

Introduzione ai circuiti a tempo discreto

PROF. SIMONE FIORI

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione

Università Politecnica delle Marche

eMail: s.fiori@univpm.it

I circuiti a *tempo discreto* si distinguono dai circuiti a *tempo continuo* in quanto, a differenza di questi ultimi, evolvono solo in corrispondenza di istanti temporali distinti. Nei circuiti a tempo discreto, le grandezze elettriche, ovvero i *segnali*, sono noti e valutabili solo in corrispondenza di tali istanti temporali distinti. I circuiti a tempo discreto si distinguono in

- **nativi**: sono circuiti che vengono progettati e realizzati (tipicamente tramite software) direttamente per evolvere e per elaborare grandezze a tempo discreto;
- **derivati**: sono circuiti che vengono progettati a partire da circuiti a tempo continuo e poi resi a tempo discreto tramite un procedimento noto come *campionamento temporale*.

Di particolare interesse è il *campionamento uniforme*, che consiste nell'osservare delle grandezze a tempo continuo in corrispondenza di istanti temporali posti ad intervalli regolari. La durata di tali intervalli è una quantità detta *periodo di campionamento*.

I circuiti a tempo discreto derivati permettono di studiare circuiti complessi nei casi in cui:

- i circuiti siano *con memoria* ma i generatori indipendenti *non* siano sinusoidali (pertanto il metodo dei fasori non sarebbe utilizzabile).
- i generatori indipendenti, che rappresentano le sorgenti di segnali e di informazione, siano nativamente a tempo discreto (come accade, ad esempio, nel caso dell'elaborazione delle immagini).

In questa dispensa ci si occuperà di definire il concetto di campionamento uniforme e si studieranno due esempi semplici ma sufficientemente interessanti, ovvero il caso del filtro passa-basso del I ordine e di un circuito del II ordine. Si esamineranno poi alcune generalità sui circuiti a tempo discreto, i modelli ARMA e le rappresentazioni in spazio di stato.

1 Segnali, sistemi e campionamento temporale uniforme

Un *segnale* rappresenta l'evoluzione nel tempo di una grandezza misurabile. Esempi di segnale sono l'evoluzione nel tempo della tensione elettrica ai capi di un bipolo in un circuito, l'evoluzione nel tempo della velocità di rotazione dell'asse di un motore e l'evoluzione temporale della portata di fluido in una condotta.

Per rappresentare un segnale generico verranno utilizzate le notazioni $x(t)$ e $x[n]$, dove:

- la variabile $x \in \mathbb{K}$ denota il valore istantaneo del segnale;
- la notazione (t) denota un segnale che varia con continuità nel tempo, ovvero $t \in \mathbb{R}$; in questo caso ci si riferisce a un segnale a *tempo continuo*;
- la notazione $[n]$ denota un segnale che varia in istanti temporali discreti, ovvero $n = 0, 1, 2, 3, \dots$; in questo caso ci si riferisce a un segnale a *tempo discreto*.

Per quanto riguarda l'insieme dei valori che la variabile x può assumere, l'insieme \mathbb{K} è un campo scalare che può coincidere con l'insieme dei numeri reali, $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, nel quale caso il segnale è detto a *valori reali*, o con l'insieme dei numeri complessi, $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, nel quale caso il segnale è detto a *valori complessi*.

Esempi di segnali a valori reali sono $x(t) = e^{-t} \cos(4t)$ e $x[n] = 0.01n^2$. Entrambi sono segnali a valori reali. Il primo è un segnale a tempo continuo, mentre il secondo è un segnale a tempo discreto. Essi sono rappresentati graficamente nelle Figure 1 e 2, rispettivamente.

Con riferimento ai segnali a tempo discreto, è utile ricordare che essi possono derivare da segnali a tempo continuo a seguito di campionamento nel tempo, ma i segnali a tempo discreto possono 'nascere' direttamente a tempo discreto. Si pensi, a esempio, all'operazione di scrittura di un testo su tastiera: se a ogni carattere si associa un valore numerico, la sequenza dei valori ottenuti è una sequenza temporalmente discreta, infatti, tra la pressione successiva di due tasti non è definito alcun valore intermedio.

Un sistema è un oggetto che trasforma una o più segnali di *ingresso* (o *eccitazioni*) in una o più segnali di *uscita* (o *risposte*). Esempi di sistema sono un circuito (filtro audio) che accetta in ingresso un segnale vocale contaminato da rumore di fondo e lo restituisce in uscita con il rumore attenuato o cancellato, e un motore elettrico che accetta in ingresso una eccitazione

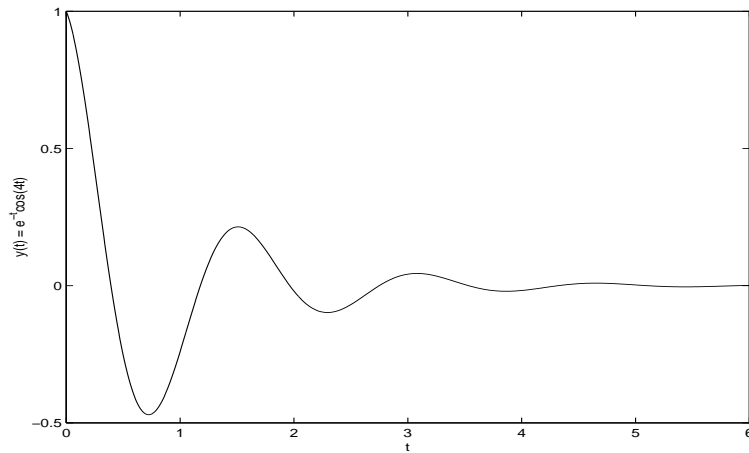


Figura 1: Esempio di segnale a tempo continuo $x(t)$ (mostrato solo per $t \geq 0$).

in tensione o corrente e risponde con un segnale che rappresenta la velocità angolare dell'asse di rotazione.

In generale, un sistema ammette almeno due tipi di rappresentazione formale:

- rappresentazione *ingresso-uscita*: Il sistema viene visto come “scatola nera” (*black box*) accessibile solo dai canali di ingresso e di uscita. Tutte le informazioni relative al comportamento interno del sistema non sono accessibili dall'esterno.
- rappresentazione *ingresso-stato-uscita*: Il sistema viene descritto dai segnali di ingresso, dai segnali di uscita e da segnali interni detti *variabili di stato*.

La rappresentazione in spazio di stato è più ricca di informazione e rispetto alla rappresentazione ingresso-uscita.

In generale, un sistema con un ingresso e una uscita (sistema SISO) può essere schematizzato come mostrato nella Figura 3.

Formalmente, la descrizione matematica del comportamento (ingresso-uscita) del sistema può essere dato in forma implicita, per esempio in termini di una equazione differenziale nella variabile y . Alcuni esempi di descrizioni

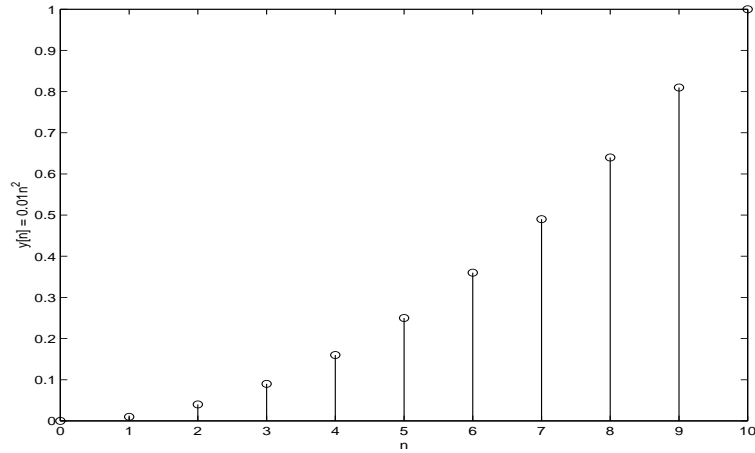


Figura 2: Esempio di segnale a tempo discreto $x[n]$ (mostrato solo per $n \geq 0$).



Figura 3: Schema generale di sistema SISO con segnale di ingresso x e segnale di uscita y .

ingresso-uscita di sistemi sono:

$$y(t) = x^2(t) + 2x(t - \pi) - 3,$$

$$y(t) = \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t x^2(t)},$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + a_1 \frac{d}{dt}y(t) + a_2 y(t) = x(t) \text{ (con opportune condizioni iniziali).}$$

Il campionamento uniforme consente di convertire un segnale a tempo continuo $x(t)$ in un segnale a tempo discreto $x[n]$. Il campionamento uniforme consiste nel restringere i valori del tempo t a singoli istanti ben distinti $n \cdot T$, equispaziati di un intervallo fisso T . La relazione di campionamento è

$$x[n] := x(n \cdot T). \quad (1)$$

Un procedimento di campionamento temporale uniforme con periodo di campionamento T è mostrato nella Figura 4. Ad esempio, fissato $T > 0$ (e di soli-

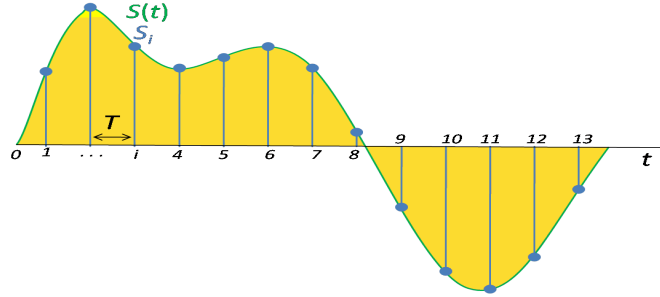


Figura 4: Procedimento di campionamento temporale uniforme con periodo di campionamento T .

to $T \ll 1$), il segnale a tempo discreto corrispondente – per campionamento – al segnale a tempo continuo mostrato nella Figura 1, è $x[n] = e^{-Tn} \cos(4Tn)$. Ad esempio, se $T := 0.01$, i primi valori del segnale a tempo discreto sono $x[0] = 1$, $x[1] \approx 0.9893$, $x[2] \approx 0.9771$, $x[3] \approx 0.9635$ e così via, mentre se $T := 0.05$, i primi valori del segnale a tempo discreto sono $x[0] = 1$, $x[1] \approx 0.9323$, $x[2] \approx 0.8334$, $x[3] \approx 0.7104$ e così via: essendo, nel secondo caso, il periodo di campionamento maggiore, il segnale varia più rapidamente.

Tanto minore è scelto il periodo di campionamento (cioè tanto più piccolo è T), tanto maggiore è l'accuratezza con cui il segnale $x[n]$ rappresenta il segnale $x(t)$. Ad esempio, nelle applicazioni audio di buona qualità, la *frequenza di campionamento*, ovvero $f := \frac{1}{T}$, utilizzata per acquisire segnali musicali, viene scelta come $f = 44,000$ Hz, che corrisponde a 44,000 campioni al secondo! Nelle telecomunicazioni, la frequenza minima utilizzata per acquisire i segnali vocali è, invece, di $f = 8$ kHz, perché 8,000 campioni al secondo sono sufficienti a garantire l'intelligibilità del parlato. Una frequenza di 8,000 Hz corrisponde ad un periodo di campionamento $T = 125 \mu s$.

Al campionamento delle variabili descrittive dei segnali in un circuito deve seguire il campionamento temporale del circuito stesso. Nella sezione seguente verrà esaminato un esempio specifico, relativo ad un circuito R-C (filtro passa basso del I ordine).

2 Filtro passa basso del I ordine

Si consideri, come esempio, il circuito R-C rappresentato in Figura 5. In questo circuito, il segnale $x(t)$ rappresenta l'ingresso del sistema (corrispondente alla tensione elettrica impressa da un generatore indipendente di tensione), mentre il segnale $y(t)$ rappresenta l'uscita del sistema (corrispondente al-

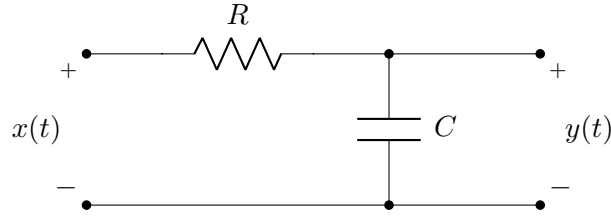


Figura 5: Circuito R-C con tensione di ingresso $x(t)$ e tensione di uscita $y(t)$. I valori di R e C si intendono dati.

la tensione elettrica ai capi del bipolo condensatore) con i versi indicati in figura.

La legge di Kirchhoff alle tensioni scritta sull'unica maglia presente nel circuito è $-x(t) + Ri(t) + y(t) = 0$, dove $i(t)$ indica la corrente di maglia supposta circolante in verso orario, mentre la relazione costitutiva del condensatore si scrive $i(t) = C \frac{dy(t)}{dt}$ (si noti che $i(t)$ e $y(t)$ sono coordinate sul condensatore). Pertanto, dallo studio del circuito e dalla relazione costitutiva del condensatore si vede che il segnale di ingresso e il segnale di uscita sono legati dalla relazione differenziale:

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t), \quad (2)$$

corredata da una opportuna condizione iniziale (per esempio, $y(0) = y_0$). Si noti, inoltre, che in questo caso il segnale di uscita $y(t)$ coincide con la variabile di stato del sistema.

Per discretizzare temporalmente questo circuito è necessario discretizzare l'equazione differenziale che lo descrive. Per quanto riguarda i segnali di ingresso e di uscita, questi vengono discretizzati tramite il campionamento temporale uniforme, ovvero

$$\begin{cases} x(t) \rightarrow x[n], \\ y(t) \rightarrow y[n]. \end{cases} \quad (3)$$

La derivata temporale $\frac{dy(t)}{dt}$, può essere approssimata numericamente considerando che, a seguito del campionamento uniforme, i valori di y sono noti solo in istanti specifici, ovvero sono noti solo $\dots, y[n-1], y[n], y[n+1], \dots$ e che tra due campioni successivi esiste una spaziatura temporale fissa di T secondi. Allora la derivata temporale può essere approssimata tramite il *rapporto incrementale* in diversi modi, tra cui ricordiamo

- **Approssimazione di Eulero in avanti (forward Euler approximation, fEul):** $\dot{y}(nT) := \frac{y[n+1] - y[n]}{T}$. Questa relazione costituisce una approssimazione numerica della 'derivata destra' di una funzione.

- **Approssimazione di Eulero all'indietro (backward Euler approximation, bEul):** $\dot{y}(nT) := \frac{y[n] - y[n-1]}{T}$. Questa relazione costituisce una approssimazione numerica della ‘derivata sinistra’ di una funzione.
- **Approssimazione trapezoidale (trapezoidal/symmetric approximation):** $\dot{y}(nT) := \frac{y[n+1] - y[n-1]}{2T}$. Questa approssimazione si ottiene come media della approssimazione in avanti e dell'approssimazione all'indietro.

Applicando, per esempio, il campionamento temporale e l'approssimazione fEul all'equazione differenziale (2) che descrive il circuito R-C in Figura 5, si ottiene l'*equazione alle differenze*

$$\frac{RC}{T}(y[n+1] - y[n]) + y[n] = x[n], \quad (4)$$

nella quale sono noti i valori R , C , T , la sequenza di ingresso $x[0]$, $x[1]$, $x[2]$, $x[3]$, ... e il valore iniziale $y[0]$ e rimangono da determinare i valori successivi dell'uscita $y[1]$, $y[2]$, $y[3]$, Questi possono essere determinati risolvendo l'equazione (4) nell'incognita $y[n+1]$, cioè per mezzo dell'algoritmo

$$y[n+1] = \left(1 - \frac{T}{RC}\right) y[n] + \frac{T}{RC} x[n], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Ad esempio, assumendo che $\frac{T}{RC} = 0.01$, si avrà

$$\begin{aligned} y[1] &= 0.99 y[0] + 0.01 x[0], \\ y[2] &= 0.99 y[1] + 0.01 x[1], \\ y[3] &= 0.99 y[2] + 0.01 x[2], \\ y[4] &= 0.99 y[3] + 0.01 x[3], \\ &\vdots \end{aligned}$$

da cui si vede che il circuito/sistema pesa poco il valore dell'ingresso e pesa molto il valore dell'uscita precedente, pertanto questo circuito a tempo discreto non è in grado di reagire prontamente alle variazioni dell'ingresso ed è quindi un filtro passa basso (del I ordine, in quanto ‘ricorda’ un solo campione dell'uscita per volta).

Un filtro *passa basso* è un circuito in grado di ‘smussare’ i segnali, ovvero di attenuare le brusche variazioni di valore. Un esempio di filtraggio passa basso è mostrato nella Figura 6, dove l'immagine originale viene dapprima vettorizzata, poi filtrata, e in seguito de-vettorizzata. (Il codice MATLAB è disponibile sul sito per la didattica.)

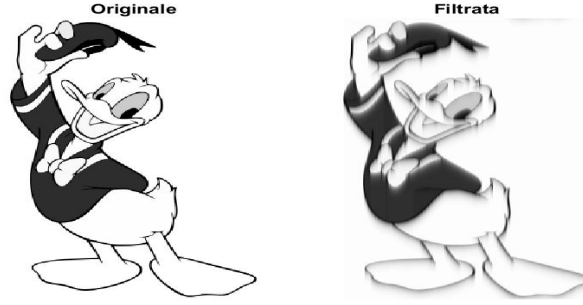


Figura 6: Esempio di filtraggio passa basso. Immagine a sinistra: segnale di ingresso $x[n]$. Immagine a destra: segnale di uscita $y[n]$.

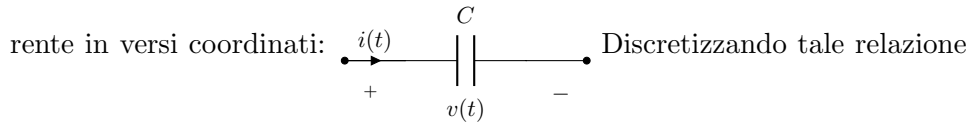
3 Circuiti equivalenti dei componenti con memoria

Nel passaggio dal tempo continuo al tempo discreto è possibile costruire dei circuiti equivalenti dei componenti con memoria, sulla base di elementi senza memoria, in modo da ricondursi a circuiti senza memoria a tempo discreto.

Analizziamo, a titolo esemplificativo, il circuito equivalente a tempo discreto del bipolo condensatore a tempo continuo. La relazione costitutiva del condensatore è

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}, \quad (6)$$

dove C rappresenta la capacità del condensatore e (v, i) sono tensione e corrente in versi coordinati:



costitutiva tramite il metodo bEul si ottiene:

$$i[n] = C \frac{v[n] - v[n-1]}{T}, \quad (7)$$

dove T rappresenta il periodo di campionamento uniforme.

La precedente relazione si può riscrivere come

$$i[n] = \frac{C}{T} v[n] - \frac{C}{T} v[n-1]. \quad (8)$$

Dato che la corrente sul condensatore è la somma di due termini, il primo dei quali è proporzionale alla tensione sul condensatore stesso tramite il coefficiente di proporzionalità $\frac{C}{T}$ e il secondo è un termine noto, il circuito

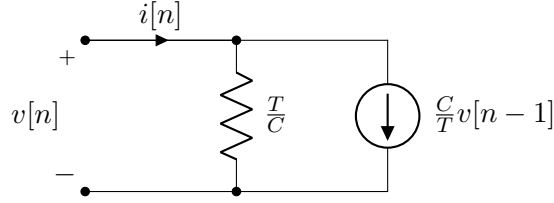


Figura 7: Circuito equivalente *parallelo* a tempo discreto di un condensatore di capacità C e intervallo di campionamento T .

equivalente del condensatore a tempo discreto assume la struttura mostrata in Figura 7.

La relazione (7) si può riscrivere anche come

$$v[n] = \frac{T}{C}i[n] + v[n-1]. \quad (9)$$

Dato che la tensione ai capi del condensatore è la somma di due termini, il primo dei quali è proporzionale alla corrente sul condensatore stesso tramite il coefficiente di proporzionalità $\frac{T}{C}$ e il secondo è un termine noto, un ulteriore circuito equivalente del condensatore a tempo discreto assume la struttura mostrata in Figura 8.

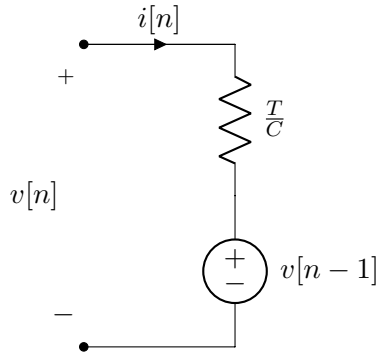


Figura 8: Circuito equivalente *serie* a tempo discreto di un condensatore di capacità C e intervallo di campionamento T .

4 Circuito a tempo discreto del II ordine

Si consideri, come ulteriore esempio, il circuito R-L-C rappresentato in Figura 9. Anche questo circuito, il segnale $x(t)$ rappresenta l'ingresso del sistema (corrispondente alla tensione elettrica impressa da un generatore indipendente di tensione), mentre il segnale $y(t)$ rappresenta l'uscita del sistema

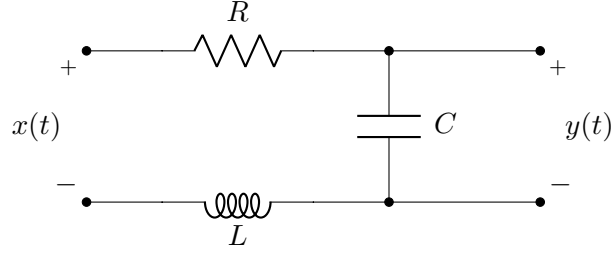


Figura 9: Circuito R-L-C con tensione di ingresso $x(t)$ e tensione di uscita $y(t)$. I valori di R , L e C si intendono dati.

(corrispondente alla tensione elettrica ai capi del bipolo condensatore) con i versi indicati in figura.

Detta $i(t)$ la corrente di maglia circolante in verso orario, il sistema risolvete per questo circuito si scrive

$$\begin{cases} -x(t) + L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) + y(t) = 0, \\ i(t) = C \frac{dy(t)}{dt}. \end{cases} \quad (10)$$

Eliminando la corrente i dalle equazioni, si ottiene la relazione ingresso-uscita

$$LC \frac{d^2 y}{dt^2} + RC \frac{dy}{dt} + y - x = 0, \quad (11)$$

ovvero una equazione differenziale lineare, a coefficienti costanti, non omogenea e del II ordine e che, pertanto, necessita di due condizioni iniziali per poter essere risolta (ad esempio $y(0) = y_0$ e $\dot{y}(0) = i_0/C$).

L'equazione differenziale (11) può essere discretizzata ricorrendo ai metodi già descritti, con però una difficoltà aggiuntiva, ovvero la presenza di una *derivata temporale seconda*. Infatti, mentre la derivata prima \dot{y} può essere approssimata con il metodo bEul

$$\dot{y}(t) \rightarrow \frac{y[n] - y[n-1]}{T}, \quad (12)$$

la derivata seconda \ddot{y} può essere approssimata applicando *due volte* il metodo bEul, ovvero con

$$\ddot{y}(t) \rightarrow \frac{\frac{y[n] - y[n-1]}{T} - \frac{y[n-1] - y[n-2]}{T}}{T} = \frac{y[n] - 2y[n-1] + y[n-2]}{T^2}. \quad (13)$$

E' interessante osservare come le approssimazioni delle derivate (prima, seconda, e così via) appaiono come *somme pesate* o *combinazioni lineari* della

variabile da derivare in diversi istanti di tempo. Per esempio, la derivata seconda appena descritta ha l'espressione

$$\ddot{y}[n] := \frac{1}{T^2} y[n] + \frac{-2}{T^2} y[n-1] + \frac{1}{T^2} y[n-2], \quad (14)$$

che appare come una somma pesata dei valori $y[n]$, $y[n-1]$ e $y[n-2]$ con pesi $\frac{1}{T^2}$, $-\frac{2}{T^2}$ e $\frac{1}{T^2}$, rispettivamente. In definitiva, l'equazione differenziale (11) discretizzata diventa

$$LC \frac{y[n] - 2y[n-1] + y[n-2]}{T^2} + RC \frac{y[n] - y[n-1]}{T} + y[n] - x[n] = 0, \quad (15)$$

che, dopo aver raccolto i termini omologhi, si scrive

$$\left(\frac{LC}{T^2} + \frac{RC}{T} + 1 \right) y[n] + \left(-\frac{2LC}{T^2} - \frac{RC}{T} \right) y[n-1] + \frac{LC}{T^2} y[n-2] = x[n]. \quad (16)$$

5 Sistemi ARMA-SISO in generale

Riscrivendo l'equazione alle differenze (4) come

$$y[n] - \left(1 - \frac{T}{RC}\right) y[n-1] = \frac{T}{RC} x[n-1], \quad (17)$$

dove si sono ritardati tutti i campioni di 1 passo temporale, si vede che questa è un caso particolare della equazione più generale

$$\begin{aligned} y[n] + \alpha_1 y[n-1] + \alpha_2 y[n-2] + \dots + \alpha_p y[n-p] = \\ \beta_0 x[n] + \beta_1 x[n-1] + \beta_2 x[n-2] + \dots + \beta_q x[n-q], \end{aligned} \quad (18)$$

che viene indicato come *modello ARMA(p,q)*, dove ARMA è un acronimo che sta per *Auto-Regressive Moving-Average*, p è la *profondità di memoria per l'uscita* e q è la *profondità di memoria per l'ingresso*. La parte a sinistra del segno $=$ è detta 'parte auto-regressiva', mentre la parte a destra è detta 'media mobile' (in effetti, possiamo osservare che se si prendono i coefficienti $\beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_q = \frac{1}{q+1}$, la parte a destra corrisponde con la media di $q+1$ campioni di ingresso che vanno dall'istante temporale $n-q$ all'istante corrente).

Allora, il circuito descritto dall'equazione (5) è un esempio di modello ARMA(1,1) con $\alpha_1 = \frac{T}{RC} - 1$, $\beta_0 = 0$ e $\beta_1 = \frac{T}{RC}$.

E' interessante notare che il metodo di discretizzazione scelto influenza la forma del modello ARMA. Per esempio, se si sceglie di discretizzare l'equazione (2) con il metodo bEul, si ottiene

$$\frac{RC}{T} (y[n] - y[n-1]) + y[n] = x[n], \quad (19)$$

per cui il modello corrispondente si scrive

$$y[n] + \alpha_1 y[n-1] = \beta_0 x[n], \quad (20)$$

che è un sistema ARMA(1,0) con $\alpha_1 = \frac{-RC}{RC+T}$ e $\beta_0 = \frac{T}{RC+T}$.

In maniera del tutto analoga, ci si accorge che il modello (16) del circuito del II ordine è un caso particolare di modello ARMA (18) con $p = 2$ e $q = 0$, pertanto è un modello ARMA(2,0) con coefficienti

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\left(\frac{LC}{T^2} + \frac{RC}{T} + 1\right)^{-1} \left(\frac{2LC}{T^2} + \frac{RC}{T}\right), \\ \alpha_2 = \left(\frac{LC}{T^2} + \frac{RC}{T} + 1\right)^{-1} \frac{LC}{T^2}, \\ \beta_0 = \left(\frac{LC}{T^2} + \frac{RC}{T} + 1\right)^{-1}. \end{cases} \quad (21)$$

6 Rappresentazioni in *spazio di stato*

Oltre ai modelli ARMA, esiste una rappresentazione dei circuiti a tempo continuo estendibile al tempo discreto nota come *rappresentazione in spazio di stato*. Per esempio, si riscriva il sistema risolvete per il circuito del II ordine esaminato in precedenza come:

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i - \frac{1}{L} y + \frac{1}{L} x, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{i}{C}. \end{cases} \quad (22)$$

Introducendo le variabili di stato (astratte) $x_1 := i$, $x_2 := y$, la variabile di ingresso $u := x$ e mantenendo la variabile di uscita y , le equazioni precedenti si scrivono in forma canonica come:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{R}{L} x_1 - \frac{1}{L} x_2 + \frac{1}{L} u, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{C} x_1 + 0 x_2 + 0 u, \\ y = 0 x_1 + 1 x_2 + 0 u. \end{cases} \quad (23)$$

Tali equazioni ammettono, come è noto, la rappresentazione matriciale

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A \xi + B u, \\ y = C \xi + D u, \end{cases} \quad (24)$$

dove, in questo esempio, si è posto:

$$\xi = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0. \quad (25)$$

La discretizzazione temporale del sistema (24) può essere effettuata tramite campionamento uniforme dei segnali e approssimazione bEul della derivata prima dello stato, ovvero

$$\begin{cases} \xi(t) \rightarrow \xi[n], \\ u(t) \rightarrow u[n], \\ y(t) \rightarrow y[n], \\ \dot{\xi}(t) \rightarrow \frac{\xi[n] - \xi[n-1]}{T}, \end{cases} \quad (26)$$

per cui il sistema (24) diventa

$$\begin{cases} \frac{\xi[n] - \xi[n-1]}{T} = A \xi[n] + B u[n], \\ y[n] = C \xi[n] + D u[n]. \end{cases} \quad (27)$$

In particolare, l'equazione di evoluzione dello stato si può esplicitare in $\xi[n]$ nel seguente modo

$$\xi[n] = (I - TA)^{-1} \xi[n-1] + (I - TA)^{-1} T B u[n], \quad n \geq 1, \quad (28)$$

con $\xi[0]$ noto dalle condizioni iniziali.

Anche in questo caso, il metodo usato per l'approssimazione della derivata prima influenza la forma delle equazioni a tempo discreto. Infatti, scegliendo un metodo fEul, si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\xi[n+1] - \xi[n]}{T} = A \xi[n] + B u[n], \\ y[n] = C \xi[n] + D u[n] \end{cases} \quad (29)$$

e, in particolare, l'equazione di evoluzione dello stato si può esplicitare in $\xi[n+1]$ con

$$\xi[n+1] = (I + TA) \xi[n] + T B u[n], \quad n \geq 0, \quad (30)$$

con $\xi[0]$ noto dalle condizioni iniziali.

Un esempio di filtraggio tramite un filtro discreto del II ordine implementato come in (30) è mostrato nella Figura 10, dove il segnale in ingresso è un *chirp*. (Il codice MATLAB è disponibile sul sito per la didattica.)

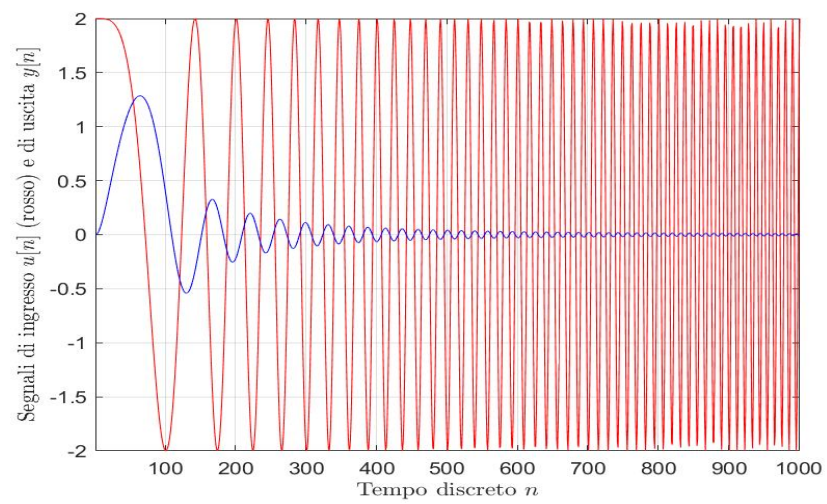


Figura 10: Esempio di filtraggio passa basso con un circuito del II ordine.