Onda stazionaria viaggiante

Dominio dei fasori

$$V(z) = V^{+}\left(1-\rho(0)\right)e^{-j\beta z} + 2V^{+}\rho(0)\cos\beta z$$

$$I(z) = \frac{V^{+}}{Z_0}\left(1-\rho(0)\right)e^{-j\beta z} - \frac{2jV^{+}}{Z_0}\rho(0)\sin\beta z$$

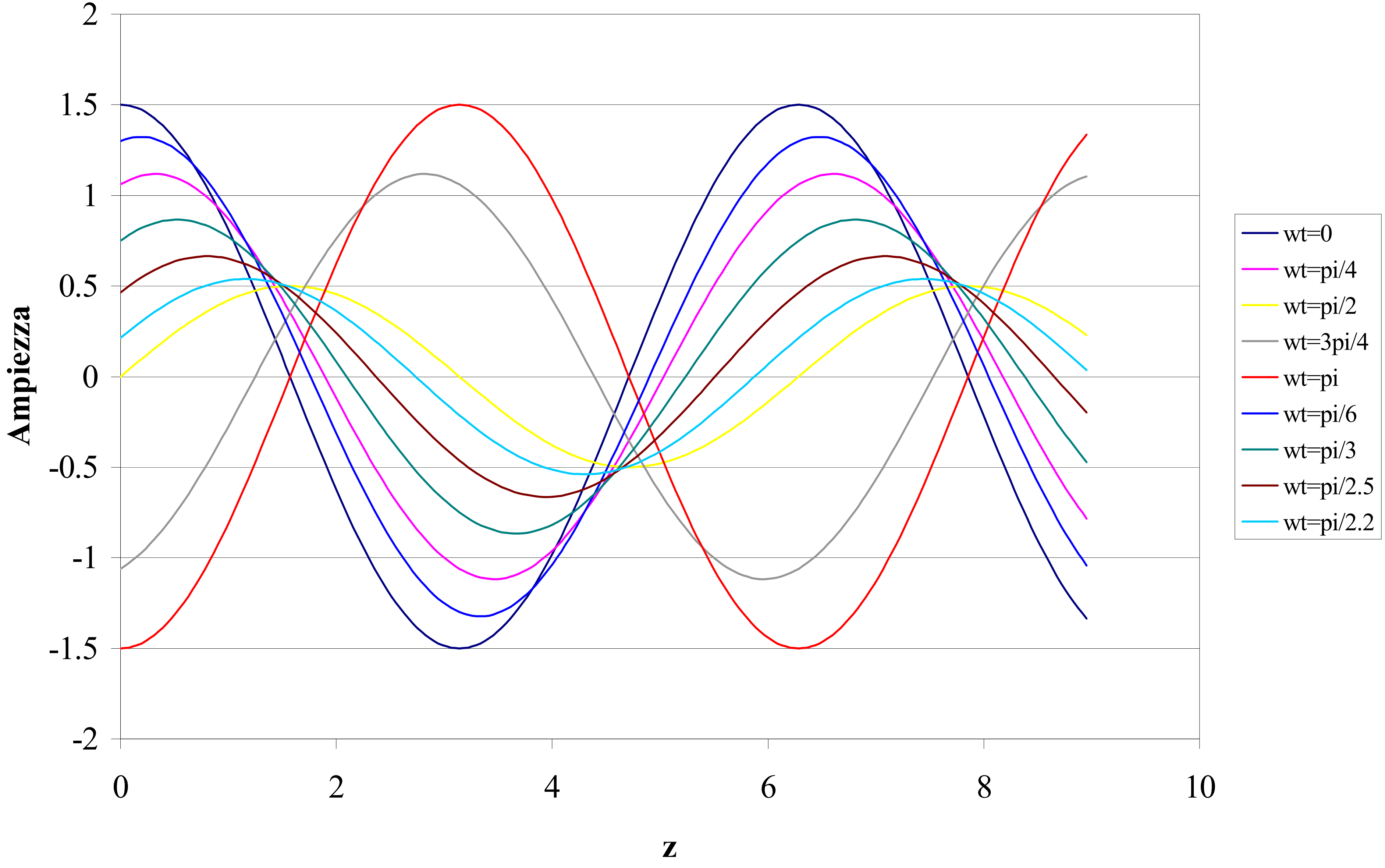
Dominio del tempo

$$V(z) = V^{+}\left(1-\rho(0)\right)\cos(\omega t-\beta z) + 2V^{+}\rho(0)\cos\beta z\cos(\omega t)$$

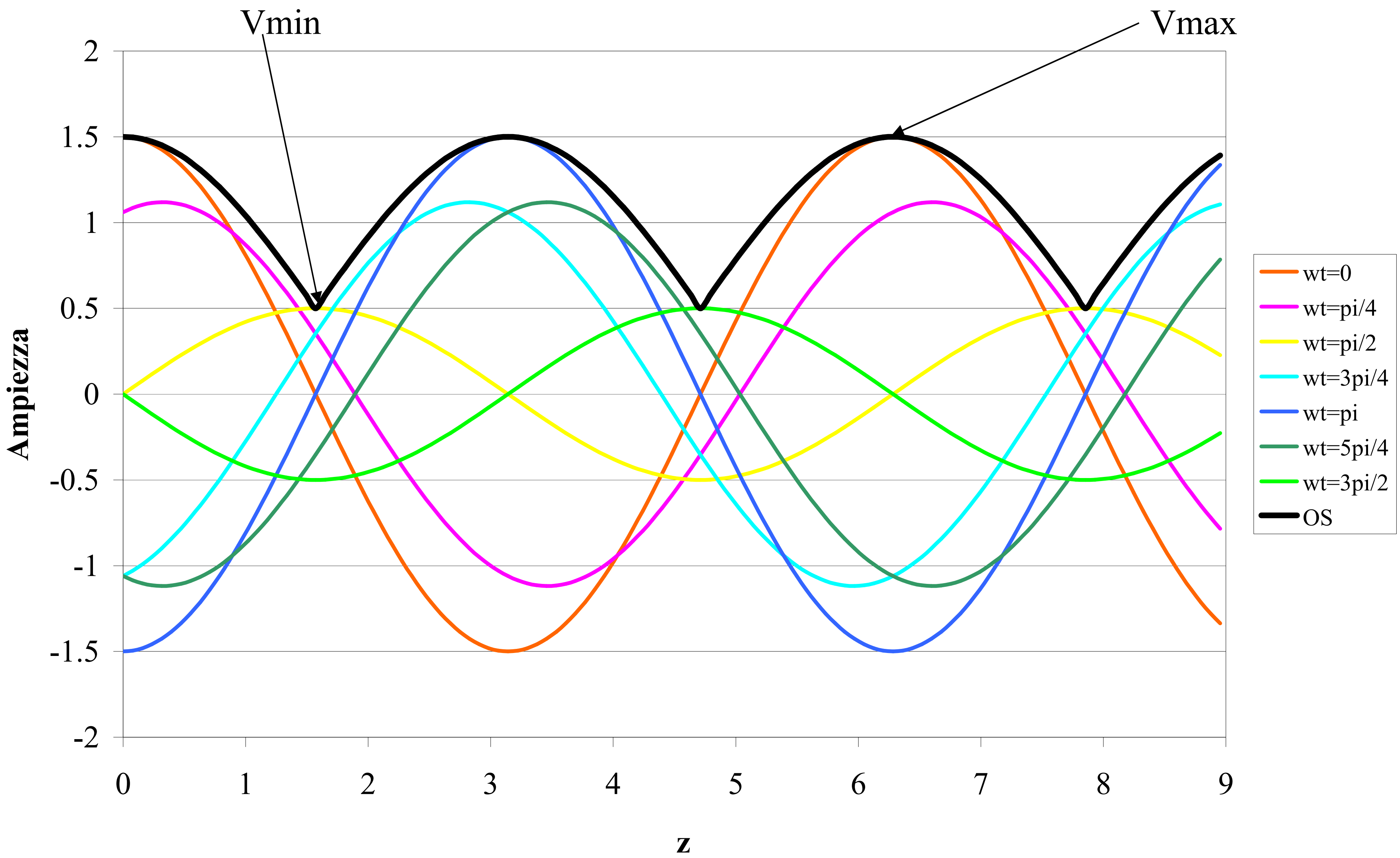
ES: $V^{+} = 1 \qquad \rho(0) = 0.5$

$$V(z) = 0.5\cos(\omega t-\beta z) + \cos\beta z\cos(\omega t)$$

Onda stazionaria viaggiante



Onda stazionaria viaggiante



Il rapporto d'onda stazionaria

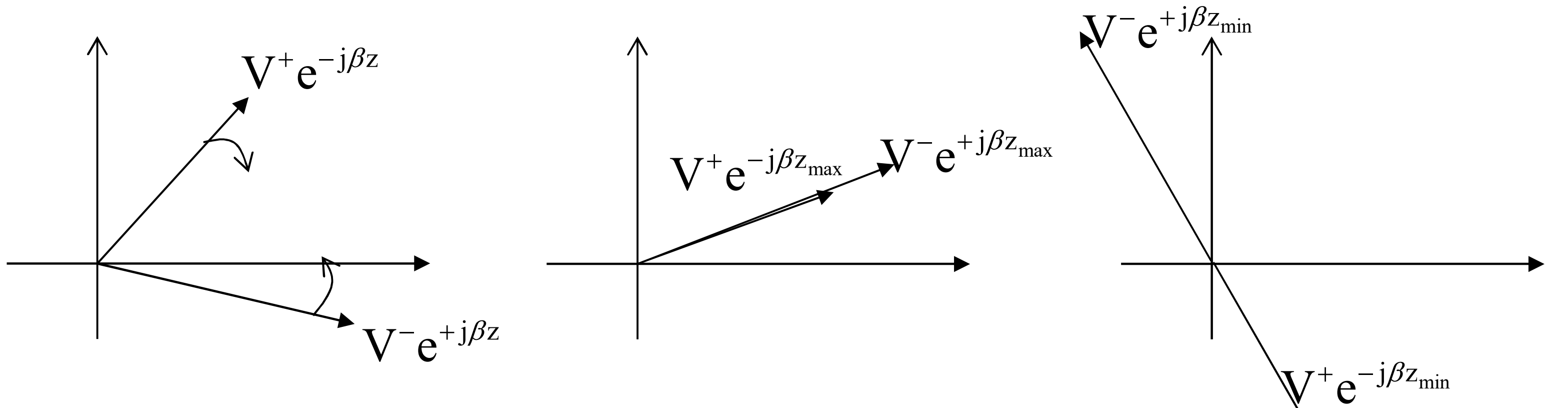
- Quando ci sono onde progressive e regressive, in alcuni punti interferiranno in modo costruttivo, ed in altri in modo distruttivo

- Daranno quindi origine a massimi in caso di interferenza costruttiva, cioè quando per $v^+ e^{-j\beta z}$ e $v^- e^{j\beta z}$ sono in fase; in tal caso avremo un massimo di tensione

$$V_{max} = \left|V^+\right| + \left|V^-\right|$$

- Viceversa avremo un minimo quando sono in controfase

$$V_{min} = \left|V^+\right| - \left|V^-\right|$$



Fasori onde viaggianti Vmax Vmin

Il rapporto d'onda stazionaria

- Il rapporto tra la massima e la minima tensione si definisce Rapporto d'Onda Stazionaria (ROS, o VSWR, voltage standing wave ratio)

$$S = \mathrm{VSWR} \triangleq \frac{\left|V(z)\right|_{\max}}{\left|V(z)\right|_{\min}} = \frac{\left|V^+\right| + \left|V^-\right|}{\left|V^+\right| - \left|V^-\right|} = \frac{1+\left|\rho(0)\right|}{1-\left|\rho(0)\right|}$$

$$0 \le \left|\rho(0)\right| \le 1$$

$$1 \le \mathrm{VSWR} \le \infty$$

- Dove le onde di tensione sono in fase, quelle di corrente sono in controfase e viceversa (c'è un segno meno nella sovrapposizione delle correnti, ricordate?)

  - In pratica in ogni punto in cui la tensione totale vale V_{max}, la corrente è I_{min} e viceversa

Il rapporto d’onda stazionaria

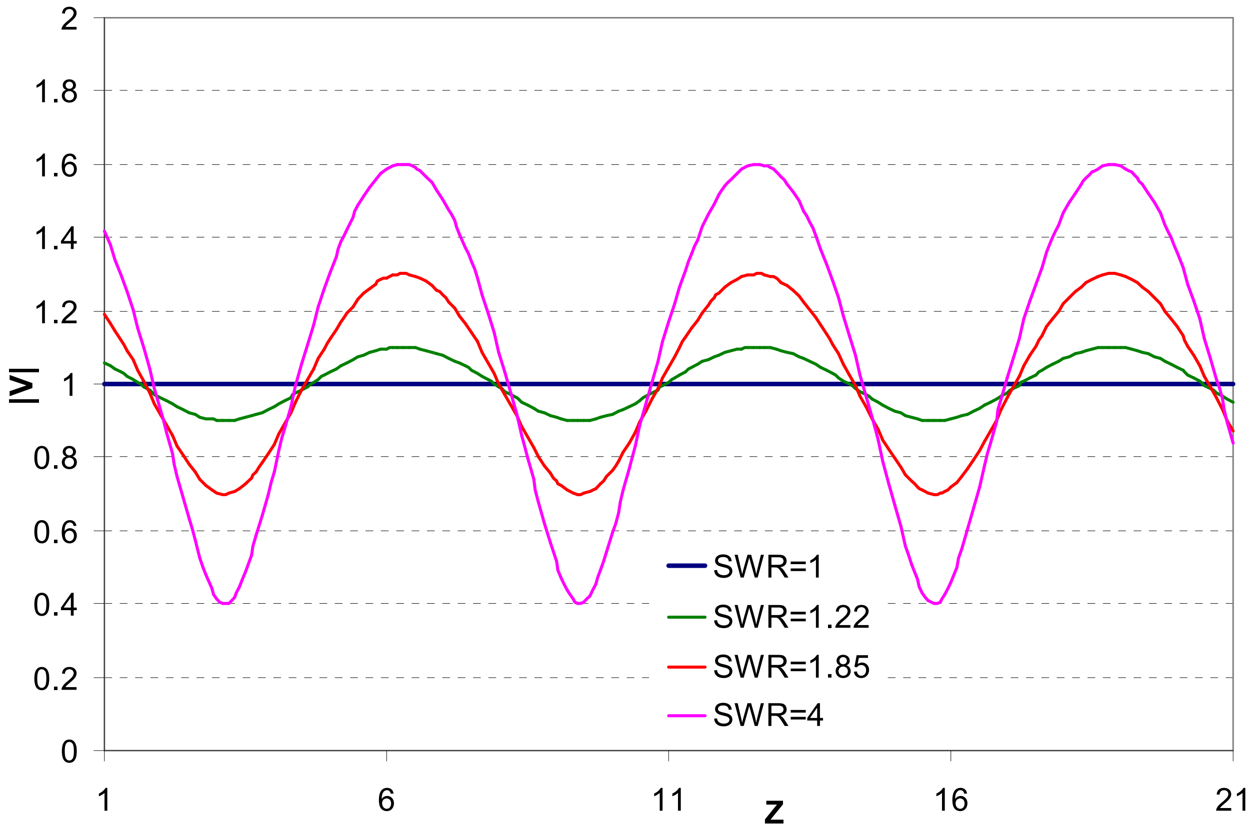
- Se la tensione è massima e la corrente è minima, il loro rapporto è massimo: in quel punto l’impedenza di ingresso calcolata è massima e reale

$$Z_{\max} = \frac{V_{\max}}{I_{\min}} = \frac{\left|v^{+}\right| + \left|v^{-}\right|}{\dfrac{\left|v^{+}\right|}{Z_0} - \dfrac{\left|v^{-}\right|}{Z_0}} = Z_0 S$$

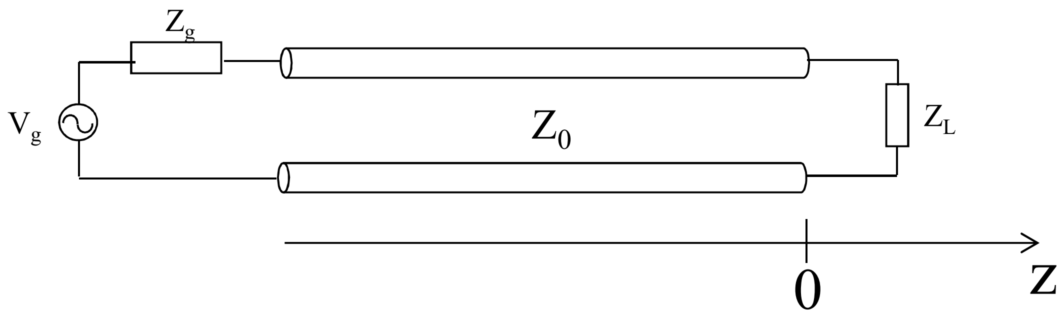
- Viceversa, nei punti di minimo di tensione l’impedenza è minima

$$Z_{\min} = \frac{V_{\min}}{I_{\max}} = \frac{\left|v^{+}\right| - \left|v^{-}\right|}{\dfrac{\left|v^{+}\right|}{Z_0} + \dfrac{\left|v^{-}\right|}{Z_0}} = \frac{Z_0}{S}$$

Ampiezza della tensione lungo una linea per diversi valori di ROS



Posizione massimi e minimi



$$V_{inc} = V^+ e^{-j\beta z} \qquad V_{rif} = V^- e^{j\beta z} = V^+ \rho e^{j\beta z} = V^+ |\rho| e^{j\varphi_L} e^{j\beta z}$$

Massimi ⟶ V_{inc} e V_{rif} sono in fase ⟶ $-\beta z = \varphi_L + \beta z + 2N\pi$

Minimi ⟶ V_{inc} e V_{rif} sono in opposizione di fase ⟶ $-\beta z = \varphi_L + \beta z + (2N+1)\pi$

Massimi ⟶ $z = -\left(\frac{\varphi_L}{4\pi} + \frac{N}{2}\right)\lambda$

Minimi ⟶ $z = -\left(\frac{\varphi_L}{4\pi} + \frac{2N+1}{4}\right)\lambda$

Potenza in una linea 1/3

Consideriamo una linea di impedenza caratteristica Z_0 chiusa su di un carico Z_L. Le espressioni della tensione e della corrente sono:

$$V(z) = V^{+}e^{-j\beta z} + V^{-}e^{j\beta z} = V^{+}\left(e^{-j\beta z} + \rho_L e^{j\beta z}\right) = V^{+}\left(e^{-j\beta z} + |\rho_L| e^{j\varphi_L} e^{j\beta z}\right)$$

$$I(z) = \frac{V^{+}e^{-j\beta z}}{Z_0} - \frac{V^{-}e^{j\beta z}}{Z_0} = \frac{V^{+}}{Z_0}\left(e^{-j\beta z} - \rho_L e^{j\beta z}\right) = \frac{V^{+}}{Z_0}\left(e^{-j\beta z} - |\rho_L| e^{j\varphi_L} e^{j\beta z}\right)$$

La potenza complessa N trasportata lungo la linea vale:

$$N(z) = P(z) + jQ(z) = \frac{1}{2} V(z) I^{*}(z)$$

$$= \frac{1}{2} V^{+}\left(e^{-j\beta z} + |\rho_L| e^{j\varphi_L} e^{j\beta z}\right)\left(\frac{V^{+}}{Z_0}\right)^{*}\left(e^{-j\beta z} - |\rho_L| e^{j\varphi_L} e^{j\beta z}\right)^{*}$$

Potenza in una linea 2/3

La potenza complessa N trasportata lungo la linea vale:

$$N(z) = \frac{1}{2} V(z) I^*(z) = \frac{\left|V^+\right|^2}{2Z_0} \left(e^{-j\beta z} + \left|\rho_L\right| e^{j\varphi_L} e^{j\beta z}\right)\left(e^{j\beta z} - \left|\rho_L\right| e^{-j\varphi_L} e^{-j\beta z}\right) =$$

$$= \frac{\left|V^+\right|^2}{2Z_0} \left[1 - \left|\rho_L\right|^2 + \left|\rho_L\right| \left(e^{j\varphi_L} e^{2j\beta z} - e^{-j\varphi_L} e^{2j\beta z}\right)\right] =$$

$$= \frac{\left|V^+\right|^2}{2Z_0} \left[1 - \left|\rho_L\right|^2 + 2j\left|\rho_L\right| \sin\left(\varphi_L + 2\beta z\right)\right] = P + jQ$$

Potenza in una linea 3/3

La potenza complessa N trasportata lungo la linea vale:

$$P = \frac{|V^+|^2}{2Z_0}\left[1 - |\rho_L|^2\right] = \frac{|V^+|^2}{2Z_0} - \frac{|V^-|^2}{2Z_0} = P^+ - P^- \qquad \text{costante in ogni sezione}$$

$$Q(z = -L) = |V^+|^2 \frac{|\rho_L|}{Z_0} \sin\left(\varphi_L - 2\beta L\right)$$

Quindi, la potenza attiva rimane costante lungo la linea, mentre quella reattiva varia lungo di essa, mostrando che c'è un continuo scambio di energia reattiva tra la parte induttiva e quella capacitiva della linea.

Esempi: carico adattato

Si definisce carico adattato una impedenza di carico di valore uguale all'impedenza caratteristica della linea a cui è collegato:

$$Z_L = Z_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \rho_L = \dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(-L) = \rho_L e^{-2j\beta L} = 0 \\ Z_{ing} = Z_0 \dfrac{Z_L \cos(\beta L) + jZ_0 \sin(\beta L)}{Z_0 \cos(\beta L) + jZ_L \sin(\beta L)} = Z_0 \end{cases}$$

Se il carico è adattato alla linea, non vi sono onde riflesse e l'impedenza di ingresso coincide sempre con l'impedenza caratteristica (=impedenza di carico) in ogni sezione della linea. La potenza complessa vale:

$$P = \frac{\left|V^+\right|^2}{2Z_0} = P^+ \quad Q = 0$$

Tutta la potenza attiva che entra all'ingresso della linea associata all'onda progressiva giunge interamente sul carico. Non c'è potenza reattiva.

Esempi: carico disadattato reale 1/2

$$Z_L = R_L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \rho_L = \dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \in \Re \quad \Rightarrow \quad \rho(-L) = \pm|\rho_L| e^{-2j\beta L} \\ Z_{ing} = Z_0 \dfrac{Z_L \cos(\beta L) + jZ_0 \sin(\beta L)}{Z_0 \cos(\beta L) + jZ_L \sin(\beta L)} = R_{ing} + jX_{ing} \end{cases}$$

In questo caso, il coefficiente di riflessione sul carico è puramente reale (positivo o negativo), mentre l'impedenza di ingresso è una quantità complessa. La potenza complessa vale:

$$P = \frac{|V^+|^2}{2Z_0}\left[1 - |\rho_L|^2\right] = P^+ - P^- \quad Q(z = -L) = \mp |V^+|^2 \frac{|\rho_L|}{Z_0} \sin(2\beta L)$$

Esempi: carico disadattato reale 2/2

$$P = \frac{\left|V^+\right|^2}{2Z_0}\left[1 - \left|\rho_L\right|^2\right] = P^+ - P^- \qquad Q(z=-L) = \mp\left|V^+\right|^2 \frac{\left|\rho_L\right|}{Z_0}\sin\left(2\beta L\right)$$

La potenza attiva che entra all'ingresso della linea associata all'onda progressiva giunge sul carico e viene parzialmente riflessa.
La potenza attiva totale presente in una generica sezione della linea è pari alla differenza tra la potenza associata all'onda progressiva e quella associata all'onda regressiva.
In questo caso è presente anche una potenza reattiva che varia lunga la linea oscillando tra valori induttivi a capacitivi e viceversa. Si osservi che la potenza reattiva sul carico è nulla.

Esempi: carico nullo – corto circuito 1/2

$$Z_L = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \rho_L = \dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = -1 \quad \Rightarrow \quad \rho(-L) = -e^{-2j\beta L} \\ Z_{ing} = Z_0 \dfrac{Z_L \cos(\beta L) + jZ_0 \sin(\beta L)}{Z_0 \cos(\beta L) + jZ_L \sin(\beta L)} = jZ_0 \tan(\beta L) \end{cases}$$

Se il carico è un corto circuito, l'onda riflessa sul carico è pari all'opposto dell'onda incidente e l'impedenza di ingresso è sempre puramente immaginaria in ogni sezione della linea. La potenza complessa vale:

$$P = \frac{\left|V^+\right|^2}{2Z_0}\left[1 - \left|\rho_L\right|^2\right] = 0 \Rightarrow P^- = -P^+ \quad Q(z = -L) = \left|V^+\right|^2 \frac{\sin(\varphi_L - 2\beta L)}{Z_0}$$

Tutta la potenza attiva che entra all'ingresso della linea associata all'onda progressiva viene completamente riflessa dal carico e la potenza attiva fornita al carico è nulla (come del resto deve avvenire per un corto circuito). Nella linea è presente soltanto potenza reattiva.

Esempi: carico nullo – corto circuito 2/2

[APPLET: onda stazionaria da un corto circuito](http://www.falstad.com/circuit/e-tlstand.html)

http://www.falstad.com/circuit/e-tlstand.html

Esempi: carico infinito – circuito aperto

$$Z_L = \infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \rho_L = \dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho(-L) = e^{-2j\beta L} \\ Z_{ing} = Z_0 \dfrac{Z_L \cos(\beta L) + jZ_0 \sin(\beta L)}{Z_0 \cos(\beta L) + jZ_L \sin(\beta L)} = -j\dfrac{Z_0}{\tan(\beta L)} \end{cases}$$

Se il carico è un circuito aperto, l'onda riflessa sul carico è pari all'onda incidente e l'impedenza di ingresso è sempre puramente immaginaria in ogni sezione della linea. La potenza complessa vale:

$$P = \frac{\left|V^+\right|^2}{2Z_0}\left[1 - \left|\rho_L\right|^2\right] = 0 \Rightarrow P^- = -P^+ \quad Q(z = -L) = \left|V^+\right|^2 \frac{\sin(\varphi_L - 2\beta L)}{Z_0}$$

Tutta la potenza attiva che entra all'ingresso della linea associata all'onda progressiva viene completamente riflessa dal carico e la potenza attiva fornita al carico è nulla (come del resto deve avvenire per un circuito aperto). Nella linea è presente soltanto potenza reattiva.

Esempi: carico disadattato immaginario 1/2

$$Z_L = jX_L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \rho_L = \dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = e^{j\varphi_L} \quad \Rightarrow \quad \rho(-L) = e^{j\varphi_L} e^{-2j\beta L} \quad \left|\rho(-L)\right| = 1 \\ Z_{ing} = Z_0 \dfrac{Z_L \cos(\beta L) + jZ_0 \sin(\beta L)}{Z_0 \cos(\beta L) + jZ_L \sin(\beta L)} = jX_{ing} \end{cases}$$

In questo caso, il coefficiente di riflessione sul carico è dotato di modulo unitario, mentre l'impedenza di ingresso è una quantità puramente immaginaria. La potenza complessa vale:

$$P = \frac{\left|V^+\right|^2}{2Z_0}\left[1 - \left|\rho_L\right|^2\right] = 0 \Rightarrow P^- = -P^+$$

$$Q(z = -L) = \left|V^+\right|^2 \frac{\sin(\varphi_L - 2\beta L)}{Z_0} \quad Q(z = 0) = \left|V^+\right|^2 \frac{\sin(\varphi_L)}{Z_0}$$

Esempi: carico disadattato immaginario 2/2

$$P = \frac{\left|V^+\right|^2}{2Z_0}\left[1-\left|\rho_L\right|^2\right] = 0 \Rightarrow P^- = -P^+$$

$$Q(z=-L) = \left|V^+\right|^2 \frac{\sin\left(\varphi_L - 2\beta L\right)}{Z_0} \qquad Q(z=0) = \left|V^+\right|^2 \frac{\sin\left(\varphi_L\right)}{Z_0}$$

Tutta la potenza attiva che entra all'ingresso della linea associata all'onda progressiva viene completamente riflessa dal carico e la potenza attiva fornita al carico è nulla (come del resto deve avvenire per un carico puramente immaginario). Nella linea è presente soltanto potenza reattiva che oscilla tra valori capacitivi ed induttivi. Anche sul carico è presente una potenza reattiva.

Esempi: carico complesso 1/2

$$Z_L = R_L + jX_L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \rho_L = \dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = |\rho_L| e^{j\varphi_L} \quad \Rightarrow \quad \rho(-L) = |\rho_L| e^{j\varphi_L} e^{-2j\beta L} \\ Z_{ing} = Z_0 \dfrac{Z_L \cos(\beta L) + jZ_0 \sin(\beta L)}{Z_0 \cos(\beta L) + jZ_L \sin(\beta L)} = R_{ing} + jX_{ing} \end{cases}$$

In questo caso, il coefficiente di riflessione sul carico è una quantità complessa e l'impedenza di ingresso è una quantità complessa. La potenza complessa vale:

$$P = \frac{|V^+|^2}{2Z_0}\left[1 - |\rho_L|^2\right] = P^+ - P^-$$

$$Q(z=-L) = |V^+|^2 \frac{|\rho_L| \sin(\varphi_L - 2\beta L)}{Z_0} \qquad Q(z=0) = |V^+|^2 \frac{|\rho_L| \sin(\varphi_L)}{Z_0}$$

Esempi: carico complesso 2/2

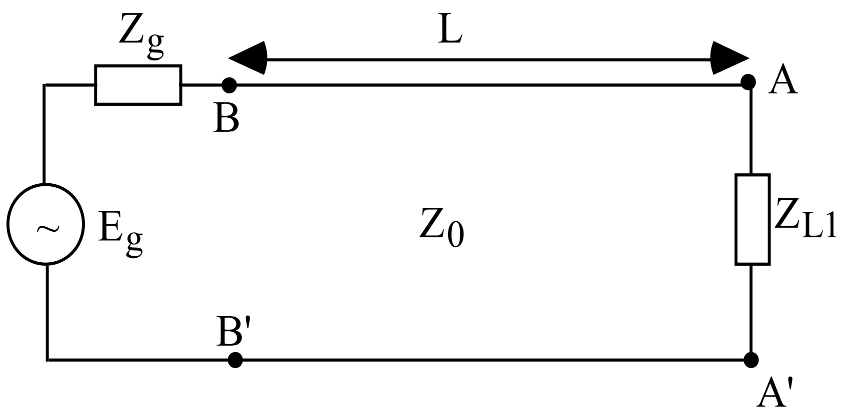
$$P = \frac{\left|V^+\right|^2}{2Z_0}\left[1 - \left|\rho_L\right|^2\right] = P^+ - P^-$$

$$Q(z=-L) = \left|V^+\right|^2 \frac{\left|\rho_L\right| \sin\left(\varphi_L - 2\beta L\right)}{Z_0} \qquad Q(z=0) = \left|V^+\right|^2 \frac{\left|\rho_L\right| \sin\left(\varphi_L\right)}{Z_0}$$

La potenza attiva che entra all'ingresso della linea associata all'onda progressiva giunge sul carico e viene parzialmente riflessa.
La potenza attiva totale presenta in una generica sezione della linea è pari alla differenza tra la potenza associata all'onda progressiva e quella associata all'onda regressiva.
In questo caso è presente anche una potenza reattiva che varia lunga la linea oscillando tra valori induttivi a capacitivi e viceversa. Si osservi che la potenza reattiva sul carico non è nulla in quanto il carico stesso è anche reattivo.

Esempi 1.1

E' dato il circuito mostrato in figura in cui Eg=1 Veff, L=1.7 λ, Zg=50 Ω, Z0=50 Ω, ZL1=100 + j 100 Ω .
Determinare la potenza attiva fornita al carico.



$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 0.538 + j0.307 \quad |\rho_L| e^{j\varphi_L} = 0.62 e^{j0.52}$$

Esempi 1.2

$$Z_{ing} = Z_0 \frac{Z_L \cos\left(2\pi \frac{L}{\lambda}\right) + jZ_0 \sin\left(2\pi \frac{L}{\lambda}\right)}{Z_0 \cos\left(2\pi \frac{L}{\lambda}\right) + jZ_L \sin\left(2\pi \frac{L}{\lambda}\right)} =$$

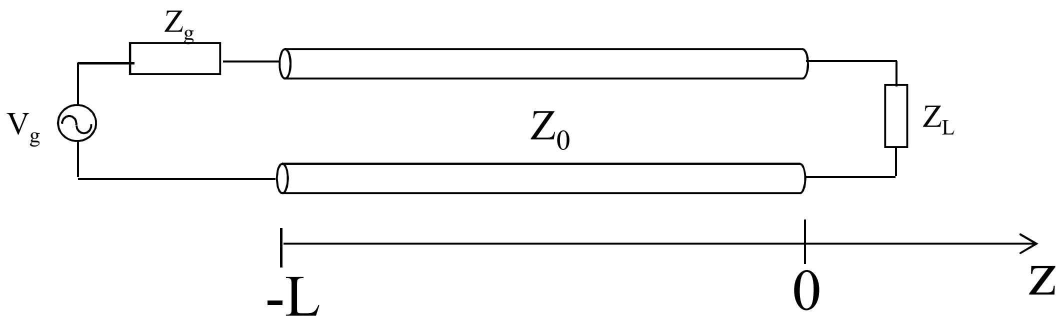
$$= Z_0 \frac{Z_L Z_0 + j\frac{Z_0^2 - Z_L^2}{2} \sin\left(4\pi \frac{L}{\lambda}\right)}{\left[Z_0 \cos\left(2\pi \frac{L}{\lambda}\right)\right]^2 + \left[Z_L \sin\left(2\pi \frac{L}{\lambda}\right)\right]^2} = 16.25 - j29.85 \quad \Omega$$

Poiché la linea è ideale, la potenza attiva fornita al carico coincide con la potenza attiva fornita all'impedenza di ingresso:

$$P_L = P_{ing} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[V_{ing} I_{ing}^*\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[Z_{ing} I_{ing} I_{ing}^*\right] = \frac{1}{2} R_{ing} \left|I_{ing}\right|^2$$

$$= \frac{1}{2} R_{ing} \left|\frac{E_g}{Z_g + Z_{ing}}\right|^2 = 1.54 \quad \mathrm{mW}$$

Coefficiente di trasmissione al carico



Definiamo il coefficiente di trasmissione al carico

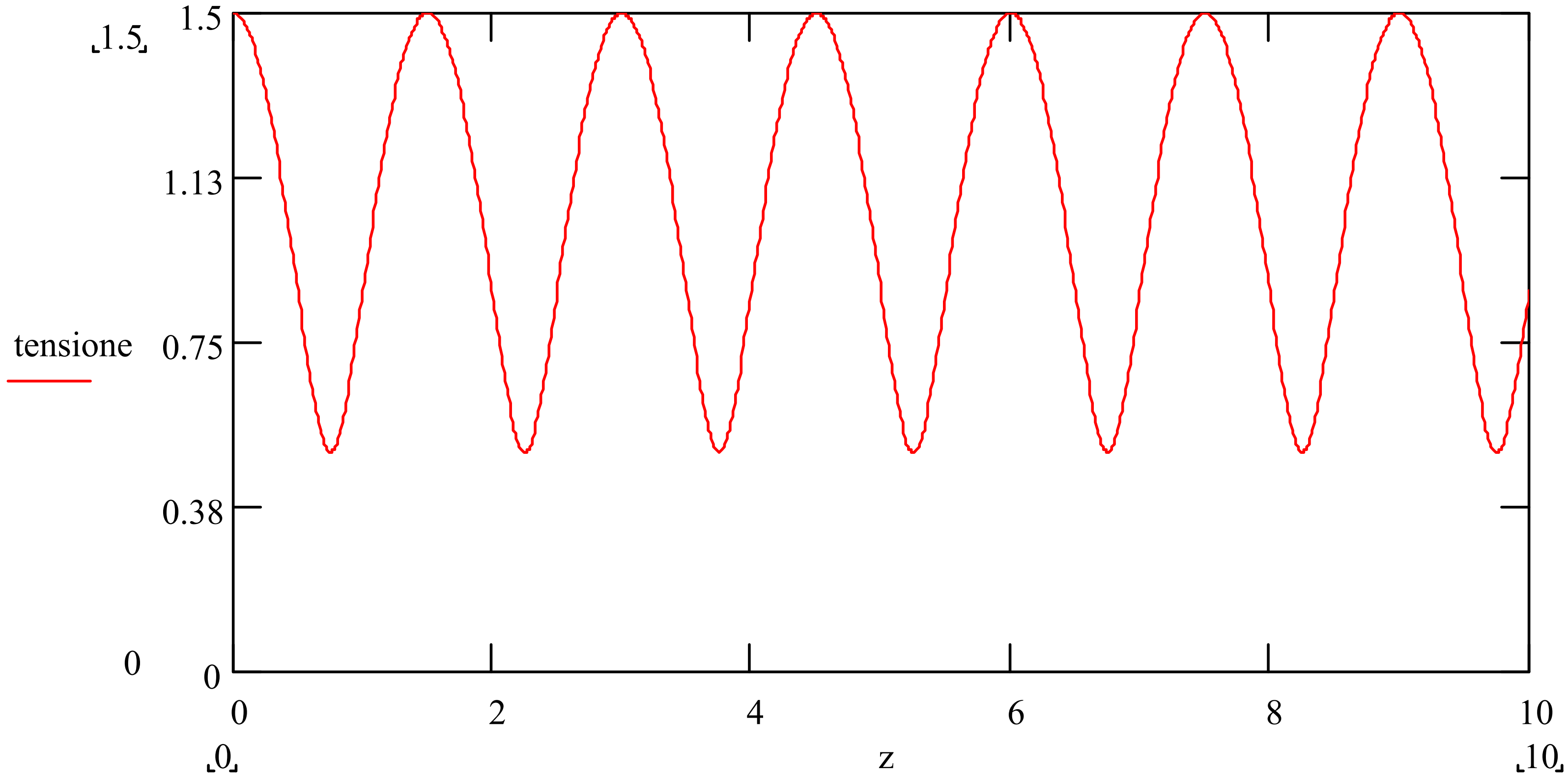
$$\tau(0) \triangleq \frac{V_L}{V^+(0)} = \frac{V^+ + V^-}{V^+} =$$

$$= 1 + \rho(0) = 1 + \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_0}$$

Linea di trasmissione

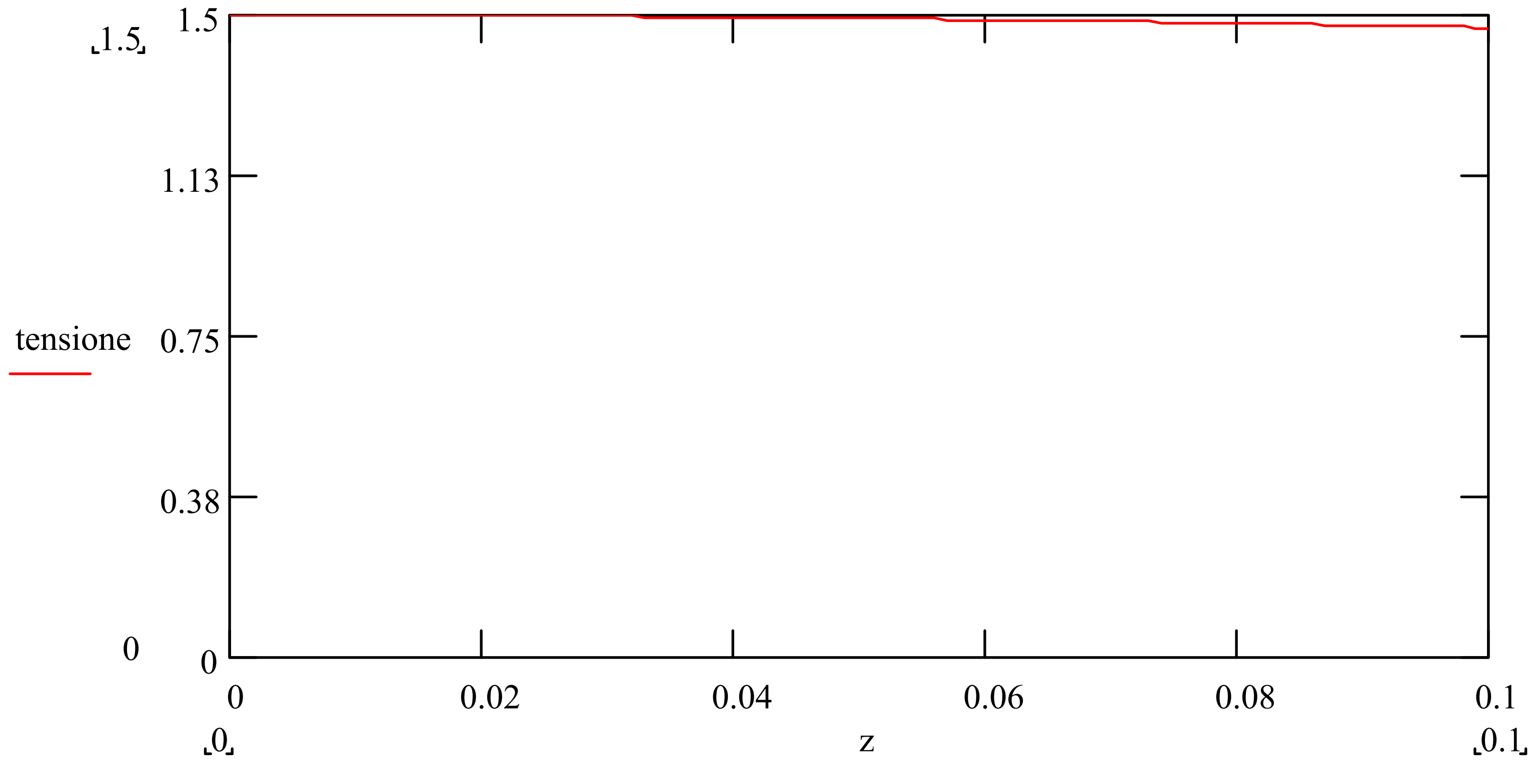
$$V(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^+ \rho(0) e^{j\beta z}$$

$V^+ = 1$ V $\quad \rho(0) = 0,5 \quad$ L=10 m $\quad$ freq=100 MHz



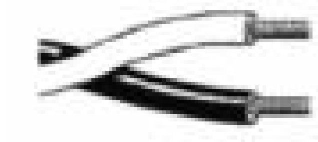
Linea di trasmissione (L<<λ)

$V^+ = 1\ \mathrm{V}$ $\rho(0) = 0,5$ L=10 cm freq=100 MHz

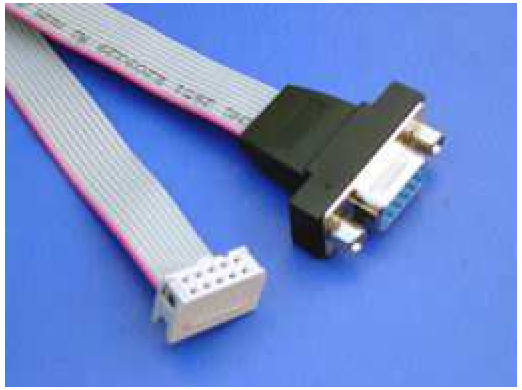


Che cosa è una linea di trasmissione

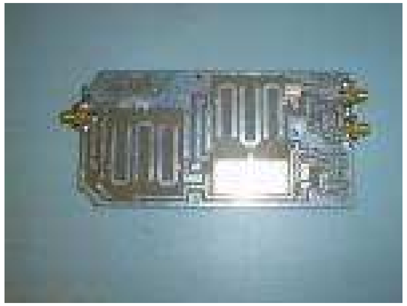
Cavo coassiale



Doppino intrecciato



Cavo a nastro



Microstriscie

Linee elettriche

APPLET

APPLET: una linea di trasmissione adattata
http://www.falstad.com/circuit/e-tl.html

APPLET: terminazione di una linea
http://www.falstad.com/circuit/e-tlterm.html

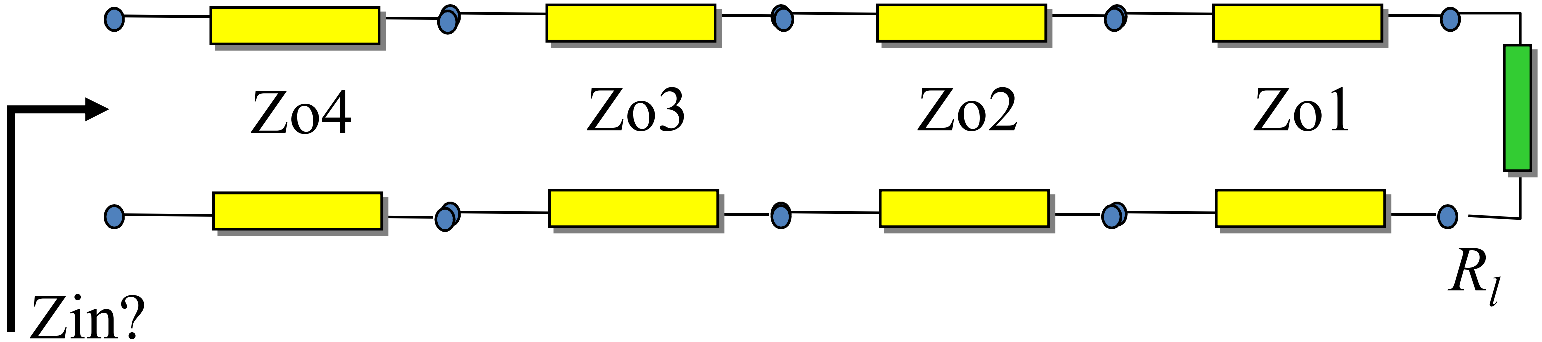
APPLET: tre tronchi di linea con impulsi
http://www.falstad.com/circuit/e-tlmismatch.html

APPLET: linea disadattata
http://www.amanogawa.com/archive/LoadResistance/LoadResistance.html

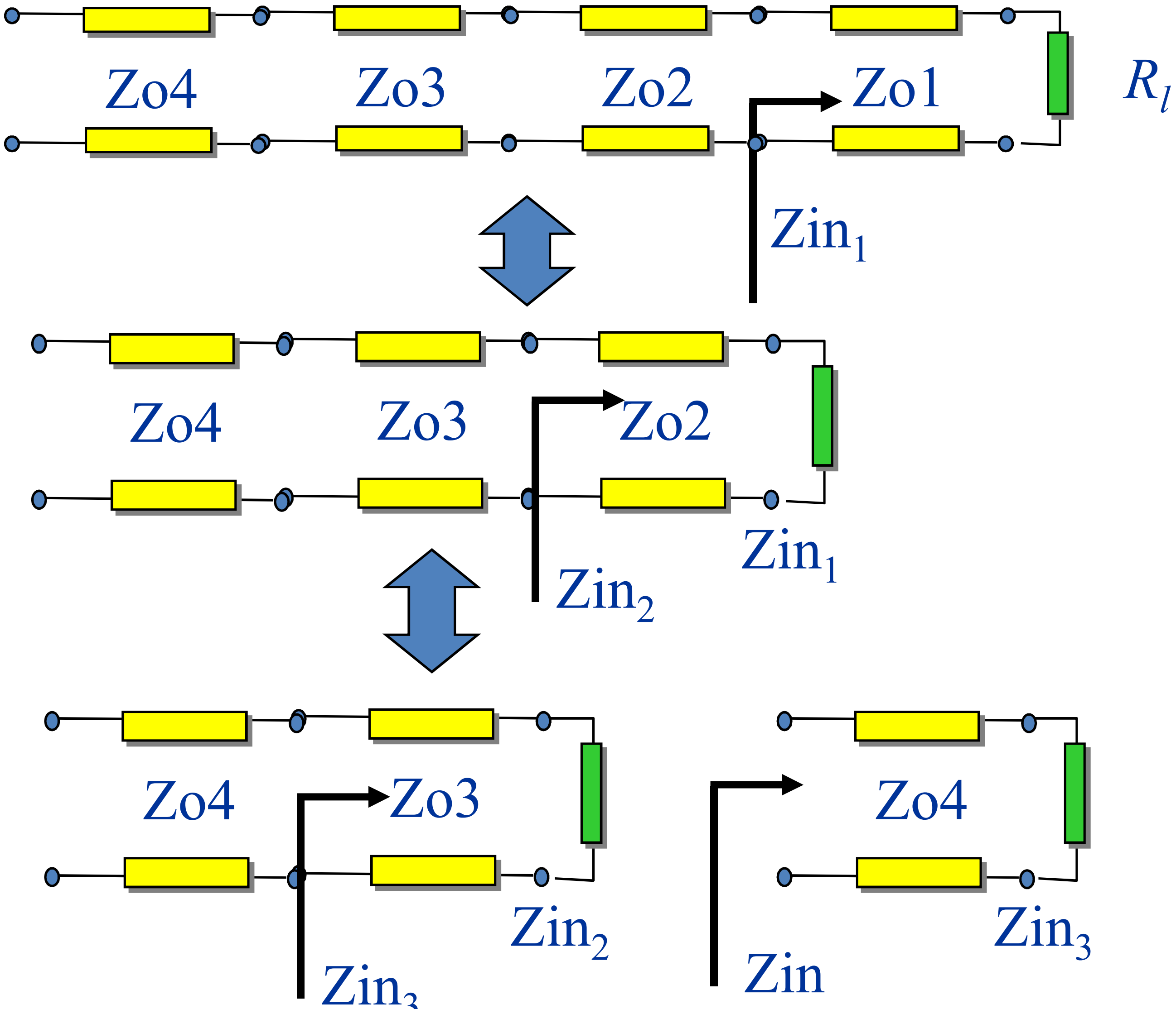
Calcoli con le linee

- Se una linea è semi-infinita, non ci sono onde regressive, e quindi onde stazionarie: al suo ingresso vediamo impedenza pari all’impedenza caratteristica

- Se abbiamo una cascata di linee, possiamo iterare il calcolo dell’impedenza di ingresso, ed utilizzarla come carico della sezione successiva



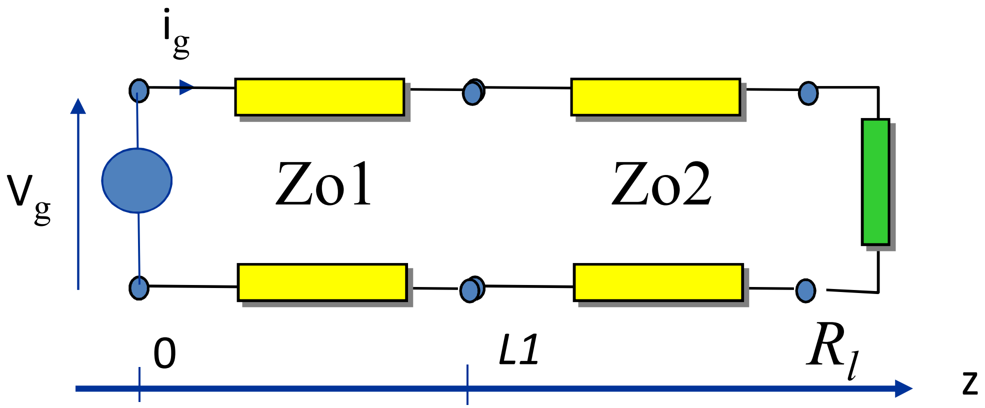
Calcoli con le linee



Questa è la Zin cercata!

Calcoli con le linee: esempio

- Se volessimo determinare l'andamento delle tensioni e correnti punto per punto? Occorre applicare le condizioni al contorno esplicitamente
- Un esempio: generatore di tensione, due linee in cascata ed un carico



- Se ci siamo calcolati z_{in} in z=0, come descritto in precedenza, da v_g sappiamo calcolare la corrente i_g, essendo $v_g = Z_{in}\, i_g$. Allora: condizioni al contorno in z=0

Calcoli con le linee: esempio

$$V(0)=V_g=V_1^+ + V_1^- \quad I(0)=i_g=\left(V_1^+ - V_1^-\right)/Z_{01}=V_g/Z_{in1}$$

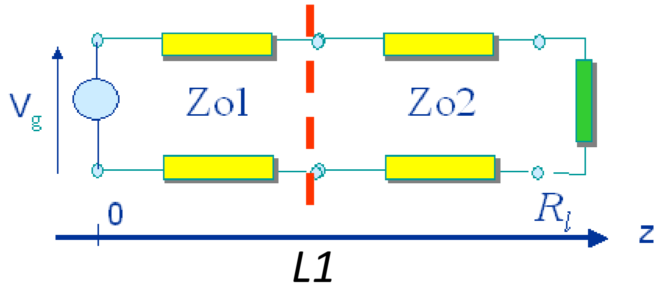
- Da cui

$$V_1^+ = \frac{V_g}{2}\left(1+\frac{Z_{01}}{Z_{in1}}\right) \quad V_1^- = \frac{V_g}{2}\left(1-\frac{Z_{01}}{Z_{in1}}\right)$$

- Quindi sappiamo l'andamento di v e i nella linea 1, visto che

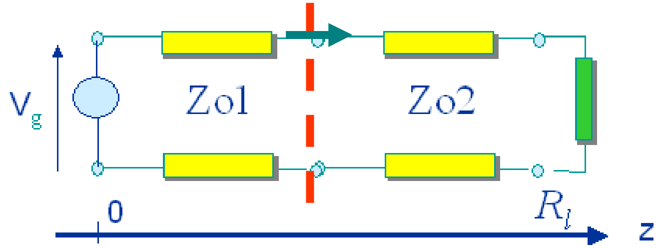
$$V_1(z)=V_1^+ e^{-j\beta_1 z}+V_1^- e^{j\beta_1 z}$$

- Cosa succede nella linea 2? In L1 la tensione deve essere continua: c'è la stessa tensione leggermente a sinistra (linea1) e leggermente a destra



Calcoli con le linee: esempio

- Anche la corrente che esce dalla linea 1 è la stessa che entra nella linea 2

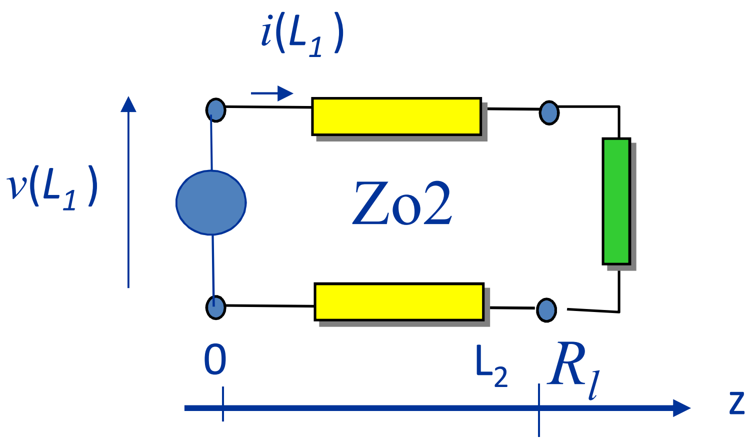


- Allora sappiamo che in L_1 ci saranno tensione e corrente

$$v(L_1) = v_1(L_1) = v_1^+ e^{-j\beta_1 L_1} + v_1^- e^{j\beta_1 L_1}$$

$$i(L_1) = i_1(L_1) = \left(v_1^+ e^{-j\beta_1 L_1} - v_1^- e^{j\beta_1 L_1}\right) / Z_{01}$$

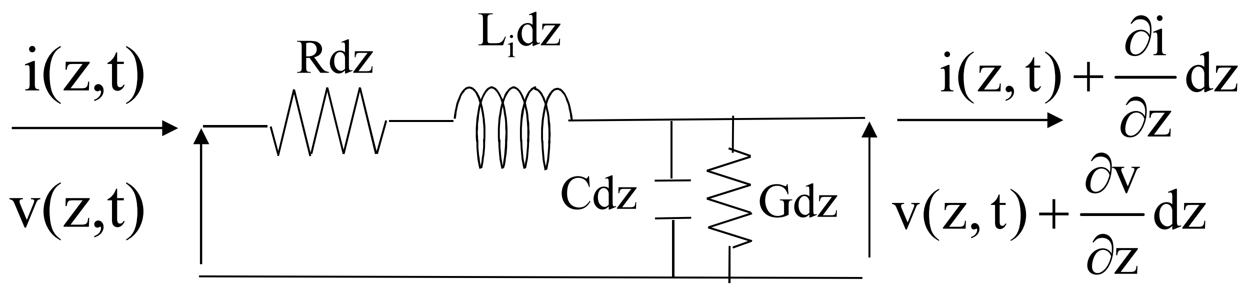
- Quindi il problema diventa



- E ripetiamo nella sezione la procedura di prima (oppure usiamo il coefficiente di riflessione spostando il sistema di riferimento in L2...)

Linee con perdite

Le perdite in una linea sono dovute sia al conduttore che al dielettrico



Equazioni telegrafisti

$$\frac{\partial V(z)}{\partial z} = -(R + j\omega L_i)I(z) = -ZI(z)$$

$$\frac{\partial I(z)}{\partial z} = -(G + j\omega C)V(z) = -YV(z)$$

Equazioni d'onda

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = YZV(z) = \gamma^2 V(z)$$

$$\frac{\partial^2 I(z)}{\partial z^2} = YZI(z) = \gamma^2 I(z)$$

Linee con perdite

$$V(z) = V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{\gamma z}$$

Tensione

$$I(z) = \frac{V^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{V^-}{Z_0} e^{\gamma z}$$

Corrente

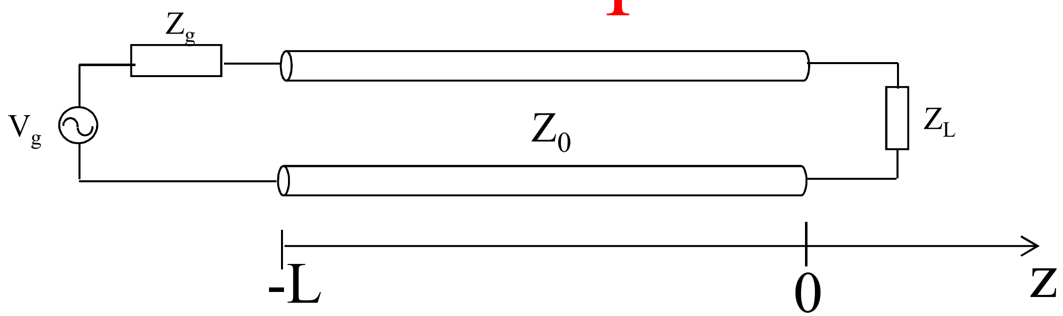
$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L_i)(G + j\omega C)}$$

Costante di propagazione

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L_i}{G + j\omega C}}$$

Impedenza d'onda

Linee con perdite



$\rho(z) \triangleq \frac{V^- e^{\gamma z}}{V^+ e^{-\gamma z}} = \frac{V^-}{V^+} e^{2\gamma z} = \rho(0) e^{2\gamma z}$ Coefficiente di riflessione

$$\rho(0) = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$ Coefficiente di riflessione al carico

Il coefficiente di riflessione si attenua lungo z

$$Z_{IN}(z) \triangleq \frac{V(z)}{I(z)} = Z_0 \frac{Z_L \cosh \gamma d + Z_0 \sinh \gamma d}{Z_0 \cosh \gamma d + Z_L \sinh \gamma d}$$ Impedenza di ingresso

d=distanza del punto z dal carico

Piccole perdite

$$R \ll \omega L_i \qquad\qquad G \ll \omega C$$

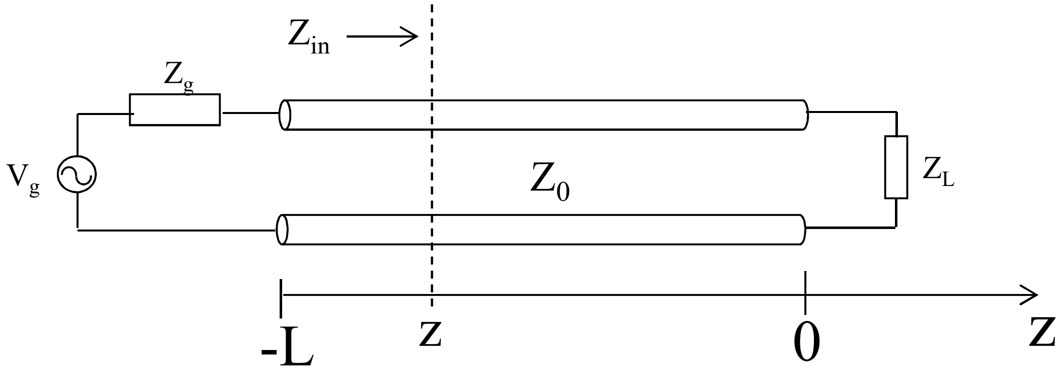
$$\gamma \simeq j\omega\sqrt{L_i C}\left[1 + \frac{1}{2j\omega}\left(\frac{R}{L_i} + \frac{G}{C}\right)\right]$$

$$\alpha \simeq \frac{R}{2R_0} + \frac{GR_0}{2}$$ dove $$R_0 = \sqrt{\frac{L_i}{C}}$$

$$\beta = \frac{\omega_0}{v_f} = \frac{\omega_0}{c}\sqrt{\varepsilon_r}$$ dove ε_r è la costante dielettrica del mezzo

$$Z_0 \simeq R_0 = v_f L = \frac{1}{v_f C}$$

Potenza trasferita nella linea



$$W(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(V(z) \cdot I^*(z))$$

$$V(z) = V^+e^{-\gamma z} + V^+\rho(0)e^{\gamma z} = V^+e^{-\gamma z} + V^+\rho(z)e^{-2\gamma z}e^{\gamma z} = V^+e^{-\gamma z}(1+\rho(z))$$

$$I(z) = \frac{V^+}{Z_0}e^{-\gamma z}(1-\rho(z))$$

$$W(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(|V^+|^2e^{-2\alpha z}(1+\rho(z)) \cdot \left(\frac{1}{Z_0{}^*}(1-\rho(z))^*\right)\right) =$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{|V^+|^2e^{-2\alpha z}}{Z_0{}^*}(1+\rho(z)) \cdot (1-\rho^*(z))\right) = \frac{1}{2}\left(|V^+|^2e^{-2\alpha z}\frac{R_0}{R_0^2+X_0^2}(1-|\rho(z)^2|)\right)$$

Potenza trasferita nella linea

$$W(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left((V^+e^{-\gamma z} + V^-e^{\gamma z}) \cdot \left(\frac{V^+}{Z_0}e^{-\gamma z} - \frac{V^-}{Z_0}e^{\gamma z} \right)^* \right) =$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left((V^+e^{-\gamma z} + V^-e^{\gamma z}) \cdot \left(\frac{V^{+*}}{Z_0{}^*}e^{-(\alpha - j\beta)z} - \frac{V^{-*}}{Z_0{}^*}e^{(\alpha - j\beta)z} \right) \right)$$

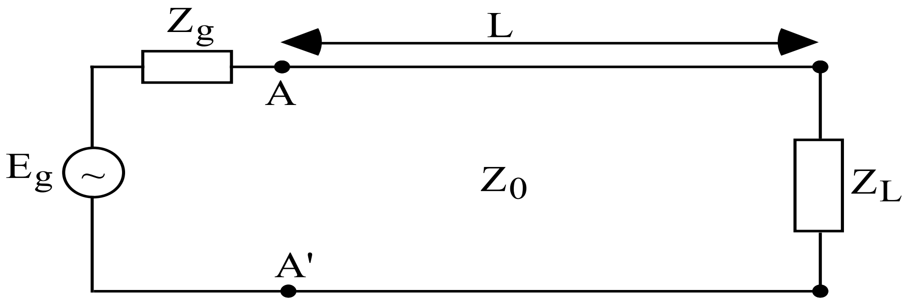
$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{|V^+|^2}{Z_0{}^*}e^{-2\alpha z} - \frac{|V^-|^2}{Z_0{}^*}e^{2\alpha z} - e^{-j2\beta z}\frac{V^+V^{-*}}{Z_0{}^*} + e^{j2\beta z}\frac{V^-V^{+*}}{Z_0{}^*} \right)$$

In caso di piccole perdite Z_0 è reale

$$W(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{|V^+|^2}{R_0}e^{-2\alpha z} - \frac{|V^-|^2}{R_0}e^{2\alpha z} \right) = P^+(z) - P^-(z)$$

Esempi 2.1

Nella linea mostrata in figura, in cui Eg=10 V, Zg=50 Ω, Z0=70 Ω, L=0.75λ, vengono effettuate delle misure che danno un R.O.S. pari a 3.2 ed un minimo di tensione a distanza 0.23λ dal carico. Determinare il carico ZL della linea, la potenza fornita al carico ed i valori dei massimi di tensione.



$$L_{min} = \left(\frac{\varphi_L}{4\pi} + \frac{2N+1}{4}\right)\lambda \Rightarrow \varphi_L = 4\pi\left(\frac{L_{min}}{\lambda} - \frac{2N+1}{4}\right) = 4\pi\left(0.23 - 0.25\right) = -0.251$$

$$ROS = \frac{1+|\rho_L|}{1-|\rho_L|} \Rightarrow |\rho_L| = \frac{ROS-1}{ROS+1} = \frac{2.2}{4.2} = 0.523 \Rightarrow \rho_L = |\rho_L| e^{j\varphi_L} = 0.507 - j0.13$$

$$Z_L = Z_0 \frac{1+\rho_L}{1-\rho_L} = 195.6 - j70 \quad \Omega$$

Esempi 2.2

$$Z_{ing} = Z_0 \frac{Z_L \cos\left(2\pi \frac{L}{\lambda}\right) + jZ_0 \sin\left(2\pi \frac{L}{\lambda}\right)}{Z_0 \cos\left(2\pi \frac{L}{\lambda}\right) + jZ_L \sin\left(2\pi \frac{L}{\lambda}\right)} =$$

$$= Z_0 \frac{Z_L Z_0 + j\frac{Z_0^2 - Z_L^2}{2} \sin\left(4\pi \frac{L}{\lambda}\right)}{\left[Z_0 \cos\left(2\pi \frac{L}{\lambda}\right)\right]^2 + \left[Z_L \sin\left(2\pi \frac{L}{\lambda}\right)\right]^2} = 22.2 + j7.9 \quad \Omega$$

Poiché la linea è ideale, la potenza attiva fornita al carico coincide con la potenza attiva fornita all'impedenza di ingresso:

$$P_L = P_{ing} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[V_{ing} I_{ing}^*\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[Z_{ing} I_{ing} I_{ing}^*\right] = \frac{1}{2} R_{ing} \left|I_{ing}\right|^2$$

$$= \frac{1}{2} R_{ing} \left|\frac{E_g}{Z_g + Z_{ing}}\right|^2 = 210 \quad \mathrm{mW}$$

Esempi 3.1

E' data una linea di trasmissione di impedenza caratteristica pari a 50 Ω chiusa su di un carico incognito. Su tale linea vengono effettuate le seguenti misure:

a) ROS=3;

b) il primo minimo di tensione si trova sul carico.

Determinare il valore dell'impedenza di carico.

Essendo presente un minimo di tensione sul carico si può asserire che tale carico è puramente reale e che coincide con l'impedenza minima:

$$Z_{ing}(\min V) = Z_{min} = Z_L = \frac{Z_0}{ROS} = 16.66 \quad \Omega$$

Onde piane e linee

- Per un'onda piana che si propaga lungo un asse z abbiamo visto che l'equazione d'onda (fasori) produce le soluzioni

$$E_x = E^+ e^{-j\beta z} + E^- e^{j\beta z} \qquad H_y = \frac{E^+}{\eta} e^{-j\beta z} - \frac{E^-}{\eta} e^{j\beta z}$$

- Mentre le equazioni del telegrafista (linee) producono

$$V = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z} \qquad i = \frac{v^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{v^-}{Z_0} e^{j\beta z}$$

- Quindi, possiamo analizzare il comportamento delle onde piane per mezzo di "linee equivalenti"

$$\boxed{\mathbf{E} \to V,\ \mathbf{H} \to I,\ \eta \to Zo}$$

Onde piane e linee

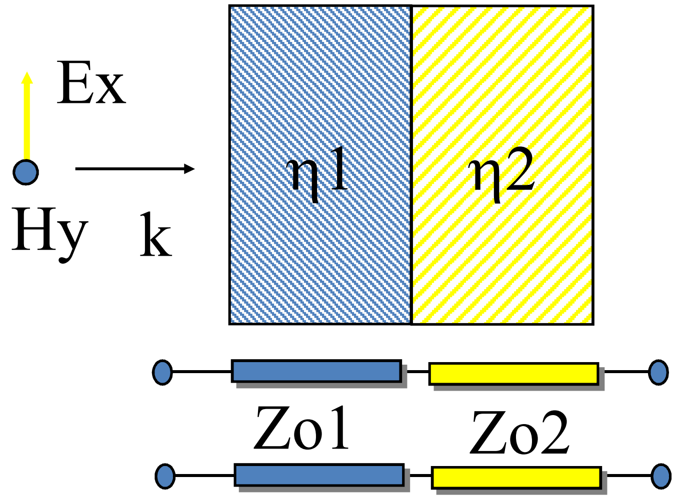
- Cosa succede quando un'onda piana passa da un materiale ad un altro, incidendo <u>ortogonalmente</u> alla superficie di separazione?

- Per risolvere il problema dovremmo scrivere E ed H in ciascun mezzo, ed imporre le condizioni al contorno, ovvero continuità di E_t ed H_t all'interfaccia

- <u>*Ma nel risolvere il problema con le linee abbiamo imposto proprio che V ed I fossero continue tra le due linee*</u>

- Quindi il metodo ci consente anche di vedere cosa avviene in mezzi stratificati

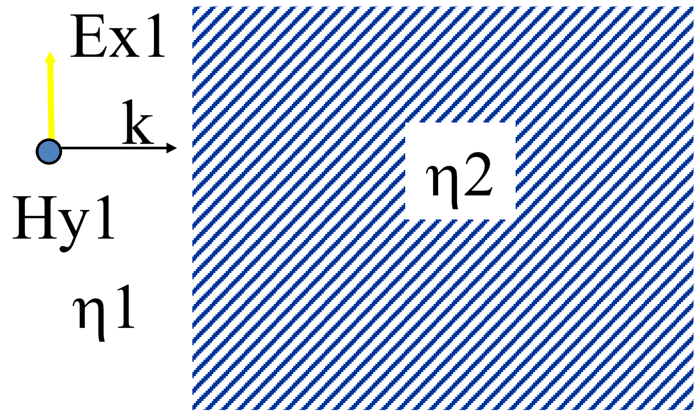
$$\eta 1 \rightarrow Zo1,\ \eta 2 \rightarrow Zo2 \ldots.$$



Onde piane e linee

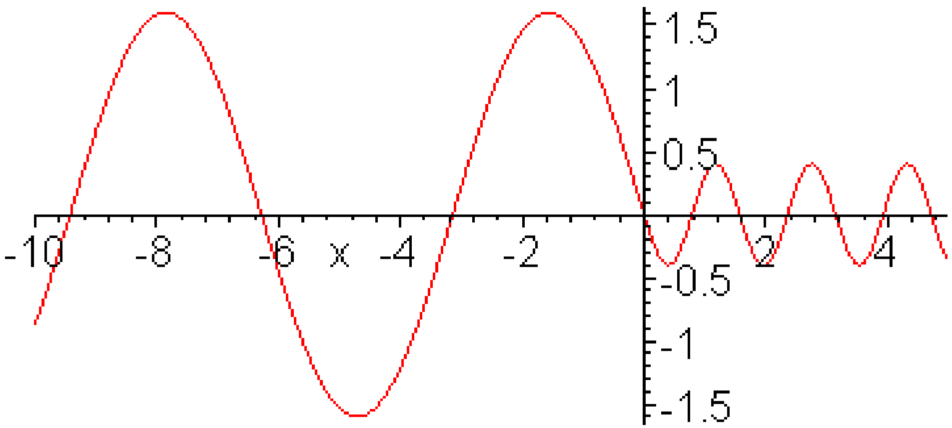
- Se per esempio l’onda viaggia in un mezzo con impedenza d’onda η1 ed incide su un mezzo (semi-infinito) con impedenza d’onda η2, parte dell’onda verrà riflessa e parte passerà, essendo

$$E_{x1} = E_1^+ e^{-\beta_1 jz} + E_1^- e^{j\beta_1 z} = E_1^+ \left(e^{-j\beta z} + \rho e^{j\beta z} \right)$$



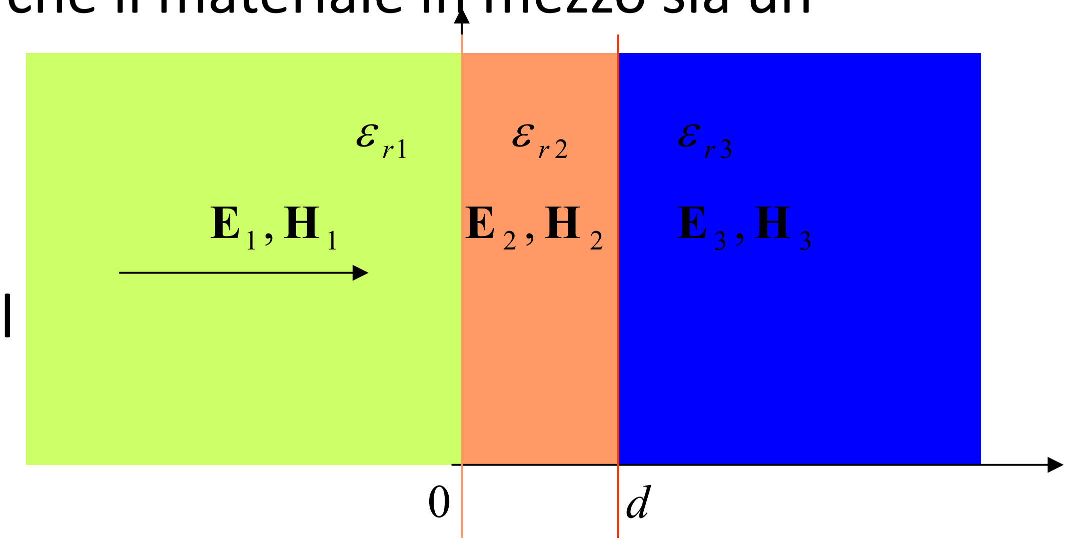
$$\rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

$$E_{x2} = \tau E_1^+ e^{-j\beta_2 z} = (1 + \rho) E_1^+ e^{-j\beta_2 z}$$



Onde piane in mezzi stratificati e linee

- Nel caso di un'onda che viene da un mezzo ed incontra mezzi stratificati, possiamo usare tutto quanto visto per le linee! Sono vere anche le conclusioni
- Immaginiamo per esempio che il materiale in mezzo sia un multiplo di $\lambda/2$
  - Questo sarebbe per esempio il caso se avessi un segnale a 1 GHz, e con il mezzo 2 aria, la lunghezza fosse d=c/(2f), cioè 15 cm



- In tal caso tutta la regione 2 sarebbe "trasparente" all'onda; e se i mezzi 1 e 3 fossero uguali, l'onda sarebbe completamente trasmessa