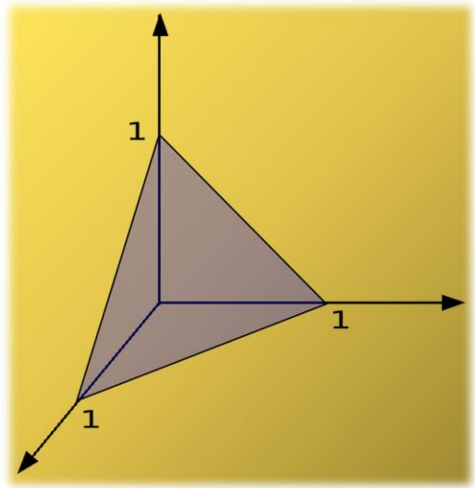
Algoritmo del simplesso

ver 2.1.0



Fabrizio Marinelli
fabrizio.marinelli@staff.univpm.it
tel. 071 - 2204823

Sommario

- «Soluzione» di un modello di prog. matematica
- Algoritmi iterativi
- Algoritmo del simplesso: descrizione analitica

Soluzione di un modello di prog. mat.

$$\min z = f(\mathbf{x})$$
$$\mathbf{x} \in X$$

- Risolvere un problema di programmazione matematica significa determinare, se esiste, **una** soluzione globalmente ottima, cioè un punto $\mathbf{x}^* \in X$ tale che $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in X$

- Una soluzione $\mathbf{x}' \in X$ si dice localmente ottima se esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $f(\mathbf{x}') \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in X$ con $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| \leq \varepsilon$

- Una soluzione ottima è un *punto stazionario* $\mathbf{x}^*$ (di minimo o di massimo) della funzione (obiettivo) $f(\mathbf{x})$.

- Un punto stazionario $\mathbf{x}^*$ si ottiene ponendo

$$f'(x) = 0 \qquad \text{se } x \in \mathbb{R} \qquad \text{oppure}$$

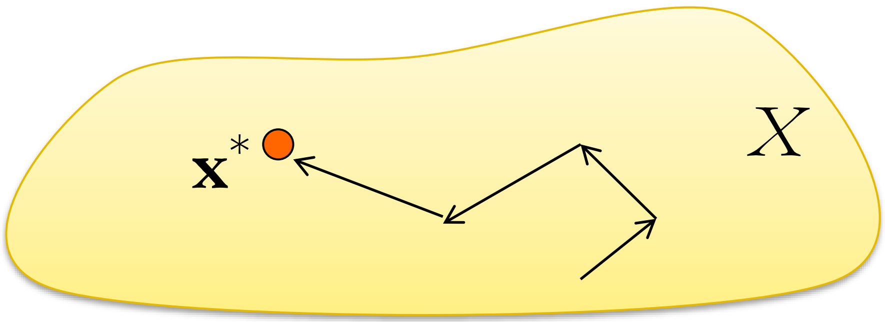
$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \qquad \text{se } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

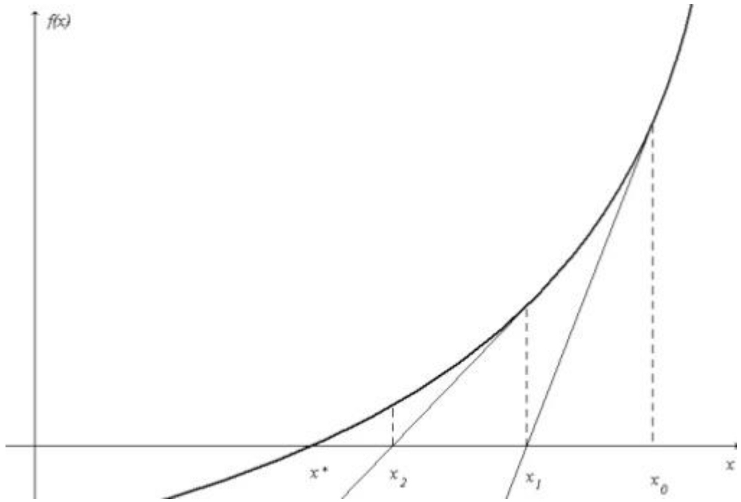
- ma la condizione del primo ordine è risolutiva in rarissimi casi. Infatti
  - è necessaria ma non sufficiente (quindi garantisce l'ottimalità locale ma non globale);
  - non contempla il caso di funzione vincolata e deve essere opportunamente estesa (condizioni KKT);
  - La soluzione analitica di $f'(x) = 0$ è limitata a casi molto semplici e specifici (teorema di Abel-Ruffini).

Si ricorre alla soluzione numerica con algoritmi di ricerca

Algoritmi di ricerca: efficacia e efficienza

- **algoritmo di ricerca**: metodo numerico che esplora l'insieme X delle soluzioni ammissibili alla ricerca della soluzione ottima $\mathbf{x}^*$





Proprietà di un algoritmo di ricerca

- **Efficienza**: rapidità di esecuzione
- **Efficacia**: capacità di determinare soluzione di buona qualità

Algoritmi esatti, approssimati e euristici

	Efficienza	Efficacia
▪ Euristiche: calcolano (eventualmente) una soluzione ammissibile di cui non si certifica la qualità (*local search, simulated annealing, genetic algorithms*)	↑	↓
▪ Algoritmi approssimati: calcolano una soluzione ammissibile e ne certificano la qualità, indicandone la distanza massima da quella ottima	↑	=
▪ Algoritmi esatti: certificano l'ottimalità delle soluzioni calcolate (*branch-and-bound, dynamic programming*).	↓	↑

Metodi euristici vs metodi esatti

- Quando utilizzare euristiche al posto di algoritmi esatti

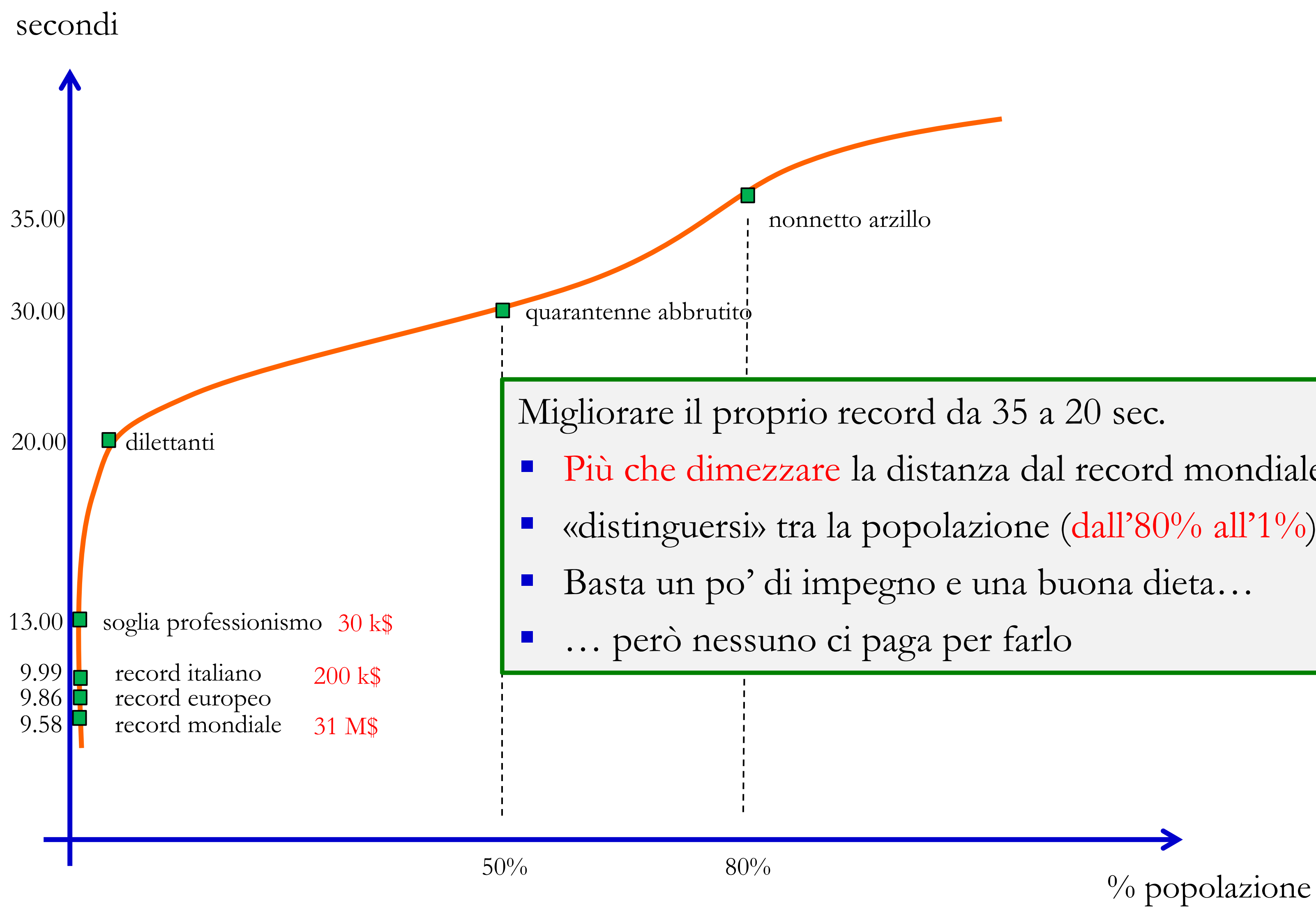
  - quando le dimensioni del problema sono eccessive rispetto a quelle risolvibili con metodi esatti
  - quando i problemi, anche se di limitate dimensioni, devono essere risolti in tempi estremamente brevi
  - quando i dati del problema sono approssimati e non vale la pena cercare la soluzione esatta
  - quando si risolvono problemi simili, ma non identici a quelli affrontati dagli algoritmi esatti. Questi ultimi sono molto meno generalizzabili delle euristiche

Metodi euristici vs metodi esatti

- Perché studiamo algoritmi esatti

  - Perché di solito è facile trovare una soluzione quasi-ottima ma il margine competitivo garantito da una soluzione ottima è di notevole valore e/o cruciale importanza. (esempio)
  - Perché in alcuni casi il valore ottimo esprime una condizione logica (per es. il criterio di arresto di una procedura più generale).
  - Perché in alcuni casi esistono solo poche soluzioni difficili da individuare.
  - Perché gli algoritmi esatti spesso suggeriscono nuove strategie utili anche per progettare euristiche più sofisticate.

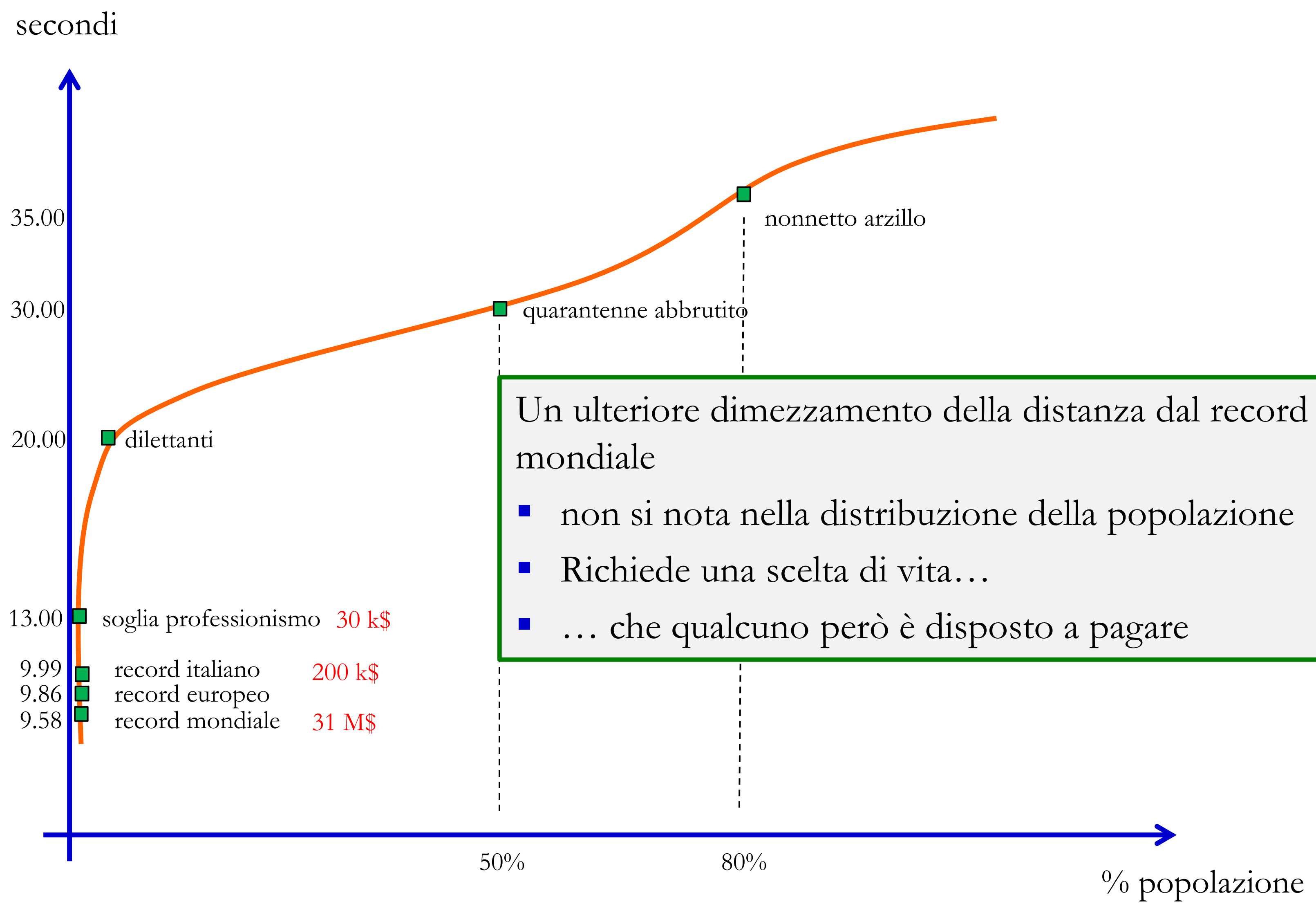
Una metafora sportiva: i 100 metri piani



Migliorare il proprio record da 35 a 20 sec.

- Più che dimezzare la distanza dal record mondiale
- «distinguersi» tra la popolazione (dall'80% all'1%)
- Basta un po' di impegno e una buona dieta…
- … però nessuno ci paga per farlo

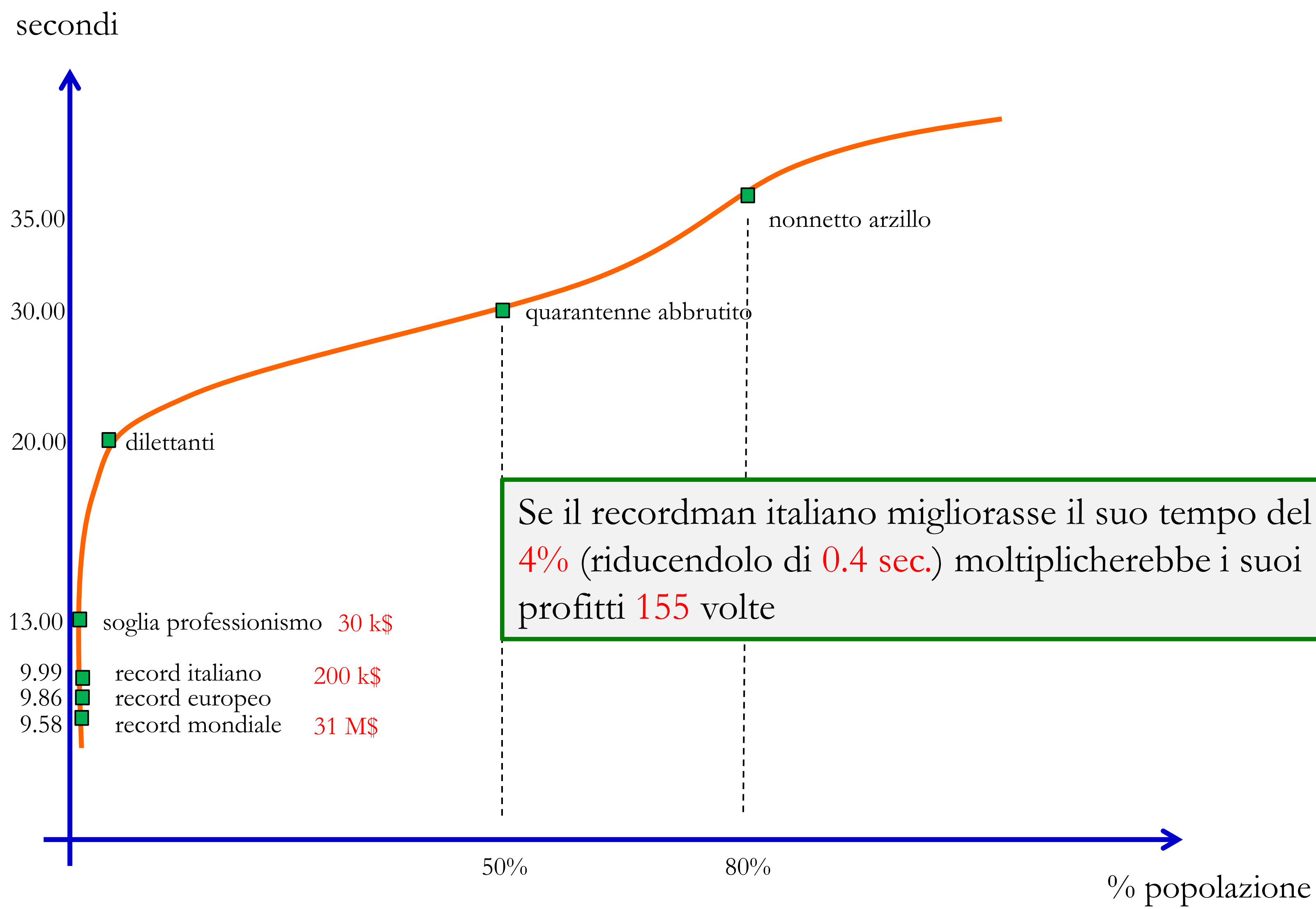
Una metafora sportiva: i 100 metri piani



Un ulteriore dimezzamento della distanza dal record mondiale

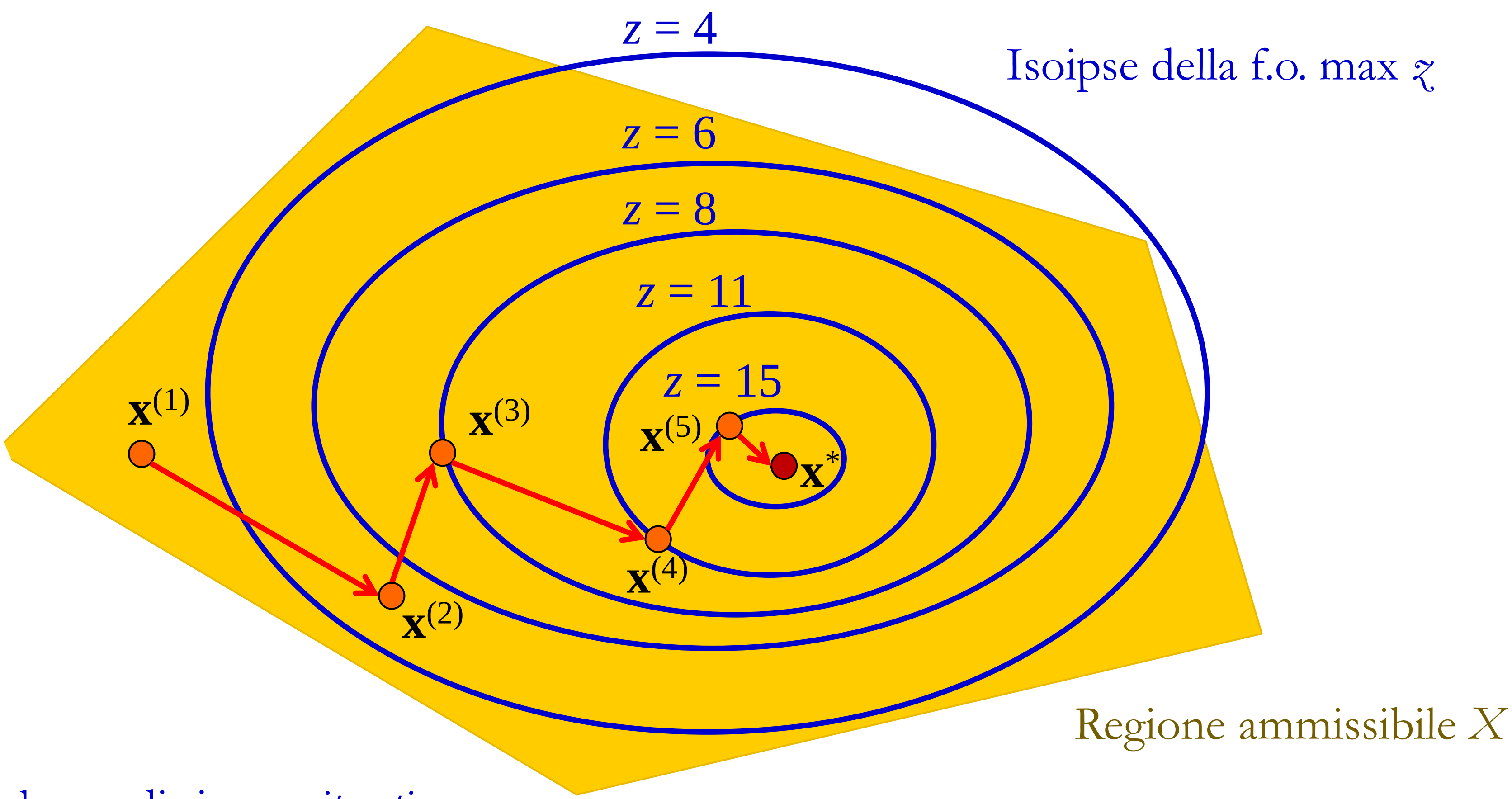
- non si nota nella distribuzione della popolazione
- Richiede una scelta di vita…
- … che qualcuno però è disposto a pagare

Una metafora sportiva: i 100 metri piani



Se il recordman italiano migliorasse il suo tempo del 4% (riducendolo di 0.4 sec.) moltiplicherebbe i suoi profitti 155 volte

Algoritmi iterativi di ottimizzazione



- Schema di ricerca *iterativo*

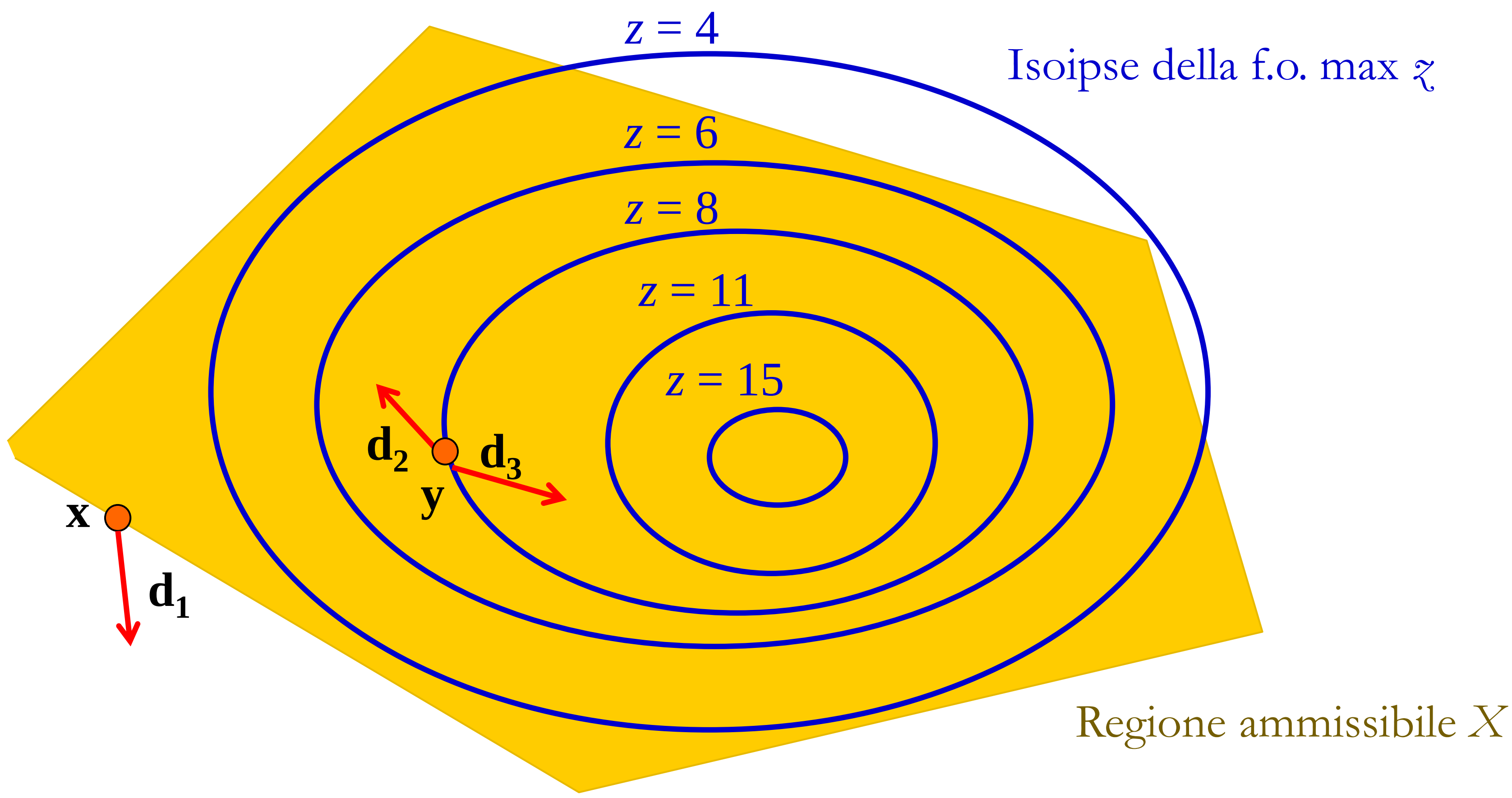
  Idea generale: determinare una successione di soluzioni ammissibili che converga a un punto stazionario (o a una soluzione che soddisfi un criterio di ottimalità prestabilito)

Algoritmi iterativi di ottimizzazione

- Algoritmo *iterativo di discesa (o di ascesa)*:

1. Si parte da una soluzione ammissibile **x** (se esiste)
2. Si esplora un opportuno intorno di **x** allo scopo di individuare una direzione **d** che sia *ammissibile* e *migliorante* rispetto alla funzione obiettivo
3. se **d** esiste ci si sposta di una certa ampiezza lungo tale direzione in un nuovo punto ammissibile **x'** e si torna al punto 2.
4. se **d** non esiste, **x'** è un minimo locale; l'algoritmo termina.

Esempio: direzioni ammissibili e miglioranti



- $\mathbf{d_1}$ è una direzione non ammissibile
- $\mathbf{d_2}$ è una direzione ammissibile ma non migliorante
- $\mathbf{d_3}$ è una direzione ammissibile e migliorante

Direzione ammissibile e migliorante

- **[Definizione]** Un vettore $\mathbf{d} \in R^n$ è una *direzione ammissibile* dal punto $\mathbf{x}$ nell'insieme X se esiste uno scalare $\theta \geq 0$ tale che

$$\boxed{\mathbf{x} + \alpha\mathbf{d} \in X \qquad \text{per ogni} \quad \alpha \in [0, \theta]}$$

- **[Definizione]** Un vettore $\mathbf{d} \in R^n$ è una *direzione migliorante* in $\mathbf{x}$ rispetto alla funzione f se esiste uno scalare $\theta \geq 0$ tale che

$$\boxed{\mathbf{x} + \theta\mathbf{d} \in X \qquad \text{e} \qquad f(\mathbf{x} + \theta\mathbf{d}) > f(\mathbf{x})}$$

[Osservazioni] Se $\theta = 0$, qualsiasi vettore è una direzione ammissibile ma non migliorante.

Algoritmo del simplesso (G. Dantzig, 1947)

Availability Codes

Dist	Avail and/or Special
A-1	

ORIGINS OF THE SIMPLEX METHOD
by George B. Dantzig
Stanford University

Abstract

In the summer of 1947, when I first began to work on the simplex method for solving linear programs, the first idea that occurred to me is one that would occur to any trained mathematician, namely the idea of step by step descent (with respect to the objective function) along edges of the convex polyhedral set from one vertex to an adjacent one. I rejected this algorithm outright on intuitive grounds — it had to be inefficient because it proposed to solve the problem by wandering along some path of outside edges until the optimal vertex was reached. I therefore began to look for other methods which gave more promise of being efficient, such as those that went directly through the interior, [1].

Today we know that before 1947 that four isolated papers had been published on special cases of the linear programming problem by Fourier (1824) [5], de la Vallée Poussin (1911) [6], Kantorovich (1939) [7] and Hitchcock (1941) [8]. All except Kantorovich's paper proposed as a solution method descent along the outside edges of the polyhedral set which is the way we describe the simplex method today. There is no evidence that these papers had any influence on each

algoritmo iterativo di discesa in cui:

- le soluzioni esplorate sono i vertici del poliedro;
- le direzioni seguite sono gli spigoli del poliedro.

algoritmo del simplesso: caratteristiche principali

- termina sempre in un numero finito di passi (…con i dovuti accorgimenti);

- Oltre al calcolo della soluzione ottima, è in grado di individuare i casi di inammissibilità e illimitatezza;

- anche se di natura esponenziale, è mediamente efficiente (risolve problemi con milioni di variabili e vincoli in pochi secondi)

Algoritmo del simplesso

1. Inizializzazione: Si individua (se esiste) un vertice **v** di partenza.
2. Valutazione dell'intorno: Si valutano le direzioni **d** corrispondenti agli spigoli che toccano **v** (intorno di **v**)
3. Illimitatezza: Se una di queste è un raggio del poliedro lungo il quale la funzione obiettivo migliora, il problema è illimitato.
4. Spostamento: se esiste una direzione **d** che conduce a un vertice **w** in cui la funzione obiettivo migliora, **w** diventa il nuovo vertice corrente e si torna al punto 2.
5. Ottimalità: se tale direzione non esiste, **v** è la soluzione ottima del problema.

Algoritmo del simplesso: perché funziona?

- Domanda: l’algoritmo esamina solo vertici. Ma siamo sicuri che tutti i poliedri non vuoti hanno almeno un vertice? Ne immaginate uno senza?
- Risposta: Poliedri non vuoti e senza vertici esistono effettivamente (poliedri che contengono rette). Tuttavia se il problema è in forma standard e ammette soluzione allora il poliedro associato contiene almeno un vertice.

- Domanda: l’algoritmo esamina solo vertici. E’ sufficiente per determinare una soluzione ottima?
- Risposta: Si applica il teorema fondamentale della PL: se il problema ammette soluzioni ottime finite allora ne esiste almeno una in corrispondenza di un vertice.

Algoritmo del simplesso: perché funziona?

- Domanda: l'algoritmo termina quando individua un minimo locale. E' sufficiente per determinare una soluzione ottima?
- Risposta: Un problema di PL è un particolare problema di ottimizzazione convessa: una funzione lineare è sia concava sia convessa e un poliedro è un insieme convesso: gli ottimi locali sono ottimi globali

- Domanda: L'algoritmo può iterare all'infinito?
- Risposta: il numero di vertici di un poliedro è finito. Se le soluzioni di base sono tutte non *degeneri*, ad ogni iterazione l'algoritmo migliora in senso stretto il valore della funzione obiettivo, quindi termina in un numero finito di passi. In presenza di soluzioni di base degeneri, esistono regole che, se adottate, evitano situazioni di *ciclaggio*.

Algoritmo del simplesso: descrizione analitica

(Vercellis, cap. 4)

Esiste una procedura generale per risolvere un problema di PL?

Algoritmo del simplesso

- Ogni iterazione richiede di calcolare un vertice, ossia di invertire una matrice di base **B**, operazione computazionalmente onerosa.

- Una delle implementazioni più utilizzate ricorre ad una forma del problema detta *forma canonica* che permette di ottenere $\mathbf{B}^{-1}$ con semplici operazioni basate sulle informazioni disponibili tra una iterazione e la successiva e senza dover ricorrere al calcolo esplicito della matrice inversa.

- La forma canonica presuppone la conoscenza di una base e può essere costruita a partire dalla definizione del *problema ridotto*.

Problema ridotto

Si consideri un problema in forma standard P: $\max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}: \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathrm{R}^n\}$.

Siano

- $\mathbf{B}$ una base,
- $\mathbf{x} = [\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N}] = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}]$ la soluzione di base associata a $\mathbf{B}$,
- $\mathbf{A} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{N}]$, con $\mathbf{B}(m \times m)$ e $\mathbf{N}(m \times n - m)$, la matrice $\mathbf{A}$ riscritta separando le colonne in base dalle colonne fuori base.

Il sistema lineare $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ può essere riscritto in funzione di $\mathbf{B}$ come:

$$\mathbf{B}\mathbf{x_B} + \mathbf{N}\mathbf{x_N} = \mathbf{b}$$

da cui, dato che $\mathbf{B}$ è una matrice di base quindi una matrice invertibile, può essere ricavato $\mathbf{x_B}$ in funzione di $\mathbf{x_N}$:

$$\boxed{\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x_N}}$$

Esempio

$$\max z = 2x_1 + x_2$$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 5 \\ -x_1 + x_2 + x_4 \quad &= 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_5 &= 21 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 1 & 21 \end{array}\right]$$

$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1 | \mathbf{A}_3 | \mathbf{A}_4]$ $\quad$ $\mathbf{N} = [\mathbf{A}_2 | \mathbf{A}_5]$

Il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ può essere riscritto in funzione di $\mathbf{B}$ (ossia separando le componenti in base e fuori base) come:

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix}}$$

Problema ridotto (cont.)

1. La separazione delle componenti in base e fuori base porta il problema nella forma:

$$
\begin{aligned}
z = \max\ & \mathbf{c_B}^T\mathbf{x_B} + \mathbf{c_N}^T\mathbf{x_N} \\
& \mathbf{B}\mathbf{x_B} + \mathbf{N}\mathbf{x_N} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{x_B}, \mathbf{x_N} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

2. Sostituendo $\mathbf{x_B}$ in f.o. con la sua espressione $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x_N}$ si ottiene:

$$
\begin{aligned}
z = \max\ & \mathbf{c_B}^T(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x_N}) + \mathbf{c_N}^T\mathbf{x_N} \\
& \mathbf{x_B} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x_N} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\
& \mathbf{x_B}, \mathbf{x_N} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Problema ridotto (cont.)

$$z = \max \mathbf{c_B}^T(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x_N}) + \mathbf{c_N}^T\mathbf{x_N}$$
$$\mathbf{x_B} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x_N} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$
$$\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N} \geq \mathbf{0}$$

3. Riordinando i termini otteniamo

$$z = \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \max (\mathbf{c_N}^T - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x_N}$$
$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x_N} + \mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$
$$\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N} \geq \mathbf{0}$$

Problema ridotto (cont.)

è il valore che assume la f.o. di P in corrispondenza della soluzione di base $\mathbf{x} = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}]$

Il j-esimo coefficiente esprime la variazione marginale della f.o. quando ci spostiamo dal punto $\mathbf{x} = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}]$ lungo x_j (cioè se x_j aumenta e tutte le altre variabili fuori base restano a 0)

$$
\begin{aligned}
z = \overbrace{\mathbf{c}_\mathbf{B}{}^{T}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}} + \max \overbrace{(\mathbf{c}_\mathbf{N}{}^{T} - \mathbf{c}_\mathbf{B}{}^{T}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})}\mathbf{x}_\mathbf{N} & \\
\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_\mathbf{N} + \mathbf{x}_\mathbf{B} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\
\mathbf{x}_\mathbf{B}, \mathbf{x}_\mathbf{N} &\geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Le variabili $\mathbf{x}_\mathbf{B}$ non sono in funzione obiettivo e quindi possono essere a tutti gli effetti considerate *variabili di slack*.

Vettore dei *costi ridotti* e forma *canonica*

$$Pr: \ \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \max\ (\mathbf{c_N}^T - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x_N}$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x_N} + \mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N} \geq \mathbf{0}$$

- Il problema è definito nelle sole variabili $\mathbf{x_N}$. Per questo motivo è chiamato *Problema Ridotto*. Per lo stesso motivo, il vettore dei coefficienti di costo $\boldsymbol{\pi} = (\mathbf{c_N}^T - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})$ della f.o. è chiamato *vettore dei costi ridotti*.

Se **B** è una base ammissibile, $\mathbf{x}$ è una SBA ($\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$) e il problema ridotto si dice in *forma canonica*

- Il problema in forma canonica è equivalente al problema *P*: una soluzione ottima di *Pr* corrisponde a una soluzione ottima di *P* e *Pr* è illimitato superiormente se e solo se lo è *P*.

Esempio

$$\max z = 2x_1 + x_2$$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 5 \\ -x_1 + x_2 + \quad x_4 \quad &= 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + \quad x_5 &= 21 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 1 & 21 \end{array}\right]$$

$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1 | \mathbf{A}_3 | \mathbf{A}_4]$ $\mathbf{N} = [\mathbf{A}_2 | \mathbf{A}_5]$

Pr:

$$[2 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix} + \max\left([1 \quad 0] - [2 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Esempio

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 5 \\ -x_1 + x_2 + \qquad x_4 \qquad &= 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + \qquad\qquad x_5 &= 21 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & \end{aligned}$$

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 1 & 21 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1 | \mathbf{A}_3 | \mathbf{A}_4] \qquad \mathbf{N} = [\mathbf{A}_2 | \mathbf{A}_5]$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_4 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/6 \\ 1 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1 & 1/6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1} = [2\ 0\ 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/6 \\ 1 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1 & 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/6 \\ 1 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21/6 \\ 3/2 \\ 21/6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/6 \\ 1 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/6 \\ 4/3 & 1/6 \end{bmatrix}$$

Esempio

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 5 \\ -x_1 + x_2 + \quad x_4 \quad &= 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + \quad x_5 &= 21 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 1 & 21 \end{array}\right]$$

$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1 | \mathbf{A}_3 | \mathbf{A}_4]$ $\quad$ $\mathbf{N} = [\mathbf{A}_2 | \mathbf{A}_5]$

problema in **forma canonica**

Pr:

$$\frac{21}{3} + \max \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_5$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_5 + x_1 &= \frac{21}{6} \\ \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{6}x_5 + x_3 &= \frac{3}{2} \\ \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_5 + x_4 &= \frac{21}{6} \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

$\equiv$

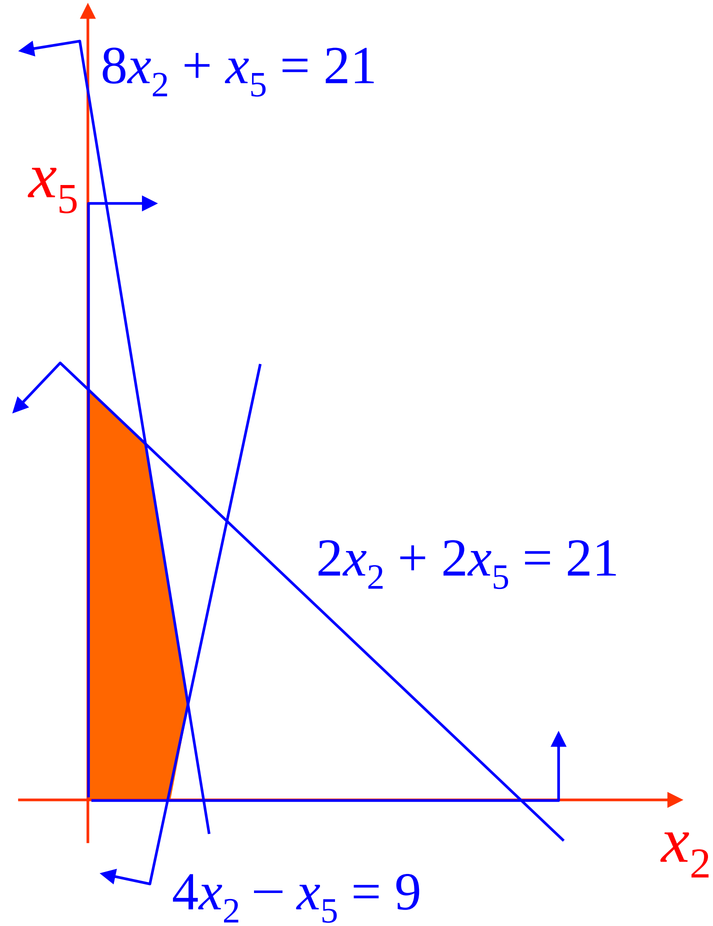
$$\frac{21}{3} + \max \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_5$$

$$\begin{aligned} 2x_2 + 2x_5 &\leq 21 \\ 4x_2 - x_5 &\leq 9 \\ 8x_2 + x_5 &\leq 21 \\ x_2, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Esempio

$$\frac{21}{3} + \max\ \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_5$$

$$\begin{aligned} 2x_2 + 2x_5 &\leq 21 \\ 4x_2 - \ \ x_5 &\leq 9 \\ 8x_2 + \ \ x_5 &\leq 21 \\ x_2, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$



L'origine dello spazio del problema ridotto è il vertice corrente (la soluzione $x_2 = x_5 = 0$ ha valore $21/3$) e la regione ammissibile descrive tutti i valori che possono assumere le variabili fuori base al fine di conservare l'ammissibilità della soluzione.

Tabella *canonica*

- I dati del problema in forma canonica possono essere organizzati in una tabella detta *tabella canonica* o *tableau*

$$Pr: \max\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\mathbf{x_B} + (\mathbf{c_N}^{\mathrm{T}} - \mathbf{c_B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x_N} = -\,\mathbf{c_B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{I}\mathbf{x_B} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x_N} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N} \geq \mathbf{0}$$

Tabella *canonica*

- I dati del problema in forma canonica possono essere organizzati in una tabella detta *tabella canonica* o *tableau*

$$
Pr: \max \begin{array}{|l|l|}
\hline
\mathbf{0}^T \mathbf{x_B} + (\mathbf{c_N}^T - \mathbf{c_B}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}) \mathbf{x_N} & = -\mathbf{c_B}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\
\hline
\mathbf{I} \mathbf{x_B} \qquad + \qquad \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{x_N} & = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\
\hline
\end{array}
$$

$$\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N} \geq \mathbf{0}$$

Tabella *canonica*

- I dati del problema in forma canonica possono essere organizzati in una tabella detta *tabella canonica* o *tableau*

costi ridotti delle variabili <u>in base</u>

costi ridotti delle variabili <u>fuori base</u>

valore della f.o. (cambiato di segno) in corrispondenza della SBA

$\mathbf{0}$	$(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})$	$-\,\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

SBA

colonne delle variabili <u>in base</u>

colonne delle variabili <u>fuori base</u>

Esempio

problema in **forma canonica**
rispetto alla base $\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1 | \mathbf{A}_3 | \mathbf{A}_4]$

$$
\begin{aligned}
\frac{21}{3} + \max\ & \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_5 \\
x_1 + 2x_2 + 2x_5 &= 21 \\
x_3 + 4x_2 - x_5 &= 9 \\
x_4 + 8x_2 + x_5 &= 21 \\
x_2, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

costi ridotti delle variabili in base

costi ridotti delle variabili fuori base

valore della f.o. (cambiato di segno) in corrispondenza della SBA

0	0	0	1/3	−2/3	− 21/3
1	0	0	2	2	21
0	1	0	4	−1	9
0	0	1	8	1	21

SBA

colonne delle variabili in base

colonne delle variabili fuori base

Criterio di ottimalità (prob. di max)

- **[Teorema]** Sia $\mathbf{B}$ una base ammissibile e $\mathbf{x} = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}]$ la corrispondente SBA. Se $c_j - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j \leq 0$ per ogni $j = 1,\ldots,n$, allora $\mathbf{x}$ è ottima.

- **[Dim]** La funzione obiettivo del problema ridotto è:

$$z = \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \max\,(\mathbf{c_N}^T - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x_N}$$

Se $\mathbf{c_N}^T - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \leq 0$, la soluzione ottima del problema ridotto si ottiene banalmente ponendo $\mathbf{x_N} = \mathbf{0}$. Il valore ottimo è

$$z = \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

che coincide con il valore assunto dalla funzione obiettivo in corrispondenza di $\mathbf{x}$. Segue che $\mathbf{x}$ è una soluzione ottima. ■

Criterio di ottimalità (prob. di max)

- **[Osservazione]** Il teorema precedente fornisce un criterio **sufficiente** ma **non necessario**: può esistere una SBA ottima (degenere) in corrispondenza della quale uno o più costi ridotti delle variabili fuori base sono positivi.

  - Se $c_j - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j \leq 0$ allora $\mathbf{x}$ è ottima.
  - Se $\mathbf{x}$ è ottima e non degenere allora $c_j - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j \leq 0$

Criterio di illimitatezza

- **[Teorema]** Sia $\mathbf{B}$ una base ammissibile e $\mathbf{x} = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}]$ la corrispondente SBA. Se esiste una variabile fuori base con costo ridotto positivo e coefficienti tutti non positivi (cioè se esiste un j con $c_j - \mathbf{c_B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_j > 0$ e $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_j \leq \mathbf{0}$), allora il problema è illimitato superiormente.

- **[Dim]** Si applica direttamente il teorema fondamentale della PL. Facciamo cioè vedere che se esiste un j con $c_j - \mathbf{c_B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_j > 0$ e $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_j \leq \mathbf{0}$ allora esiste una direzione di recessione $\mathbf{d}$ con $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} > 0$ e quindi, per il teorema citato, il problema è illimitato.

Consideriamo il problema ridotto senza le variabili di slack $\mathbf{x_B}$:

$$
\begin{aligned}
Pr:\ \max\ & (\mathbf{c_N}^{\mathrm{T}} - \mathbf{c_B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x_N} \\
& \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x_N} \leq \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\
& \mathbf{x_N} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Criterio di illimitatezza

- **[Teorema]** Sia $\mathbf{B}$ una base ammissibile e $\mathbf{x} = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}]$ la corrispondente SBA. Se esiste una variabile fuori base con costo ridotto positivo e coefficienti tutti non positivi (cioè se esiste un j con $c_j - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_j > 0$ e $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_j \leq \mathbf{0}$), allora il problema è illimitato superiormente.
- **[Dim]** segue…

e facciamo vedere che il versore $\mathbf{e}_j \in R^{n-m}$ è una direzione di *Pr*, cioè

$$\mathbf{e}_j \in \{\mathbf{x_N} \in R^{n-m} \mid (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x_N} \leq 0\}$$

Infatti

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{e}_j = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_j \text{ che per ipotesi è } \leq 0.$$

Inoltre $\mathbf{c}^T\mathbf{e}_j > 0$, infatti

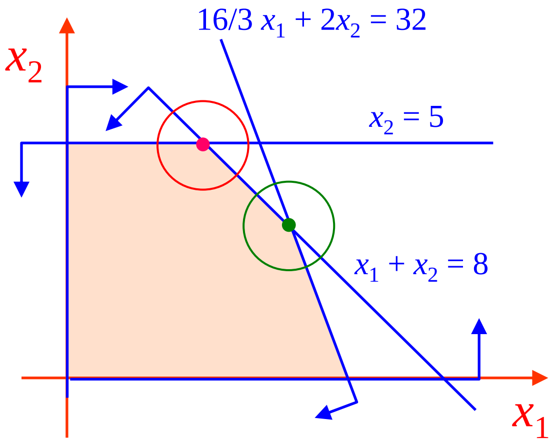
$$\mathbf{c}^T\mathbf{e}_j = (\mathbf{c_N}^T - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{e}_j = c_j - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_j \text{ che per ipotesi è } > 0$$

■

Basi adiacenti

[Definizione] 2 basi $\mathbf{B}$ e $\mathbf{B}'$ si dicono adiacenti se differiscono per una sola colonna

$$
\begin{aligned}
\max z = 5x_1 + 15x_2 & \\
x_2 &\le 5 \\
x_1 + x_2 &\le 8 \\
16/3x_1 + 2x_2 &\le 32 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$



x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	**b**
0	1	1	0	0	5
1	1	0	1	0	8
16/3	2	0	0	1	32

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	**b**
0	1	1	0	0	5
1	1	0	1	0	8
16/3	2	0	0	1	32

Cambiamento di base

- Se la base corrente non è ottima e il problema non è illimitato allora esiste una base $\mathbf{B}'$ *adiacente* a $\mathbf{B}$ alla quale corrisponde una SBA $\mathbf{x}'$ non peggiore di $\mathbf{x}$.

- Il passaggio da $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}'$ si effettua mediante una *operazione di pivot* (la stessa definita nel metodo di Gauss-Jordan) su un elemento **positivo** a_{hk} del *tableau*.

- Il pivot su a_{hk} trasforma la colonna k-esima del tableau nel versore $\mathbf{e}_h$. La nuova base $\mathbf{B}'$ quindi è ottenuta sostituendo la h-esima colonna di $\mathbf{B}$ (*variabile uscente*) con la k-esima colonna del tableau (*variabile entrante*)

Operazione di pivot (richiamo)

- L'operazione di pivot sull'elemento $a_{hk} \neq 0$ consiste in
  1. dividere la riga h del tableau per a_{hk}
  2. sommare ad ogni riga $i \neq h$ la nuova riga h ottenuta al passo precedente moltiplicata per $-a_{ik}$

- L'operazione di pivot consiste di una serie di *operazioni elementari* sul tableau (moltiplicazione di una riga per una costante non nulla e somma di una riga con una combinazione lineare delle altre). Il pivot quindi determina un tableau equivalente.

- Il pivot sull'elemento a_{hk} equivale a risolvere la h-esima equazione del tableau rispetto alla variabile x_k e sostituire x_k in tutte le altre equazioni e nella funzione obiettivo.

Operazione di pivot: esempio

2	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	5
-1	1	0	1	0	0
$\boxed{6}$	0	0	2	1	21

- Pivot sull'elemento $a_{hk} = 6$ ($h = 3$, $k = 1$)

Operazione di pivot: esempio

2	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	5
-1	1	0	1	0	0
1	0	0	1/3	1/6	7/2

1. Si divide la riga h del tableau per a_{hk}

   (Si divide la terza riga per 6)

Operazione di pivot: esempio

-1	1	0	1	0	0
1	0	0	1/3	1/6	7/2

+ =

2	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	5
0	1	0	4/3	1/6	7/2
1	0	0	1/3	1/6	7/2

2. Si somma ad ogni riga $i \neq h$ la nuova riga h ottenuta al passo precedente moltiplicata per $-a_{ik}$
(si somma alla seconda riga la nuova terza riga moltiplicata per 1)

Operazione di pivot: esempio

1	0	1	1	0	5

\+

-1	0	0	-1/3	-1/6	-7/2

=

2	0	0	1	0	0
0	0	1	2/3	-1/6	3/2
0	1	0	4/3	1/6	7/2
1	0	0	1/3	1/6	7/2

2. Si somma ad ogni riga $i \neq h$ la nuova riga h ottenuta al passo precedente moltiplicata per $-a_{ik}$
(si somma alla prima riga la nuova terza riga moltiplicata per -1)

Operazione di pivot: esempio

2	0	0	1	0	0

+

-2	0	0	-2/3	-1/3	-7

=

0	0	0	1/3	-1/3	-7
0	0	1	2/3	-1/6	3/2
0	1	0	4/3	1/6	7/2
1	0	0	1/3	1/6	7/2

2. Si somma ad ogni riga $i \neq h$ la nuova riga h ottenuta al passo precedente moltiplicata per $-a_{ik}$
(si somma alla riga 0 la nuova terza riga moltiplicata per -2)

Operazione di pivot: esempio

Tableau iniziale

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	
2	0	0	1	0	0	
1	0	1	1	0	5	x_3
-1	1	0	1	0	0	x_2
6	0	0	2	1	21	x_5

Tableau finale

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	
0	0	0	1/3	-1/3	-7	
0	0	1	2/3	-1/6	3/2	x_3
0	1	0	4/3	1/6	7/2	x_2
1	0	0	1/3	1/6	7/2	x_1

variabile uscente

variabile entrante

- Il pivot su a_{31} ha trasformato la colonna 1 del tableau nel versore $\mathbf{e}_3$.
- La nuova base $\mathbf{B}'$ quindi, formata dalle variabili (x_3, x_2, x_1), è stata ottenuta sostituendo la terza colonna di $\mathbf{B}$, formata dalle variabili (x_3, x_2, x_5), con la prima colonna del tableau.
- x_5 è la *variabile uscente* e x_1 è la *variabile entrante*

Cambiamento di base

- La nuova matrice $\mathbf{B}'$ ottenuta con l'operazione di pivot sull'elemento a_{hk} è ancora una base, dato che in generale si ha

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{1k} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{2k} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{hk} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{mk} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \det(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}') &= (-1)^{h+k} a_{hk} \neq 0 \\ \det(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}') &= \det(\mathbf{B}^{-1})\det(\mathbf{B}') \end{aligned}\right\} \det(\mathbf{B}') \neq 0$$

Scelta della colonna di pivot

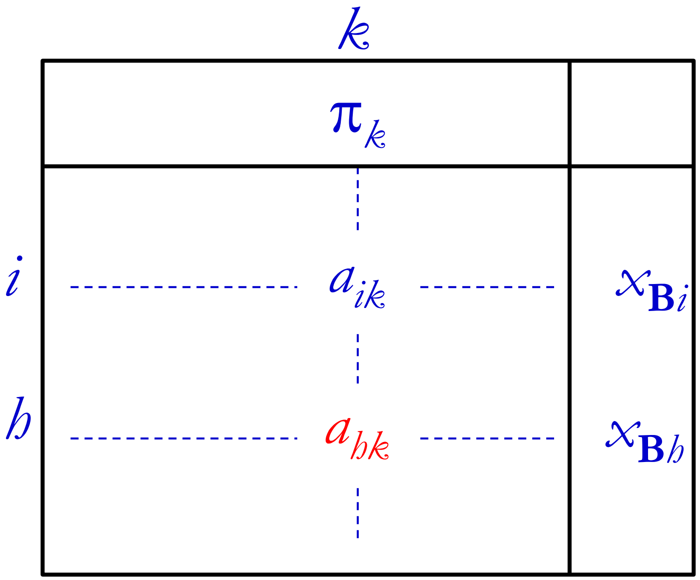
Indichiamo con $\boldsymbol{\pi} = (\mathbf{c_N}^T - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})$ il *vettore dei costi ridotti* delle variabili fuori base:

- Il'k-esimo coefficiente di costo ridotto $\boldsymbol{\pi}_k$ è la derivata parziale della f.o. di *Pr* rispetto a x_k.
- $\boldsymbol{\pi}_k$ esprime quindi la variazione marginale della f.o. quando ci si sposta dal punto $\mathbf{x} = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}]$ lungo la direzione x_k

- Dato che in un problema di massimo la soluzione corrente $\mathbf{x}$ migliora per spostamenti lungo una direzione di crescita della funzione obiettivo, la variabile x_k è candidata ad entrare in base se $\boldsymbol{\pi}_k > 0$

[Regola] scegli una colonna k tale che $\boldsymbol{\pi}_k > 0$

Scelta della riga di pivot



dopo l'operazione di pivot su a_{hk} la nuova soluzione di base $\mathbf{x'_B}$ (cioè $\mathbf{B'^{-1}b}$) avrà la forma:

$x_{\mathbf{B}i} - a_{ik}\, x_{\mathbf{B}h} \,/\, a_{hk}$ altre righe (2)

$x_{\mathbf{B}h} \,/\, a_{hk}$ riga h di pivot (1)

La nuova soluzione di base $[\mathbf{x'_B}, \mathbf{0}]$ deve essere ammissibile cioè deve essere $\mathbf{x'_B} \geq \mathbf{0}$. Per soddisfare tale condizione

- per la (1) deve essere $a_{hk} > 0$
- per la (2) deve essere $x_{\mathbf{B}i} - a_{ik}\, x_{\mathbf{B}h} \,/\, a_{hk} \geq 0 \quad \forall\ i = 1,\dots,m$

Scelta della riga di pivot

$$\underbrace{x_{\mathbf{B}i}}_{\geq\, 0} - a_{ik}\, \underbrace{x_{\mathbf{B}h}}_{\geq\, 0} \,/\, \underbrace{a_{hk}}_{>\, 0} \;\geq\; 0$$

se $a_{ik} \leq 0$ la quantità è sempre **non** negativa;

invece per le righe i con $a_{ik} > 0$, la disequazione è soddisfatta se

$$a_{ik}\, x_{\mathbf{B}h} \,/\, a_{hk} \;\leq\; x_{\mathbf{B}i}$$

cioè se

$$x_{\mathbf{B}h} \,/\, a_{hk} \;\leq\; x_{\mathbf{B}i} \,/\, a_{ik} \qquad \forall\ i \text{ con } a_{ik} > 0$$

Quindi la riga h va scelta in modo tale

$$\boxed{\frac{x_{\mathbf{B}h}}{a_{hk}} = \min_{i:a_{ik}>0} \left\{ \frac{x_{\mathbf{B}i}}{a_{ik}} \right\}}$$

Scelta della riga di pivot: regola

[Regola] tra tutte le righe i della colonna k con coefficiente **stretta-mente positivo**, scegli quella che rende minimo il rapporto $x_{\mathbf{B}i} / a_{ik}$

- Applicando la precedente regola si osserva che:
  1. la variabile x_h esce dalla base. Infatti il nuovo valore è
$$x'_h = x_{\mathbf{B}h} - a_{hk} \, x_{\mathbf{B}h} / a_{hk} = 0$$
  2. il valore z della funzione obiettivo non decresce. Infatti dopo il pivot si ha

$$-z' = -z - \pi_k \, x_{\mathbf{B}h} / a_{hk} \qquad \text{cioè}$$
$$z' = z + \pi_k \, x_{\mathbf{B}h} / a_{hk} \qquad \text{con } \pi_k > 0,\ a_{hk} > 0 \text{ e } x_{\mathbf{B}h} \geq 0,$$

quindi $z' \geq z$.

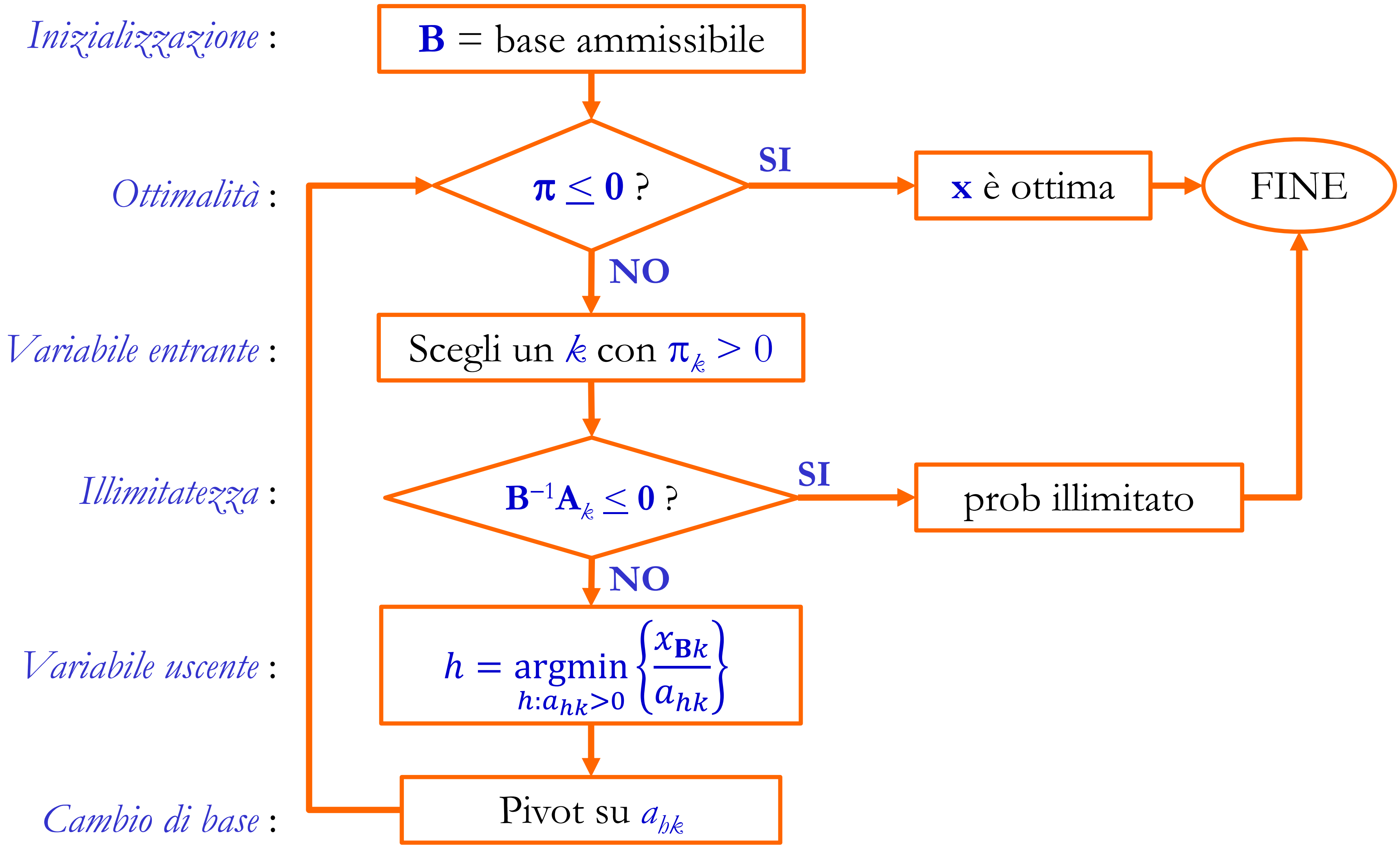
Osservazioni

- Quando la variabile entrante in base x_k assume il suo valore limite, la funzione obiettivo aumenta della quantità $+\ \pi_k\ x_{\mathbf{B}h}\ /\ a_{hk}$

- Se esiste una qualche riga i per cui $x_{\mathbf{B}i} = 0$ e $a_{ik} > 0$ (soluzione degenere) allora $\min_{i:a_{ik}>0} \left\{ \frac{x_{\mathbf{B}i}}{a_{ik}} \right\} = 0$ e quindi l'incremento della funzione obiettivo è nullo.

- Se per ogni riga i si ha $a_{ik} \leq 0$ allora $x_{\mathbf{B}h}$ può crescere arbitrariamente e quindi il problema è illimitato superiormente.

Algoritmo del simplesso: Fase II



Algoritmo del simplesso: Fase II

► Sia $\mathbf{B}$ una base ammissibile e il problema posto in forma canonica rispetto a $\mathbf{B}$.

[Algoritmo del Simplesso] (per un problema di massimo)

1. [Ottimalità] Esamina il vettore dei costi ridotti $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}^T - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$.
   Se $\boldsymbol{\pi} \leq \mathbf{0}$, la soluzione $\mathbf{x} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0})$ è ottima. Fine
2. [Variabile entrante] Scegli un k tale che $\pi_k > 0$
3. [Illimitatezza] Se $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_k \leq \mathbf{0}$, allora il problema è illimitato. Fine
4. [Variabile uscente] Calcola $x_{\mathbf{B}i} / (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})_{ik}$ per ogni riga i con $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})_{ik} > 0$. Sia h l'indice di riga che realizza il minimo rapporto. $\mathbf{A}_k$ è la colonna entrante in base e la h-esima colonna di $\mathbf{B}$ è quella uscente.
5. [Aggiornamento] Esegui il pivot su $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})_{hk}$: aggiungi ad ogni riga un multiplo della h-esima riga in modo da trasformare $\mathbf{A}_k$ nel versore $\mathbf{e}_h$.
6. Torna al punto 1.

Algoritmo del simplesso: Fase II

- Sia $\mathbf{B}$ una base ammissibile e il problema posto in forma canonica rispetto a $\mathbf{B}$.

[Algoritmo del Simplesso] (per un problema di minimo)

1. [Ottimalità] Esamina il vettore dei costi ridotti $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}^T - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$.
   Se $\boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0}$, la soluzione $\mathbf{x} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0})$ è ottima. Fine
2. [Variabile entrante] Scegli un k tale che $\pi_k < 0$
3. [Illimitatezza] Se $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_k \leq \mathbf{0}$, allora il problema è illimitato. Fine
4. [Variabile uscente] Calcola $x_{\mathbf{B}i} / (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})_{ik}$ per ogni riga i con $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})_{ik} > 0$. Sia h l'indice di riga che realizza il minimo rapporto. $\mathbf{A}_k$ è la colonna entrante in base e la h-esima colonna di $\mathbf{B}$ è quella uscente.
5. [Aggiornamento] Esegui il pivot su $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})_{hk}$: aggiungi ad ogni riga un multiplo della h-esima riga in modo da trasformare $\mathbf{A}_k$ nel versore $\mathbf{e}_h$.
6. Torna al punto 1.

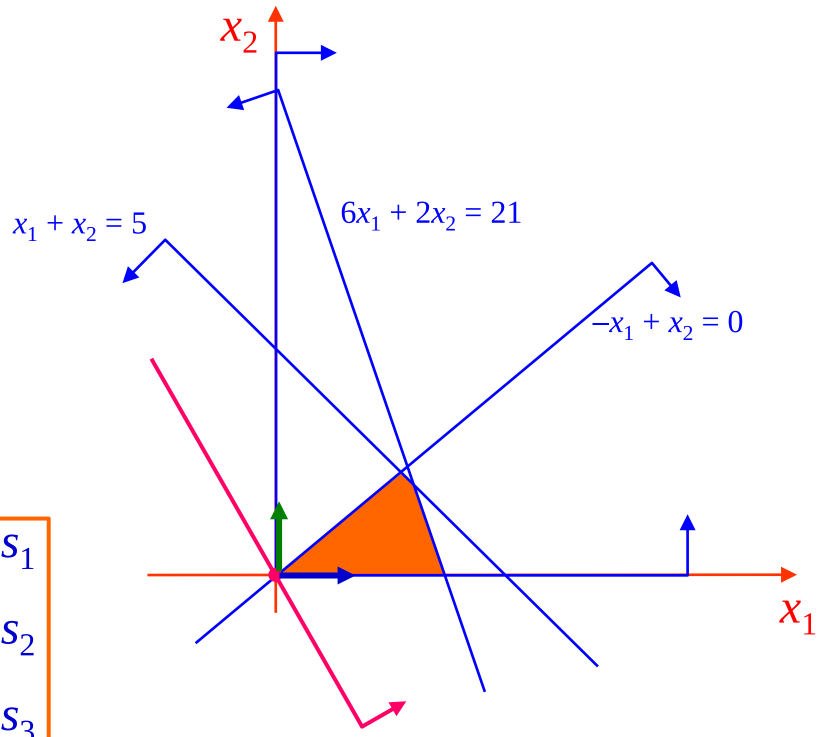
Approfondimento:

significato geometrico del pivot e degenerazione

Pivot: significato geometrico

$$\max z = 2x_1 + x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$-x_1 + x_2 \leq 0$$
$$6x_1 + 2x_2 \leq 21$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	$-z$	
2	1	0	0	0	0	
1	1	1	0	0	5	s_1
-1	1	0	1	0	0	s_2
6	2	0	0	1	21	s_3



La colonna k di pivot determina la direzione dello spostamento.

Pivot: significato geometrico

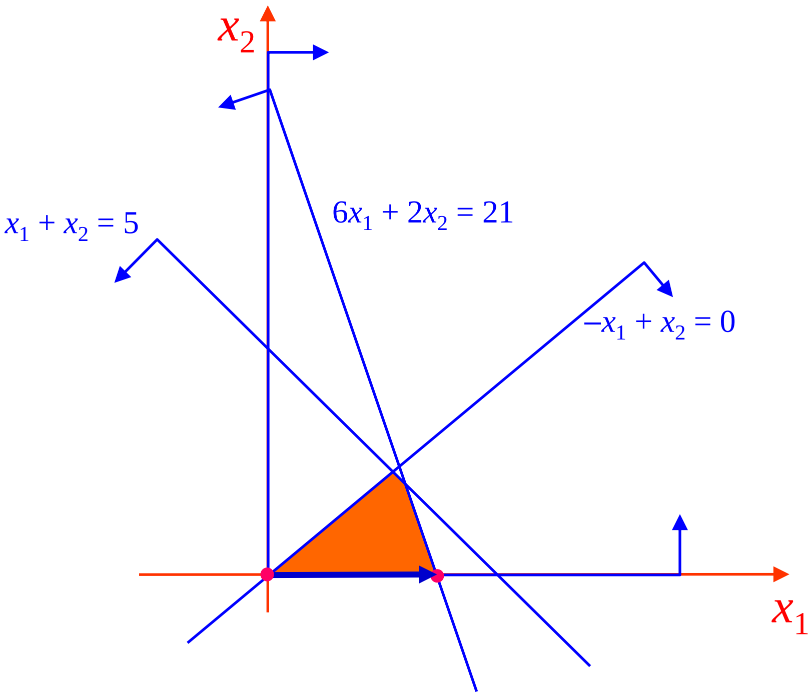
x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	$-z$	
2	1	0	0	0	0	
1	1	1	0	0	5	s_1
-1	1	0	1	0	0	s_2
6	2	0	0	1	21	s_3

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	$-z$	
0	1/3	0	0	-1/3	-21/3	
0	2/3	1	0	-1/6	3/2	s_1
0	4/3	0	1	1/6	21/6	s_2
1	1/3	0	0	1/6	21/6	x_1

- La riga di pivot determina l'<u>ampiezza</u> dello spostamento: scegliere la riga h che rende minimo il rapporto

$$x_{\mathbf{B}i} \,/\, a_{ik}$$

significa fare il massimo spostamento lungo la direzione individuata dalla colonna k.

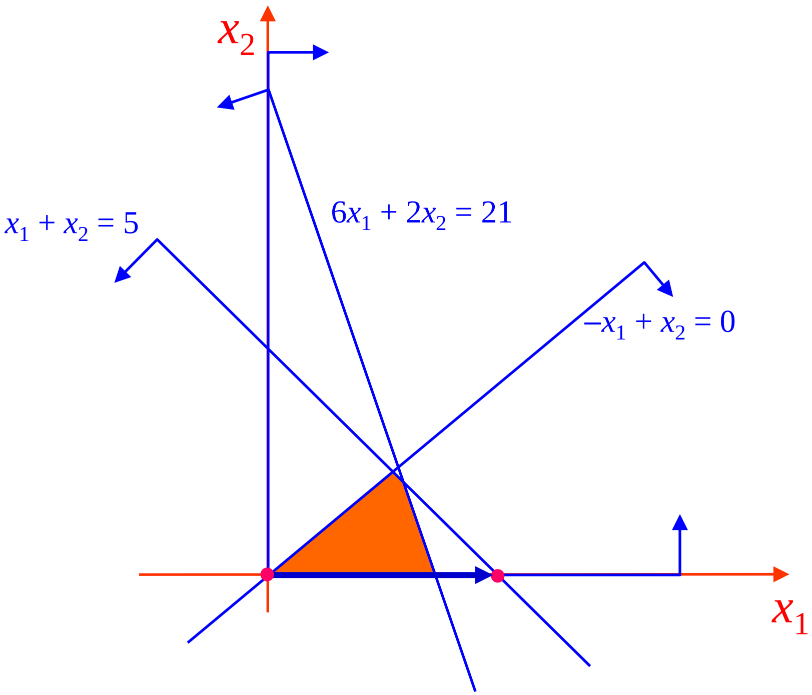


Pivot: significato geometrico

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	$-z$	
2	1	0	0	0	0	
1	1	1	0	0	5	s_1
-1	1	0	1	0	0	s_2
6	2	0	0	1	21	s_3

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	$-z$	
0	-1	-2	0	0	-10	
1	1	1	0	0	5	x_1
0	2	1	1	0	5	s_2
0	-4	-6	0	1	-9	s_3

- Una riga diversa di h porta a una soluzione di base non ammissibile (un punto fuori dal poliedro)



Scelta della colonna di pivot: criteri

Quando esistono più direzioni di crescita alternative, la scelta non preclude la correttezza dell'algoritmo (va bene una direzione qualsiasi) ma può incidere sul tempo di calcolo. I criteri più utilizzati sono:

1. regola del gradiente (o della *direzione più ripida*): si sceglie la colonna col coefficiente più grande

$$\boxed{k = \underset{i}{\operatorname{argmax}}\{\pi_i > 0\}}$$

2. regola del massimo incremento (criterio più oneroso del precedente): colonna che garantisce l'incremento più ampio della funzione obiettivo

$$\boxed{k = \underset{i}{\operatorname{argmax}}\{\pi_i \frac{x_{\mathbf{B}h}}{a_{hi}} > 0\}}$$

Scelta della colonna di pivot: esempio

regola del gradiente

$$\boxed{k = \underset{i}{\operatorname{argmax}}\{\pi_i > 0\}}$$

5 = max{2,5,1}

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$-z$
2	$\boxed{5}$	1	0	0	0	0
1	3	0	1	0	0	4
0	5	1	0	1	0	5
2	4	6	0	0	1	7

Scelta della colonna di pivot: esempio

regola del massimo incremento

$$\boxed{k = \underset{i}{\operatorname{argmax}}\{\pi_i \frac{x_{\mathbf{B}h}}{a_{hi}} > 0\}}$$

nuovo valore della f.o: $z' = z + \frac{\pi_k x_{\mathbf{B}h}}{a_{hk}}$

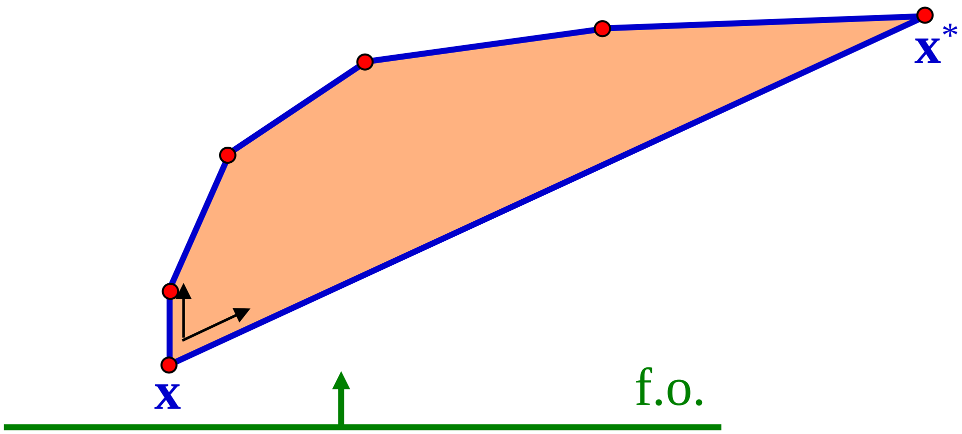
$\frac{\pi_1 x_{\mathbf{B}3}}{a_{31}} = 7$ $\frac{\pi_2 x_{\mathbf{B}2}}{a_{22}} = 5$ $\frac{\pi_3 x_{\mathbf{B}3}}{a_{33}} = 7/6$

$7 = \max\{7,5,7/6\}$

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$-z$
$\boxed{2}$	5	1	0	0	0	0
1	3	0	1	0	0	4
0	$\boxed{5}$	1	0	1	0	5
$\boxed{2}$	4	$\boxed{6}$	0	0	1	7

Scelta della colonna di pivot: criteri

- Non esiste un criterio più efficiente degli altri in assoluto. In particolare si osservi che la direzione più ripida individuata dalla regola del gradiente è una condizione locale;
  il miglioramento della f.o. dipende dallo spostamento effettivo: a una direzione ripida può corrispondere uno spostamento piccolo e viceversa.



In questo caso, la scelta della direzione più ripida porta a visitare tutti i vertici del poliedro, mentre la scelta del massimo incremento porta direttamente alla soluzione ottima.

Pivoting: esempio

- Problema di **Beale**

$$
\begin{aligned}
\min z = \quad & -3/4\,x_4 + 20x_5 - 1/2x_6 + 6x_7 \\
x_1 + \quad & 1/4\,x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0 \\
x_2 + \quad & 1/2\,x_4 - 12x_5 - 1/2x_6 + 3x_7 = 0 \\
x_3 + \quad & + x_6 = 1 \\
x_i \geq 0 \quad & i = 1,\dots,7
\end{aligned}
$$

tableau iniziale

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
0	0	0	–3/4	20	–1/2	6	0	
1	0	0	1/4	–8	–1	9	0	x_1
0	1	0	1/2	–12	–1/2	3	0	x_2
0	0	1	0	0	1	0	1	x_3

Pivoting: esempio

dopo il I° pivot

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	-z
	3	0	0	0	–4	–7/2	33	0
x_4	4	0	0	1	–32	–4	36	0
x_2	–2	1	0	0	4	3/2	–15	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1

dopo il II° pivot

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	-z
	1	1	0	0	0	–2	18	0
x_4	–12	8	0	1	0	8	–84	0
x_5	–1/2	1/4	0	0	1	3/8	–15/4	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1

dopo il III° pivot

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	-z
	–2	3	0	1/4	0	0	–3	0
x_6	–3/2	1	0	1/8	0	1	–21/2	0
x_5	1/16	–1/8	0	–3/64	1	0	3/16	0
x_3	3/2	–1	1	–1/8	0	0	21/2	1

Pivoting: esempio

dopo il IV° pivot

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
–1	1	0	–1/2	16	0	0	0	
2	–6	0	–5/2	56	1	0	0	x_6
1/3	–2/3	0	–1/4	16/3	0	1	0	x_7
–2	6	1	5/2	–56	0	0	1	x_3

dopo il V° pivot

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
0	–2	0	–7/4	44	1/2	0	0	
1	–3	0	–5/4	28	1/2	0	0	x_1
0	1/3	0	1/6	–4	–1/6	1	0	x_7
0	0	1	0	0	1	0	1	x_3

dopo il VI° pivot

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
0	0	0	–3/4	20	–1/2	6	0	
1	0	0	1/4	–8	–1	9	0	x_1
0	1	0	1/2	–12	–1/2	3	0	x_2
0	0	1	0	0	1	0	1	x_3

Pivoting: esempio

Il tableau corrente è uguale a quello iniziale: si è creata una situazione di **ciclaggio**!

tableau iniziale

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
0	0	0	–3/4	20	–1/2	6	0	
1	0	0	1/4	–8	–1	9	0	x_1
0	1	0	1/2	–12	–1/2	3	0	x_2
0	0	1	0	0	1	0	1	x_3

dopo il VI° pivot

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
0	0	0	–3/4	20	–1/2	6	0	
1	0	0	1/4	–8	–1	9	0	x_1
0	1	0	1/2	–12	–1/2	3	0	x_2
0	0	1	0	0	1	0	1	x_3

Scelta della colonna di pivot: criteri

1. regola del gradiente (o della *direzione più ripida*): si sceglie la colonna col coefficiente più grande

$$\boxed{k = \underset{i}{\operatorname{argmax}}\{\pi_i > 0\}}$$

2. regola del massimo incremento (criterio più oneroso del precedente): colonna che garantisce l'incremento più ampio della funzione obiettivo

$$\boxed{k = \underset{i}{\operatorname{argmax}}\{\pi_i \frac{x_{\mathbf{B}h}}{a_{hk}} > 0\}}$$

3. Regola di *Bland* (evita il ciclaggio in caso di soluzioni degenere): la colonna associata alla variabile di indice minimo e successivamente, in presenza di righe con stesso rapporto minimo, la riga associata alla variabile in base di indice minimo

$$\boxed{k = \min_{i:\pi_i > 0}\{i\}}$$

Scelta della colonna di pivot: esempio

regola di *Bland*

$$k = \min_{i:\pi_i > 0} \{i\}$$

regola del gradiente

$$k = \underset{i}{\operatorname{argmax}} \{\pi_i > 0\}$$

5 = max{2,5,1}

1 = min{1,2,3}

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$-z$
2	5	1	0	0	0	0
1	3	0	1	0	0	4
0	5	1	0	1	0	5
2	4	6	0	0	1	7

Ciclaggio e regola di Bland

Regola di *Bland*:

- tra tutte le variabili candidate ad entrare in base scegli quella di indice minimo;
- tra tutte le righe che rendono minimo il rapporto $x_{\mathbf{B}i} / a_{ik}$ scegli quella associata alla variabile in base di indice minimo.

- Problema di **Beale**

$$
\begin{aligned}
\min z = & \quad -3/4\, x_4 + 20x_5 - 1/2x_6 + 6x_7 \\
& x_1 + 1/4\, x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0 \\
& x_2 + 1/2\, x_4 - 12x_5 - 1/2x_6 + 3x_7 = 0 \\
& x_3 + x_6 = 1 \\
& x_i \geq 0 \qquad i = 1,\dots,7
\end{aligned}
$$

Nel I°, II° e III° pivot entrambi i criteri (regola di Bland e regola del gradiente) portano alla stessa scelta, quindi iniziamo dal tableau ottenuto dopo la terza operazione di pivot:

Ciclaggio e regola di Bland

Alla quarta operazione di pivot le scelte si differenziano

regola di *Bland*

regola del gradiente

dopo il III° pivot

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
–2	3	0	1/4	0	0	–3	0	
–3/2	1	0	1/8	0	1	–21/2	0	x_6
1/16	–1/8	0	–3/64	1	0	3/16	0	x_5
3/2	–1	1	–1/8	0	0	21/2	1	x_3

dopo il IV° pivot

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
0	–1	0	–5/4	32	0	3	0	
0	–2	0	–1	24	1	–6	0	x_6
1	–2	0	–3/4	16	0	3	0	x_1
0	2	1	1	–24	0	6	1	x_3

Ciclaggio e regola di Bland

dopo il V° pivot

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	-z	
0	0	1/2	–3/4	20	0	6	1/2	
0	0	1	0	0	1	0	1	x_6
1	0	1	1/4	–8	0	9	1	x_1
0	1	1/2	1/2	–12	0	3	1/2	x_2

dopo il VI° pivot

tableau ottimo

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	-z	
0	3/2	5/4	0	2	0	21/2	5/4	
0	0	1	0	0	1	0	1	x_6
1	–1/2	3/4	0	–2	0	15/2	3/4	x_1
0	2	1	1	–24	0	6	1	x_4

SBA *degeneri*

- A ciascuna matrice di base $\mathbf{B}$ (ammissibile) corrisponde **una e una sola** soluzione di base (ammissibile) $\mathbf{x} = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}]$.

- Viceversa, ad una soluzione di base (ammissibile) possono corrispondere più matrici di base. In questo caso si parla di soluzione di base (ammissibile) *degenere*.

  Una SBA degenere associata ad una base $\mathbf{B}$ ha almeno una componente di $\mathbf{x}_B$ nulla (per esempio la k-esima). La stessa SBA, quindi, può essere ottenuta da una qualsiasi nuova base $\mathbf{B}'$ diversa nella k-esima colonna.
  Infatti, il pivot su un elemento a_{kr} lascia invariato il vettore soluzione $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, essendo $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_k = 0$

- **[Osservazione]** Una SBA degenere soddisfa all'uguaglianza più di n vincoli: le m equazioni del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, le $n - m$ restrizioni sulle variabili non in base e le restrizioni sulle variabili in base con valore nullo.

SBA *degeneri*: esempio

- Si consideri il problema in forma standard descritto dalla seguente matrice $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$

$$
[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 9 & 3 & 7 \end{array}
$$

Evidentemente la matrice $\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1 \mid \mathbf{A}_2 \mid \mathbf{A}_3]$ è una base ammissibile e la SBA associata è $\mathbf{x} = [5\ 0\ 7\ 0\ 0\ 0]$.

L'operazione di pivot sull'elemento a_{26} conduce al nuovo sistema

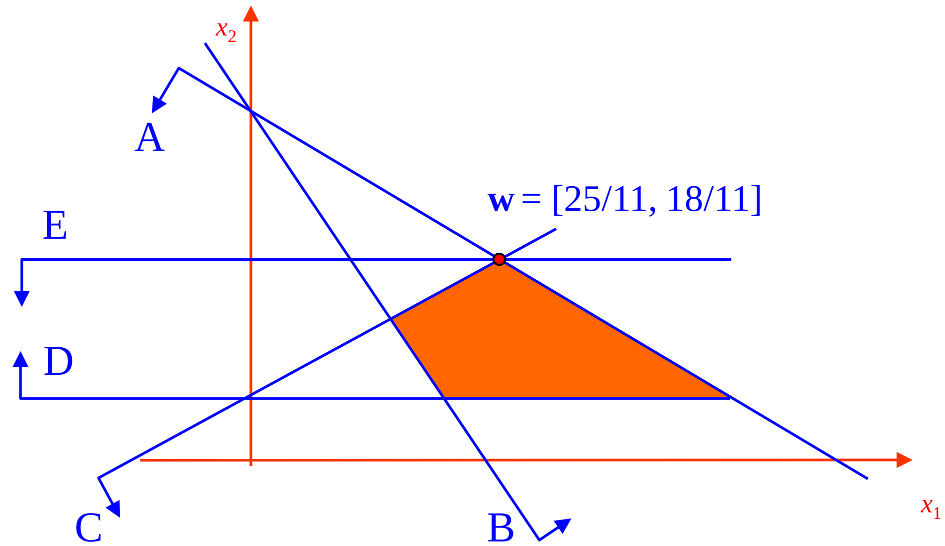
$$
[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ 1 & -0.2 & 0 & 1.8 & 3.4 & 0 & 5 \\ 0 & 0.2 & 0 & 1.2 & 0.6 & 1 & 0 \\ 0 & -0.6 & 1 & -1.6 & 7.2 & 0 & 7 \end{array}
$$

La nuova base è $\mathbf{B}' = [\mathbf{A}_1 \mid \mathbf{A}_6 \mid \mathbf{A}_3]$ ma la SBA associata rimane $\mathbf{x} = [5\ 0\ 7\ 0\ 0\ 0]$

SBA *degeneri*: interpretazione geometrica

- Una SBA degenere corrisponde geometricamente a un vertice dato dall'intersezione di $p > n$ iperpiani.

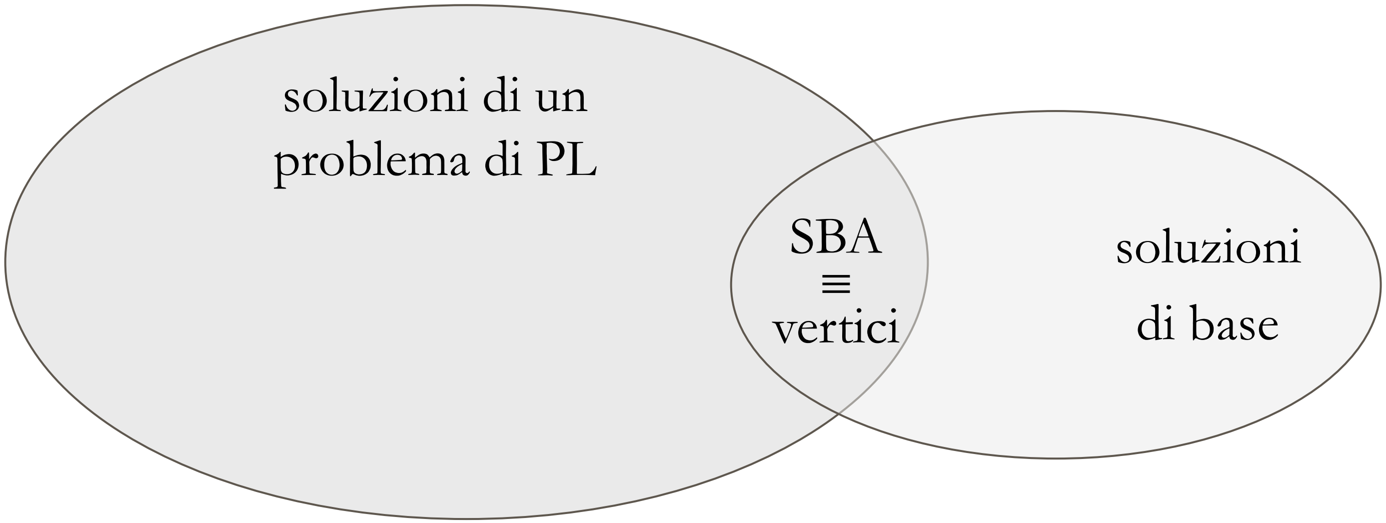
$$
\begin{aligned}
\max z = x_1 + 3x_2 & \\
6x_1 + 10x_2 &\leq 30 \\
3x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\
x_1 - 2x_2 &\geq -1 \\
x_2 &\geq 1/2 \\
x_2 &\leq 18/11
\end{aligned}
$$



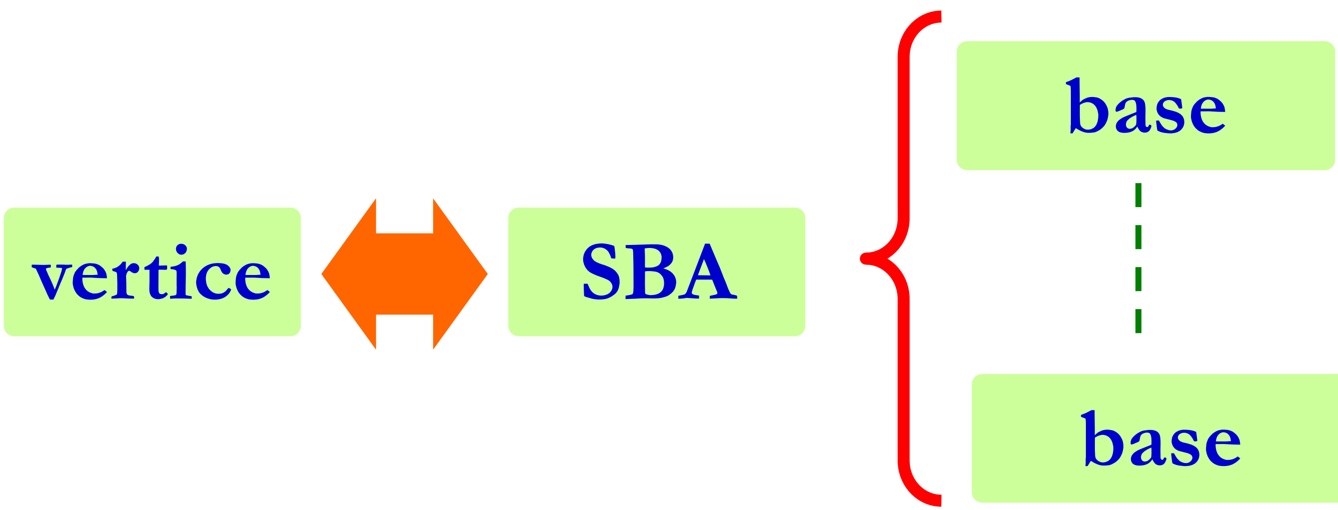
- Il vertice **w** si ottiene sia da $A \cap C$, sia da $A \cap E$ e anche da $C \cap E$

- Lo stesso vertice è ottenibile intersecando un qualunque sottoinsieme di n tra i p iperpiani. Analogamente, la stessa SBA è associata a tutte le basi ottenibili scegliendo n tra le p equazioni.
  Si parla di SBA *degeneri* perché alcuni cambi di base non comportano un effettivo cambio di vertice (cioè corrispondono a uno spostamento nullo).

Sintesi



soluzioni di un problema di PL
SBA ≡ vertici
soluzioni di base



vertice
SBA
base
base

Esercizi

1. Determinare il numero di operazioni elementari (operazioni aritmetiche) richieste da un'iterazione dell'algoritmo del simplesso.

2. Determinare le condizioni di ottimalità per un problema di minimo e dimostrarne la correttezza.

Approfondimenti

- Descrizione geometrica del metodo del simplesso

Esercizi

Stabilire se esistono valori di λ per i quali il punto $\mathbf{x} = (0,1,0)$ è soluzione ottima del seguente problema di PL

$$
\begin{aligned}
\min z = 2x_1 + x_2 - 2x_3 & \\
\lambda x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 1 \\
2x_1 + x_2 &\leq 2 \\
x_1 - x_2 &\leq -1 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Algoritmo del simplesso:
Fase I

Algoritmo del simplesso: Fase I

- La Fase I dell'algoritmo del simplesso determina se il problema in forma standard P: $\max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}: \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \geq \mathbf{0}_m, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in R^n\}$ è compatibile. In tal caso individua una base ammissibile **B** e pone il problema in forma canonica.

- A tale scopo si introducono m variabili artificiali $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ (una per ogni vincolo) e si definisce il *problema ausiliario*

$$\begin{aligned} \min z(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}) &= \alpha_1 + \ldots + \alpha_m \\ \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{I}_m\boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}_n \quad \boldsymbol{\alpha} &\geq \mathbf{0}_m \end{aligned}$$

- **[Nota]** Il problema ausiliario è <u>sempre</u> un problema di minimo, anche se il problema da risolvere è di massimo

Fase I: esempio

Problema di PL

$$\min z = x_1 + x_2 + 10x_3$$
$$x_2 + 4x_3 = 2$$
$$-2x_1 + x_2 - 6x_3 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

x_1	x_2	x_3	$-z$
1	1	10	0
0	1	4	2
–2	1	–6	2

Problema ausiliario

$$\min z = \alpha_1 + \alpha_2$$
$$x_2 + 4x_3 + \alpha_1 = 2$$
$$-2x_1 + x_2 - 6x_3 + \alpha_2 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0$$

	x_1	x_2	x_3	α_1	α_2	$-z$
	0	0	0	1	1	0
α_1	0	1	4	1	0	2
α_2	–2	1	–6	0	1	2

Algoritmo del simplesso: Fase I

$$\min z(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{I}_m \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}_n, \boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{0}_m$$

- $\mathbf{I}_m$ è una base e $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}_m$ quindi il problema non è vuoto e si pone facilmente in forma canonica ricavando le variabili α dai vincoli e sostituendole nella f.o.
- Il problema non è illimitato dato che è un problema di minimo con tutti coeff. della f.o. positivi e variabili vincolate in segno

Il problema ausiliario può essere risolto applicando
la Fase II del metodo del simplesso

Fase I: esempio

$$\min z = \alpha_1 + \alpha_2$$
$$x_2 + 4x_3 + \alpha_1 = 2$$
$$-2x_1 + x_2 - 6x_3 + \alpha_2 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0$$

x_1	x_2	x_3	α_1	α_2	$-z$	
0	0	0	1	1	0	
0	1	4	1	0	2	α_1
–2	1	–6	0	1	2	α_2

Il problema deve essere messo in forma canonica:

1. dal vincolo i-esimo ricavo l'espressione di α_i

$$\alpha_1 = 2 - x_2 - 4x_3$$
$$\alpha_2 = 2 + 2x_1 - x_2 + 6x_3$$

2. sostituisco le espressioni delle α_i nella funzione obiettivo

$$\min z = \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - x_2 - 4x_3 + 2 + 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 4 + 2x_1 - 2x_2 + 2x_3$$

x_1	x_2	x_3	α_1	α_2	$-z$	
2	–2	2	0	0	- 4	
0	1	4	1	0	2	α_1
–2	1	–6	0	1	2	α_2

Forma canonica:

soluzione di base non ottima

x_1	x_2	x_3	α_1	α_2	$-z$	
2	0	10	2	0	0	
0	1	4	1	0	2	x_2
–2	0	–10	–1	1	0	α_2

soluzione di base ottima

E' facile verificare che (0, 2, 0) è una soluzione ammissibile del problema originale

Algoritmo del simplesso: Fase I

[Teorema] Il problema P: $\max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}: \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \geq \mathbf{0}_m, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in R^n\}$ è compatibile se e solo se il valore della soluzione ottima $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$ del problema ausiliario è $z^* = 0$.

[Dim]

1. $z^* = 0 \Longrightarrow P$ è compatibile (ha una soluzione ammissibile)

   Dato che la f.o. del problema ausiliario è la somma delle variabili artificiali (che sono non negative), allora $z^* = 0$ se e solo se $\boldsymbol{\alpha}^* = \mathbf{0}$. Segue che $\mathbf{Ax}^*+\mathbf{I}_m\boldsymbol{\alpha}^* = \mathbf{Ax}^* = \mathbf{b}$. Quindi $\mathbf{x}^*$ è una soluzione ammissibile per P.

2. P è compatibile $\Longrightarrow z^* = 0$

   Supponiamo per assurdo che esista una soluzione ammissibile $\underline{\mathbf{x}}$ di P e che $z^* > 0$. Se $\underline{\mathbf{x}}$ è ammissibile per P allora $(\underline{\mathbf{x}}, \mathbf{0})$ è una soluzione del problema ausiliario con valore $\underline{z} = 0$. Ma allora $z^* > 0$ non è il valore ottimo.

■

Fase I: determinazione SBA

Se $z^* = 0$ allora $\mathbf{x}^*$ è una soluzione ammissibile per P.

Non è detto tuttavia che $\mathbf{x}^*$ sia una SBA.

Determinazione della Base ammissibile di partenza per la Fase II

Caso 1:

$\mathbf{x}^*$ **è** una SBA, cioè tutte le variabili artificiali sono fuori base.

- elimina le variabili artificiali dal tableau;
- ripristina i costi originali del problema;
- ripristina la forma canonica.

Fase I: determinazione SBA

Se $z^* = 0$ allora $\mathbf{x}^*$ è una soluzione ammissibile per P.

Non è detto tuttavia che $\mathbf{x}^*$ sia una SBA.

Determinazione della Base ammissibile di partenza per la Fase II

Caso 2:

$\mathbf{x}^*$ **non è** una SBA, ossia almeno una variabile artificiale è in base (in tal caso la soluzione ottima $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$ è necessariamente degenere).

- effettua operazioni di pivot (degenere) in modo da far uscire dalla base tutte le variabili artificiali;
- elimina eventuali righe ridondanti;
- procedi come nel Caso 1.

Determinazione SBA: esempio caso 1

Supponiamo di avere alla fine della Fase I il seguente tableau:

x_1	x_2	x_3	α_1	α_2	$-z$	
0	0	0	1	1	0	
0	1	1	2/5	–1/4	0	x_3
1	–1	0	–3/5	4/5	1	x_1

la soluzione $\mathbf{x}^* = (1,0,0)$ è una SBA per il problema originale; il particolare x_3 e x_1 sono le variabili in base.

- elimino le variabili artificiali e ripristino i coefficienti della f.o. del problema originale (che supponiamo sia max $z = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3$)

x_1	x_2	x_3	$-z$	
2	2	3	0	
0	1	1	0	x_3
1	–1	0	1	x_1

Determinazione SBA: esempio caso 1

- ripristino la forma canonica mediante operazioni di pivot:

x_1	x_2	x_3	$-z$
2	2	3	0
0	1	1	0
1	–1	0	1

x_1	x_2	x_3	$-z$
0	4	3	-2
0	1	1	0
1	–1	0	1

x_1	x_2	x_3	$-z$
0	4	3	-2
0	1	1	0
1	–1	0	1

x_1	x_2	x_3	$-z$
0	1	0	-2
0	1	1	0
1	–1	0	1

forma canonica

Determinazione SBA: esempio caso 2

Supponiamo di avere alla fine della Fase I il seguente tableau:

x_1	x_2	x_3	α_1	α_2	-z	
2	0	10	2	0	0	
0	1	4	1	0	2	x_2
–2	0	–10	–1	1	0	α_2

$\mathbf{x}^* = (0, 2, 0)$ è una soluzione ammissibile del problema originale ma non è associata ad una base ammissibile perché α_2 è in base.

- Per rimuovere α_2 dalla base occorre fare un pivot sulla 2° riga.
- Eseguo il pivot su un elemento $\neq 0$ corrispondente ad una variabile del problema originale

[Nota] Se tutti gli elementi corrispondenti alle variabili del problema originale sono nulli, la riga è ridondante e può essere rimossa dal tableau direttamente (insieme alla variabile artificiale).

Determinazione SBA: esempio caso 2

x_1	x_2	x_3	α_1	α_2	$-z$
2	0	10	2	0	0
0	1	4	1	0	2
–2	0	–10	–1	1	0

x_1	x_2	x_3	α_1	α_2	$-z$
0	0	0	1	1	0
0	1	4	1	0	2
1	0	5	1/2	–1/2	0

è sufficiente che l'elemento sia $\neq 0$ perché il pivot è su una componente degenere della base

$\mathbf{x}^* = (0, 2, 0)$ è una SBA del problema originale; le variabili in base sono x_2 e x_1.

A questo punto si procede come nel caso 1. (si eliminano le variabili artificiali, si ripristina la f.o. originale e quindi la forma canonica).

Esercizio

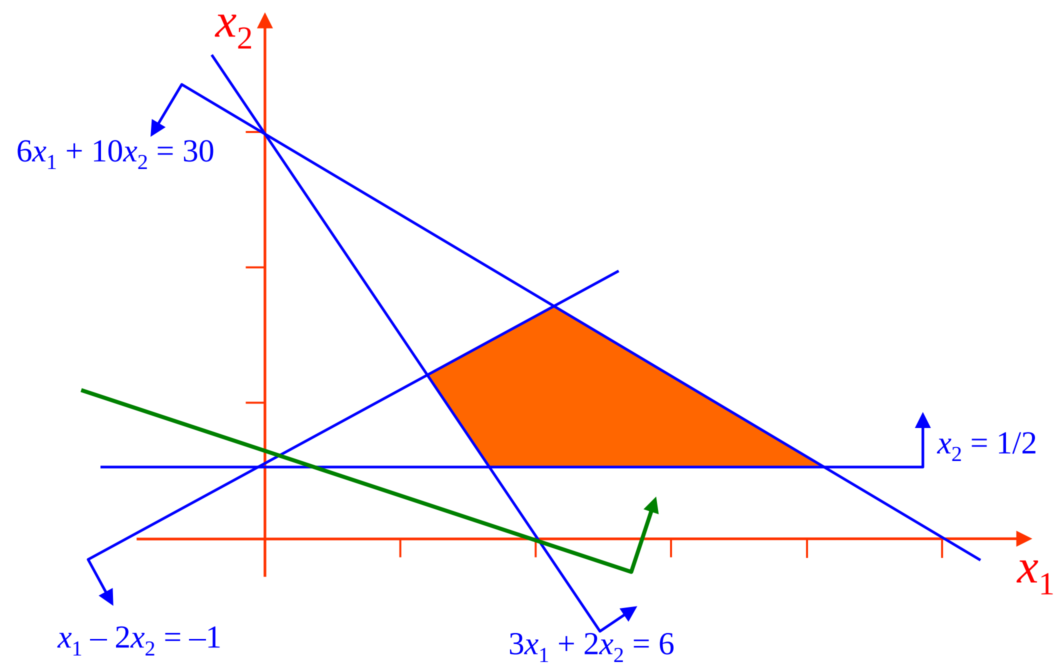
Determinare una SBA di partenza del seguente problema di PL utilizzando la Fase I del metodo del simplesso.

$$
\begin{aligned}
\min z = -3x_1 - 4x_2 - 7x_3 & \\
x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\
2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Esempio completo

Algoritmo del simplesso: esempio

$$\max z = x_1 + 3x_2$$
$$\begin{aligned} 6x_1 + 10x_2 &\leq 30 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ x_1 - 2x_2 &\geq -1 \\ x_2 &\geq 1/2 \end{aligned}$$



- L'algoritmo del simplesso si applica a problemi in forma standard, quindi poniamo il problema in tale forma.
- **[Nota]** si osservi che le variabili x_1 e x_2 sono implicitamente vincolate in segno dai vincoli dei problema.

$$\max z = x_1 + 3x_2$$
$$\begin{aligned} 6x_1 + 10x_2 + s_1 &= 30 \\ 3x_1 + 2x_2 - s_2 &= 6 \\ -x_1 + 2x_2 + s_3 &= 1 \\ x_2 - s_4 &= ½ \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Esempio: tableau iniziale

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$-z$
1	3	0	0	0	0	0
6	10	1	0	0	0	30
3	2	0	-1	0	0	6
-1	2	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	-1	1/2

- Il tableau non è in forma canonica: è necessario applicare la Fase I del simplesso.
- Si osservi che s_1 e s_3 sono colonne unitarie, quindi la matrice identità può essere ottenuta introducendo solo 2 variabili artificiali α_1 e α_2

Esempio: Fase I

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	α_1	α_2	$-z$
0	0	0	0	0	0	1	1	0
6	10	1	0	0	0	0	0	30
3	2	0	-1	0	0	1	0	6
-1	2	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	-1	0	1	1/2

- Il tableau non è in forma canonica perché i costi ridotti delle variabili in base α_1 e α_2 non sono nulli.
- La forma canonica si può ottenere sostituendo α_1 e α_2 in funzione obiettivo con le espressioni che si possono ricavare dai vincoli

Esempio: Fase I

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	α_1	α_2	$-z$
0	0	0	0	0	0	1	1	0
6	10	1	0	0	0	0	0	30
3	2	0	-1	0	0	1	0	6
-1	2	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	-1	0	1	1/2

- Dal secondo vincolo si ottiene: $\alpha_1 = 6 + s_2 - 2x_2 - 3x_1$
- Dal quarto vincolo si ottiene: $\alpha_2 = 0.5 + s_4 - x_2$

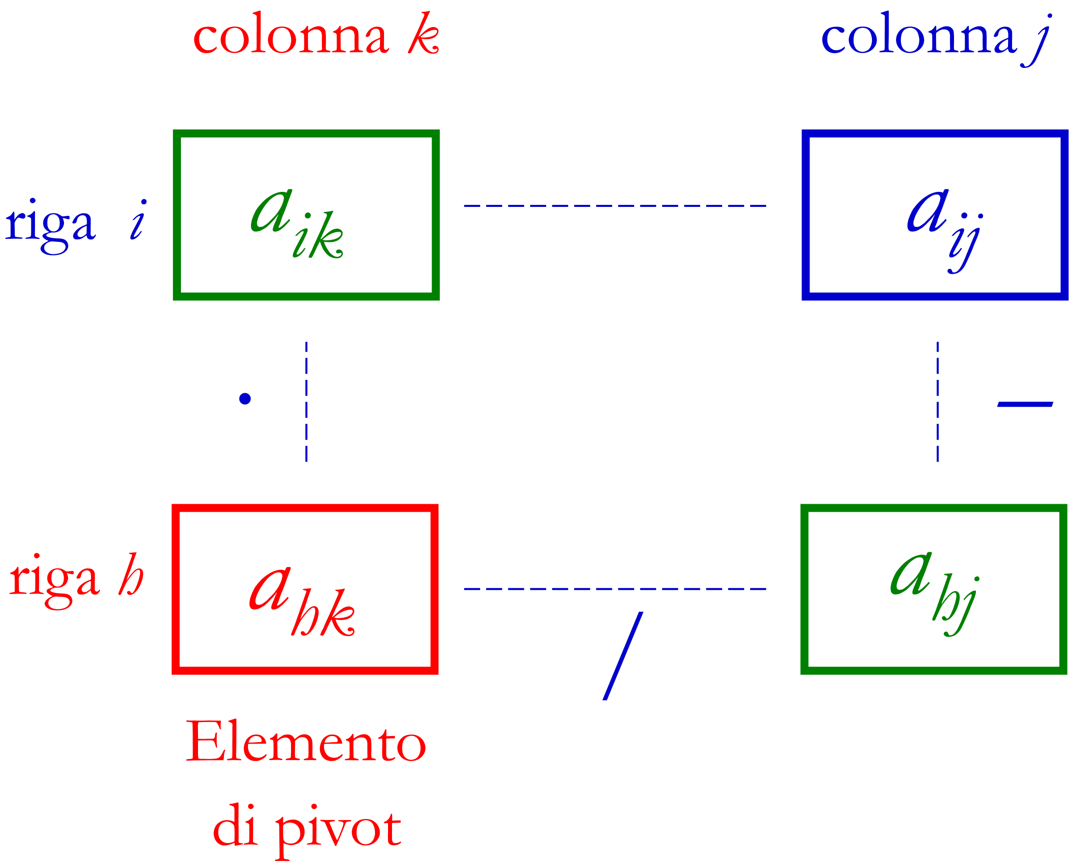
(lo stesso risultato si ottiene sottraendo le righe 2 e 4 dalla riga dei costi ridotti, ovvero facendo operazioni di pivot sugli elementi a_{27} e a_{48})

Esempio: tableau in forma canonica

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	α_1	α_2	$-z$	
-3	-3	0	1	0	1	0	0	-6.5	
6	10	1	0	0	0	0	0	30	30/6
$\boxed{3}$	2	0	-1	0	0	1	0	6	6/3
-1	2	0	0	1	0	0	0	1	
0	1	0	0	0	-1	0	1	1/2	

- Applichiamo la fase II dell'algoritmo del simplesso.
  - $\pi_1 \leq 0$, e $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_1$ non è $\leq \mathbf{0}$: problema non illimitato e soluzione non ottima
  - Il rapporto $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_h / (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_{h1}$ minimo si ottiene per $h = 2$
  - La riga di pivot è $h = 2$ e la colonna di pivot è $k = 1$. L'elemento di pivot è $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_{21} = 3$

Esempio: pivot



$$a_{ij} = a_{ij} - a_{hj} / a_{hk} \cdot a_{ik}$$

Esempio: 1° pivot

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	α_1	α_2	$-z$
-3	-3	0	1	0	1	0	0	-6.5
3	2	0	-1	0	0	1	0	6
6	10	1	0	0	0	0	0	30
-6	-4	0	2	0	0	-2	0	-12
$\boxed{3}$	2	0	-1	0	0	1	0	6
1	2/3	0	-1/3	0	0	1/3	0	2
-1	2	0	0	1	0	0	0	1
1	2/3	0	-1/3	0	0	1/3	0	2
0	1	0	0	0	-1	0	1	1/2
0	0	0	0	0	0	0	0	0

1. Divido la riga di pivot per l'elemento di pivot
2. Moltiplico la riga di pivot per gli elementi sulla colonna di pivot cambiati di segno
3. Sommo alle righe del tableau le righe così ottenute

Esempio: 2° pivot

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	α_1	α_2	$-z$	
0	-1	0	0	0	1	1	0	-1/2	
0	6	1	2	0	0	-2	0	18	18/6
1	2/3	0	-1/3	0	0	1/3	0	2	3
0	8/3	0	-1/3	1	0	1/3	0	3	9/8
0	$\boxed{1}$	0	0	0	-1	0	1	1/2	1/2

- $\pi_2 \leq 0$, e $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_2$ non è $\leq \mathbf{0}$: problema non illimitato e soluzione non ottima
- Il rapporto $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_h / (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_{h2}$ minimo si ottiene per $h = 4$
- La riga di pivot è $h = 4$ e la colonna di pivot è $k = 2$. L'elemento di pivot è $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_{42} = 1$

Esempio: 2° pivot

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	α_1	α_2	$-z$
0	-1	0	0	0	1	1	0	-1/2
0	1	0	0	0	-1	0	1	1/2
0	6	1	2	0	0	-2	0	18
0	-6	0	0	0	6	0	-6	-3
1	2/3	0	-1/3	0	0	1/3	0	2
0	-2/3	0	0	0	2/3	0	-2/3	-1/3
0	8/3	0	-1/3	1	0	1/3	0	3
0	-8/3	0	0	0	8/3	0	-8/3	-4/3
0	$\boxed{1}$	0	0	0	-1	0	1	1/2
0	1	0	0	0	-1	0	1	1/2

1. Divido la riga di pivot per l'elemento di pivot
2. Moltiplico la riga di pivot per gli elementi sulla colonna di pivot cambiati di segno
3. Sommo alle righe del tableau le righe così ottenute

Esempio: soluzione ottima della Fase I

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	α_1	α_2	$-z$	
0	0	0	0	0	0	1	1	0	
0	0	1	2	0	6	-2	-6	15	s_1
1	0	0	-1/3	0	2/3	1/3	-2/3	5/3	x_1
0	0	0	-1/3	1	8/3	1/3	-8/3	5/3	s_3
0	1	0	0	0	-1	0	1	1/2	x_2

- $\boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0}$, quindi la soluzione è ottima.
- Il valore ottimo è 0, quindi il problema originale non è vuoto.
- Nessuna variabile artificiale è in base, quindi la soluzione [5/3, 1/2, 15, 0, 5/3, 0] (in blu le componenti in base) è una SBA per il problema originale.

- α_1 e α_2 non sono in base, quindi le variabili artificiali possono essere eliminate e la funzione obiettivo originale $x_1 + 3x_2$ ripristinata

Esempio: soluzione ottima della Fase I

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$-z$	
1	3	0	0	0	0	0	
0	0	1	2	0	6	15	s_1
1	0	0	-1/3	0	2/3	5/3	x_1
0	0	0	-1/3	1	8/3	5/3	s_3
0	1	0	0	0	-1	1/2	x_2

- Il tableau non è più in forma canonica (x_1 e x_2 sono in base ma con coefficienti di costo ridotto non nulli). Per **ripristinare** la forma canonica occorre eliminare dalla funzione obiettivo le variabili in base.
- Questa operazione si può fare sostituendo ogni variabile in base con l'espressione ricavata dal tableau (ossia con operazioni di pivot sulle colonne in base).

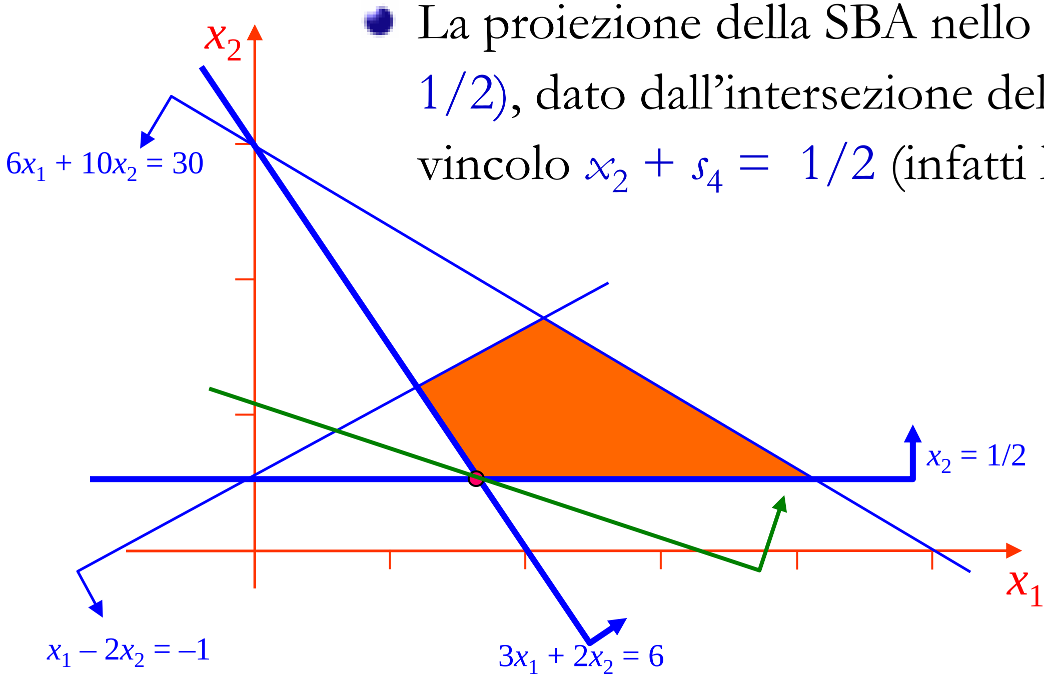
da 2ª riga: $x_1 = 5/3 + 1/3\ s_1 - 2/3\ s_4$

da 4ª riga: $x_2 = 1/2 + s_4$

$$x_1 + 3\ x_2 = 5/3 + 1/3 s_2 - 2/3 s_4 + 3(1/2 + s_4) = 19/6 \ + 1/3 s_2 + 7/3 s_4$$

Esempio: vertice iniziale della Fase II

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$-z$	
0	0	0	1/3	0	7/3	-19/6	
0	0	1	2	0	6	15	s_1
1	0	0	-1/3	0	2/3	5/3	x_1
0	0	0	-1/3	1	8/3	5/3	s_3
0	1	0	0	0	-1	1/2	x_2



- La proiezione della SBA nello spazio di x_1 e x_2 è il punto $(5/3, 1/2)$, dato dall'intersezione del 2° vincolo $3x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$ e 4° vincolo $x_2 + s_4 = 1/2$ (infatti le variabili di slack s_2 e s_4 valgono 0).

- La soluzione corrente vale $z = 5/3 + 3 \cdot 1/2 = 19/6 = 3.17$

Esempio: Fase II, 1° pivot

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$-z$	
0	0	0	1/3	0	7/3	-19/6	
0	0	1	$\boxed{2}$	0	6	15	s_1
1	0	0	-1/3	0	2/3	5/3	x_1
0	0	0	-1/3	1	8/3	5/3	s_3
0	1	0	0	0	-1	1/2	x_2

- $\pi_4 > 0$ e $\pi_6 > 0$ indicano 2 direzioni di crescita: la soluzione corrente non è ottima.
- $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_4$ non è $\leq \mathbf{0}$ e $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_6$ non è $\leq \mathbf{0}$: il problema non è illimitato
- Scegliamo la colonna 4: la riga è univocamente determinata.
- La riga di pivot è $h = 1$ e la colonna di pivot è $k = 4$. L'elemento di pivot è $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_{14} = 2$

Pivot

1. Divido la riga di pivot per l'elemento di pivot
2. Moltiplico la riga di pivot per gli elementi sulla colonna di pivot cambiati di segno
3. Sommo alle righe del tableau le righe così ottenute

Esempio: Fase II, 1° pivot

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$-z$
0	0	0	1/3	0	7/3	-19/6
0	0	1	$\boxed{2}$	0	6	15
1	0	0	-1/3	0	2/3	5/3
0	0	0	-1/3	1	8/3	5/3
0	1	0	0	0	-1	1/2

+

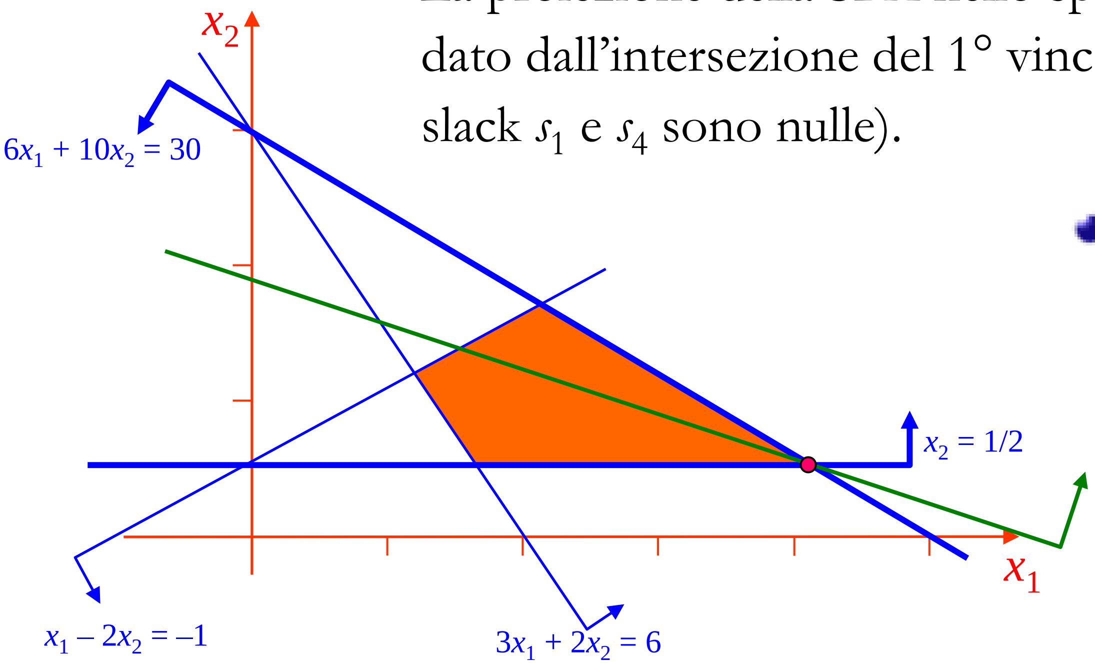
0	0	-1/6	-1/3	0	-1	-15/6
0	0	1/2	1	0	3	15/2
0	0	1/6	1/3	0	1	15/6
0	0	1/6	1/3	0	1	15/6
0	0	0	0	0	0	0

=

0	0	-1/6	0	0	4/3	-17/3	
0	0	1/2	1	0	3	15/2	s_2
1	0	1/6	0	0	5/3	25/6	x_1
0	0	1/6	0	1	11/3	25/6	s_3
0	1	0	0	0	-1	1/2	x_2

Esempio: Fase II, 1° pivot

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$-z$	
0	0	-1/6	0	0	4/3	-17/3	
0	0	1/2	1	0	3	15/2	s_2
1	0	1/6	0	0	5/3	25/6	x_1
0	0	1/6	0	1	11/3	25/6	s_3
0	1	0	0	0	-1	1/2	x_2



- La proiezione della SBA nello spazio di x_1 e x_2 è il punto (25/6, 1/2), dato dall'intersezione del 1° vincolo e 4° vincolo (infatti le variabili di slack s_1 e s_4 sono nulle).

- La soluzione corrente vale $z = 25/6 + 3 \cdot 1/2 = 34/6 = 5.67$

Esempio: Fase II, 2° pivot

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$-z$			
0	0	-1/6	0	0	4/3	-17/3			
0	0	1/2	1	0	3	15/2	s_2	15/6	
1	0	1/6	0	0	5/3	25/6	x_1	5/2	
0	0	1/6	0	1	$\boxed{11/3}$	25/6	s_3	25/22	rapporto minimo
0	1	0	0	0	-1	1/2	x_2		

- $\pi_6 > 0$ e $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_6$ non è $\leq \mathbf{0}$: la soluzione non è ottima e il problema non è illimitato
- Il rapporto $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_h / (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_{h6}$ minimo si ottiene per $h = 3$
- Riga di pivot $h = 3$ e colonna di pivot $k = 6$. L'elemento di pivot è $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_{36} = 11/3$

Pivot

1. Divido la riga di pivot per l'elemento di pivot
2. Moltiplico la riga di pivot per gli elementi sulla colonna di pivot cambiati di segno
3. Sommo alle righe del tableau le righe così ottenute

Esempio: Fase II, 2° pivot

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	-z
0	0	-1/6	0	0	4/3	-17/3
0	0	1/2	1	0	3	15/2
1	0	1/6	0	0	5/3	25/6
0	0	1/6	0	1	$\boxed{11/3}$	25/6
0	1	0	0	0	-1	1/2

+

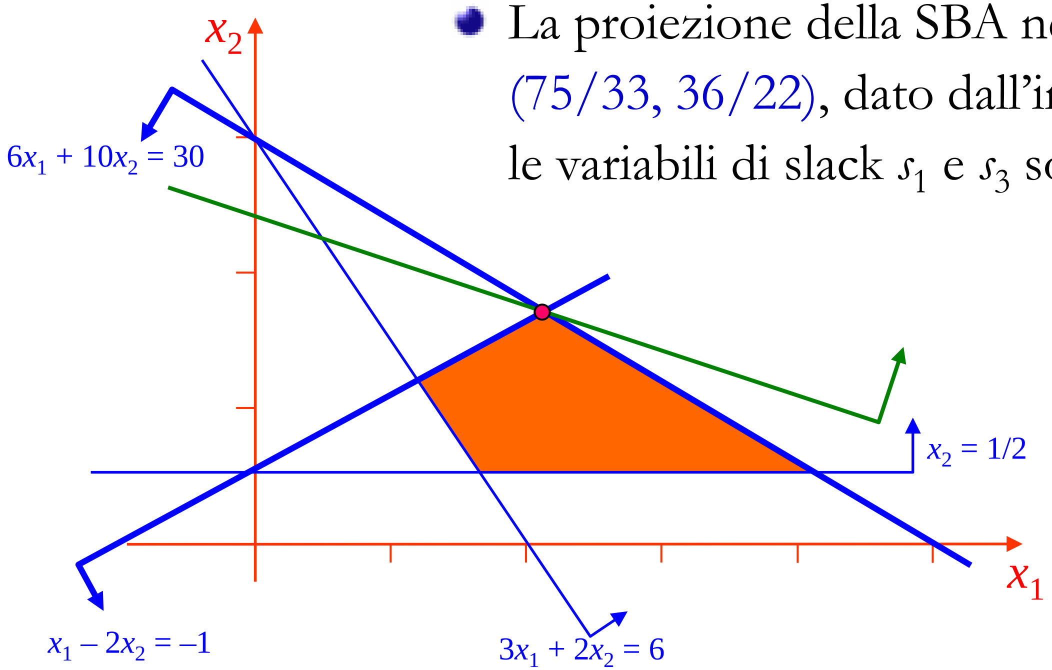
0	0	-2/33	0	-4/11	-4/3	-50/33
0	0	-3/22	0	-9/11	-3	-75/22
0	0	-5/66	0	-5/11	-5/3	125/66
0	0	1/22	0	3/11	1	25/22
0	0	1/22	0	3/11	1	25/22

=

0	0	-15/66	0	-4/11	0	-474/66	
0	0	4/11	1	-9/11	0	90/22	s_2
1	0	1/11	0	-5/11	0	75/33	x_1
0	0	1/22	0	3/11	1	25/22	s_4
0	1	1/22	0	3/11	0	36/22	x_2

Esempio: Fase II, 2° pivot

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$-z$	
0	0	-15/66	0	-4/11	0	-474/66	
0	0	4/11	1	-9/11	0	90/22	s_2
1	0	1/11	0	-5/11	0	75/33	x_1
0	0	1/22	0	3/11	1	25/22	s_4
0	1	1/22	0	3/11	0	36/22	x_2



- La proiezione della SBA nello spazio di x_1 e x_2 è il punto (75/33, 36/22), dato dall'intersezione del 1° e 3° vincolo (infatti le variabili di slack s_1 e s_3 sono nulle).

- La soluzione corrente vale $z = 75/33 + 3 \cdot 36/22 = 7.18$

Esempio: Fase II, 2° pivot

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$-z$	
0	0	-15/66	0	-4/11	0	-474/66	
0	0	4/11	1	-9/11	0	90/22	s_2
1	0	1/11	0	-5/11	0	75/33	x_1
0	0	1/22	0	3/11	1	25/22	s_4
0	1	1/22	0	3/11	0	36/22	x_2

- $\boldsymbol{\pi} \leq \mathbf{0}$, quindi la soluzione corrente è ottima.

Esercizi

Risolvere con l'algoritmo del simplesso i seguenti problemi di programmazione lineare:

A.
$$\begin{aligned} \max z = 5x_1 + 5x_2 & \\ 6x_1 + 5x_2 &\leq 30 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ -3x_1 + 2x_2 &\leq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

B.
$$\begin{aligned} \min 20x_1 + 10x_2 + 20x_3 & \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 &\geq 3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 &\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

C.
$$\begin{aligned} \min x_1 + x_2 + 10x_3 & \\ x_2 + 4x_3 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 - 6x_3 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Esercizi

1. Riscrivere l'algoritmo del simplesso per un problema di programmazione lineare in forma standard di minimo

2. Risolvere con l'interpretazione geometrica dell'algoritmo del simplesso i seguenti problemi di programmazione lineare:

A. $\max z = 5x_1 + 5x_2$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 5x_2 &\le 30 \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ -3x_1 + 2x_2 &\le 0 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

B. $\min 20x_1 + 10x_2 + 20x_3$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + x_3 &\ge 3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\le 4 \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 &\le 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Complessità computazionale

Complessità dell'algoritmo del simplesso

Una singola operazione di pivot richiede un numero di operazioni aritmetiche nell'odine di $m \cdot n$.

Il numero di pivot effettuati (ossia il numero di vertici esplorati) dall'algoritmo del simplesso per risolvere un problema di PL con m vincoli e n variabili:

- nel *caso medio* **(complessità empirica)**:
  cresce *linearmente* con il numero di vincoli (è mediamente αm con $\alpha \in [1,4]$) e *logaritmicamente* con il numero di variabili

- nel *caso peggiore* **(complessità teorica)**:
  cresce esponenzialmente rispetto a m e n (per **ognuna** delle regole note di selezione dell'elemento di pivot esiste una classe di istanze per le quali l'algoritmo esplora tutti i vertici del poliedro).

Complessità: congettura di Hirsch

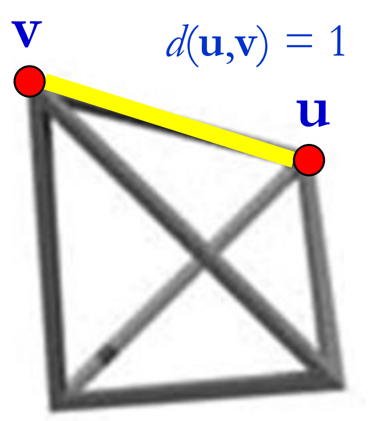
Tuttavia non si può escludere a priori l'esistenza di una regola che renda l'algoritmo efficiente anche nel caso peggiore.

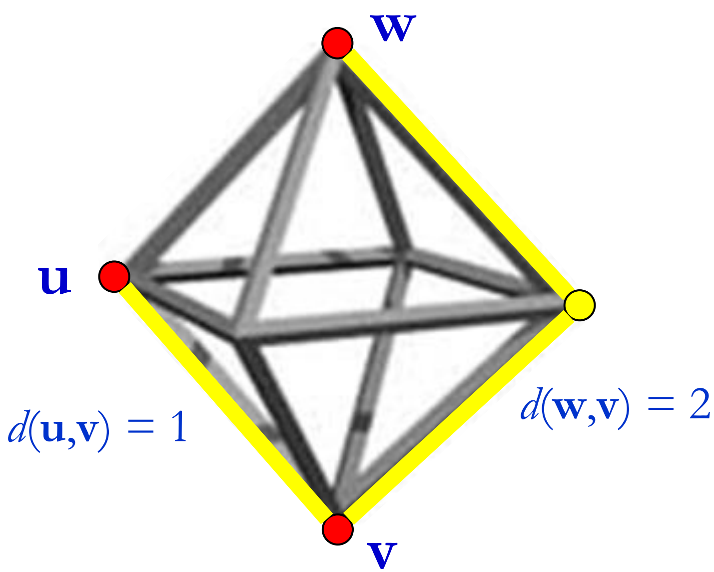
La natura esponenziale dell'algoritmo del simplesso è fortemente legata alla **congettura di Hirsch**

Complessità: congettura di Hirsch

Consideriamo un problema di PL con m vincoli e n variabili e il poliedro associato $P \subseteq R^n$

[Definizione] la *distanza* $d(\mathbf{u},\mathbf{v})$ tra due vertici **u** e **v** di P è il **minimo numero** di vertici che occorre attraversare (percorrendo gli spigoli di P) per raggiungere **v** da **u**.





Complessità: congettura di Hirsch

Consideriamo un problema di PL con m vincoli e n variabili e il poliedro associato $P \subseteq \mathbb{R}^n$

[Definizione] il *diametro* $\Delta(P)$ di P è la **massima distanza** tra qualsiasi coppia di vertici di P

$\Delta(P) = 1$

$\Delta(P) = 2$

Complessità: congettura di Hirsch

Sia $\Delta(m, n)$ il massimo diametro tra tutti i politopi $P \subseteq R^n$ definiti da m vincoli. La congettura di Hirsch afferma che:

$$\Delta(m, n) \leq m - n$$

- Se la congettura è vera, è possibile che esista una regola di selezione che renda polinomiale l'algoritmo.
- Se invece $\Delta(m, n)$ cresce esponenzialmente rispetto a m e n, allora il simplesso ha complessità esponenziale qualunque sia la regola di selezione dell'elemento di pivot.

Algoritmo

del simplesso *revisionato*

Simplesso *revisionato*: motivazione

Tableau del simplesso

$\mathbf{0}$	$(\mathbf{c_N}^T - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})$	$-\mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{I}(m \times m)$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

- Quando il problema ha un numero elevato di variabili, l'aggiornamento dell'intero tableau è decisamente oneroso.
- Si osservi tuttavia che non è necessario calcolare per intero il vettore dei costi ridotti $\boldsymbol{\pi}_N = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$ e la matrice $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$. E' sufficiente calcolare $\mathbf{B}^{-1}$.
- La matrice $\mathbf{B}^{-1}$ può essere calcolata utilizzando il metodo di Gauss-Jordan. A tale scopo si aggiunge al tableau una matrice unitaria, detta matrice *Carry*, che tiene traccia di $\mathbf{B}^{-1}$ e $\mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}$.

Simplesso *revisionato*: matrice Carry

Matrice *Carry* e problema in forma standard con $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ (in cui è stata individuata una base)

$\mathbf{0}$	$\mathbf{c_B}^T$	$\mathbf{c_N}^T$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{b}$

- Dopo le operazioni di pivot necessarie per invertire la base **B** (effettuate anche sulla matrice carry) si ottiene la tabella:

$-\mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{0}$	$(\mathbf{c_N}^T - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})$	$-\mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

- Per le osservazioni fatte in precedenza, si può eliminare la parte di tableau associata alle variabili e lavorare esclusivamente sulla matrice *carry*

Algoritmo del simplesso revisionato

- Sia **B** una base ammissibile.

[Algoritmo del Simplesso *revisionato*] (per un problema di massimo)

1. [Inizializzazione] Aggiorna la matrice *carry* con $-\mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}$ e $\mathbf{B}^{-1}$.
2. [Ottimalità] Calcola il vettore dei costi ridotti $\boldsymbol{\pi}_N = \mathbf{c}_N{}^T - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$.
   Se $\boldsymbol{\pi} \leq \mathbf{0}$, la soluzione $\mathbf{x} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0})$ è ottima. Fine
3. [Variabile entrante] Scegli un k tale che $\pi_k > 0$
4. [Generazione colonna] Genera la colonna $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})_k$ e giustapponila alla *carry*.
5. [Illimitatezza] Se $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})_k \leq \mathbf{0}$, allora il problema è illimitato. Fine
6. [Variabile uscente] Calcola $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i \,/\, (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})_{ik}$ per ogni riga i con $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})_{ik} > 0$ e sia h l'indice di riga che realizza il minimo rapporto.
7. [Aggiornamento] Esegui il pivot su $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})_{hk}$
8. Rimuovi la colonna $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_k$ e torna al punto 2.

Esempio: 1ª iterazione

$$\max z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4$$
$$2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
4	3	2	1	0
2	1	-2	-1	1
1	2	1	2	1

1. All'inizio occorre individuare una qualsiasi base **B** ammissibile, per esempio le colonne di x_1 e x_2; aggiorno la matrice *carry* facendo pivot sulle colonne di x_1 e x_2.

x_1	x_2	x_1	x_2	$-z$
0	0	4	3	0
1	0	2	1	1
0	1	1	2	1

x_1	x_2	x_1	x_2	$-z$
-5/3	-2/3	0	0	-7/3
2/3	-1/3	1	0	1/3
-1/3	2/3	0	1	1/3

Esempio: 1ª iterazione

x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
4	3	2	1	0
2	1	-2	-1	1
1	2	1	2	1

2. e 3. Calcolo i costi ridotti fuori base:

- $\pi_3 = 2 + [-5/3, -2/3]\,[-2, 1]^T = 14/3 > 0$
- $\pi_4 = 1 + [-5/3, -2/3]\,[-1, 2]^T = 4/3 > 0$

4. Scelgo x_4 e genero la colonna $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})_4$ e la giustappongo alla *carry* :

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})_4 = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}$$

x_1	x_2	x_4	$-z$
-5/3	-2/3	4/3	-7/3
2/3	-1/3	-4/3	1/3
-1/3	2/3	5/3	1/3

5. Il problema non è illimitato

Esempio: 1ª iterazione

x_1	x_2	x_3	x_4	-z
4	3	2	1	0
2	1	-2	-1	1
1	2	1	-2	1

6. La riga di pivot è determinata univocamente: $h = 2$

7. Pivot sull'elemento $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})_{24} = 5/3$

x_1	x_2	x_4	-z
-5/3	-2/3	4/3	-7/3
2/3	-1/3	-4/3	1/3
-1/3	2/3	$\boxed{5/3}$	1/3

x_1	x_4	X_4	-z
-7/5	-6/5	0	-13/5
2/5	-1/5	0	3/5
-1/5	2/5	1	1/5

8. Nuova tabella *carry*

x_1	x_4	-z
-7/5	-6/5	-13/5
2/5	1/5	3/5
-1/5	2/5	1/5

… nuova iterazione …

Bibliografia e testi di approfondimento

1. C. Vercellis,
   Ottimizzazione. Teoria, metodi, applicazioni. (capitolo 4)
   Mc Graw-Hill, 2008

2. A. Sassano
   Modelli e Algoritmi della Ricerca Operativa
   Franco Angeli, Milano, 1999

3. M. Fischetti
   Lezioni di Ricerca Operativa
   Edizioni Libreria Progetto Padova, 1999

3. D. Bertsimas and J.N. Tsitsiklis
   Introduction to Linear Optimization
   Athena Scientific, Belmont, Massachusetts

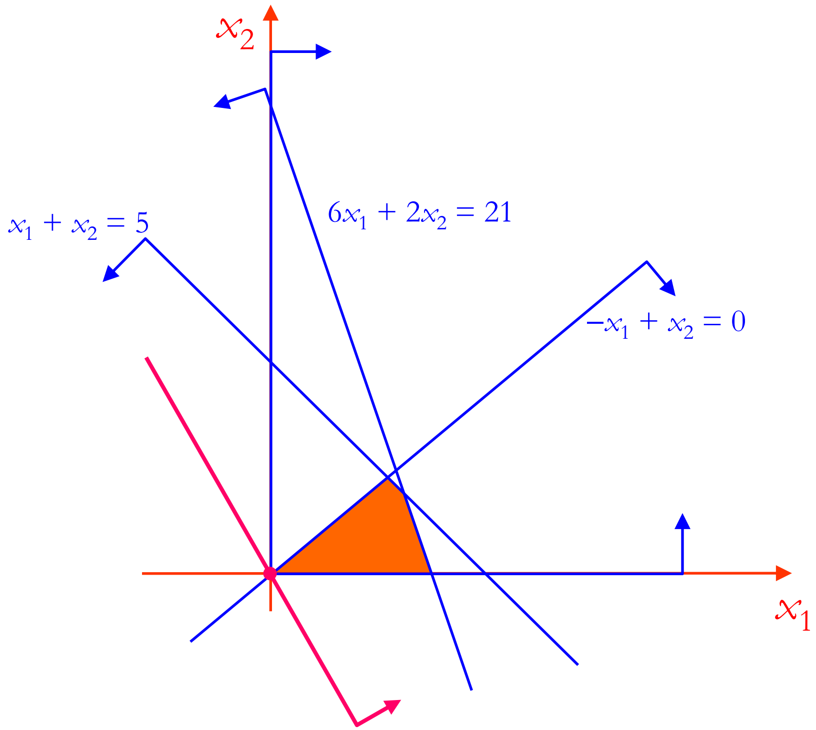
Appendice

descrizione geometrica dell’algoritmo del simplesso

Esempio

Consideriamo il seguente problema di PL

$$
\begin{aligned}
\max z = 2x_1 + x_2 & \\
x_1 + x_2 &\leq 5 \\
-x_1 + x_2 &\leq 0 \\
6x_1 + 2x_2 &\leq 21 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$



e riscriviamolo in forma standard introducendo tre variabili di slack s_1 , s_2 e s_3

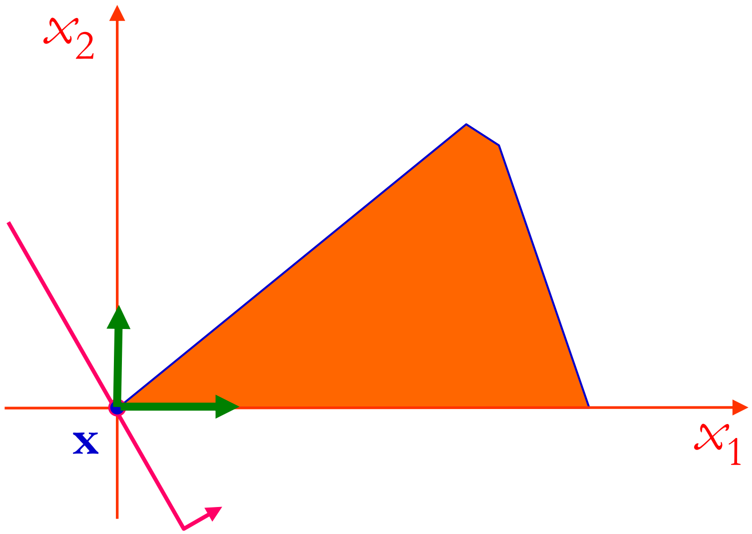
$$
\begin{aligned}
\max z = 2x_1 + x_2 & \\
x_1 + x_2 + s_1 &= 5 \\
-x_1 + x_2 + s_2 &= 0 \\
6x_1 + 2x_2 + s_3 &= 21 \\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Esempio

Il poliedro associato è descritto dalla seguente matrice estesa dei coefficienti:

$$
\begin{array}{c} \\ (\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & b \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
-1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
6 & 2 & 0 & 0 & 1 & 21
\end{array}\right]
\end{array}
$$

La matrice $\mathbf{B} = [s_1 \mid s_2 \mid s_3]$ è una base ammissibile alla quale corrisponde la soluzione di base $\mathbf{x} = [0,0,5,0,21]$ che, proiettata nello spazio delle variabili originali x_1 e x_2, corrisponde al punto $[0,0]$.



Dall'origine possiamo muoverci incrementando una delle variabili fuori base (x_1 oppure x_2).

determinazione di una direzione migliorante

Si consideri un problema in forma standard P: $\max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}: \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in R^n\}$.

Sia $\mathbf{B}$ una base ammissibile e $\mathbf{x} = [\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N}] = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}]$ la corrispondente SBA (un vertice del poliedro).

Il metodo del simplesso individua (se esiste) una direzione migliorante, poniamo quella associata alla j-esima variabile fuori base,

$$\mathbf{d} = [\mathbf{d_B}, \mathbf{d_N}] = [\mathbf{d_B}, 0,\ldots,1,\ldots,0]$$

ed effettua uno spostamento di un passo pari a $\theta \geq 0$, portandosi dal vertice corrente $\mathbf{x}$ al nuovo vertice

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \theta\mathbf{d} = [\mathbf{x_B} + \theta\mathbf{d_B}, 0,\ldots, \theta,\ldots,0]$$

La direzione $\mathbf{d}$ deve essere migliorante, cioè

i. $\mathbf{x}'$ deve essere una soluzione ammissibile di P,

ii. $\mathbf{x}'$ deve essere una soluzione migliore di $\mathbf{x}$, cioè $\mathbf{c}^T\mathbf{x}' > \mathbf{c}^T\mathbf{x}$

Scelta di una direzione ammissibile

i. $\mathbf{x}'$ deve essere una soluzione ammissibile di P, cioè $\mathbf{d}$ deve essere tale che:

$$
\begin{cases}
\mathbf{Ax}' = \mathbf{b} & \mathbf{A}(\mathbf{x} + \theta\mathbf{d}) = \mathbf{b} & \mathbf{Ax} + \theta\mathbf{Ad} = \mathbf{b} & (1) \\
\mathbf{x}' \geq \mathbf{0} & \mathbf{x} + \theta\mathbf{d} \geq \mathbf{0} & & (2)
\end{cases}
$$

Condizioni di ammissibilità dettate dalla (1)

Dato che $\mathbf{x}$ è ammissibile (cioè $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$), la (1) equivale a richiedere $\theta\mathbf{Ad} = \mathbf{0}$. Tale relazione è soddisfatta o con un passo $\theta = 0$ oppure imponendo $\mathbf{Ad} = \mathbf{0}$, cioè

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{N}][\mathbf{d_B}, 0,\ldots,1,\ldots,0]^T = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{Bd_B} + \mathbf{N}_j = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{d_B} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_j$$

Quindi, scegliendo la direzione $\mathbf{d} = [-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_j, 0,\ldots,1,\ldots,0]$, la nuova soluzione $\mathbf{x}'$ soddisfa tutti i vincoli del sistema $\mathbf{Ax}' = \mathbf{b}$

Scelta di una direzione ammissibile (cont.)

i. $\mathbf{x}'$ deve essere una soluzione ammissibile di P, cioè $\mathbf{d}$ deve essere tale che:

$$\begin{cases} \mathbf{Ax}' = \mathbf{b} & \mathbf{A}(\mathbf{x} + \theta\mathbf{d}) = \mathbf{b} & \mathbf{Ax} + \theta\mathbf{Ad} = \mathbf{b} & (1) \\ \mathbf{x}' \geq \mathbf{0} & \mathbf{x} + \theta\mathbf{d} \geq \mathbf{0} & & (2) \end{cases}$$

Condizioni di ammissibilità dettate dalla (2)

Ricordando che $\mathbf{d} = [\mathbf{d_B}, 0,\ldots,1,\ldots,0]$, la (2) si può scrivere, evidenziando le variabili in base e fuori base, come

$$\begin{cases} x_{m+j} + \theta \geq 0 \\ \mathbf{x_B} + \theta\mathbf{d_B} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Dato che x_{m+j} è fuori base ($x_{m+j} = 0$) la relazione $x_{m+j} + \theta \geq 0$ è soddisfatta per qualsiasi $\theta \geq 0$

Dato che $\mathbf{x_B} \geq \mathbf{0}$, se $\theta > 0$ la disequazione può essere solo violata dalle componenti negative di $\mathbf{d}$ (cioè le componenti positive della colonna $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_j$).

Per ogni indice di base con $d_i < 0$, la condizione $x_i + \theta d_i \geq 0$ è soddisfatta se:

$$\theta \leq \frac{x_i}{|d_i|}$$

continua...

Scelta di una direzione ammissibile (cont.)

i. **x'** deve essere una soluzione ammissibile di *P*, cioè **d** deve essere tale che:

$$\begin{cases} \mathbf{Ax'} = \mathbf{b} & \mathbf{A}(\mathbf{x} + \theta\mathbf{d}) = \mathbf{b} & \mathbf{Ax} + \theta\mathbf{Ad} = \mathbf{b} & (1) \\ \mathbf{x'} \geq \mathbf{0} & \mathbf{x} + \theta\mathbf{d} \geq \mathbf{0} & & (2) \end{cases}$$

Condizioni di ammissibilità dettate dalla (2)

…continua

Un $\underline{\theta}$ che soddisfi $\theta \leq \frac{x_i}{|d_i|}$ per <u>tutte</u> le i con $d_i < 0$ deve essere $\underline{\theta} \leq \min_{i:d_i<0} \left\{ \frac{x_i}{|d_i|} \right\}$

Dato che siamo interessati al <u>massimo</u> spostamento ammissibile scegliamo proprio

$$\underline{\theta} = \frac{x_k}{|d_k|} = \min_{i:d_i<0} \left\{ \frac{x_i}{|d_i|} \right\}$$

per l' indice k che realizza il minimo

Scelta di una direzione ammissibile (cont.)

i. **x'** deve essere una soluzione ammissibile di *P*, cioè **d** deve essere tale che:

$$\underline{\theta} = \frac{x_k}{|d_k|} = \min_{i:d_i<0} \left\{ \frac{x_i}{|d_i|} \right\}$$

- **[Osservazioni]**
  - Se **d** non ha componenti negative, θ può crescere arbitrariamente. Se oltre ad essere ammissibile, **d** è una direzione di crescita, si applica il teorema fondamentale e si conclude che il problema è illimitato.
  - Se, d'altra parte, in corrispondenza di un $d_i < 0$ la variabile di base é nulla (SBA *degenere*), allora necessariamente $\underline{\theta} = 0$ e quindi l'unico spostamento ammissibile è quello nullo.

Esempio (…cont.)

Caso 1. Muoviamoci incrementando la variabile x_1

- Per la condizione di ammissibilità dettata dalla (1) dovrà essere:

$$\mathbf{d_B} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1$$

$$\mathbf{d_B} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

quindi la direzione è $\mathbf{d} = [1,0,-1,1,-6]$

- Per la condizione di ammissibilità dettata dalla (2) il passo θ dovrà essere scelto in modo tale che:

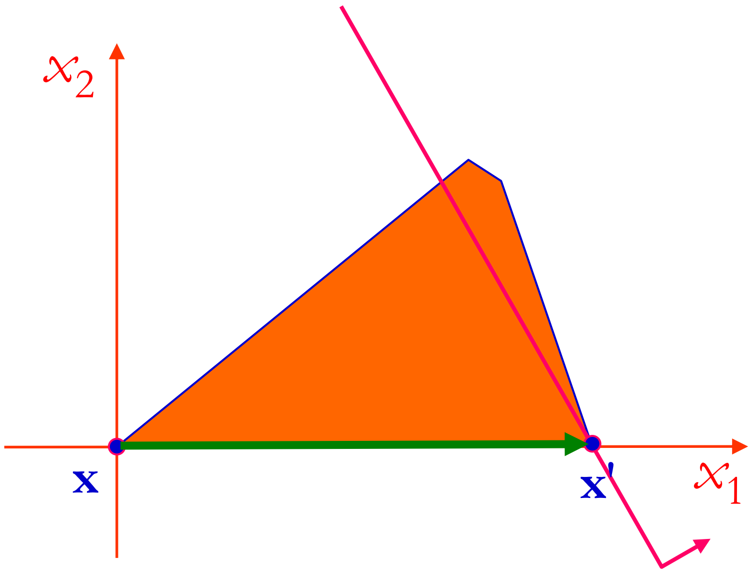
$$\mathbf{x_B} + \theta\mathbf{d_B} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix} + \theta\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \theta \leq 3.5$$

Esempio (…cont.)

La nuova soluzione ammissibile è quindi:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix} + 3.5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 0 \\ 1.5 \\ 3.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$



La nuova soluzione $\mathbf{x}' = [3.5, 0, 1.5, 3.5, 0]$ è un vertice del poliedro associato alla matrice di base $\mathbf{B}' = [x_1 \mid s_1 \mid s_2]$.

Esempio (…cont.)

Caso 2. Muoviamoci incrementando la variabile x_2

- Per la condizione di ammissibilità dettata dalla (1) dovrà essere:

$$\mathbf{d_B} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_2$$

$$\mathbf{d_B} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Quindi la direzione è $\mathbf{d} = [0,1,-1,-1,-2]$

- Per la condizione di ammissibilità dettata dalla (2) il passo θ dovrà essere scelto in modo tale che:

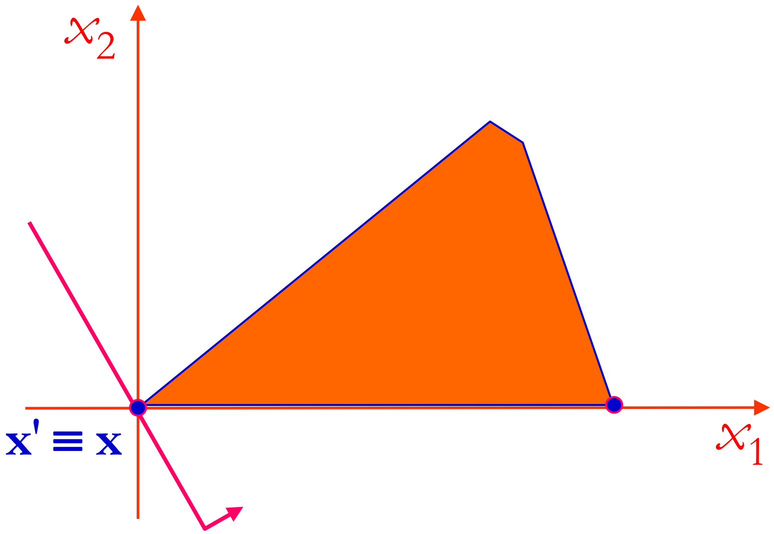
$$\mathbf{x_B} + \theta\mathbf{d_B} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix} + \theta\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \theta \leq 0$$

Esempio (…cont.)

La nuova soluzione ammissibile è quindi:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix}$$



Lo spostamento è nullo e la nuova soluzione $\mathbf{x}' = [0,0,5,0,21]$, associata alla matrice di base $\mathbf{B}' = [x_2 \mid s_1 \mid s_3]$, coincide con la soluzione $\mathbf{x}$. In corrispondenza di una componente negativa del vettore direzione c'è una componente in base nulla (variabile s_2) quindi la soluzione $\mathbf{x} = [0,0]$ è degenere (è l'intersezione dei 3 vincoli $-x_1 + x_2 \leq 0$, $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$).

…punto della situazione

- Finora abbiamo definito un passo θ atto a garantire **l'ammissibilità** della nuova soluzione $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \theta\mathbf{d}$.
- Il passo θ dipende dalla direzione $\mathbf{d}$, cioè dalla selezione dell'indice j della variabile fuori base, che però non è stata ancora fatta.
- La scelta di j deve garantire che $\mathbf{d}$ sia una direzione **migliorante**.

Scelta di una direzione migliorante

ii. $\mathbf{x}'$ deve essere una soluzione migliore di $\mathbf{x}$, cioè $\mathbf{c}^T\mathbf{x}' > \mathbf{c}^T\mathbf{x}$.

La variazione della f.o. quando si passa da $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}'$ è:

$$\Delta z = \mathbf{c}^T(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) = \mathbf{c}^T(\mathbf{x} + \theta\mathbf{d} - \mathbf{x}) = \theta\, \mathbf{c}^T\mathbf{d} = \theta(\mathbf{c_B}^T\mathbf{d_B} + \mathbf{c_N}^T\mathbf{d_N}) =$$

$$\Delta z = \theta(-\,\mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_j + c_{\mathbf{N}j})$$

Per avere un miglioramento, l'indice j (cioè la variabile fuori base che determina lo spostamento) deve essere scelto in modo tale che $\Delta z = \theta(-\,\mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_j + c_{\mathbf{N}j}) > 0$.
Dato che $\theta \geq 0$, l'indice j deve essere tale che $c_{\mathbf{N}j} - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_j > 0$.

Si osservi che se j è l'indice di una variabile di base allora $c_j - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j = 0$.
Infatti

$$c_j - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}_j = c_j - \mathbf{c_B}^T\mathbf{e}_j = c_j - c_j = 0$$

Esempio (…cont.)

Abbiamo visto che muovendoci nella direzione x_1 raggiungiamo il nuovo vertice $\mathbf{x}'$ $= [3.5,0,1.5,3.5,0]$. Il valore della funzione obiettivo in $\mathbf{x}'$ è

$$z(\mathbf{x}') = [2,1,0,0,0] \cdot [3.5,0,1.5,3.5,0]^T = 7 > 0$$

Muovendoci invece lungo la direzione x_2 facciamo un cambio di base degenere restando sullo stesso punto $\mathbf{x} = [0, 0, 5, 0, 21]$. Il valore della funzione obiettivo quindi non cambia: in $\mathbf{x}'$ è

$$z(\mathbf{x}') = [2,1,0,0,0] \cdot [0, 0, 5, 0, 21]^T = 0$$

Quindi una direzione ammissibile e migliorante è lungo la direzione x_1.

[Osservazione] Come abbiamo visto, si può arrivare direttamente alla stessa conclusione valutando, per ogni variabili non in base i , l'espressione

$$c_i - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_i$$

Scelta di una direzione migliorante (cont.)

- **[Teorema]** Se $c_i - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_i \leq 0$ per ogni $i = 1,\ldots,n$, allora la SBA corrente è ottima.

- **[Osservazioni]**
  - Il teorema esprime una condizione <u>sufficiente</u> ma non necessaria. Infatti, in corrispondenza di una variabile non in base i con $c_i - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_i > 0$ si potrebbe avere $\underline{\theta} = 0$ (la direzione è migliorante ma lo spostamento è nullo). Come già osservato, ciò può accadere in presenza di SBA degeneri.

    Se $\underline{\theta} = 0$ allora $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$. In termini geometrici ciò significa che pur avendo cambiato soluzione di base non ci siamo spostati dal vertice corrente. Se non opportunamente gestite, le SBA degeneri possono provocare fenomeni di *ciclaggio*.

Calcolo della nuova soluzione

Una volta determinati $\underline{\theta} > 0$ e $\mathbf{d}$, il nuovo vertice è $\mathbf{x'} = \mathbf{x} + \underline{\theta}\mathbf{d}$. Siano

- j l'indice della variabile fuori base lungo la quale ci si muove ($d_j = 1$) e
- k l'indice della variabile in base che determina il valore di $\underline{\theta}$, cioè

$$\underline{\theta} = \frac{x_k}{|d_k|} = \min_{i:d_i<0} \left\{ \frac{x_i}{|d_i|} \right\}$$

Allora si osserva facilmente che

- $x'_j = 0 + \underline{\theta} > 0$ e
- $x'_k = x_k + \underline{\theta} d_k = x_k + (x_k / |d_k|)\, d_k = x_k - x_k = 0$

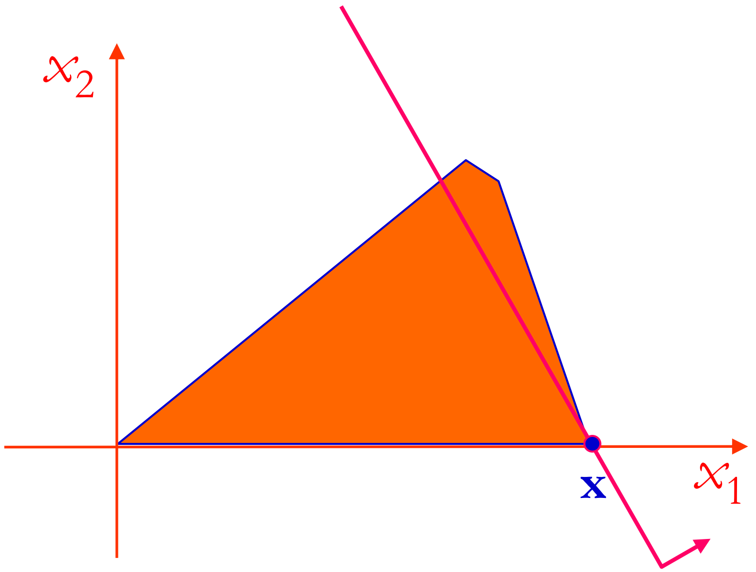
Si può dimostrare che la nuova matrice ottenuta sostituendo la k-esima colonna di $\mathbf{B}$ con la j-esima colonna di $\mathbf{N}$ è ancora una matrice di base e che la SBA associata $\mathbf{x'}$ corrisponde a un vertice adiacente a $\mathbf{x}$ (se $\underline{\theta} > 0$).

Esempio (…cont.)

Ripartiamo dalla nuova SBA $\mathbf{x}$ = [3.5,0,1.5,3.5,0] associata alla matrice di base $\mathbf{B}$ = $[x_1 \mid s_1 \mid s_2]$.

Dal vertice [3.5, 0] possiamo muoverci incrementando una delle variabili fuori base (x_2 oppure s_3).

Se entrambe le direzioni non sono miglioranti allora il vertice [3.5, 0] è una soluzione ottima.



Evidentemente, la direzione lungo s_3 non è migliorante (torniamo sul vertice [0, 0]). Analizziamo quindi cosa succede incrementando la variabile x_2.

Esempio (…cont.)

- Per la condizione di ammissibilità dettata dalla (1) dovrà essere:

$$\mathbf{d_B} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_2$$

$$\mathbf{d_B} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/6 \\ 1 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1 & 1/6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ -4/3 \end{bmatrix}$$

Quindi la direzione è $\mathbf{d} = [-1/3, 1, -2/3, -4/3, 0]$

- Per la condizione di ammissibilità dettata dalla (2) il passo θ dovrà essere scelto in modo tale che:

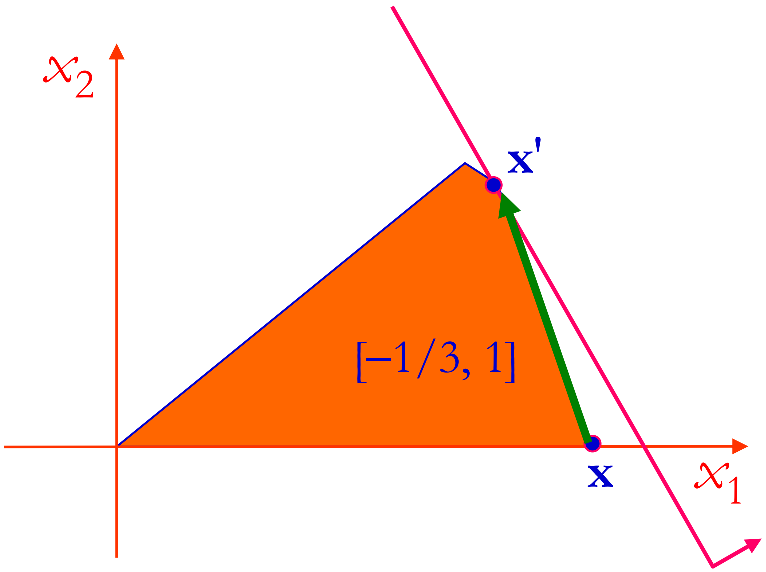
$$\mathbf{x_B} + \theta\mathbf{d_B} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 3.5 \\ 1.5 \\ 3.5 \end{bmatrix} + \theta\begin{bmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ -4/3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \theta \leq 2.25$$

Esempio (…cont.)

La nuova soluzione ammissibile è quindi:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 0 \\ 1.5 \\ 3.5 \\ 0 \end{bmatrix} + 2.25 \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \\ -2/3 \\ -4/3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.75 \\ 2.25 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$



La nuova soluzione $\mathbf{x}' = [2.75, 2.25, 0, 0.5, 0]$ è un vertice del poliedro associato alla matrice di base $\mathbf{B}' = [x_1 \mid x_2 \mid s_2]$.

Algoritmo del simplesso

Sia P: $\max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}: \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ un problema in forma standard, $\mathbf{B}$ una base ammissibile e $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_\mathbf{B}, \mathbf{x}_\mathbf{N}] = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}]$ la corrispondente SBA.

[Algoritmo del Simplesso]

1. [Ottimalità] Se $c_i - \mathbf{c}_\mathbf{B}{}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_i \leq 0$ per ogni $i = 1,\ldots,n$, allora la soluzione $\mathbf{x} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0})$ è ottima. Fine
2. [scelta della direzione migliorante] Scegli un j tale che $c_j - \mathbf{c}_\mathbf{B}{}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_j > 0$. La direzione migliorante è $\mathbf{d} = [-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_j, 0,\ldots,1,\ldots,0]$
3. [Illimitatezza] Se $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_j \leq \mathbf{0}$, allora il problema è illimitato. Fine
4. [scelta del passo] Calcola $\underline{\theta} = \min_{i:di<0}\{x_i \ / \ | \ d_i \ |\}$ e sia k l'indice che realizza il minimo
5. [Aggiornamento] La nuova base è $[\mathbf{B}\backslash\mathbf{B}_k \mid \mathbf{N}_j]$ (ottenuta da $\mathbf{B}$ rimuovendo la colonna $\mathbf{B}_k$ e inserendo la colonna $\mathbf{N}_j$).
   La nuova SBA è $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \underline{\theta}\mathbf{d}$ (in particolare, $x'_k = 0$ e $x'_j = \underline{\theta}$)
6. Torna al punto 1.

Esercizi

Risolvere con l'interpretazione geometrica dell'algoritmo del simplesso i seguenti problemi di programmazione lineare

A.
$$
\begin{aligned}
\max z = 5x_1 + 5x_2 & \\
6x_1 + 5x_2 &\leq 30 \\
x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\
-3x_1 + 2x_2 &\leq 0 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

B.
$$
\begin{aligned}
\min 20x_1 + 10x_2 + 20x_3 & \\
3x_1 + 5x_2 + x_3 &\geq 3 \\
4x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\
6x_1 + 5x_2 + 4x_3 &\leq 5 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$