Università Politecnica delle Marche

Problemi, modelli e algoritmi

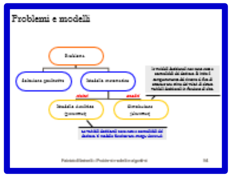
ver 2.6.0

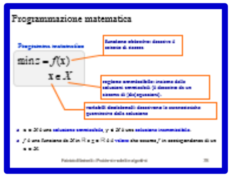
Fabrizio Marinelli
fabrizio.marinelli@staff.univpm.it
tel. 071 - 2204823

Riferimento: C. Vercellis – capitolo 1

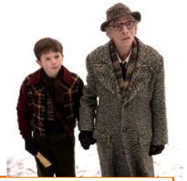
- Intanto rompiamo un po’ il ghiaccio…
- La Ricerca Operativa
- Le tre parole chiave
- Problemi e modelli
- Programmazione Matematica

- Intantо rompiamo un po’ il ghiaccio…
- La Ricerca Operativa
- Le tre parole chiave
- Problemi e modelli
- Programmazione Matematica





Un problema decisionale



[Problema] La *fabbrica del cioccolato* produce due tipi di creme (che per semplicità chiamiamo A e B) che vende rispettivamente a 25 e 28 €/Kg. Considerando la composizione delle singole creme e le disponibilità in magazzino degli ingredienti (vedi tabella) qual è il massimo guadagno che si può ottenere producendo A e B?

	composizione			
	latte	cioccolato	zucchero	burro
crema A	40%	40%	10%	10%
crema B	24%	45%	31%	-
disponibilità (Kg)	312	360	160	70

Un problema decisionale: possibili strategie …

	composizione				
	latte	cioccolato	zucchero	burro	profitto
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (Kg)	312	360	160	70	

- La crema B mi fa guadagnare di più: produco B quanto più posso e con gli ingredienti avanzati produco A.
- Il burro è utilizzato solo per A: produco A quanto più posso e con gli ingredienti avanzati produco la crema B.
- uso metà del magazzino per A e metà del magazzino per B.
- divido il magazzino tra A e B in base al rapporto delle percentuali.

Un problema decisionale: possibili strategie …

	Profitto totale
produco B quanto più posso e con gli ingredienti avanzati produco la crema A.	14.452 €
produco A quanto più posso e con gli ingredienti avanzati produco la crema B.	$\boxed{21.233\ €}$
uso metà del magazzino per A e metà del magazzino per B.	15.976 €
divido il magazzino tra A e B in base al rapporto delle percentuali.	9.756 €

Un problema decisionale: nightmares …

21.233 € è quello che riesco a lucrare…neanche un euro in più?

Entrepreneur

La strategia utilizzata è la migliore possibile? …sempre?

Operations researcher

Performance di una strategia …

In genere valutabile con due macroindicatori :

- robustezza della soluzione

  Cosa succede se i prezzi di vendita sono diversi (per esempio, se la crema B è venduta a 50 €/kg)? Oppure se cambiano le disponibilità (per esempio se la quantità di zucchero aumenta a 600 kg)?

- qualità della soluzione

  Il profitto totale ottenuto è massimo?
  Ovvero, quanto è distante dal potenziale massimo?

Punto di vista e aspetti peculiari del corso

- Interesse per la soluzione generale di un problema:

	composizione				
	latte	cioccolato	zucchero	burro	profitto
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (Kg)	312	360	160	70	

Non siamo interessati alla soluzione numerica di un caso particolare

$$z = \max \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j \qquad \forall j = 1, \dots, m$$

$$x_i \geq 0 \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

Piuttosto, ci interessa individuare un metodo / modello che risolva il problema nella sua forma generale

- Interesse per la struttura matematica del problema (indipendentemente dal contesto tecnologico):

In generale si preferisce un'astrazione del problema/fenomeno allo scopo di cogliere gli aspetti essenziali e trascurare i dettagli.

La semplificazione è un valore e non un limite

Un problema decisionale: un altro esempio

[Problema] Il traffico di una rete telefonica si compone di pacchetti audio (tipo A) e pacchetti dati (tipo B) la dimensione dei quali è rispettivamente 25 e 28 Kbyte. Ogni pacchetto deve essere smistato da **ognuno** dei 4 router della rete. Considerando i tempi di processamento e la disponibilità in ore di ogni router (vedi tabella), qual è la massima quantità di byte che la rete riesce a processare?

	Router 1	Router 2	Router 3	Router 4
tipo A	4 ms	4 ms	7 ms	3 ms
tipo B	2 ms	3 ms	1 ms	3 ms
disponibilità (ore)	8	7.5	4	5.5

Interesse per la struttura matematica

[Problema] La fabbrica del cioccolato produce due tipi di creme (che per semplicità chiamiamo A e B) che vende rispettivamente a 25 e 28 €/Kg. Considerando la composizione delle singole creme e le disponibilità in magazzino degli ingredienti (vedi tabella) qual è il massimo guadagno che si può ottenere producendo A e B?

[Problema] Il traffico di una rete telefonica si compone di pacchetti audio (tipo A) e pacchetti dati (tipo B) la dimensione dei quali è rispettivamente 25 e 28 Kbyte. Tutti i pacchetti devono essere smistati da ognuno dei 4 router della rete. Considerando i tempi di processamento e la disponibilità in ore di ogni router (vedi tabella), qual è la massima quantità di byte che la rete riesce a processare?

max profitti

	composizione				
	latte	cioccolato	zucchero	burro	profitto
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (Kg)	312	360	160	70	

	router 1	router 2	router 3	router 4	traffico
tipo A	4 ms	4 ms	7 ms	3 ms	25 Kb
tipo B	2 ms	3 ms	1 ms	3 ms	28 Kb
disp. (ore)	8	7.5	4	5.5	

risorse scarse

Punto di vista e aspetti peculiari del corso

- Funzioni con molte variabili: $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z, w\ldots)$
- Problemi di forma semplice (relazioni lineari) e per i quali di solito non è difficile trovare *una* soluzione.
- Interesse per la miglior soluzione, che invece di solito richiede *molti* calcoli

La matematica è uno strumento e non un fine

- fare matematica non è fare calcoli ma risolvere problemi

Approccio *passivo*

la matematica come «fine»

Calcolare l'integrale $$A = \int_{\Omega} \log \frac{x}{y^2} \, dxdy$$

con $$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{1}{4} x < y^2 < x, 1 < xy < 2 \right\}$$

$$A = \frac{1}{6} \log^2 4$$

Approccio *attivo*

la matematica come «strumento»

Come organizzare le operazioni allo scopo di minimizzare i tempi di risposta di un dato sistema di calcolo?

Associo un set di variabili $x, y, \ldots, z$ ai tempi di processamento delle singole operazioni, individuo le relazioni di interdipendenza (incompatibilità, precedenze)…

La Ricerca Operativa

Ricerca Operativa: genesi del termine

- **OR – Operations Research** (o Operational Research)
- **Research** on military **operations**
- **Ricerca** del modo *ottimale* di condurre **operazioni** militari (rispetto al rischio, al costo, all'efficacia, ecc.)

"Disciplina che studia l'utilizzo di *metodi quantitativi*
per la soluzione di *problemi decisionali*
che si presentano in strutture organizzate complesse
(*sistemi organizzati*)"

the ***Science of better***

www.scienceofbetter.org

Origini storiche e evoluzione

- Origine "ufficiale": II Guerra Mondiale (Gran Bretagna)
  - dislocazione ottimale di radar allo scopo di massimizzare la probabilità di intercettazione degli aerei nemici
  - coordinamento delle operazioni logistiche: spostamento di truppe, rifornimento di armi, formazione di equipaggi per missioni di volo (Berge)

«Una guerra non la vince il popolo più coraggioso, più ispirato o che ha ragione: la guerra la vince chi riesce a farsi abbattere il 5% in meno di aerei, o riesce a consumare il 5% in meno di carburante o spende il 5% in meno per rifornire le truppe»

- Dopoguerra: metodi simili applicati in ambito industriale e economico

sviluppo di modelli e algoritmi (1950 – 1960)

algoritmo del simplesso (Dantzig) 1947

Programmazione su reti di flusso (Ford, Fulkerson, Dijkstra) 1956

Algoritmi poliedrali (Gomory) 1958

Algoritmi enumerativi (Doig, Land) 1960

oggi: applicazioni a produzione industriale, reti di telefonia, energia e ambiente, biologia, finanza…

modelli produttivi flessibili ad elevata complessità (1980 – 2000)

1979 Algoritmo dell'ellissoide (Khachiyan)

1971 Complessità computazionale (Cook, Karp)

Diffusione degli elaboratori (1960 – 1980)

Applicazioni della *Ricerca Operativa*

progettazione di reti stradali, e di telecomunicazioni,
turnazione del personale,

instradamento dei veicoli,
pianificazione dei giri di raccolta

pianificazione della produzione e delle scorte,
localizzazione e dimensionamento di impianti

Ricostruzione di immagini,
Struttura delle proteine,
Sequenziamento del DNA

Progettazione delle strutture,

Project scheduling,
VLSI design

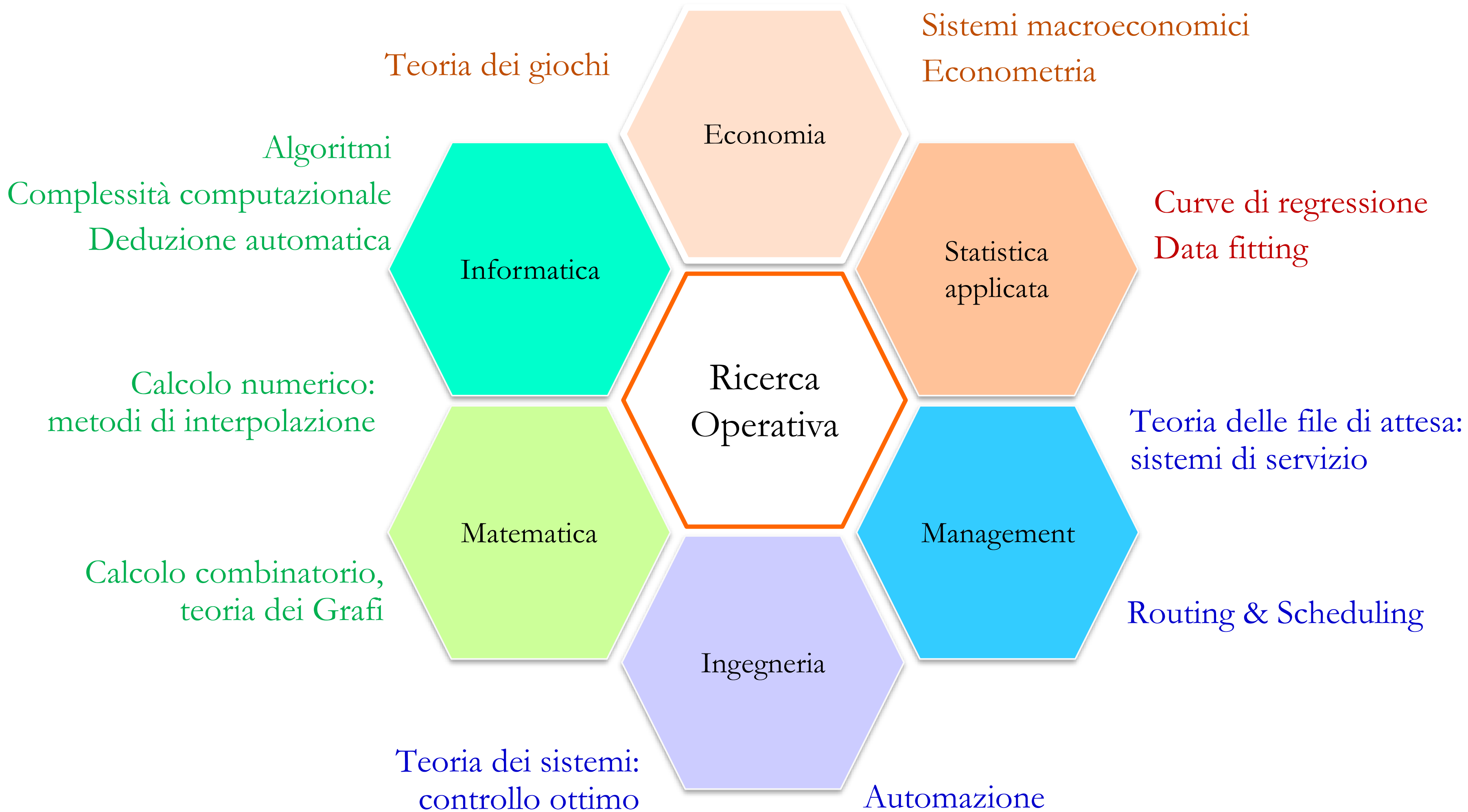
Gestione portafoglio titoli,
budget optimization

…altre applicazioni
(ambiente, didattica, salute, sport,…)
su www.scienceofbetter.org

Ricerca Operativa: alcuni casi di successo

- Ministero tedesco delle infrastrutture: politica di gestione delle acque (15 M$)
- Electrobras (Brasile): allocazione ottimale di risorse idrauliche e termiche nel sistema nazionale di generazione di energia (43 M$)
- Texaco Inc.: miscelazione ottimale nella produzione di carburante (30 M$)
- IBM: integrazione della rete nazionale dei pezzi di ricambio (20 M$)
- American Airlines: ottimizzazione del pricing e dell' overbooking (500 M$)
- Yellow Freight System: ottimizzazione della rete di trasporto negli USA (17.3 M$)
- Dip. della salute del New Haven: programma di ricambio delle siringhe per combattere il contagio dell'AIDS (33% in meno dei contagi)
- Delta Airlines: allocazione ottimale di aerei ai 2500 voli negli USA (100 M$)
- Digital Equipment Corp.: riprogettazione dell'intera supply chain (800 M$)
- Procter & Gamble: riprogettazione della catena di distribuzione (200 M$)
- Hewlett-Packard: gestione ottimale dei livelli di scorta dei magazzini (280 M$)

Collocazione della *Ricerca Operativa*



La tre parole chiave

Le tre parole chiave

"Disciplina che studia l'utilizzo di *metodi quantitativi*
per la soluzione di *problemi decisionali*
che si presentano in strutture organizzate complesse
(*sistemi organizzati*)"

parola chiave: *metodo quantitativo*

- *Quantitativo*, **agg.** Che concerne la quantità.
- *Quantità*, **s.f.** Entità valutabile o misurabile per numero, peso, dimensione o grandezza.

Un metodo quantitativo è una tecnica *numerica* utilizzata per ottenere una soluzione *numerica* di un problema

Qualitativo	**Quantitativo**
«Una buona performance»	«Un profitto che si scosta del 2,1% dal profitto massimo»
«Un margine scarso di miglioramento»	«Un miglioramento potenziale dello 0,5% »
«Un buon livello di servizio»	«Un tempo medio di attesa di 2,3 minuti»
«Una capacità produttiva sufficiente»	«Una capacità produttiva di almeno 150 pz/minuto»

parola chiave: *problema decisionale*

Problema decisionale: scegliere, tra diverse alternative plausibili (in genere **mooolte**), una *configurazione* del *sistema* dettata da un insieme di decisioni che consenta di soddisfare *al meglio* i requisiti prestazionali


Decisore
attuatore delle scelte
misura quantitativa di un aspetto del sistema
Problema decisionale
definiscono l'insieme delle alternative possibili
Funzione obiettivo
Vincoli

- Uno o più decisori devono (o possono) fare delle scelte, ossia definire una politica decisionale, che concorrono a determinare la configurazione e l'evoluzione complessiva di un sistema (organizzato).

- Le scelte devono rispettate vincoli ambientali e/o regole di comportamento che definiscono l'insieme delle alternative possibili (soluzioni ammissibili).

- Ogni decisore sceglie in base a uno o più criteri di utilità. Un criterio di utilità, o funzione obiettivo, è una misura quantitativa di un determinato aspetto del sistema.

Variabili decisionali

« Ci sono i parametri noti; queste sono le cose che sappiamo di sapere. Sappiamo anche che ci sono incognite note; ovvero, sappiamo che ci sono cose che non sappiamo. Ma ci sono anche incognite non note - quelle che non sappiamo di non sapere [...]. E' in quest'ultima categoria che tendono a trovarsi quelle difficili»

Donald Rumsfeld – segretario Difesa USA,
12 febbraio 2002

Risposta a una domanda sull'assenza di prove per le accuse al governo iracheno circa le presunte armi di distruzione di massa.

Una politica decisionale (ossia una soluzione di un problema decisionale) è descritta da un insieme di variabili decisionali

Una variabile decisionale è una variabile numerica che:

- stabilisce una quantità (litri contenuti in un serbatoio, numero di pezzi da produrre, durata di una lavorazione, …)

$x = 0{,}645$ litri

$x = 8$ pz

Una politica decisionale (ossia una soluzione di un problema decisionale) è descritta da un insieme di variabili decisionali

Una variabile decisionale è una variabile numerica che:

- stabilisce un istante (inizio o fine di una lavorazione,…)

$x = 43446$

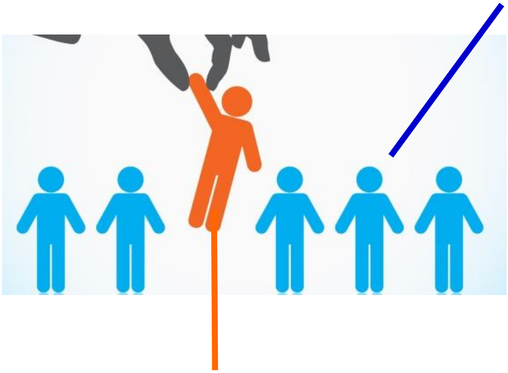
(codifica della data 12/12/2018)

Una politica decisionale (ossia una soluzione di un problema decisionale) è descritta da un insieme di variabili decisionali

Una variabile decisionale è una variabile numerica che:

- descrive una scelta (selezione, abbinamento,…)

$y = 0$



$x = 1$

$x = 1$

$x = 0$

Una politica decisionale (ossia una soluzione di un problema decisionale) è descritta da un insieme di variabili decisionali

$$\mathbf{x} = \overbrace{\{x, y, z, \ldots\}}^{\text{Politica decisionale}}$$

variabile decisionale

(decisione/azione)

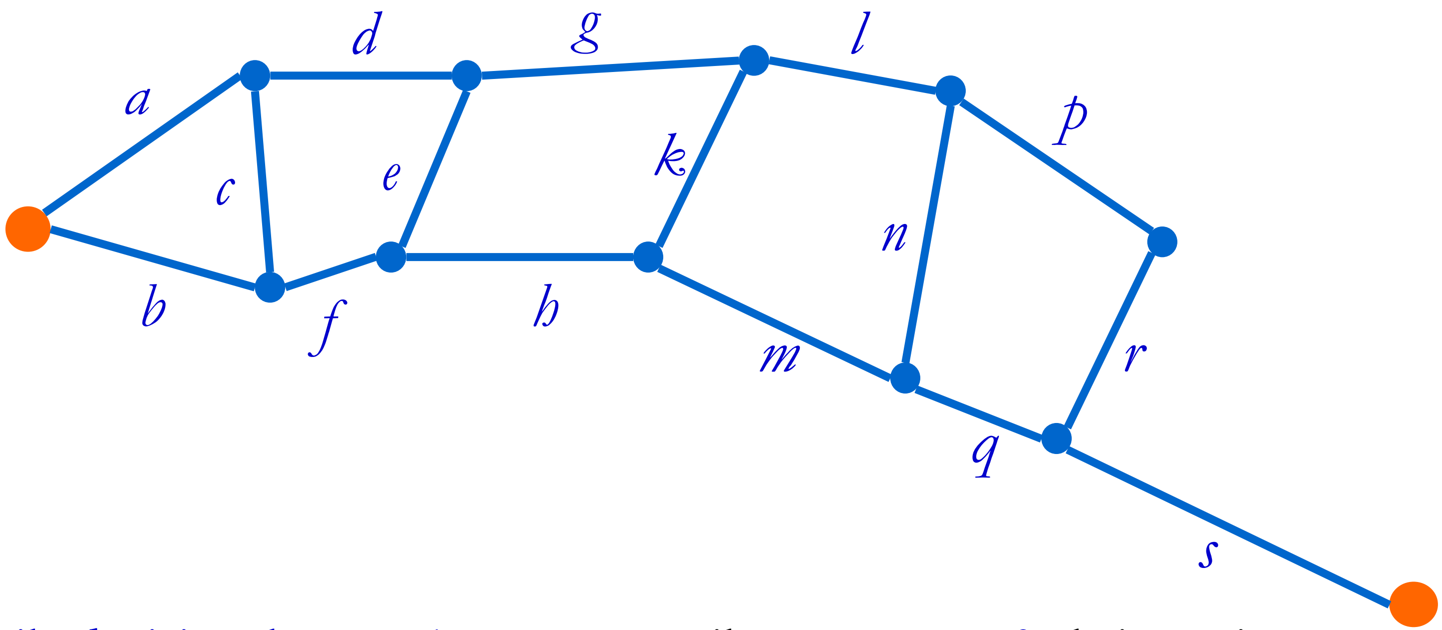
risolvere un problema decisionale significa

assegnare un valore numerico ad ogni variabile decisionale

Variabili decisionali: esempio

Problema decisionale: che strada fare per raggiungere Rimini da Torino?

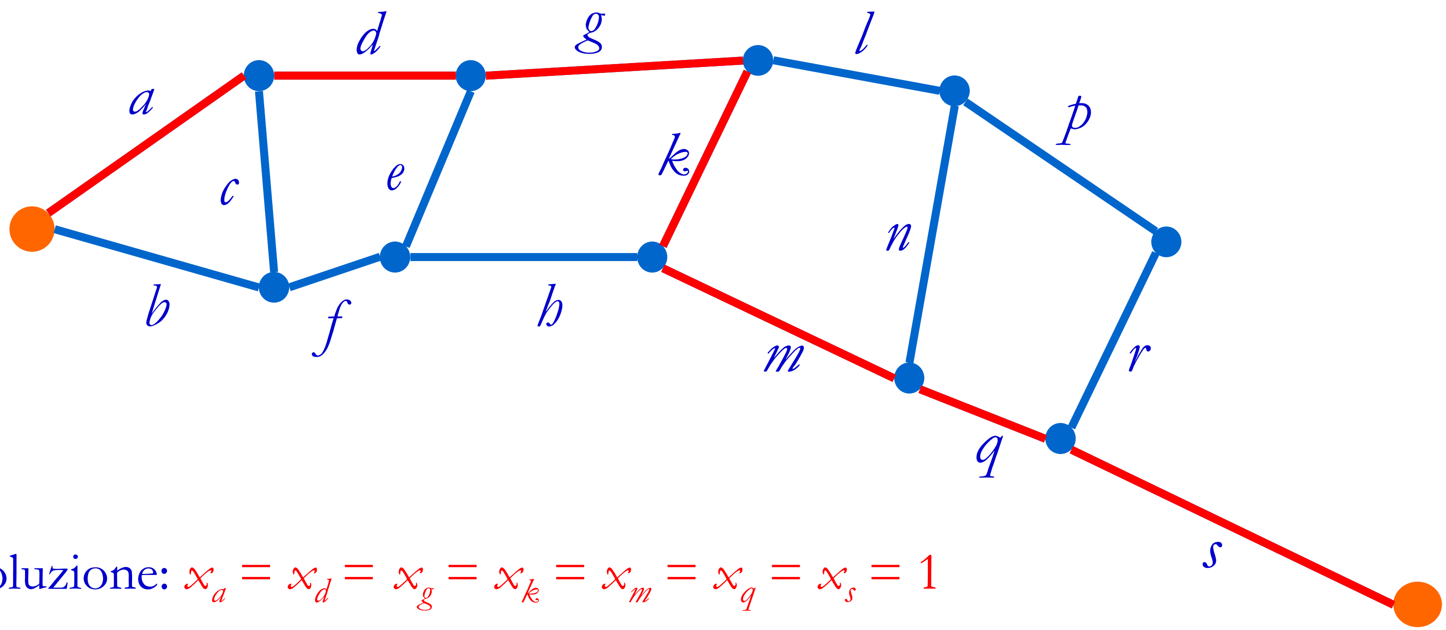
Problema decisionale: che strada fare per raggiungere Rimini da Torino?



Variabile decisionale: $x_i = 1$ se percorro il tratto i, $x_i = 0$ altrimenti

Politica decisionale: $\{x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g, x_h, x_k, x_l, x_m, x_n, x_p, x_q, x_r, x_s\}$

Problema decisionale: che strada fare per raggiungere Rimini da Torino?

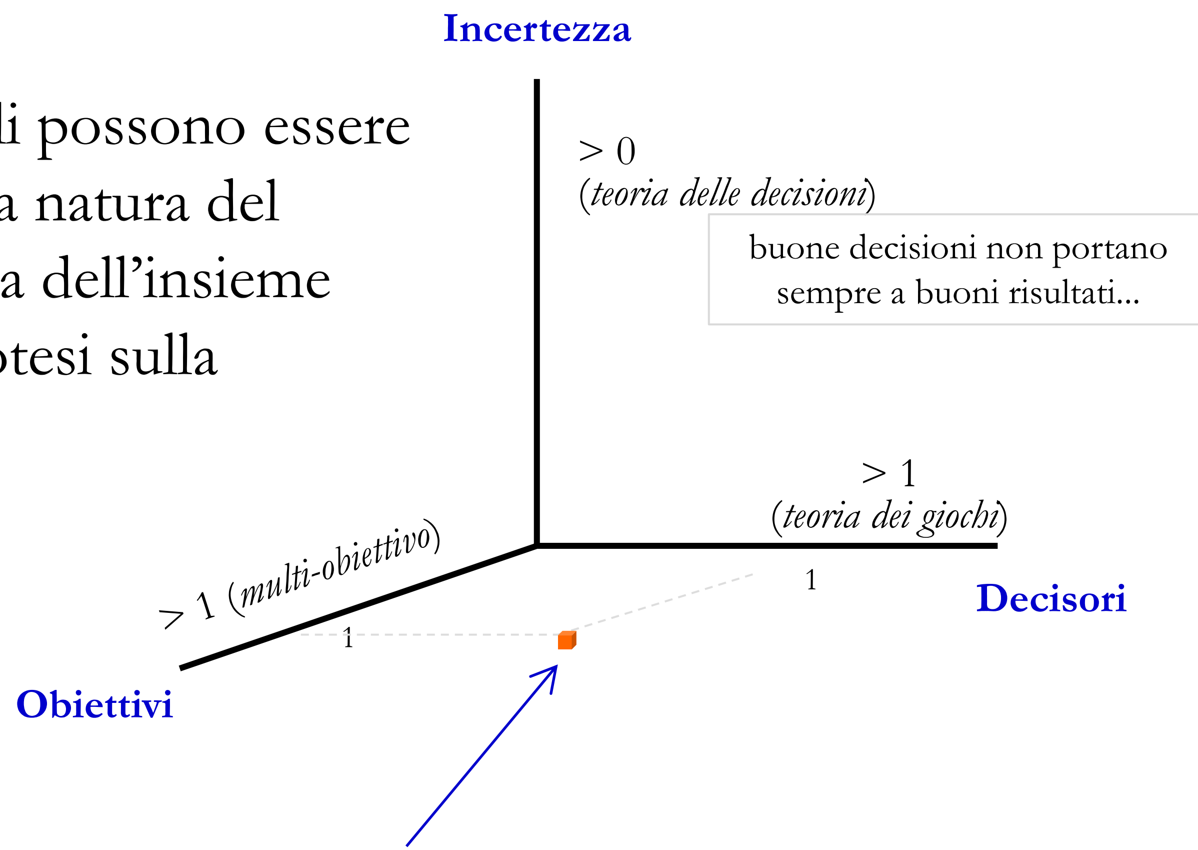


Usa soluzione: $x_a = x_d = x_g = x_k = x_m = x_q = x_s = 1$

tutte le altre variabili = 0

Problemi decisionali: tassonomia

- I problemi decisionali possono essere classificati in base alla natura del decisore, alla struttura dell’insieme ammissibile e alle ipotesi sulla funzione obiettivo

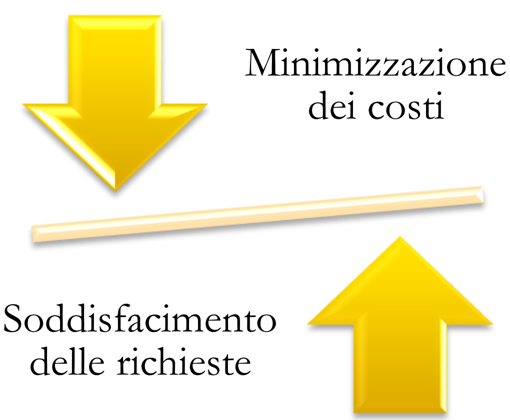


in questo corso ci occuperemo di problemi a **singolo** decisore, **singola** funzione obiettivo e informazione **certa**

Problema decisionale: struttura tipica

- Di solito un problema decisionale è interessante quando la soluzione (… non scontata) consiste in una sorta di compromesso:

- Come si ottiene il massimo con le risorse a disposizione ?



- Come si esegue un compito col minimo sforzo ?

Problema decisionale: esempio

vincoli

La fabbrica del cioccolato produce due tipi di creme (che per semplicità chiamiamo A e B) che vende rispettivamente a 25 e 28 €/Kg. Considerando la composizione delle singole creme e le disponibilità in magazzino degli ingredienti qual è il massimo guadagno che si può ottenere producendo A e B?

decisioni

obiettivo

- Quali sono le decisioni da prendere e come si «codificano» ?

Problema decisionale: esempio ...

	composizione				
	Latte	Cioccolato	Zucchero	Burro	Profitto × kg
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (kg)	312	360	160	70	

Le decisioni riguardano le quantità di A e B da produrre e possono essere codificate con due variabili decisionali:

- x = quantità (in kg) che si decide di produrre della crema A
- y = quantità (in kg) che si decide di produrre della crema B

Problema decisionale: esempio ...

	composizione				
	Latte	Cioccolato	Zucchero	Burro	Profitto × kg
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (kg)	312	360	160	70	

Obiettivo : massimizzare il guadagno:

$$\max\ (25\,x + 28\,y)$$

Se produco x kg di crema A guadagno $25x$ Euro

Problema decisionale: esempio ...

	composizione				
	Latte	Cioccolato	Zucchero	Burro	Profitto × kg
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (kg)	312	360	160	70	

Vincoli : la quantità totale di latte utilizzata non può essere superiore alla disponibilità di latte in magazzino:

$$\underbrace{0.4x}_{\text{kg di latte che uso se produco } x \text{ kg di A}} + \underbrace{0.24y}_{\text{kg di latte che uso se produco } y \text{ kg di B}} \leq \underbrace{312}_{\text{disponibilità (in kg) di latte}}$$

Problema decisionale: esempio …

	composizione				
	Latte	Cioccolato	Zucchero	Burro	Profitto × kg
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (kg)	312	360	160	70	

Vincoli: vincoli analoghi vanno espressi per il cioccolato, lo zucchero e il burro:

- $0.4x + 0.45y \leq 360$
- $0.1x + 0.31y \leq 160$
- $0.1x \leq 70$

Problema decisionale: esempio ...

modello completo di programmazione matematica

$z = \max 25x + 28y$		funzione obiettivo
C1:	$0.4x + 0.24y \le 312$	vincolo sulla disponibilità di latte
C2:	$0.4x + 0.45y \le 360$	vincolo sulla disponibilità di cioccolato
C3:	$0.1x + 0.31y \le 160$	vincolo sulla disponibilità di zucchero
C4:	$0.1x \le 70$	vincolo sulla disponibilità di burro
C5:	$x, y \ge 0$	**vincoli di non negatività**: le quantità prodotte non possono essere negative

variabili: notazione

In genere il problema è descritto da più d'una variabile decisionale

$$x\,,y\,,z\,,w\,,\ldots$$

… ma che nome diamo alle variabili se, più realisticamente, la *fabbrica del cioccolato* produce un centinaio di articoli diversi?

Per comodità si una la notazione con indici:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots)$$

(in effetti le variabili sono *vettori* n-dimensionali)

La notazione con indici permette anche di scrivere le espressioni lineari in modo sintetico:

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \sum_{i=1}^{5} x_i}$$

$$\sum_{i=1}^{5} i = ? \qquad = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{k=1}^{5} k = ? \qquad = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{3} i \cdot k = ? \qquad = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 18$$

$$\mathbf{a} = (7, 3, 5, 10, 2) \qquad A = \{1, 8, 9, 7\} \qquad p = 4$$

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = ? \quad = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 7 + 3 + 5 + 10 + 2 = 27 \quad = \sum_{k=1}^{5} a_k$$

$$\sum_{i=1}^{5} p = ? \quad = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$$

$$\sum_{i=1}^{3} i a_i = ? \quad = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 = 7 + 6 + 15 = 28$$

$$\sum_{e \in A} e = ? \quad = 1 + 8 + 9 + 7 = 25$$

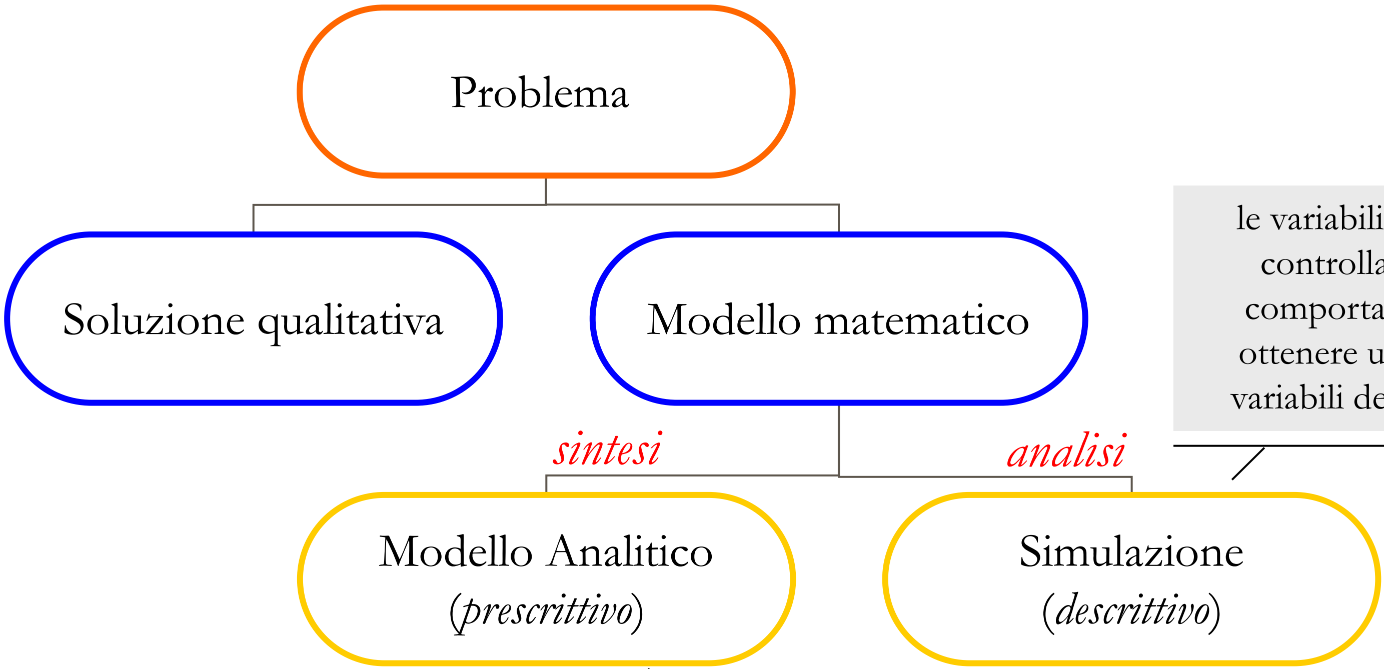
Problema decisionale: esercizi

[Esercizio]

- Esprimere in *forma parametrica* il modello di programmazione matematica della fabbrica del cioccolato riportato nelle slide precedenti.
- Individuare quali sono i principali aspetti reali che sono stati trascurati nella descrizione del problema della *fabbrica del cioccolato*

Problemi e modelli

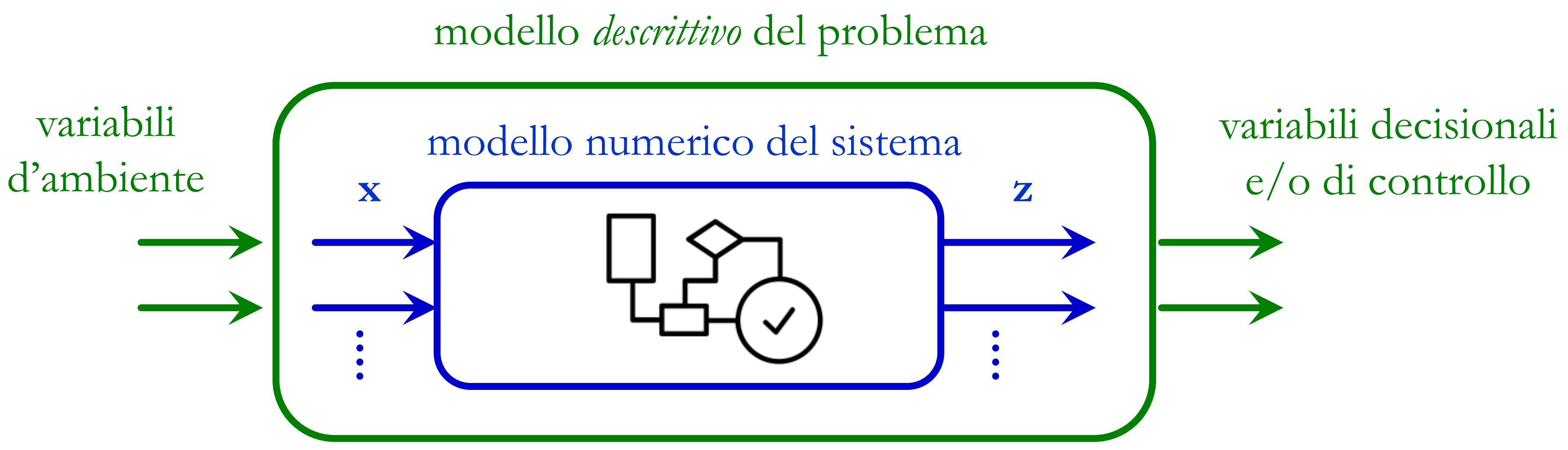
Problemi e modelli



le variabili decisionali non sono note e controllabili dal decisore. Si imita il comportamento del sistema al fine di ottenere una stima dei valori di alcune variabili decisionali in funzione di altre.

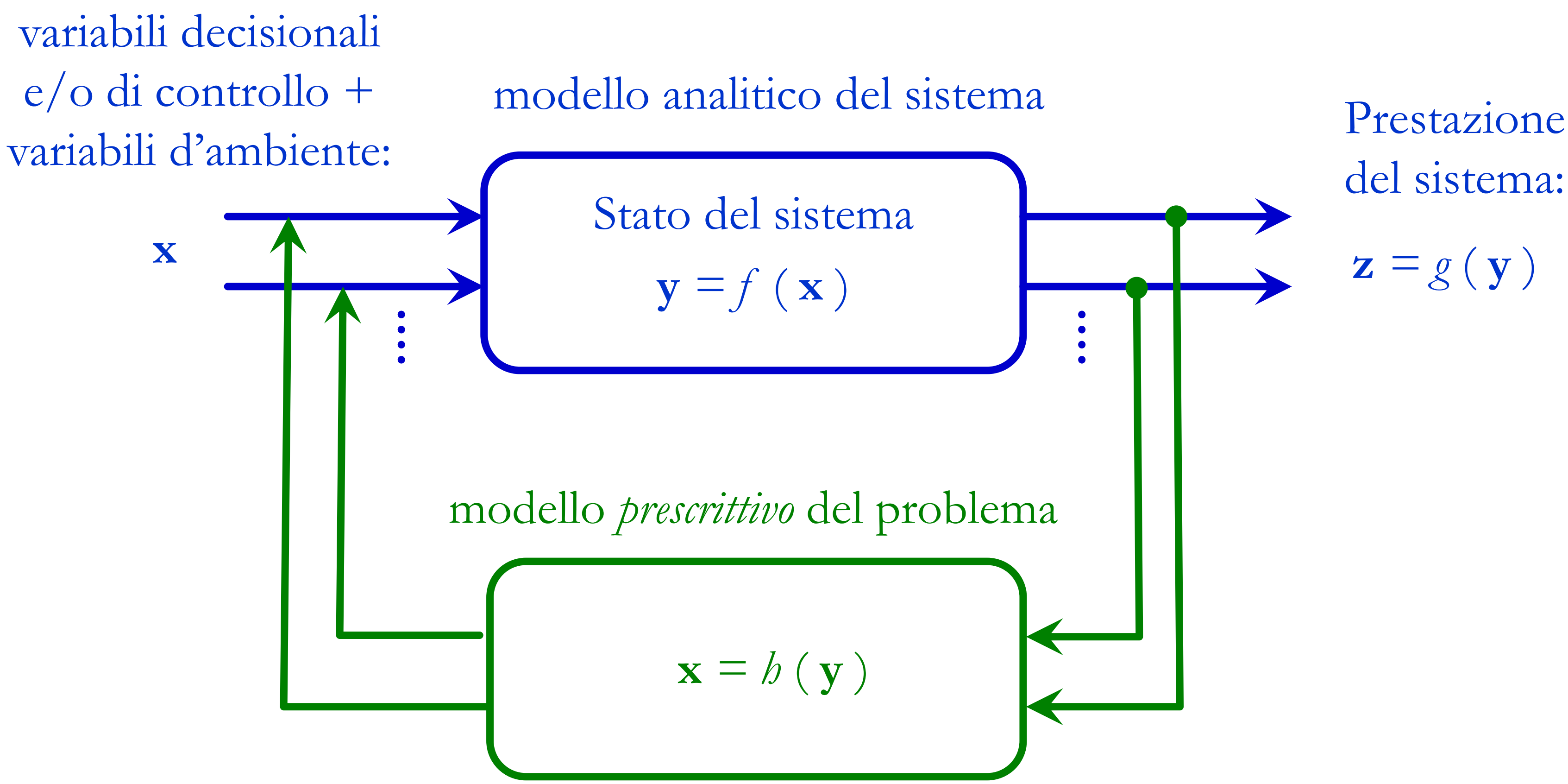
Le variabili decisionali sono note e controllabili dal decisore. Il modello fornisce una *strategia decisionale*.

Problemi e modelli: simulazione



le variabili decisionali non sono note e controllabili dal decisore. Si imita il comportamento del sistema al fine di ottenere una stima dei valori di alcune variabili decisionali in funzione di altre.

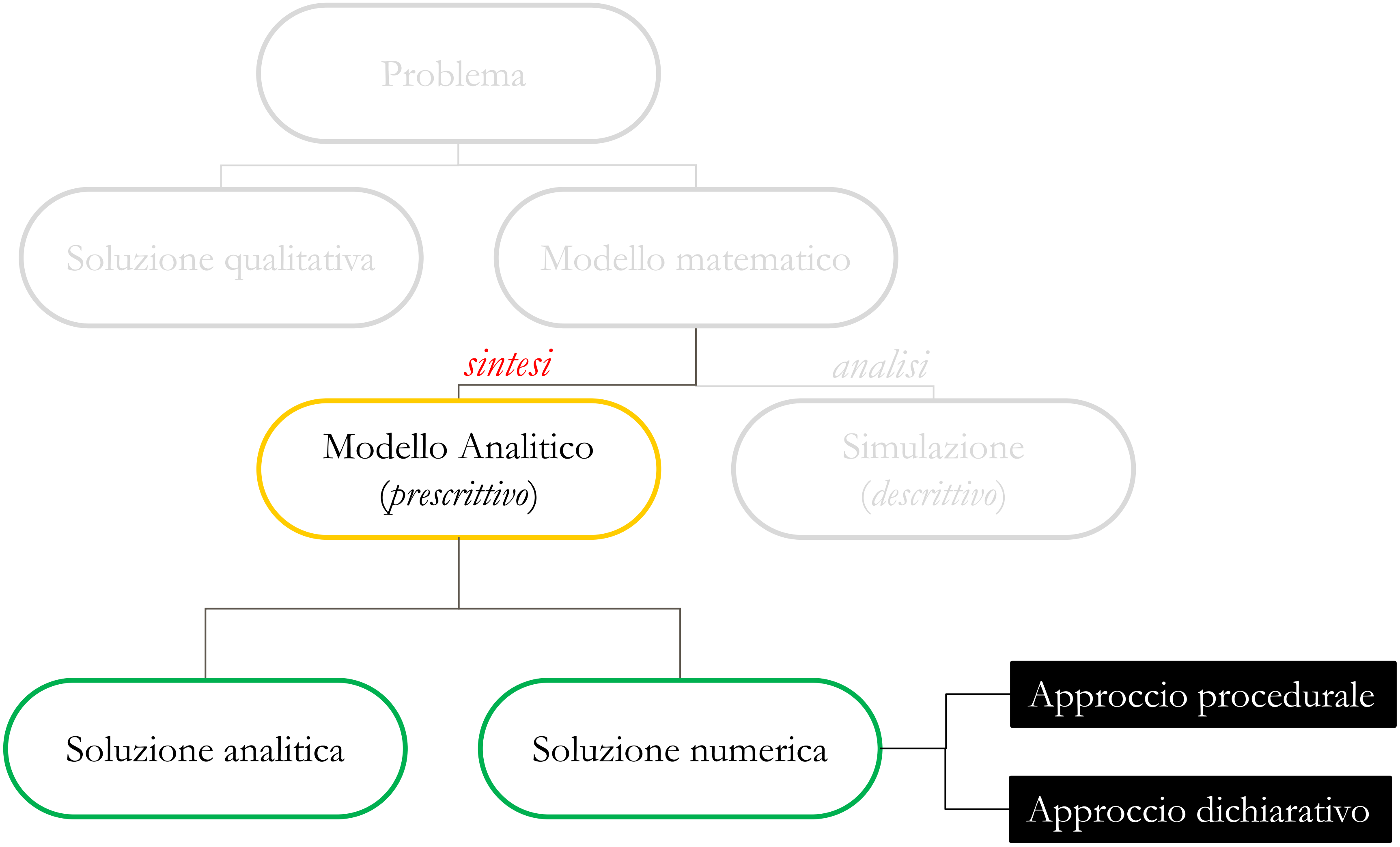
Problemi e modelli: modelli analitici



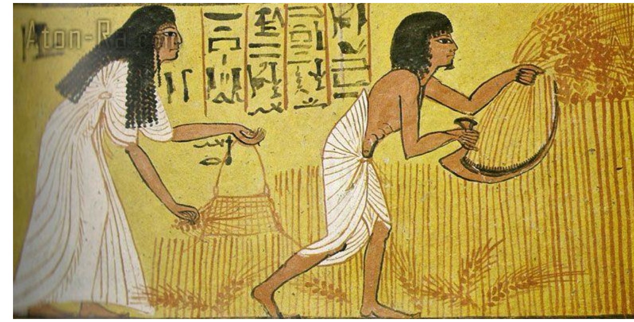
Le variabili decisionali sono note e controllabili dal decisore.

Il modello fornisce una *strategia decisionale*.

Modelli e algoritmi



Modelli e algoritmi: esempio



- Si narra che ai contadini dell’antico Egitto non fosse chiaro come misurare le aree. Gli emissari del faraone ne **approfittavano** assegnando i terreni in base alla lunghezza del loro perimetro… che farabutti!!

[Problema] dato un rettangolo di perimetro 100, quali sono le lunghezze dei lati l e h che massimizzano l'area A del rettangolo?

- Soluzione analitica
- Soluzione numerica
  - Approccio dichiarativo
  - Approccio procedurale

...

[Problema] dato un rettangolo di perimetro 100, quali sono le lunghezze dei lati l e h che massimizzano l'area A del rettangolo?

Soluzione analitica

Soluzione numerica

Approccio dichiarativo

Approccio procedurale

$$l = 50 - h$$

$$A = l \cdot h = (50 - h) \cdot h$$

$$A = 50\,h - h^2$$

La funzione A ha un solo punto stazionario (di massimo) che si ottiene azzerando la derivate prima:

$$A' = 50 - 2h = 0$$

da cui si ricava

$$h^* = 25$$
$$l^* = 25$$

…

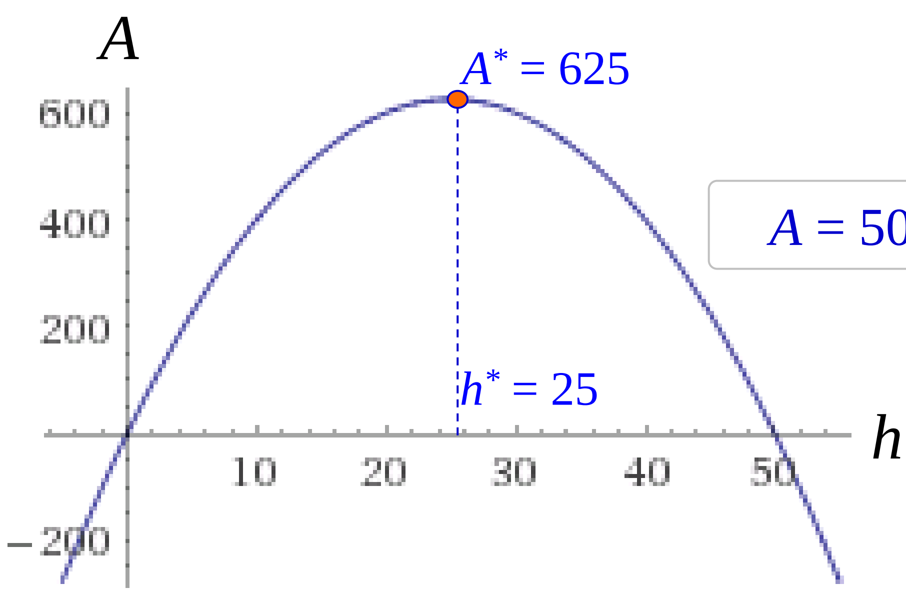
[Problema] dato un rettangolo di perimetro 100, quali sono le lunghezze dei lati l e h che massimizzano l'area A del rettangolo?

Soluzione analitica

Soluzione numerica

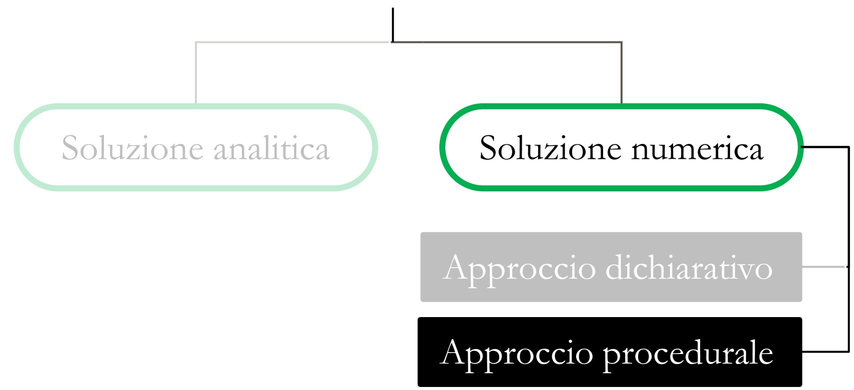
Approccio dichiarativo

Approccio procedurale



$$A = 50\,h - h^2$$

[Problema] dato un rettangolo di perimetro 100, quali sono le lunghezze dei lati l e h che massimizzano l'area A del rettangolo?



- **Approccio procedurale:** si definisce una procedura di calcolo (*algoritmo*) che individua il valore massimo di A al variare della lunghezza dei lati

…

Un algoritmo (che determina una soluzione intera):

- **Per ogni** valore di l compreso tra 1 e 50 (il semi-perimetro)
  - calcola $h = 50 - l$
  - calcola l'area del rettangolo avente per lati l e h
  - conserva i valori l e h del rettangolo con area maggiore

Come si legge la procedura di calcolo?

Si immagina l'esecuzione dei singoli passi e si assegnano *progressivamente* i valori alle variabili

…

valori l e h del rettangolo con area maggiore

$l = 1 \ \ h = 49$

…

$l = 5 \ \ h = 45$

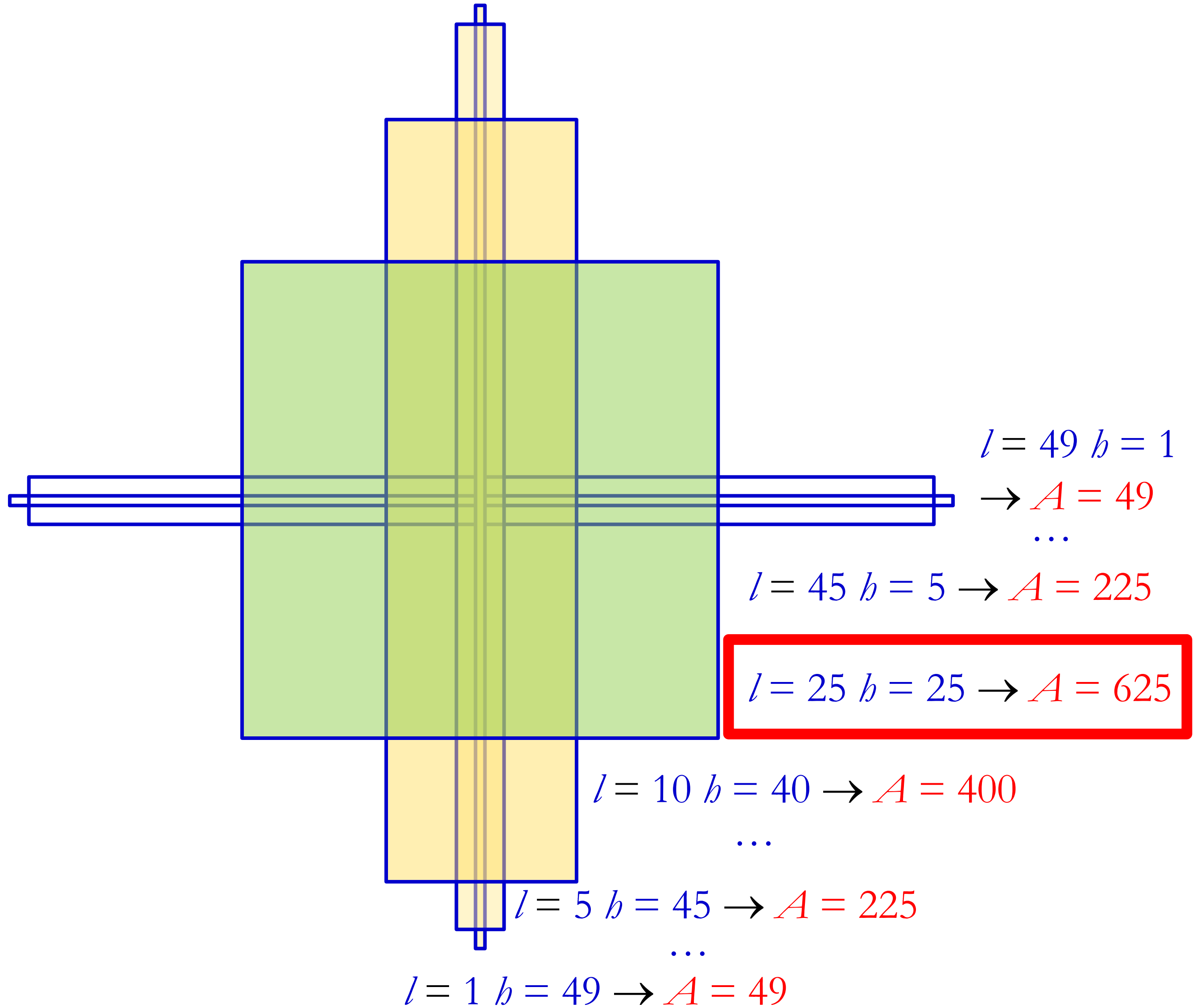
…

$l = 10 \ \ h = 40$

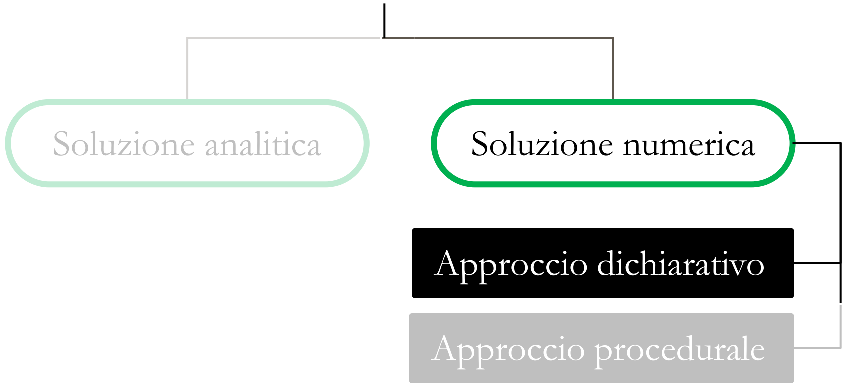
…

$l = 25 \ \ h = 25$

…



[Problema] dato un rettangolo di perimetro 100, quali sono le lunghezze dei lati l e h che massimizzano l'area A del rettangolo?



- **Approccio dichiarativo:** si stabiliscono le relazioni (i vincoli) esistenti tra i dati del problema (perimetro) e le decisioni (lunghezza dei lati e area del rettangolo).

variabile decisionale

…

- l = base del rettangolo

da cui seguono

- A = area del rettangolo
- h = altezza del rettangolo

un modello
di prog. mat.

funzione obiettivo

massimizzare l'area del rettangolo:

vincoli

- base e altezza sono numeri non negativi:
- il perimetro del rettangolo è 100:
- l'area è data dal prodotto di base e altezza:

$$\max A$$

$$l \geq 0, \; h \geq 0$$

$$2l + 2h = 100$$

$$A = l \cdot h$$

…

$$\max A$$
$$A = l \cdot h$$
$$2l + 2h = 100$$
$$l \geq 0, h \geq 0$$

Come si legge il modello?

I valori di A, l e h che soddisfano **contemporaneamente** tutti i vincoli sono soluzioni ammissibili del modello:

$\{l = 1, h = 49, A = 49\}$ è una soluzione ammissibile

$\{l = 2, h = 48, A = 96\}$ è una soluzione ammissibile

$\{l = 25, h = 25, A = 625\}$ è una soluzione ammissibile

…

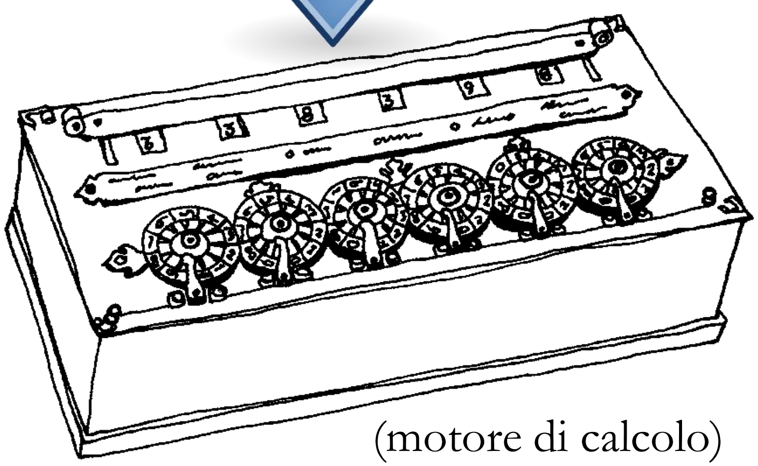
$\max A$

$$A = l \cdot h$$

$$2l + 2h = 100$$

$$l \geq 0,\ h \geq 0$$

…sì, ma la « **soluzione** » ?



(motore di calcolo)

$$A^* = 625$$

$$h^* = 25$$

$$l^* = 25$$

Modelli matematici: un paradigma dichiarativo

Soluzione numerica

Approccio procedurale

come si deve calcolare una soluzione

Linguaggi di programmazione imperativa

procedura di soluzione (*algoritmo*)

Approccio dichiarativo

cosa si deve calcolare

Programmazione Matematica

proprietà delle soluzioni (*modello*)

programmazione matematica

separa l'*aspetto concettuale* di rappresentazione del problema dall'*aspetto operativo* di calcolo di una soluzione

La programmazione matematica appartiene alla classe dei linguaggi *dichiarativi*

si specifica **cosa** deve essere calcolato (*proprietà della soluzione*)

e **non**

come deve essere calcolato (*procedura di soluzione*)

Approccio procedurale e dichiarativo: esercizio

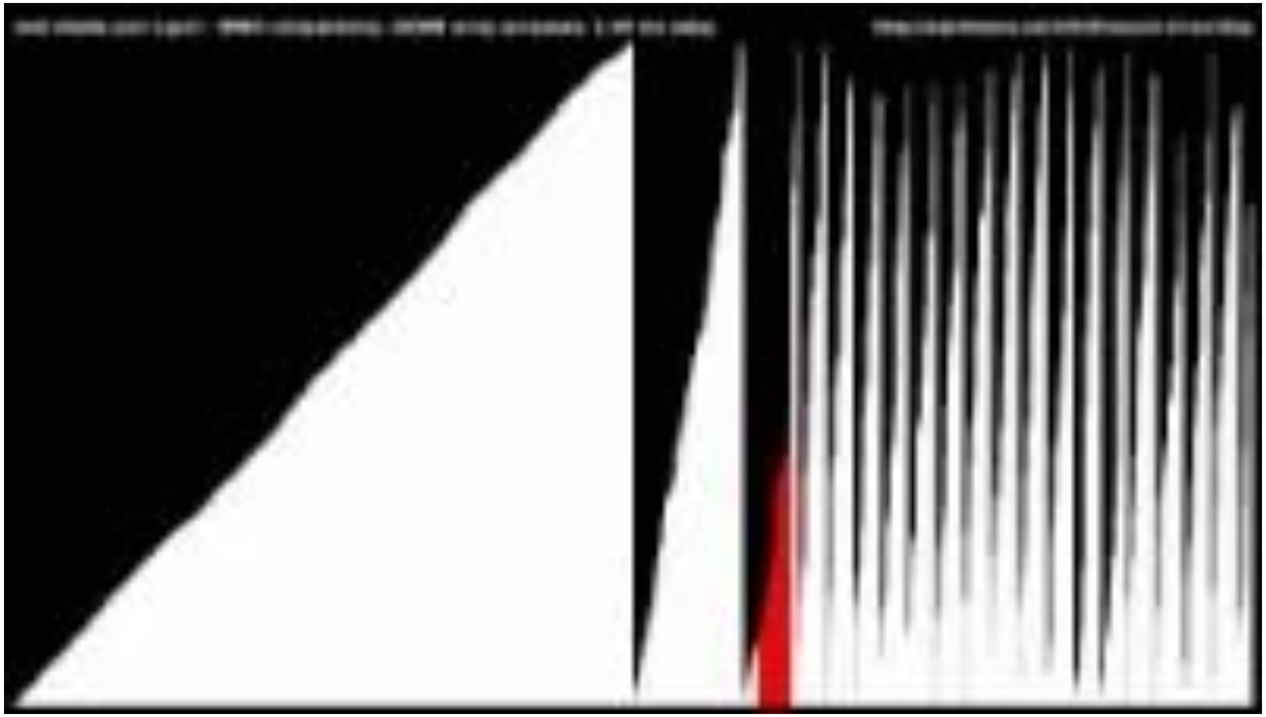
[Esercizio]

dati n numeri interi $a_1,\ldots, a_n$

- descrivere una procedura che determini una sequenza degli n numeri in ordine crescente;
- formulare un modello di programmazione matematica la cui regione ammissibile (o la soluzione ottima) descriva la sequenza (o le sequenze) in ordine crescente degli n numeri.

Approccio procedurale

. . .



```
procedure SelectionSort(a: lista dei numeri);
  for i = 0 to n
    posmin ← i
    for j = (i + 1) to n
      if a[j] < a[posmin] then posmin ← j
    if posmin != i then swap (a[i],a[posmin])
```

Approccio dichiarativo

...

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se l'elemento } i \in A = (a_1, \ldots, a_n) \text{ è in posizione } j \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in A$$

$$\sum_{i \in A} x_{ij} = 1 \qquad \forall j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i \in A} a_i x_{ij} \leq \sum_{i \in A} a_i x_{i(j+1)} \qquad \forall j = 1, \ldots, n-1$$

Variante

[Esercizio]

dati n numeri interi $a_1, \ldots, a_n$

- Determinare una sequenza in cui la somma di ogni tripla di elementi consecutivi non superi un dato parametro K

Discussione:

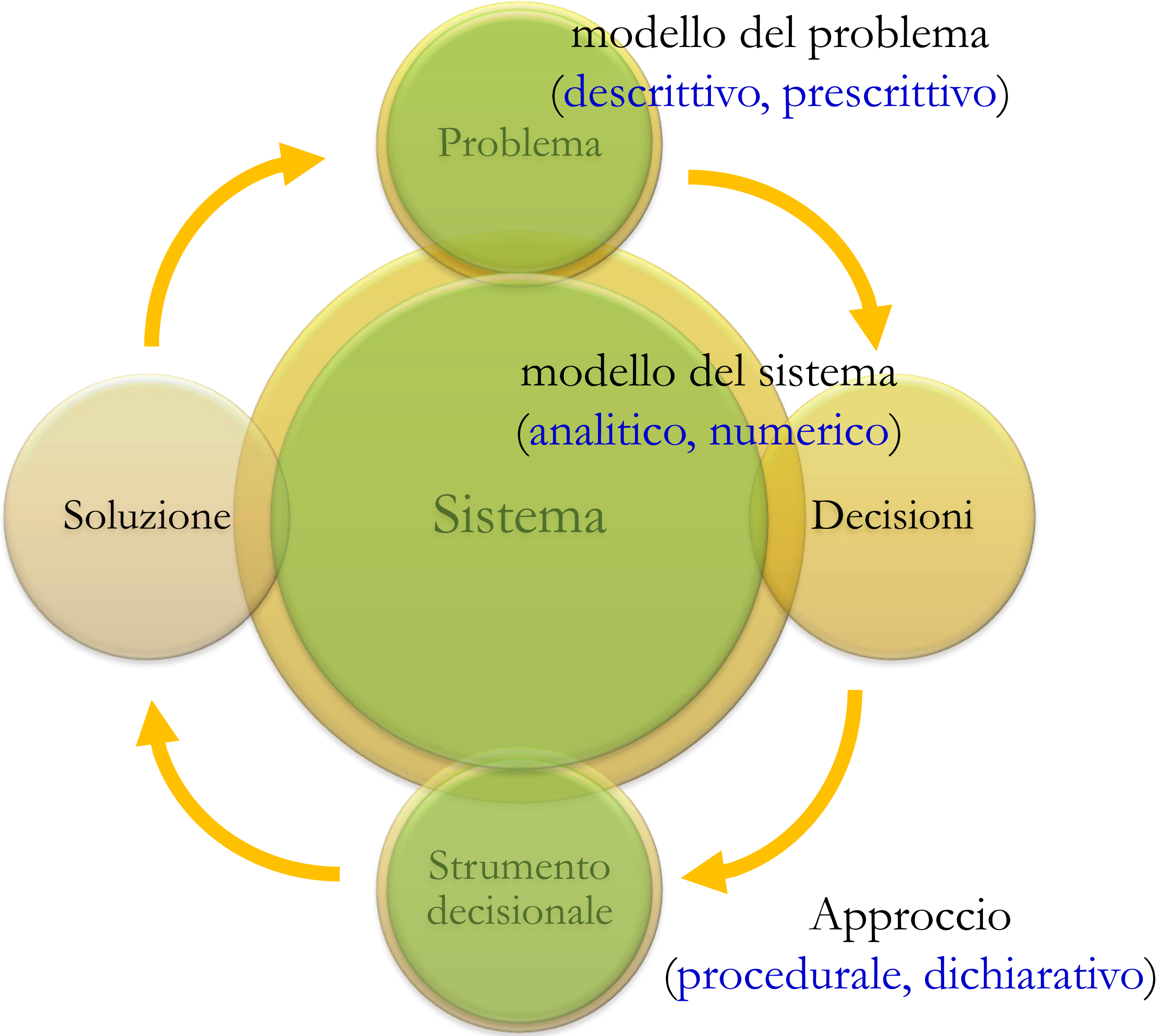
- Realizzare un modello di programmazione matematica significa concentrarsi sulle proprietà delle soluzioni e non su cosa fare per ottenerle

- Un modello di programmazione matematica è relativamente più semplice da implementare (e ci vuole meno tempo)

- I modelli di programmazione matematica sono più flessibili

- I modelli di programmazione matematica sono a prova di errore

Riepilogo


modello del problema
(descrittivo, prescrittivo)
Problema
modello del sistema
(analitico, numerico)
Soluzione
Sistema
Decisioni
Strumento decisionale
Approccio
(procedurale, dichiarativo)

programmazione matematica

Programmazione matematica

Programma matematico

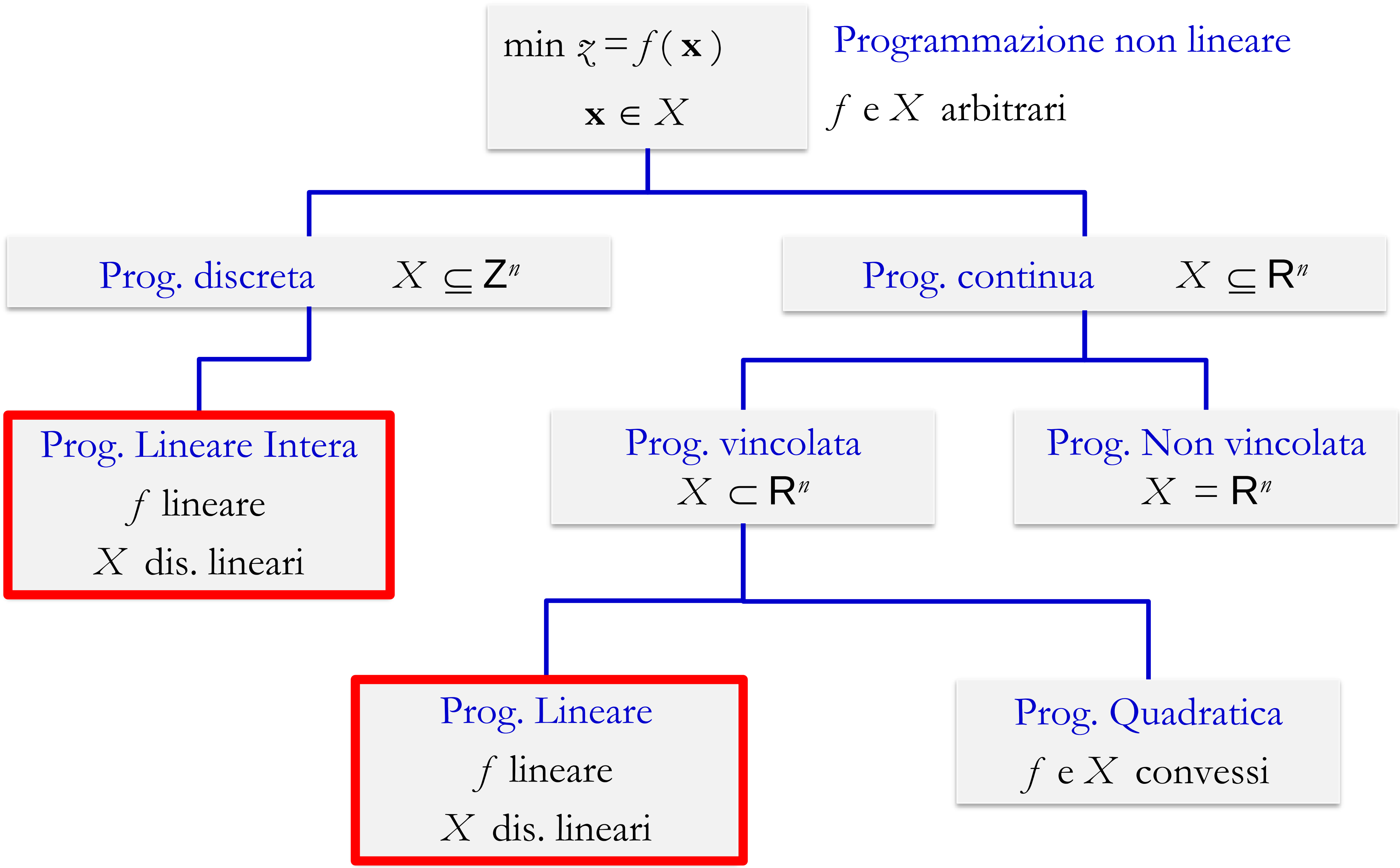
$$\min z = f(\mathbf{x})$$
$$\mathbf{x} \in X$$

funzione obiettivo: descrive il criterio di ricerca

regione ammissibile: insieme delle soluzioni ammissibili (è descritto da un sistema di (dis)equazioni).

variabili decisionali: descrivono le caratteristiche quantitative della soluzione

- $\mathbf{x} \in X$ è una soluzione ammissibile, $\mathbf{y} \notin X$ è una soluzione inammissibile.
- f è una funzione da X in R e $z \in \mathsf{R}$ è il valore che assume f in corrispondenza di un $\mathbf{x} \in X$.


$\min z = f(\mathbf{x})$
$\mathbf{x} \in X$
Programmazione non lineare
f e X arbitrari
Prog. discreta $X \subseteq \mathrm{Z}^n$
Prog. continua $X \subseteq \mathrm{R}^n$
Prog. Lineare Intera
f lineare
X dis. lineari
Prog. vincolata
$X \subset \mathrm{R}^n$
Prog. Non vincolata
$X = \mathrm{R}^n$
Prog. Lineare
f lineare
X dis. lineari
Prog. Quadratica
f e X convessi

Programmazione lineare (PL)

funzione obiettivo **lineare**

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1,\ldots,x_n) = c_1x_1+,\ldots,+c_nx_n = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$z = \min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x})$$

insieme **finito** di (dis)equazioni **lineari**

$$X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathrm{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \le b_j, \quad j = 1,\ldots,m \right\}$$

aspetti algebrici: *sistemi di equazioni lineari, matrici*

aspetti geometrici: *analisi convessa e poliedrale*

Modello di PL: esempio ...

Un modello di programmazione lineare che descrive il problema di mix-produttivo visto in precedenza è il seguente:

$$z = \max 25x_A + 28x_B$$

$$
\begin{aligned}
0.4x_A + 0.24x_B &\leq 312 \\
0.4x_A + 0.45x_B &\leq 360 \\
0.1x_A + 0.31x_B &\leq 160 \\
0.1x_A &\leq 70 \\
x_A\,,\ x_B &\geq 0
\end{aligned}
$$

Ipotesi della Programmazione Lineare

- Un sistema è rappresentato correttamente da un modello di Programmazione Lineare se valgono le seguenti ipotesi:
  - **Divisibilità:** variabili con valori frazionari
  - **Certezza:** coefficienti costanti e noti a priori
  - **Linearità:** relazioni esclusivamente di tipo lineare:

$$\underbrace{c_1 x_1 + , \ldots , + c_n x_n}$$

- **Proporzionalità**: contributo proporzionale al valore assunto: non ci sono economie di scala
- **Additività**: i contributi possono essere solo sommati

Ipotesi della Programmazione Lineare Intera

- Un sistema è rappresentato correttamente da un modello di programmazione lineare intera (PLI) se verifica le seguenti ipotesi
  - **Interezza:** le variabili possono assumere solo valori interi
  - **Certezza:** coefficienti costanti e noti a priori
  - **Linearità:** relazioni esclusivamente di tipo lineare:

$$c_1 x_1 +,\ldots,+ c_n x_n$$

- **Proporzionalità**: contributo proporzionale al valore assunto: non ci sono economie di scala
- **Additività**: i contributi possono essere solo sommati

PL vs. PLI

- Benché formalmente simili, la PLI è matematicamente molto diversa dalla PL e computazionalmente molto più difficile da risolvere.

In particolare:

- le soluzioni ottime intere non sempre possono essere ottenute arrotondando le soluzioni frazionarie (…in realtà quasi mai);
- Le soluzioni frazionarie possono essere prive di significato (per esempio se le variabili intere sono binarie)

I 3 passi della programmazione matematica

- 3 passi per costruire un modello di programmazione matematica:
  1. determinazione delle variabili decisionali
  2. definizione della funzione obiettivo
  3. definizione dei vincoli, cioè delle relazioni logiche tra le variabili di decisione che caratterizzano il problema

- Di solito una scelta corretta delle variabili decisionali permette di esprimere in modo "naturale" funzione obiettivo e vincoli.

- Non esiste un metodo standard ma solo una serie di "strumenti utili":
  - libreria di modelli standard,
  - tecniche di riformulazione,
  - esperienza, …

«hello world!»

Vecchio West

- Al, Bill e Craig sono reduci da una rapina alla National Bank che ha fruttato un bel malloppo: 100.000 verdoni.
- Al è il capo e vuole per sé almeno i due terzi di quanto prenderanno insieme Bill e Craig;
- Craig vuol prendere almeno i due terzi di quello che prenderà Bill;
- Bill vuole prendere più che può. Qual è una soluzione che accontenta tutti?

Esercizio: un problema di mix produttivo

[Problema]

- La Ambrosoli S.p.A. produce due tipi di caramelle: *Al Miele* e *Fior di Liquirizia*. Le *Al Miele* sono vendute a **1€** al pacchetto, le *Fior di Liquirizia* a **1.5 €**.
- L'azienda dispone di una linea in grado di produrre entrambi i tipi di caramelle, ma non contemporaneamente. Tuttavia i tempi di cambio produzione (*changeover*) sono trascurabili.
- La produttività del sistema è di **40 pacchetti/h** di caramelle *Al Miele* e **30 pacchetti/h** di caramelle *Fior di Liquirizia*.
- La settimana lavorativa è di **40 ore** e l'azienda non fa magazzino.
- Da ricerche di marketing si scopre che il mercato è in grado di assorbire settimanalmente al massimo **1000 pacchetti** di *Al Miele* e **900 pacchetti** di *Fior di Liquirizia*.

Quali sono i livelli di produzione dei due tipi di caramelle che massimizza il profitto dell'azienda?

mix produttivo – la formulazione …

$$\max\ x_m + 1{,}5\, x_l$$

$$\frac{1}{40} x_m + \frac{1}{30} x_l \le 40$$

$$x_m \le 1000$$

$$x_l \le 900$$

$$x_m \ge 0; x_l \ge 0$$

Le *Al Miele* sono vendute a **1 €** al pacchetto, le *Fior di Liquirizia* a **1.5 €**.

1) Un prodotto alla volta;
2) 40 h a settimana;
3) Produttività 40pz/h di *Al Miele* e 30pz/h di *Fior di Liquirizia*

Domanda massima: 1000 pacchetti di *Al Miele* e 900 di *Fior di Liquirizia*

Non negatività della produzione

La settimana lavorativa è di $t = 40$ ore

	prodotti			
	A	B	C	D
ricavo	1	1.5	1	1.5
Produttività	40	30	50	20
q.tà massima	1000	900	500	800

ricavo unitario

$$\max \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot x_i$$

produttività

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i \leq t$$

tempo totale disponibile

$$0 \leq x_i \leq d_i, \qquad \forall\, i \in (0, \dots, n)$$

q.tà massima

Bibliografia

1. C. Vercellis,
   Ottimizzazione. Teoria, metodi, applicazioni
   Mc Graw-Hill, 2008

2. F.S. Hillier, G.J. Lieberman,
   Ricerca Operativa
   Mc Graw-Hill, IX ed., 2010

3. Dispense dei proff. Claudio Arbib e Daniele Vigo

APPENDICE

- La fabbrica automatica
- Parola chiave: sistemi organizzati
- Sistemi e modelli

La fabbrica automatica

Un po' di storia

Rivoluzione Industriale

telaio industriale e macchina a vapore

XVIII sec.

James Watt (1736 - 1819) perfeziona la macchina a vapore

Effetti:

- riduzione dei fabbisogni di manodopera,
- aumento della produttività,
- capitalizzazione e impulso agli investimenti,
- espansione produttiva e nuovi mercati.

Rivoluzione Industriale
telaio industriale e macchina a vapore

Economia Industriale
Scomposizione del lavoro

XVIII sec.

XIX sec.

Frederick W. Taylor (1856 - 1915) introduce il principio di scomposizione del lavoro in attività elementari.

Effetti:

- Notevole aumento della produzione e conseguente riduzione del prezzo.
- Aumento della produttività e conseguente aumento del salario medio.
- Minor dipendenza da manodopera specializzata.

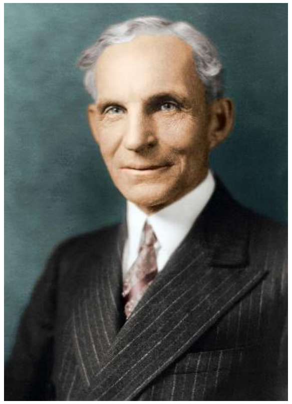
Rivoluzione Industriale
telaio industriale e macchina a vapore

Economia Industriale
Scomposizione del lavoro

Economia di scala
Produzione di massa

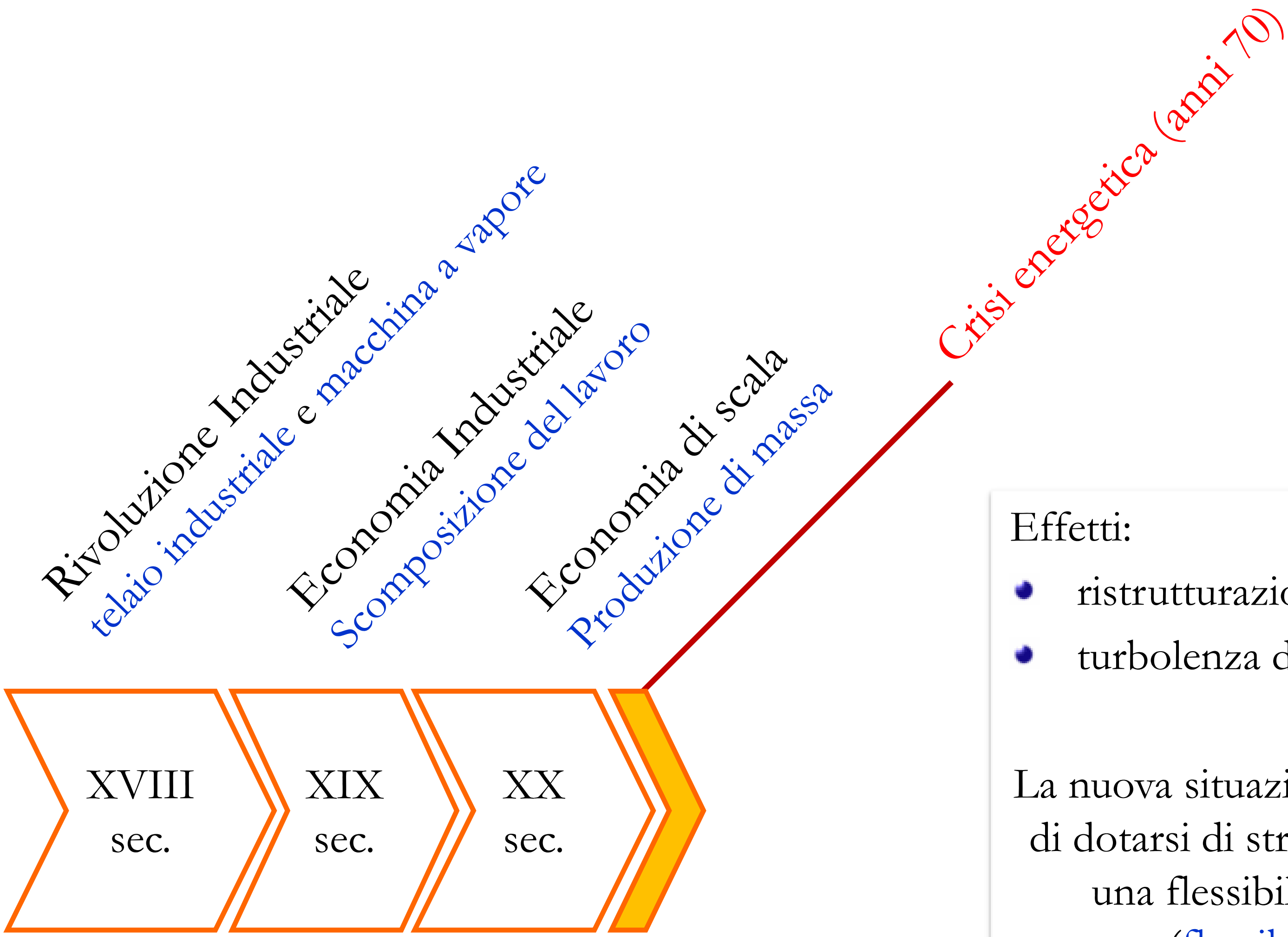
XVIII sec. → XIX sec. → XX sec.

Henry Ford (1863 - 1947) introduce la catena di montaggio: un sistema seriale per l'assemblaggio di automobili



Effetti:

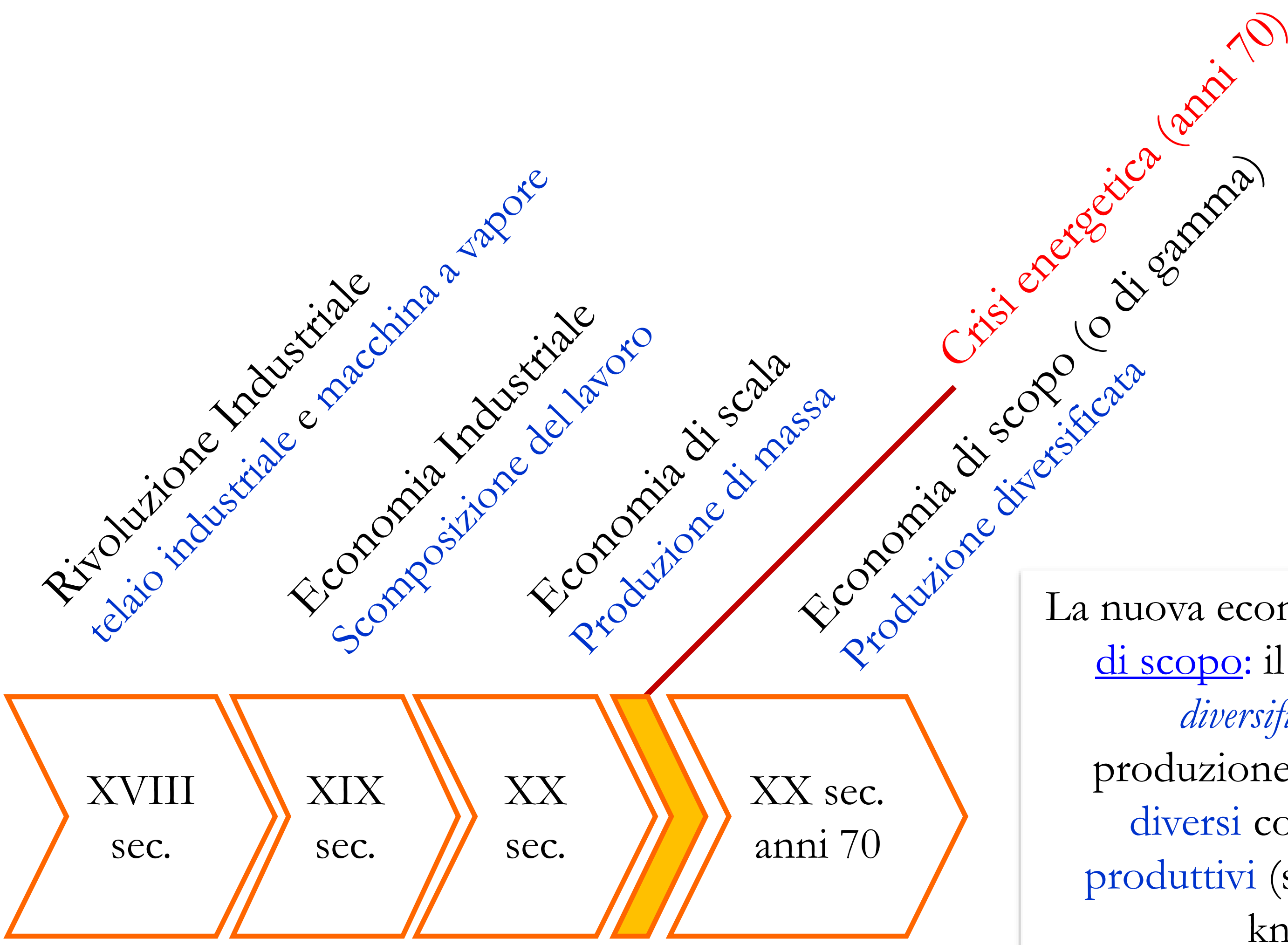
- Ulteriore abbattimento dei costi di produzione tramite ingenti economie di scala.
- Grande accumulo di capitali e conseguente formazione di colossi industriali.



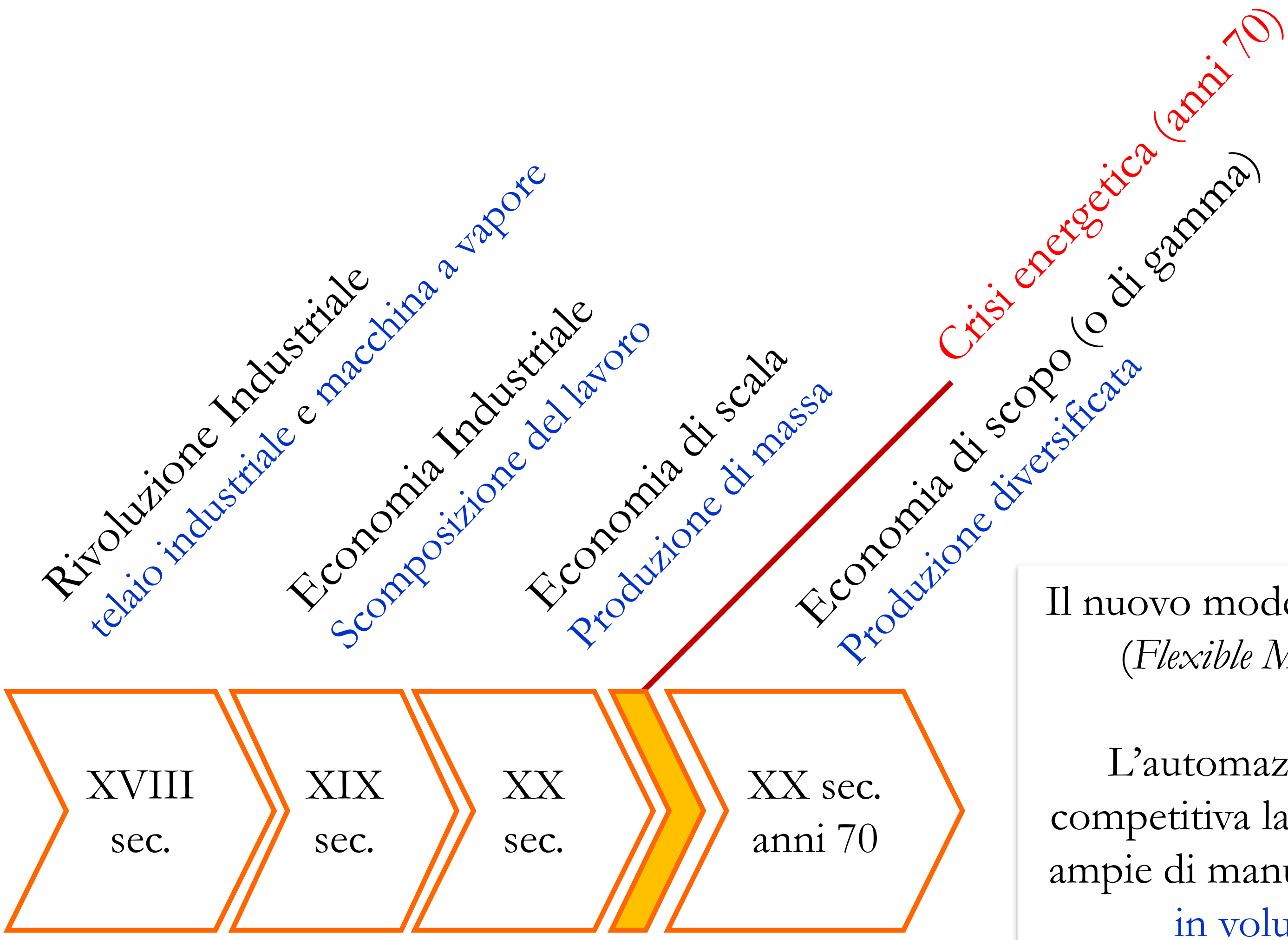
Effetti:

- ristrutturazione economia mondiale,
- turbolenza dei mercati

La nuova situazione economica richiede di dotarsi di strutture caratterizzate da una flessibilità molto maggiore (flessibilità strategica).



La nuova economia emergente è quella di scopo: il risparmio deriva dalla *diversificazione*, cioè dalla produzione congiunta di prodotti diversi con i medesimi fattori produttivi (stesse risorse, impianti, know-how, …).



Il nuovo modello di fabbrica è il FMS (*Flexible Manufacturing System*).

L'automazione flessibile rende competitiva la produzione di famiglie ampie di manufatti, ognuno prodotto in volumi medio-bassi.

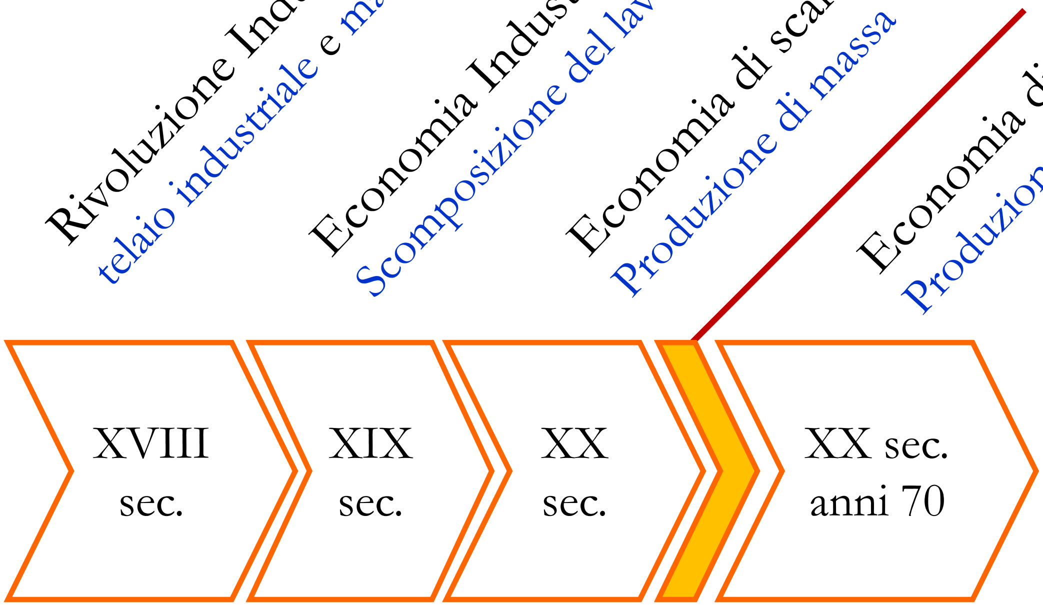
Rivoluzione Industriale
telaio industriale e macchina a vapore

Economia Industriale
Scomposizione del lavoro

Economia di scala
Produzione di massa

Crisi energetica (anni 70)

Economia di scopo (o di gamma)
Produzione diversificata



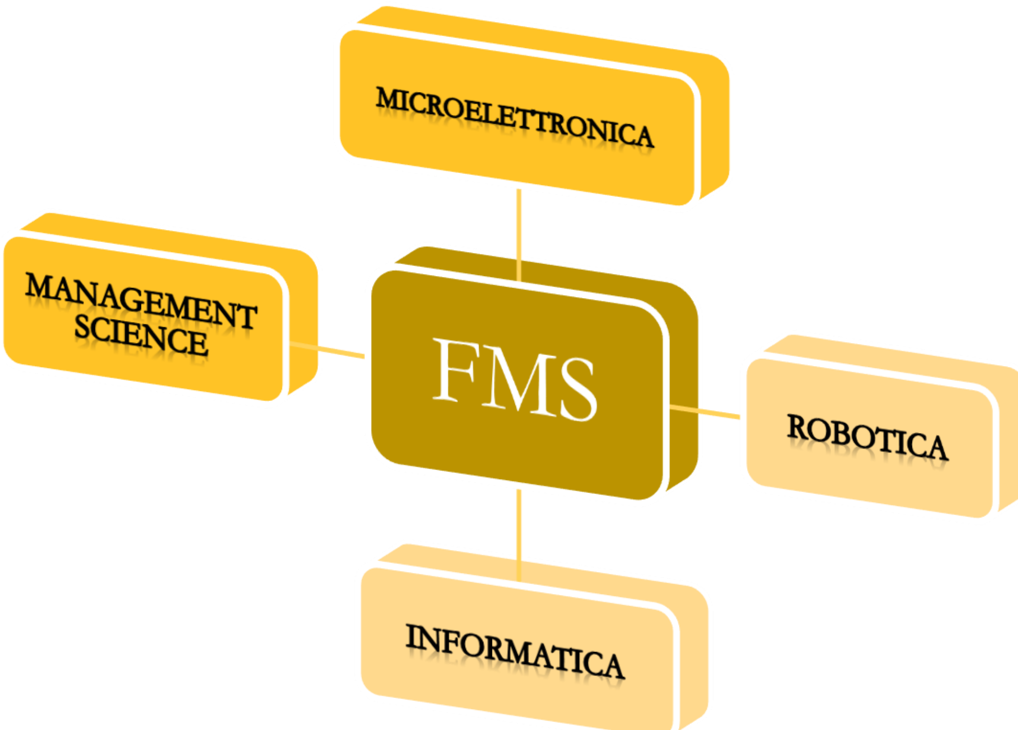
Il nuovo modello di fabbrica è il FMS (*Flexible Manufacturing System*).

la competitività diventa indipendente dal progetto, dalla domanda, da cambiamenti del mix produttivo e da guasti delle macchine o degli utensili.

Automazione flessibile: alcuni esempi

- [Una fabbrica automatica]
- [Un sistema flessibile di produzione]
- [Robot industriale in azione]

Automazione flessibile: fattori innovativi



L'automazione flessibile è il risultato di una convergenza tecnologica di elementi innovativi quali la microelettronica, l'informatica, l'automazione e la ricerca operativa.

Problemi decisionali

FLESSIBILITÀ

…e anche piccole inefficienze possono incidere enormemente sulle opportunità di profitto:

Ridurre i tempi di produzione dell' **1%** in una linea che produce 200 pezzi al minuto del valore di 1,5 Euro cadauno, significa incrementare i profitti di circa 4.300 Euro al giorno e di circa **un milione e mezzo di Euro all'anno**.

COMPLESSITÀ

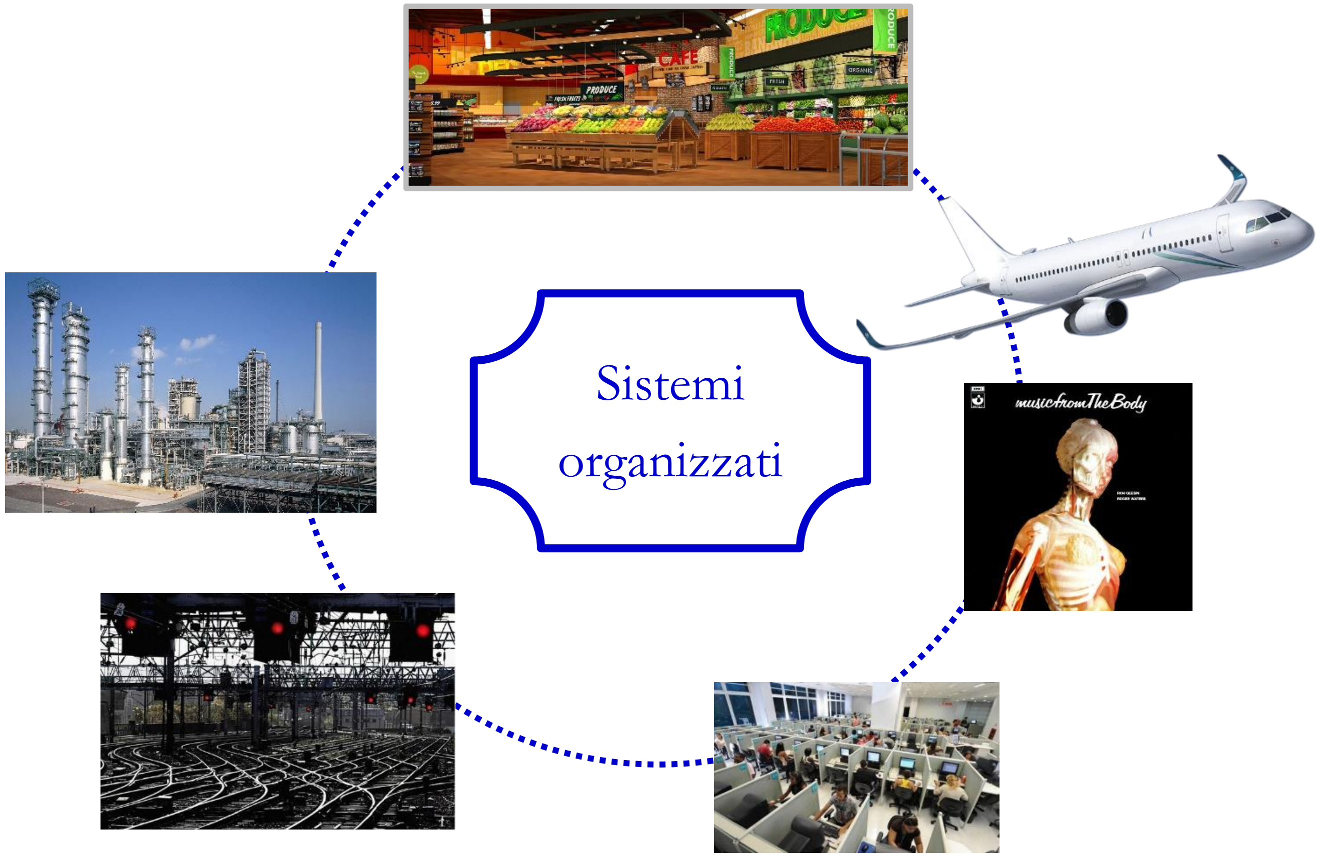
parola chiave:

sistemi organizzati

parola chiave: *sistemi organizzati*

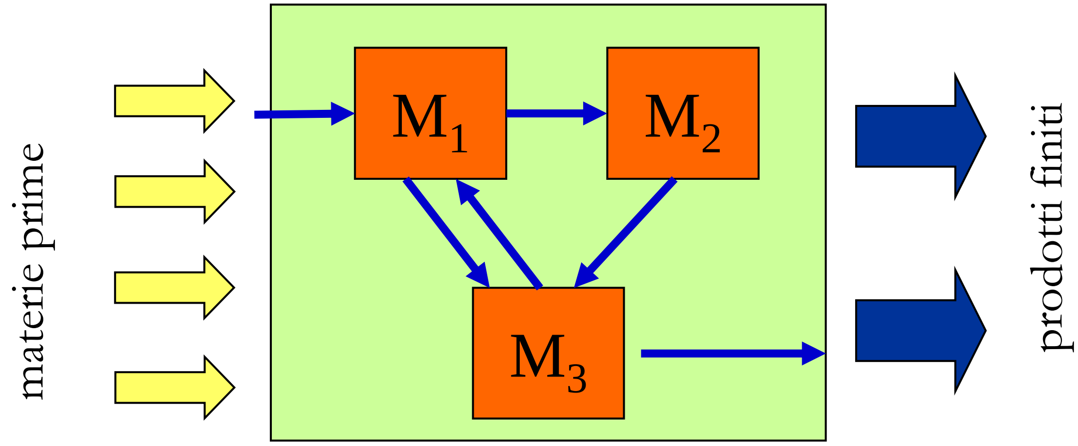
Un sistema è una collezione di entità che agiscono e interagiscono al fine di raggiungere obiettivi individuali o collettivi (Schmidt e Taylor, 1970)

In caso di obiettivi collettivi, le entità concorrono a determinare le prestazioni del sistema complessivo e quindi si parla di sistemi organizzati.



[Esercizio] Individuare entità, tipi di interazione e prestazioni dei sistemi sopra riportati.

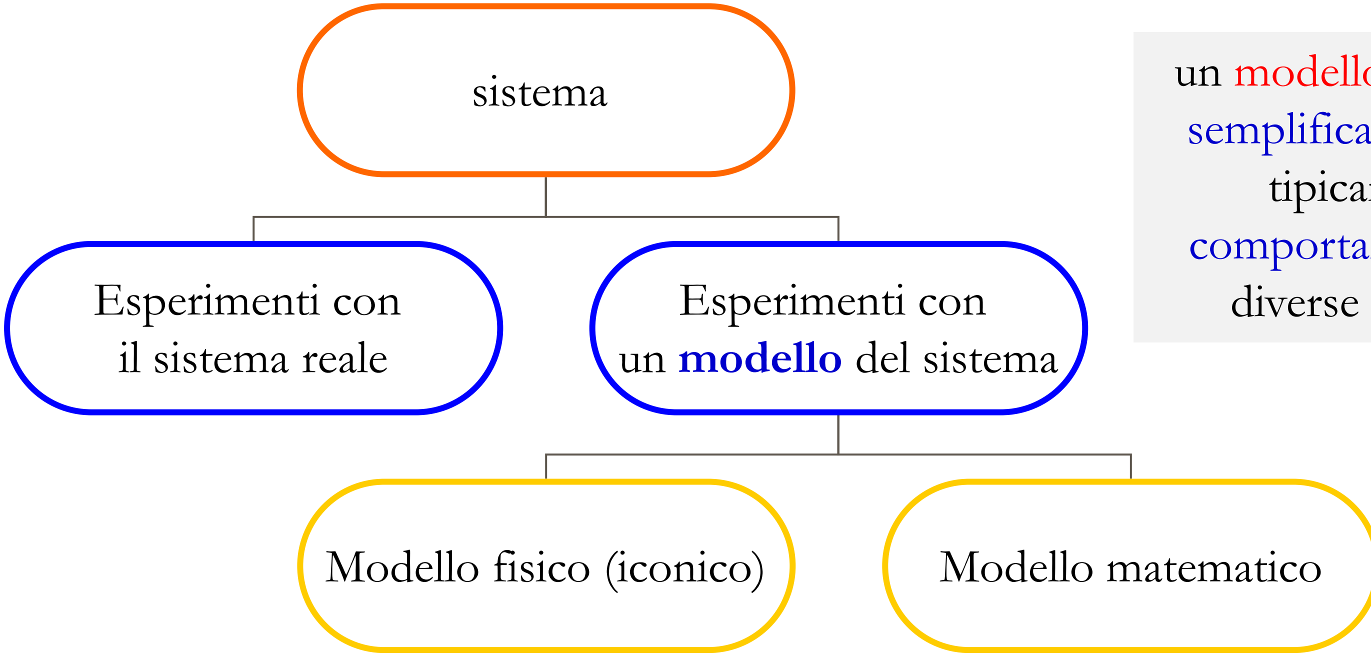
Impianto di produzione



- **obiettivo**: creazione di valore aggiunto attraverso un processo di trasformazione di materie prime in prodotti finiti.
- **entità**: risorse umane, materiali e finanziarie
- **interazioni**: flussi di informazioni e di materiali

sistemi e modelli

Sistemi e modelli



un modello è una rappresentazione semplificata del sistema concepita tipicamente per predire il comportamento del sistema sotto diverse condizioni di utilizzo.

Rappresentazione in scala (mappamondo, DNA, …)

insieme di relazioni logico-matematiche che descrivono il comportamento del sistema: $E = mc^2$ $F = ma$ $V = s / t$

Sistema reale

variabili decisionali
e/o di controllo +
variabili d'ambiente:

$\mathbf{x}$

modello matematico

Stato del sistema

$\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$

Prestazione del sistema:

$\mathbf{z} = g(\mathbf{y})$

In un ambiente deterministico e a informazione completa a ogni politica decisionale corrisponde uno stato del sistema $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ e a ogni stato del sistema corrisponde un'uscita $\mathbf{z} = g(\mathbf{y})$

Sistema reale

variabili decisionali
e/o di controllo +
variabili d'ambiente:

$\mathbf{x}$

modello matematico

Stato del sistema

$\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$

Prestazione del sistema:

$\mathbf{z} = g(\mathbf{y})$

Modello analitico

Modello numerico

lo stato e la prestazione sono descritti da equazioni/disequazioni

lo stato e la prestazione sono descritti da algoritmi di calcolo

Sistema reale

variabili decisionali
e/o di controllo +
variabili d'ambiente:

$\mathbf{x}(t)$

modello matematico

Stato del sistema

$\mathbf{y}(t) = f(\mathbf{x}(t))$

Prestazione del sistema:

$\mathbf{z}(t) = g(\mathbf{y}(t))$

- Statico: sistema in equilibrio
- Dinamico: sistema in evoluzione (nel tempo)

Modelli matematici: vantaggi

- astrazione e sintesi — tralascia alcuni aspetti del sistema perché trascurabili (*astrazione*) e evidenzia solo le caratteristiche rilevanti (*sintesi*) e ciò migliora il grado di comprensione del sistema reale;
- economicità — costa meno rispetto allo studio del sistema reale;
- rapidità — permette di ottenere risposte in breve tempo;
- fattibilità — permette di analizzare sistema che non esistono nella realtà.