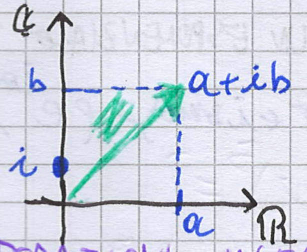
I NUMERI COMPLESSI

I numeri complessi, il cui insieme si indica con $\mathbb{C}$, si introducono per risolvere quelle equazioni non risolvibili nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ e trovano importanza in diverse discipline, tra cui l'elettrotecnica.

Consideriamo l'insieme delle coppie di numeri reali (a, b). Essi compongono il numero complesso $z = a + ib$, dove a è detto coefficiente reale e b è il coefficiente dell'unità immaginaria i $\left(i = \sqrt{-1}\right)$, scritto in forma cartesiana.
Graficamente sono rappresentati nel piano di Gauss

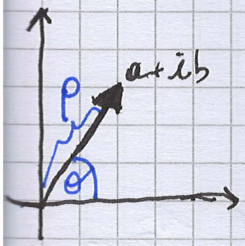


OPERAZIONI IN FORMA CARTESIANA

Siano $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$ due numeri complessi. Valgono le operazioni:

- SOMMA/DIFFERENZA $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i$ ES: $z_1 = 1 + 3i$; $z_2 = 1 - i$ $z_- = 4i$ $z_+ = 2 + 2i$
- PRODOTTO $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 =$
  $= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2 \Longrightarrow z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$
  ESEMPIO: $z_1 = 1 + 3i$; $z_2 = 1 - 2i$ $z_1 \cdot z_2 = (1+3i) \cdot (1-2i) = 1 - 6i^2 - 2i + 3i = 7 + i$
- RAPPORTO $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{a_1 a_2 - a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2 i^2}{a_2^2 - (b_2 i)^2}$
  $= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$ ESEMPIO: $z_1 = 1 + 3i$; $z_2 = 1 - 2i$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-6}{1+4} + \frac{3+2}{1+4} i = -1 + i$

COORDINATE POLARI



Sono un'altra tipologia, a volte più conveniente, per rappresentare i numeri complessi. Limitazioni: $\begin{cases} \rho \geq 0 \\ \theta \in [0, 2\pi) \end{cases}$

Si può dimostrare che $a = \rho \cos\theta$ e $b = \rho \sin\theta$

$\Longrightarrow z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$ è la forma polare di un numero complesso, detta anche forma trigonometrica. Per passare dalla forma trigonometrica alla forma cartesiana basta ricordare le relazioni *. Per passare, invece, dalla cartesiana alla polare ricordare che $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & a < 0 \end{cases}$

QUANDO IL NUMERO È SCRITTO IN FORMA TRIGONOMETRICA, θ È DETTO ARGOMENTO DI Z E ρ È IL MODULO DI Z, INDICATO COME $|z|$

OPERAZIONI IN FORMA TRIGONOMETRICA

$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$; $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

PRODOTTO $z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \rho_1\rho_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)] = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

DIVISIONE $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

FORMA ESPONENZIALE

$z = \rho e^{i\theta}$. È UN'ALTRA TIPOLOGIA, SEPPUR MENO DIFFUSA, PER RAPPRESENTARE I NUMERI COMPLESSI. È MOLTO UTILE PER CALCOLARE UN ESPONENZIALE z^n, RIDOTTO ALLA SEMPLICE FORMA $z^n = \rho^n \cdot e^{in\theta}$ E, DA $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$, SI OTTIENE CHE $z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$ ES: $(1+i)^5 = ?$

$\rightarrow |1+i| = \sqrt{1+(-1)^2} = \sqrt{2}$ $\theta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow z^5 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^5 = (\sqrt{2})^5 \cdot e^{i\cdot\frac{5}{4}\pi} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi}$

SE SI TORNA ALLA FORMA CARTESIANA $\rightarrow 4\sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi} = 4\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right] =$

$= 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4-4i$

RADICI N-ESIME

DATO $w \in \mathbb{C}$, CON $w = \rho e^{i\theta}$, z SI DICE RADICE N-ESIMA DI w SE $z^n = w$. TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA: NELL'INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI, UN'EQUAZIONE DEL TIPO $z^n = w$ PRESENTA SEMPRE n NUMERI COMPLESSI CHE RISOLVONO L'EQUAZIONE E SI PUÒ DIMOSTRARE CHE $\rho = \sqrt[n]{w}$ E $\theta_k = \frac{\rho}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$

ES: $z^3 = -1$ $z_1, z_2, z_n = ?$

3 SOLUZIONI, POICHÉ $n = 3$ $|-1| = 1$

$\rho = \sqrt[3]{1} = 1$ $\theta_0 = \frac{1}{3} + 0$; $\theta_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\pi$; $\theta_2 = \frac{1}{3} + \pi$

$\Rightarrow z_0 = e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_1 = 1\cdot e^{i\pi} = -1$; $z_2 = 1\cdot e^{\frac{5}{3}i\pi} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$