	0	1	-	0
4, 12	-	1	0	0
5, 13	-	1	0	1
6, 14	-	1	1	0
10, 14	1	-	1	0
12, 13	1	1	0	-
12, 14	1	1	-	0

Metodo di Quine – Mc Cluskey

La stessa procedura viene di nuovo applicata. I termini duplicati sono eliminati.
I rimanenti termini non marcati con "X" sono gli implicanti primi della funzione.

		A	B	C	D	
	1, 5	0	-	0	1	
X	2, 6	0	-	1	0	
X	2, 10	-	0	1	0	G1'
X	4, 5	0	1	0	-	
X	4, 6	0	1	-	0	
X	4, 12	-	1	0	0	
X	5, 13	-	1	0	1	
X	6, 14	-	1	1	0	
X	10, 14	1	-	1	0	G2'
X	12, 13	1	1	0	-	
X	12, 14	1	1	-	0	

	A	B	C	D	
2, 6 ; 10, 14	-	-	1	0	
2, 10 ; 6, 14	-	-	1	0	Duplicato
4, 5 ; 12, 13	-	1	0	-	
4, 6 ; 12, 14	-	1	-	0	
4, 12 ; 5, 13	-	1	0	-	Duplicato
4, 12 ; 6, 14	-	1	-	0	Duplicato

G1''

$1, 5 \rightarrow \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot D$

$2, 6 \; ; \; 10, 14 \rightarrow C \cdot \overline{D}$

$4, 5 \; ; \; 12, 13 \rightarrow B \cdot \overline{C}$

$4, 6 \; ; \; 12, 14 \rightarrow B \cdot \overline{D}$

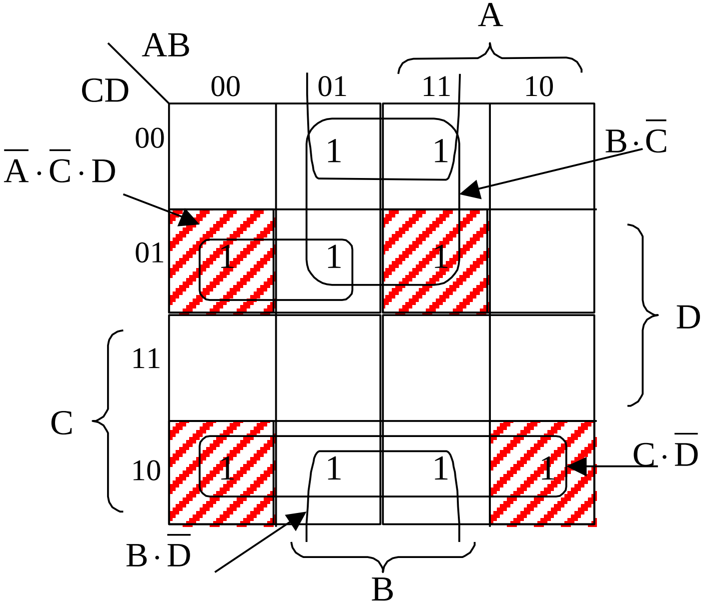
$$f = \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot D + C \cdot \overline{D} + B \cdot \overline{C} + B \cdot \overline{D}$$

Metodo di Quine – Mc Cluskey

Per determinare gli implicanti primi essenziali si costruisce la tabella seguente:

	1	2	4	5	6	10	12	13	14
1, 5	*			*					
2, 6; 10, 14		*			*	*			*
4, 5; 12, 13			*	*			*	*	
4, 6; 12, 14			*		*		*		*

Si individuano le colonne con un solo asterisco: le righe corrispondenti rappresentano gli implicanti primi essenziali: (1, 5), (2, 6; 10, 14), (4, 5; 12, 13)



$$f = \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot D + C \cdot \overline{D} + B \cdot \overline{C}$$

Gli implicanti primi essenziali sono:

$$B \cdot \overline{C}$$

$$C \cdot \overline{D}$$

$$\overline{A} \cdot \overline{C} \cdot D$$