Grandezze elettriche fondamentali, bipoli, comportamento energetico

Prof. Simone Fiori

s.fiori@univpm.it

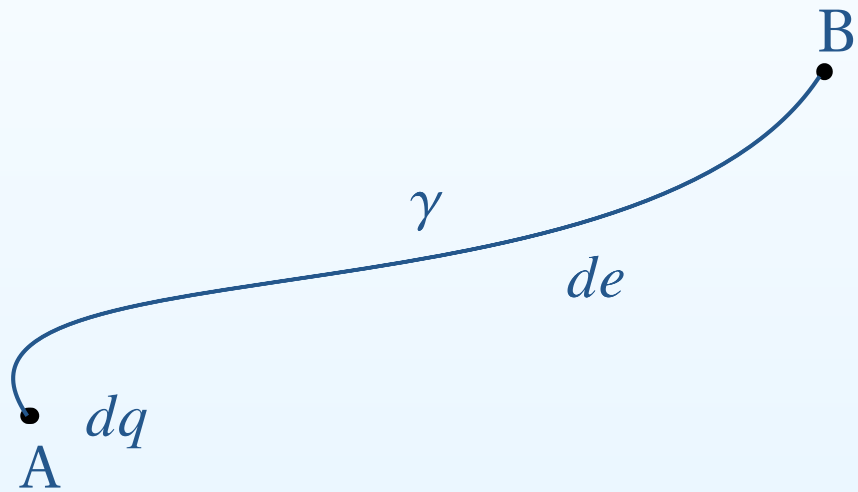
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione
Università Politecnica delle Marche

Argomenti

- Tensione elettrica $v(t)$
- Corrente elettrica $i(t)$
- Elementi fondamentali: Bipoli elementari
- Funzioni generatrici e relazioni costitutive
- Potenza istantanea ed energia istantanea

Tensione elettrica

Rappresenta la quantità di energia de necessaria per spostare una carica elettrica infinitesima $dq > 0$ (detta 'carica di prova') in una regione di spazio sede di fenomeni elettrici.

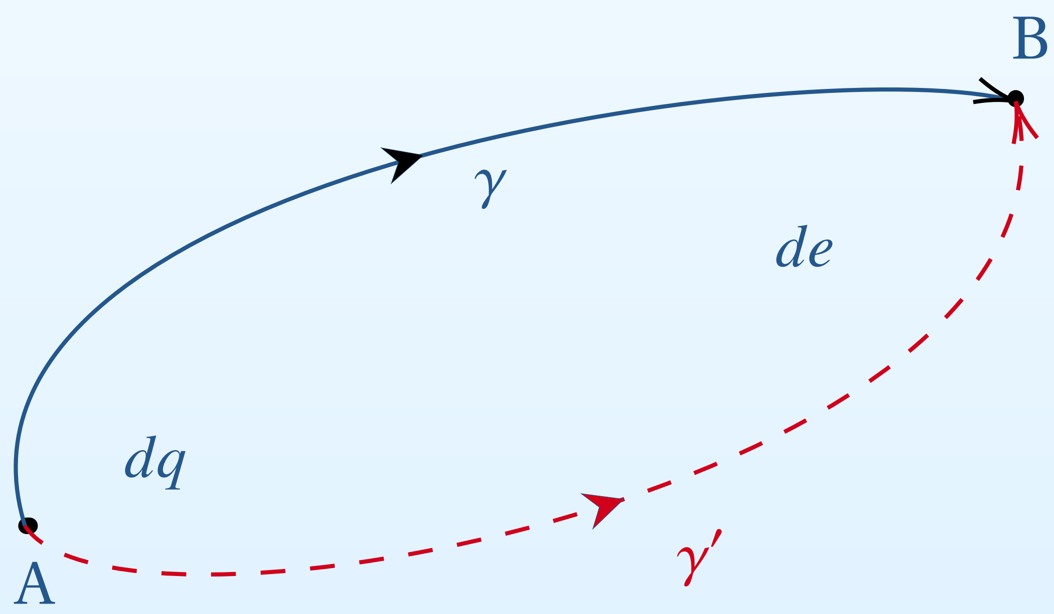


In prima istanza, si suppone che l'energia richiesta dipenda da dq, dalla forma della curva γ e dagli estremi A e B, così l'energia si indica con $de^{\gamma}_{AB}(dq)$.

Tensione elettrica

L'esperienza fisica permette di dire che:

- L'energia dipende dal valore della carica in modo *lineare*, ovvero $de^{\gamma}_{AB} \propto dq$.
- L'energia **non** dipende dalla forma della curva a parità di tutto il resto, ovvero $de^{\gamma}_{AB}(dq) = de^{\gamma'}_{AB}(dq)$.
- L'energia dipende quindi solo dai punti A e B nello spazio.



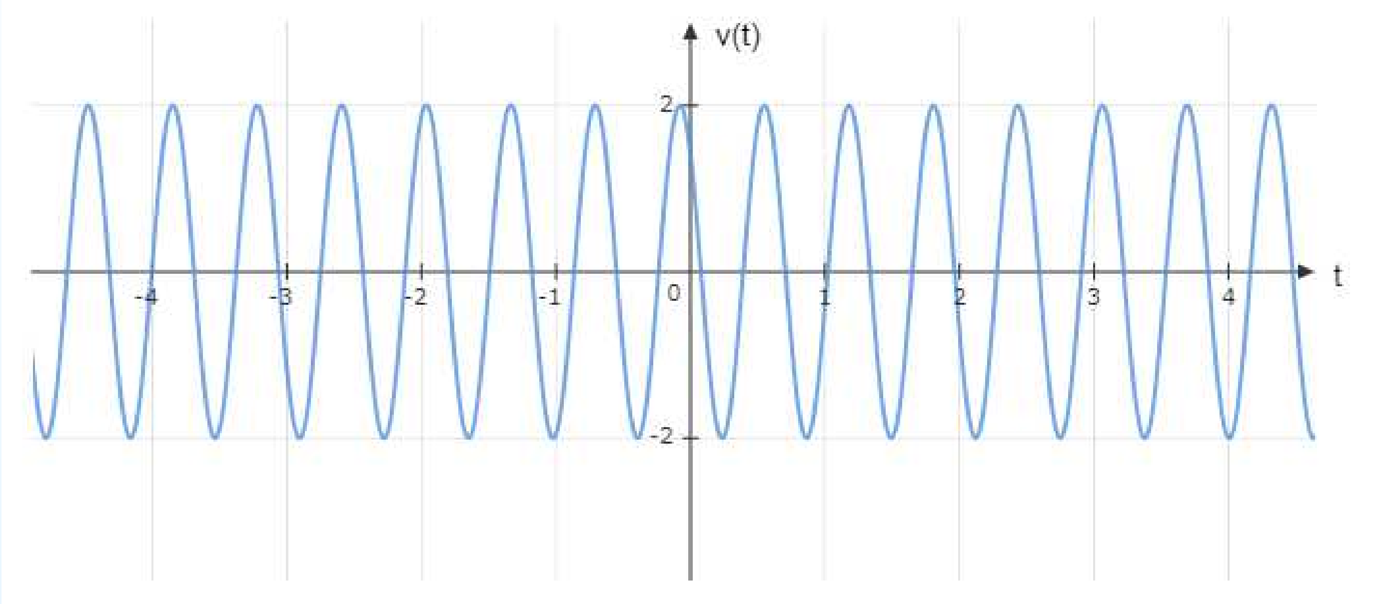
Tensione elettrica

Quindi l'energia si può scrivere semplicemente de_{AB} (omettendo l'indicazione della curva γ). Il coefficiente di proporzionalità tra de e dq è, per definizione, la *tensione elettrica*.

- Definizione: $v_{AB} = \frac{de_{AB}}{dq}$. La tensione elettrica tra due punti è una misura dell'energia necessaria a spostare una carica tra i due punti, indipendente dal valore della carica. pertanto, la tensione elettrica è una proprietà *intrinseca* dello spazio.
- Unità di misura nel sistema internazionale: Volt (V).
- In generale, i fenomeni elettrici sono non-stazionari, perciò la tensione dipende dal tempo t. Esempio: $v_{AB}(t) = U\cos(\omega t + \phi)$ con $U, \omega, \phi > 0$.

Esempio: Tensione elettrica sinusoidale

Esempio di tensione elettrica sinusoidale con espressione $v(t) = 2\cos(10\,t + \frac{\pi}{2})$ (V).



Da notare che *de* può essere sia positiva che negativa che nulla, quindi, una tensione può assumere qualsiasi valore ($v > 0$, $v < 0$, $v = 0$).

Esempio: Tensione elettrica sinusoidale

In una tensione sinusoidale $v_{AB}(t) = U\cos(\omega t + \phi)$, chiamiamo:

- Ampiezza della sinusoide la grandezza U. Essa rappresenta la ampiezza del segnale sinusoidale, che oscilla tra gli estremi $+U$ e $-U$ (misurata in Volt).
- Pulsazione della sinusoide la grandezza ω, misurata in rad/sec. Essa rappresenta la velocità con cui la tensione sinusoidale oscilla nel tempo.
- Fase iniziale della sinusoide la grandezza ϕ (misurata in rad), che rappresenta la fase della sinusoide all'istante iniziale $t = 0$.

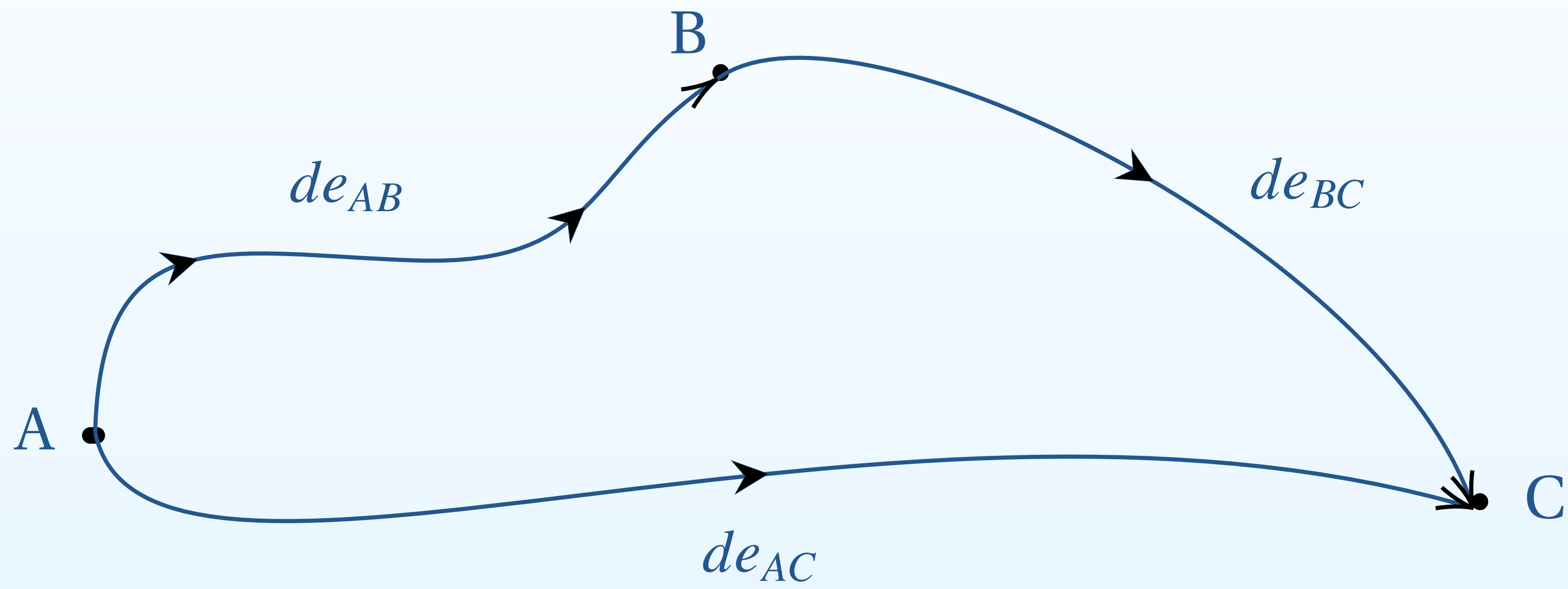
Proprietà delle tensioni elettriche

Valgono queste proprietà:

- **Proprietà di indipendenza dal percorso**: Una tensione $v_{AB}(t)$ **non** dipende dal percorso tra A e B ma solo dai punti stessi.
- **Proprietà di nullità della tensione in un punto rispetto a sé stesso**: Vale $v_{AA}(t) = 0$. Infatti, non si compie alcun lavoro per tenere ferma una carica (ma solo per spostarla tra due punti distinti).

Proprietà delle tensioni elettriche

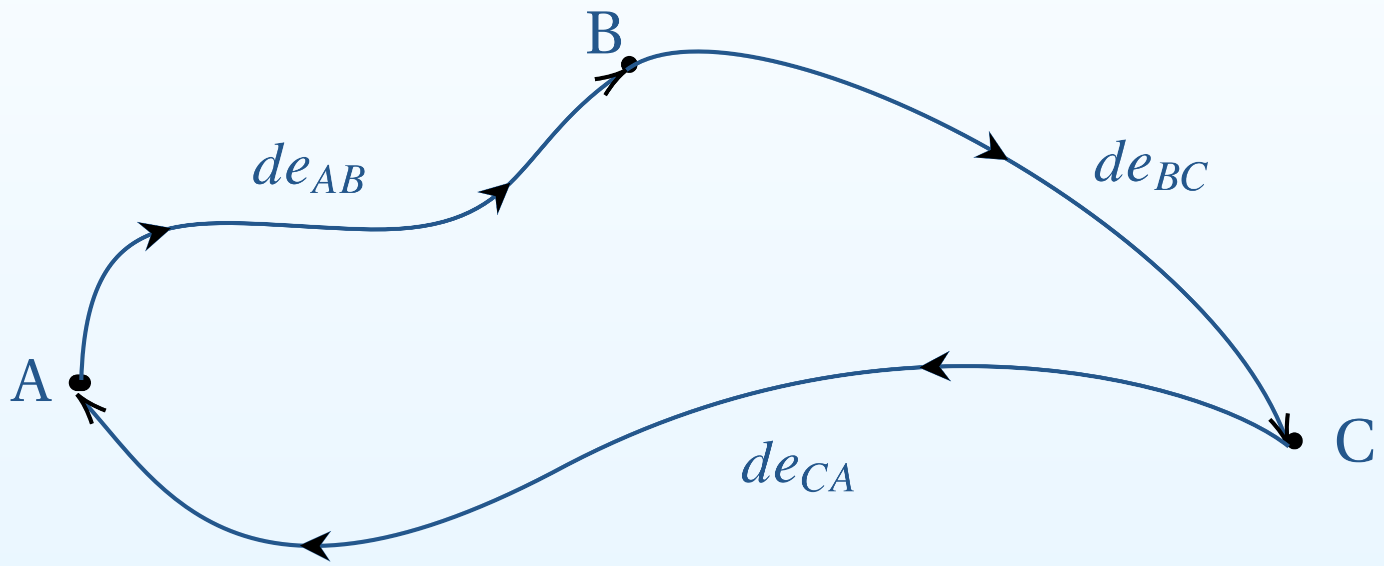
Dati tre punti A, B e C qualsiasi nello spazio, vale la **proprietà di additività**: $v_{AB}(t) + v_{BC}(t) = v_{AC}(t)$.



Infatti, dall'esperienza, l'energia sui tratti AB-BC si somma, e l'energia è indipendente dal percorso.

Proprietà delle tensioni elettriche

Proprietà di somma nulla delle tensioni su un percorso chiuso: Dati tre punti A, B e C, vale $v_{AB}(t) + v_{BC}(t) + v_{CA}(t) = 0$.



Questa proprietà deriva dalla additività e dalla nullità della tensione di un punto rispetto a sé stesso.

Proprietà delle tensioni elettriche

La proprietà di somma nulla impone un *vincolo* tra le tensioni.

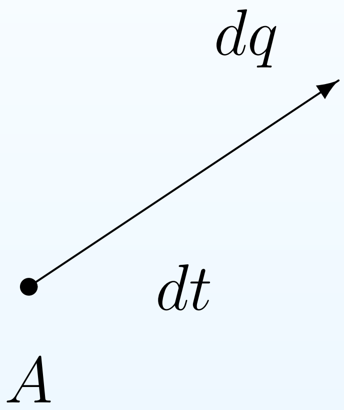
Esempio 1: Dati due punti A e B, si possono definire tensioni v_{AB} e v_{BA}. La proprietà di somma nulla implica che $v_{AB} = -v_{BA}$.

Esempio 2: Nel caso della slide precedente, siano $v_{BC} = 2$V e $v_{AC} = -3$V. Determinare v_{AB}. Risposta:
$v_{AB} = -v_{BC} - v_{CA} = -v_{BC} + v_{AC} = -2 - 3 = -5$V.

Contro-esempio: Occorre fare attenzione all'ordine dei pedici nelle tensioni. Nel caso della slide precedente, mentre è corretto scrivere $v_{AB}(t) + v_{BC}(t) + v_{CA}(t) = 0$, **non** sarebbe corretto scrivere $v_{AB}(t) + v_{CB}(t) + v_{CA}(t) = 0$!

Corrente elettrica

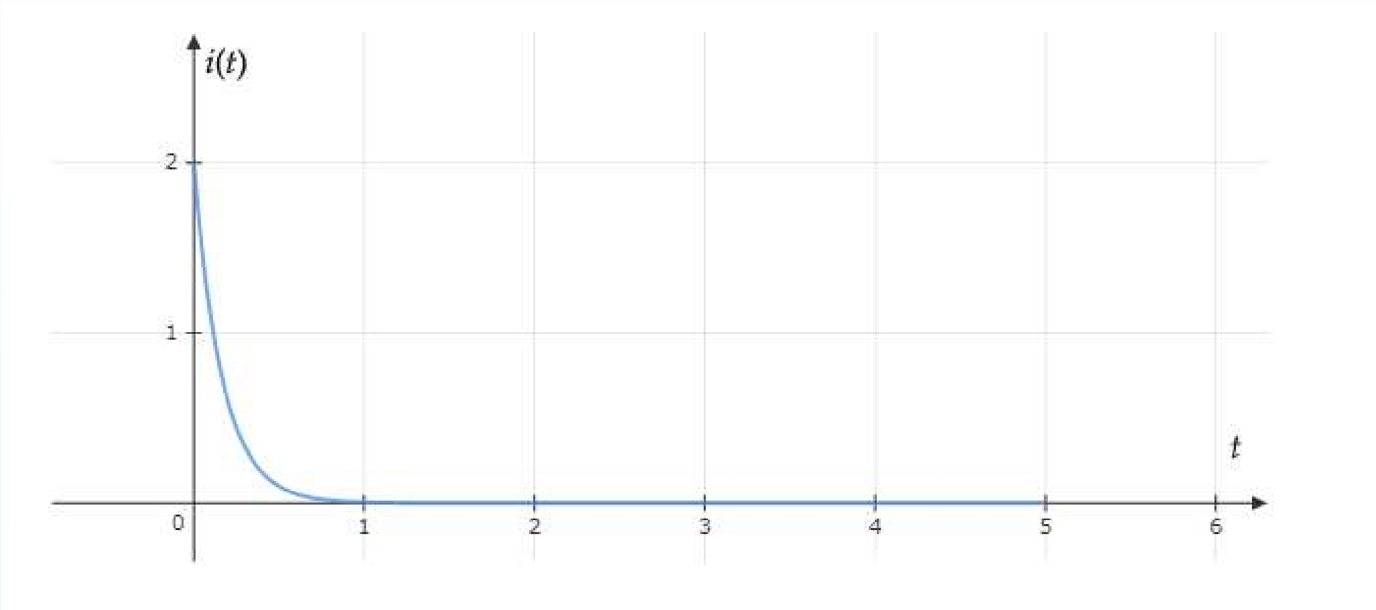
Rappresenta la quantità di carica dq che attraversa un punto A dello spazio nel tempo dt.



- Definizione: $i_A = \frac{dq_A}{dt}$
- Unità di misura nel sistema internazionale: Ampére (A)
- A causa della non-stazionarietà dei fenomeni elettrici, in genere la corrente dipende dal tempo t. Esempio: $i(t) = Ie^{-\beta t}$ con $I, \beta > 0$.

Esempio: Corrente elettrica esponenziale

Esempio di corrente elettrica esponenziale con espressione $i(t) = 2e^{-6t}$ (A).



La corrente elettrica rappresenta la velocità con cui le cariche si muovono in un dato punto dello spazio in un determinato istante di tempo.

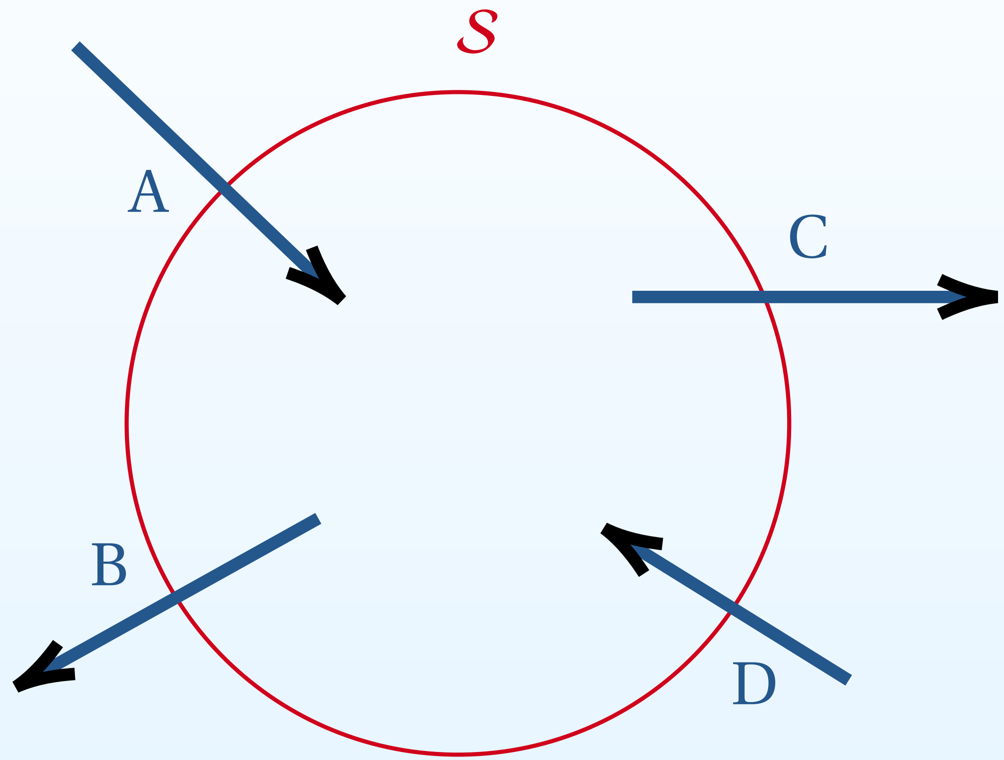
Assiomi delle correnti elettriche

Dato un punto A qualsiasi nello spazio e una **superficie chiusa** **(sufficientemente grande)** $\mathcal{S}$:

- **Assioma di "puntualità"**: Una corrente elettrica $i_A(t)$ dipende **solo** dal punto A.
- **Assioma di additività**: La corrente totale che attraversa una superficie chiusa $\mathcal{S}$ è data dalla somma algebrica delle correnti che la attraversano in un punto.
- **Assioma di invariabilità della carica**: La quantità di carica contenuta in $\mathcal{S}$ rimane sempre costante. Ciò implica che la somma algebrica delle correnti che attraversano una superficie chiusa deve essere nulla.

Assiomi delle correnti elettriche

Visualizzazione della seconda e della terza proprietà.



Dagli ultimi due assiomi risulta che $i_A(t) - i_B(t) - i_C(t) + i_D(t) = 0$. Le correnti i_A e i_D si dicono *entranti*, mentre le correnti i_B e i_C si dicono *uscenti*.

Assiomi delle correnti elettriche

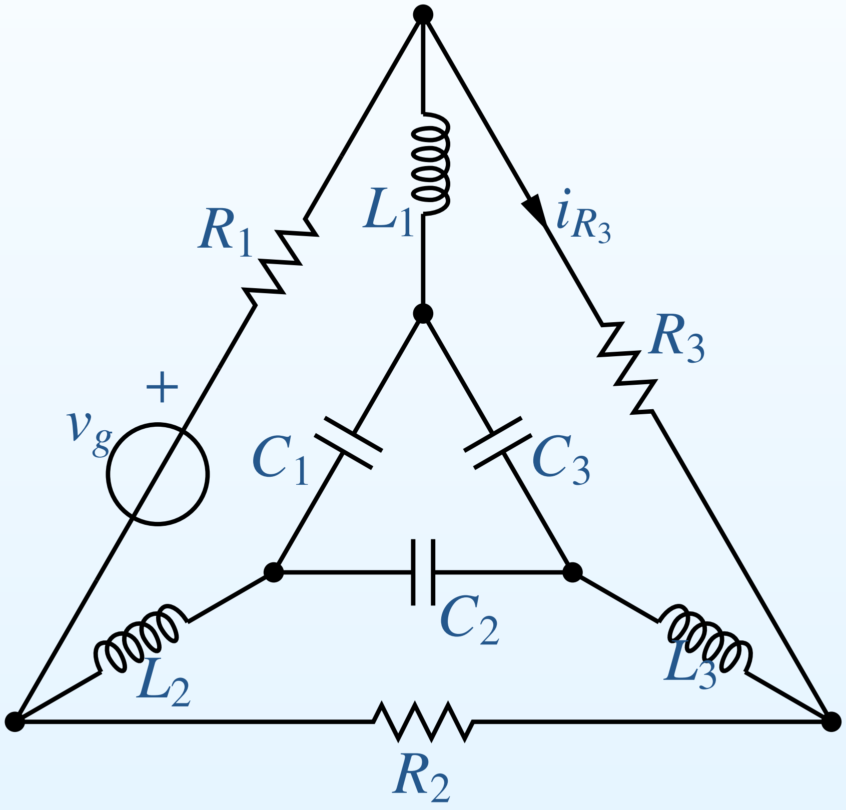
L'assioma di invariabilità della carica all'interno di una superficie chiusa implica un *vincolo* tra le correnti.

Esempio 1: Se solo due correnti entranti i_A e i_B interessano una superfice chiusa, allora $i_A = -i_B$.

Esempio 2: Nel caso visto nella slide precente, siano $i_A = 1$A, $i_B = -2$A, $i_C = -6$A, determinare i_D. Risulta $i_D = -i_A + i_B + i_C = -(1) + (-2) + (-6) = -9$A. I versi delle frecce non hanno nulla a che vedere con i segni delle correnti, che possono essere sia positivi che negativi (quando le correnti non sono nulle).

Esempio: Circuito elettrico

Un circuito elettrico è un insieme di componenti elementari collegati fra loro:



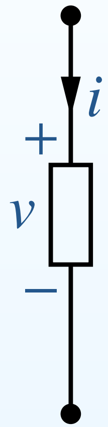
Equazioni fondamentali

Le equazioni fondamentali si dividono in due categorie:

- Relazioni costitutive dei componenti: descrivono il comportamento dei singoli componenti.
- Equazioni di Kirchhoff: descrivono il collegamento dei componenti tra loro.

Bipoli elementari

Gli elementi più semplici dei circuiti elettrici sono i *bipoli elementari*.



Un bipolo instaura una relazione tra la tensione ai suoi capi $v(t)$ e la corrente che lo attraversa $i(t)$.
E' importante notare che $v(t)$ e $i(t)$ sono in *versi coordinati*, ovvero la corrente va dal + al – della tensione.

Bipoli elementari (2)

E' importante ricordare che $v(t)$ e $i(t)$ sono grandezze *con segno*, cioè le variabili v ed i possono assumere valori positivi, negativi e nullo. Ovvero: $v, i \in \mathbb{R}$.

Inoltre, la variabile temporale t è reale, ovvero: $t \in \mathbb{R}$.

Funzione generatrice di un bipolo

La relazione che il bipolo instaura tra la tensione e la corrente si esprime per mezzo di una *funzione generatrice* del bipolo:

$$f(v, i, t).$$

Essa è una funzione della tensione associata al bipolo, della corrente associata al bipolo e del tempo.
All'istante t, ai capi di un bipolo con funzione generatrice f si possono trovare *tutte e sole* quelle coppie di valori (v, i) tali che:

$$f(v(t), i(t), t) = 0.$$

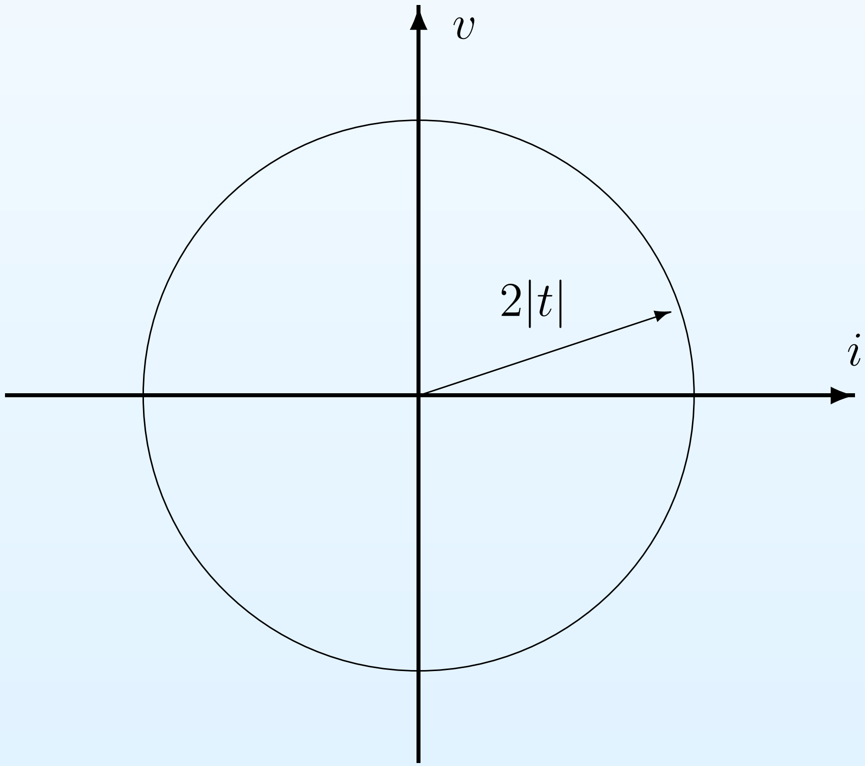
Tale relazione si chiama *relazione costitutiva* del bipolo.
Una coppia di funzioni (v, i) si dice *ammissibile per il bipolo* se soddisfa la sua relazione costitutiva.

Esempio: Funzione generatrice

Supponiamo che un bipolo abbia la seguente funzione generatrice:

$$f(v, i, t) = v^2 + i^2 - 4t^2.$$

Le coppie (v, i) ammissibili per tale bipolo sono tutte e sole quelle che soddisfano l'equazione $f(v, i, t) = 0$, ovvero:



Proprietà di linearità e tempo-invarianza

Un bipolo si dice *lineare* se per ogni combinazione di costanti α e β e di coppie tensione-corrente $(v_1(t), i_1(t))$ e $(v_2(t), i_2(t))$ vale:

$$f(\alpha v_1(t) + \beta v_2(t), \alpha i_1(t) + \beta i_2(t), t) = \\ \alpha f(v_1(t), i_1(t), t) + \beta f(v_2(t), i_2(t), t).$$

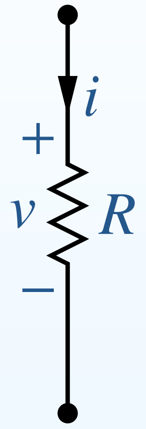
Questa si dice anche *proprietà di sovrapposizione degli effetti*. Un bipolo si dice *tempo-invariante* se il suo comportamento non dipende esplicitamente dal tempo:

$$f(v(t), i(t), t) = \tilde{f}(v(t), i(t)).$$

Un bipolo sia lineare che tempo-invariante si denota con LTI.

Bipoli elementari: Il resistore

Il resistore elettrico ha simbolo grafico:



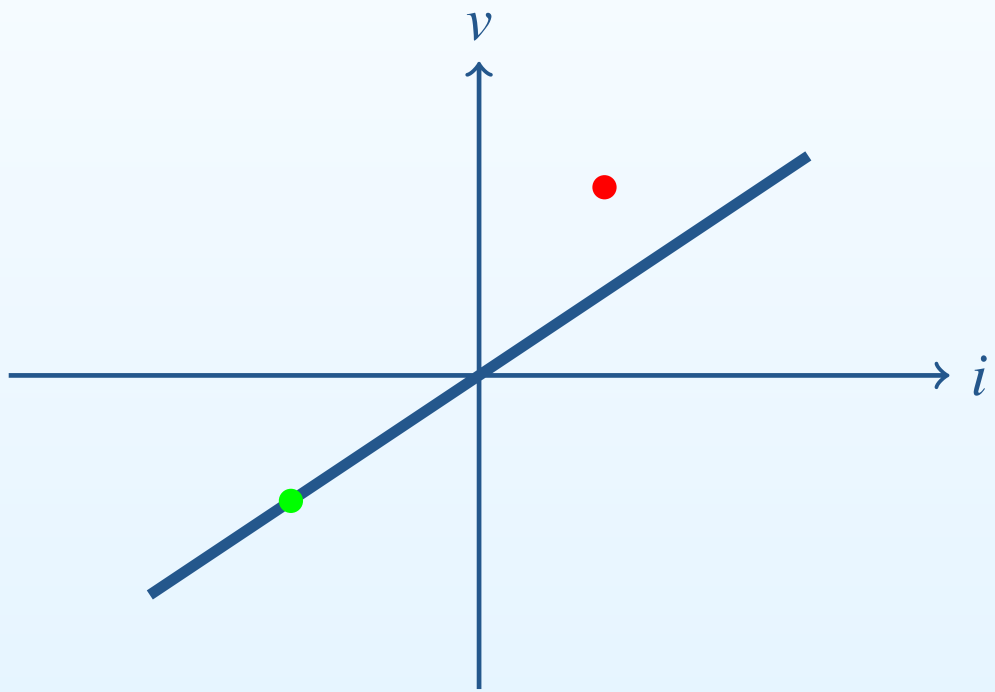
La funzione generatrice è $f(v,i,t) = v - Ri$, quindi la sua *relazione costitutiva* è:

$$v(t) = Ri(t),$$

dove il parametro R si chiama *resistenza* del resistore e si misura in Ohm (Ω).

Bipoli elementari: Il resistore

La relazione costitutiva di un resistore può essere visualizzata come una retta, passante per l'origine, con pendenza R, disponendo tensione e corrente sugli assi di un grafico.



Il punto **verde** rappresenta una coppia ammissibile, il punto **rosso** non rappresenta una coppia ammissibile.

Bipoli elementari: Il resistore

La *relazione costitutiva* del resistore si può scrivere anche:

$$i(t) = Gv(t),$$

dove il parametro costante G si chiama *conduttanza* del resistore e si misura in Ω^{-1}. Chiaramente, se $R \neq 0$, vale la relazione $G = \frac{1}{R}$.

Sia R che G sono parametri reali. Nei componenti *reali*, R e G sono quantità positive o nulle, ma nei modelli elettrico-circuitali nulla vieta che possano assumere anche valori negativi.

Bipoli elementari: Il resistore

Il resistore è chiaramente un componente lineare, a patto che R non dipenda esplicitamente da tensione o corrente di bipolo. E' inoltre un componente tempo-invariante, a patto che R non dipenda esplicitamente dal tempo.

Esempio 1: Si consideri il bipolo descritto dalla relazione costitutiva $v(t) = 3i^3(t)$. Questo può essere visto come un resistore, non lineare, con $R = 3i^2$.

Esempio 2: Si consideri il bipolo descritto dalla relazione costitutiva $v(t) = 4t\, i(t)$. Questo può essere visto come un resistore, tempo variante, con $R = 4t$, lineare. La retta che descrive la rel. costitutiva ha pendenza variabile nel tempo.

Bipoli elementari: Il resistore

Esempio 3: Si consideri il bipolo descritto dalla funzione generatrice $f(v,i,t) = 5t\,v^2 - 3i$. Questo può essere visto come un resistore, non lineare e non-tempo invariante (dimostrarlo determinandone la conduttanza G).

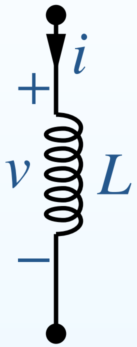
Esempio 4: Si consideri il bipolo descritto dalla funzione generatrice $f(v,i,t) = 9v - 3i + 2$. Questo bipolo *non* può essere visto come un resistore (dimostrarlo). Inoltre, valutare se sia un bipolo lineare oppure non-lineare.

Bipoli elementari: Il resistore

I ‘resistori’ sono idealizzazioni di componenti reali che si presentano come in figura.

Bipoli elementari: L'induttore elettrico

L'induttore elettrico ha simbolo grafico:



La funzione generatrice è $f(v, i, t) = v - L\frac{di}{dt}$, quindi la sua *relazione costitutiva* è:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt},$$

dove il parametro L si chiama *induttanza* dell'induttore e si misura in Henry (H).

Bipoli elementari: L'induttore elettrico

In un induttore reale, vale $L \geq 0$, tuttavia nulla vieta che il valore dell'induttanza L possa essere negativo.
Se L è un valore costante, allora l'induttore è un componente lineare, tempo invariante.

Esempio 1: Si consideri il bipolo descritto dalla funzione generatrice $f(v,i,t) = 5v - 2\frac{di}{dt}$. Questo può essere visto come un induttore, lineare e tempo invariante (dimostrarlo determinandone l'induttanza L).

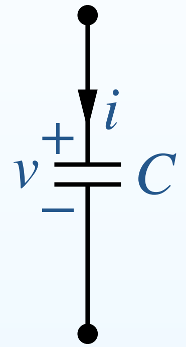
Esempio 2: Un bipolo è descritto dalla funzione generatrice $f(v,i,t) = 5v - 2t\frac{di}{dt}$. Questo può essere visto come un induttore, lineare e non tempo-invariante (dimostrarlo).

Bipoli elementari: L'induttore elettrico

Gli 'induttori' sono idealizzazioni di componenti reali che si presentano come in figura.

Bipoli elementari: Il condensatore

Il condensatore elettrico ha simbolo grafico:



La funzione generatrice è $f(v, i, t) = i - C\frac{dv}{dt}$, quindi la sua *relazione costitutiva* è:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt},$$

dove il parametro C si chiama *capacità* del condensatore e si misura in Farad (F).

Bipoli elementari: Il condensatore

In un condensatore reale, vale $C \geq 0$, tuttavia nulla vieta che il valore della capacità C possa essere negativo.
Se C è un valore costante, allora il condensatore è un componente lineare, tempo invariante.

Esempio 1: Si consideri il bipolo descritto dalla funzione generatrice $f(v, i, t) = 5i - 2\frac{dv}{dt}$. Questo può essere visto come un condensatore, lineare e tempo invariante (dimostrarlo).

Esempio 2: Un bipolo è descritto dalla funzione generatrice $f(v, i, t) = 5vi + 2t^2\frac{dv}{dt}$. Questo può essere visto come un condensatore, non-lineare e non tempo-invariante (dimostrarlo determinandone la capacità C).

Bipoli elementari: Il condensatore

Esempio 3: Si consideri un condensatore elettrico di capacità $C = \frac{1}{2}$ F. Si consideri la coppia tensione-corrente $(v(t), i(t)) = (\cos(2t), -\sin(2t))$. Si tratta di una coppia ammissibile per il condensatore ?

Risposta: **Si**. Per rispondere in modo affermativo è necessario verificare che la coppia tensione-corrente specificata annulli la funzione generatrice

$$f(v, i, t) = i - \frac{1}{2}\frac{dv}{dt}.$$

Sostituendo, si ha che, per ogni t

$$f(\cos(2t), -\sin(2t), t) = -\sin(2t) - \frac{1}{2}\frac{d\cos(2t)}{dt} = -\sin(2t) - \frac{1}{2}(-2\sin(2t)) = 0.$$

Bipoli elementari: Il condensatore

Esempio 4: Si consideri un condensatore elettrico di capacità $C = \frac{1}{3}$ F. Si consideri la coppia tensione-corrente $(v(t), i(t)) = (-e^{-2t}, e^{-3t})$. Si tratta di una coppia ammissibile per il condensatore ?
Risposta: **No**. Infatti, la coppia tensione-corrente specificata non annulla la funzione generatrice del condensatore

$$f(v, i, t) = i - \tfrac{1}{3}\tfrac{dv}{dt}.$$

Infatti, sostituendo si ha che, per quasi tutti i valori di t

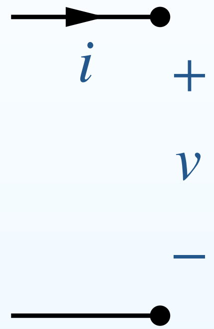
$$f(-e^{-2t}, e^{-3t}, t) = e^{-3t} - \frac{1}{3}\frac{d(-e^{-2t})}{dt} = e^{-3t} - \frac{1}{3}(2e^{-2t}) \neq 0.$$

Bipoli elementari: Il condensatore

I ‘condensatori’ sono idealizzazioni di componenti reali che si presentano come in figura.

Bipoli elementari: Il circuito aperto (c.a.)

Il circuito aperto ha simbolo grafico:



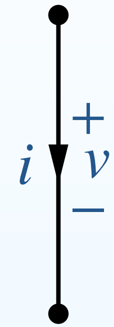
La funzione generatrice è $f(v, i, t) = i$, quindi la sua *relazione costitutiva* è:

$$i(t) = 0.$$

In un circuito aperto non scorre corrente, ma non c'è alcun vincolo sulla tensione ai suoi capi. Il circuito aperto è equivalente ad un resistore con $G = 0$.

Bipoli elementari: Il corto-circuito (c.c.)

Il corto-circuito ha simbolo grafico:



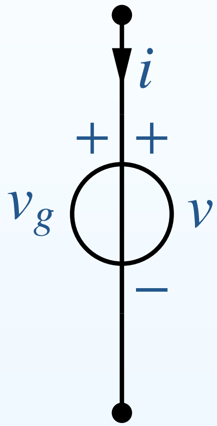
La funzione generatrice è $f(v, i, t) = v$, quindi la sua *relazione costitutiva* è:

$$v(t) = 0.$$

In un corto-circuito non c'è alcun vincolo sulla corrente. Il c.c. è equivalente ad un resistore con $R = 0$.

Il generatore indipendente di tensione (GIT)

Il generatore indipendente di tensione ha simbolo grafico:



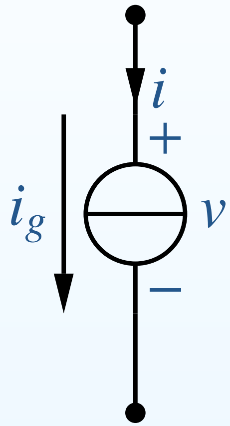
La funzione generatrice è $f(v(t), i(t), t) = v(t) - v_g(t)$, quindi la sua *relazione costitutiva* è:

$$v(t) = v_g(t),$$

dove la tensione $v_g(t)$ è la funzione caratteristica del generatore indipendente di tensione.

Il generatore indipendente di corrente (GIC)

Il generatore indipendente di corrente ha simbolo grafico:



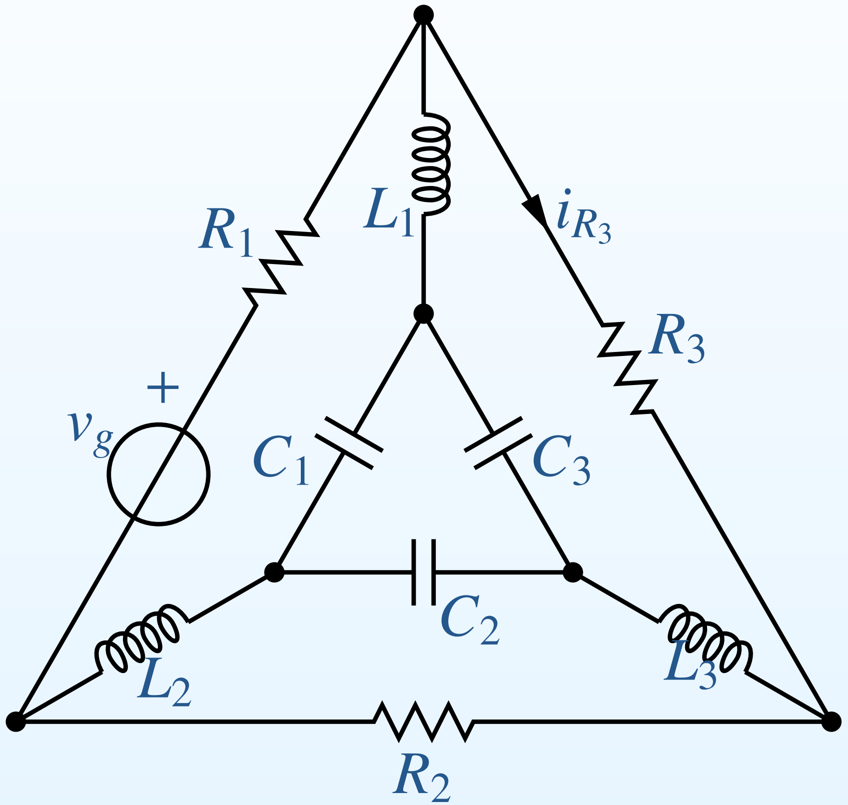
La funzione generatrice è $f(v(t), i(t), t) = i(t) - i_g(t)$, quindi la sua *relazione costitutiva* è:

$$i(t) = i_g(t),$$

dove la corrente $i_g(t)$ è la funzione caratteristica del generatore indipendente di corrente.

Esempio: Circuito elettrico

Riconoscere i bipoli elementari nel seguente circuito elettrico:



Analizzare un circuito significa determinare il valore di una tensione o una corrente (o più) dati i valori dei componenti.

Proprietà di memoria

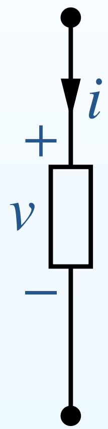
I componenti bipolari condensatore e induttore si dicono componenti *con memoria* perché nelle loro relazioni costitutive compaiono operatori di derivazione (o integrazione).

Quando un circuito contiene uno o più elementi con memoria, si parla di *circuito con memoria*.

I bipoli con memoria sono induttore, condensatore, ma anche *memristore*.

Bipoli generici

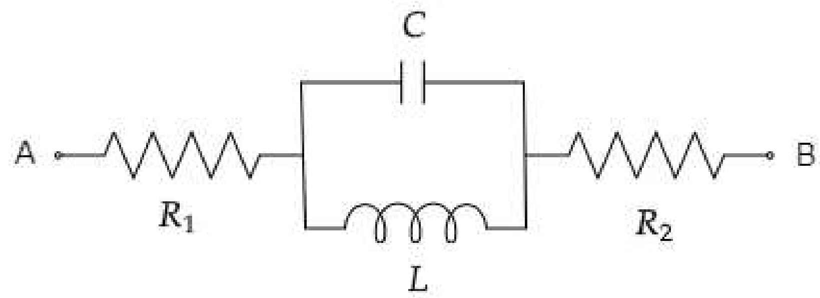
Ogni circuito elettrico accessibile da due terminali si dice bipolo.



Un bipolo elementare è un bipolo. Un bipolo può essere però formato dalla connessione di più componenti tra loro.

Bipoli generici

Esempio di bipolo non elementare.



La funzione generatrice $f(v(t), i(t), t)$ può essere arbitrariamente complicata. Qui v è la tensione v_{AB} e i è la corrente che entra da A ed esce dal terminale B.

Il memristore

Il *memristore* (dall'inglese *memristor*, contrazione di *memory resistor*), è un bipolo inizialmente assiomatizzato all'inizio degli anni '70 dal Prof. L. Chua e realizzato sperimentalmente solo nel 2008 da un team della Hewlett-Packard.

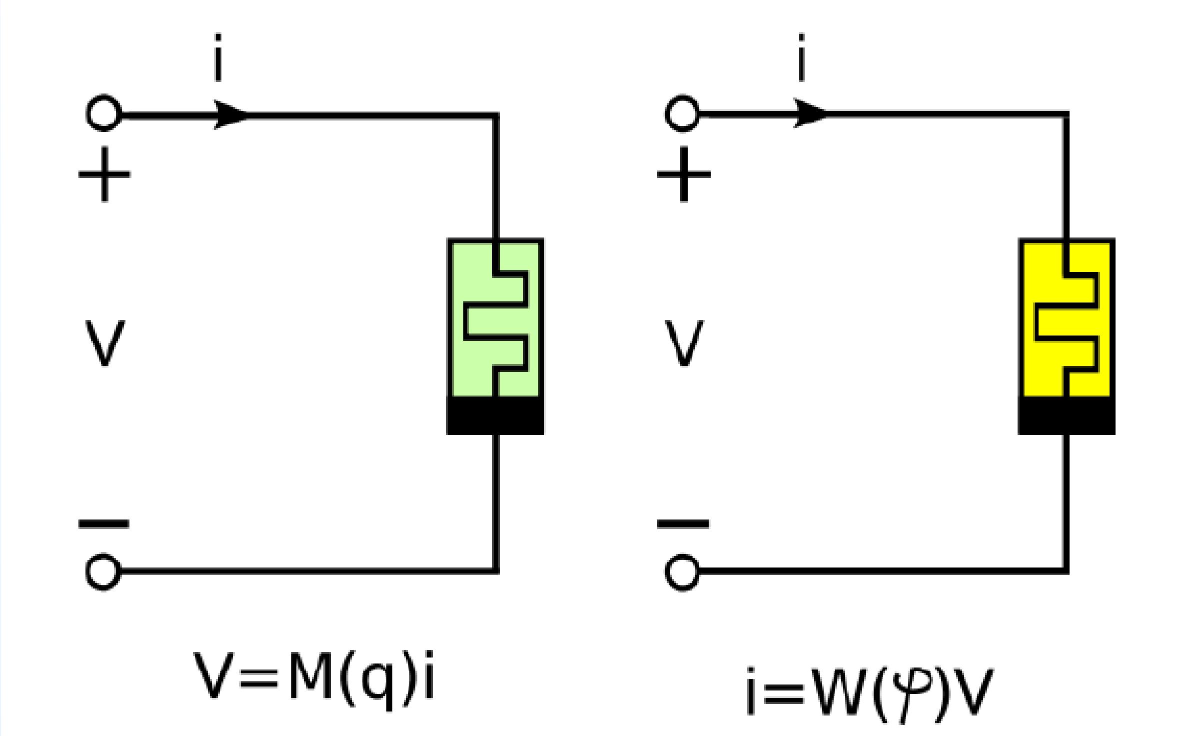


Fig. 1. Charge-controlled memristor (left). Flux-controlled memristor (right).

Il memristore

Il memristore è un bipolo *non lineare* che può essere rappresentato sia da una relazione costitutiva di tipo 'controllato in carica' $v = M(q)i$, con M detta *memristenza* (misurata in Ω), che da una di tipo 'controllato in flusso' $i = W(\varphi)v$, con W detta *memduttanza* (misurata in Ω^{-1}), dove

$$q = \int_{-\infty}^{t} i\,dt, \ \varphi = \int_{-\infty}^{t} v\,dt,$$

sono carica e flusso, rispettivamente. Integrando la relazione $v = M(q)i$ nel tempo, si ottiene:

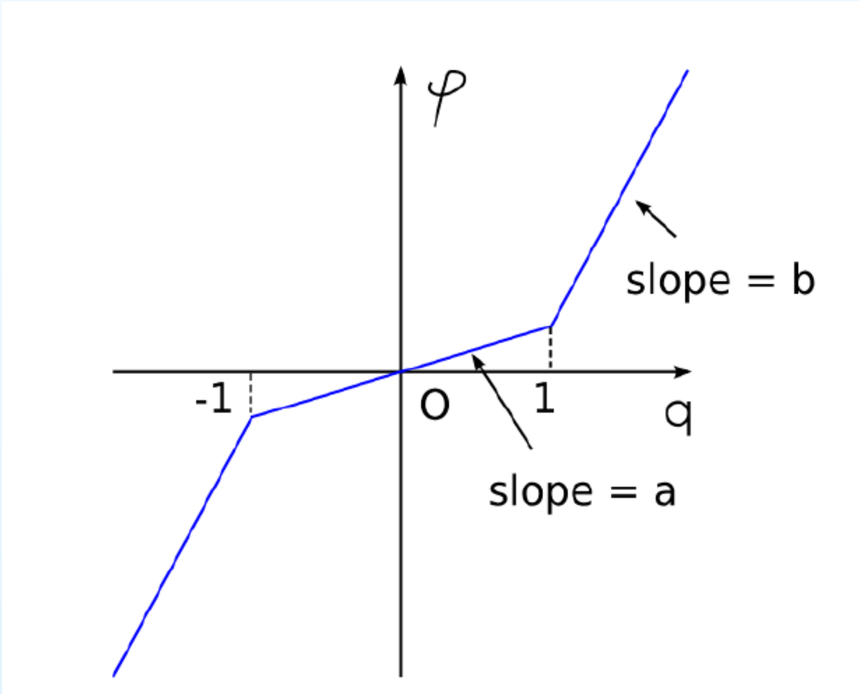
$$\int_{-\infty}^{t} v\,dt = \int_{-\infty}^{t} M(q(t))i(t)\,dt.$$

Il memristore

Ovvero

$$\varphi(q) = \int_0^q M(q)dq,$$

con $q(-\infty) = 0$. Questa è una forma integrale di relazione costitutiva basata sulla funzione $\varphi = \varphi(q)$. Esempio (HP):



Il memristore

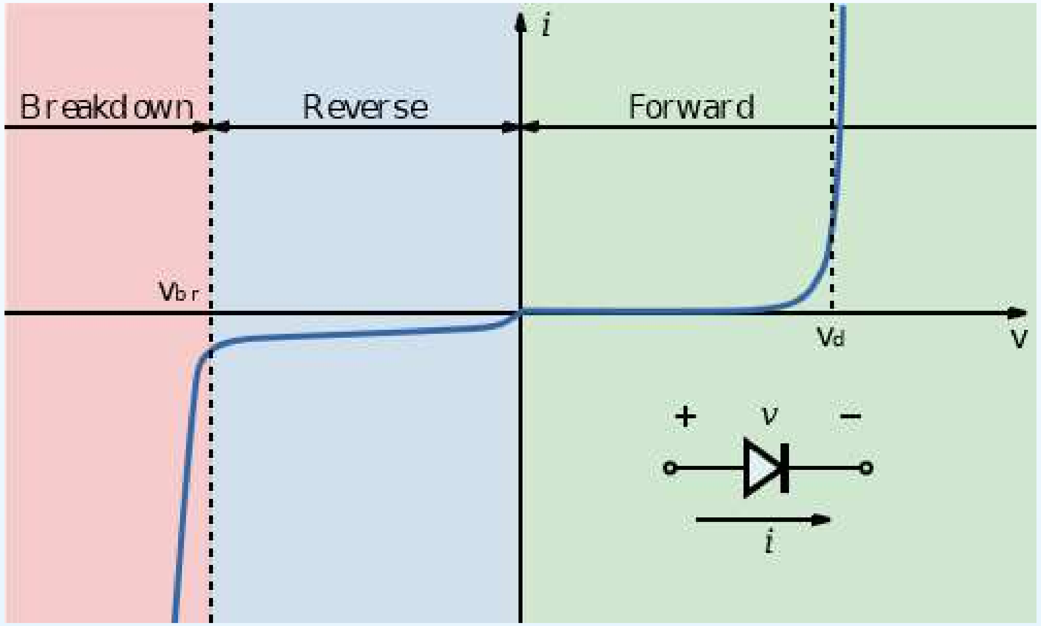
La relazione $\varphi = \varphi(q)$ di tipo HP risulta quindi lineare a tratti. Dato poi che risulta

$$M(q) = \frac{d\varphi(q)}{dq},$$

allora $M(q) \geq 0$ per ogni valore di q (fra l'altro, nella versione HP, la funzione M è costante a tratti).

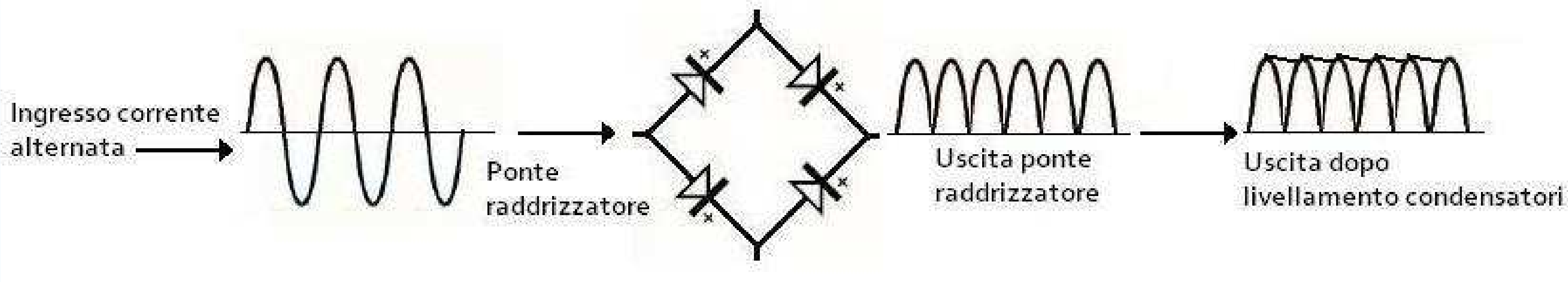
Il diodo a giunzione

Il diodo a giunzione è un bipolo non lineare descritto dal seguente simbolo grafico e con la seguente relazione tensione-corrente (relazione costitutiva):



Esempi di applicazione del diodo: Ponte di Graez

Si tratta di un circuito formato da quattro diodi che convertono una tensione alternata in una tensione sempre positiva:



L'utilizzo di un condensatore consente poi di ottenere una tensione pressocché costante nel tempo.

Il diodo a giunzione

La relazione costitutiva può essere approssimata come:

$$i = a\left(e^{\frac{v}{b}} - 1\right).$$

Per un bipolo non lineare è possibile definire una *resistenza/conduttanza differenziale*. Ad esempio, per il diodo si può definire la conduttanza differenziale

$$g(v) = \frac{di(v)}{dv} = \frac{a}{b}e^{\frac{v}{b}} \geq 0.$$

Ad esempio, $g(0) = a/b$.

Resistenza/conduttanza differenziale

In generale, dato un bipolo descritto da una relazione costitutiva

$$i = F(v),$$

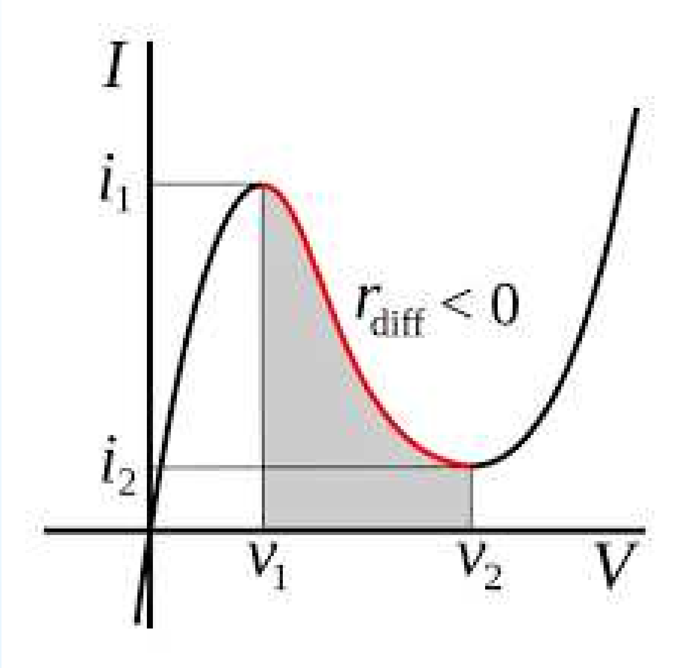
questa relazione può essere approssimata, eseguendo uno sviluppo in serie di Taylor intorno a un punto $\bar{v}$, come

$$i = F(\bar{v}) + F'(\bar{v})(v - \bar{v}) + \frac{1}{2}F''(\bar{v})(v - \bar{v})^2 + \ldots$$

Il coefficiente $g := F'(\bar{v})$ si definisce *conduttanza differenziale* e il suo reciproco, se $g \neq 0$, è la *resistenza differenziale*.

Il diodo di Esaki (1957)

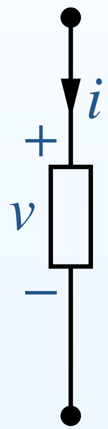
Il diodo *tunnel* (di Esaki) è un bipolo non lineare con la seguente relazione tensione-corrente (relazione costitutiva):



Nella zona centrale della caratteristica presenta conduttanza differenziale negativa.

Bipoli ‘affini’

Una classe importante è quella dei bipoli che hanno una funzione generatrice affine.



In questo caso, la funzione generatrice assume la forma:

$$f(v(t), i(t), t) = av(t) + bi(t) + c(t),$$

dove a e b sono costanti rispetto al tempo e $c(t)$ è una funzione del tempo che dipende dai GIT e GIC interni al bipolo.

Equivalenza delle funzioni generatrici

Dato un bipolo, la funzione generatrice che ne descrive il comportamento *non è unica*.

Per esempio, se $f(v, i, t)$ è una funzione generatrice di un bipolo, anche $k \cdot f(v, i, t)$ ne è funzione generatrice per qualsiasi costante $k \neq 0$.

Di fatto, le funzioni generatrici per ogni bipolo sono infinite.

Si introduce allora una *relazione di equivalenza* tra due funzioni generatrici $f_1(v, i, t)$ e $f_2(v, i, t)$ indicata con:

$$f_1(v, i, t) \sim f_2(v, i, t).$$

Equivalenza delle funzioni generatrici

L'equivalenza tra due funzioni generatrici permette di stabilire se due funzioni generatrici, con espressioni differenti, rappresentano lo stesso bipolo. Ad esempio:

$$f_1(v, i, t) = 3v - 9i,$$
$$f_2(v, i, t) = 4v - 12i,$$

rappresentano entrambe un resistore con resistenza $R = 3\Omega$.

Definizione: Due funzioni generatrici f_1 e f_2 sono equivalenti se e solo se, in ogni istante t, l'insieme delle soluzioni (v, i) dell'equazione $f_1(v, i, t) = 0$ coincide con l'insieme delle soluzioni dell'equazione $f_2(v, i, t) = 0$.

Equivalenza dei bipoli

Il concetto di equivalenza tra funzioni generatrici ha un ulteriore utilizzo, molto importante, che permette di stabilire *l'equivalenza esterna* tra due bipoli differenti.

Definizione: Sia b_1 un bipolo con funzione generatrice $f_1(v, i, t)$ e sia b_2 un diverso bipolo con funzione generatrice $f_2(v, i, t)$. I bipoli b_1 e b_2 si dicono *esternamente equivalenti* se e solo se $f_1(v, i, t) \sim f_2(v, i, t)$.

Esistono dei teoremi specifici sull'equivalenza del bipoli, e delle tecniche specifiche per determinare la funzione generatrice di un bipolo affine, che verranno esaminati molto più avanti nel corso.

Potenza istantanea assorbita da un bipolo

Su un bipolo in cui $v(t)$ e $i(t)$ sono coordinati, si definisce la *potenza istantanea assorbita*:

$$p(t) = v(t)i(t),$$

che si misura in Watt (W). Inoltre, si definisce il *contenuto energetico* o semplicemente *energia istantanea*:

$$e(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)d\tau,$$

che si misura in Joule (J). La definizione vale sotto l'ipotesi che $e(-\infty) = 0$.

Potenza istantanea assorbita da un bipolo

Il significato fisico della potenza assorbita e del contenuto energetico di un bipolo 

e la loro definizione possono essere spiegati come segue.

Si consideri una carica infinitesima dq che si sposta dal terminale + al terminale – del bipolo impiegando un tempuscolo dt. L'energia necessaria per compiere tale spostamento è $de = v\, dq$. Dalla definizione di corrente, vale $dq = i\, dt$, pertanto

$$de = v\, i\, dt \to p = \frac{de}{dt} = v\, i.$$

L'energia de viene attribuita al bipolo e ne costituisce una variazione del contenuto energetico interno.

Significato del segno della potenza istantanea

In ogni istante t la potenza $p(t)$ può assumere valore:

- positivo: in questo caso il bipolo sta *assorbendo* energia dal resto del circuito;
- negativo: in questo caso il bipolo sta *erogando* energia al resto del circuito;
- nullo: in questo caso il bipolo non sta scambiando energia con il resto del circuito.

Significato dell'energia istantanea

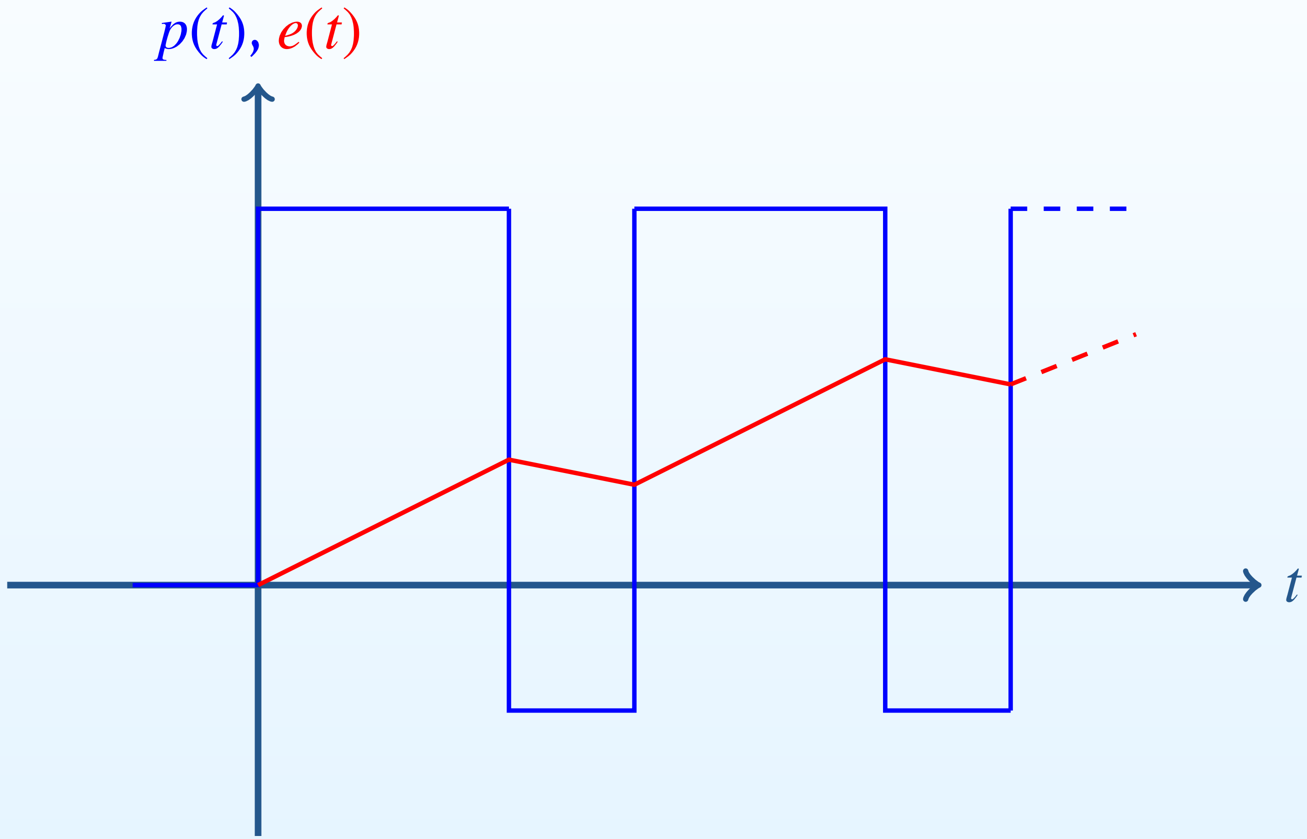
Se un bipolo è tale per cui in ogni istante di tempo t risulta $e(t) \geq 0$, allora si dice che il bipolo è *passivo*.
Un bipolo passivo può sia assorbire che erogare energia, ma non può mai erogare più energia di quella ricevuta in precedenza.

Se l'energia istantanea di un bipolo cambia segno, il bipolo non è passivo. Si dice, pertanto, *attivo*.

Un bipolo attivo è *energeticamente indefinito*, ovvero, può sia erogare che assorbire energia in quantità arbitrarie.

Esempio: potenza ed energia

Si consideri un bipolo che scambia energia come in figura:



Si noti che, anche se $p(t) < 0$ in alcuni istanti di tempo, comunque $e(t) > 0$ in ogni istante di tempo $t > 0$, quindi il bipolo è energeticamente passivo.

Esempio: potenza ed energia

Un bipolo statico (senza memoria) è passivo se la sua relazione costitutiva giace nel I e III quadrante del piano $v - i$.

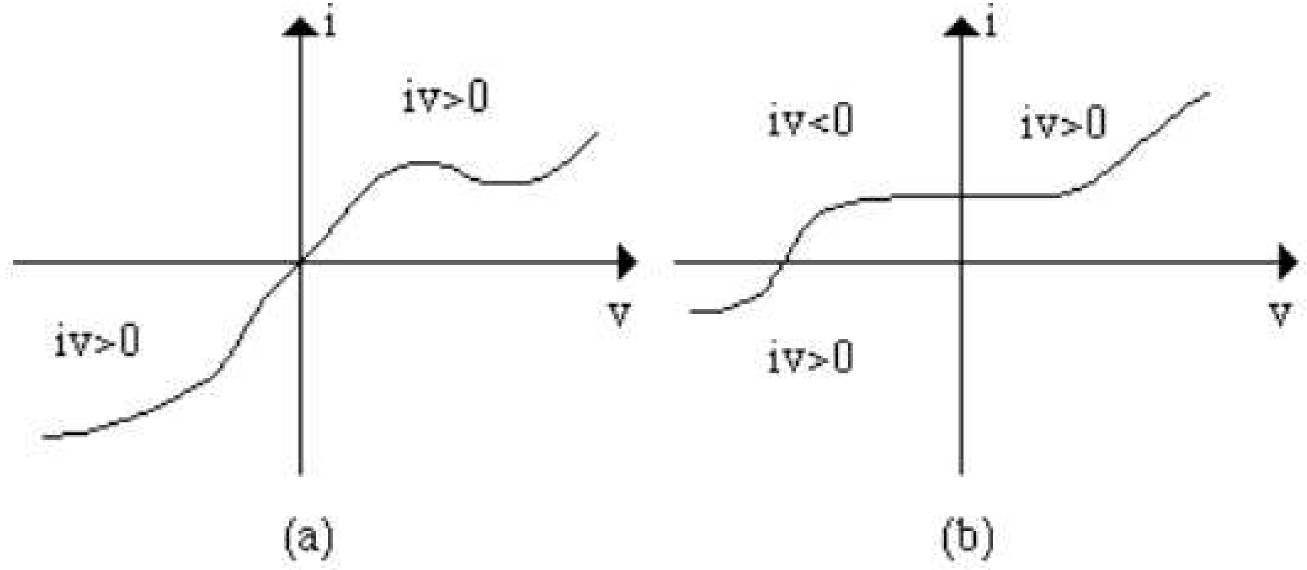


Figura 4 Bipolo passivo (a) e bipolo attivo (b).

Classificazione energetica dei bipoli: Resistore

In un resistore, vale $v(t) = Ri(t)$, quindi:

$$p(t) = v(t)i(t) = Ri^2(t),$$
$$e(t) = R \int_{-\infty}^{t} i^2(\tau) d\tau.$$

Chiaramente, il resistore è energeticamente passivo se e solo se $R \geq 0$.

Come conseguenza, il circuito aperto e il corto-circuito sono bipoli passivi.

Classificazione energetica dei bipoli: Induttore

In un induttore, vale $v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$, quindi:

$$p(t) = v(t)i(t) = Li(t)\frac{di(t)}{dt},$$

$$e(t) = L\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\frac{di(\tau)}{d\tau}d\tau = \frac{1}{2}Li^2(t).$$

Chiaramente, l'induttore è energeticamente passivo se e solo se $L \geq 0$.

Classificazione energetica: Condensatore

In un condensatore, vale $i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$, quindi:

$$p(t) = v(t)i(t) = Cv(t)\frac{dv(t)}{dt},$$

$$e(t) = C\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\frac{dv(\tau)}{d\tau}d\tau = \frac{1}{2}Cv^2(t).$$

Chiaramente, il condensatore è energeticamente passivo se e solo se $C \geq 0$.

Classificazione energetica dei bipoli: GIT

In un generatore indipendente di tensione, vale $v(t) = v_g(t)$, quindi:

$$p(t) = v(t)i(t) = v_g(t)i(t),$$

$$e(t) = \int_{-\infty}^{t} v_g(\tau)i(\tau)d\tau.$$

Non si può dire nulla, a prori, sul segno dell'energia istantanea, quindi si deve concludere che il GIT è un bipolo energeticamente attivo (indipendentemente dal valore del suo parametro caratteristico).

Classificazione energetica dei bipoli: GIC

In un generatore indipendente di corrente, vale $i(t) = i_g(t)$, quindi:

$$p(t) = v(t)i(t) = v(t)i_g(t),$$

$$e(t) = \int_{-\infty}^{t} v(\tau)i_g(\tau)d\tau.$$

Non si può dire nulla, a priori, sul segno dell'energia istantanea, quindi si deve concludere che il GIC è un bipolo energeticamente attivo (indipendentemente dal valore del suo parametro caratteristico).

Classificazione energetica dei bipoli: Memristore

In un memristore, vale $v(t) = M(q(t))i(t)$, con $M \geq 0$, quindi:

$$p(t) = v(t)i(t) = M(q(t))i^2(t) \geq 0,$$

$$e(t) = \int_{-\infty}^{t} M(q(\tau))i^2(\tau)d\tau \geq 0.$$

Il memristore risulta quindi essere un bipolo energeticamente passivo.