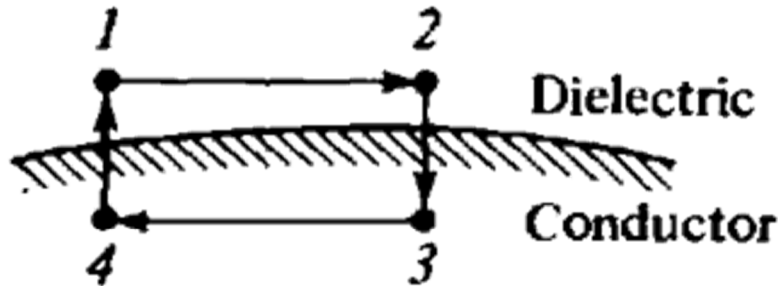


Condizioni al contorno per i
campi statici

Condizioni al contorno per il campo elettrostatico: dielettrico-conduttore ideale



Poiché il campo elettrico è un campo conservativo, la circuitazione lungo il percorso indicato in figura è nulla. Quindi:

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_2^3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_3^4 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_4^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

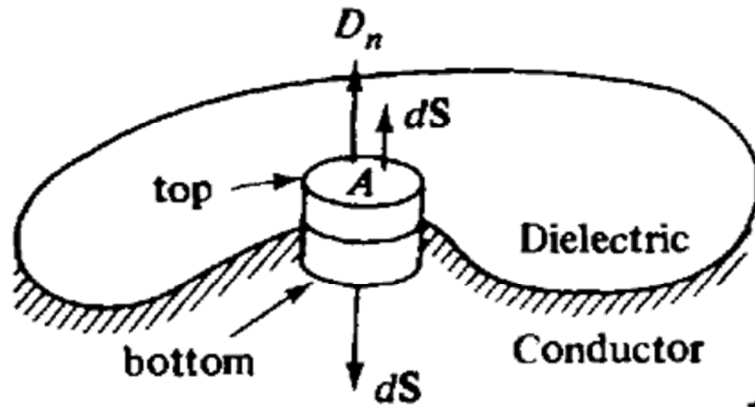
Il terzo integrale si annulla perché siamo all'interno di un conduttore ideale. Se facciamo tendere a zero i percorsi verticali, il cammino diventa praticamente tangente alla superficie ed il secondo ed il quarto integrale si annullano. Risulta quindi

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 E_t d\ell = 0$$

Quindi, il campo elettrico tangente ad un conduttore ideale è sempre nullo.

$$E_{\text{tan}} = 0$$

Condizioni al contorno per il campo elettrostatico: dielettrico-conduttore ideale



Applichiamo il teorema di Gauss ad un cilindretto a cavallo della superficie di separazione:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}}$$

$$\int_{\text{top}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{bottom}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{side}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_A \rho_s dS$$

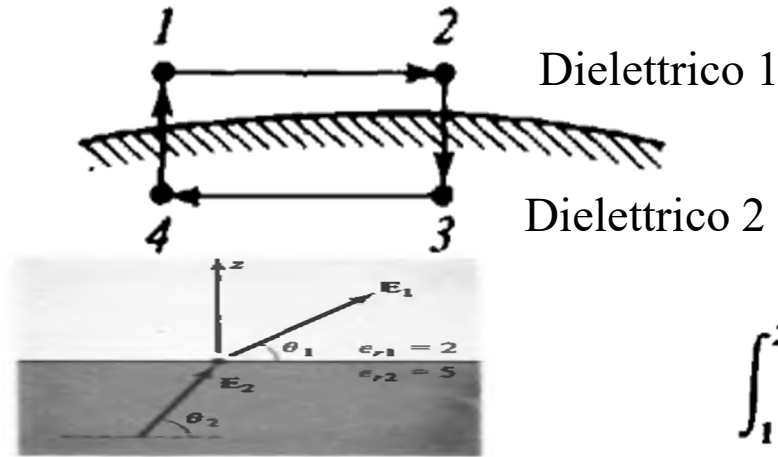
Abbiamo visto prima che il campo elettrico tangente ad un conduttore è nullo. Quindi se facciamo tendere a zero l'altezza del cilindro, il flusso attraverso la sup. laterale è nullo. Inoltre, il campo all'interno del conduttore è nullo e quindi si annulla anche il flusso attraverso la sup. di base inferiore. Rimane

$$\int_{\text{top}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{top}} D_n dS = \oint_A \rho_s dS$$

Quindi il campo elettrico risulta normale al conduttore e pari a:

$$D_n = \rho_s \quad E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon}$$

Condizioni al contorno per il campo elettrostatico: dielettrico-dielettrico 1/2



Dielettrico 1 Poiché il campo elettrico è un campo conservativo, la circuitazione lungo il percorso indicato in figura è nulla. Quindi:

Dielettrico 2

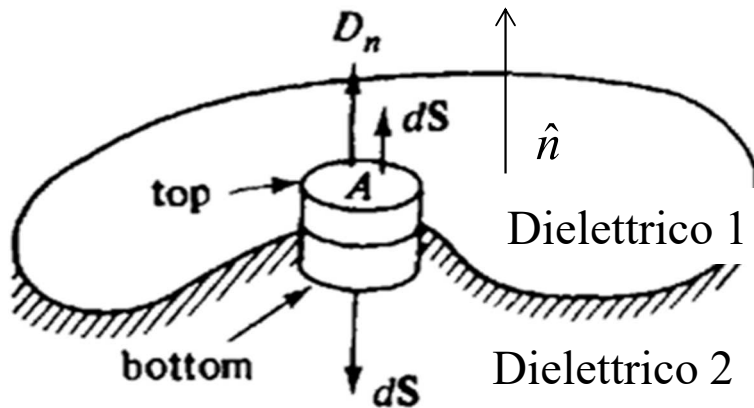
$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_2^3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_3^4 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_4^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Se facciamo tendere a zero i percorsi verticali, il cammino diventa praticamente tangente alla superficie ed il secondo ed il quarto integrale si annullano. Risulta quindi

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_3^4 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 E_{\tan,1} dl - \int_3^4 E_{\tan,2} dl = 0 \Rightarrow E_{\tan,1} = E_{\tan,2}$$

Quindi, il campo elettrico tangente ad una superficie di separazione dielettrica si mantiene costante.

Condizioni al contorno per il campo elettrostatico: dielettrico-dielettrico 2/2



Applichiamo il teorema di Gauss ad un cilindretto a cavallo della superficie di separazione:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}}$$

$$\int_{\text{top}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{bottom}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{side}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_A \rho_s dS$$

Se facciamo tendere a zero l'altezza del cilindro, il flusso attraverso la sup. laterale è nullo. Rimane

$$\int_{\text{top}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{bottom}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{top}} D_{n,1} dS - \int_{\text{bottom}} D_{n,2} dS = \int_S \rho_s dS$$

Cioè definendo \mathbf{n} la normale alla superficie del dielettrico 2 come in figura

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = D_{n,1} - D_{n,2} = \rho_s$$

Quindi, il campo \mathbf{D} normale ad una superficie di separazione dielettrica si mantiene costante soltanto in assenza di cariche superficiali.

Il campo \mathbf{E} normale è sempre discontinuo, anche in assenza di cariche.

Condizioni al contorno per i campi magnetici 1/3

Applichiamo il teorema di Gauss ad un cilindretto a cavallo della superficie di separazione:

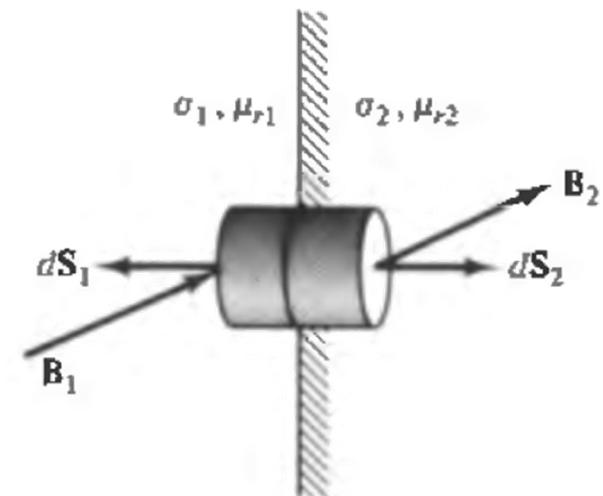
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{end } 1} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \int_{\text{cyl}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{end } 2} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 = 0$$

Se l'altezza del cilindretto tende a zero, il flusso sulla sup. laterale si annulla e le due superfici di base tendono a coincidere. Inoltre, se le sup. di base tendono a zero, possiamo supporre B_{n1} e B_{n2} costanti su dS_1 e dS_2 .

$$\begin{aligned} \int_{\text{end } 1} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \int_{\text{end } 2} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 &= 0 \\ -B_{n1} \int_{\text{end } 1} dS_1 + B_{n2} \int_{\text{end } 2} dS_2 &= 0 \end{aligned}$$

Perciò:

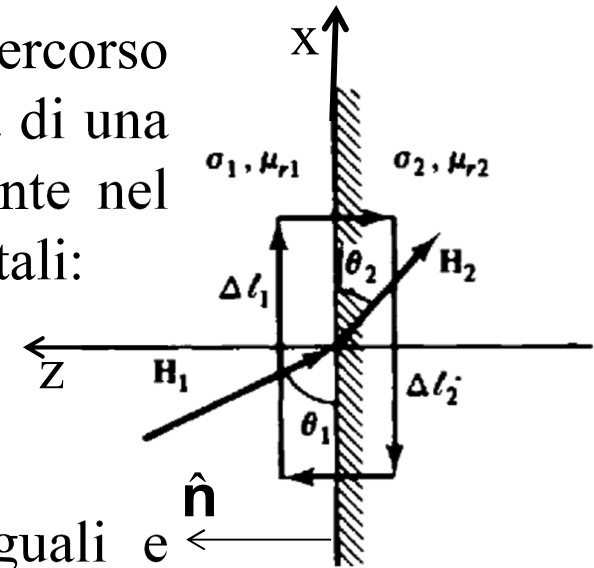
$$B_{n1} = B_{n2}$$



Condizioni al contorno per i campi magnetici 2/3

Applichiamo la legge di Ampere ad un percorso rettangolare che racchiude due mezzi, in presenza di una densità di corrente superficiale J_s lungo y , entrante nel foglio. Facciamo tendere a zero i cammini orizzontali:

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{x,1} \Delta l_1 - H_{x,2} \Delta l_2 = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = I$$



I cammini verticali tendono così ad essere uguali e perciò:

$$(H_{x,1} - H_{x,2}) \Delta l = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = I \Rightarrow H_{x,1} - H_{x,2} = \frac{I}{\Delta l} = J_s$$

Poiché x è la coordinata tangente alla superficie, e definendo \mathbf{n} la normale alla superficie 2 (coincidente con \mathbf{z}), si può scrivere:

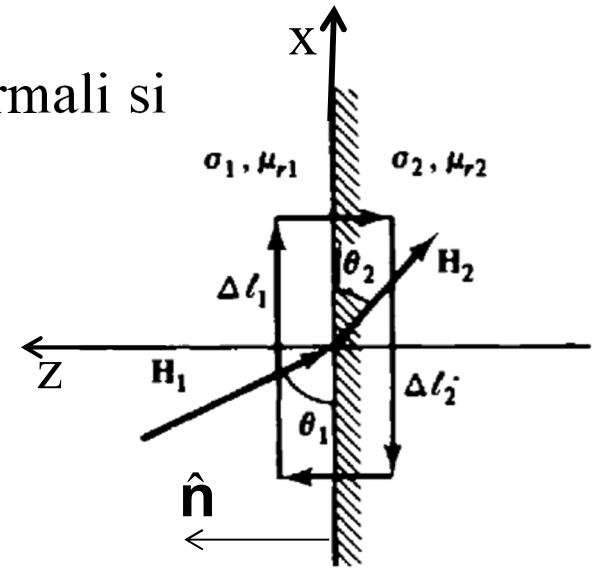
$$H_{tg,1} - H_{tg,2} = J_s \Rightarrow \vec{J}_s = \hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)$$

In assenza di correnti: $H_{tg,1} = H_{tg,2}$

Condizioni al contorno per i campi magnetici 3/3

Combinando le condizioni su campi tangenti e normali si ottiene, in assenza di correnti superficiali:

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}$$



Se il secondo mezzo è un conduttore ideale, $\mathbf{H}_2=0$.
Quindi

$$H_{t1} = J_s \Rightarrow \vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}$$

$$B_{n1} = 0 \Rightarrow \hat{n} \cdot \vec{B} = 0$$