

**A.A. 2021-2022**

# **Elementi di Elettronica (INF)**

**Prof. Paolo Crippa**

## **Soluzione di Circuiti Non Lineari**

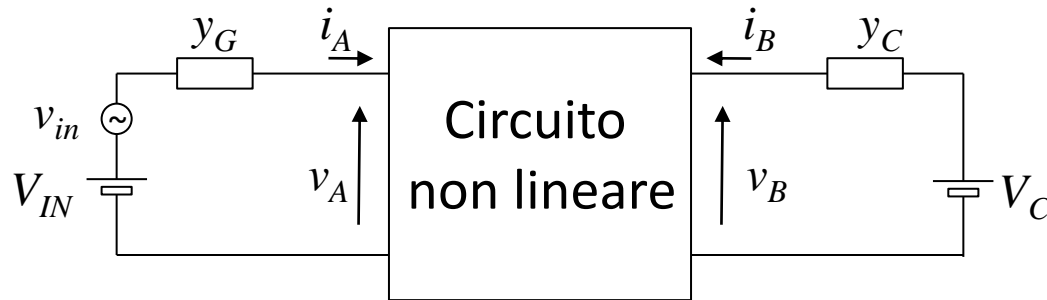
$$i_D = I_D + i_d$$

$$v_{AB} = V_{AB} + v_{ab}$$

$$i_D(t) = I_{D,0} + i_d(t)$$

$$v_{AB}(t) = V_{AB,0} + v_{ab}(t)$$

# Soluzione di Circuiti Non Lineari



Circuito completo

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{IN} + v_{in} = i_A / y_G + v_A \\ V_C = i_B / y_C + v_B \\ i_A = f(v_A, v_B) \\ i_B = h(v_A, v_B) \end{array} \right.$$

Circuito a riposo:  $v_{in} = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{IN} = I_A / y_G + V_A \\ V_C = I_B / y_C + V_B \\ I_A = f(V_A, V_B) \\ I_B = h(V_A, V_B) \end{array} \right.$$

$$v_A(t) = \mathbf{V_A} + v_a(t)$$

$$v_B(t) = \mathbf{V_B} + v_b(t)$$

$$i_A(t) = \mathbf{I_A} + i_a(t)$$

$$i_B(t) = \mathbf{I_B} + i_b(t)$$

# Soluzione di Circuiti Non Lineari

## Circuito completo linearizzato

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{IN} + v_{in} = (I_A + i_a) / y_G + V_A + v_a \\ V_C = (I_B + i_b) / y_C + V_B + v_b \\ i_A = I_A + i_a \approx I_A + \left. \frac{\partial f}{\partial v_A} \right|_0 v_a + \left. \frac{\partial f}{\partial v_B} \right|_0 v_b \\ i_B = I_B + i_b \approx I_B + \left. \frac{\partial h}{\partial v_A} \right|_0 v_a + \left. \frac{\partial h}{\partial v_B} \right|_0 v_b \end{array} \right.$$

Approssimazione di Taylor  
nell'ipotesi di piccoli segnali :  $v_{in}$  piccola

## Circuito equivalente alle variazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{in} = i_a / y_G + v_a \\ 0 = i_b / y_C + v_b \\ i_a \approx y_i v_a + y_r v_b \\ i_b \approx y_f v_a + y_o v_b \end{array} \right.$$

## Circuito a riposo

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{IN} = I_A / y_G + V_A \\ V_C = I_B / y_C + V_B \\ I_A = f(V_A, V_B) \\ I_B = h(V_A, V_B) \end{array} \right.$$

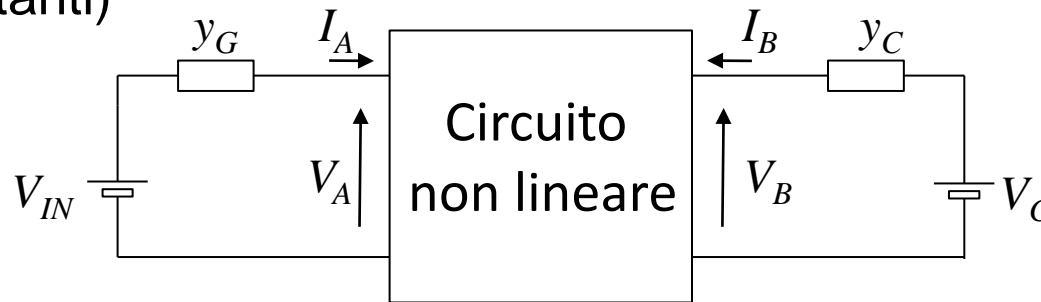
$i$ : input       $r$ : reverse  
 $f$ : forward       $o$ : output

$$\begin{array}{ll} y_i = \left. \frac{\partial f}{\partial v_A} \right|_0 & y_r = \left. \frac{\partial f}{\partial v_B} \right|_0 \\ y_f = \left. \frac{\partial h}{\partial v_A} \right|_0 & y_o = \left. \frac{\partial h}{\partial v_B} \right|_0 \end{array}$$

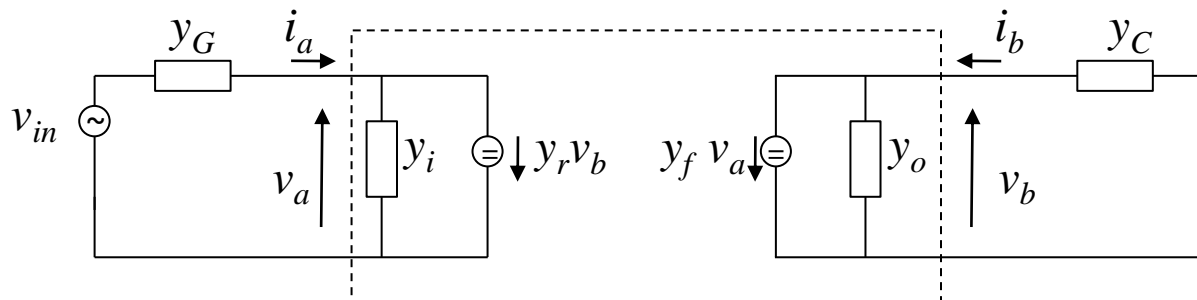
# Soluzione di Circuiti Non Lineari

Il circuito completo è studiato come la sovrapposizione di un circuito a riposo e di un circuito alle variazioni, ciò è possibile solo nell'ipotesi di piccoli segnali per cui valga l'approssimazione di Taylor al circuito non lineare

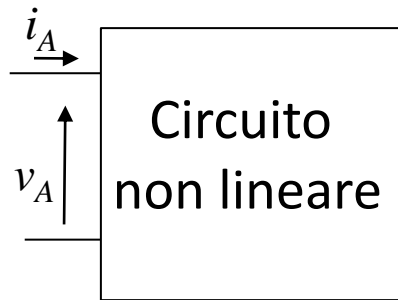
- 1) Soluzione analitica con algoritmi iterativi del circuito a riposo (circuito con ingressi costanti)



- 2) Calcolo dei parametri del circuito equivalente alle variazioni per ogni elemento non lineare  $y_i$ ,  $y_r$ ,  $y_f$ ,  $y_o$
- 3) Disegno del circuito equivalente alle variazioni nell'ipotesi di piccoli segnali e soluzione della rete linearizzata



# Bipoli Non Lineari



$$g\left(\frac{dv_A}{dt}, \frac{di_A}{dt}, v_A, i_A\right) = 0$$

Esempio con corrente  
esplicitabile in funzione  
della tensione

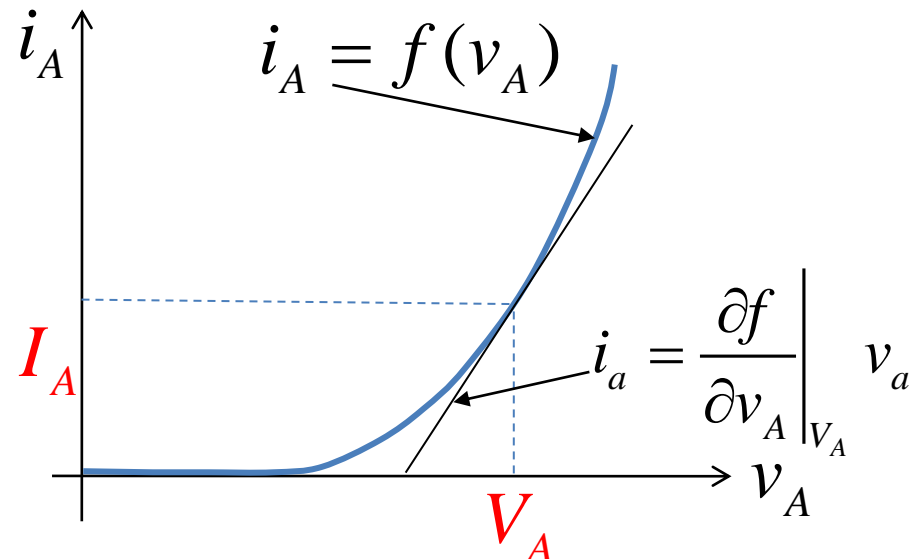
$$i_A = f(v_A)$$

Circuito a riposo:

$$I_A = f(V_A)$$

Circuito equivalente alle variazioni (nell'ipotesi di piccoli segnali)

$$i_A = I_A + i_a \approx I_A + \left. \frac{\partial f}{\partial v_A} \right|_{V_A} v_a$$



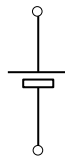
# Circuito Equivalente alle Variazioni di Bipoli Particolari

$$v_A = V_A + v_a$$

$$i_A = I_A + i_a$$

circuito per grandi segnali

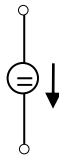
**Generatore di tensione  
indipendente**



$E$

$$v_A = E$$

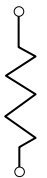
**Generatore di corrente  
indipendente**



$I$

$$i_A = I$$

**Resistenza**



$R$

$$v_A = R i_A$$

circuito  
a riposo

$$V_A = E$$

$$I_A = I$$

$$V_A = R I_A$$

circuito equivalente  
alle variazioni

$$v_a = 0$$



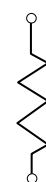
Corto  
c circuito

$$i_a = 0$$



Circuito  
aperto

$$v_a = R i_a$$



resistenza

$R$

# Circuito Equivalente alle Variazioni di Bipoli Particolari

$$v_A = V_A + v_a$$

$$i_A = I_A + i_a$$

circuito per grandi segnali

circuito  
a riposo

circuito equivalente  
alle variazioni

**Condensatore**

$$i_A = C_\infty \frac{dv_A}{dt}$$

$$I_A = 0$$



Circuito  
aperto

$$v_a = 0$$



Corto  
circuito

**Induttore**

$$v_A = L_\infty \frac{di_A}{dt}$$

$$V_A = 0$$



Corto  
circuito

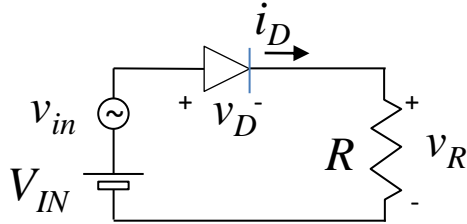
$$i_a = 0$$



Circuito  
aperto

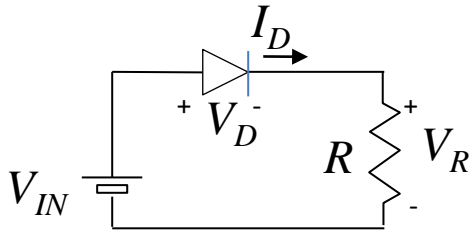


# Esempio

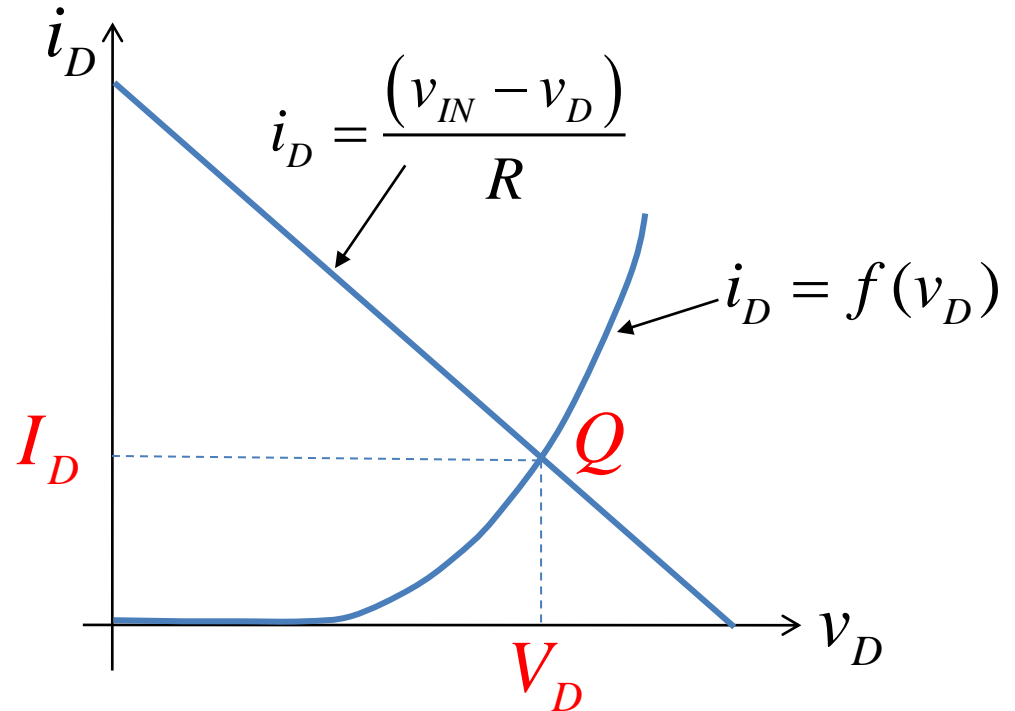


$$i_D = f(v_D) = I_S \left( \exp\left(\frac{v_D}{V_T}\right) - 1 \right)$$

Circuito a riposo:



$$\begin{cases} V_{IN} = V_D + RI_D \\ I_D = f(V_D) \end{cases}$$

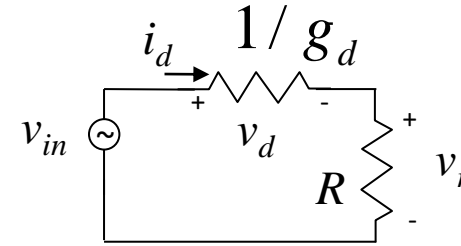
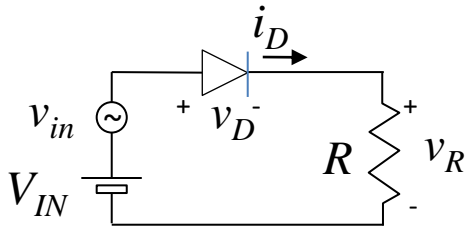


$$V_D = V_{IN} - RI_S \left( \exp\left(\frac{V_D}{V_T}\right) - 1 \right)$$

$$V_D = V_T \ln \left( \frac{V_{IN} - V_D}{RI_S} + 1 \right)$$

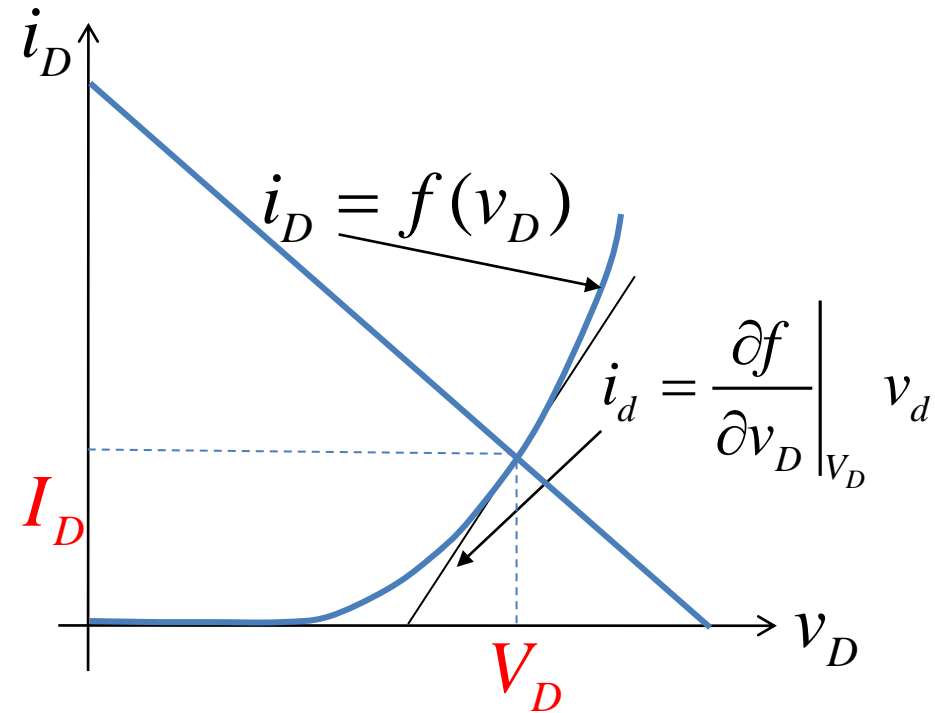
# Esempio

Circuito equivalente alle variazioni:

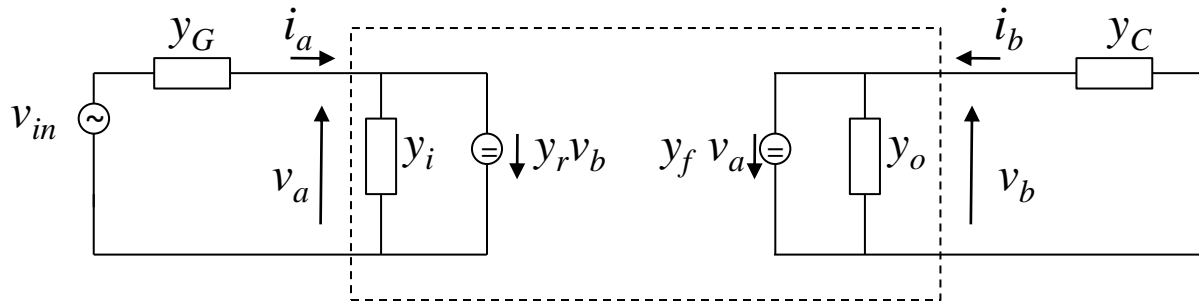


$$i_D \approx I_D + \left. \frac{\partial f}{\partial v_D} \right|_{V_D} v_d$$

$$g_d = \left. \frac{\partial f}{\partial v_D} \right|_{V_D} = \frac{I_S \exp\left(\frac{V_D}{V_T}\right)}{V_T} = \frac{I_D + I_S}{V_T}$$



$$v_d = v_{in} \left( \frac{1/g_d}{R + 1/g_d} \right) = v_{in} \left( \frac{r_d}{R + r_d} \right)$$



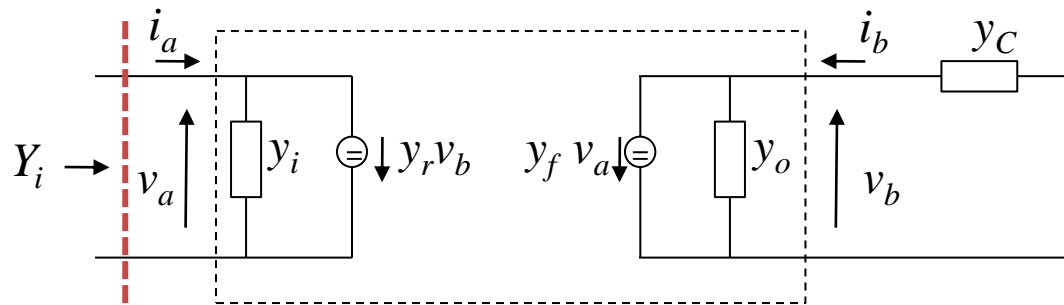
## Guadagno di tensione

$$i_b = -y_C v_b$$

$$-y_C v_b = y_f v_a + y_o v_b$$

$$A_v = \frac{v_b}{v_a} = -\frac{y_f}{y_o + y_C}$$

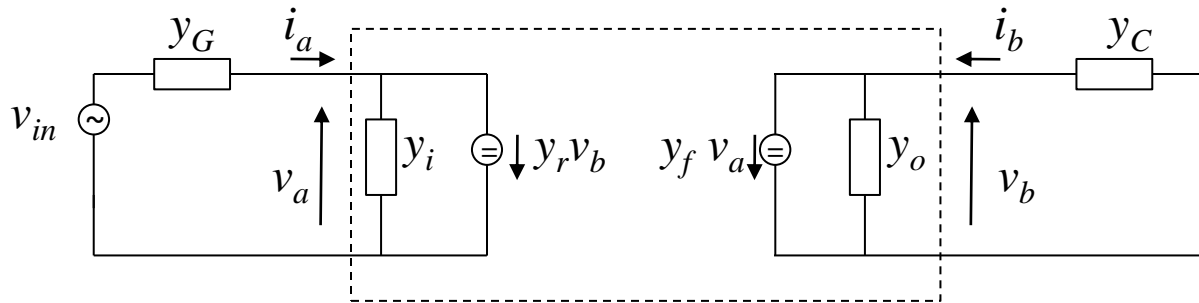
## Ammettenza di ingresso



Ammettenza vista dal lato dell'ingresso cortocircuitando tutti i generatori di tensione indipendenti e aprendo tutti i generatori di corrente indipendenti

$$i_a = y_i v_a + y_r v_b = y_i v_a + y_r A_v v_a$$

$$Y_i = \frac{i_a}{v_a} = y_i + y_r A_v = y_i - \frac{y_r y_f}{y_o + y_C}$$



## Guadagno di corrente

$$i_a = Y_i v_a$$

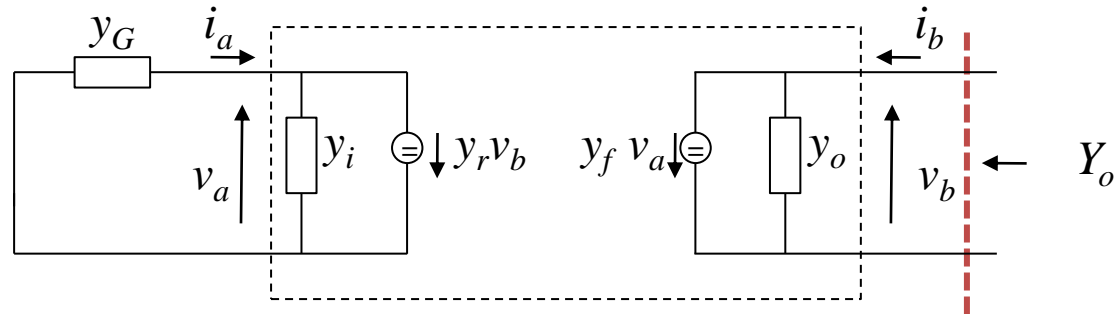
$$i_b = -y_C v_b$$

$$A_i = \frac{i_b}{i_a} = -\frac{y_C}{Y_i} \frac{v_b}{v_a} = -\frac{y_C}{Y_i} A_v = \frac{y_C}{y_i - \frac{y_r y_f}{y_o + y_C}} \frac{y_f}{y_o + y_C}$$

$$A_i = \frac{y_C y_f}{(y_o + y_C) y_i - y_r y_f}$$

# Funzioni di Rete

## Ammettenza di uscita



Ammettenza vista dal lato dell'uscita cortocircuitando tutti i generatori di tensione indipendenti e aprendo tutti i generatori di corrente indipendenti

$$i_b = y_f v_a + y_o v_b$$

$$i_a = y_i v_a + y_r v_b = -y_G v_a$$

$$v_a = -\frac{y_r}{y_i + y_G} v_b$$

$$i_b = \left( y_o - \frac{y_r y_f}{y_i + y_G} \right) v_b$$

$$Y_o = \frac{i_b}{v_b} = y_o - \frac{y_r y_f}{y_i + y_G}$$

Stesse relazioni di  $Y_i$  scambiando

$$y_i \leftrightarrow y_o$$

$$y_r \leftrightarrow y_f$$

$$y_C \leftrightarrow y_G$$

# Funzioni di Rete

## Guadagno di potenza

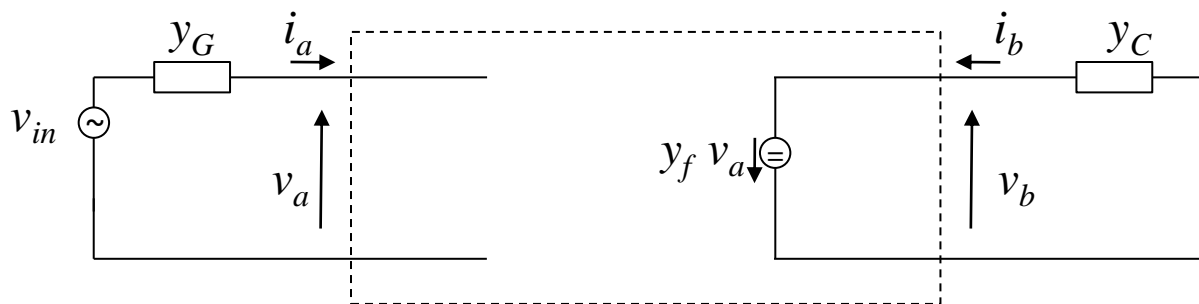
$$|A_v A_i| = \left| \frac{y_f}{(y_o + y_C)(y_o + y_C)y_i - y_r y_f} \right|$$

Il guadagno di potenza è molto elevato se:

$$y_f \gg 1 \quad y_i \ll 1, \quad y_r \ll 1, \quad y_o \ll 1$$

Amplificatore ideale:

$$y_f \gg 1 \quad y_i = y_r = y_o = 0$$



$$A_v = -\frac{y_f}{y_C}$$

$$A_i = \infty$$