Integrali di linea

[Integrali di linea funzioni scalari : 1 esempio]

[Integrali di linea di una funzione scalare: secondo esempio]

[Integrale di linea di una funzione vettoriale]

Conservatività del Campo Elettrostatico

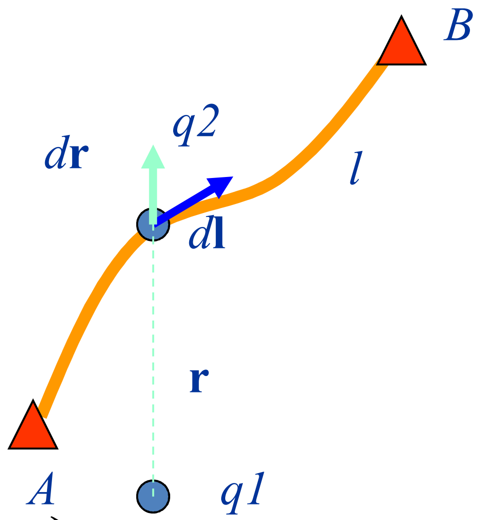
- Calcoliamo il lavoro da compiere per portare la carica q2 da A a B in presenza del campo elettrico dovuto alla carica q1.
- Se definiamo ***dl*** un tratto infinitesimo del percorso, tale da poterlo considerare localmente rettilineo:

$$dL = -\vec{\mathbf{F}}_E \cdot d\vec{\mathbf{l}}$$

$$L_{AB} = -\int_A^B \vec{\mathbf{F}}_E \cdot d\vec{\mathbf{l}}$$

$$L_{AB} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_2 \int_A^B \frac{\vec{\mathbf{u}}_r \cdot d\vec{\mathbf{l}}}{r^2} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_2 \int_A^B \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_2 \left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A} \right)$$



- Dipende solo dai punti A e B e non dal percorso seguito

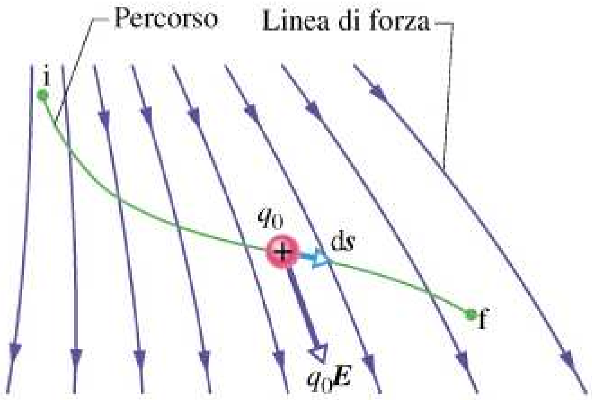
Conservatività del Campo Elettrostatico

- Se il lavoro L_{AB}=0 indipendentemente dal percorso quando A e B coincidono, allora il CAMPO ELETTROSTATICO E' CONSERVATIVO, ovvero

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = 0$$

cioè la circuitazione o circolazione del campo elettrostatico è **nulla**.

Energia potenziale di un campo elettrostatico



Quando una forza esterna compie un lavoro su un sistema, essa fornisce al sistema stesso una energia che chiamiamo energia potenziale.

Energia potenziale immagazzinata da un campo elettrostatico dipende solamente dalla posizione delle cariche all'interno del campo

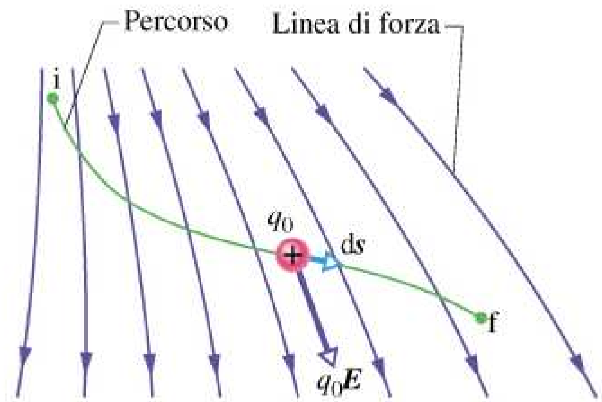
Possiamo descrivere la variazione dell'energia potenziale del sistema di particelle, come il lavoro contro le forze del campo necessario a spostare una particella da un punto iniziale ad un punto finale

$$\Delta U = -L_E = -\int_i^f \vec{F}_E \cdot d\vec{s} = -\int_i^f q\vec{E} \cdot d\vec{s} = U_f - U_i$$

Potenziale elettrostatico

- Per un campo conservativo è sempre possibile definire un **POTENZIALE**, ovvero una grandezza che dipende solo dalla posizione nel campo.

$$\Phi \triangleq U / q$$ Potenziale elettrostatico



$$\frac{\Delta U}{q} = -\int_i^f \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \frac{U_f}{q} - \frac{U_i}{q} = \Phi_f - \Phi_i$$

- Se esiste una ddp tra due punti, siamo in presenza di un campo
- si misura in Volt [V]=[J/C]; nota che E è misurato in N/C cioè V/m

Potenziale di riferimento

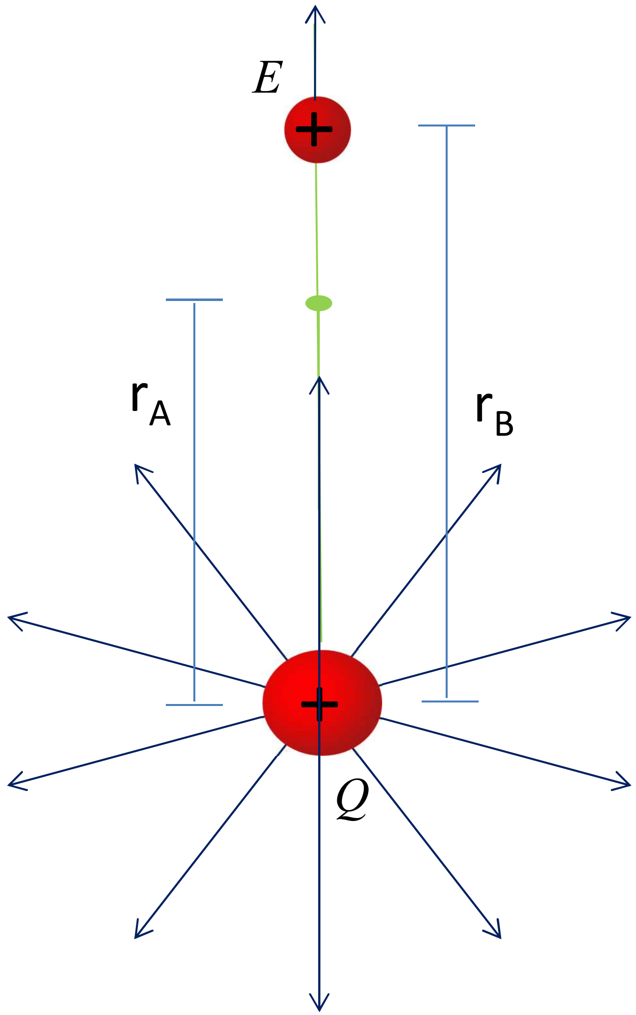
Per completare la definizione di potenziale dobbiamo definire il potenziale di riferimento.

Il concetto di lavoro è legato alla differenza di energia potenziale tra due punti.

Per quantificare l'energia potenziale e dunque il potenziale in un singolo punto dobbiamo definire un riferimento (un piano, un superficie o quant'altro) che per convenzione verrà considerato ad energia potenziale nulla .
La scelta è del tutto arbitraria, poiché quello che conta è la differenza di energia tra due punti.

Potenziale per una carica puntiforme

Supponiamo di voler spostare una carica di prova da un punto B ad un punto A all'interno di un campo prodotto da un carica Q



$$L_{BA} = U_A - U_B = q_P\left(\Phi_A - \Phi_B\right) = -\int_B^A \vec{\mathbf{F}}_E \cdot d\vec{\mathbf{l}} =$$

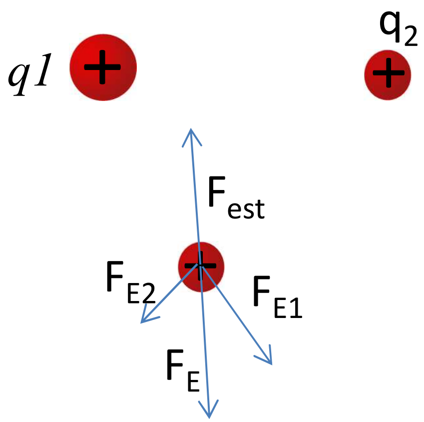
$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q q_p \left(-\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B}\right)$$

Poniamo per convenzione il potenziale a zero per punti all'infinito, se il punto B si trova all'infinito possiamo calcolare il potenziale in un punto del campo

$$q_p\left(\Phi_A - \Phi_\infty\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q q_p \left(-\frac{1}{r_A}\right)$$

$$\Phi_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_A}$$

Sistema di n cariche puntiformi



Ricordiamo che per portare una particella all'interno di un campo formato da due cariche occorre fare un lavoro pari a

$$L = q_3\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{23}}\right) = q_3\left(\Phi_1 + \Phi_2\right)$$

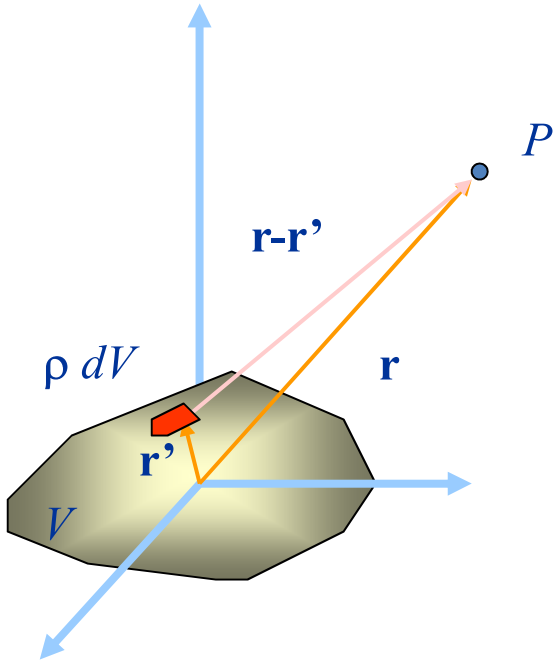
Anche per il potenziale vale la sovrapposizione degli effetti

Generalizzando ad N cariche puntiformi

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{N}\frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_j\right|}$$

Potenziale di una distribuzione continua di cariche

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{\mathbf{r}}|} \quad \text{carica puntiforme}$$

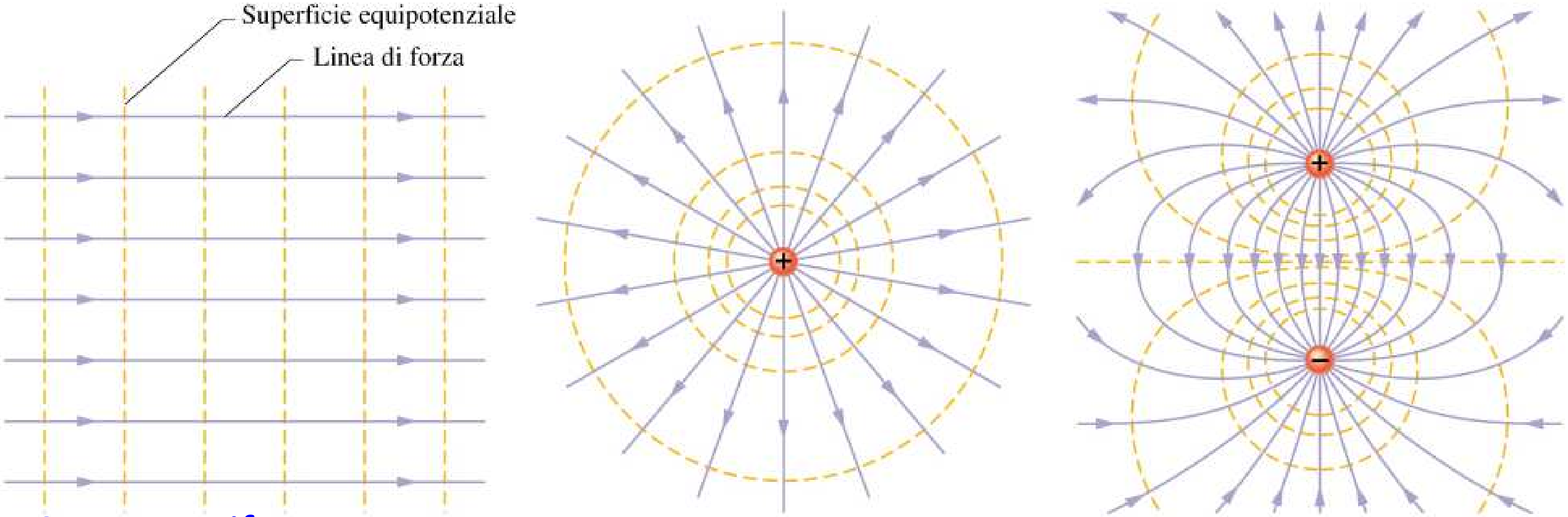


- Distribuzione di cariche

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \int_V \frac{\rho \, dV'}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}$$

Superfici Equipotenziali di un campo elettrostatico

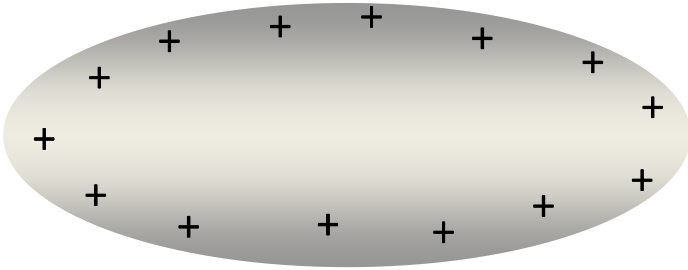
- Sono definiti come luogo dei punti a potenziale costante
- sono sempre ortogonali alle linee di forza



Campo uniforme (a) | Carica puntiforme (b) | dipolo (c)

Conduttori

$$\Phi_B - \Phi_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



- **Tesi**

La <u>superficie</u> di un conduttore è sempre una superficie equipotenziale (infatti, l'intero conduttore è equipotenziale)

Perchè ?

Se la superficie non fosse equipotenziale, ci sarebbe una componente del campo elettrico parallela alla superficie e le cariche si muoverebbero di conseguenza !! Similarmente a quanto avviene all'interno del conduttore.

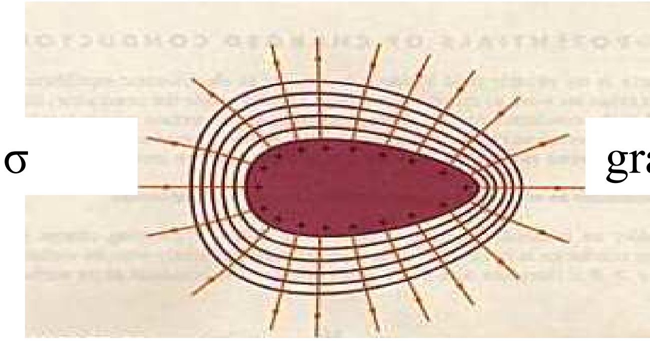
Il campo elettrico è perpendicolare alla superficie equipotenziale in tutti i punti lungo la superficie stessa, altrimenti, le cariche all'interno si muoverebbero. Pertanto, spostandoci lungo la superficie, il potenziale non cambia.

Carica sui Conduttori

Come è distribuita la carica su un conduttore non-sferico ?

Evidenza: la densità di carica è maggiore nelle zone con il più piccolo raggio di curvatura.

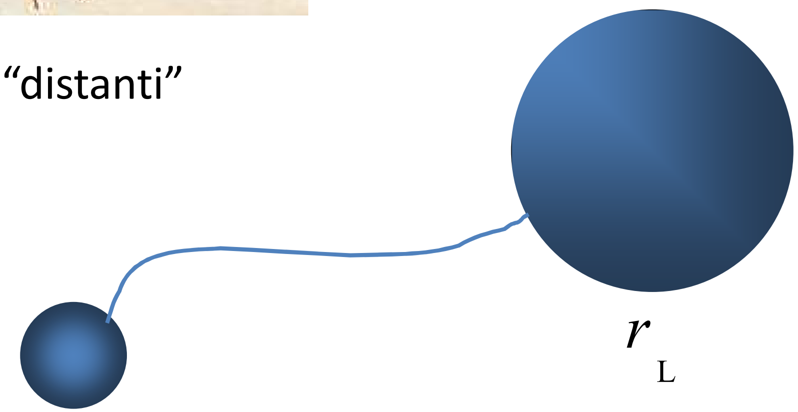
piccola σ



grande σ

DIMOSTRAZIONE: 2 sfere, connesse da un filo e “distanti”

Entrambe allo stesso potenziale



r_L

r_S

$$\frac{Q_S}{4\pi\varepsilon_0 r_S} \approx \frac{Q_L}{4\pi\varepsilon_0 r_L} \Rightarrow \frac{Q_S}{Q_L} \approx \frac{r_S}{r_L}$$

Ma:

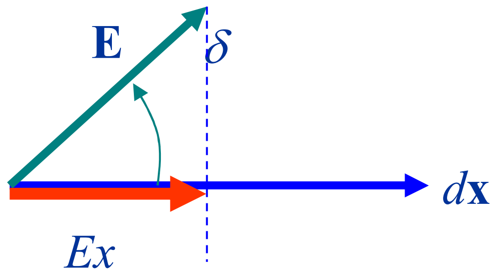
$$\frac{\sigma_S}{\sigma_L} \approx \frac{(Q_S / 4\pi r_S^{\,2})}{(Q_L / 4\pi r_L^{\,2})} \Rightarrow \boxed{\frac{\sigma_S}{\sigma_L} \approx \frac{r_L}{r_S}}$$

La sfera più piccola ha la densità di carica superficiale maggiore!

Il gradiente del potenziale

- Calcoliamo la variazione di potenziale tra due punti lungo la direzione x distanti un tratto dx. Per la definizione di potenziale possiamo scrivere:

$$d\Phi = -\vec{E} \cdot d\vec{x} = -E\,dx\cos(\delta) = -E_x dx$$



$$E_x = -\frac{d\Phi}{dx}$$

Stessa cosa per le altre direzioni

$$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \ldots$$

$$\vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\hat{z} \triangleq -\nabla\Phi$$

- Il campo elettrico diviene funzione di uno scalare!!

[Gradiente]

Equazioni di Poisson e di Laplace

- Possiamo ricavare altre due equazioni molto utili in elettrostatica partendo dalla relazione tra campo elettrico e potenziale.

Ricordiamo che $\vec{E} = -\nabla\Phi$

Dal teorema di gauss in forma differenziale abbiamo anche $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$

Manipolando l'equazione otteniamo:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \left(-\nabla\Phi\right) = -\nabla^2\Phi = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\boxed{\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

Equazione di Poisson

In una regione priva di carica l'equazione diventa

$$\boxed{\nabla^2\Phi = 0}$$

Equazione di Laplace

Calcolo del campo di un dipolo usando i potenziali

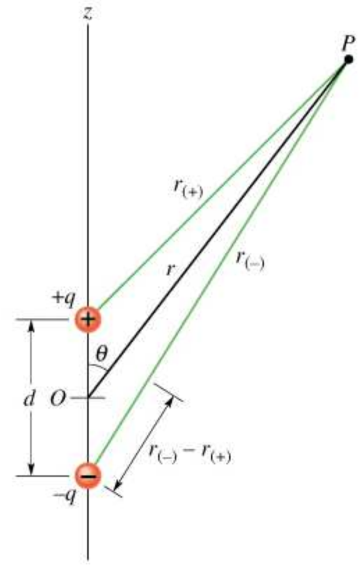
Applichiamo la sovrapposizione degli effetti:

$$\Phi = \Phi_{(+)} + \Phi_{(-)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_{(+)}} + \frac{(-q)}{r_{(-)}}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_{(-)} - r_{(+)}}{r_{(-)}r_{(+)}}$$

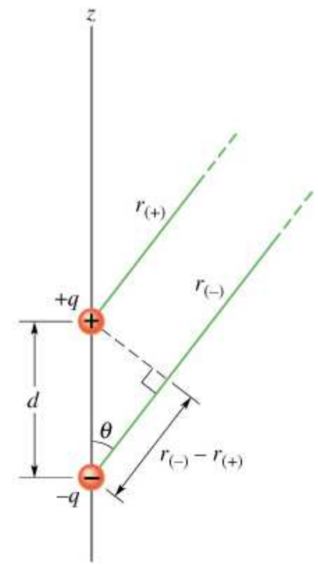
Per r>>d $\quad r_{(-)} - r_{(+)} \approx d\cos\vartheta \qquad r_{(-)}r_{(+)} \approx r^2$

$$\Phi \approx \frac{qd\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\vartheta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{\mathbf{p}}\cdot\vec{\mathbf{u}}_r}{r^2}$$

- Se vogliamo il campo elettrico in coordinate sferiche occorre calcolare il **Grad(Φ) in coordinate sferiche**



(a)



(b)

Calcolo del campo di un dipolo usando i potenziali

- Il gradiente in coordinate sferiche è (Lo trovate in ogni testo di EM)

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\vec{\mathbf{u}}_\vartheta + \cancel{\frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\vec{\mathbf{u}}_\phi}$$

Poiché Φ non dipende da ϕ

$$\mathbf{E}(r,\vartheta) = -\nabla\Phi = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\vartheta\,\mathbf{u}_r + \sin\vartheta\,\mathbf{u}_\vartheta\right)$$

Quanto avevamo ottenuto in precedenza……

Nota: mentre il campo elettrico di una carica decresce con r come r^{-2}, il dipolo, a causa della seconda carica ha campo che decresce come r^{-3}

Energia Elettrostatica

Consideriamo l'energia elettrostatica di un sistema di 3 cariche puntiformi.

$$U_E = U_{123} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{23}}$$

Che puo’ essere scritto come

$$U_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} q_i \sum_{j=1}^{3} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{ij}} \quad \text{con i} \neq \text{j}$$

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{ij}}$$

Potenziale nel punto dove è posta la carica qi, dovuto a tutte le altre cariche

Generalizzando ad un sistema di N cariche possiamo scrivere

$$U_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \Phi_\text{i} \quad \text{con i} \neq \text{j}$$

Energia Elettrostatica

Possiamo generalizzare l'espressione ad una densità di carica per unità di volume

L'energia totale è data da:

$$U_E = \frac{1}{2}\int_V \rho \Phi dV$$

L'integrale può essere esteso a tutto lo spazio che circonda la distribuzione di carica, visto che il suo valore sarà sempre nullo al di fuori di essa

Per il teorema di Gauss in forma differenziale possiamo scrivere

$$U_E = \frac{1}{2}\int_V \left(\nabla \cdot \vec{D}\right)\Phi dV$$

Usando la relazione: $\nabla \cdot \left(\Phi \vec{D}\right) = \vec{D} \cdot \nabla \Phi + \Phi \nabla \cdot \vec{D}$

E applicando il teorema della divergenza otteniamo

$$U_E = \frac{1}{2}\oint_S \Phi \vec{D} \cdot d\vec{S} - \frac{1}{2}\int_V \vec{D} \cdot \nabla \Phi dV$$

Energia Elettrostatica

Il volume di integrazione è esteso all'infinito, dunque la superficie su cui calcolare il primo integrale è all'infinito

In questo caso $\frac{1}{2}\oint_{S_\infty} \Phi \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0$ Poiche' $\begin{cases} \Phi \propto \frac{1}{r}, \\ \mathrm{D} \propto \frac{1}{\mathrm{r}^2}, \ \mathrm{dS} \propto \mathrm{r}^2 \end{cases}$

Possiamo dunque scrivere $U_E = -\frac{1}{2}\int_V \vec{D} \cdot \nabla \Phi dV = \frac{1}{2}\int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV$

$$\frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2}\varepsilon \left|\vec{E}\right|^2$$

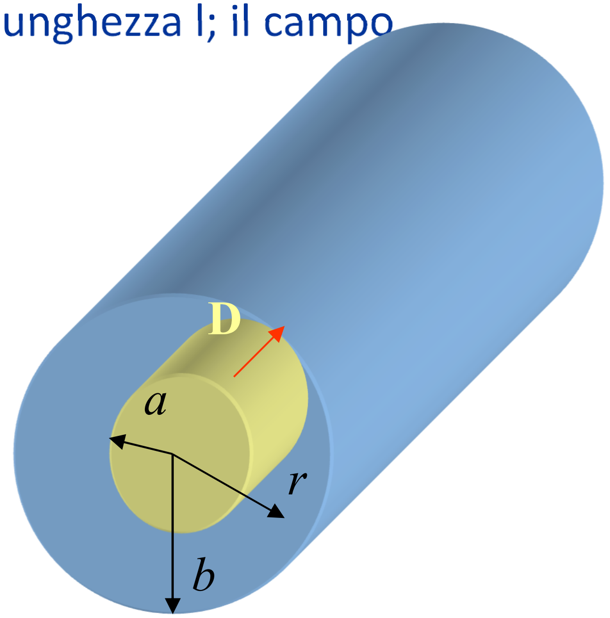
Densità di energia del campo elettrostatico per unità di volume [J/m^3]

Nota: L'energia è contenuta nel campo elettrico, ed è indipendente dal riferimento che adottiamo per definire il potenziale

Esercizio: Distribuzione di carica coassiale

Si supponga di avere un cavo coassiale infinitamente lungo, in cui il cilindro interno è uniformemente carico, con densità lineare di carica λ mentre quello esterno con densità $-\lambda$. Lo spazio tra i due cilindri è riempito da un mezzo con costante dielettrica ε. Si calcoli il campo tra i due conduttori.

- Si applica Gauss ad una superficie cilindrica intermedia *r* di lunghezza l; il campo elettrico è solo radiale



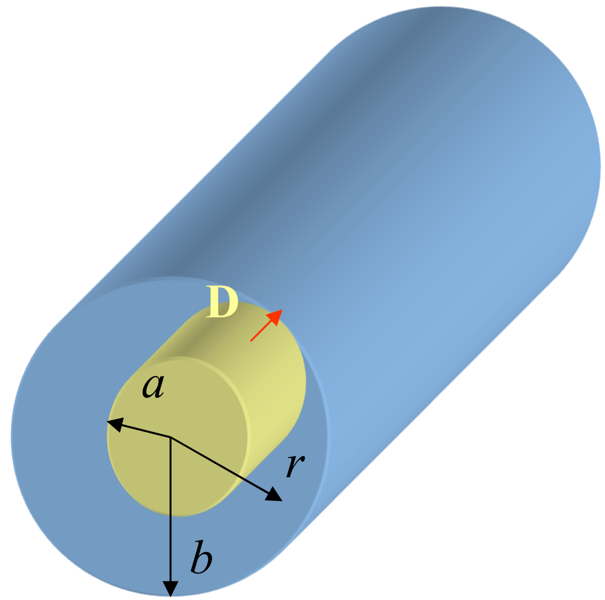
$$\Phi\left(\vec{\mathbf{D}}\right) = \oint_S ds\ \vec{\mathbf{D}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = Q$$

$$2\pi r l D_r = \lambda l$$

$$E_r = \frac{D_r}{\varepsilon} = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon}$$

Esercizio

- *Calcolare la differenza di potenziale tra due cilindri conduttori coassiali carichi, se il cilindro più interno è uniformemente carico con densità lineare di carica λ*



0

$$V(r) - V(rif) = -\int_{rif}^{r} E_r dr = -\int_{rif}^{r} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r} dr$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln(r) + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln(rif)$$

Esercizio (continuo)

$$V(a) - V(b) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

- Come vediamo la differenza di potenziale NON dipende dal punto di riferimento scelto.

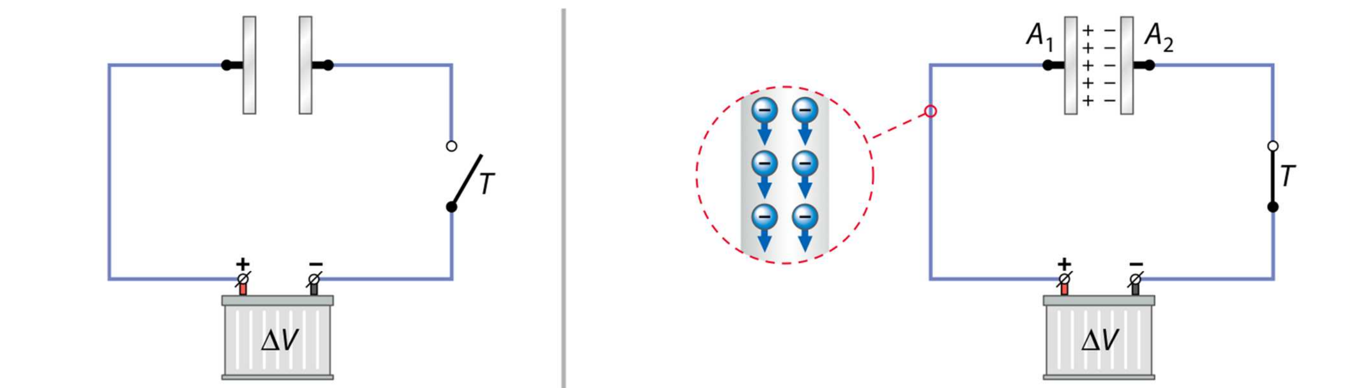
- In questo caso conviene prendere come riferimento il potenziale su uno dei due conduttori e non il potenziale all'infinito come nel caso della carica puntiforme

I condensatori

Condensatore: Due **conduttori** (**armature**) separati da un **isolante** (**dielettrico**)

Viene **caricato** da un generatore che stabilisce una d.d.p. tra le armature

In ogni istante le quantità di **carica** sulle due armature sono **uguali e opposte**



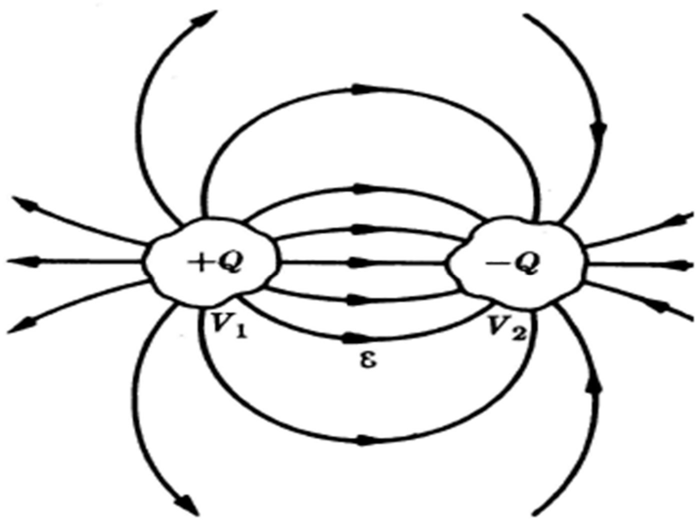
a Per caricare un condensatore, si collegano le armature ai poli di una batteria.

b Chiudendo l'interruttore, la batteria sposta elettroni da un'armatura all'altra del condensatore; le due armature si caricano di segno opposto.

Capacità tra due conduttori

Si chiama capacità fra due conduttori la carica Q che è necessario trasferire da un conduttore all'altro per avere una variazione unitaria della differenza di potenziale ΔV fra di loro.

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$



Condensatore piano

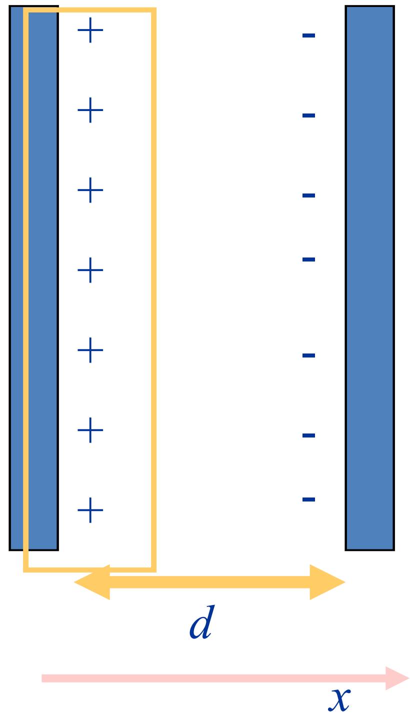
- Calcoliamo la capacità per il caso di due lamine affacciate, di area S e distanziate *d*. Consideriamo che all'interno del condensatore il campo è praticamente uniforme, come nel caso di lamine infinitamente estese.

Applicando il Teorema di Gauss:

$$Q = \sigma S \qquad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_x S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta V = -\int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_x d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

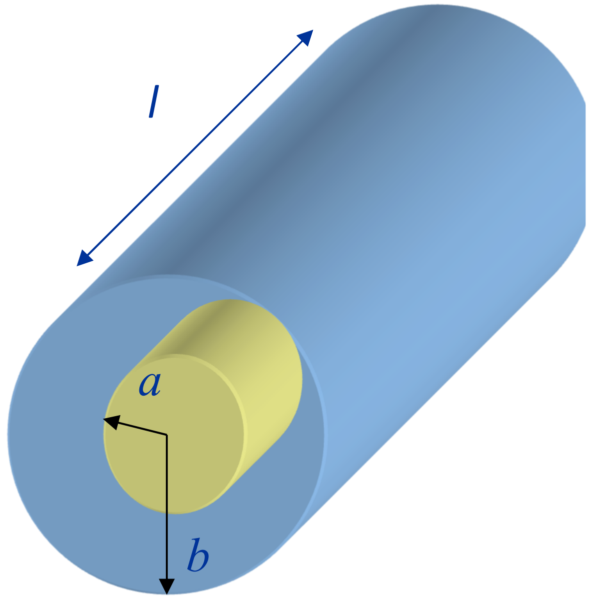
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$



I condensatori sono dei dispositivi che all'interno di un circuito elettrico permettono di accumulare energia elettrica in modo controllato

Capacità di un tratto di cavo coassiale

- Consideriamo un tratto di coassiale di lunghezza *l*



  - Avevamo calcolato che

$$V(a)-V(b)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

- Considerando che Q=λ*l* otteniamo

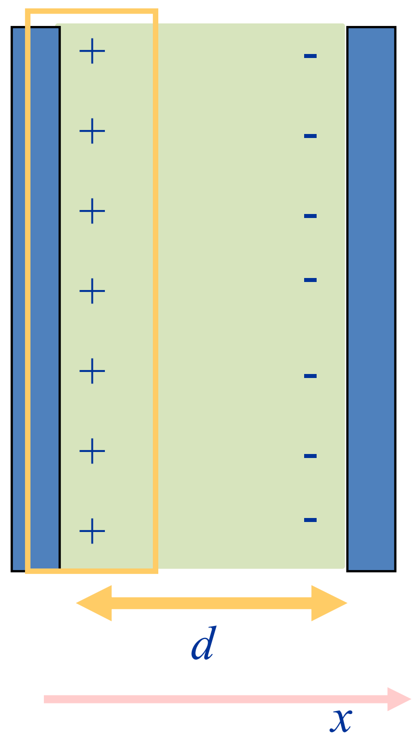
$$C=\frac{Q}{V(a)-V(b)}=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Dielettrici dentro ad un condensatore

Supponiamo di inserire un materiale dielettrico tra le armature di un condensatore.

Ricordiamo che un dielettrico (isolante) se sottoposto ad un campo elettrico modifica le caratteristiche del campo al suo interno, a causa dei fenomeni di polarizzazione.

$$D_x = \sigma \Rightarrow E_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$



Valgono le stesse relazione viste finora, con la sostituzione di ε_0 con $\varepsilon_0\varepsilon_r$

$$C = \varepsilon \frac{A}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} = \varepsilon_r C_0 > C_0$$

A parità di dimensioni si ottengono condensatori con capacità più grandi

Rigidità dielettrica

Il limite alla carica accumulabile su un condensatore dipende dalla forma dei conduttori, e dal mezzo in cui sono immersi

$$Q = CV = \frac{\varepsilon_0 A}{d} V$$

Condensatore a piatti piani e paralleli

Se aumenta la differenza di potenziale tra le armature, aumenta la carica accumulata su di esse.

Esiste pero' un limite all'aumento di V legato al massimo campo elettrico sopportabile da un dielettrico (chiamato rigidità dielettrica).

Se E cresce troppo, gli elettroni degli atomi vengono strappati dal nucleo e dunque si ha una scarica elettrica e il dielettrico si danneggia

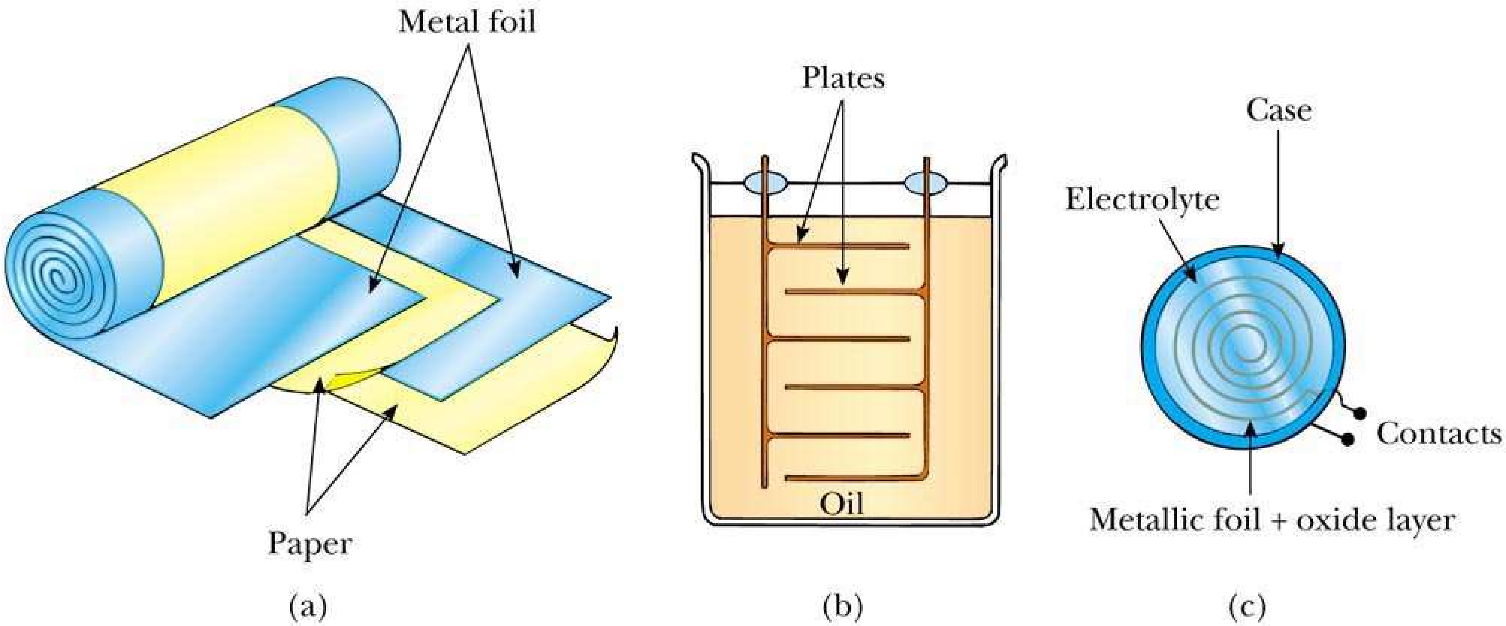
Ogni dielettrico ha il suo valore di rigidità dielettrica

Costanti dielettriche e rigidita' dielettrica

La rigidita' dielettrica (o campo di rottura) e' il massimo campo elettrico sopportabile da un mezzo senza che avvenga passaggio di corrente (tipicamente, una scintilla)

Materiale	**Costante dielettrica** ε_r	**Rigidita' dielettrica (V/m)**
Vuoto	1.0000	-
Aria (1 atm)	1.0006	$3 \cdot 10^6$
Vinile/plastica	2 – 4	$50 \cdot 10^6$
Carta	3.7	$15 \cdot 10^6$
Olio	4	$12 \cdot 10^6$
Vetro	5	$14 \cdot 10^6$
Gomma (neoprene)	6.7	$12 \cdot 10^6$
Acqua (liquida)	80	-
Titanato di stronzio	300	$8 \cdot 10^6$

Progettazione di condensatori



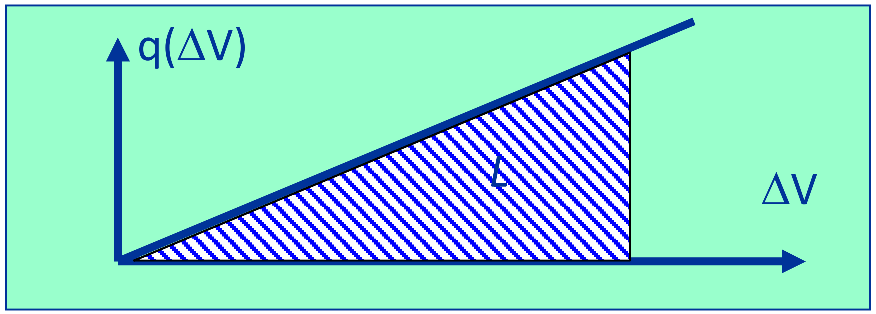
(a) Condensatori di carta
(b) Condensatori ad olio ad alta tensione
(c) Condensatori elettrolitici (basse tensioni, ma grandi capacita')

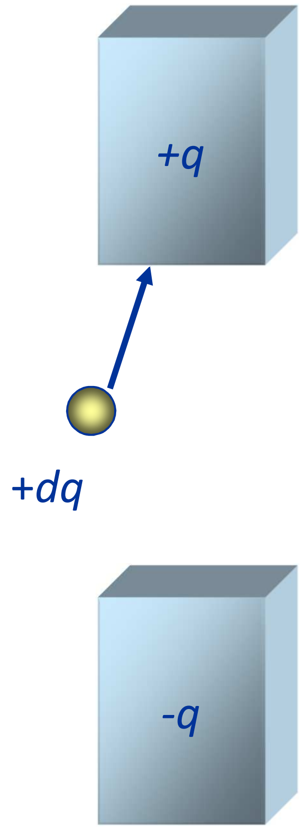
Energia di carica di un condensatore

Caricando un condensatore compiamo un lavoro dovendo contrastare le forze del campo che si instaura a causa del conduttore carico: questo campo crescerà con il crescere della carica sul conduttore:

$$dL = \Delta V'\,dq = \frac{q}{C}\,dq$$

$$L = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Q\Delta V = \frac{1}{2}C\Delta V^2$$

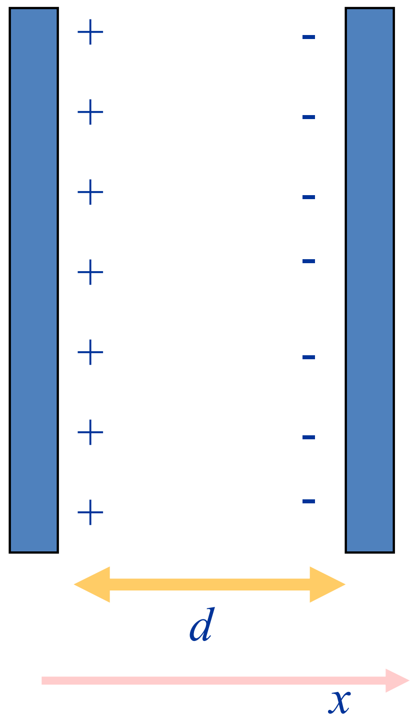




Energia di carica di un condensatore

Supponiamo di avere un condensatore a piani piatti e paralleli di area A e distanti d

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\hat{x}$$ Uniforme all'interno del condensatore



$$\Delta V = V = E_x d \qquad C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Calcoliamo l'energia elettrostatica immagazzinata da questo campo all'interno del condensatore

$$U_E = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 \left|\vec{E}\right|^2 dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 A d =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 E^2 A d^2}{d} = \frac{1}{2} C \Delta V^2$$

Coincide esattamente con il lavoro necessario a caricare il condensatore