Autofunzioni armoniche dei sistemi dinamici LTI e fasori nei circuiti elettrici

Prof. Simone Fiori

s.fiori@univpm.it

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione (DII)

Università Politecnica delle Marche

Argomenti

- Motivazioni: Studio di circuiti elettrici *con memoria*
- Richiamo sui numeri complessi
- Sistemi dinamici LTI
- Autofunzioni armoniche
- Fasori nei circuiti elettrici
- Relazioni costitutive nel dominio dei fasori
- Leggi di Kirchhoff nel dominio dei fasori

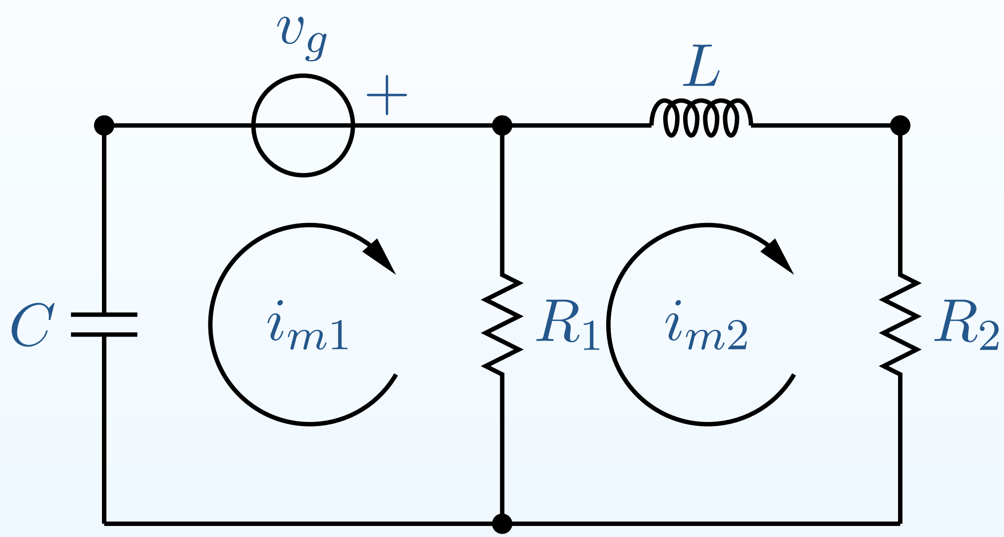
Circuiti elettrici con memoria

Quando un circuito elettrico contiene almeno un elemento con memoria (*induttore*, *condensatore*, *IMA*, ...), accade che:

il sistema risolvente non è più di tipo *algebrico* ma di tipo **integro-differenziale**,

a causa della presenza di operatori di derivazione/integrazione nelle relazioni costitutive dei componenti con memoria.

Circuiti elettrici con memoria: Esempio



Albero: $\mathcal{A} = \{v_g, R_1, L\}$: Sistema risolvente (MABM misto):

$$\begin{cases} -v_g(t) + R_1(i_{m1}(t) - i_{m2}(t)) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_{m1}(\tau)d\tau = 0, \\ R_2 i_{m2}(t) + R_1(i_{m2}(t) - i_{m1}(t)) + L\frac{di_{m2}(t)}{dt} = 0. \end{cases}$$

Soluzione di circuiti elettrici con memoria

Per risolvere i circuiti elettrici con memoria esistono, sostanzialmente, tre metodi con diversa complessità:

- **Soluzione diretta**: Si risolve il sistema di equazioni differenziali. Vale per ogni tipo di generatori indipendenti ma è molto complicato.
- **Trasformate di Laplace**: Si trasforma il sistema di equazioni differenziali in un sistema algebrico. Vale per una grande varietà di generatori indipendenti, è meno complicato computazionalmente, ma è ancora piuttosto laborioso.
- **Metodo dei fasori**: Si trasforma il sistema di equazioni differenziali in un sistema algebrico. Vale solo per generatori indipendenti *sinusoidali*, è poco complicato computazionalmente.

Generatori indipendenti sinusoidali

Nelle applicazioni *domestiche* e *industriali*, le sorgenti di energia elettrica sono di tipo sinusoidale, per esempio i GIT sono del tipo:

$$v_g(t) = V_g \cos(\omega t + \varphi).$$

La pulsazione ω è legata alla frequenza f dalla relazione $\omega = 2\pi f$. In Italia, nelle applicazioni domestiche:

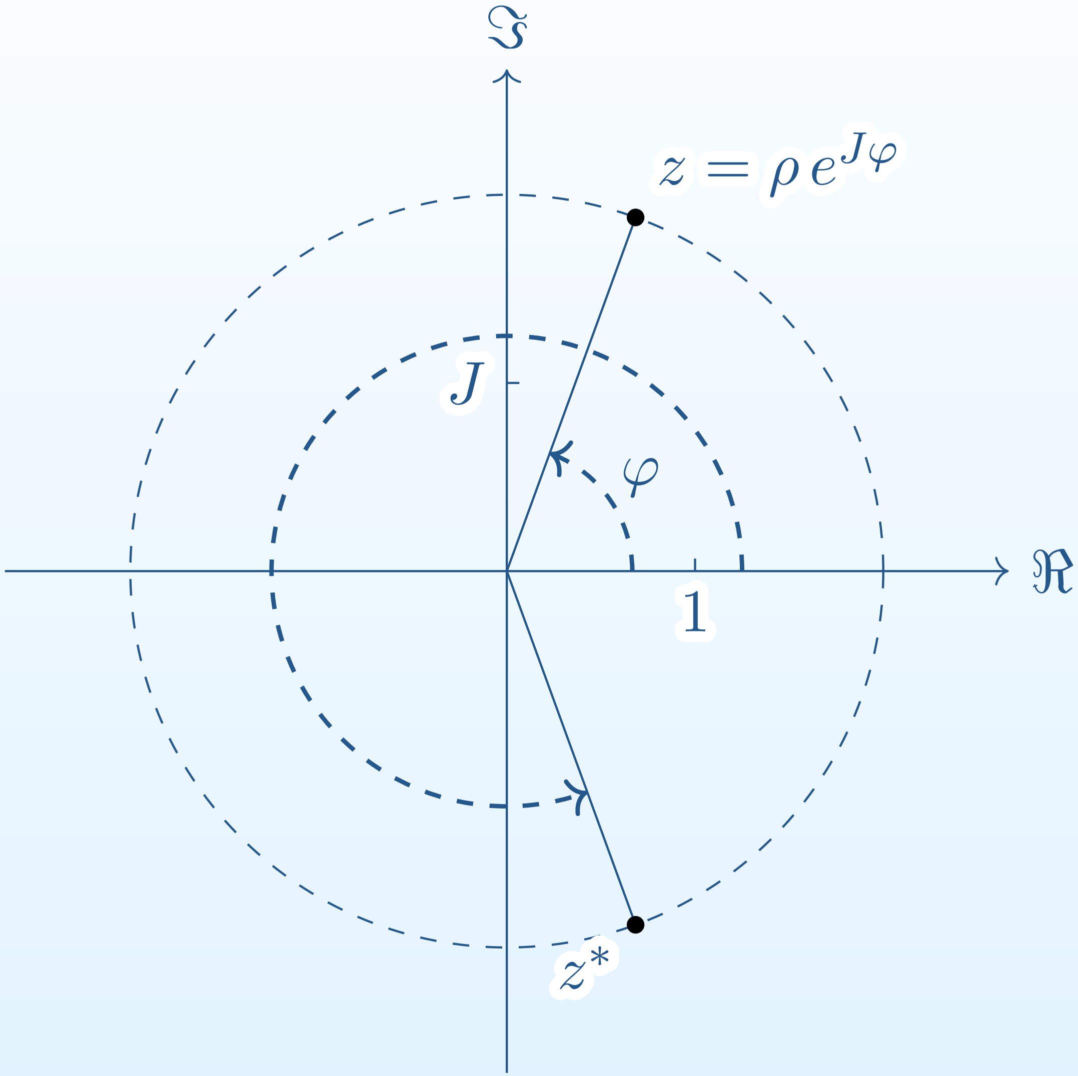
- Il modulo della tensione vale $V_g = 230\sqrt{2} \approx 325$ Volt (la tensione di rete può però oscillare entro una fascia di tolleranza $\pm 10\%$).
- La frequenza vale $f = 50$ Hertz (quindi $\omega \approx 314$ rad/sec).

Numeri complessi

Sia $z \in \mathbb{C}$ un generico numero complesso.

- La rappresentazione *polare* di un numero complesso è $z = \rho e^{J\varphi}$, dove $\rho \geq 0$ si dice *modulo* e $\varphi \in [-\pi\ \pi)$ si dice *fase*. Inoltre J si dice *unità immaginaria*.
- L'unità immaginaria è tale che risulta $J^2 = -1$ e $\frac{1}{J} = -J$.
- Il numero complesso coniugato di z si indica con $z^\star = \rho e^{-J\varphi}$.
- La rappresentazione *cartesiana* di z si scrive $z = \Re\{z\} + J\Im\{z\}$.
- Vale la proprietà $z + z^\star = 2\Re\{z\}$.

Numeri complessi



Numeri complessi

Ricordiamo le due seguenti importanti proprietà.

- Vale l'importante formula di Eulero $\boxed{e^{J\varphi} = \cos\varphi + J\sin\varphi}$
- Vale la formula di razionalizzazione (che permette di esprimere in forma cartesiana il reciproco di un numero complesso rappresentato in forma cartasiana)

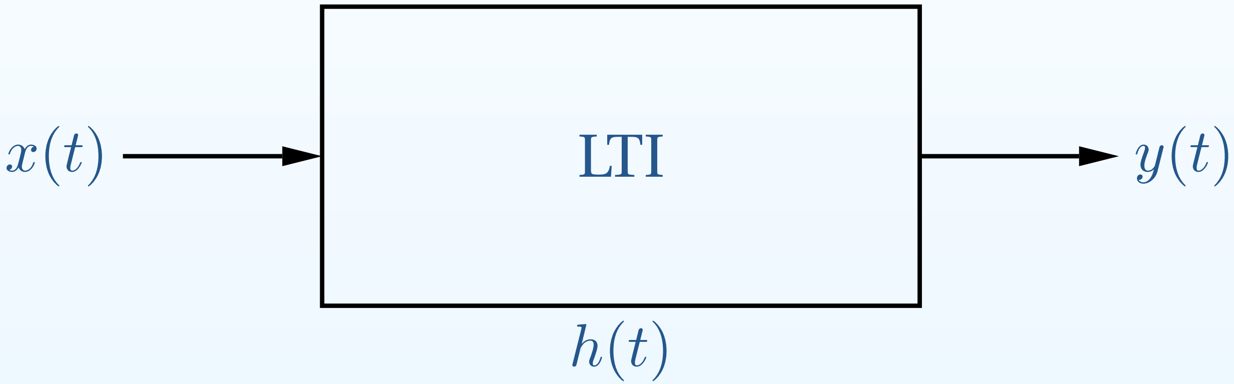
$$\frac{1}{a+Jb} = \frac{a}{a^2+b^2} - J\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Questo risultato si ottiene attraverso l'artificio:

$$\frac{1}{a+Jb}\frac{a-Jb}{a-Jb}.$$

Sistemi dinamici LTI

Ricordiamo il risultato fondamentale sui sitemi dinamici lineari tempo-invarianti (LTI):



$$y(t) = T\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau.$$

La funzione $h(t)$ si chiama *risposta impulsiva* del sistema. L'operatore $T\{\cdot\}$ (*convoluzione*) descrive il sistema.

Autofunzioni dei sistemi dinamici

Detto $T\{\cdot\}$ l'operatore che descrive il comportamento di un sistema dinamico, ogni segnale $x_{\mathrm{af}}(t) \in \mathbb{C}$ che soddisfa l'equazione:

$$T\{x_{\mathrm{af}}(t)\} = \lambda \cdot x_{\mathrm{af}}(t),$$

si dice *autofunzione* del sistema dinamico e il coefficiente (indipendente dal tempo) $\lambda \in \mathbb{C}$ si dice *autovalore* associato all'autofunzione.

I seguenti segnali sono autofunzioni dei sistemi LTI dette *autofunzioni armoniche*:

$$x_{\omega}(t) = e^{J\omega t},$$

dove $\omega \in \mathbb{R}$ è detta *pulsazione* (rad/sec).

Autofunzioni armoniche dei sistemi dinamici: Esempi

Cariando il valore della pulsazione ω varia l'autofuzione associata, as esempio:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= e^{Jt}, \\
x_{\frac{1}{2}}(t) &= e^{Jt/2}, \\
x_{\pi}(t) &= e^{\pi Jt}, \\
x_{-2}(t) &= e^{-2Jt}.
\end{aligned}
$$

Autofunzioni armoniche dei sistemi dinamici LTI

La risposta di un sistema dinamico LTI ad un segnale di ingresso $x_\omega(t) = e^{J\omega t}$ vale:

$$
\begin{aligned}
T\{x_\omega(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x_\omega(t-\tau) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{J\omega(t-\tau)} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{J\omega t} e^{-J\omega\tau} d\tau \\
&= \underbrace{e^{J\omega t}}_{\text{Autofunzione}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-J\omega\tau} d\tau}_{\text{Autovalore}} .
\end{aligned}
$$

Autofunzioni armoniche dei sistemi dinamici LTI (2)

I segnali $x_\omega(t) = e^{J\omega t}$ sono dunque autofunzioni con autovalore:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-J\omega t}dt.$$

La funzione $H(\omega) \in \mathbb{C}$ viene detta *risposta in frequenza* del sistema LTI.
La risposta in frequenza può essere scritta come:

$$H(\omega) = A(\omega)e^{J\beta(\omega)},$$

(cioè in forma polare) dove:

- la funzione $A(\omega) \geq 0$ si dice *risposta in modulo*,
- la funzione $\beta(\omega) \in [-\pi\ \pi)$ si dice *risposta in fase*.

Proprietà di simmetria della risposta in frequenza

Per un sistema LTI con risposta impulsiva reale, cioè con $h(t) \in \mathbb{R}$, risulta: $A(-\omega) = A(\omega)$ e $\beta(-\omega) = -\beta(\omega)$.
Dimostrazione:

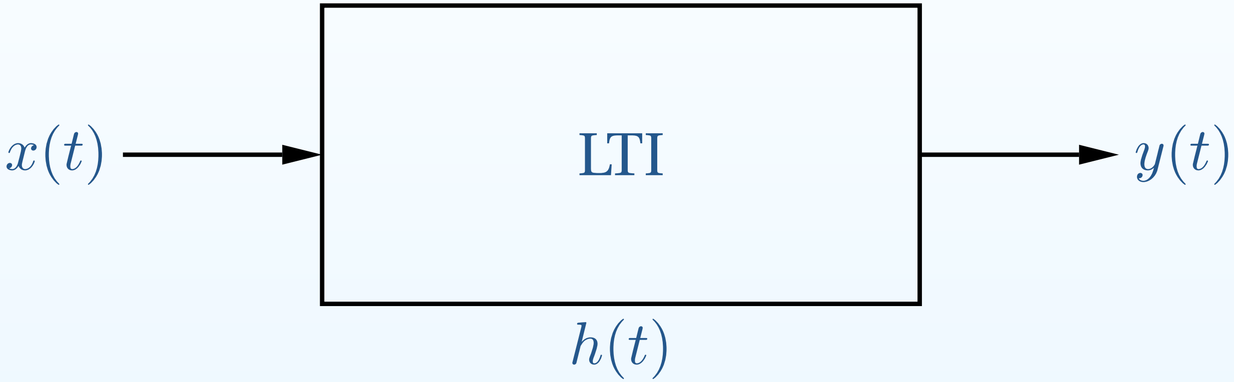
$$\begin{aligned} H^\star(\omega) &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-J\omega t} dt\right)^\star \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h^\star(t) \left(e^{-J\omega t}\right)^\star dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{J\omega t} dt = H(-\omega). \end{aligned}$$

Quindi, deve valere:

$$A(\omega) e^{-J\beta(\omega)} = A(-\omega) e^{J\beta(-\omega)}.$$

Risposta di sistemi LTI a segnali sinusoidali

Si consideri la seguente situazione di interesse pratico:



$$\begin{cases} x(t) = X\cos(\omega t + \varphi). \\ y(t) = ? \end{cases}$$

Si ipotizza che $h(t) \in \mathbb{R}$, dunque vale la simmetria di $H(\omega)$.

Risposta di sistemi LTI a segnali sinusoidali (2)

Si utilizza la formula di Eulero per il coseno:

$$\cos x = \frac{e^{Jx} + e^{-Jx}}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Essa permette di scrivere:

$$x(t) = X\cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} X e^{J\varphi} e^{J\omega t} + \frac{1}{2} X e^{-J\varphi} e^{-J\omega t},$$

ovvero, **il segnale $x(t)$ si può pensare come la combinazione lineare di due autofunzioni armoniche di pulsazione ω e $-\omega$, rispettivamente**.

Risposta di sistemi LTI a segnali sinusoidali (3)

La linearità dell'operatore $T\{\cdot\}$ del sistema LTI consente di scrivere:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= T\left\{\frac{1}{2}Xe^{J\varphi}e^{J\omega t}+\frac{1}{2}Xe^{-J\varphi}e^{-J\omega t}\right\}\\
&= \frac{1}{2}Xe^{J\varphi}T\left\{e^{J\omega t}\right\}+\frac{1}{2}Xe^{-J\varphi}T\left\{e^{-J\omega t}\right\}\\
&= \frac{1}{2}Xe^{J\varphi}H(\omega)e^{J\omega t}+\frac{1}{2}Xe^{-J\varphi}H(-\omega)e^{-J\omega t}\\
&= \frac{1}{2}XA(\omega)e^{J\varphi}e^{J\beta(\omega)}e^{J\omega t}+\frac{1}{2}XA(\omega)e^{-J\varphi}e^{-J\beta(\omega)}e^{-J\omega t}\\
&= XA(\omega)\left(\frac{e^{J(\omega t+\varphi+\beta(\omega))}+e^{-J(\omega t+\varphi+\beta(\omega))}}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Risposta di sistemi LTI a segnali sinusoidali (4)

Quindi:

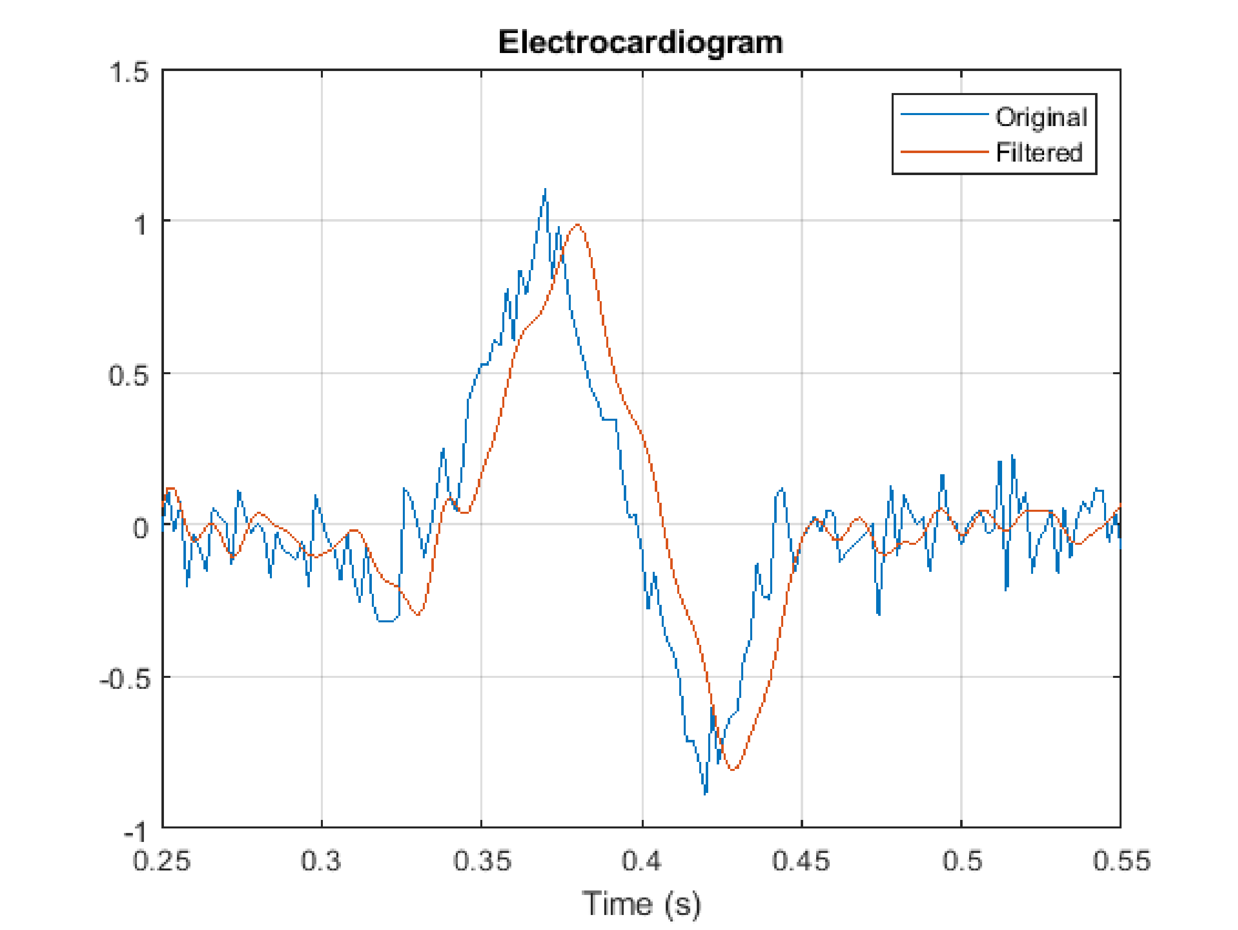
$$\begin{cases} x(t) = X\cos(\omega t + \varphi). \\ y(t) = XA(\omega)\cos(\omega t + \varphi + \beta(\omega)). \end{cases}$$

Ovvero: La risposta di un sistema LTI ad un ingresso sinusoidale è anch'essa sinusoidale. Inoltre:

- L'ampiezza subisce una distorsione moltiplicativa pari al modulo della risposta in frequenza.
- La fase subisce una distorsione additiva pari alla fase della risposta in frequenza.

Ritardo di gruppo nei sistemi LTI

Quando un circuito riceve un ingresso (sollecitazione), impiega un tempo non nullo per produrre una uscita (risposta), a causa dei fenomeni di inerzia intrinseci ad ogni sistema fisico. Tale tempo di latenza viene quantificato attraverso una grandezza detta *ritardo di gruppo*. Esempio: filtraggio di un elettrocardiogramma.



Ritardo di gruppo nei sistemi LTI

Consideriamo la risposta in fase e sviluppiamola in serie di Taylor intorno ad una pulsazione ω_0:

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \beta'(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \text{termini di ordine superiore}$$

Definiamo la funzione

$$\tau(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} -\beta'(\omega)$$

così che

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) - \tau(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \text{termini di ordine superiore}$$

Ritardo di gruppo nei sistemi LTI

La risposta di un circuito LTI ad un segnale sinusoidale di pulsazione ω e fase φ vale, allora,

$$y(t) \approx Y \cos(\omega t + \varphi + \beta(\omega_0) - \tau(\omega_0)(\omega - \omega_0))$$

Definita, per semplicità, le costante (rispetto a t e ω)

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \varphi + \beta(\omega_0) + \tau(\omega_0)\omega_0, \ \tau_g \stackrel{\text{def}}{=} \tau(\omega_0)$$

la risposta approssimata del circuito si può scrivere

$$y(t) \approx Y \cos(\omega(t - \tau_g) + \alpha)$$

Ritardo di gruppo nei sistemi LTI

Tale relazione si può leggere nel seguente modo:

1. Supponendo che il segnale di ingresso $x(t)$ sia assimilabile ad una sinusoide (ovvero abbia una forma anche non precisamente sinusoidale ma molto simile a quella di una sinusoide di pulsazione ω_0), allora
2. Il segnale di uscita ha una forma molto simile ma risulta traslato, nel tempo, di un tempo τ_g che ammonta al tempo necessario al sistema-circuito ad elaborare l'ingresso. Nei sistemi fisici reali, $\tau_g > 0$ perciò si parla di 'ritardo'.

I “fasori”

Si introduce il concetto di **fasore** associato ad un segnale sinusoidale.

$$x(t) = X\cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}Xe^{J\varphi}e^{J\omega t} + \frac{1}{2}Xe^{-J\varphi}e^{-J\omega t},$$

Il fasore associato al segnale sinusoidale $x(t)$ è:

$$\boxed{\dot{X} = Xe^{J\varphi}}$$

Il segnale $x(t)$ si può allora riscrivere:

$$x(t) = \frac{1}{2}\dot{X}e^{J\omega t} + \frac{1}{2}\dot{X}^{\star}e^{-J\omega t} = \Re\{\dot{X}e^{J\omega t}\}.$$

I “fasori” (2)

Anche alla risposta del sistema LTI si può associare un fasore $\dot{Y}$, infatti:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{2} X A(\omega) \left(e^{J(\omega t + \varphi + \beta(\omega))} + e^{-J(\omega t + \varphi + \beta(\omega))} \right) \\
&= \frac{1}{2} \dot{Y} e^{J\omega t} + \frac{1}{2} \dot{Y}^{\star} e^{-J\omega t} \\
&= \Re\{ \dot{Y} e^{J\omega t} \}.
\end{aligned}
$$

Il fasore del segnale sinusoidale d’ingresso e il fasore del segnale sinusoidale d’uscita sono legati dalla relazione:

$$\dot{Y} = H(\omega) \dot{X}.$$

I “fasori” (3)

Riassunto sui fasori:

- Ad ogni segnale sinusoidale si può associare un fasore. Il fasore contiene le informazioni relative all'ampiezza e alla fase del segnale sinusoidale.
- Se l'ingresso di un sistema LTI è un segnale sinusoidale, anche l'uscita del sistema è un segnale sinusoidale *con stessa pulsazione*.
- I fasori del segnale di ingresso e del segnale di uscita sono legati da una relazione di proporzionalità.

Nota: È comodo definire un *fasore nullo*:

$$\dot{0} = 0e^{J\varphi} = 0 + J0, \text{ con } \varphi \text{ arbitraria.}$$

Autofunzioni armoniche e fasori nei circuiti

Si studiano i circuiti elettrici sotto la seguente ipotesi:

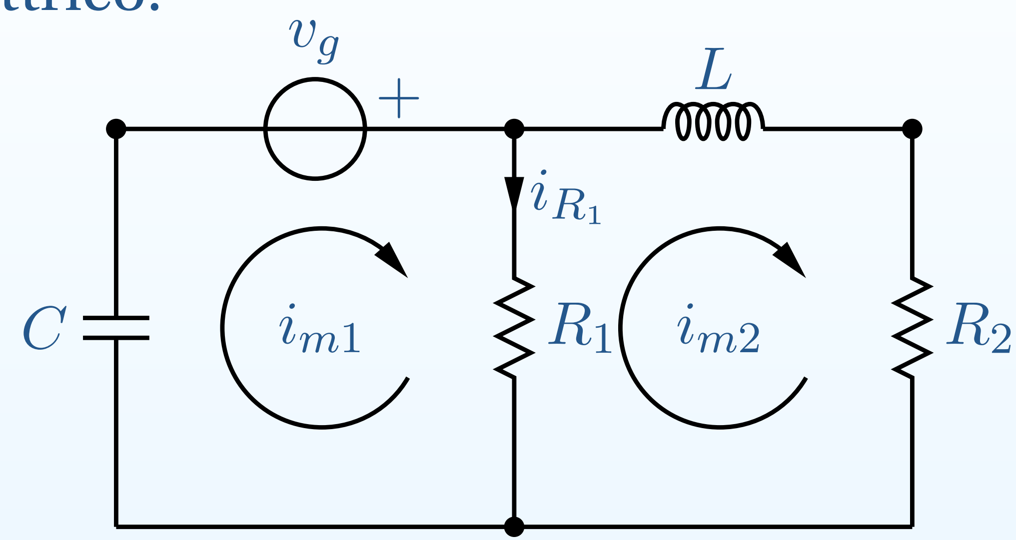
- Il circuito è formato da componenti lineari tempo-invarianti e da **un** generatore indipendente (di tensione o di corrente).
- La grandezza impressa dal generatore indipendente è di tipo *sinusoidale*.

Sotto queste ipotesi, è possibile considerare un circuito come un sistema dinamico LTI in cui:

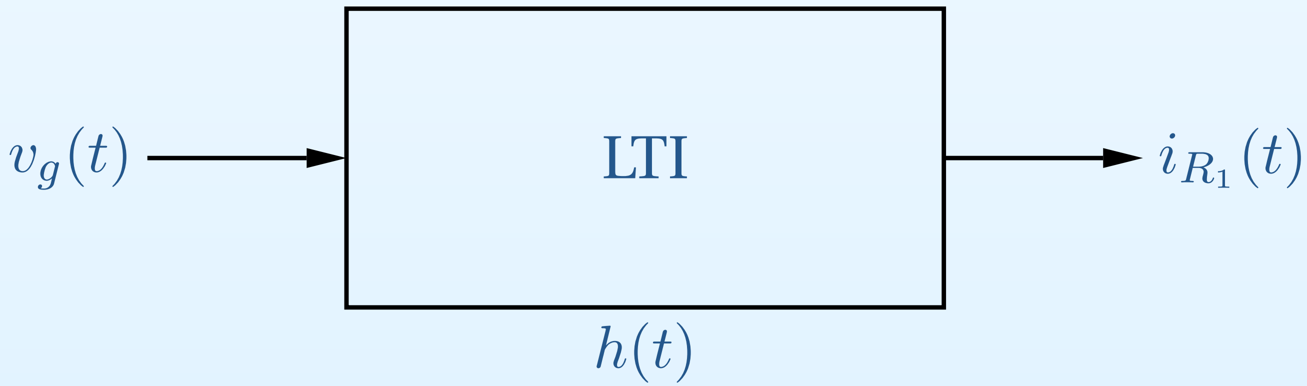
- Il segnale di ingresso $x(t)$ coincide con il valore del generatore indipendente ($v_g(t)$ oppure $i_g(t)$).
- Il segnale di uscita coincide con una qualsiasi grandezza elettrica del circuito (una tensione o una corrente su un qualsiasi bipolo o una qualsiasi porta elettrica).

Determinazione dei legami fasoriali: Esempio

Il circuito elettrico:



viene modellato con il sistema dinamico:



Determinazione dei legami fasoriali

Per determinare i legami fasoriali nei circuiti elettrici occorre rivisitare le equazioni fondamentali dell'Elettrotecnica:

- Relazioni costitutive: In ogni bipolo e porta elettrica k si assume che la tensione e la corrente abbiano forma $v_k(t) = \dot{V}_k e^{J\omega t}$ e $i_k(t) = \dot{I}_k e^{J\omega t}$ e si determinano i vincoli imposti dai componenti sui fasori $\dot{V}_k$ e $\dot{I}_k$.
- Leggi di Kirchhoff: In ogni maglia (fondamentale) si assume che le tensioni abbiano forma $v_k(t) = \dot{V}_k e^{J\omega t}$ e si determinano i vincoli imposti dalla topologia sui fasori $\dot{V}_k$. In ogni taglio (fondamentale) si assume che le correnti abbiano forma $i_k(t) = \dot{I}_k e^{J\omega t}$ e si determinano i vincoli imposti dalla topologia sui fasori $\dot{I}_k$.

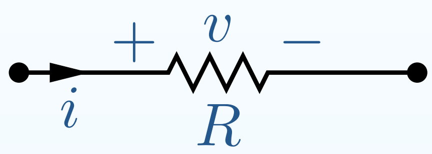
Determinazione dei legami fasoriali (2)

Tale procedimento corrisponde all'utilizzo implicito della proprietà di linearità (sovrapposizione degli effetti).
Per esempio:

$$
\begin{aligned}
v_k(t) &= \frac{1}{2}\dot{V}_k e^{J\omega t} + \frac{1}{2}\dot{V}_k^{\star} e^{-J\omega t} \text{ (Tensione reale)} \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{V}_k e^{J\omega t} \text{ (Semi-componente della tensione)} \\
&\Rightarrow \dot{V}_k e^{J\omega t} \text{ (Componente della tensione)}
\end{aligned}
$$

Il resistore nel dominio dei fasori

Determinazione della relazione costitutiva del resistore nel dominio dei fasori.



Equazioni da utilizzare:

$$v(t) = Ri(t), \text{ dove } v(t) = \dot{V} e^{J\omega t},\ i(t) = \dot{I} e^{J\omega t}.$$

Sostituendo si ottiene:

$$\dot{V} e^{J\omega t} = R\dot{I} e^{J\omega t} \Rightarrow \boxed{\dot{V} = R\dot{I}}$$

Il resistore nel dominio dei fasori

Il procedimento visto nella slide precente è ‘abbreviato’ ma fornisce il risultato corretto. Vediamo, per verifica, il procedimento ‘completo’.
Equazioni da utilizzare:

$$\begin{cases} v(t) = Ri(t) \\ v(t) = \frac{1}{2}\dot{V}e^{J\omega t} + \frac{1}{2}\dot{V}^* e^{-J\omega t} \\ i(t) = \frac{1}{2}\dot{I}e^{J\omega t} + \frac{1}{2}\dot{I}^* e^{-J\omega t} \end{cases}$$

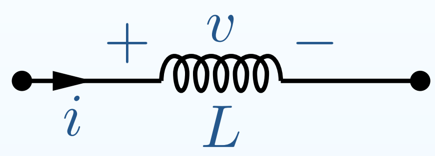
Sostituendo si ottiene l’equazione:

$$\frac{1}{2}\dot{V}e^{J\omega t} + \frac{1}{2}\dot{V}^* e^{-J\omega t} = \frac{1}{2}R\dot{I}e^{J\omega t} + \frac{1}{2}R\dot{I}^* e^{-J\omega t}$$

che deve valere *per ogni* t, da cui le uguaglianze dei coefficienti.

L'induttore nel dominio dei fasori

Determinazione della relazione costitutiva dell'induttore nel dominio dei fasori.



Equazioni da utilizzare:

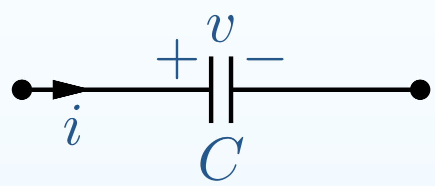
$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}, \text{ dove } v(t) = \dot{V}e^{J\omega t},\ i(t) = \dot{I}e^{J\omega t}.$$

Sostituendo si ottiene:

$$\dot{V}e^{J\omega t} = L\frac{d(\dot{I}e^{J\omega t})}{dt} = L\dot{I}(J\omega)e^{J\omega t} \Rightarrow \boxed{\dot{V} = J\omega L\dot{I}}$$

Il condensatore nel dominio dei fasori

Determinazione della relazione costitutiva del condensatore nel dominio dei fasori.



Equazioni da utilizzare:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}, \text{ dove } v(t) = \dot{V}e^{J\omega t},\ i(t) = \dot{I}e^{J\omega t}.$$

Sostituendo si ottiene:

$$\dot{I}e^{J\omega t} = C\frac{d(\dot{V}e^{J\omega t})}{dt} \Rightarrow \boxed{\dot{V} = \frac{1}{J\omega C}\dot{I}}$$

Nota storica: Trasformazioni di Steinmetz

Le trasformazioni appena viste, relative ai componenti elementari induttore, condensatore e resistore, vengono dette **trasformazioni di Steinmetz** (da Charles Proteus Steinmetz).

Esse consentono di trasformare i tre bipoli elementari dal dominio del tempo al dominio dei fasori.

Impedenze elementari

Le relazioni costitutive del resistore, dell'induttore e del condensatore si possono scrivere nello stesso modo, ovvero:

$$\dot{V} = Z\dot{I},$$

dove la quantità $Z \in \mathbb{C}$ si denota con:

- **Impedenza resistiva**: Nel caso del resistore, vale $Z_{\mathrm{R}} = R$.
- **Impedenza induttiva**: Nel caso dell'induttore, vale $Z_{\mathrm{L}} = J\omega L$.
- **Impedenza capacitiva**: Nel caso del condensatore, vale $Z_{\mathrm{C}} = \frac{1}{J\omega C} = -\frac{J}{\omega C}$.

Impedenza e ammettenza

Per un **generico** bipolo la cui relazione costitutiva nel dominio del fasori si possa scrivere $\dot{V} = Z\dot{I}$:

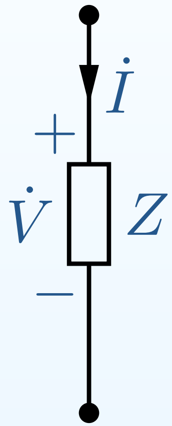
- La quantità Z si chiama impedenza e si misura in Ohm (Ω).
- L'impedenza si può scrivere:

$$Z(\omega) = R(\omega) + JX(\omega),$$

  dove $R(\omega)$ è una funzione della pulsazione e si chiama *parte resistiva* dell'impedenza e $X(\omega)$ dipende dalla pulsazione e si chiama *parte reattiva* dell'impedenza (o semplicemente *reattanza*).
- È comodo definire anche la quantità $Y(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)}$ che si chiama ammettenza e si misura in Ω^{-1}. L'ammettenza si scompone in $Y(\omega) = G(\omega) + JB(\omega)$, dove G si chiama *conduttanza* e B si chiama *suscettanza.*

Impedenza e ammettenza

Per rappresentare graficamente una impedenza si utilizza il simbolo:

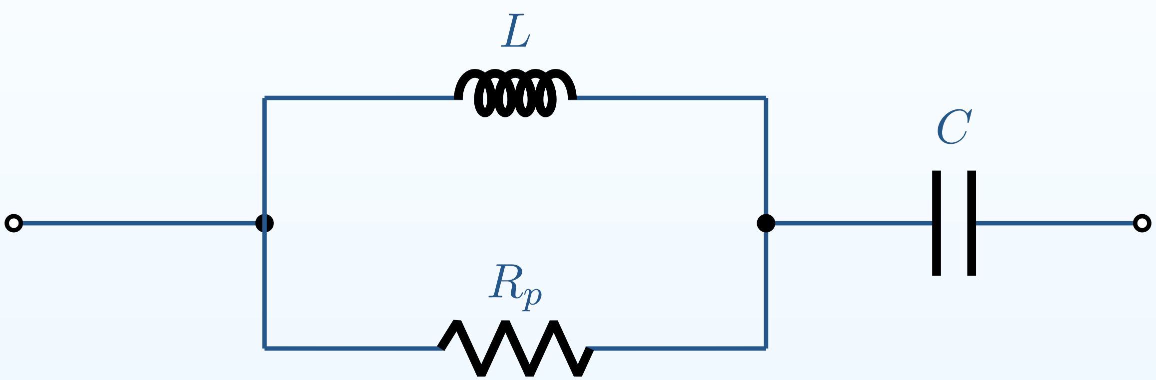


La relazione costitutiva di una impedenza generica è:

$$\boxed{\dot{V} = Z\dot{I}}$$

Impedenza e ammettenza

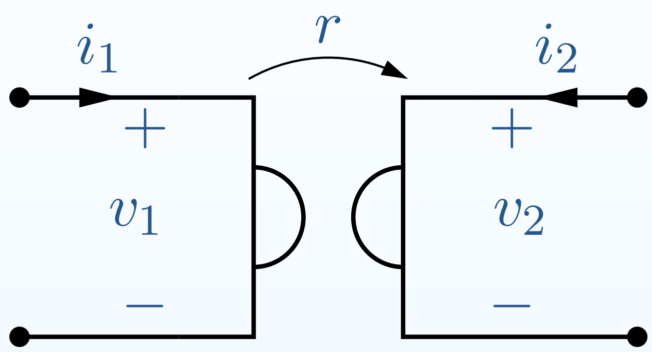
Per esempio, si consideri il bipolo composito:



La sua impedenza vale:

$$
\begin{aligned}
Z(\omega) =& Z_{\mathrm{C}}(\omega) + \frac{R_p\, Z_{\mathrm{L}}(\omega)}{R_p + Z_{\mathrm{L}}(\omega)} \\
=& \underbrace{\frac{\omega^2 R_p L^2}{R_p^2 + \omega^2 L^2}}_{R(\omega)} + J \underbrace{\left(\frac{\omega R_p^2 L}{R_p^2 + \omega^2 L^2} - \frac{1}{\omega C} \right)}_{X(\omega)}.
\end{aligned}
$$

Il “giratore” nel dominio dei fasori



Il comportamento del giratore è descritto dalle relazioni:

$$\begin{cases} v_1(t) = -r \cdot i_2(t),\ v_2(t) = r \cdot i_1(t), \\ v_1(t) = \dot{V}_1 e^{J\omega t},\ v_2(t) = \dot{V}_2 e^{J\omega t}, \\ i_1(t) = \dot{I}_1 e^{J\omega t},\ i_2(t) = \dot{I}_2 e^{J\omega t}, \end{cases}$$

che, combinate, danno luogo ai vincoli:

$$\boxed{\dot{V}_1 = -r\dot{I}_2,\ \dot{V}_2 = r\dot{I}_1}$$

Il “nullore” nel dominio dei fasori

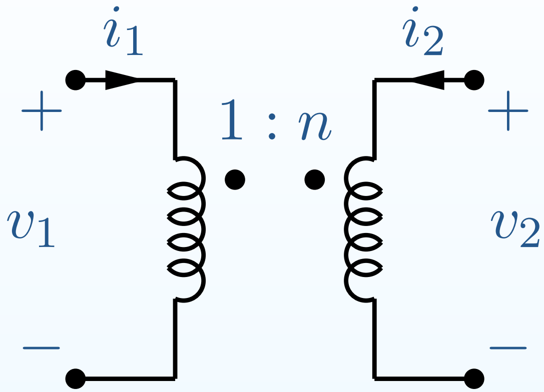
Il comportamento del nullore è descritto dalle relazioni:

$$\begin{cases} v_0(t) = 0,\ i_0(t) = 0, \\ v_0(t) = \dot{V}_0 e^{J\omega t},\ v_\infty(t) = \dot{V}_\infty e^{J\omega t}, \\ i_0(t) = \dot{I}_0 e^{J\omega t},\ i_\infty(t) = \dot{I}_\infty e^{J\omega t}, \end{cases}$$

che, combinate, danno luogo ai vincoli:

$$\boxed{\dot{V}_0 = \dot{0},\ \dot{I}_0 = \dot{0}}$$

Il “trasformatore ideale” nel dominio dei fasori



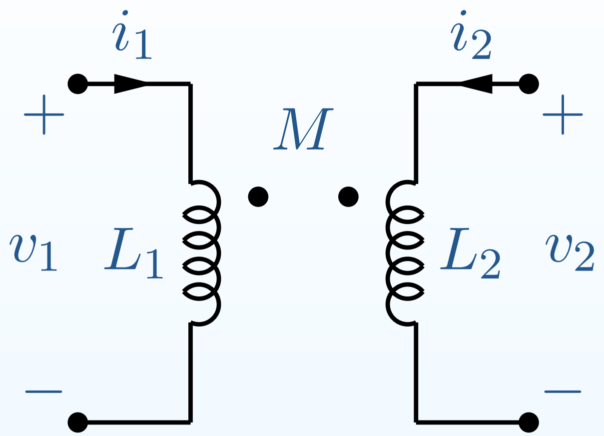
Il comportamento del trasformatore è descritto dalle relazioni:

$$\begin{cases} v_2(t) = n \cdot v_1(t),\ i_2(t) = -\frac{1}{n} i_1(t), \\ v_1(t) = \dot{V}_1 e^{J\omega t},\ v_2(t) = \dot{V}_2 e^{J\omega t}, \\ i_1(t) = \dot{I}_1 e^{J\omega t},\ i_2(t) = \dot{I}_2 e^{J\omega t}, \end{cases}$$

che, combinate, danno luogo ai vincoli:

$$\boxed{\dot{V}_2 = n\dot{V}_1,\ \dot{I}_2 = -\frac{1}{n}\dot{I}_1}$$

Il 2-porte “induttori mutuamente accoppiati (IMA)”



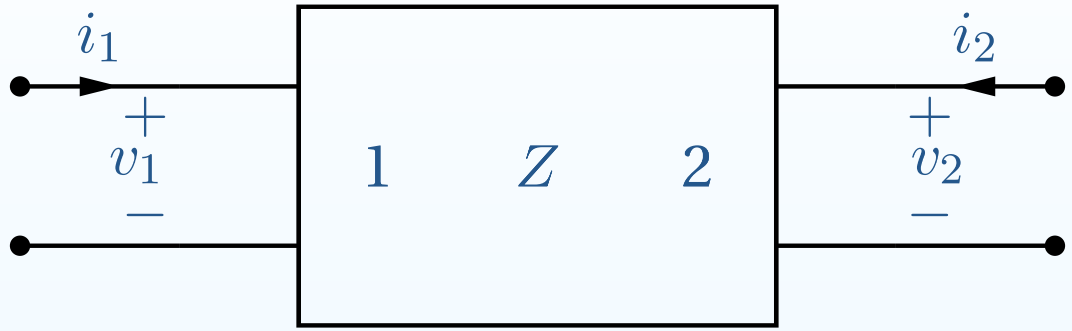
Il comportamento degli IMA è descritto dalle relazioni:

$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt},\ v_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}, \\ v_1(t) = \dot{V}_1 e^{J\omega t},\ v_2(t) = \dot{V}_2 e^{J\omega t}, \\ i_1(t) = \dot{I}_1 e^{J\omega t},\ i_2(t) = \dot{I}_2 e^{J\omega t}, \end{cases}$$

che, combinate, danno luogo ai vincoli:

$$\boxed{\dot{V}_1 = J\omega L_1 \dot{I}_1 + J\omega M \dot{I}_2,\ \dot{V}_2 = J\omega M \dot{I}_1 + J\omega L_2 \dot{I}_2}$$

Il 2-porte "Z" nel dominio dei fasori



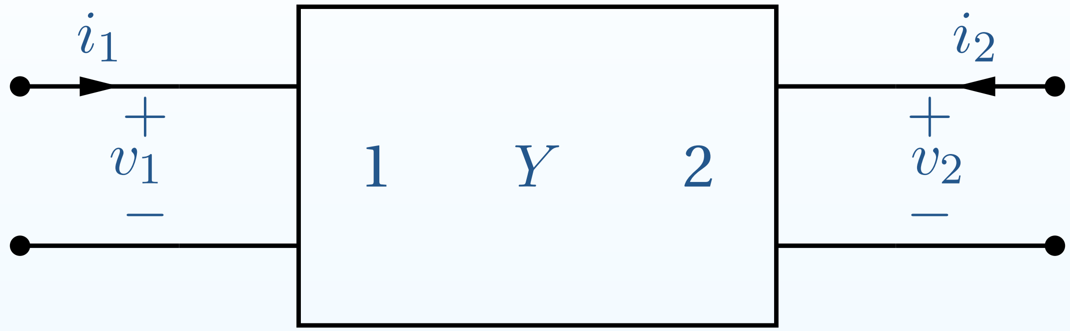
Il comportamento del 2-porte "Z" è descritto dalle relazioni:

$$\begin{cases} v_1(t) = Z_{11} i_1(t) + Z_{12} i_2(t),\; v_2(t) = Z_{21} i_1(t) + Z_{22} i_2(t), \\ v_1(t) = \dot{V}_1 e^{J\omega t},\; v_2(t) = \dot{V}_2 e^{J\omega t}, \\ i_1(t) = \dot{I}_1 e^{J\omega t},\; i_2(t) = \dot{I}_2 e^{J\omega t}, \end{cases}$$

che, combinate, danno luogo ai vincoli:

$$\boxed{\dot{V}_1 = Z_{11} \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}_2,\; \dot{V}_2 = Z_{21} \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2}$$

Il 2-porte "Y" nel dominio dei fasori



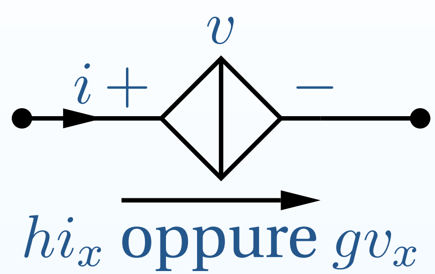
Il comportamento del 2-porte "Y" è descritto dalle relazioni:

$$\begin{cases} i_1(t) = Y_{11}v_1(t) + Y_{12}v_2(t),\ i_2(t) = Y_{21}v_1(t) + Y_{22}v_2(t), \\ v_1(t) = \dot{V}_1 e^{J\omega t},\ v_2(t) = \dot{V}_2 e^{J\omega t}, \\ i_1(t) = \dot{I}_1 e^{J\omega t},\ i_2(t) = \dot{I}_2 e^{J\omega t}, \end{cases}$$

che, combinate, danno luogo ai vincoli:

$$\boxed{\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{V}_1 + Y_{12}\dot{V}_2,\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{V}_1 + Y_{22}\dot{V}_2}$$

I GCC nel dominio dei fasori



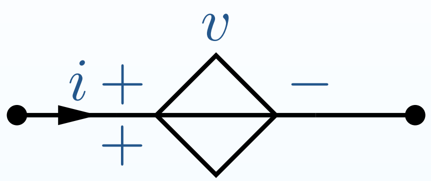
- **Generatore di corrente controllato in tensione (GCCT):** Relazione costitutiva: $i(t) = g \cdot v_x(t)$. Ricordando che deve valere $i(t) = \dot{I}e^{J\omega t}$ e $v_x(t) = \dot{V}_x e^{J\omega t}$ si ottiene:

$$\boxed{\dot{I} = g\dot{V}_x}$$

- **Generatore di corrente controllato in corrente (GCCC):** Relazione costitutiva: $i(t) = h \cdot i_x(t)$. Ricordando che deve valere $i(t) = \dot{I}e^{J\omega t}$ e $i_x(t) = \dot{I}_x e^{J\omega t}$ si ottiene:

$$\boxed{\dot{I} = h\dot{I}_x}$$

I GTC nel dominio dei fasori



ri_x oppure kv_x

- **Generatore di tensione controllato in tensione (GTCT):** Relazione costitutiva: $v(t) = k \cdot v_x(t)$.Ricordando che deve valere $v(t) = \dot{V}e^{J\omega t}$ e $v_x(t) = \dot{V}_x e^{J\omega t}$ si ottiene:

$$\boxed{\dot{V} = k\dot{V}_x}$$

- **Generatore di tensione controllato in corrente (GTCC):** Relazione costitutiva: $v(t) = r \cdot i_x(t)$. Ricordando che deve valere $v(t) = \dot{V}e^{J\omega t}$ e $i_x(t) = \dot{I}_x e^{J\omega t}$ si ottiene:

$$\boxed{\dot{V} = r\dot{I}_x}$$

Leggi di Kirchhoff alle tensioni nel dominio dei fasori

Ricordiamo che le leggi di Kirchhoff alle tensioni (LKT) su una maglia $\mathcal{M}$ si scrivono:

$$\sum_{k\in\mathcal{M}}^{\mathrm{alg}} v_k(t) = 0.$$

Ponendo $v_k(t) = \dot{V}_k e^{J\omega t}$, si ottiene:

$$\sum_{k\in\mathcal{M}}^{\mathrm{alg}} \dot{V}_k e^{J\omega t} = 0,$$

ovvero:

$$\boxed{\sum_{k\in\mathcal{M}}^{\mathrm{alg}} \dot{V}_k = \dot{0}}$$

Leggi di Kirchhoff alle correnti nel dominio dei fasori

Ricordiamo che le leggi di Kirchhoff alle correnti (LKC) su un taglio $\mathcal{T}$ si scrivono:

$$\sum_{k\in\mathcal{T}}^{\text{alg}} i_k(t) = 0.$$

Ponendo $i_k(t) = \dot{I}_k e^{J\omega t}$, si ottiene:

$$\sum_{k\in\mathcal{T}}^{\text{alg}} \dot{I}_k e^{J\omega t} = 0,$$

ovvero:

$$\boxed{\textstyle\sum_{k\in\mathcal{T}}^{\text{alg}} \dot{I}_k = \dot{0}}$$

Riassunto: Relazioni fasori

Le relazioni fasoriali determinate permettono di concludere che, nel passaggio dal dominio del tempo al dominio dei fasori:

- Le relazioni costitutive dei componenti **senza memoria** rimangono formalmente invariate.
- Le leggi di Kirchhoff rimangono formalmente invariate.
- Le relazioni costitutive dei componenti **con memoria** variano formalmente. In particolare, esse *si trasformano da relazioni differenziali a relazioni algebriche*.

Nel dominio dei fasori, dunque, *tutte le equazioni dell'Elettrotecnica sono di tipo algebrico*.

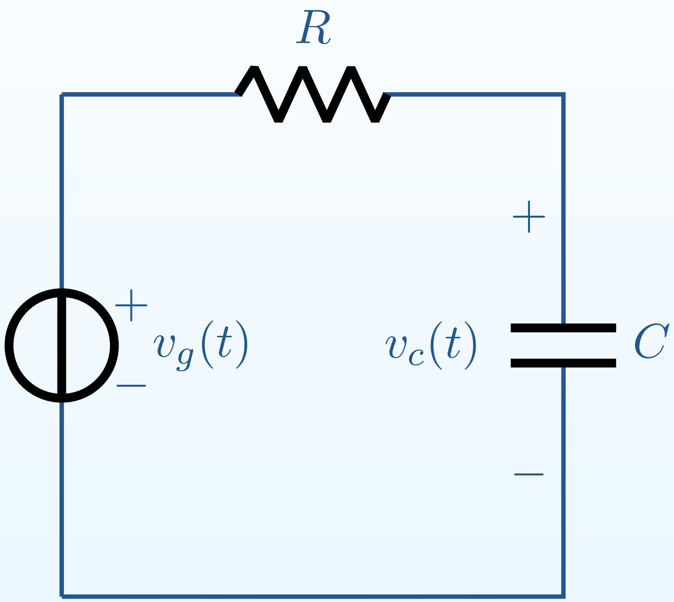
Proprietà ed estensioni

Conviene sottolineare che:

- Poiché nel dominio dei fasori tutte le relazioni sono di tipo algebrico, è possibile recuperare i metodi di analisi su base maglie e su base nodi, che si applicano in maniera del tutto simile nel dominio dei fasori.
- Il metodo dei fasori si può estendere immediatamente a circuiti che contengano più generatori indipendenti, purché tutti sinusoidali e *isofrequenziali* (cioè tutti i generatori abbiano la stessa pulsazione ω).
- Il metodo dei fasori si può estendere a circuiti che contengano più generatori indipendenti sinusoidali ma non isofrequenziali utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti *nel dominio del tempo*.

Calcolo della risposta in frequenza di un circuito

Consideriamo il seguente circuito

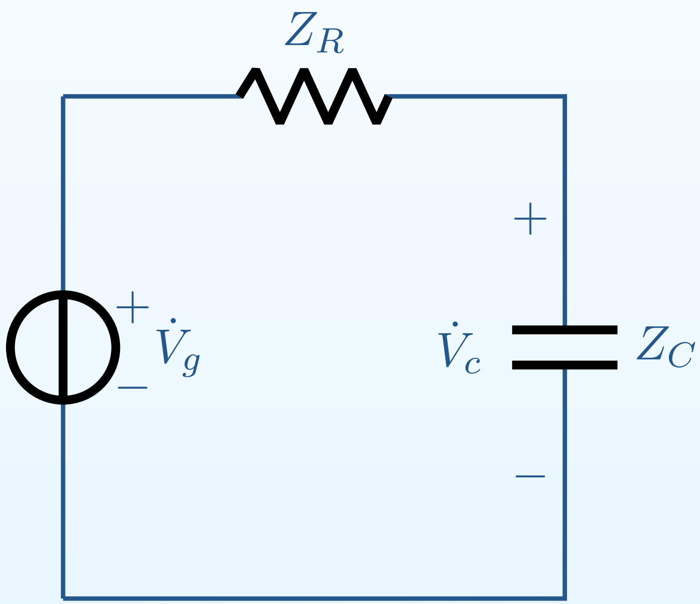


dove si considerano:

- Segnale di ingresso: $v_g(t) = V_g \cos(\omega t + \varphi)$
- Segnale di uscita: $v_c(t)$

Calcolo della risposta in frequenza di un circuito

Vogliamo calcolare la risposta in frequenza $H(\omega)$ di questo circuito tra l'ingresso e l'uscita indicati. Per iniziare, trasformiamo il circuito nel dominio del fasori



dove $Z_{\mathrm{R}} = R$ e $Z_{\mathrm{C}} = \frac{-J}{\omega C}$ e, per definizione, $H(\omega) = \frac{\dot{V}_c}{\dot{V}_g}$.

Calcolo della risposta in frequenza di un circuito

Detta $\dot{I}_m$ la corrente di maglia che scorre in verso orario, la LKTF si scrive:

$$-\dot{V}_g + Z_{\mathrm{R}}\dot{I}_m + Z_{\mathrm{C}}\dot{I}_m = \dot{0} \Rightarrow \dot{I}_m = \frac{\dot{V}_g}{Z_{\mathrm{R}} + Z_{\mathrm{C}}}.$$

da cui si trova che

$$\dot{V}_c = Z_C\dot{I}_m = \frac{Z_C\dot{V}_g}{Z_R + Z_C} = \frac{\dot{V}_g}{1 + J\omega RC}.$$

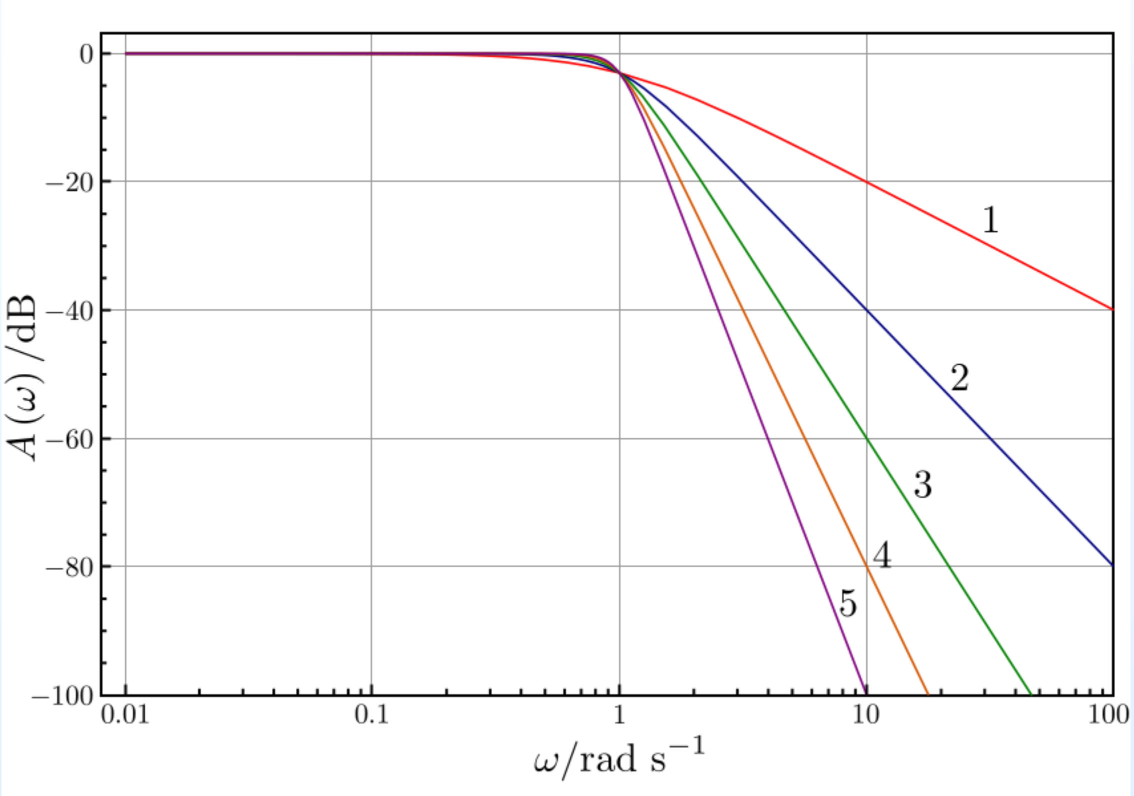
Pertanto, la risposta in frequenza del circuito vale

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + J\omega RC}.$$

Calcolo della risposta in frequenza di un circuito

Valutiamo la risposta in modulo $A(\omega) = |H(\omega)|$:

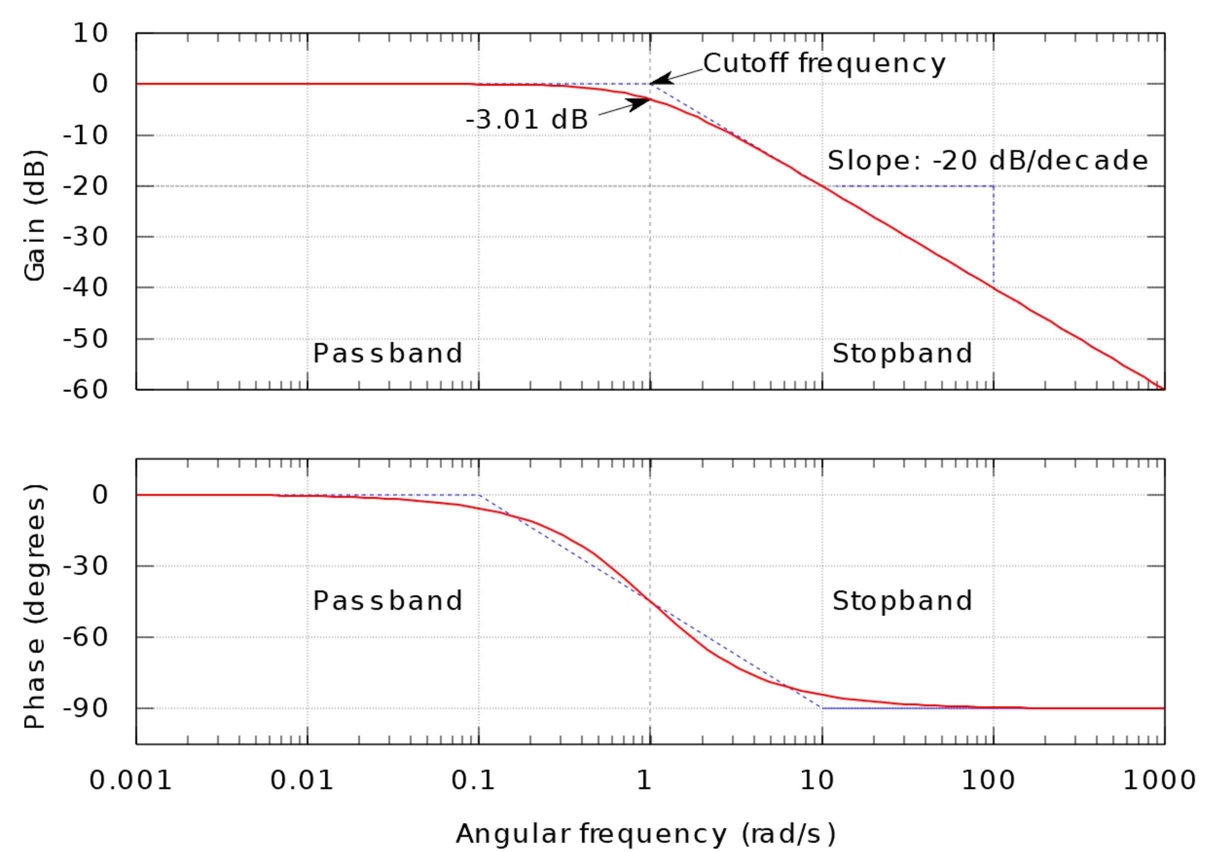
$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$



Calcolo della risposta in frequenza di un circuito

Valutiamo la risposta in fase $\beta(\omega) = \angle H(\omega)$:

$$\beta(\omega) = -\arctan(\omega RC)$$



Calcolo della risposta in frequenza di un circuito

Valutiamo il ritardo di gruppo $\tau(\omega) = -\frac{d\beta(\omega)}{d\omega}$:

$$\tau(\omega) = \frac{RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$