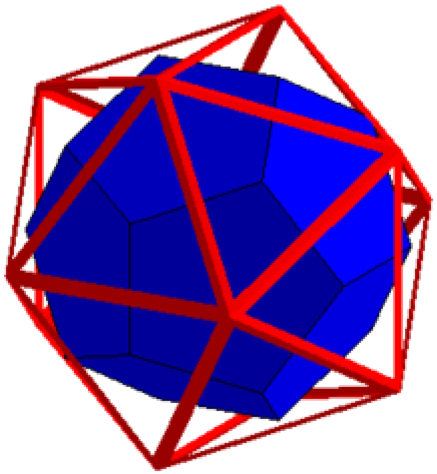
Università Politecnica delle Marche

Teoria della dualità

ver 2.5.0



Fabrizio Marinelli
fabrizio.marinelli@univpm.it
tel. 071 - 2204823

Dualità: motivazione

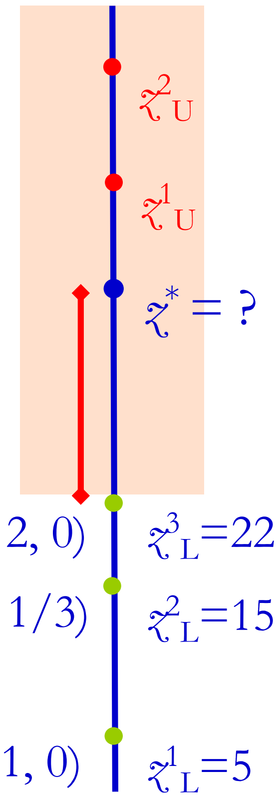
$$z^* = \max z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &\le 1 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 &\le 55 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 &\le 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Errore } E \le (z^1_U - z^3_L)}$$

sovrastime (… non immediate da calcolare e verificare)

Errore $E = (z^* - z^3_L)$?



soluzioni ammissibili (…di solito facili da calcolare e verificare)

$\mathbf{x}^3_L = (3, 0, 2, 0)$

$\mathbf{x}^2_L = (2, 1, 1, 1/3)$

$\mathbf{x}^1_L = (0, 0, 1, 0)$

Dualità: motivazione

- Ad ogni problema P di programmazione lineare

$$P = \max\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \qquad \text{(problema } \textit{primale}\text{)}$$

può sempre essere associato un altro problema D di PL (problema *duale*) che gode di alcune proprietà e che in generale è utile per:

  - stimare l'errore commesso quando si considera una qualsiasi soluzione ammissibile in luogo di una ottima
  - analizzare la stabilità/sensitività delle soluzioni
  - stabilire condizioni di ottimalità e quindi progettare algoritmi esatti

- Preliminari
- Il problema duale
- Alcuni problemi duali notevoli
- Teoria della dualità
- Il simplesso duale
- Analisi post-ottimale
- Interpretazione economica

Preliminari

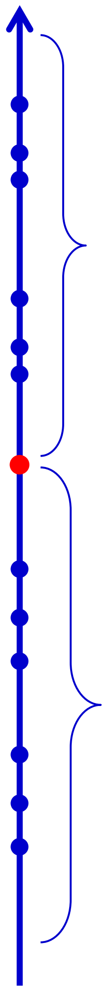
I. *bound primali* e *bound duali*

II. disuguaglianze valide

III. combinazioni coniche

Limitazioni inferiori e superiori

z :valore della f.o.



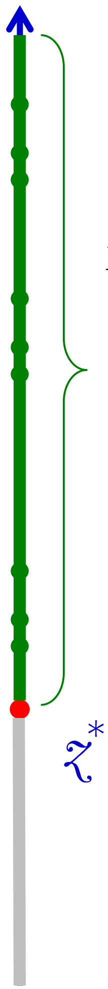
$z_U \in R$ con $z_U \geq z^*$ è detta limitazione superiore
(o *upper-bound*) al valore ottimo z^*

z^* : valore ottimo di un problema di ottimizzazione

$z_L \in R$ con $z_L \leq z^*$ è detta limitazione inferiore
(o *lower-bound*) al valore ottimo z^*

Limitazioni inferiori e superiori

z :valore della f.o.

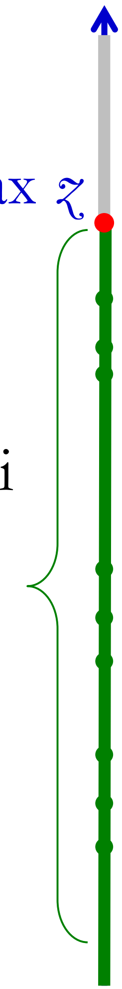


$z^* = \min z$

in un prob. di minimo ogni <u>soluzione ammissibile</u> fornisce una limitazione superiore

z :valore della f.o.

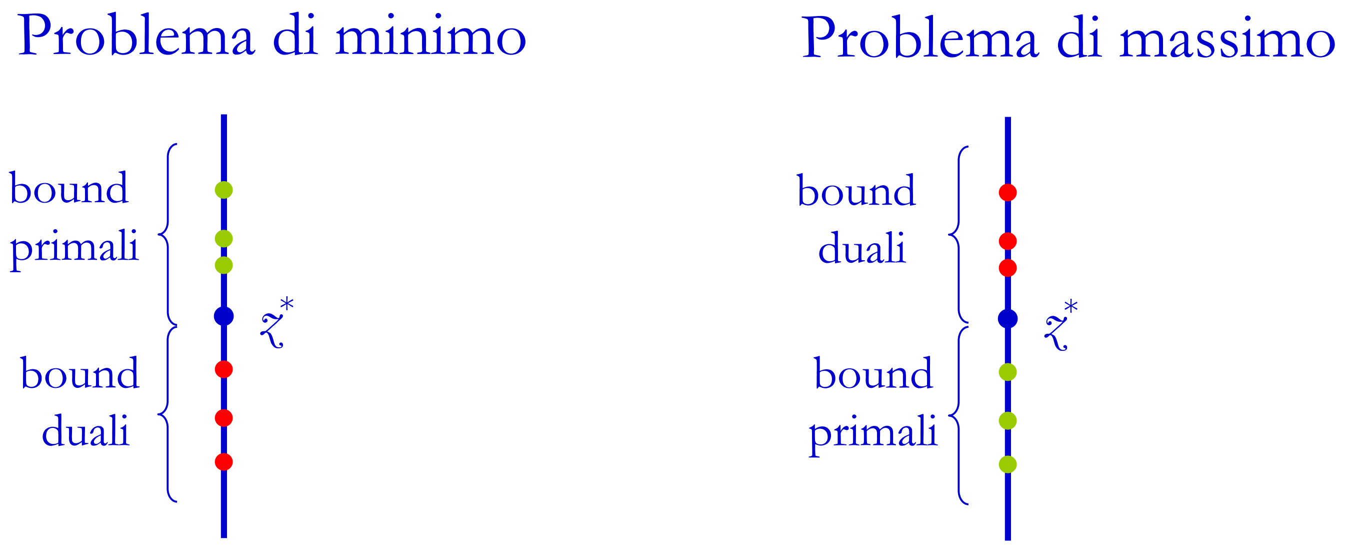
$z^* = \max z$



in un prob. di massimo ogni <u>soluzione ammissibile</u> fornisce una limitazione inferiore

bound primali e bound duali

Indipendentemente dal verso della funzione obiettivo, una limitazione fornita da una soluzione ammissibile è detta *bound primale*. I valori che non sono bound primali si dicono *bound duali* (a esclusione del valore ottimo che è contemporaneamente un bound primale e duale)

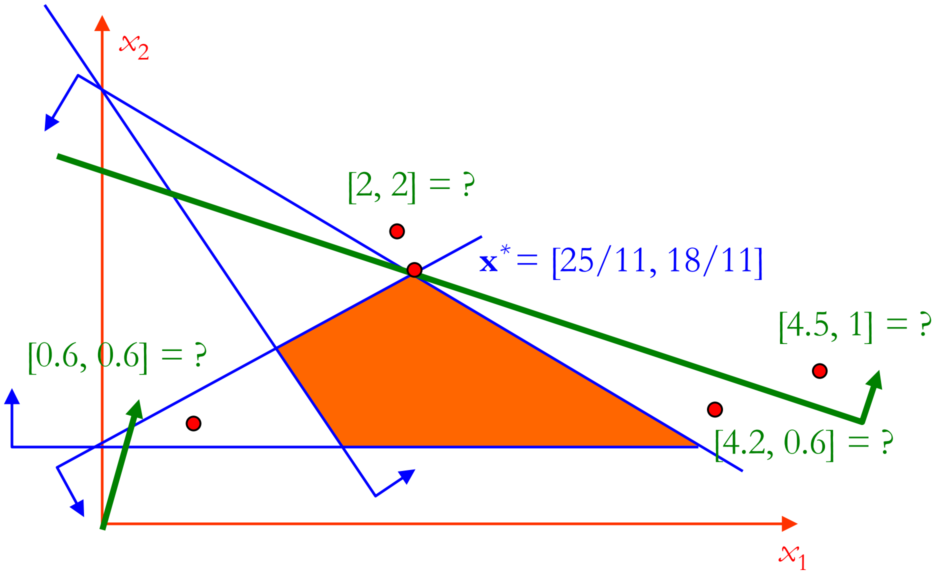


bound primali e bound duali

- Di solito, un bound primale può essere calcolato facilmente e, soprattutto, se ne può verificare la correttezza (basta assicurarsi che la soluzione associata soddisfi tutti i vincoli del problema)

Al contrario, il calcolo e/o la verifica
di un bound duale non sono **immediati**

bound duali: esempio



$$
\begin{aligned}
\max z = x_1 + 3x_2 & \\
6x_1 + 10x_2 &\leq 30 \\
3x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\
x_1 - 2x_2 &\geq -1 \\
x_2 &\geq 1/2
\end{aligned}
$$

- Evidentemente nessuna soluzione ammissibile (eccetto quelle ottime) fornisce un bound duale.
- D'altra parte non tutte le soluzioni inammissibili forniscono bound duali validi

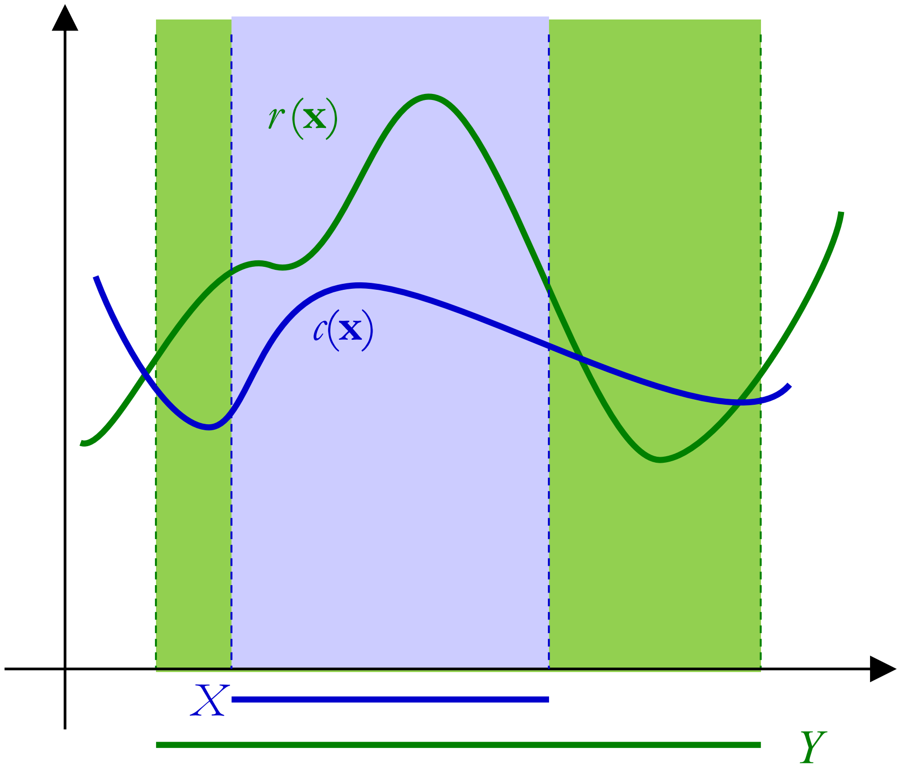
Un bound duale si ottiene utlizzando un ***rilassamento*** del problema e/o il ***problema duale***.

Rilassamento di un problema: definizione

- **[definizione]** Sia P: $\max\{c(\mathbf{x}): \mathbf{x} \in X \subseteq \mathrm{R}^n\}$ un problema di ottimizzazione. Il problema R: $\max\{r(\mathbf{x}): \mathbf{x} \in Y \subseteq \mathrm{R}^n\}$ è un *rilassamento* di P se soddisfa le seguenti condizioni:

a. $X \subseteq Y$
   La regione ammissibile di P
   è contenuta in quella di R

b. $r(\mathbf{x}) \geq c(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in X$
   Nella regione ammissibile di P
   $r(\mathbf{x})$ non è *dominata* da $c(\mathbf{x})$



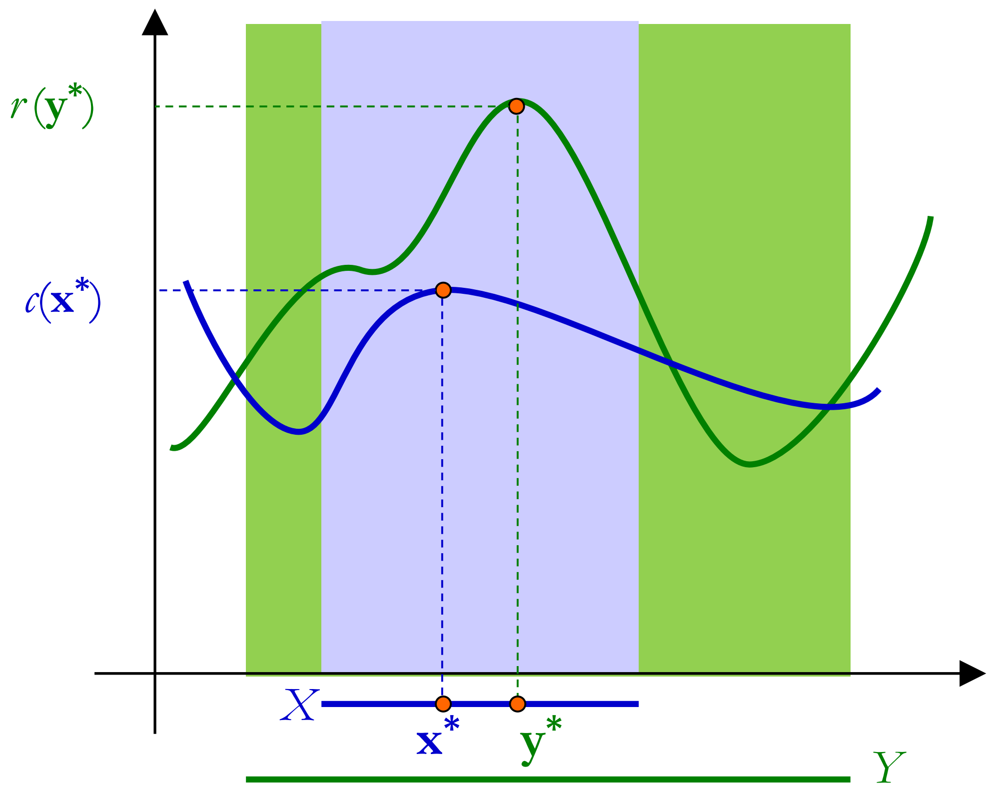
Rilassamento di un problema: proprietà

- **[proprietà 1]** se $Y = \varnothing$ allora $X = \varnothing$ (cond. a), cioè se R è inammissibile lo è anche P.
- **[proprietà 2]** se $\mathbf{y}^*$ è ottima per R e $\mathbf{x}^*$ è ottima per P allora $r(\mathbf{y}^*) \geq c(\mathbf{x}^*)$. La soluzione **ottima** del rilassamento fornisce una *limitazione superiore* di $c(\mathbf{x}^*)$.

Infatti i casi sono due:

- $\mathbf{y}^* \in X$

  si ha $r(\mathbf{y}^*) \geq c(\mathbf{x}^*)$ (cond. b)



Rilassamento di un problema: proprietà

- **[proprietà 1]** se $Y = \varnothing$ allora $X = \varnothing$ (cond. a), cioè se R è inammissibile lo è anche P.
- **[proprietà 2]** se $\mathbf{y}^*$ è ottima per R e $\mathbf{x}^*$ è ottima per P allora $r(\mathbf{y}^*) \geq c(\mathbf{x}^*)$. La soluzione **ottima** del rilassamento fornisce una *limitazione superiore* di $c(\mathbf{x}^*)$.

Infatti i casi sono due:

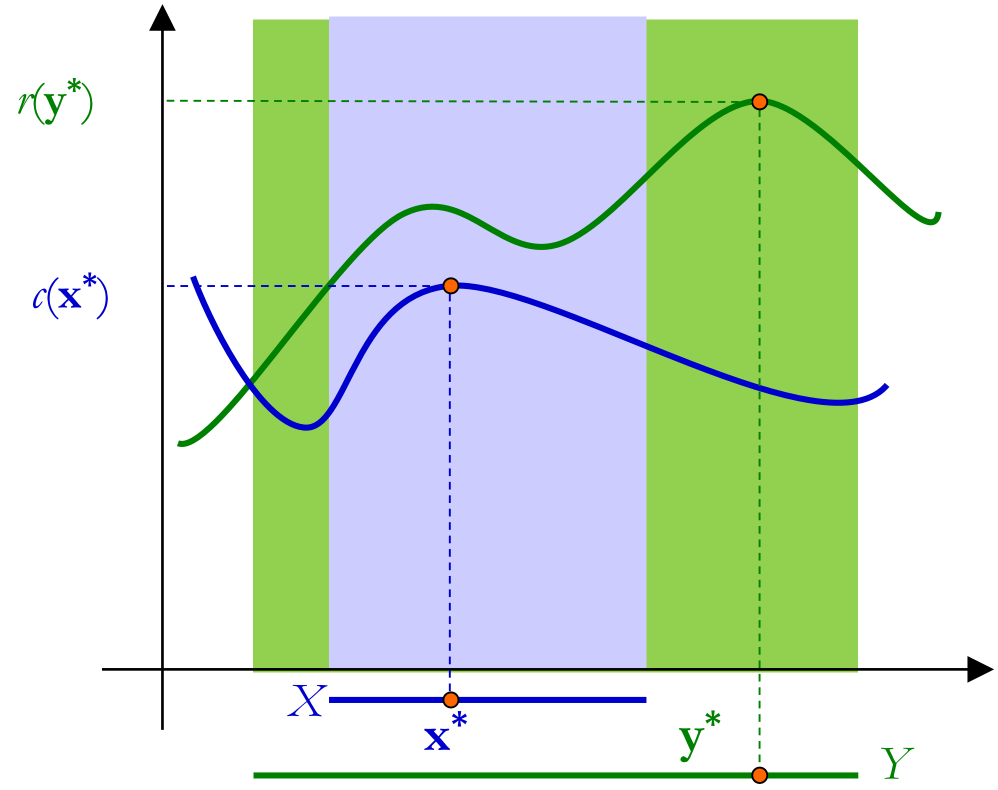
- $\mathbf{y}^* \notin X$

  $r(\mathbf{y}^*) \geq r(\mathbf{x}) \ \forall \mathbf{x} \in X$ (ottimalità di $\mathbf{y}^*$)

  $r(\mathbf{x}) \geq c(\mathbf{x}) \ \forall \mathbf{x} \in X$ (cond. b)

  quindi

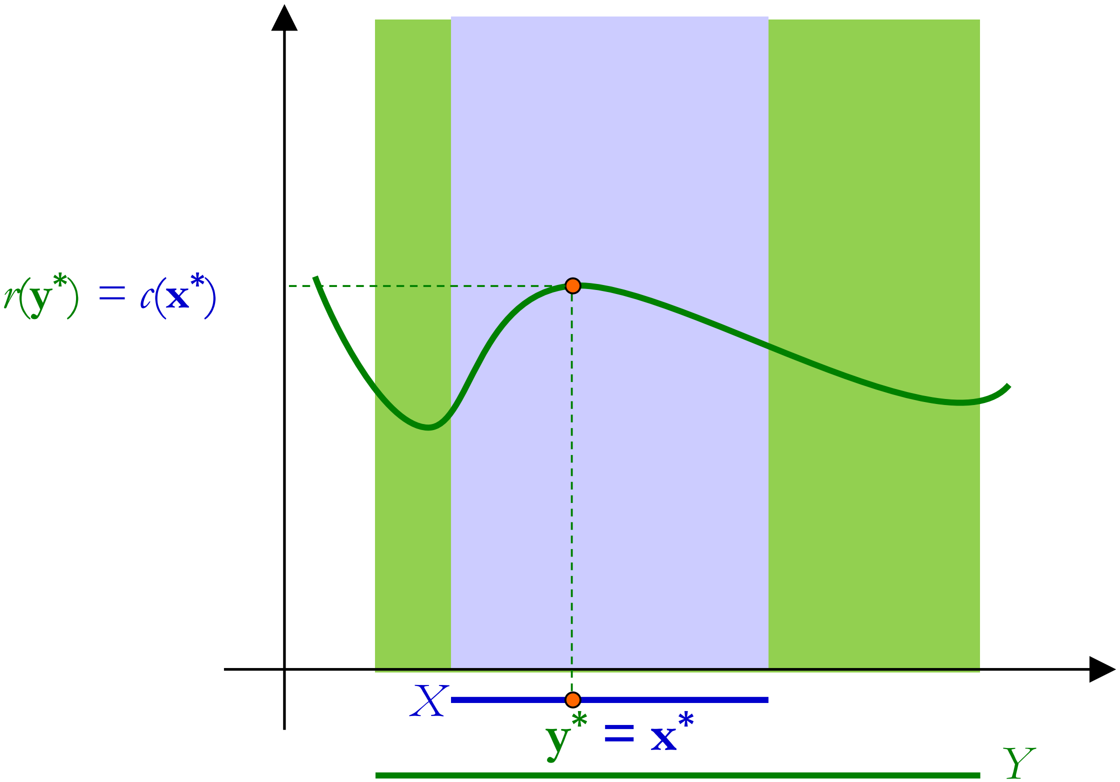
  $r(\mathbf{y}^*) \geq c(\mathbf{x}^*)$



Rilassamento di un problema: proprietà

- **[proprietà 1]** se $Y = \varnothing$ allora $X = \varnothing$ (cond. a), cioè se R è inammissibile lo è anche P.
- **[proprietà 2]** se $\mathbf{y}^*$ è ottima per R e $\mathbf{x}^*$ è ottima per P allora $r(\mathbf{y}^*) \geq c(\mathbf{x}^*)$. La soluzione **ottima** del rilassamento fornisce una *limitazione superiore* di $c(\mathbf{x}^*)$.

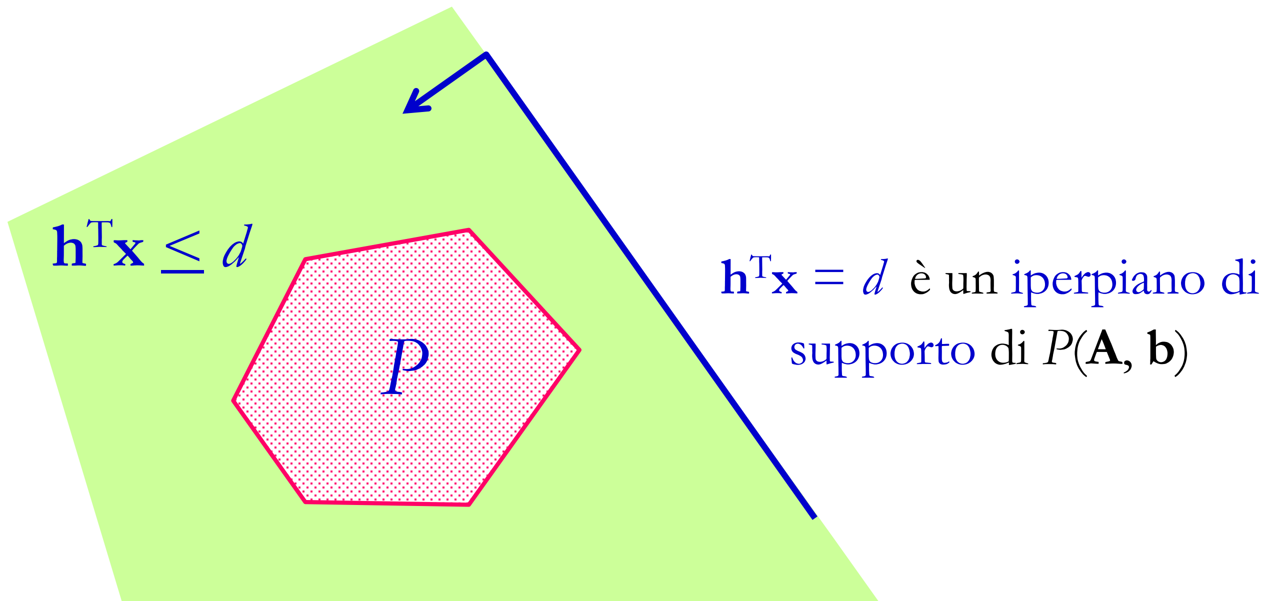
In particolare, se $r(\cdot) = c(\cdot)$ e $\mathbf{y}^* \in X$ allora $\mathbf{y}^*$ è una soluzione ottima di P.



disuguaglianze valide

[Definizione] $\mathbf{h}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq d$ è una disuguaglianza valida per un poliedro $\mathrm{P}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \subseteq \mathrm{R}^n$ se

$$\mathrm{P}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n : \mathbf{h}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq d\}$$



$$\mathrm{P}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \{\mathbf{x} \mid \mathbf{h}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq d\} = \mathrm{P}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$$

disuguaglianze valide

Una disuguaglianza $\mathbf{h}^T\mathbf{x} \leq d$ valida per P(**A**, **b**) è soddisfatta da ogni punto di P(**A**, **b**), quindi

aggiungendo $\mathbf{h}^T\mathbf{x} \leq d$ al sistema di (dis)equazioni $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ che definisce P(**A**, **b**), l'insieme delle soluzioni del sistema non cambia.

combinazioni coniche

[Definizione] il vettore $\mathbf{y} \in R^n$ è combinazione conica di m vettori $\mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_m \in R^n$ se e solo se esistono m numeri reali non negativi $\lambda_1,\ldots, \lambda_m \geq 0$ tali che

$$\boxed{\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i}$$

[Definizione] una disequazione $\mathbf{d}^T\mathbf{x} \leq \delta$ è combinazione conica delle m disequazioni del sistema $\{\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \leq b_i\ ,\quad i = 1,\ldots m\}$ se il vettore $(\mathbf{d}\ ,\ \delta)$ è combinazione conica dei vettori $(\mathbf{a}_i,\ b_i\ ),\quad i = 1,\ldots m$

combinazioni coniche e disuguaglianze valide

[Teorema] Ogni disuguaglianza $\mathbf{h}^T\mathbf{x} \leq d$ ottenuta come combinazione conica dei vettori riga della matrice estesa $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ è una disuguaglianza valida per P(**A**, **b**).

[dim] $\mathbf{h} = \sum \lambda_i \mathbf{a}_i$ e $d = \sum \lambda_i b_i$ con $\lambda_i \geq 0$

$$\mathbf{h}^T\mathbf{x} = \sum \lambda_i \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \underbrace{\leq}_{\mathbf{x} \in P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \text{ e } \lambda_i \geq 0} \sum \lambda_i b_i = d \qquad \forall \mathbf{x} \in P$$

comb. coniche e dis. valide: esempio

Consideriamo il poliedro P(**A**, **b**) definito dal seguente sistema di disequazioni

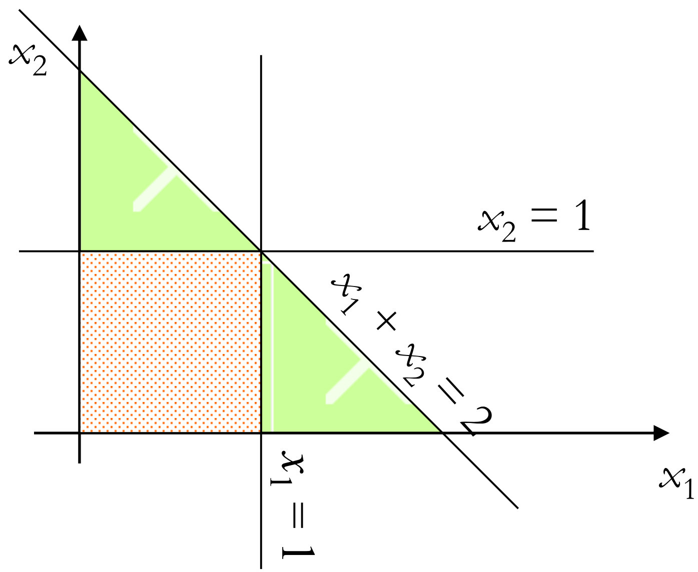
$$\begin{cases} x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

che in forma matriciale assume la seguente forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leq \\ \leq \\ \leq \\ \leq \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

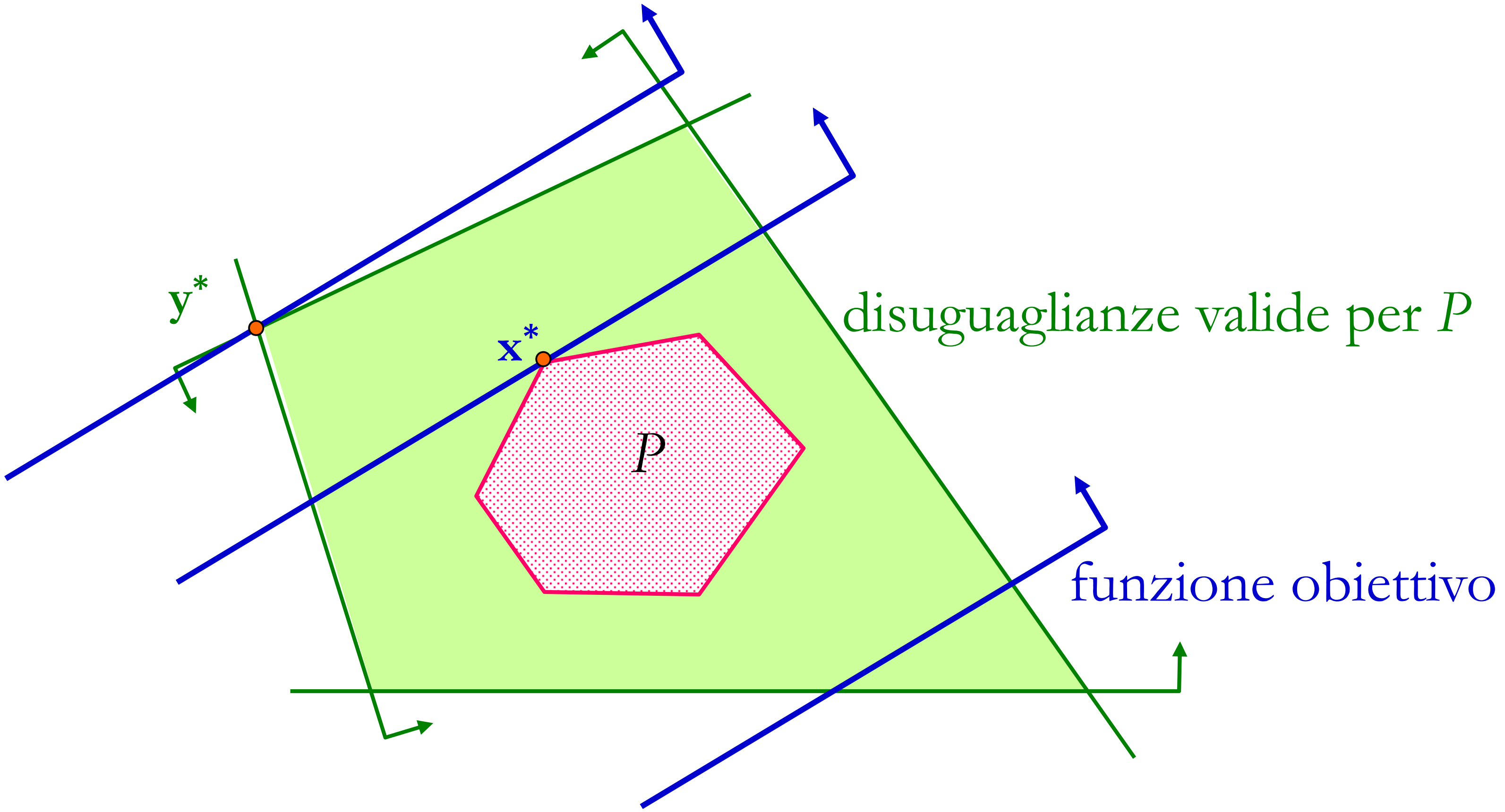
La combinazione conica dei vettori riga di P(**A**, **b**) con coefficienti $\boldsymbol{\lambda} = (1,1,0,0)$ produce la disuguaglianza valida $x_1 + x_2 \leq 2$, infatti

$$\begin{array}{r} 1\,(\ \ 1,\ \ 0,\ 1) + \\ 1\,(\ \ 0,\ \ 1,\ 1) + \\ 0\,(-1,\ \ 0,\ 0) + \\ \underline{0\,(\ \ 0,-1,\ 0)} = \\ (\ \ 1,\ \ 1,\ 2)\ \ \end{array}$$



Disuguaglianze valide e rilassamenti

Sostituendo una parte o a tutti i vincoli di un problema di PL con una o più disuguaglianze valide si ottiene un rilassamento del problema.



Rilassamenti: osservazioni e domande

- Un rilassamento R di P è definito nello stesso spazio di P
- Un rilassamento R è utile se è un problema più facile di P
- R può essere usato per ottenere un bound duale di P solo se risolto all'ottimo

- Come si misura la «qualità» di un rilassamento?

Sommario

- Preliminari
- Il problema duale
- Alcuni problemi duali notevoli
- Teoria della dualità
- Il simplesso duale
- Analisi post-ottimale
- Interpretazione economica

Stima dell'errore

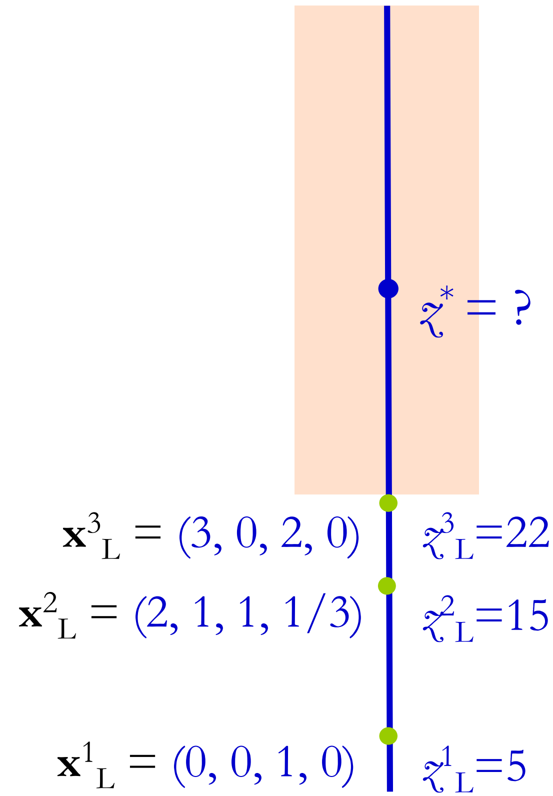
$$z^* = \max z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1$$

$$5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$



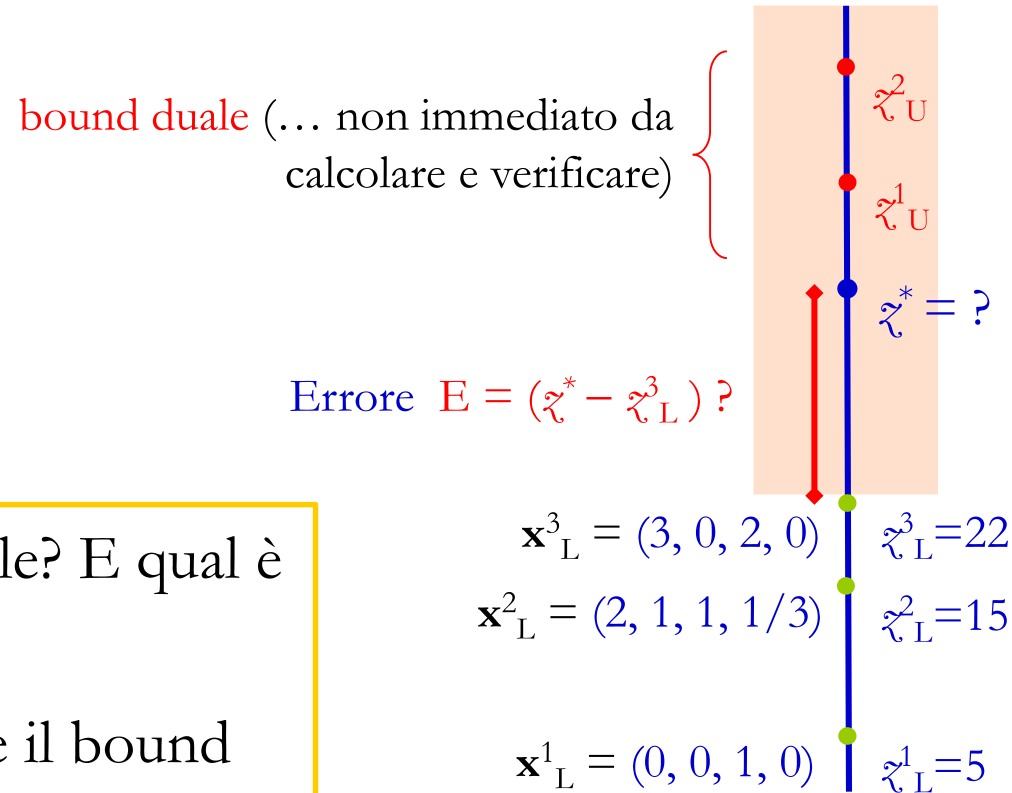
Come si valuta la qualità di una soluzione ammissibile se non è noto il valore di una soluzione ottima?

Stima dell'errore

$$\overbrace{\boxed{E \leq (z^1_U - z^3_L)}}^{\text{Stima dell'errore}}$$

$$z^* = \max z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &\leq 1 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 &\leq 55 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$



- Come si calcola un bound duale? E qual è il miglior bound duale?
- La stima dell'errore è buona se il bound duale z^1_U è prossimo a z^*

Calcolo di un bound duale

$$z^* = \max z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1$$

$$5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Una combinazione conica dei vincoli che «domina la funzione obiettivo termine a termine», può essere utilizzata per derivare un bound duale

$$\lambda_1 = 0 \quad (1, -1, -1, 3, 1) \; +$$

$$\lambda_2 = 2 \quad (5, 1, 3, 8, 55) \; +$$

$$\lambda_3 = 1/2 \quad (-1, 2, 3, -5, 3) \; =$$

$$(9.5, 3, 7.5, 13.5, 111.5)$$

$$9.5x_1 + 3x_2 + 7.5x_3 + 13.5x_4 \leq 111.5$$

E' una disuguaglianza valida, quindi è soddisfatta da tutte le soluzioni ammissibili del problema. Inoltre…

Calcolo di un bound duale

$$z^* = \max z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1$$

$$5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Una combinazione conica dei vincoli che «domina la funzione obiettivo termine a termine», può essere utilizzata per derivare un bound duale

$$9.5x_1 + 3x_2 + 7.5x_3 + 13.5x_4 \leq 111.5$$

$$4x_1 \leq 9.5x_1$$

$$x_2 \leq 3x_2$$

$$5x_3 \leq 7.5x_3$$

$$3x_4 \leq 13.5x_4$$

$$\boxed{x_i \geq 0}$$

$$z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 9.5x_1 + 3x_2 + 7.5x_3 + 13.5x_4 \leq 111.5$$

dominanza termine a termine

$$\boxed{z^* \leq 111.5}$$

108.5 è un upper bound z_U valido

Calcolo di un bound duale: si può fare meglio?

$$z^* = \max z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1$$

$$5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$\begin{array}{lllllll}
\lambda_1 = 0 & (& 1, & -1, & -1, & 3, & 1) \; + \\
\lambda_2 = 1 & (& 5, & 1, & 3, & 8, & 55) \; + \\
\lambda_3 = 1 & (& -1, & 2, & 3, & -5, & 3) \; = \\
 & (& 4, & 3, & 6, & 3, & 58)
\end{array}$$

$$z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq$$
$$4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq 58$$

$$\boxed{z^* \leq 58 < 111.5}$$

Come si può ottenere il <u>miglior</u> bound duale?

Uhm… sembra un problema di ottimizzazione…

Il miglior bound duale

- Variabili:
  coefficienti della combinazione conica dei vincoli dei problema

- Vincoli:
  la combinazione conica deve dominare la funzione obiettivo termine a termine

- Funzione obiettivo:
  minimizzare il termine noto della combinazione conica

Il miglior bound duale

$$z^* = \max z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$$

$$\begin{array}{llr}
y_1\,(x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4) & & \le 1\,y_1 \\
y_2\,(5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4) & & \le 55\,y_2 \\
y_3\,(-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4) & & \le 3\,y_3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 & \ge 0 \\
 & y_1, y_2, y_3 \ \ge 0 &
\end{array}$$

La combinazione conica generale è:

$$\begin{aligned}
& y_1\,(x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4) + \\
& y_2\,(5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4) + \\
& y_3\,(-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4) \le y_1 + 55y_2 + 3y_3
\end{aligned}$$

… e raggruppando rispetto alle variabili x

Il miglior bound duale

$$z^* = \max z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$$

$$\begin{array}{lll}
y_1\,(x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4) & \leq 1 & y_1 \\
y_2\,(5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4) & \leq 55 & y_2 \\
y_3\,(-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4) & \leq 3 & y_3 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0 & \\
y_1, y_2, y_3 \geq 0 & &
\end{array}$$

La combinazione conica generale è:

$$\boxed{\begin{array}{l}
x_1\,(y_1 + 5y_2 - y_3) + \\
x_2\,(-y_1 + y_2 + 2y_3) + \\
x_3\,(-y_1 + 3y_2 + 3y_3) + \\
x_4\,(3y_1 + 8y_2 - 5y_3) \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3
\end{array}}$$

Il miglior bound duale

La combinazione conica generale domina termine a termine la funzione obiettivo se:

$$\begin{aligned} 4x_1 &\le x_1(y_1+5y_2-y_3) \\ x_2 &\le x_2(-y_1+y_2+2y_3) \\ 5x_3 &\le x_3(-y_1+3y_2+3y_3) \\ 3x_4 &\le x_4(3y_1+8y_2-5y_3) \end{aligned}$$

cioè se:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1+5y_2-y_3 &\ge 4 \\ -y_1+y_2+2y_3 &\ge 1 \\ -y_1+3y_2+3y_3 &\ge 5 \\ 3y_1+8y_2-5y_3 &\ge 3 \end{aligned}}$$

Ogni vettore $\mathbf{y} \ge \mathbf{0} \in R^3$ che soddisfa queste condizioni fornisce il bound duale

$$\boxed{w(\mathbf{y}) = y_1+55y_2+3y_3}$$

La miglior comb. conica è quindi quella che minimizza $w(\mathbf{y})$

Problema *duale*

La miglior comb. conica si ottiene risolvendo il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{aligned}
(D)\quad w^* = \min\ & y_1 + 55y_2 + 3y_3 \\
& y_1 + 5y_2 - y_3 \geq 4 \\
& -y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1 \\
& -y_1 + 3y_2 + 3y_3 \geq 5 \\
& 3y_1 + 8y_2 - 5y_3 \geq 3 \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Il problema (D) è detto

problema duale

del problema (P)

$$
\begin{aligned}
(P)\quad z^* = \max z = & 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\
& x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1 \\
& 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55 \\
& -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema *duale*

Il problema *duale* D di un problema di PL P (detto problema *primale*) consiste nel determinare i coefficienti λ che, tra tutte le disuguaglianze valide (cioè le comb. coniche di vincoli) che dominano la funzione obiettivo di P, corrispondono a quella che produce il miglior bound duale per P.

Problema *duale* e *rilassamenti*

Il problema duale (D) <u>non è un rilassamento</u> di (P)

	Duale	Rilassamento
utilità	fornisce un bound duale, ma non solo…	fornisce un bound duale
spazio	in genere di dimensione diversa da quello di *P*	Lo stesso spazio di *P*
validità del bound	Una qualsiasi soluzione ammissibile	Esclusivamente la soluzione ottima

- Qual è la «qualità» del bound duale?

Problema *duale* e moltiplicatori di Lagrange

- Il problema duale (D) può essere interpretato come problema di scelta ottimale di parametri $\mathbf{y}$ di una classe di rilassamenti $L(\mathbf{y})$ di (P) che si ottengono con la tecnica dei *moltiplicatori di Lagrange*.

- Il metodo dei *moltiplicatori di Lagrange* è alla base della soluzione dei problemi di ottimizzazione non lineare vincolati.

Il metodo dei *moltiplicatori di Lagrange*

- Si applica a problemi di ottimizzazione con vincoli di uguaglianza

$$(P)\quad z^* = \min f(\mathbf{x}) \qquad g(\mathbf{x}) = b$$

- **[idea]** L'ottimo di ottiene quando una curva di livello di $f(\mathbf{x})$ tocca in modo tangente $g(\mathbf{x}) = b$, cioè quando i gradienti delle due funzioni sono *proporzionali*:

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) = b \end{cases}$$

Il metodo dei *moltiplicatori di Lagrange*

$$
\text{(P)} \quad z^* = \min x^2 + y^2
$$
$$
x + y = 1
$$

Rilassamento *Lagrangiano*

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{P}) \quad z^* = \max\ & x^2 + w^2 \\
& x + w \le 1 \\
& x, w \ge 0
\end{aligned}
$$

[Idea] il vincolo può essere violato ma a un certo prezzo.

In luogo di (P) consideriamo il problema di massimizzazione <u>non vincolato</u>

$$\mathrm{P_U}(y)\text{: } \max L(x, w, y) = x^2 + w^2 + y(1 - x - w)$$

espresso in funzione di uno scalare $y \ge 0$ (*moltiplicatore di Lagrange*).

[osservazioni]

- Per ogni $y \ge 0$ e $(x, w) \notin \mathrm{P}$, il termine $y(1 - x - w)$ è il prezzo che si paga per aver violato il vincolo rimosso.
- Per ogni $y \ge 0$ e $(x, w) \in \mathrm{P}$, $x^2 + w^2 + y(1 - x - w) \ge x^2 + w^2$, cioè $\mathrm{P_U}(y)$ fornisce una limitazione superiore a z^*.

Rilassamento *Lagrangiano*

Quindi, per ogni $y \geq 0$ fissato, $P_U(y)$ è un *rilassamento* di (P). Infatti:

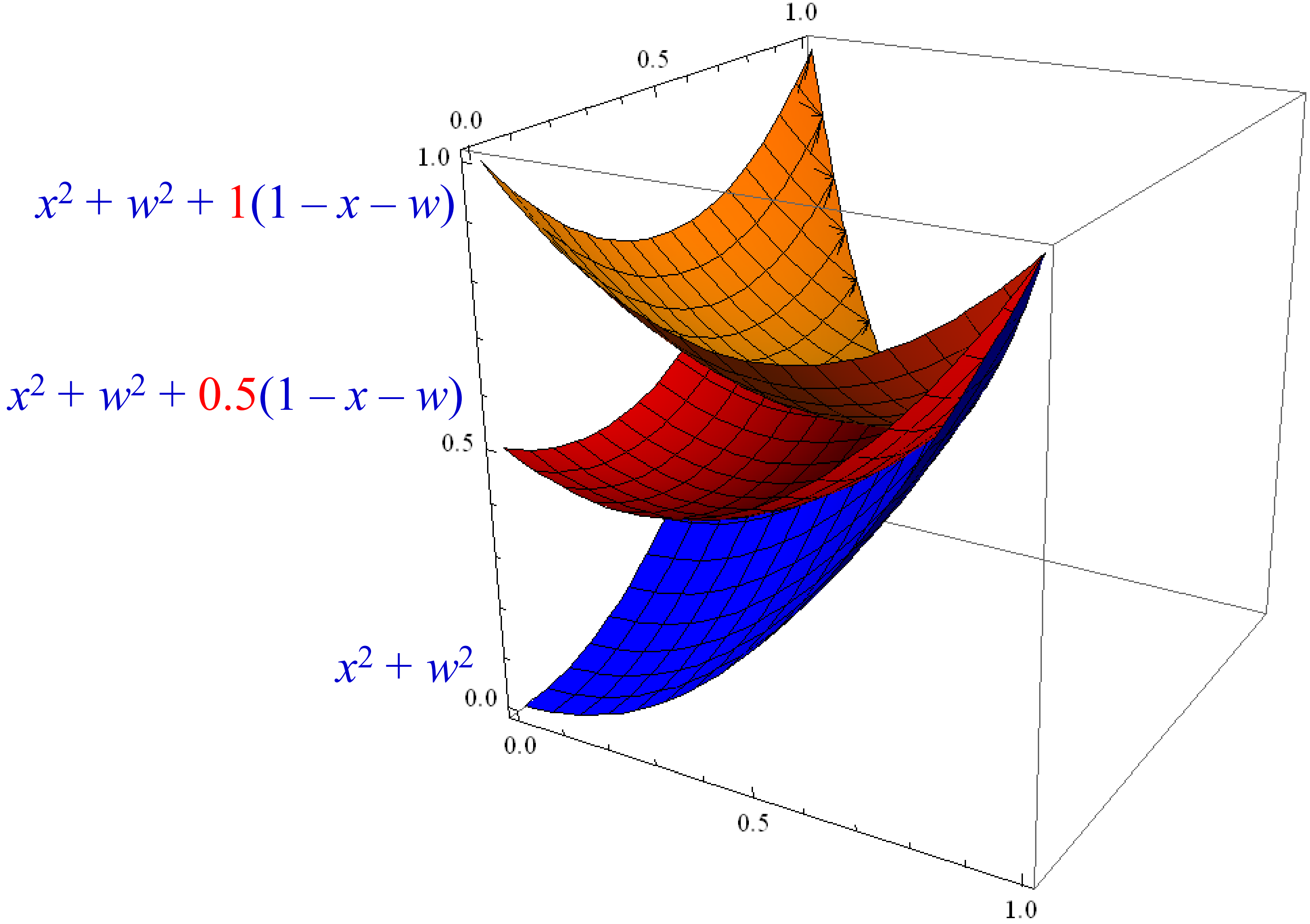
$$\{(x, w) \in R^2 \mid x + w \leq 1\} \subset \{(x, w) \in R^2\}$$

$$x^2 + w^2 + y(1 - x - w) \geq x^2 + w^2 \qquad \forall\, (x, w) \in P$$

e questo vale in particolare per le soluzioni ottime

Per ogni $y \geq 0$ fissato, il massimo z_U di $P_U(y)$ è un <u>bound duale</u> al valore ottimo z^* di (P).

Rilassamento *Lagrangiano*



Rilassamento Lagrangiano nella PL

- Dato un problema di PL (*primale*) e una sua soluzione ottima $\mathbf{x}^*$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{P}) \quad z^* = \max\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
& \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange ai vincoli $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ del problema. Il problema $\mathrm{P_U}(\mathbf{y})$ che si ottiene ha la seguente forma:

fattore di penalità

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P_U}(\mathbf{y}):\ w(\mathbf{y}) = \max\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \ldots \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Rilassamento Lagrangiano nella PL (cont.)

$$P_U(\mathbf{y}): w(\mathbf{y}) = \max \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{y}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

$P_U(\mathbf{y})$ è un *rilassamento* di (P) per ogni $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$.

Quindi per ogni vettore fissato $\mathbf{y}' \geq \mathbf{0}$, il problema $P_U(\mathbf{y}')$ fornisce un *bound duale* $w(\mathbf{y}')$ al problema (P). Infatti $\forall \mathbf{x} \in P$

$$\boxed{w(\mathbf{y}') = \max_{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}} [\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{y}'^{\,T}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})] \quad \geq \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x}}$$

La relazione vale in particolare per la soluzione ottima $\mathbf{x}^*$:

$$w(\mathbf{y}') \quad \geq \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*$$

Rilassamento Lagrangiano nella PL (cont.)

$$P_U(\mathbf{y}):\ w(\mathbf{y}) = \max\ \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{y}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

Il miglior *bound duale* (limitazione superiore in questo caso) si ottiene con il vettore **y**' che minimizza $w(\mathbf{y})$, cioè è la soluzione del problema (*duale*)

$$\text{(D)} \qquad w^* = \min_{\mathbf{y} \geq \mathbf{0}}\ w(\mathbf{y})$$

$$\text{(D)} \qquad w^* = \min_{\mathbf{y} \geq \mathbf{0}} \max_{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}}\ \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{y}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})$$

Rilassamento Lagrangiano nella PL (cont.)

$$w^* = \min_{\mathbf{y} \geq \mathbf{0}} \max_{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}} \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{y}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})$$

$\mathbf{y}^T\mathbf{b}$ è costante rispetto a $\mathbf{x}$, quindi…

$$w^* = \min \mathbf{y}^T\mathbf{b} + \max \boxed{(\mathbf{c} - \mathbf{A}^T\mathbf{y})}^T\mathbf{x}$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Se $\mathbf{c} - \mathbf{A}^T\mathbf{y} > \mathbf{0}$, e dato che $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, si ottiene una limitazione superiore inutile, dato che:

$\max\ (\mathbf{c} - \mathbf{A}^T\mathbf{y})^T\mathbf{x} \to \infty$,

quindi $w^* \to \infty$

Dato che interessa il <u>più piccolo</u> upper bound si impone $(\mathbf{c} - \mathbf{A}^T\mathbf{y}) \leq \mathbf{0}$.

Ma se $(\mathbf{c} - \mathbf{A}^T\mathbf{y}) \leq \mathbf{0}$, e dato che $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, banalmente $\max\ (\mathbf{c} - \mathbf{A}^T\mathbf{y})^T\mathbf{x} = 0$,

Quindi la funzione obiettivo si riduce a $w^* = \min \mathbf{y}^T\mathbf{b}$

Rilassamento Lagrangiano nella PL (cont.)

In conclusione abbiamo

$$
\begin{aligned}
\text{(D)}\ w^* = \min\ & \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \\
& \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{c} \\
& \mathbf{y} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Esempio

$$z^* = \max 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1$$

$$5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$w(\mathbf{y}) = \max 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 + y_1(1 - x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4)$$

$$+ y_2(55 - 5x_1 - x_2 - 3x_3 - 8x_4)$$

$$+ y_3(3 + x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 5x_4)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Esempio (cont.)

$$w(\mathbf{y}) = \max 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 + y_1(1 - x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4)$$
$$+ y_2(55 - 5x_1 - x_2 - 3x_3 - 8x_4)$$
$$+ y_3(3 + x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 5x_4)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

$$w(\mathbf{y}) = y_1 + 55y_2 + 3y_3 + \max x_1(4 - y_1 - 5y_2 + y_3)$$
$$+ x_2(1 + y_1 - y_2 - 2y_3)$$
$$+ x_3(5 + y_1 - 3y_2 - 3y_3)$$
$$+ x_4(3 - 3y_1 - 8y_2 + 5y_3)$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Esempio (cont.)

$$
\begin{aligned}
w(\mathbf{y}) = y_1 + 55y_2 + 3y_3 + \max\ & x_1(4 - y_1 - 5y_2 + y_3) \\
& + x_2(1 + y_1 - y_2 - 2y_3) \\
& + x_3(5 + y_1 - 3y_2 - 3y_3) \\
& + x_4(3 - 3y_1 - 8y_2 + 5y_3) \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(D) = \min w(\mathbf{y}) \quad = \min\ & y_1 + 55y_2 + 3y_3 \\
& + y_1 + 5y_2 - y_3 \geq 4 \\
& - y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1 \\
& - y_1 + 3y_2 + 3y_3 \geq 5 \\
& + 3y_1 + 8y_2 - 5y_3 \geq 3 \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Regole generali per la costruzione del duale

Primale in forma di massimo

Regola 1: Il duale è in forma di minimo.

Regola 2: Esiste una variabile duale y_i per ogni vincolo primale:
la variabile y_i sarà

- ≥ 0 se il vincolo primale è di $\leq$
- ≤ 0 se il vincolo primale è di $\geq$
- non vincolata in segno se il vincolo primale è di $=$

Regole generali per la costruzione del duale

Regola 3: i coefficienti della funzione obiettivo duale sono i termini noti del primale. I termini noti del duale sono i coefficienti della funzione obiettivo primale.

Regola 4: Esiste un vincolo duale per ogni variabile primale x_j: il vincolo sarà

- di $\geq$ se x_j è ≥ 0
- di $\leq$ se x_j è ≤ 0
- di $=$ se x_j è non vincolata in segno.
- I coefficienti dell'*i*-esimo vincolo del duale sono i coefficienti della variabile x_i nel primale (la matrice dei coefficienti del duale e la trasposta della matrice dei coefficienti del primale)

Schema riassuntivo

PRIMALE (P)	min	max	DUALE (D)
Coeff. costo	$\mathbf{c}$	$\mathbf{c}$	Termini noti
Termini noti	$\mathbf{b}$	$\mathbf{b}$	Coeff. costo
Vincoli	$\geq b_i$ $\leq b_i$ $= b_i$	≥ 0 ≤ 0 libera	Variabili
Variabili	≥ 0 ≤ 0 Libera	$\leq c_j$ $\geq c_j$ $= c_j$	Vincoli
Coefficienti	a_{ij} $\mathbf{A}(m \times n)$	a_{ji} $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(n \times m)$	Coefficienti

Costruzione del duale: tips

1) Scrivere a fianco di ogni vincolo la corrispondente variabile duale:

$$
\begin{aligned}
& & z^* = \max 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 & \\
y_1: & & x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &\le 1 \\
y_2: & & 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 &\le 55 \\
y_3: & & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 &\le 3 \\
& & x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0
\end{aligned}
$$

2) Porre tutte le disuguaglianze in forma di $\le$ se il problema è di massimo e in forma di $\ge$ se il problema è di minimo; in questo modo le variabili vincolate in segno saranno tutte ≥ 0

Esempio

Problema primale P) min $5x_1 - x_2 + 2x_3$

$$
\begin{array}{lrcl}
y_1: & x_1 + 4x_2 - 6x_3 & \leq & 6 \\
y_2: & 2x_1 \qquad\quad - x_3 & = & 4 \\
y_3: & 2x_1 + 3x_2 \qquad\quad & \geq & 5 \\
 & x_2,\ x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Il duale è un problema di massimo definito sulle variabili y_1, y_2, y_3.

- Il I° vincolo del primale è di $\leq$ quindi $y_1 \leq 0$.
- Il II° vincolo del primale è di $=$ quindi y_2 è libera.
- Il III° vincolo del primale è di $\geq$ quindi $y_3 \geq 0$.

Esempio (cont.)

- Il coeff. della f.o. del duale sono i termini noti del primale.
- I termini noti del duale sono i coeff. della f.o. del primale.
- x_1 è libera, quindi il I° vincolo del duale sarà di $=$.
- x_2, $x_3 \geq 0$, quindi il II° e III° vincolo del duale saranno di $\leq$.

Problema duale D)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 6y_1 + 4y_2 + 5y_3 \\
& \quad = \; 5 \\
& \quad \leq \; -1 \\
& \quad \leq \; 2 \\
& y_1 \leq 0, \; y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Esempio (cont.)

- I coeff. del I° vincolo duale sono i coefficienti di x_1.
- I coeff. del II° vincolo duale sono i coefficienti di x_2.
- I coeff. del III° vincolo duale sono i coefficienti di x_3.

Problema duale D)

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & 6y_1 + 4y_2 + 5y_3 & & \\
 & y_1 + 2y_2 + 2y_3 & = & 5 \\
 & 4y_1 \qquad\quad + 3y_3 & \leq & -1 \\
 & -6y_1 \quad - y_2 \qquad\quad & \leq & 2 \\
 & y_1 \leq 0,\ y_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Sommario

- Preliminari
- Il problema duale
- Alcuni problemi duali notevoli
- Teoria della dualità
- Il simplesso duale
- Analisi post-ottimale
- Interpretazione economica

Problema della dieta

Consideriamo n alimenti ed m sostanze nutritive. La "dieta ideale" prevede l'assunzione di determinati quantitativi minimi di sostanze nutritive. Ci si chiede qual è la dieta ideale di costo minimo.

	sostanze nutrienti a (per porzione di alimento)					
	Pane	Latte	Uova	Carne	Dolce	Requisiti nutrizionali minimi
Calorie (cal.)	110	160	180	260	420	2000
Proteine (g)	4	8	13	14	4	50
Calcio (mg)	2	285	54	80	22	700
Costo per porzione	2	3	4	19	20	

Il modello del problema della dieta

$$
\begin{array}{llllllll}
(P) & z^* = \min z = 2x_1 & + 3x_2 & + 4x_3 & + 19x_4 & + 20x_5 & & \\
y_1: & 110x_1 + & 160x_2 + & 180x_3 + & 260x_4 + & 420x_5 & \geq 2000 \\
y_2: & 4x_1 + & 8x_2 + & 13x_3 + & 14x_4 + & 4x_5 & \geq 50 \\
y_3: & 2x_1 + & 285x_2 + & 54x_3 + & 80x_4 + & 22x_5 & \geq 700 \\
 & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
(D) & w^* = \max w = 2000y_1 + 50y_2 + 700y_3 & & & \\
x_1: & 110y_1 + 4y_2 + 2y_3 & \leq 2 \\
x_2: & 160y_1 + 8y_2 + 285y_3 & \leq 3 \\
x_3: & 180y_1 + 13y_2 + 54y_3 & \leq 4 \\
x_4: & 260y_1 + 14y_2 + 80y_3 & \leq 19 \\
x_5: & 420y_1 + 4y_2 + 22y_3 & \leq 20 \\
 & y_1, y_2, y_3 \geq 0 &
\end{array}
$$

Duale del problema della dieta

Una società di integratori produce pillole alimentari di Calorie, Proteine e Calcio.

Quali sono i prezzi unitari massimi di vendita delle pillole che rendono competitivo il pacchetto "dieta ideale in pillole" rispetto al pacchetto tradizionale fatto di alimenti?

Sia y_i , con $i \in \{1,\ldots, m\}$, il prezzo di vendita di una singola pillola della i-esima sostanza nutritiva (per semplicità supponiamo che la quantità di sostanza nutritiva per pillola sia unitaria).

- Evidentemente $y_i \geq 0, \qquad 1 \leq i \leq m$
- Un pacchetto "dieta ideale" prevede 2000 cal., 50 g di Proteine e 700 mg di Calcio.

  Sotto ipotesi di linearità, il ricavo w (che si vuole massimizzare) derivante dalla vendita di un pacchetto "dieta ideale in pillole" è dato da:

$$w = 2000y_1 + 50y_2 + 700y_3$$

- Una porzione di Pane fornisce un apporto nutrizionale di 110 cal., 4 g di Proteine e 2 mg di Calcio e costa 2 €.

  Quindi, per essere competitivi, l'equivalente in pillole non può costare più di 2 €:

$$110y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 2$$

- Lo stesso ragionamento deve essere fatto per gli altri alimenti.

$$
\begin{aligned}
&(D)\ w^* = \max 2000y_1 + 50y_2 + 700y_3 \\
&\quad \text{pane)}\ 110y_1 + 4y_2 + 2y_3 \le 2 \\
&\quad \text{latte)}\ 160y_1 + 8y_2 + 285y_3 \le 3 \\
&\quad \text{uova)}\ 180y_1 + 13y_2 + 54y_3 \le 4 \\
&\quad \text{carne)}\ 260y_1 + 14y_2 + 80y_3 \le 19 \\
&\quad \text{dolce)}\ 420y_1 + 4y_2 + 22y_3 \le 20 \\
&\qquad\qquad y_1, y_2, y_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

Questo problema è il *duale* del problema della dieta

- Ogni soluzione ammissibile per (D) descrive un pacchetto “dieta ideale in pillole” che è competitivo (cioè di costo non superiore) allo stesso pacchetto realizzato con alimenti tradizionali.
- All’ottimo le soluzioni del primale e del duale hanno lo stesso valore: si crea cioè un equilibrio tra i prezzi del supermercato e della società di integratori.

Problema di trasporto

Consideriamo 2 depositi (A e B) di carburante e tre punti di distribuzione. Si vuole soddisfare la richiesta dei punti di distribuzione, rispettando la disponibilità dei depositi e minimizzando i costi di trasporto.

		punti di distribuzione		
	disponibilità (kl)	Milano (1)	Roma (2)	Napoli (3)
deposito A	1000	13	11	16
deposito B	1400	12	15	14
	richiesta (kl)	800	700	900

costi di trasporto per kl

Il modello del problema di trasporto

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{(P)}\ z^* = \min z = & 13x_{A1} & + 12x_{B1} & + 11x_{A2} & + 15x_{B2} & + 16x_{A3} & + 14x_{B3} & \\
y_A: & x_{A1} & & + x_{A2} & & + x_{A3} & & \leq 1000 \\
y_B: & & x_{B1} & & + x_{B2} & & + x_{B3} & \leq 1400 \\
g_1: & x_{A1} & + x_{B1} & & & & & \geq 800 \\
g_2: & & & x_{A2} & + x_{B2} & & & \geq 700 \\
g_3: & & & & & x_{A3} & + x_{B3} & \geq 900 \\
& \multicolumn{7}{l}{x_{A1}, x_{B1}, x_{A2}, x_{B2}, x_{A3}, x_{B3} \geq 0}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\multicolumn{3}{l}{\text{(D)}\ w^* = \max w = 800g_1 + 700g_2 + 900g_3 - 1000y_A - 1400y_B} \\
x_{A1}: \ g_1 - y_A \leq 13 & x_{A2}: \ g_2 - y_A \leq 11 & x_{A3}: \ g_3 - y_A \leq 16 \\
x_{B1}: \ g_1 - y_B \leq 12 & x_{B2}: \ g_2 - y_B \leq 15 & x_{B3}: \ g_3 - y_B \leq 14 \\
\multicolumn{3}{l}{y_A, y_B, g_1, g_2, g_3 \geq 0}
\end{array}
$$

Duale del problema di trasporto

Una società terza di logistica si offre di acquistare tutto il carburante dai depositi e di rivenderlo ai punti di distribuzione.

Quali sono i prezzi di acquisto e di vendita che rendono l'operazione conveniente alla società petrolifera?

Siano y_A e y_B i prezzi unitari di vendita che la società petrolifera applicherà al carburante dei depositi A e B e siano g_1, g_2 e g_3 i prezzi unitari di riacquisto nei punti di distribuzione.

- Evidentemente $y_A, y_B, g_1, g_2, g_3 \geq 0$
- Il costo totale che la società petrolifera pagherà alla società logistica sarà dato da:

$$w = 800g_1 + 700g_2 + 900g_3 \underbrace{-\,1000y_A - 1400y_B}_{\text{col segno meno perché sono ricavi}}$$

- Il costo di trasporto di un litro di carburante dal deposito A al centro di distribuzione 1 è di 13 €cent.

  Quindi, alla società petrolifera conviene vendere e riacquistare il carburante se la differenza tra prezzo unitario di vendita e costo unitario di acquisto non è superiore al costo unitario di trasporto, cioè se:

$$g_1 - y_A \leq 13$$

- Lo stesso ragionamento si applica alle altre coppie deposito – centro di distribuzione.
- Quindi, la cifra massima che la società petrolifera è disposta a spendere per l'intera operazione è max w, soggetta ai vincoli di costo di trasporto

$$\text{(D)}\ w^* = \max w = 800g_1 + 700g_2 + 900g_3 - 1000y_A - 1400y_B$$

$$g_1 - y_A \leq 13 \quad g_2 - y_A \leq 11 \quad g_3 - y_A \leq 16$$

$$g_1 - y_B \leq 12 \quad g_2 - y_B \leq 15 \quad g_3 - y_B \leq 14$$

$$y_A, y_B, g_1, g_2, g_3 \geq 0$$

- Ogni soluzione ammissibile per (D) descrive un'offerta della società terza di logistica che risulta conveniente per la società petrolifera.
- Il massimo profitto della società terza è pari al costo minimo che la società petrolifera pagherà se effettuerà in autonomia l'intera operazione di trasporto.

mix di produzione

2 manufatti A e B ognuno dei quali necessita di una data quantità di risorse p, q, r

	A	B
p	8	4
q	4	6
r	1	1

- Le unità di profitto associato ai manufatti A e B sono rispettiva-mente 30 e 20.
- Le risorse p, q, r sono disponibili nelle rispettive quantità 640, 540, 100

Il modello di mix di produzione

(P) $z^* = \max z = 30x_A + 20x_B$

$$
\begin{array}{lrcll}
y_p: & 8x_A & + & 4x_B & \leq 640 \\
y_q: & 4x_A & + & 6x_B & \leq 540 \\
y_r: & x_A & + & x_B & \leq 100 \\
 & & & x_A, x_B & \geq 0
\end{array}
$$

(D) $w^* = \min w = 640y_p + 540y_q + 100y_r$

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
x_A: & 8y_p & + & 4y_q & + & y_r & \geq 30 \\
x_B: & 4y_p & + & 6y_q & + & y_r & \geq 20 \\
 & & & & & y_p, y_q, y_r & \geq 0
\end{array}
$$

Duale del mix di produzione

prima ancora di decidere cosa produrre per ottenere il massimo profitto (problema *tattico*), bisognerebbe chiedersi se conviene produrre o se viceversa non convenga vendere (o utilizzare diversamente) le risorse disponibili (problema *strategico*).

Qual è il prezzo minimo a cui conviene vendere <u>in blocco</u> tutte le risorse disponibili invece di utilizzarle per produrre A e B?

Sia y_i , con $i \in \{\mathrm{p}, \mathrm{q}, \mathrm{r}\}$, il prezzo di vendita della risorsa i-esima.

- Evidentemente $y_{\mathrm{p}}, y_{\mathrm{q}}, y_{\mathrm{r}} \geq 0$
- Se il profitto w è una funzione lineare delle quantità di risorse vendute, si può scrivere

$$w = 640y_{\mathrm{p}} + 540y_{\mathrm{q}} + 100y_{\mathrm{r}}$$

- un manufatto A dà un profitto di 30 e consuma 8 unità di p, 4 unità di q e una unità di r.
- Quindi, affinché convenga vendere le risorse invece di utilizzarle per produrre (o almeno rimanere alla pari), la vendita complessiva di 8 unità di p, 4 unità di q e una unità di r deve fornire un guadagno non inferiore a 30:

$$8y_p + 4y_q + y_r \geq 30$$

- Un ragionamento analogo vale per B

$$4y_p + 6y_q + y_r \geq 20$$

$$(D)\ w^* = \min w = 640y_p + 540y_q + 100y_r$$

$$\begin{array}{lrcrcrl} A: & 8y_p & + & 4y_q & + & y_r & \geq 30 \\ B: & 4y_p & + & 6y_q & + & y_r & \geq 20 \\ & \multicolumn{6}{l}{y_p, y_q, y_r \geq 0} \end{array}$$

- Ogni soluzione ammissibile per (D) permette di realizzare un guadagno <u>non inferiore</u> al profitto massimo che si ottiene risolvendo (P).
- Quindi conviene vendere (o al peggio si va alla pari) se si trova qualcuno disposto ad acquisire <u>tutte le risorse in blocco</u> e pagarle unitariamente in modo da soddisfare i vincoli duali.

- Preliminari
- Il problema duale
- Alcuni problemi duali notevoli
- Teoria della dualità
- Il simplesso duale
- Analisi post-ottimale
- Interpretazione economica

Teoria della dualità nella PL

- Si consideri la coppia *primale-duale*

$$\text{P) } z^* = \min \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \qquad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\text{D) } w^* = \max \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \qquad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}$$

[teorema] (reciprocità):
Il problema *P* è il duale del problema *D*.

Relazione della coppia primale-duale

	P illimitato	$P = \emptyset$	P ammette ottimo finito
D illimitato	?	?	?
$D = \emptyset$	?	?	?
D ammette ottimo finito	?	?	?

Primale e duale entrambi vuoti: un esempio

$$(P)\ z^* = \min x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 6x_1 + 6x_2 &= 12 \end{aligned}$$

$$(D)\ w^* = \max y_1 + 3y_2 + 12y_3$$

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 + 6y_3 &= 1 \\ y_1 + 2y_2 + 6y_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$P = \emptyset,\ D = \emptyset$$

Relazione della coppia primale-duale

	P illimitato	$P = \emptyset$	P ammette ottimo finito
D illimitato	?	?	?
$D = \emptyset$	?	possibile	?
D ammette ottimo finito	?	?	?

Dualità debole (o dominanza)

[teorema] Per ogni coppia primale-duale di soluzioni

$\mathbf{x} \in P = \min \{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ e $\mathbf{y} \in D = \max \{\mathbf{y}^T\mathbf{b} \mid \mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c}\}$

si ha

$$w = \mathbf{y}^T\mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x} = z$$

[dim] Combinando i vincoli del duale ($\mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c}$) con le variabili del primale (vettore $\mathbf{x}$) si ha:

$$(\mathbf{y}^T\mathbf{A})^T\mathbf{x} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x} \qquad \text{(dato che } \mathbf{A}^T\mathbf{y} = (\mathbf{y}^T\mathbf{A})^T\text{)}$$

(la diseguaglianza si conserva poiché la combinazione è conica)

Per proprietà associativa si ha $\mathbf{y}^T(\mathbf{A}\mathbf{x}) \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ e siccome $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ si ha la tesi ■

Dualità debole (o dominanza)

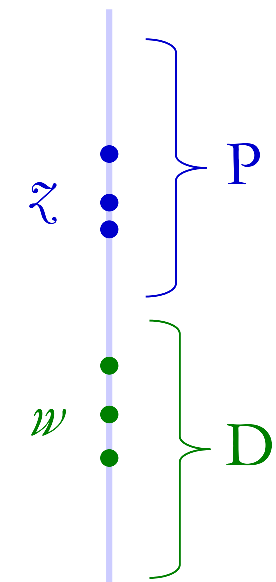
[teorema] Per ogni coppia primale-duale di soluzioni

$\mathbf{x} \in \mathrm{P} = \min \{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ e $\mathbf{y} \in \mathrm{D} = \max \{\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \mid \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}\}$

si ha

$$w = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \leq \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = z$$

Per una qualsiasi coppia prima-duale di soluzioni, il valore z del primale (che è un problema di min) è sempre non inferiore al valore w del duale (che è un problema di max).



Corollari

Questo accade in particolare per le (eventuali) soluzioni ottime:

[corollario] Se $\mathbf{x} \in P$, $\mathbf{y} \in D$ e $\mathbf{y}^T\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$, allora $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono soluzioni ottime rispettivamente per P e per D.

[dim]

Per ipotesi $\quad \mathbf{y}^T\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$

e $\forall \mathbf{x}' \in P$ la dualità debole afferma che $\quad \mathbf{y}^T\mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}'$

quindi $\forall \mathbf{x}' \in P \quad \mathbf{y}^T\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}'$

ma ciò significa che $\mathbf{x}$ è soluzione ottima di P.

Un ragionamento analogo vale per provare l'ottimalità di $\mathbf{y}$. ■

Corollari

[corollario] Se il problema di PL P è *illimitato inferiormente* allora il suo duale D non ammette soluzione.

[dim] Per assurdo sia D non vuoto e sia $\mathbf{y}' \in D$.

Per la dualità debole si ha $\mathbf{y}'^T\mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in P$, cioè $\mathbf{y}'^T\mathbf{b}$ è un limite inferiore finito al valore della f.o. di P,

quindi non può aversi $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \to -\infty$.

■

Il ragionamento è analogo se D è illimitato

[corollario] Se il problema D è *illimitato superiormente* allora il problema P non ammette soluzione.

Esempio

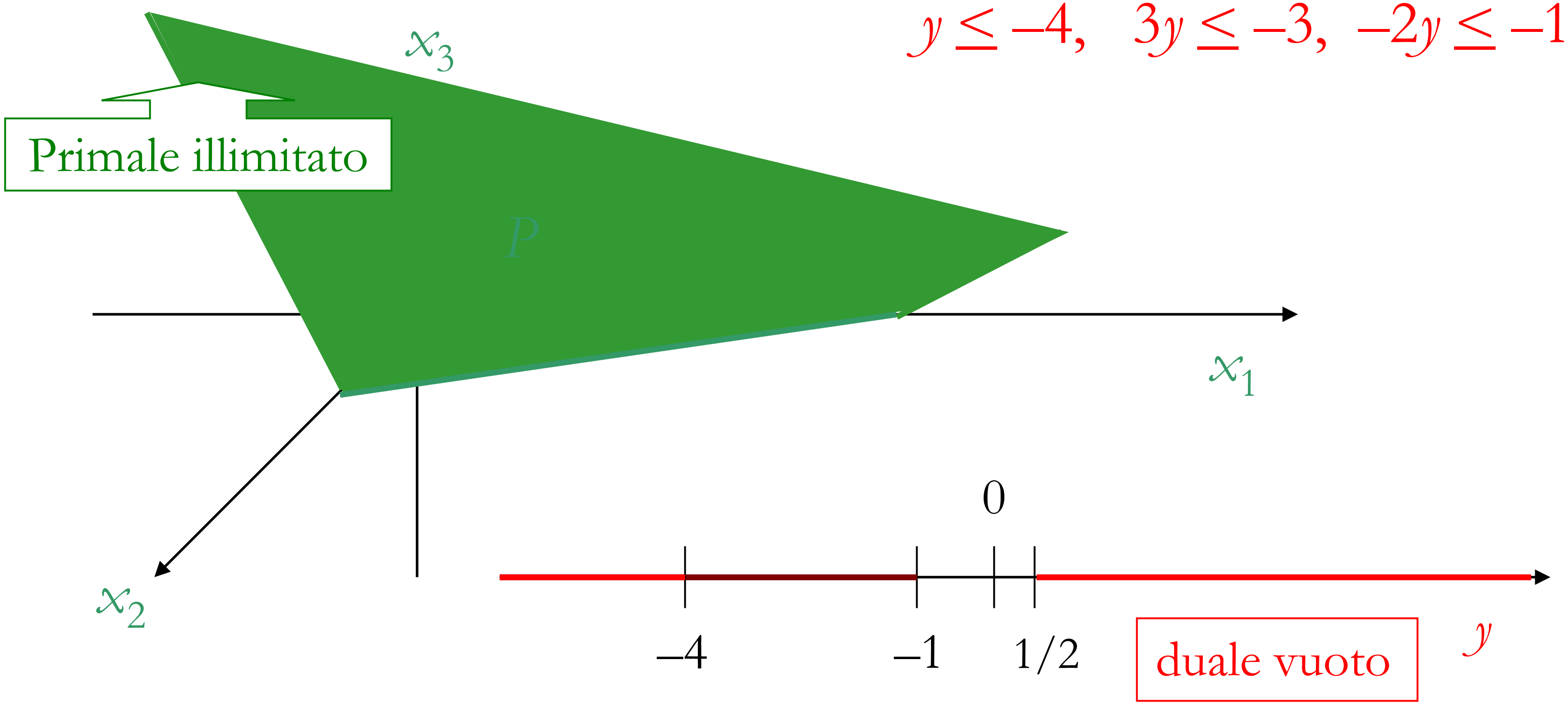
Problema primale $\quad P) \quad \min \quad -4x_1 - 3x_2 - x_3$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Problema duale $\quad D) \quad \max \quad 6y$

$$y \leq -4, \quad 3y \leq -3, \quad -2y \leq -1$$



Relazione della coppia primale-duale

	P illimitato	$P = \emptyset$	P ammette ottimo finito
D illimitato	impossibile	possibile	impossibile
$D = \emptyset$	possibile	possibile	?
D ammette ottimo finito	impossibile	?	?

Dualità forte

[teorema] Se $\mathbf{x}^* \in P$ è una soluzione ottima per il problema primale, allora

1. <u>esiste</u> una soluzione ottima $\mathbf{y}^* \in D$ per il problema duale, e
2. $$\mathbf{y}^{*T}\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*$$

[dim] Se P ammette ottimo finito, esiste un vertice ottimo o, equivalentemente, una base ottima $\mathbf{B}$ e una SBA ottima $\mathbf{x}^* = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0})$.

Se P è di minimo, allora:

$$\boxed{\mathbf{c} - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \geq \mathbf{0}}$$

criterio di ottimalità adottato dal simplesso

Sia $\mathbf{y}^*$ il vettore $(\mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1})^T$

Dualità forte (cont.)

$\mathbf{c} - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$

$\mathbf{c} - \mathbf{y}^{*T}\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ o equivalentemente $\mathbf{A}^T\mathbf{y}^* \leq \mathbf{c}$.

Quindi $\mathbf{y}^*$ è soluzione ammissibile del duale $D = \{\max\ \mathbf{y}^T\mathbf{b} : \mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c}\}$.

Inoltre:

$$\mathbf{y}^{*T}\mathbf{b} = \mathbf{c_B}^T\,\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c_B}^T\mathbf{x}^*_\mathbf{B} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*$$

Quindi siccome le soluzioni primale-duale $\mathbf{x}^*$ e $\mathbf{y}^*$ hanno lo stesso valore, per la dualità debole $\mathbf{y}^*$ è una soluzione ottima di D.

■

Dimostrazione costruttiva basata sulla convergenza del metodo del simplesso.
Una dimostrazione più elegante si basa sui *teoremi dell'alternativa*
(sezione 5.4 sul libro di testo).

Esempio

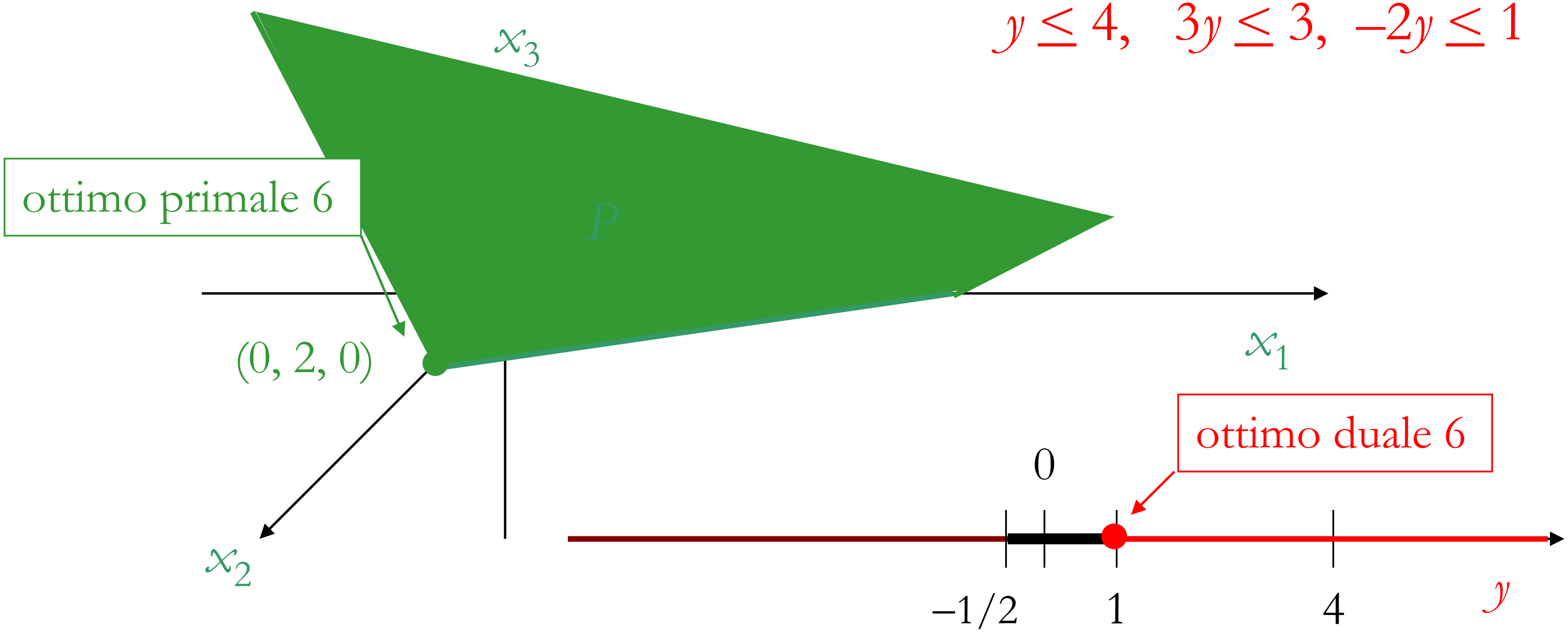
Problema primale $\quad P) \quad \min \quad 4x_1 + 3x_2 + x_3$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Problema duale $\quad D) \quad \max \quad 6y$

$$y \leq 4, \quad 3y \leq 3, \quad -2y \leq 1$$



Relazione della coppia primale-duale

	P illimitato	$P = \emptyset$	P ammette ottimo finito
D illimitato	impossibile	possibile	impossibile
$D = \emptyset$	possibile	possibile	impossibile
D ammette ottimo finito	impossibile	impossibile	possibile

Corollari

[corollario] $\mathbf{x}^* \in P$ e $\mathbf{y}^* \in D$ sono ottime se e solo se $\mathbf{y}^{*T}\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*$

[dim] ($\Longrightarrow$) $\mathbf{x}^*$ e $\mathbf{y}^*$ ottime implica $\mathbf{y}^{*T}\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*$: dualità forte

($\Longleftarrow$) $\mathbf{y}^{*T}\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*$ implica $\mathbf{x}^*$ e $\mathbf{y}^*$ ottime: dualità debole

■

Corollari

[corollario] La coppia primale-duale $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ di soluzioni associate alla base $\mathbf{B}$ è ammissibile <u>se e solo se</u> è ottima.

[dim] Le soluzioni di base primale-duale associate a $\mathbf{B}$ sono

primale: $\mathbf{x} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0})$ e duale: $\mathbf{y} = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}^{-1}$

$(\Leftarrow)$ $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ottima implica $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ammissibile (banale)

$(\Rightarrow)$ $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ammissibile implica $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ottima:

i valori delle funzioni obiettivo sono

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

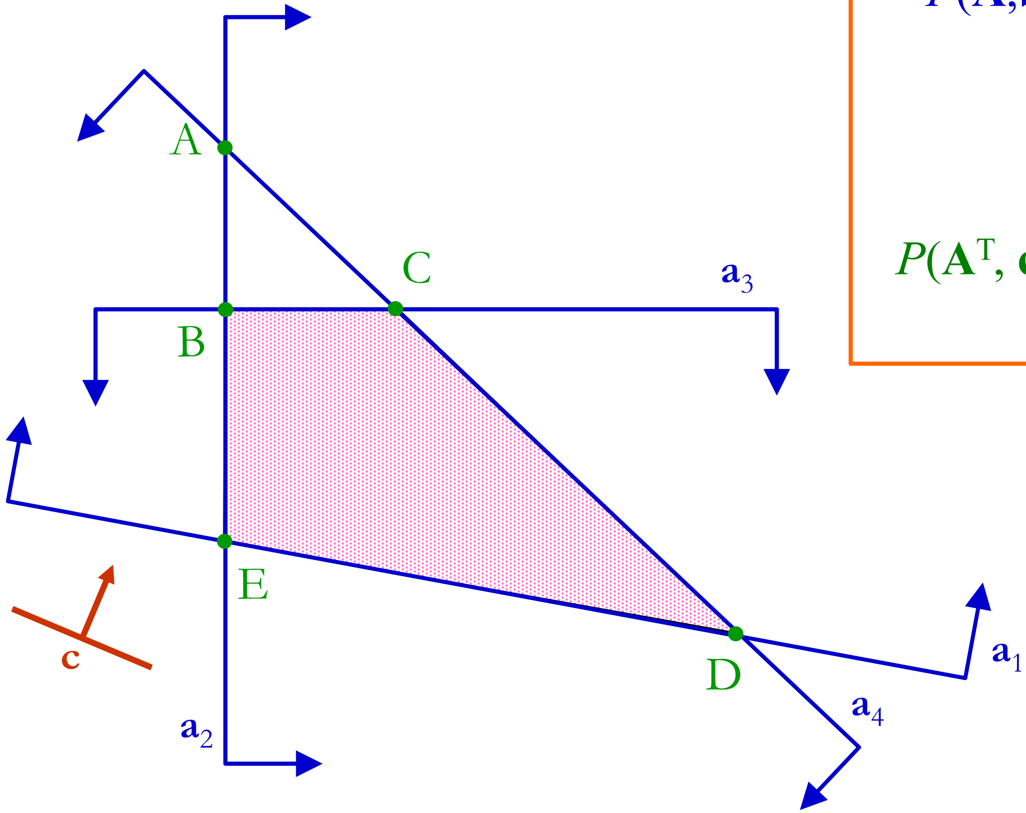
$$\mathbf{y}^T\mathbf{b} = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

ma le soluzioni di una coppia primale-duale ammissibile hanno lo stesso valore esclusivamente all'ottimo. ■

Esempio

P: $\min\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$

D: $\max\{\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \mid \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \mathbf{c},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$



$\mathbf{A}(4\times 2)$

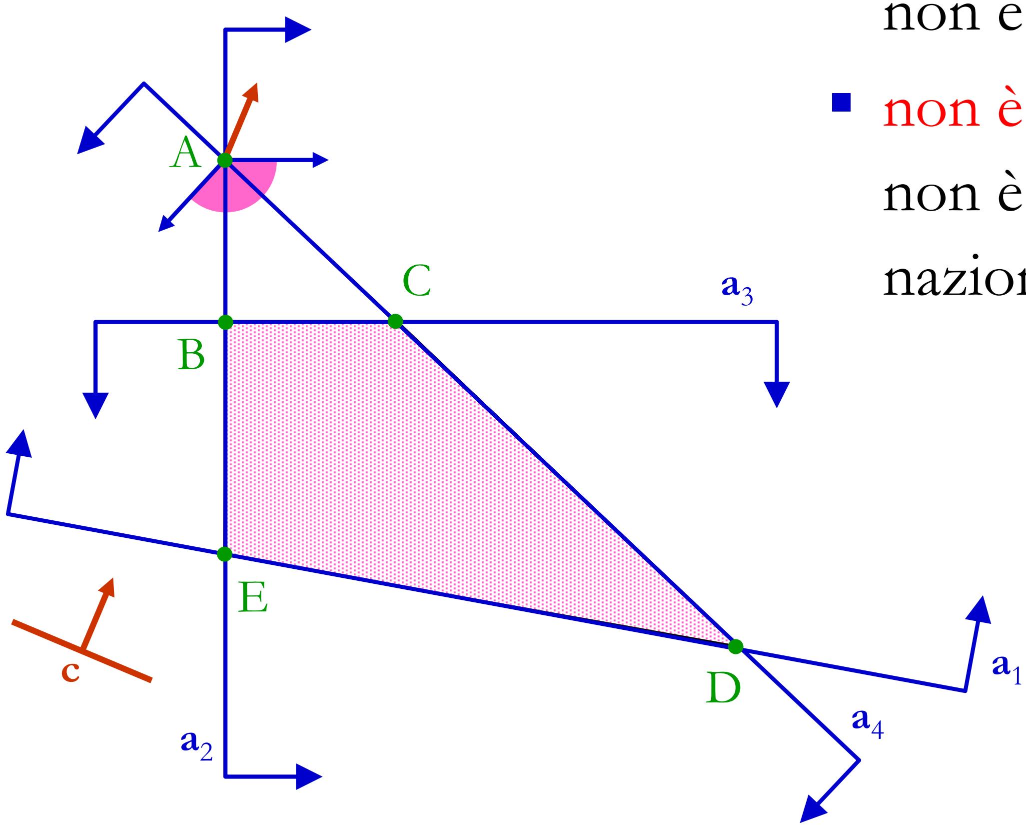
$$P(\mathbf{A},\mathbf{b}) = \begin{cases} \mathbf{a}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geq b_1 \\ \mathbf{a}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geq b_2 \\ \mathbf{a}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geq b_3 \\ \mathbf{a}_4^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geq b_4 \end{cases}$$

$$P(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}, \mathbf{c}) = \{\mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \mathbf{a}_3 y_3 + \mathbf{a}_4 y_4 = \mathbf{c}\}$$

Esempio (cont.)

P: $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$

D: $\max\{\mathbf{b}^T\mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$



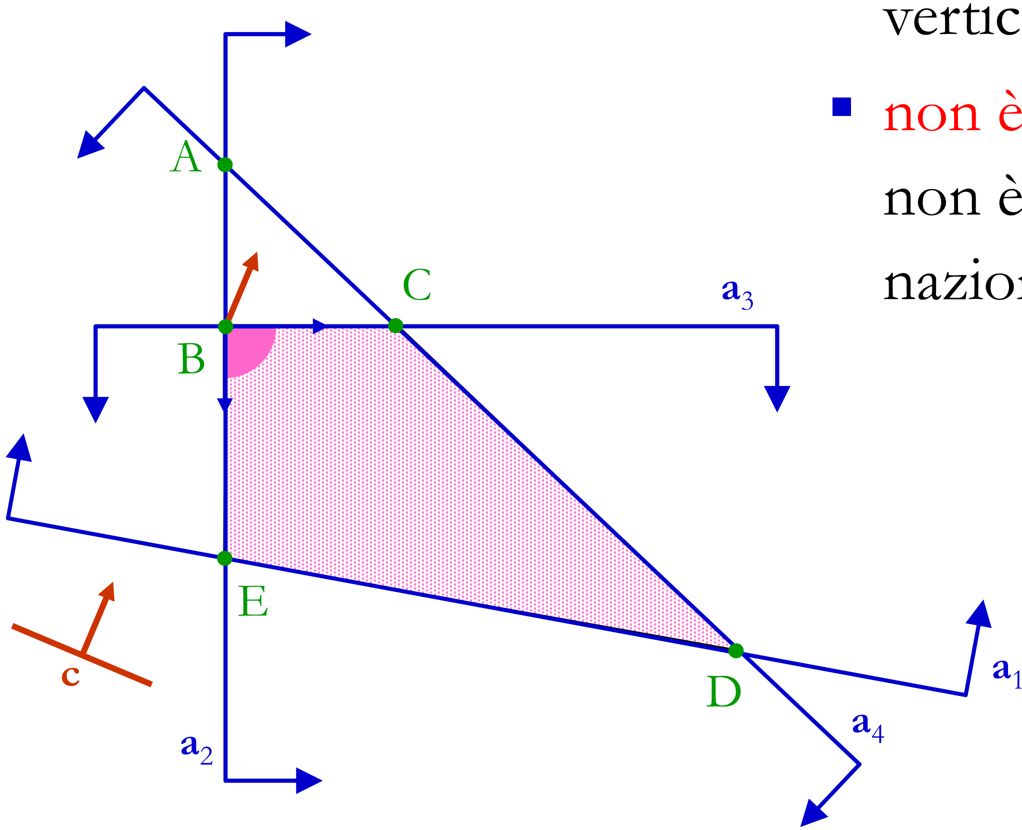
La base associata al punto A, intersezione degli iperpiani $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_4$,

- non è ammissibile per P, dato che A non è un vertice del poliedro;
- non è ammissibile per D, dato che $\mathbf{c}$ non è esprimibile come combinazione conica dei vettori $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_4$.

Esempio (cont.)

P: $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$

D: $\max\{\mathbf{b}^T\mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$



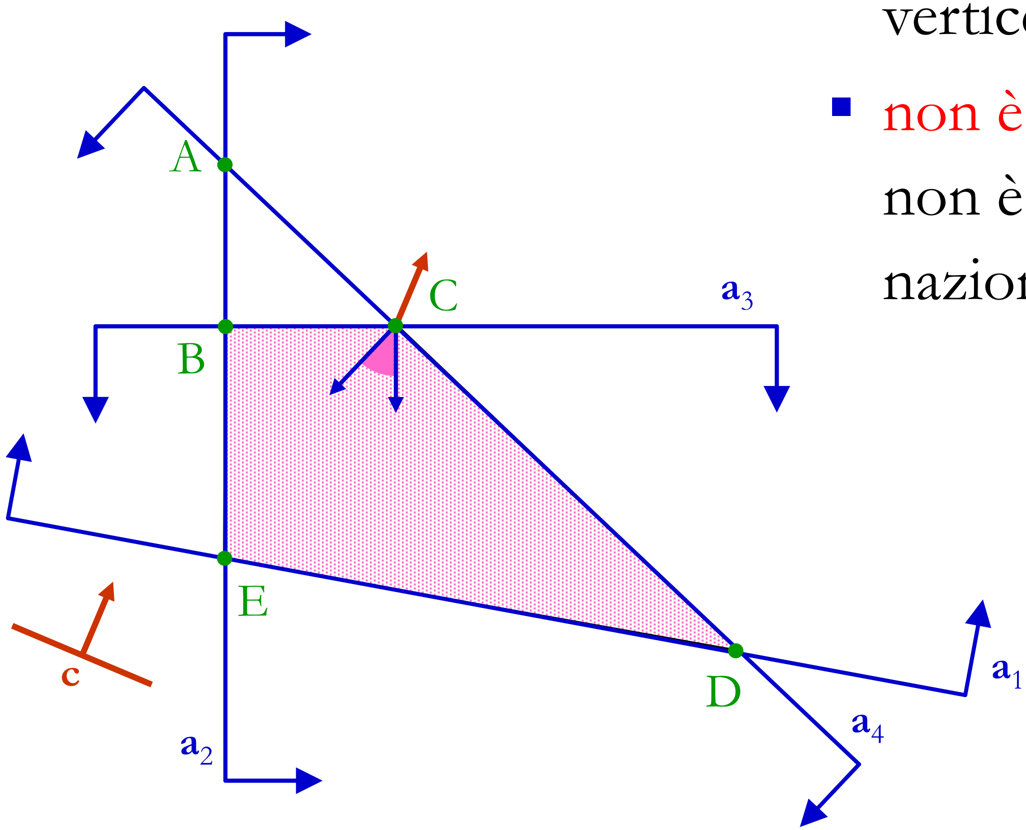
La base associata al punto B, intersezione degli iperpiani $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$,

- è ammissibile per P, dato che B è un vertice del poliedro;
- non è ammissibile per D, dato che $\mathbf{c}$ non è esprimibile come combinazione conica dei vettori $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$.

Esempio (cont.)

P: $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$

D: $\max\{\mathbf{b}^T\mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$



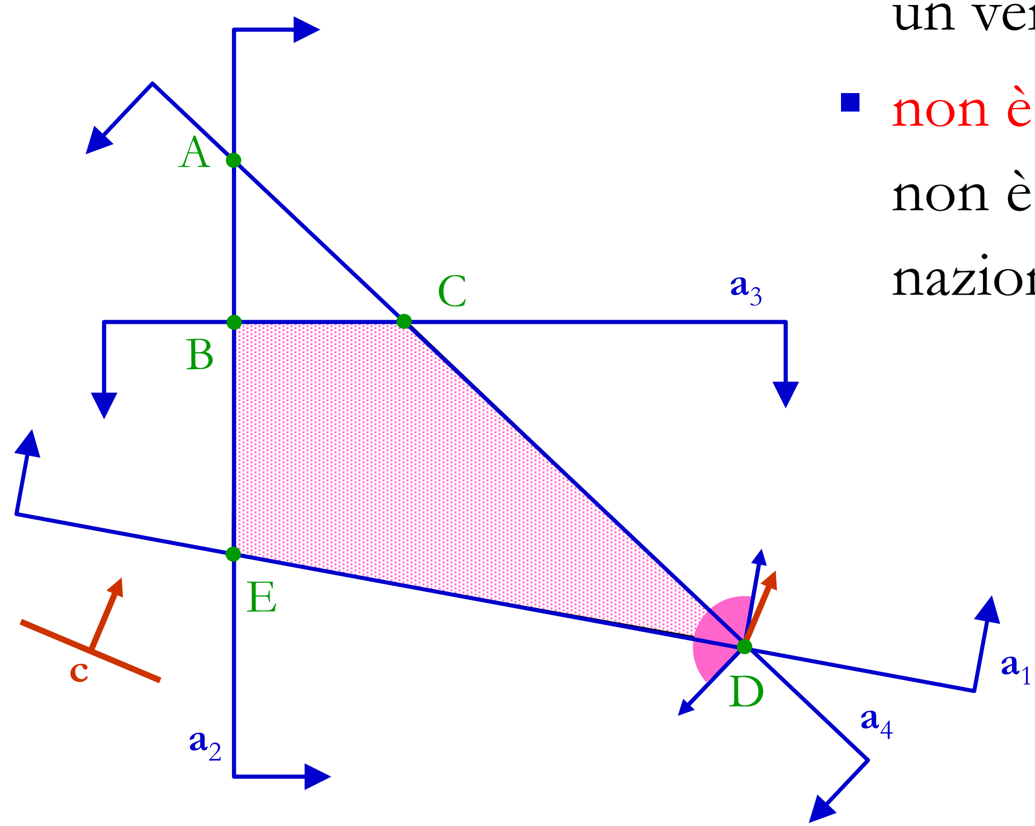
La base associata al punto C, intersezione degli iperpiani $\mathbf{a}_3$ e $\mathbf{a}_4$,

- è ammissibile per P, dato che C è un vertice del poliedro;
- non è ammissibile per D, dato che $\mathbf{c}$ non è esprimibile come combinazione conica dei vettori $\mathbf{a}_3$ e $\mathbf{a}_4$.

Esempio (cont.)

P: $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$

D: $\max\{\mathbf{b}^T\mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$



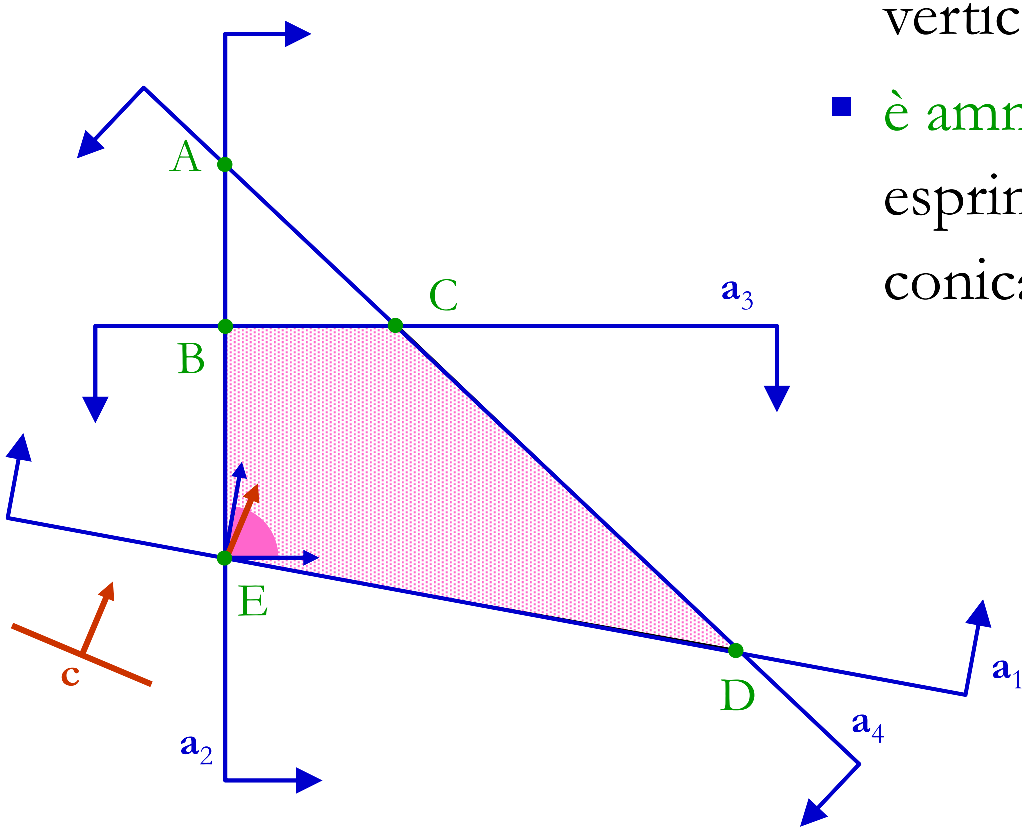
La base associata al punto D, intersezione degli iperpiani $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_4$,

- è ammissibile per P, dato che D è un vertice del poliedro;
- non è ammissibile per D, dato che $\mathbf{c}$ non è esprimibile come combinazione conica dei vettori $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_4$.

Esempio (cont.)

P: $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$

D: $\max\{\mathbf{b}^T\mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$



La base associata al punto E, intersezione degli iperpiani $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$,

- è ammissibile per P, dato che E è un vertice del poliedro;
- è ammissibile per D, dato che $\mathbf{c}$ è esprimibile come combinazione conica dei vettori $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$.

La base è ottima sia per il primale sia per il duale

Condizioni di ortogonalità

- Si consideri la coppia *primale-duale*

$$\text{P)}\ z^* = \min \mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\text{D)}\ w^* = \max \mathbf{y}^T\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c} \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

- $p_i = \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} - b_i$ surplus dell'i-esimo vincolo di P
- $s_j = c_j - \mathbf{y}^T\mathbf{A}_j$ slack del j-esimo vincolo di D

Condizioni di ortogonalità

[teorema] (ortogonalità o complementarità):
Le soluzioni $\underline{\mathbf{x}} \in P$ e $\underline{\mathbf{y}} \in D$ sono ottime se e solo se

$$\underline{x}_j \, \underline{s}_j = 0 \qquad \forall j$$
$$\underline{y}_i \, \underline{p}_i = 0 \qquad \forall i$$

Le condizioni di ortogonalità affermano che:

- la soluzione ottima $\underline{\mathbf{x}}$ è ortogonale al vettore slack $\underline{\mathbf{s}}$ del duale, e
- la soluzione ottima $\underline{\mathbf{y}}$ è ortogonale al vettore surplus $\underline{\mathbf{p}}$ primale,

cioè che $\underline{\mathbf{x}}^T\underline{\mathbf{s}} = 0$ e $\underline{\mathbf{y}}^T\underline{\mathbf{p}} = 0$.

Condizioni di ortogonalità

[dim] $\Leftarrow$ ($\mathbf{x},\mathbf{y}$ ottime implicano cond. di *ortogonalità*)

$\underline{\mathbf{x}} \in P$ quindi $\mathbf{b} \leq A\underline{\mathbf{x}}$

$\underline{\mathbf{y}} \in D$ quindi $\underline{\mathbf{y}}^T A \leq \mathbf{c}$

$$\underline{\mathbf{y}}^T\mathbf{b} \;\leq\; \underline{\mathbf{y}}^T(\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}) = (\underline{\mathbf{y}}^T\mathbf{A})^T\underline{\mathbf{x}} \;\leq\; \mathbf{c}^T\underline{\mathbf{x}}$$

$\underline{\mathbf{x}}$ e $\underline{\mathbf{y}}$ sono ottime quindi

$$\underline{\mathbf{y}}^T\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\underline{\mathbf{x}}$$

$$\underline{\mathbf{y}}^T\mathbf{b} = \underline{\mathbf{y}}^T\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{c}^T\underline{\mathbf{x}}$$

$$\boxed{\underline{\mathbf{y}}^T(\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}} \qquad \boxed{(\mathbf{c} - \underline{\mathbf{y}}^T\mathbf{A})^T\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{0}}$$

$$\underline{\mathbf{y}}^T\underline{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \qquad \underline{\mathbf{s}}^T\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

$\Updownarrow$ — $\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{p}} \geq 0$ $\qquad$ $\Updownarrow$ — $\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{x}} \geq 0$

$$\underline{y}_i\,\underline{p}_i = 0 \quad \forall i \qquad \underline{x}_j\,\underline{s}_j = 0 \quad \forall j$$

Condizioni di ortogonalità (cont.)

[…segue dim] $\Longrightarrow$ (cond. di *ortogonalità* implicano **x**,**y** ottime)

$$\underline{y}_i\, \underline{p}_i = 0 \quad \forall i \qquad\qquad \underline{x}_j\, \underline{s}_j = 0 \quad \forall j$$

$$\boxed{\underline{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}} \qquad\qquad \boxed{(\mathbf{c} - \underline{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{0}}$$

$$\underline{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} - \cancel{\underline{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}})} = \mathbf{0} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{x}} - \cancel{(\underline{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{\mathrm{T}}}\underline{\mathbf{x}}$$

$$\underline{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{x}}$$

quindi $\underline{\mathbf{x}}$ e $\underline{\mathbf{y}}$ sono ottime

■

Condizioni di ortogonalità (cont.)

All'ottimo, non possono essere contemporaneamente > 0

- una variabile primale x_j e la slack $s_j = c_j - \mathbf{y}^T\mathbf{A}_j$ del corrispondente vincolo duale (quindi se $x_j > 0$, il j-esimo vincolo del duale deve essere attivo);
- una variabile duale y_i e la surplus $p_i = \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} - b_i$ del corrispondente vincolo primale (quindi se $y_i > 0$, l'i-esimo vincolo del primale deve essere attivo).

Il teorema inoltre conferma che all'ottimo il costo ridotto $c_j - \mathbf{y}^T\mathbf{A}_j$ di una variabile positiva (quindi in base) x_j deve essere nullo.

problema della dieta: interpretazione economica

$$z^* = \min \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \geq b_j \qquad \forall j = 1, \dots, m$$
$$x_i \geq 0 \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

$$w^* = \max \sum_{j=1}^{m} b_j y_j$$
$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \leq c_i \qquad \forall i = 1, \dots, \text{n}$$
$$y_j \geq 0 \qquad \forall j = 1, \dots, m$$

<u>All'ottimo</u>

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \underline{x}_i > b_j \Longrightarrow \underline{y}_j = 0$$

Se nella dieta ottima c'è un eccesso di sostanza nutritiva j il consumatore non è disposto a pagar nulla per una pillola di j

$$\underline{y}_j > 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \underline{x}_i = b_j$$

Se le pillole di sostanza nutritiva j hanno un prezzo significa che nella dieta ottima del consumatore non c'è un eccesso di quella sostanza.

problema della dieta: interpretazione economica

$$z^* = \min \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \geq b_j \qquad \forall j = 1, \dots, m$$

$$x_i \geq 0 \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

$$w^* = \max \sum_{j=1}^{m} b_j y_j$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \leq c_i \qquad \forall i = 1, \dots, \text{n}$$

$$y_j \geq 0 \qquad \forall j = 1, \dots, m$$

<u>All'ottimo</u>

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \underline{y}_j < c_i \Longrightarrow \underline{x}_i = 0$$

Se l'equivalente in pillole dell'alimento *i* costa meno di una porzione di *i*, la dieta ideale non conterrà l'alimento *i*

$$\underline{x}_i > 0 \Longrightarrow \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \underline{y}_j = c_i$$

Se il consumatore include l'alimento *i* nella dieta ideale, vuol dire che l'equivalente in pillole non è più conveniente.

Verifica dell'ottimalità con cond. di ortogonalità

$$P: \quad \min\ 13x_1 + 10x_2 + 6x_3$$
$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 3x_3 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$D: \max\ 8y_1 + 3y_2$$
$$\begin{aligned} 5y_1 + 3y_2 &\leq 13 \\ y_1 + y_2 &\leq 10 \\ 3y_1 &\leq 6 \end{aligned}$$

Consideriamo il punto $\mathbf{x} = (1,0,1)$

- E' facile verificare che $\mathbf{x}$ è ammissibile per P (basta sostituire).
- Per verificare se $\mathbf{x}$ è ottima dobbiamo *a*) risolvere P oppure *b*) risolvere D e applicare la dualità debole, oppure *c*) utilizzare le condizioni di ortogonalità:
  - $y_i \cdot (\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - b_i) = 0 \qquad \forall i$
  - $(c_j - \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_j) \cdot x_j = 0 \qquad \forall j$

Verifica dell'ottimalità con cond. di ortogonalità

$$P: \quad \min 13x_1 + 10x_2 + 6x_3$$
$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 3x_3 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 \qquad &= 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$D: \max 8y_1 + 3y_2$$
$$\begin{aligned} 5y_1 + 3y_2 &\leq 13 \\ y_1 + y_2 &\leq 10 \\ 3y_1 \qquad &\leq 6 \end{aligned}$$

- $y_i \cdot (\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} - b_i) = 0 \quad \forall i$

La prima condizione è sempre vera dato che P è in forma standard

- $(c_j - \mathbf{y}^T\mathbf{A}_j) \cdot x_j = 0 \quad \forall j$

La seconda condizione dà luogo, in corrispondenza del punto $\mathbf{x} = (1,0,1)$, al seguente sistema

$$\begin{cases} (13 - 5y_1 - 3y_2) \cdot 1 = 0 \\ (6 - 3y_1) \cdot 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5y_1 + 3y_2 = 13 \\ 3y_1 = 6 \end{cases}$$

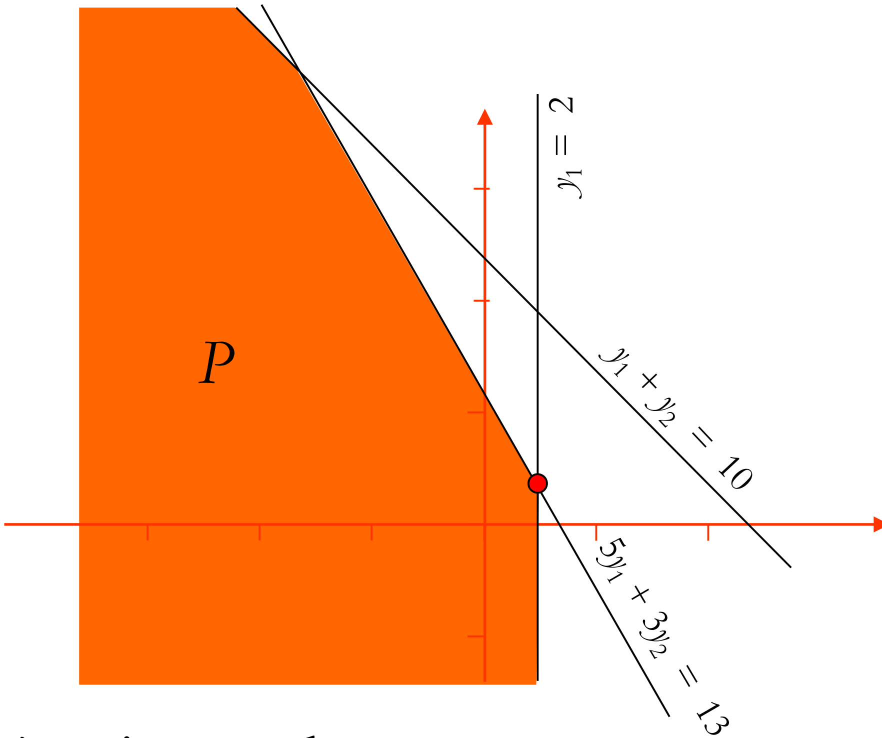
la soluzione del sistema è $\mathbf{y} = (2,1)$;
$\mathbf{y}$ è anche una soluzione ammissibile di D;
quindi $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono ottime.

Infatti $\mathbf{y}^T\mathbf{b} = 19 = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$

Verifica dell'ottimalità con cond. di ortogonalità

Partiamo ora da una soluzione ammissibile duale $\mathbf{y} = (2,1)$

$$D: \max\ 8y_1 + 3y_2$$
$$\begin{aligned} 5y_1 + 3y_2 &\le 13 \quad \textit{vincolo attivo in } \mathbf{y} \\ y_1 + y_2 &\le 10 \\ 3y_1 &\le 6 \quad \textit{vincolo attivo in } \mathbf{y} \end{aligned}$$



$$\begin{cases} 5y_1 + 3y_2 = 13 \\ 3y_1 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases}$$

Di nuovo possiamo verificarne l'ottimalità e ricavare la $\mathbf{x}$ ottima del primale utilizzando le condizioni di ortogonalità:

- $y_i \cdot (\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - b_i) = 0 \qquad \forall i$
- $(c_j - \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_j) \cdot x_j = 0 \qquad \forall j$

Verifica dell'ottimalità con cond. di ortogonalità

$$D: \max\ 8y_1 + 3y_2$$
$$\begin{aligned} 5y_1 + 3y_2 &\le 13 \\ y_1 + y_2 &\le 10 \\ 3y_1 &\le 6 \end{aligned}$$

vincolo attivo in $\mathbf{y}$

vincolo non attivo *in* $\mathbf{y}$

vincolo attivo in $\mathbf{y}$

$$P: \min\ 13x_1 + 10x_2 + 6x_3$$
$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 3x_3 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

- $y_i \cdot (\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - b_i) = 0 \quad \forall i \quad \begin{cases} 2\cdot(8 - 5x_1 - x_2 - 3x_3) = 0 \\ 1\cdot(3 - 3x_1 - x_2) = 0 \end{cases}$
- $(c_j - \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_j)\cdot x_j = 0 \quad \forall j \quad \{(10 - 2 - 1)\cdot x_2 = 0$

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 16 \\ 3x_1 + x_2 = 3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

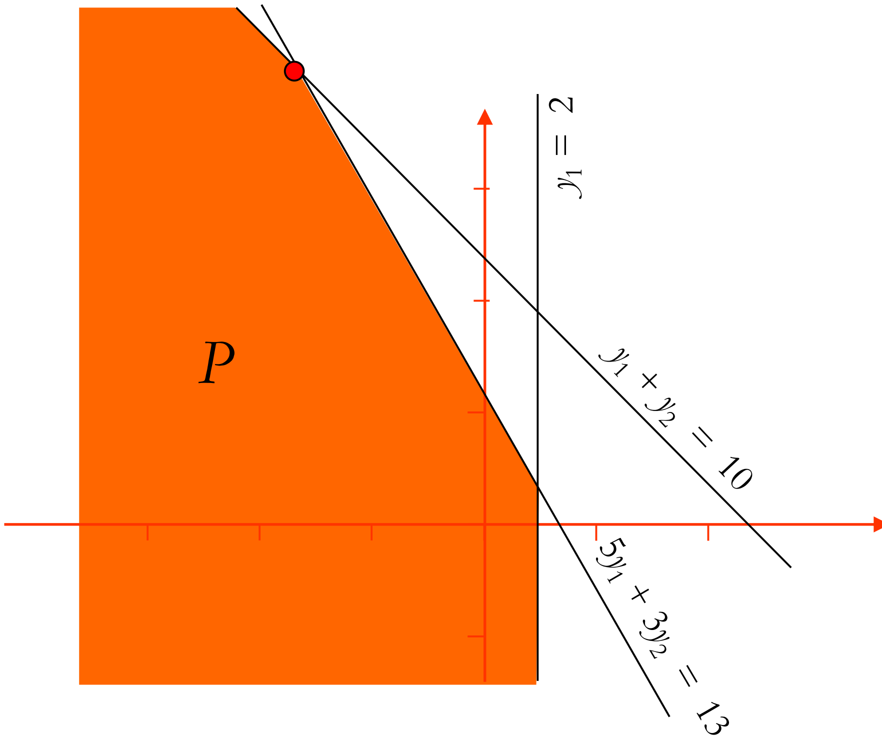
Il sistema ammette la soluzione $\mathbf{x} = (1,0,1)$ che è ammissibile primale; quindi $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono ottime.
Si verifica infatti che $\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = 19 = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$.

Verifica dell'ottimalità con cond. di ortogonalità

Partiamo ora da un'altra soluzione ammissibile duale $\mathbf{y} = (-17/2,\ 37/2)$

$$D : \max\ 8y_1 + 3y_2$$

$$\begin{aligned} 5y_1 + 3y_2 &\le 13 \quad \textit{vincolo attivo in } \mathbf{y} \\ y_1 + y_2 &\le 10 \quad \textit{vincolo attivo in } \mathbf{y} \\ 3y_1 &\le 6 \end{aligned}$$



Cosa succede?

Informazioni duali sul tableau del simplesso

$z^* = \max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}: \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathrm{R}^n\}$

$\mathbf{0}$	$(\mathbf{c_N}^T - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})$	$-\mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Vettore dei *costi ridotti*: $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c} - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$

costo ridotto della *i*-esima variabile $\boxed{\pi_i = c_i - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_i}$

Duale: $w^* = \max\{\mathbf{y}^T\mathbf{b} : \mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c}\}$

$$=$$

Duale: $w^* = \max\{\mathbf{y}^T\mathbf{b} : \mathbf{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{s} = \mathbf{c}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}\}$ $\boxed{s_i = c_i - \mathbf{A}_i^T\mathbf{y}}$

variabili di slack del duale

il costo ridotto della *i*-esima variabile primale corrisponde alla variabile di slack dell'*i*-esimo vincolo duale

Informazioni duali sul tableau del simplesso

Se un problema è nella forma

$$z^* = \max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}\text{: } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{x} \in R^n\}$$

con $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ (il problema di mix produttivo, per esempio) la soluzione ottima duale può essere letta direttamente nel tableau ottimo primale.

La trasformazione in forma canonica infatti richiede semplicemente l'introduzione delle variabili slack:

$$z^* = \max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}\text{: } \mathbf{Ax} + \mathbf{Is} = \mathbf{b},\ \mathbf{x},\ \mathbf{s} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{x} \in R^n,\ \mathbf{s} \in R^m\}$$

Il costo ridotto π_i della i-esima variabile di slack (quella associata all' i-esimo vincolo) è la i-esima variabile duale cambiata di segno. Infatti:

$$\pi_i = c_i - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_i$$

$$\pi_i = 0 - \mathbf{y}^T\mathbf{e}_i = -y_i$$

Esempio

Risolviamo il seguente problema di mix-produttivo

$$\begin{aligned} \max z = 2x_1 + x_2 & \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ -x_1 + x_2 &\leq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 &\leq 21 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

I° *tableau*

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	$-z$
2	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	5
-1	1	0	1	0	0
6	2	0	0	1	21

II° *tableau*

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	$-z$
0	1/3	0	0	-1/3	-21/3
0	2/3	1	0	-1/6	3/2
0	4/3	0	1	1/6	21/6
1	1/3	0	0	1/6	21/6

Esempio

III° *tableau* (ottimo)

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	$-z$
0	0	-1/2	0	-1/4	-93/12
0	1	3/2	0	-1/4	9/4
0	0	-2	1	1/2	1/2
1	0	-1/2	0	1/4	33/12

- La soluzione ottima primale è $x_1 = 33/12$ e $x_2 = 9/4$
- La soluzione ottima duale è $y_1 = 1/2, y_2 = 0$ e $y_3 = 1/4$

▶ Ricapitolando, sul **tableau ottimo**:

- Il costo ridotto della variabile slack del vincolo *i*-esimo corrisponde alla *i*-esima variabile duale ottima cambiata di segno;
- Il costo ridotto della variabile surplus del vincolo *i*-esimo corrisponde alla *i*-esima variabile duale ottima.

- Preliminari
- Il problema duale
- Alcuni problemi duali notevoli
- Teoria della dualità
- Il simplesso duale
- Analisi post-ottimale
- Interpretazione economica

Simplesso duale: motivazione

- il numero *medio* di iterazioni del simplesso cresce polinomialmente con il numero di vincoli: quindi se un problema ha molti più vincoli che variabili, conviene risolvere il suo duale.

- Se si aggiunge un nuovo vincolo dopo aver risolto all'ottimo un problema, la soluzione ottima potrebbe non essere più ammissibile: l'applicazione del simplesso richiede la Fase I.

Simplesso duale: idea

- coppia *primale-duale*

P: $z^* = \min \{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

D: $w^* = \max\{ \mathbf{y}^T\mathbf{b} \mid \mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c}\}$

$\boxed{\mathbf{c} - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \geq \mathbf{0}}$ con **B** base ammissibile di P

- è sia una condizione di ottimalità di **B** per il primale
- sia una condizione di ammissibilità di **B** per il duale

(infatti si riscrive come $\mathbf{A}^T\mathbf{y}^* \leq \mathbf{c}$ con $\mathbf{y}^* = (\mathbf{c_B}^T\, \mathbf{B}^{-1})^T$).

…e in effetti, una base **B** è ammissibile sia per primale sia per il duale <u>se e solo se</u> è ottima (corollario dualità forte).

Simplesso duale: idea

- **[Idea]** Si esplora una successione di soluzioni di base ammissibili per il duale fino a raggiungere una base ammissibile anche per il primale. Per la dualità forte la stessa base è ottima per il primale.

Tabella *canonica*

- Il simplesso duale può essere eseguito utilizzando lo stesso *tableau* del simplesso primale. In questo caso però la *forma canonica* richiede l'ammissibilità duale, ($\mathbf{c_N}^T - \mathbf{y}^T\mathbf{N} \geq \mathbf{0}$ se il primale è di minimo)

vincoli duali <u>attivi</u>	vincoli duali <u>non attivi</u>	valore della f.o. (cambiato di segno) in corrispondenza della SBA
$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{\pi}_\mathbf{N} = (\mathbf{c_N}^T - \mathbf{y}^T\mathbf{N})$	$-\mathbf{y}^T\mathbf{b}$
$\mathbf{I}(m \times m)$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

soluzione di base primale (non necessariamente ammissibile)

Criterio di ottimalità

- **[Teorema]** Sia **B** una base ammissibile duale e $\mathbf{y} = \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}$ la corrispondente SBA. Se $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq 0$ per ogni $j = 1,\ldots,m$, allora **y** è una soluzione ottima per il duale e $\mathbf{x} = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\ , \mathbf{0}]$ è ottima per il primale.

- **[Dim]** Se $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq 0$ allora la base **B** è ammissibile anche per il problema primale.

  Ricordando che **B** è ottima per la coppia primale-duale se e solo se è ammissibile per entrambi i problemi, possiamo concludere che $\mathbf{x} = [\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N}] = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\ , \mathbf{0}]$ è una soluzione ottima del problema primale. ■

Scelta della riga di pivot

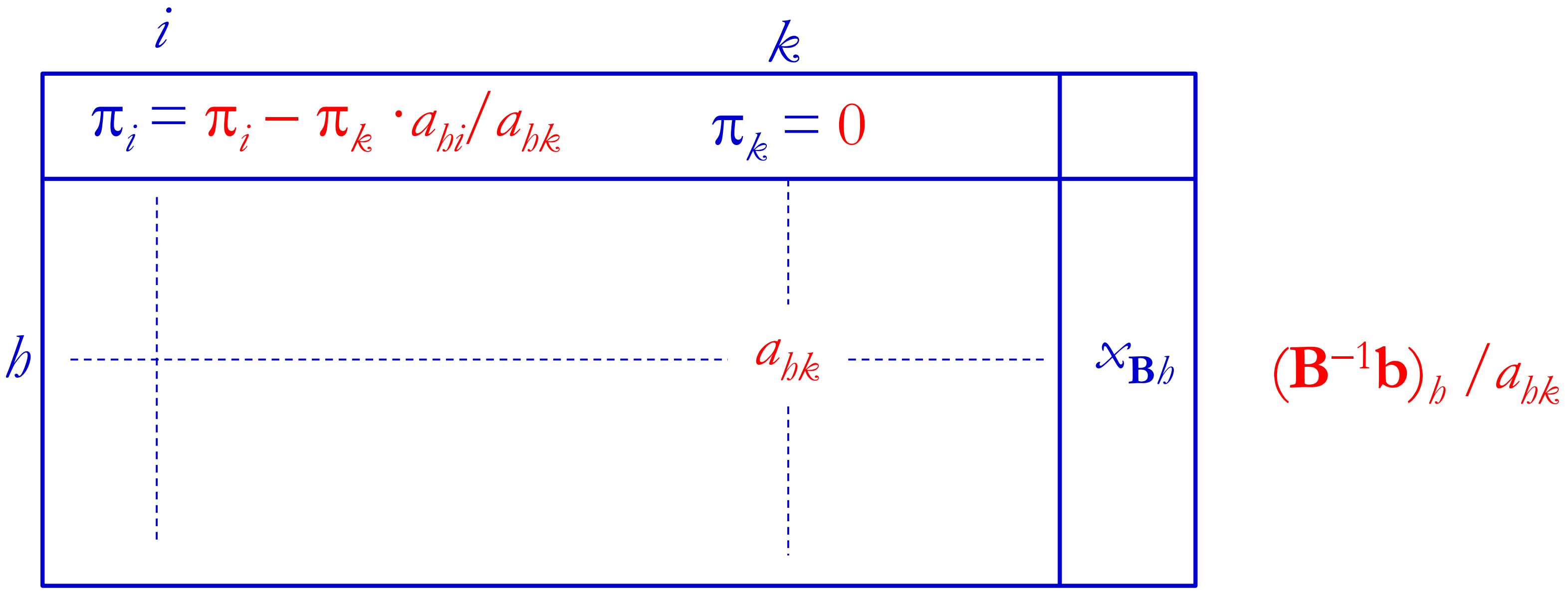
- La scelta della riga h deve essere fatta allo scopo di "aumentare" l'ammissibilità primale.

  Infatti, se il criterio di ottimalità non è soddisfatto esiste una riga h per cui $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_h < 0$; l'operazione di pivot ha quindi lo scopo di ottenere $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_h \geq 0$

[Regola] scegli una riga h tale che $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_h < 0$

Sia $\mathbf{a}_h$ la riga di pivot e $\boldsymbol{\pi}$ il vettore dei costi ridotti $(\mathbf{c}^T - \mathbf{y}^T\mathbf{A})$

Scelta della colonna di pivot



- Evidentemente, deve essere $a_{hk} \neq 0$. Inoltre, affinché si ottenga $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_h \geq 0$, deve essere $\boxed{a_{hk} < 0}$
- La scelta della colonna k deve garantire l'ammissibilità duale della nuova base: cioè si deve avere $\pi_i - \pi_k \cdot a_{hi} \,/\, a_{hk} \geq 0 \qquad i = 1,\ldots,n$

Scelta della colonna di pivot (cont.)

$$\underbrace{\pi_i}_{\geq 0} - \underbrace{\pi_k}_{\geq 0} \cdot a_{hi} / \underbrace{a_{hk}}_{< 0} \geq 0$$

- se $a_{hi} \geq 0$ la quantità è sempre **non** negativa;
- invece per le colonne i con $a_{hi} < 0$, la disequazione è soddisfatta se

$$|a_{hi}|\,\pi_k / |a_{hk}| \leq \pi_i \qquad \text{cioè se}$$

$$\pi_k / |a_{hk}| \leq \pi_i / |a_{hi}| \qquad \forall\ i \text{ con } a_{hi} < 0$$

Quindi la colonna k va scelta in modo tale

$$\boxed{\frac{\pi_k}{|a_{hk}|} = \min_{i:a_{hi}<0} \left\{ \frac{\pi_i}{|a_{hi}|} \right\}}$$

Scelta della colonna di pivot: regola

[Regola] tra tutte le colonne i che nella riga h hanno coefficiente strettamente negativo, scegli la colonna k che rende minimo il rapporto $\pi_i \, / \, | \, a_{hi} \, |$

- Applicando la precedente regola si osserva che il valore z della funzione obiettivo non decresce. Infatti dopo il pivot si ha

$$-z' = -z - \pi_k \, (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_h \, / \, a_{hk} \qquad \text{cioè}$$

$$z' = z + \pi_k \, (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_h \, / \, a_{hk} \qquad \text{con } \pi_k \geq 0,\ a_{hk} < 0 \text{ e } (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_h < 0,$$

quindi $z' \geq z$.

Criterio di illimitatezza

- Abbiamo visto che per garantire l'ammissibilità duale deve essere:

$$\pi_i \,/\, |a_{hi}| \geq \pi_k \,/\, |a_{hk}| \qquad\qquad \forall\ i \text{ con } a_{hi} < 0$$

- Quindi, se i coefficienti della riga h sono tutti ≥ 0, la funzione obiettivo può crescere arbitrariamente.

- **[Teorema]** Sia $\mathbf{B}$ una base ammissibile duale. Se esiste un h con $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_h < 0$ e $\mathbf{a}_h \geq \mathbf{0}$ (cioè se esiste una variabile di valore negativo e coefficienti riga tutti ≥ 0), allora il problema duale è illimitato superiormente, **quindi il problema primale è inammissibile.**

Algoritmo del simplesso duale: Fase II

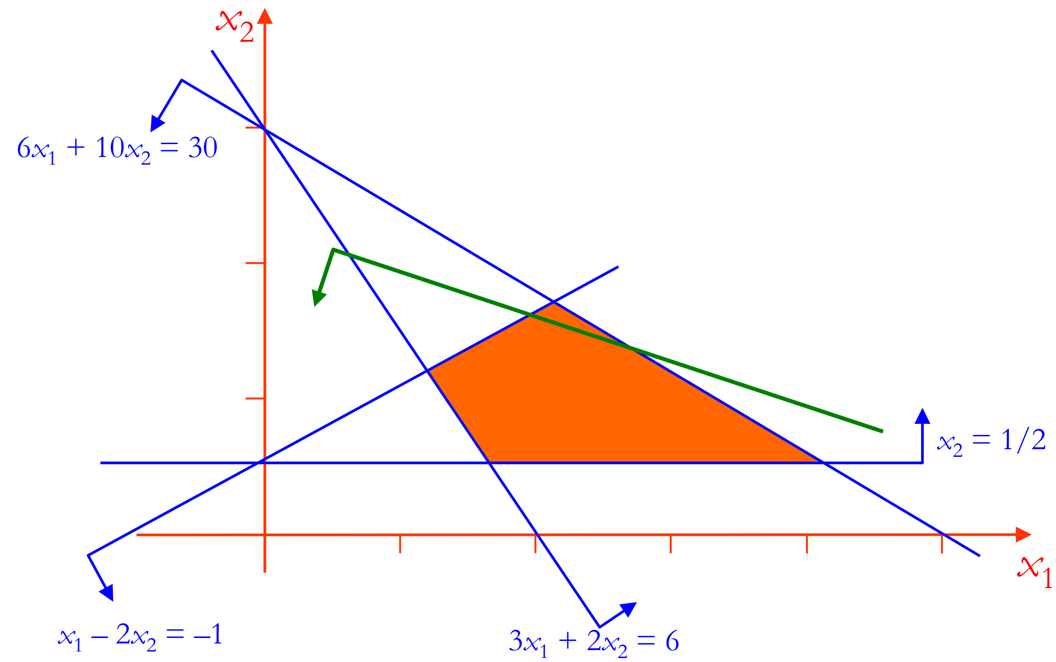
- Sia $\mathbf{B}$ una base ammissibile duale, $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c}^T - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ il vettore dei costi ridotti e il problema posto in forma canonica (per il simplesso duale) rispetto a $\mathbf{B}$.

[Algoritmo del Simplesso duale] (per un problema di minimo)

1. [Ottimalità] Se $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, la soluzione $\mathbf{x} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0})$ è ottima. Fine
2. [Variabile uscente] Scegli una riga h tale che $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_h < 0$
3. [Illimitatezza] Se $\mathbf{a}_h \geq \mathbf{0}$, allora il problema duale è illimitato e quindi il primale inammissibile. Fine
4. [Variabile entrante] Calcola $\pi_i \,/\, |a_{hi}|$ per ogni colonna i con $a_{hi} < 0$. Sia k l'indice di riga che realizza il minimo rapporto. $\mathbf{A}_k$ è la colonna entrante in base e la h-esima colonna di $\mathbf{B}$ è quella uscente.
5. [Aggiornamento] Esegui il pivot su a_{hk} : aggiungi ad ogni riga un multiplo della h-esima riga in modo da trasformare $\mathbf{A}_k$ nel versore $\mathbf{e}_h$.
6. Torna al punto 1.

Esempio

$$\min z = x_1 + 3x_2$$
$$6x_1 + 10x_2 \le 30$$
$$3x_1 + 2x_2 \ge 6$$
$$x_1 - 2x_2 \ge -1$$
$$x_2 \ge 1/2$$



- poniamo il problema in forma standard

$$\min z = x_1 + 3x_2$$
$$6x_1 + 10x_2 + s_1 = 30$$
$$3x_1 + 2x_2 - s_2 = 6$$
$$-x_1 + 2x_2 + s_3 = 1$$
$$x_2 - s_4 = 1/2$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \ge 0$$

Esempio: Tableau iniziale della Fase II

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$-z$
1	3	0	0	0	0	0
6	10	1	0	0	0	30
3	2	0	-1	0	0	6
-1	2	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	-1	1/2

- Il tableau non è in forma canonica (s_2 e s_4 sono versori ma con segno negativo).

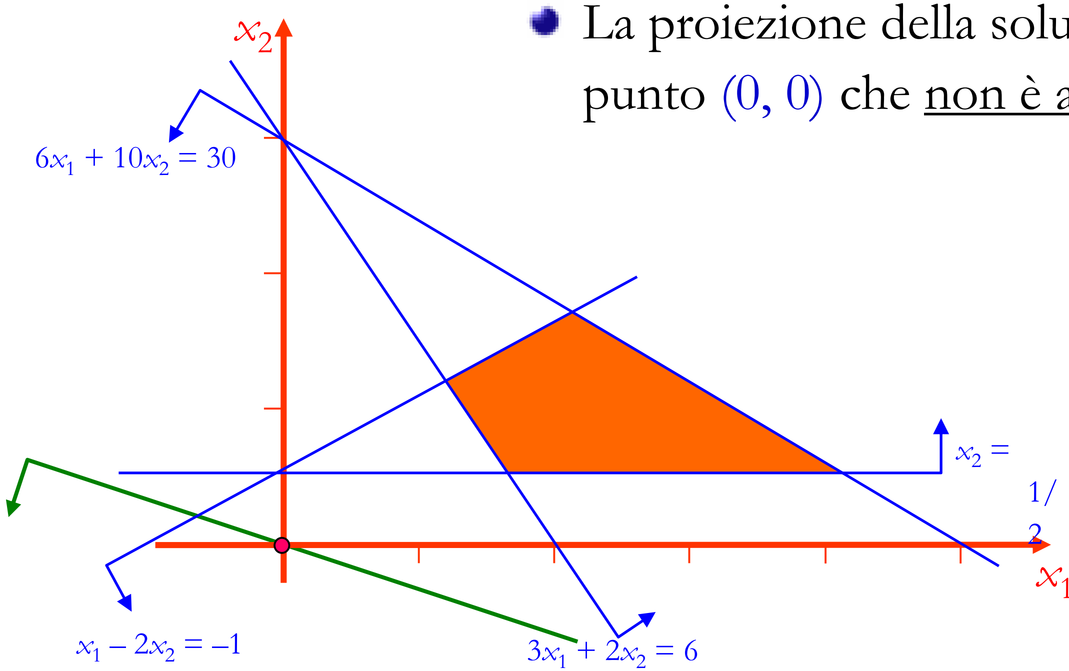
- Tuttavia, moltiplicando il 2° e 4° vincolo per –1 si ottiene la forma canonica per il simplesso duale

Esempio: Tableau iniziale della Fase II

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$-z$	
1	3	0	0	0	0	0	
6	10	1	0	0	0	30	s_1
-3	-2	0	1	0	0	-6	s_2
-1	2	0	0	1	0	1	s_3
0	-1	0	0	0	1	-1/2	s_4

$\mathbf{B} = [s_1 \mid s_2 \mid s_3 \mid s_4]$

$\mathbf{x} = [0, 0, 30, -6, 1, -1/2]$



- La proiezione della soluzione **x** nello spazio di x_1 e x_2 è il punto $(0, 0)$ che <u>non è ammissibile per il problema primale</u>.

- La soluzione corrente vale $z = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$

Esempio: Fase II, 1° pivot

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$-z$	
1	3	0	0	0	0	0	
6	10	1	0	0	0	30	s_1
$\boxed{-3}$	-2	0	1	0	0	-6	s_2
-1	2	0	0	1	0	1	s_3
0	-1	0	0	0	1	-1/2	s_4

- $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_2 < 0$ e $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_4 < 0$ indicano 2 variabili non ammissibili per il primale: la soluzione corrente non è ottima.
- $\mathbf{a}_2$ non è $\geq \mathbf{0}$ e $\mathbf{a}_4$ non è $\geq \mathbf{0}$: il problema duale non è illimitato.
- Scegliamo la riga 2: il rapporto minimo si ottiene in corrispondenza di x_1
- La riga di pivot è $h = 2$ e la colonna di pivot è $k = 1$.
  L'elemento di pivot è $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_{21} = -3$

Esempio: Fase II, 1° pivot

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$-z$
1	3	0	0	0	0	0
6	10	1	0	0	0	30
$\boxed{-3}$	-2	0	1	0	0	-6
-1	2	0	0	1	0	1
0	-1	0	0	0	1	-1/2

+

-1	-2/3	0	1/3	0	0	-2
-6	-4	0	2	0	0	-12
1	2/3	0	-1/3	0	0	2
1	2/3	0	-1/3	0	0	2
0	0	0	0	0	0	0

=

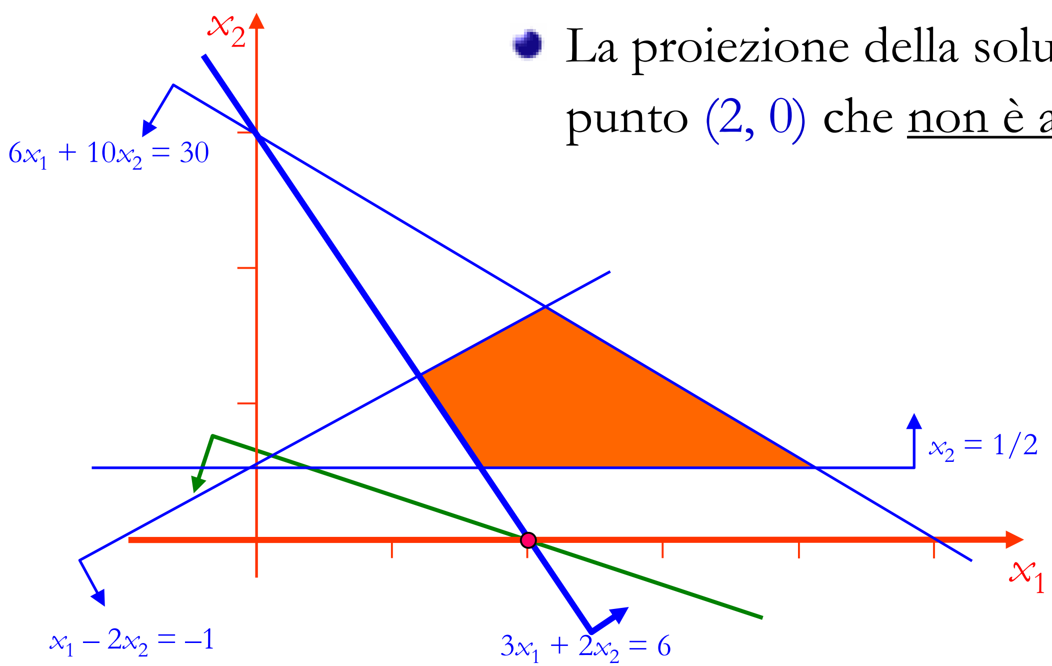
0	7/3	0	1/3	0	0	-2	
0	6	1	2	0	0	18	s_1
1	2/3	0	-1/3	0	0	2	x_1
0	8/3	0	-1/3	1	0	3	s_3
0	-1	0	0	0	1	-1/2	s_4

Esempio: Fase II, 1° pivot

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$-z$	
0	7/3	0	1/3	0	0	-2	
0	6	1	2	0	0	18	s_1
1	2/3	0	-1/3	0	0	2	x_1
0	8/3	0	-1/3	1	0	3	s_3
0	-1	0	0	0	1	-1/2	s_4

$\mathbf{B} = [x_1 \mid s_1 \mid s_3 \mid s_4]$

$\mathbf{x} = [2, 0, 18, 0, 3, -1/2]$



- La proiezione della soluzione $\mathbf{x}$ nello spazio di x_1 e x_2 è il punto (2, 0) che <u>non è ammissibile per il problema primale</u>.

- La soluzione corrente vale $z = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 2$

Esempio: Fase II, 2° pivot

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$-z$	
0	7/3	0	1/3	0	0	-2	
0	6	1	2	0	0	18	s_1
1	2/3	0	-1/3	0	0	2	x_1
0	8/3	0	-1/3	1	0	3	s_3
0	$\boxed{-1}$	0	0	0	1	-1/2	s_4

- $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_4 < 0$: **B** non è ammissibile primale e la soluzione corrente non è ottima.
- Inoltre $\mathbf{a}_4$ non è $\geq \mathbf{0}$: il problema duale non è illimitato.
- Scegliamo la riga 4: la scelta della colonna è univoca
- La riga di pivot è $h = 4$ e la colonna di pivot è $k = 2$. L'elemento di pivot è $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})_{42} = -1$

Esempio: Fase II, 2° pivot

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$-z$
0	7/3	0	1/3	0	0	-2
0	6	1	2	0	0	18
1	2/3	0	-1/3	0	0	2
0	8/3	0	-1/3	1	0	3
0	$\boxed{-1}$	0	0	0	1	-1/2

+

0	-7/3	0	0	0	7/3	-7/6
0	-6	0	0	0	6	-3
0	-2/3	0	0	0	2/3	-1/3
0	-8/3	0	0	0	8/3	-4/3
0	1	0	0	0	-1	1/2

=

0	0	0	1/3	0	7/3	-19/6	
0	0	1	2	0	6	15	s_1
1	0	0	-1/3	0	2/3	5/3	x_1
0	0	0	-1/3	1	8/3	5/3	s_3
0	1	0	0	0	-1	1/2	x_2

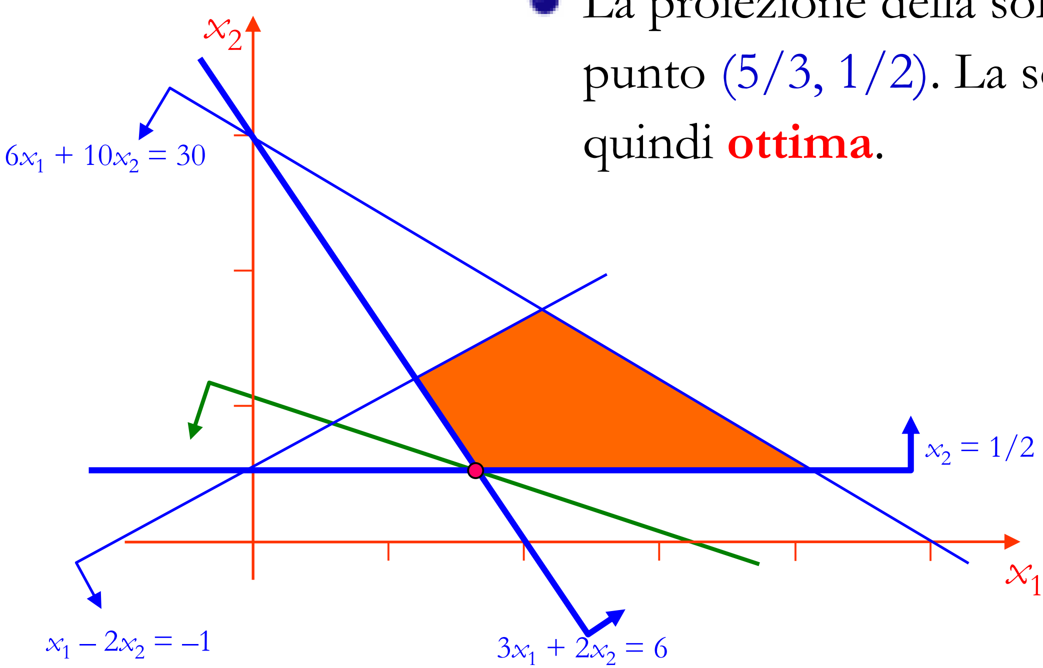
Esempio: Fase II, 2° pivot

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$-z$	
0	0	0	1/3	0	7/3	-19/6	
0	0	1	2	0	6	15	s_1
1	0	0	-1/3	0	2/3	5/3	x_1
0	0	0	-1/3	1	8/3	5/3	s_3
0	1	0	0	0	-1	1/2	x_4

$\mathbf{B} = [x_1 \mid x_2 \mid s_1 \mid s_3]$

$\mathbf{x} = [5/3, 1/2, 15, 0, 5/3, 0]$

- La proiezione della soluzione **x** nello spazio di x_1 e x_2 è il punto $(5/3, 1/2)$. La soluzione è ammissibile primale e quindi **ottima**.



- La soluzione corrente vale
  $z = 1 \cdot 5/3 + 3 \cdot 1/2 = 19/6$

Esercizio: problema della dieta

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{P})\ z^* = \min z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\
110x_1 + 160x_2 + 180x_3 \geq 2000 \\
4x_1 + 8x_2 + 13x_3 \geq 50 \\
2x_1 + 285x_2 + 54x_3 \geq 700 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Forma standard

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{P})\ z^* = \min z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\
110x_1 + 160x_2 + 180x_3 - s_1 = 2000 \\
4x_1 + 8x_2 + 13x_3 - s_2 = 50 \\
2x_1 + 285x_2 + 54x_3 - s_3 = 700 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

- La forma canonica primale richiede l'applicazione della Fase I.
- La forma canonica duale richiede un semplice cambio di segno dei vincoli

$$(P)\ z^* = \min z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$110x_1 + 160x_2 + 180x_3 - s_1 = 2000$$

$$4x_1 + 8x_2 + 13x_3 - s_2 = 50$$

$$2x_1 + 285x_2 + 54x_3 - s_3 = 700$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Pivot I

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$-z$	
2	3	4	0	0	0	0	
-110	-160	-180	1	0	0	-2000	s_1
-4	-8	$\boxed{-13}$	0	1	0	-50	s_2
-2	-285	-54	0	0	1	-700	s_3

- Pivot II

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$-z$	
0.77	0.54	0	0	0.31	0	-15.38	
-54.62	$\boxed{-49.23}$	0	1	-13.85	0	-1307.69	s_1
0.31	0.62	1	0	-0.08	0	3.85	x_3
14.62	-251.77	0	0	-4.15	1	-492.31	s_3

- Pivot III

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$-z$	
0.17	0	0	0.01	0.16	0	-29.69	
1.11	1	0	-0.02	0.28	0	26.56	x_2
$\boxed{-0.38}$	0	1	0.01	-0.25	0	-12.50	x_3
293.92	0	0	-5.11	66.66	1	6195.31	s_3

- Pivot IV

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$-z$	
0	0	0.46	0.02	0.04	0	-35.42	
0	1	2.96	0.02	$\boxed{-0.46}$	0	-10.42	x_2
1	0	-2.67	-0.03	0.67	0	33.33	x_1
0	0	783.79	4.68	-129.29	1	-3602.08	s_3

- Pivot V

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$-z$	
0	0.09	0.73	0.02	0	0	-36.36	
0	-2.18	-6.45	-0.04	1	0	22.73	s_2
1	1.45	1.64	-0.01	0	0	18.18	x_1
0	$\boxed{-282.09}$	-50.73	-0.02	0	1	-663.64	s_3

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$-z$	
0	0	0.71	0.02	0	0	-36.58	
0	0	-6.06	-0.04	1	-0.01	27.86	s_2
1	0	1.37	-0.01	0	0.01	14.76	x_1
0	1	0.18	0	0	0	2.35	x_2

- La soluzione di base è ammissibile primale e quindi ottima

- Preliminari
- Il problema duale
- Alcuni problemi duali notevoli
- Teoria della dualità
- Il simplesso duale
- Analisi post-ottimale
- Interpretazione economica

Analisi post-ottimale: motivazione

- Analisi della *stabilità* (o *robustezza*) delle soluzioni ottime rispetto alla variazione dei parametri e della struttura (numero di vincoli e variabili) del problema.

- scopo:
  - individuare i parametri più "*sensibili*", cioè quelli per cui anche una piccola variazione conduce a significative variazioni della soluzione ottima e del valore ottimo.
  - valutare l'opportunità di aumentare la disponibilità di risorse e/o stabilire un limite massimo sui costi che si è disposti a pagare o sconti che si è disposti ad effettuare.

Analisi post-ottimale: ipotesi di lavoro

- Per semplicità ci limitiamo all'analisi della variazione di **<u>un singolo</u>** coeff. della f.o. o termine noto;
- $\mathbf{B}(m \times m)$ base ottima e $\mathbf{x}^* = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}_{n-m})$ SBA ottima;
- $1,\ldots,m$ = indici di base;
- $m + 1,\ldots,n$ = indici fuori base.

Esempio: mix produttivo

	composizione			
	Azoto	Fosforo	Potassio	Profitto (per Kg)
prodotto A	10%	40%	20%	24 €
prodotto B	10%	20%	40%	18 €
disp. (Kg)	4	13.2	14	

- La soluzione ottima consiste nel produrre 2.6 Kg di prodotto A e 1.4 Kg di prodotto B con un profitto totale di 87.6 €.

mix produttivo: domande

- Supponendo che il prezzo di vendita (e quindi il profitto unitario) sia stato stimato dal reparto marketing, quanto dipende la soluzione ottima dall'accuratezza della stima?

- Quali sono i margini di manovra sulla definizione dei prezzi una volta che il mix produttivo è stato stabilito?

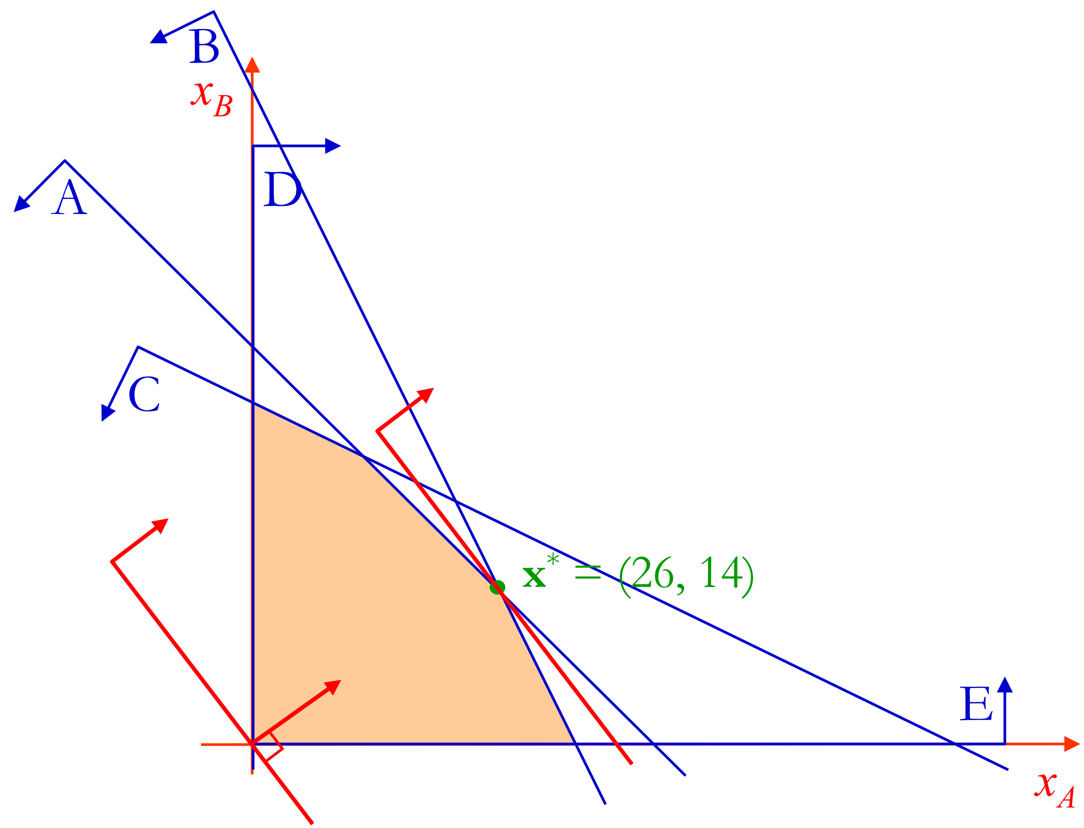
Interpretazione geometrica: coeff. della f.o.

- Ci interessa stabilire quali sono gli <u>intervalli</u> di variazione dei coefficienti della f.o. che non modificano la soluzione ottima corrente.

$$z^* = \max 24x_A + 18x_B$$

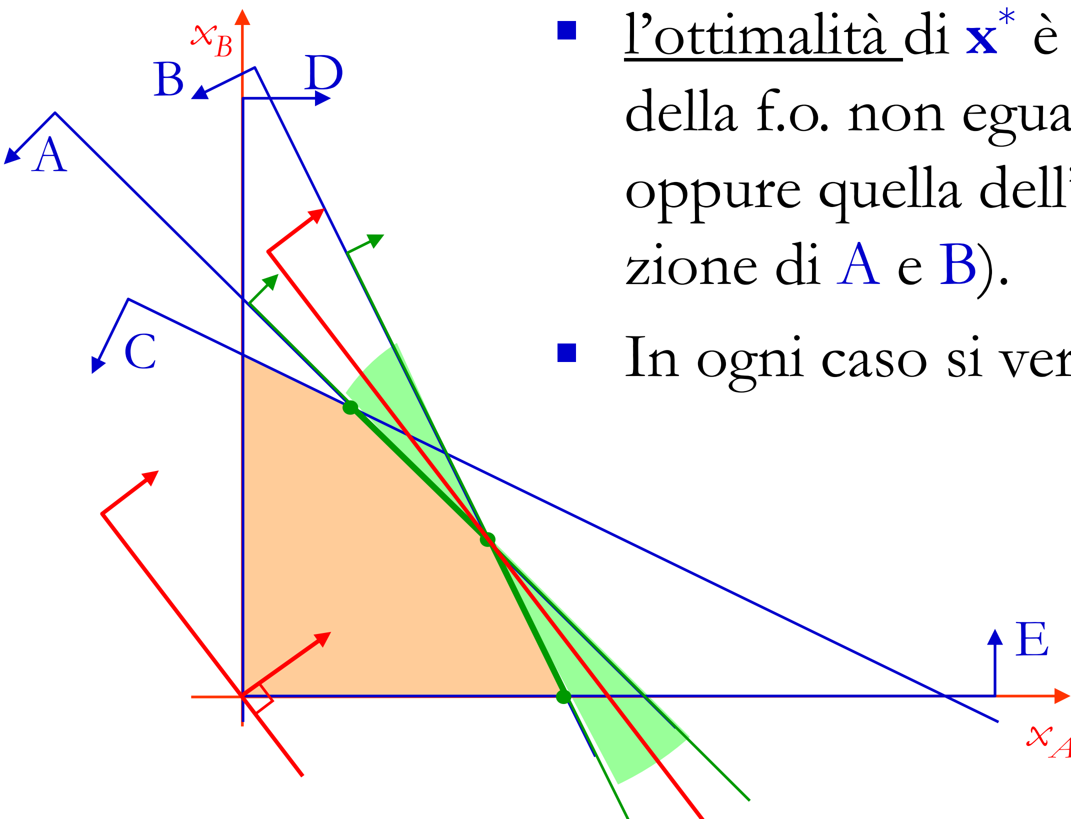
$$\begin{array}{lrcrl} A: & \boxed{x_A} & + & x_B & \leq 40 \\ B: & 4x_A & + & 2x_B & \leq 132 \\ C: & 2x_A & + & 4x_B & \leq 140 \\ D,E: & & & x_A, x_B & \geq 0 \end{array}$$

vincoli attivi



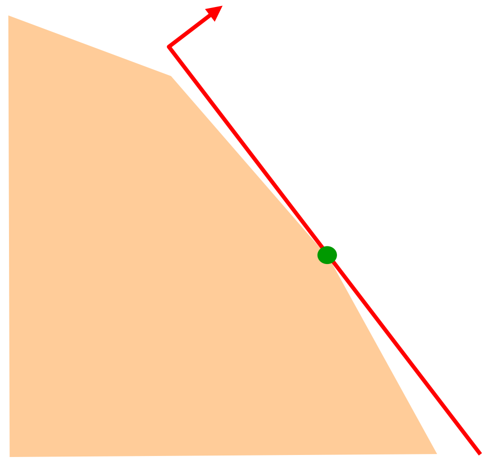
Interpretazione geometrica: coeff. della f.o.

- I coeff. della f.o. determinano la pendenza della f.o.: la loro variazione non modifica il poliedro e quindi non compromette l'ammissibilità della soluzione ottima $\mathbf{x}^*$.

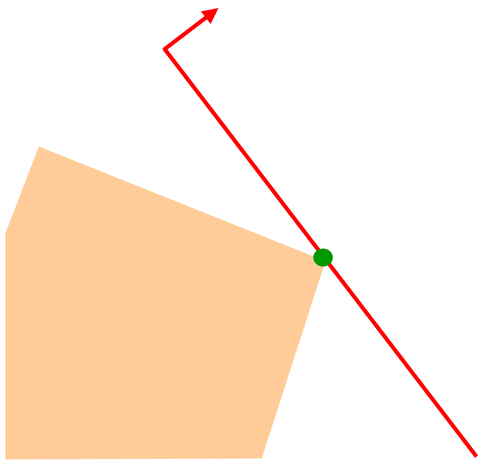


  - l'ottimalità di $\mathbf{x}^*$ è garantita finché la pendenza della f.o. non eguaglia quella dell'iperpiano A oppure quella dell'iperpiano B ($\mathbf{x}^*$ è l'intersezione di A e B).
  - In ogni caso si verifica una variazione di z^*

Interpretazione geometrica: coeff. della f.o.



- Soluzione *poco* robusta rispetto alla variazione dei coefficienti di costo



- Soluzione *molto* robusta rispetto alla variazione dei coefficienti di costo

Esempio: intervallo di variazione di $c_A = 24$

- La f.o. ($\nabla = [c,18]$) è parallela all'iperpiano B: $4x_A + 2x_B = 132$ ($\nabla = [4,2]$) per il valore di c soluzione del sistema

$$\boxed{\begin{bmatrix} c \\ 18 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

Soluzione: $k = 9$ e $c = 36$

- Analogamente la f.o. è parallela all'iperpiano A: $x_A + x_B = 40$ ($\nabla = [1,1]$) per il valore di c soluzione del sistema

$$\boxed{\begin{bmatrix} c \\ 18 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Soluzione: $k = 18$ e $c = 18$

$$\boxed{\delta \in [-6, +12]}$$

$\mathbf{x}^*$ resta ottima per valori di c_A in $[18, 36]$

Esempio: intervallo di variazione di $c_B = 18$

- La f.o. ($\nabla = [24, c]$) è parallela all'iperpiano A: $x_A + x_B = 40$ ($\nabla = [1,1]$) per il valore di c soluzione del sistema

$$\boxed{\begin{bmatrix} 24 \\ c \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Soluzione: $k = 24$ e $c = 24$

- Analogamente la f.o. è parallela all'iperpiano B: $4x_A + 2x_B = 132$ ($\nabla = [4,2]$) per il valore di c soluzione del sistema

$$\boxed{\begin{bmatrix} 24 \\ c \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

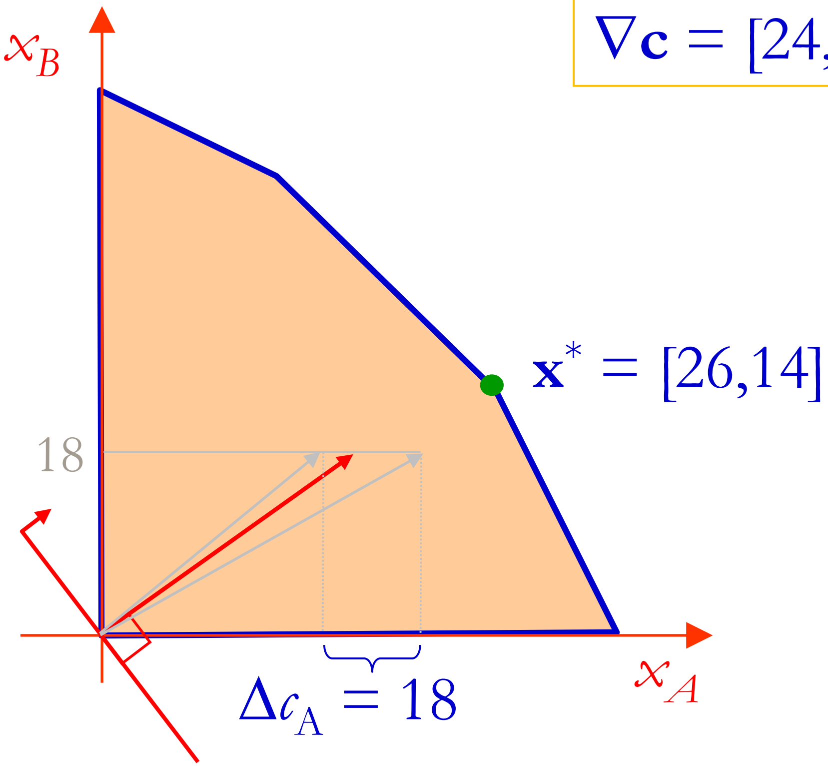
Soluzione: $k = 6$ e $c = 12$

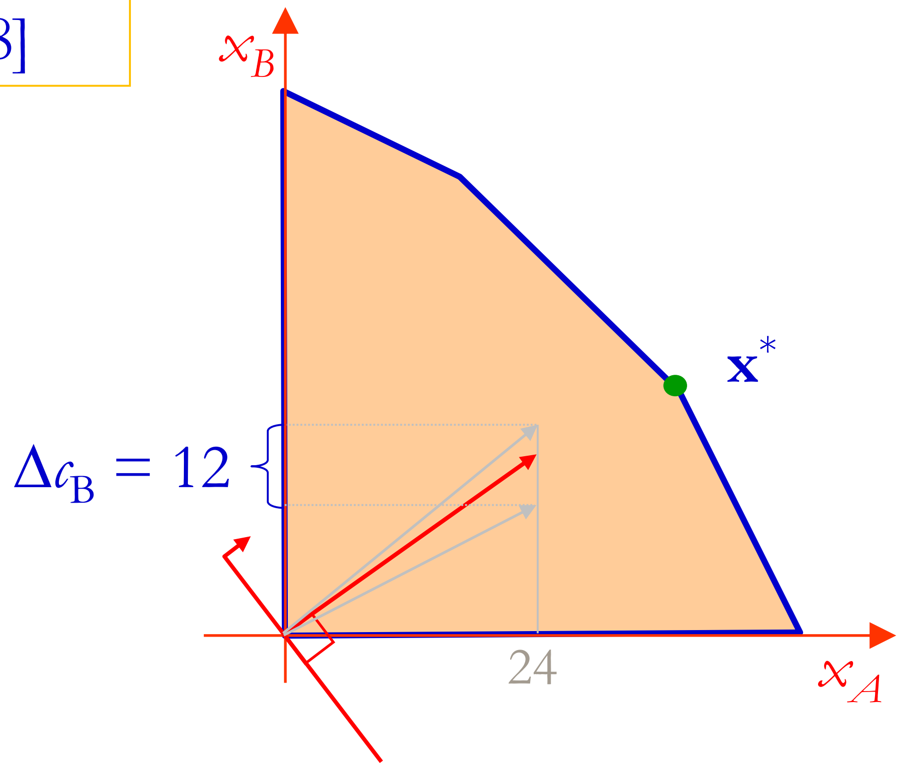
$$\boxed{\delta \in [-6, +6]}$$

$\mathbf{x}^*$ resta ottima per valori di c_B in $[12, 24]$

Interpretazione geometrica: coeff. della f.o.

$\nabla \mathbf{c} = [24, 18]$





$c_A \in [18, 36]$ $\quad z^* = c_A\, x^*_A + 18x^*_B \in [72.0, 118.8]$

$c_B \in [12, 24]$ $\quad z^* = 24x^*_A + c_B\, x^*_B \in [79.2, 96.0]$

[Attenzione] Gli intervalli sono validi solo per variazioni di **un singolo** parametro. Per es. $\mathbf{x}^*$ non è più ottima se $c_A = 36$ e $c_B = 12$

mix produttivo: domande

- Supponendo che il prezzo di vendita (e quindi il profitto unitario) sia stato stimato dal reparto marketing, quanto dipende la soluzione ottima dall'accuratezza della stima?

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta c_A / c_A = 18/24 = 0.75 \\ \Delta c_B / c_B = 12/18 = 0.66 \end{array}}$$

la stima di c_B è più critica.

- Quali sono i margini di manovra sulla definizione dei prezzi una volta che il mix produttivo è stato stabilito?

Una volta stabilito il mix produttivo ottimale $x_A = 26$ e $x_B = 14$, il marketing può variare i prezzi in modo che i profitti unitari restino negli intervalli $c_A \in [18, 36]$ e $c_B \in [12, 24]$.

Analisi post-ottimale: coeff. della f.o.

Se il coeff. della f.o. c_i subisce una variazione $\delta_i \in R$

$$\boxed{c_i \to c_i + \delta_i}$$

- $\mathbf{x}^*$ è ancora ammissibile ($\mathbf{c}$ non incide sulla condizione di ammissibilità $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$)

- $\mathbf{x}^*$ è ottima se continuano a valere le condizioni di ottimalità

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c} - \mathbf{c}_B{}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \leq \mathbf{0} \qquad \text{(problema di max)}$$

Analisi post-ottimale: coeff. della f.o.

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c} - \mathbf{c}_B{}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \leq \mathbf{0}$$

Se la variabile i è fuori base, il vettore $\mathbf{c}_B$ non cambia quindi cambia solo l'i-esimo costo ridotto.

I valori possibili di δ_i sono quelli per cui

$$c_i + \delta_i - \mathbf{c}_B{}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_i \leq 0$$

$$\delta_i \leq -c_i + \mathbf{c}_B{}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_i$$

$$\delta_i \leq -\pi_i$$

[Interpretazione] Il costo ridotto (in valore assoluto) indica la *variazione* del coeff. della f.o. della variabile i-esima, superata la quale la variabile stessa diventa *profittevole*, cioè candidata ad entrare in base.

Analisi post-ottimale: coeff. della f.o.

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c} - \mathbf{c}_B{}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \leq \mathbf{0}$$

Se la variabile i è in base, la variazione di c_i incide su tutti i coefficienti di costo ridotto

Dopo un'operazione di pivot sulla variabile x_i (necessaria per ristabilire la forma canonica) i nuovi costi ridotti delle variabili fuori base ($k = m + 1,\ldots, n$) sono:

$$c_k - (\mathbf{c}_B + \delta_i\mathbf{e}_i)^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_k \leq 0$$

$$c_k - \mathbf{c}_B{}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_k \leq \delta_i \boxed{\mathbf{e}_i{}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_k}$$

elemento β_{ik} sulla riga i e colonna k della matrice $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$ (riga i del tableau)

$$\pi_k \leq \delta_i\beta_{ik}$$

Analisi post-ottimale: coeff. della f.o.

- Procedura di calcolo: Sia $\boldsymbol{\beta}_i$ la riga *i*-esima del tableau ottimo. Il valore minimo di δ_i è dato dalla soluzione del sistema di $n - m$ disequazioni:

$$\pi_k \leq \delta_i \beta_{ik} \qquad \forall\ k = m + 1, \ldots, n$$

Esempio

$$\begin{aligned} \max z = \ & 5x_1 + x_2 - 12x_3 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ & 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 16 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Tableau ottimo

x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
0	0	-2	-7	-12
1	0	-3	2	2
0	1	5	-3	2

$\mathbf{I}$ $\quad$ $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$

- soluzione ottima primale $x^* = (2,2,0,0)$
- soluzione ottima duale $y^* = (-10,7)$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio: coefficienti della f.o.

Tableau ottimo

x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
0	0	-2	-7	-12
1	0	-3	2	2
0	1	5	-3	2

- coefficiente c_1
  prima colonna della base quindi si considera la prima riga del tableau:

$$\begin{cases} -2 \leq -\delta_1 3 \\ -7 \leq \delta_1 2 \end{cases}$$

$$\boxed{-7/2 \leq \delta_1 \leq 2/3}$$

Esempio: coefficienti della f.o.

Tableau ottimo

x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
0	0	-2	-7	-12
1	0	-3	2	2
0	1	5	-3	2

- coefficiente c_2
  seconda colonna della base quindi si considera la seconda riga del tableau:

$$\begin{cases} -2 \leq \delta_2 5 \\ -7 \leq -\delta_2 3 \end{cases}$$

$$\boxed{-2/5 \leq \delta_2 \leq 7/3}$$

Esempio: coefficienti della f.o.

Tableau ottimo

x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
0	0	–2	–7	-12
1	0	–3	2	2
0	1	5	–3	2

- coefficiente c_3
  colonna non in base: $\boxed{\delta_3 \leq -(-2)}$

- coefficiente c_4
  colonna non in base: $\boxed{\delta_4 \leq -(-7)}$

Esempio: coefficienti della f.o.

- Riepilogo: la soluzione corrente resta ottima quando **un singolo** coefficiente della f.o. varia in uno degli intervalli:

$$c_1 \in [5 - 7/2,\ 5 + 2/3]$$
$$c_2 \in [1 - 2/5,\ 1 + 7/3]$$
$$c_3 \in (-\infty,\ -12 + 2]$$
$$c_4 \in (-\infty,\ 0 + 7]$$

Evidentemente, il nuovo valore ottimo deve essere ricalcolato utilizzando i nuovi coefficienti

Esercizio

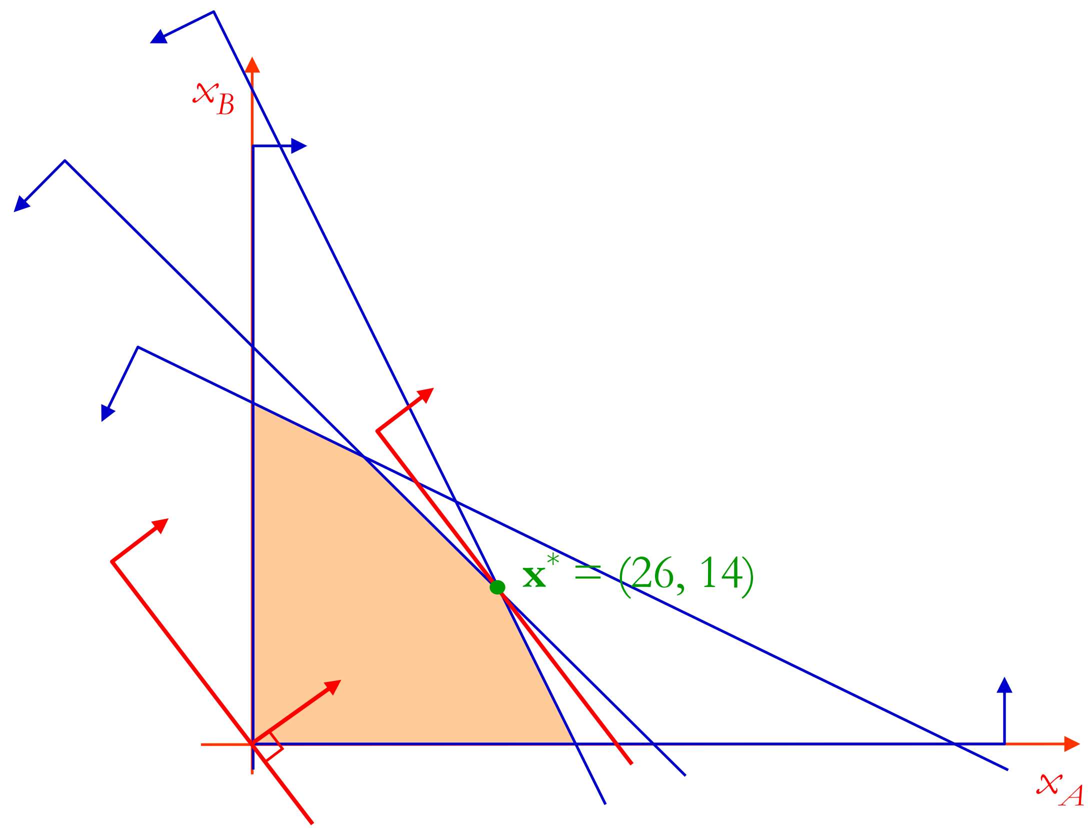
1. Determinare un problema di mix produttivo con 2 prodotti e 4 risorse la cui soluzione ottima prevede la realizzazione di un solo prodotto.
2. Quali indicazioni forniscono le variazioni dei coeff. della f.o. relativi alle variabili di slack?

Interpretazione geometrica: termini noti

- Ci interessa stabilire quali sono gli <u>intervalli</u> di variazione dei termini noti che mantengono l'ottimalità (e quindi l'ammissibilità) della <u>**base**</u> corrente.

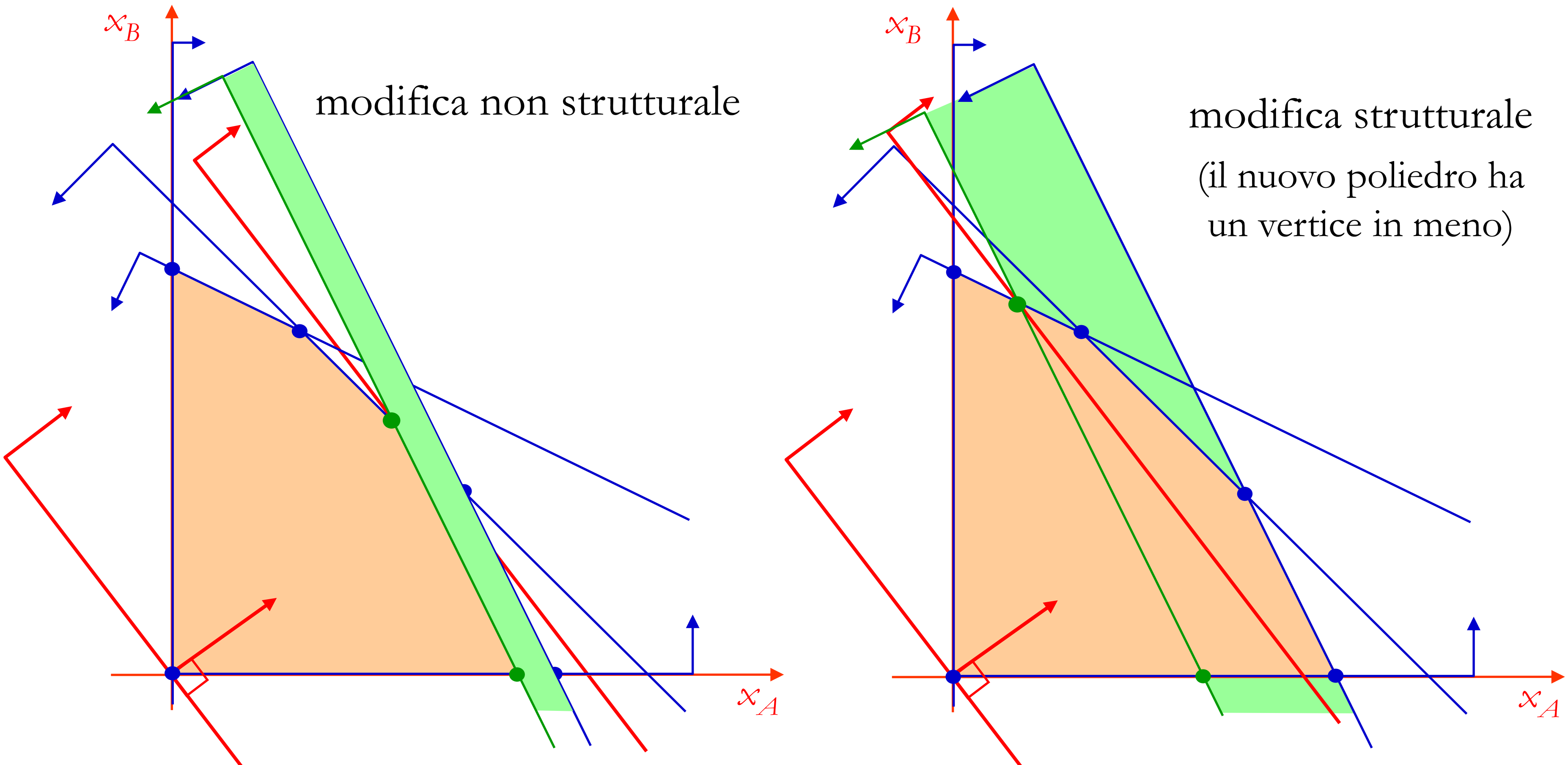
$$
\begin{array}{rl}
z^* = \max & 24x_A + 18x_B \\
& x_A + x_B \le 40 \\
& 4x_A + 2x_B \le 132 \\
& 2x_A + 4x_B \le 140 \\
& x_A, x_B \ge 0
\end{array}
$$

vincoli attivi



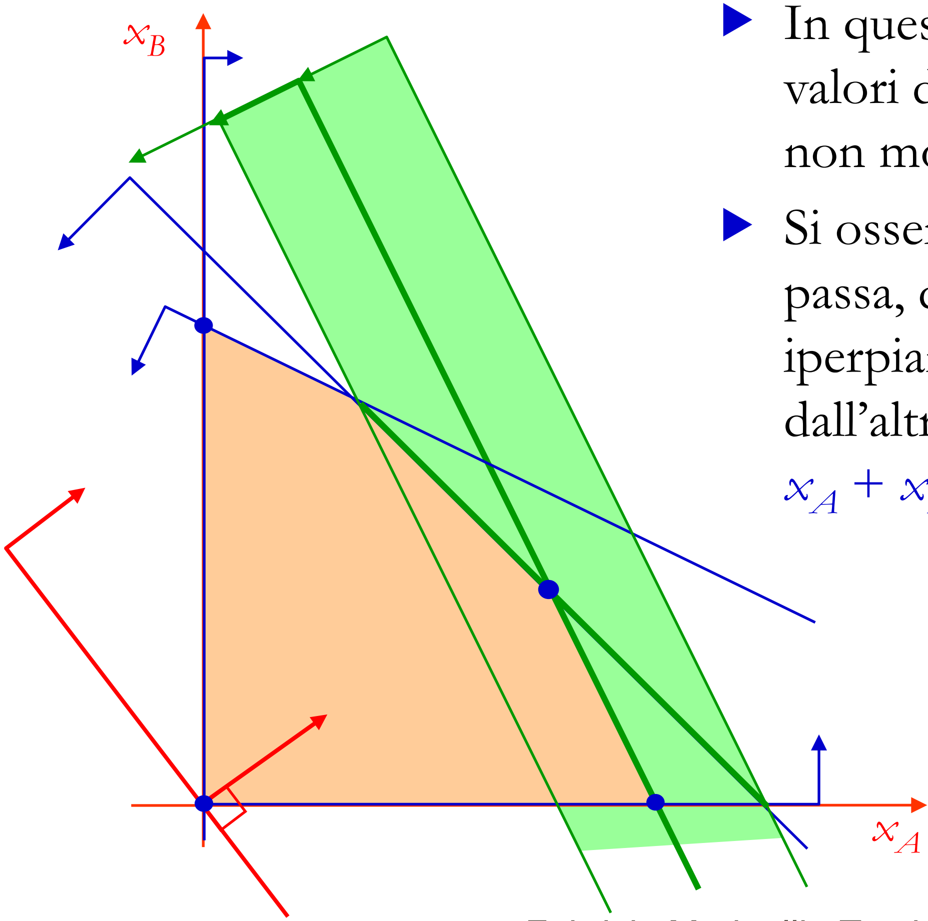
Interpretazione geometrica: termini noti

- I termini noti determinano l'intersezione del vincolo con gli assi coordinati.
  La loro variazione può <u>modificare</u> il poliedro in modo strutturale (quando cambia il numero delle basi ammissibili) e non (se il numero delle basi ammissibili non cambia).



Interpretazione geometrica: termini noti

- Se la modifica non è strutturale il vertice ottimo continua ad essere determinato dall'intersezione degli stessi iperpiani. Ciò vuol dire che la **base** ottima non cambia (ma, attenzione!, cambiano le coordinate del vertice ottimo).



- In questo esempio si tratta di stabilire per quali valori del termine noto, l'iperpiano $4x_A + 2x_B = b_2$ non modifica strutturalmente il poliedro.
- Si osserva che ciò accade finché l'iperpiano non passa, da un lato, per il vertice determinato dagli iperpiani $x_A + x_B = 40$ e $2x_A + 4x_B = 140$ e dall'altro per il vertice determinato dagli iperpiani $x_A + x_B = 40$ e $x_B = 0$

Interpretazione geometrica: termini noti

- Il vertice determinato dagli iperpiani $x_A + x_B = 40$ e $x_B = 0$ è $(40,0)$. Sostituendo, otteniamo $b_2 = 160$.

▶ **[esercizi]**

1. Qual è l'altro estremo di variabilità del termine noto b_2 ?
2. Qual è l'intervallo di variabilità del termine noto b_1 ?

Analisi post-ottimale: termini noti

Se il termine noto b_i dell'i-esimo vincolo subisce una variazione $\delta_i \in R$

$$\boxed{b_i \rightarrow b_i + \delta_i}$$

La base corrente $\mathbf{B}$ resta ottima se permangono le condizioni di ammissibilità $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.

Infatti le condizione di ottimalità $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{c} - \mathbf{c}_B{}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \leq \mathbf{0}$ non dipendono da $\mathbf{b}$.

Analisi post-ottimale: termini noti

La base $\mathbf{B}$ quindi resta ammissibile se

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \delta_i \mathbf{e}_i) \geq \mathbf{0} \qquad \text{cioè se}$$

$$\mathbf{x}_\text{B} + \delta_i \boxed{\mathbf{B}_{i}^{-1}} \geq \mathbf{0}$$

i-esima colonna di $\mathbf{B}^{-1}$

- Procedura di calcolo: risolvi il sistema di m disequazioni

$$\mathbf{x}_\text{B} + \delta_i \mathbf{B}_{i}^{-1} \geq \mathbf{0}_m$$

Analisi post-ottimale: termini noti

- Per variazioni di δ_i che conservano l'ammissibilità di $\mathbf{B}$ la nuova soluzione ottima è:

$$\mathbf{x}^* = (\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \delta_i \mathbf{e}_i), \mathbf{0}_{n-m})$$

di valore

$$\mathbf{c}^T(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \delta_i \mathbf{e}_i), \mathbf{0}_{n-m}) = \mathbf{c}_B{}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \delta_i \mathbf{c}_B{}^T\, \mathbf{B}_i^{-1}$$
$$= \mathbf{z}^* + \delta_i y_i$$

- Per variazioni di b_i al di fuori dell'intervallo, è necessario riapplicare il simplesso per determinare la nuova soluzione ottima

Esempio

$$\max z = 5x_1 + x_2 - 12x_3$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$
$$5x_1 + 3x_2 + x_4 = 16$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Tableau ottimo

x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
0	0	-2	-7	-12
1	0	-3	2	2
0	1	5	-3	2

$\mathbf{I}$ $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$

- soluzione ottima primale $x^* = (2,2,0,0)$
- soluzione ottima duale $y^* = (-10,7)$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio: termini noti

Tableau ottimo

x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$
0	0	-2	-7	-12
1	0	-3	2	2
0	1	5	-3	2

soluzione ottima primale

$$\mathbf{x} = (2,2,0,0)$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

- Termine noto b_1: il primo vincolo è associato alla prima colonna di $\mathbf{B}^{-1}$

$$\begin{cases} 2 - 3\delta \geq 0 \\ 2 + 5\delta \geq 0 \end{cases} \qquad -2/5 \leq \delta \leq 2/3$$

- Termine noto b_2: il secondo vincolo è associato alla seconda colonna di $\mathbf{B}^{-1}$

$$\begin{cases} 2 + 2\delta \geq 0 \\ 2 - 3\delta \geq 0 \end{cases} \qquad -1 \leq \delta \leq 2/3$$

- Riepilogo: la <u>base corrente</u> resta am-missibile (e quindi ottima) per varia-zioni dei termini noti nei seguenti intervalli:
  $b_1 \in [10 - 2/5,\ 10 + 2/3]$
  $b_2 \in [16 - 1,\ 16 + 2/3]$

Esercizi

1. Qual è l'intervallo di variazione di un coeff. di costo nel caso di un problema di minimo?
2. Qual è l'intervallo di variazione di un termine noto nel caso di un problema di minimo?
3. Esibire un caso in cui l'intervallo di variazione di un termine noto è 0

- Preliminari
- Il problema duale
- Alcuni problemi duali notevoli
- Teoria della dualità
- Il simplesso duale
- Analisi post-ottimale
- Interpretazione economica

Variabili duali come *costi marginali*

Per oscillazioni del vettore risorsa $\mathbf{b}$ che <u>conservano l'ammissibilità della base corrente</u> possiamo calcolare la variazione della f.o.

Se $b_i \rightarrow b_i + \delta$ allora

$$z^* = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{c}_B{}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c}_B{}^T\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \delta\mathbf{e}_i) = \mathbf{c}_B{}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \delta\mathbf{c}_B{}^T\mathbf{B}_i{}^{-1}$$

ma $\mathbf{c}_B{}^T\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{y}^*$ quindi

$$\mathbf{c}_B{}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \delta\mathbf{c}_B{}^T\mathbf{B}_i{}^{-1} = \mathbf{y}^*\mathbf{b} + \delta y_i = z^* + \delta y_i{}^*$$

$y_i{}^*$ rappresenta il costo *marginale* (o *prezzo ombra*) della risorsa i, cioè esprime la variazione della f.o. che si ottiene se la risorsa i-esima varia di una unità.

Variabili duali come *costi marginali*

In effetti, si osserva facilmente che

$z^* = \mathbf{c}_B{}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{y}^*\mathbf{b} = y_1{}^*b_1 + \ldots + y_m{}^*b_m$ e che quindi $\boxed{\dfrac{\partial z^*}{\partial b_i} = y_i}$

cioè la soluzione ottima duale è il gradiente della f.o. al variare di **b**

Osservazione:

Dalle condizioni di ortogonalità

- se il vincolo *i*-esimo del primale non è attivo allora $y_i{}^* = 0$
  non sono disposto a pagare nulla per aumentare la risorsa i-esima perché la soluzione ottima non utilizza tutta la sua disponibilità

- $y_i{}^* > 0$ allora il vincolo *i*-esimo del primale è attivo
  la risorsa i-esima è un collo di bottiglia: per migliorare la soluzione corrente devo aumentare la sua disponibilità e quindi sono disposto a pagare

Esempio: il modello di mix di produzione

$$(P)\ z^* = \max 30x_A + 20x_B$$

$$\begin{array}{lrl} p) & 8x_A + 4x_B & \leq 640 \\ q) & 4x_A + 6x_B & \leq 540 \\ r) & x_A + x_B & \leq 100 \\ & x_A, x_B & \geq 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima è

$$\mathbf{x}^* = \{60, 40\}$$

$$z^* = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = 2600$$

$$(D)\ w^* = \min 640y_p + 540y_q + 100y_r$$

$$\begin{array}{lrl} A) & 8y_p + 4y_q + y_r & \geq 30 \\ B) & 4y_p + 6y_q + y_r & \geq 20 \\ & y_p, y_q, y_r & \geq 0 \end{array}$$

Una soluzione ottima è

$$\mathbf{y}^* = \{5/2, 0, 10\}$$

$$w^* = \mathbf{y}^{*T}\mathbf{b} = 2600$$

Esempio: il modello di mix di produzione

$\mathbf{x}^* = \{60{,}40\}$, $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = 2600$, $\mathbf{y}^* = \{5/2, 0, 10\}$

10 è il *costo marginale* della risorsa r e rappresenta il prezzo massimo che l'azienda è disposta a pagare per acquisire una unità aggiuntiva di risorsa r. Infatti tale unità darebbe un incremento del profitto pari a 10:

$$z^* \rightarrow z^* + \delta y_r = z^* + 10\delta$$

il *costo marginale* della risorsa q è zero perché il corrispondente vincolo del primale $4x_A + 6x_B \leq 540$ non è attivo nella soluzione ottima $\mathbf{x}^*$. Quindi, una ulteriore quantità di risorsa q non è di nessuna utilità all'azienda.

Bibliografia

1. Lezioni del prof. Claudio Arbib (www.oil.di.univaq.it)

2. Carlo Vercellis,
   Ottimizzazione. Teoria, metodi, applicazioni,
   Mc Graw-Hill, 2008

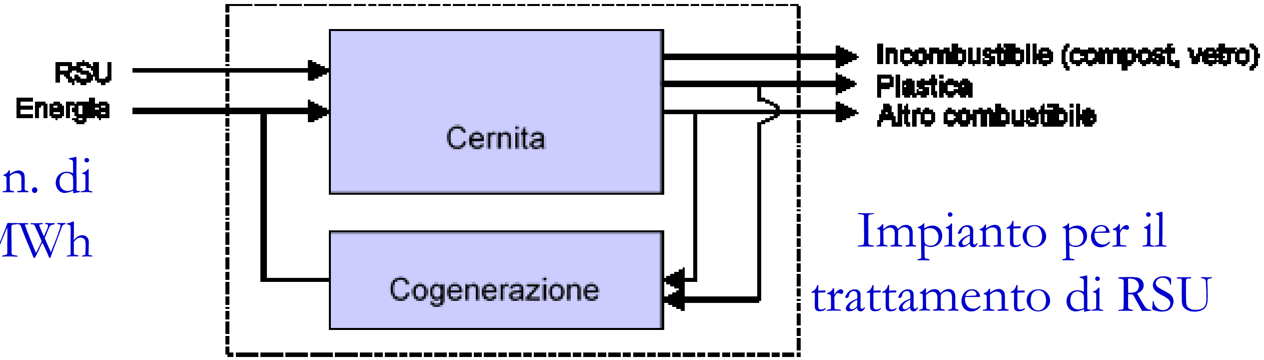
3. Vašek Chvátal,
   Linear Programming,
   W.H. Freeman & Co., New York, 1983

4. D. Bertsimas and J.N. Tsitsiklis,
   Introduction to Linear Optimization,
   Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1997

Appendice:

Dualità per stabilire condizioni di ottimalità

Gestione di un impianto trattamento RSU



L'impianto tratta 600 ton. di RSU e consuma 480 MWh

Impianto per il trattamento di RSU

I RSU trattati producono

- 20% materiale incombustibile
- 30% plastica (venduta a 240 €/ton oppure usata come combustibile)
- 50% di altro combustibile (venduto a 170 €/ton oppure usato come combustibile)

- L'impianto di cogenerazione produce 2,4 MWh (Megawatt ora) per ogni ton. di plastica bruciata, e 1,6 MWh per ogni ton. di altro combustibile.
- L'energia può essere acquistata esternamente a 210€/MWh.

Quanta plastica e altro combustibile è opportuno utilizzare per la cogenerazione se si vogliono massimizzare i profitti dell'impianto al netto dei costi di funzionamento?

Un modello di PL

Variabili decisionali

$e \geq 0$ MWh di energia da acquistare;

$p \geq 0$ ton. di plastica da destinare alla cogenerazione;

$c \geq 0$ ton. di altro combustibile da destinare alla cogenerazione.

Vincoli

$e + 2.4p + 1.6c = 480$ fabbisogno di energia dell'impianto

$p \leq 180$

$c \leq 300$

l'impianto produce $0.30 \cdot 600 = 180$ ton. di plastica e $0.50 \cdot 600 = 300$ ton. di altro combustibile

Un modello di PL

Funzione obiettivo

$$
\begin{aligned}
z &= 210e - 240(180 - p) - 170(300 - c) \\
&= 210e + 240p + 170c - 94200
\end{aligned}
$$

costo di esercizio: costo dell'energia acquistata meno ricavi dovuti alla vendita di plastica e altro combustibile

$$
\begin{aligned}
z = \min\ & 210e + 240p + 170c \\
& 10e + 24p + 16c = 4800 \\
& p \le 180 \\
& c \le 300 \\
& e, p, c \ge 0
\end{aligned}
$$

Un modello di PL

$$z = \min 210e + 240p + 170c$$

$$10e \quad + 24p + \quad 16c = 4800$$

$$p \leq 180$$

$$c \leq 300$$

$$e, p, c \geq 0$$

- Il vincolo di uguaglianza può essere rilassato in vincolo di $\geq$
- 480 è un limite superiore alla variabile e
- Il problema può essere trasformato in forma di massimo con il cambio di variabile

$$P = 180 - p$$

$$C = 300 - c$$

$$E = 480 - e$$

Un modello di PL

$$z = \min 210e + 240p + 170c$$

$$
\begin{aligned}
10e + 24p + 16c &= 4800 \\
p &\le 180 \\
c &\le 300 \\
e, p, c &\ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P &= 180 - p \\
C &= 300 - c \\
E &= 480 - e
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p &= 180 - P \\
c &= 300 - C \\
e &= 480 - E
\end{aligned}
$$

$$z = \min 210(480 - E) + 240(180 - P) + 170(300 - C)$$

$$10(480 - E) + 24(180 - P) + 16(300 - C) \ge 4800$$

$$
\begin{aligned}
180 - P &\le 180 & \qquad 180 - P &\ge 0 \\
300 - C &\le 300 & \qquad 300 - C &\ge 0 \\
480 - E &\le 480 & \qquad 480 - E &\ge 0
\end{aligned}
$$

Un modello di PL

$$z = \min 210(480 - E) + 240(180 - P) + 170(300 - C)$$

$$10(480 - E) + 24(180 - P) + 16(300 - C) \geq 4800$$

$$180 - P \leq 180 \qquad 180 - P \geq 0$$

$$300 - C \leq 300 \qquad 300 - C \geq 0$$

$$480 - E \leq 480 \qquad 480 - E \geq 0$$

$$z = 195000 - \max 210E + 240P + 170C$$

$$-10E - 24P - 16C \geq 4800 - 13920$$

$$P \leq 180$$

$$C \leq 300$$

$$E \leq 480$$

$$E, C, P \geq 0$$

Un modello di PL

$$
\begin{aligned}
z = 195000 - \max\ & 210E + 240P + 170C \\
& -10E \quad -24P \quad -16C \geq 4800 - 13920 \\
& P \leq 180 \\
& C \leq 300 \\
& E \leq 480 \\
& E\,,C\,,P \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z = 195000 - \max\ & 210E + 240P + 170C \\
& 10E \quad +24P \quad +16C \leq 9120 \\
& P \leq 180 \\
& C \leq 300 \\
& E \leq 480 \\
& E\,,C\,,P \geq 0
\end{aligned}
$$

- Che problema è?

… 1ª lezione: scaldiamo i muscoli

Mi sto preparando per un viaggio. Vorrei portare con me n oggetti ma il loro peso complessivo supera il limite massimo del bagaglio che è pari a b Kg.

[Problema] Assumendo che ogni oggetto sia descritto da un peso a e da un valore p (affettivo, funzionale, economico…), quali oggetti metto nel bagaglio se ne voglio massimizzare il valore complessivo?

Problema dello zaino 0-1

- $x_i = 1$ se l'i-esimo oggetto è selezionato, 0 altrimenti

$$\max \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b$$

$$0 \le x_i \le 1, \text{intero} \quad i = 1, \ldots, n$$

Problema dello zaino 0-1

dati

	Valore p (€)	*Peso a* (Kg)
oggetto 1	100	5.2
oggetto 2	60	2.3
oggetto 3	70	3.5
oggetto 4	15	1.5

Capacità del bagaglio: $b = 6$

modello

$$z = \max 100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4$$
$$5.2x_1 + 2.3x_2 + 3.5x_3 + 1.5x_4 \leq 6$$
$$x_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,2,3,4$$

Un bound duale è dato dal valore ottimo del *rilassamento continuo*

zaino 0-1: il bound duale di Dantzig

1. Si ordinano gli oggetti per rapporti profitto/peso non crescenti

$$\boxed{\frac{p_1}{a_1} \geq \frac{p_2}{a_2} \geq \ldots \geq \frac{p_n}{a_n}}$$

2. Si determina il minimo indice *h* tale che

$$\boxed{\sum_{j=1}^{h} a_j > b}$$

l'*h*-esimo elemento è il primo nell'ordine che non entra <u>completamente</u> nello zaino

zaino 0-1: algoritmo per il bound di Dantzig

3. Il bound duale di Dantzig corrisponde al valore $\mathbf{p}^T\mathbf{x}^*$ associato al vettore $\mathbf{x}^*$ le cui componenti sono:

$$x^*_1 = x^*_2 =, \ldots, = x^*_{h-1} = 1,\ x^*_h = f,\ x^*_{h+1} = , \ldots, = x^*_n = 0$$

con $\boxed{f = \dfrac{b - \sum_{j<h} a_j}{a_h}}$

f esprime la frazione dell'*h*-esimo elemento necessaria per saturare lo zaino

bound di Dantzig: esempio

$$
\begin{aligned}
z = \max\ & 100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4 \\
& 5.2x_1 + 2.3x_2 + 3.5x_3 + 1.5x_4 \le 6 \\
& 0 \le x_i \le 1 \quad i = 1,2,3,4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}
$$

$$
\boxed{\frac{60}{2.3} > \frac{70}{3.5} > \frac{100}{5.2} > \frac{15}{1.5}}
$$

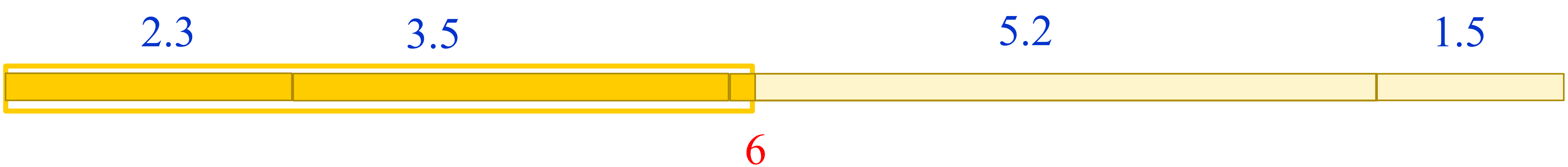
$a_2 < 6 \quad \rightarrow \quad x_2 = 1,$ residuo: $6 - 2.3 = 3.7$

$a_3 < 3.7 \quad \rightarrow \quad x_3 = 1,$ residuo: $3.7 - 3.5 = 0.2$

$a_1 > 0.2 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0.2/5.2 = 0.038$

$x_4 = 0$

$\mathbf{x}_R = (0.038,1,1,0) \qquad z_R = 133.8$



zaino 0-1: rilassamento continuo e duale

[Teorema] il vettore $\mathbf{x_R}$ è una soluzione ottima per *rilassamento continuo* P_R del problema di zaino 0-1

[Dimostrazione]

Il rilassamento continuo del problema è

$$P_R : \max \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$y: \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b$$

$$z_i: \quad x_i \le 1 \qquad i = 1,\ldots,n$$

$$x_i \ge 0 \qquad i = 1,\ldots,n$$

Il duale di P_R è

$$D_R : \min\ yb + \sum_{i=1}^{n} z_i$$

$$a_i y + z_i \ge p_i \qquad i = 1,\ \ldots,\ n$$

$$y, z_i \ge 0 \qquad i = 1,\ \ldots,\ n$$

zaino 0-1: condizioni di ortogonalità

$$\left\{\begin{array}{l} \boxed{\begin{array}{l}\left(b - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) y = 0 \\ \quad (1 - x_i) z_i = 0 \quad i = 1,\ldots,n \end{array}} \\ \boxed{(p_i - a_i y - z_i) x_i = 0 \quad i = 1,\ldots,n} \end{array}\right.$$

dai vincoli del primale

dai vincoli del duale

$\mathbf{x_R}$ è una soluzione ottima di P_R se esiste una soluzione del duale $(y^*, \mathbf{z^*})$ che, in coppia con $\mathbf{x_R}$, soddisfi le condizioni di ortogonalità

zaino 0-1: condizioni di ortogonalità

$$\boxed{1.\quad (b - \sum a_j x_j)y^* = 0}$$

banalmente soddisfatta dato che $\sum a_j x_j = b$

$$\boxed{2.\quad (1 - x_j)z^*_j = 0 \qquad \forall j = 1,\ldots,n}$$

$$\boxed{3.\quad (p_j - a_j y^* - z^*_j)x_j = 0 \qquad \forall j = 1,\ldots,n}$$

$$y^*, z^*_1, \ldots, \boxed{z^*_h, \ldots, z^*_n}$$

da $x_h < 1$ e $x_{h+1}, \ldots, x_n = 0$,

si ha $z^*_h, \ldots, z^*_n = 0$.

dato che $x_1, \ldots, x_h > 0$ deve essere

$$\boxed{\begin{array}{ll} p_j - a_j y^* - z^*_j = 0 & \forall j = 1,\ldots,h-1 \\ p_h - a_h y^* = 0 & \end{array}}$$

zaino 0-1: condizioni di ortogonalità

$$\boxed{p_j - a_j y^* - z^*_j = 0 \quad \forall j = 1,\ldots,h-1}$$ Risolvendo rispetto a z^*_j

$$\boxed{p_h - a_h y^* = 0}$$ Risolvendo rispetto a y^*

$$\boxed{y^*}, \boxed{z^*_1, \ldots, z^*_{h-1}}, \boxed{z^*_h, \ldots, z^*_n}$$

$$= \frac{p_h}{a_h} \qquad = p_j - a_j \frac{p_h}{a_h} \qquad = 0, \ldots, 0$$

Il vettore $(y^*, \mathbf{z}^*)$ così definito soddisfa, in coppia con $\mathbf{x_R}$, le condizioni di ortogonalità. Ora si tratta di stabilire se $(y^*, \mathbf{z}^*)$ è una soluzione ammissibile duale.

zaino 0-1: ammissibilità duale

Per l'ammissibilità del duale deve essere

$$a_j y^* + z^*_j \geq p_j \qquad \forall j = 1,\ldots,n$$

dato che $z^*_h,\ldots,z^*_n = 0$ i vincoli del duale diventano

$$\begin{array}{lll} a. & a_j y^* + z^*_j \geq p_j & \forall j = 1,\ldots,h-1 \\ b. & a_j y^* \geq p_j & \forall j = h,\ldots,n \end{array}$$

Per l'ordinamento non crescente dei rapporti,
il valore $y^* = p_h / a_h$ soddisfa tutti i vincoli $b.$

zaino 0-1: ammissibilità duale

Si osservi inoltre che anche i vincoli $a_j y + z_j \geq p_j$ per $j = 1,\ldots,h-1$, sono soddisfatti dal vettore $(y^*, \mathbf{z}^*)$ dato che sostituendo:

$$y^* = \frac{p_h}{a_h} \qquad\qquad z_j^* = p_j - p_h \frac{a_j}{a_h}$$

si ottiene

$$a_j \frac{p_h}{a_h} + p_j - p_h \frac{a_j}{a_h} \geq p_j$$

$$a_j \frac{p_h}{a_h} - a_j \frac{p_h}{a_h} \geq 0$$

$$0 \geq 0$$

zaino 0-1: ammissibilità duale

Infine si osservi che $\mathbf{z}^* \geq 0$, dato che

per $j = 1,\ldots,h-1$ si ha

$$z_j^* = p_j - p_h \frac{a_j}{a_h} = \frac{p_j}{a_j} - \frac{p_h}{a_h} \geq 0$$

per l'ordinamento non crescente dei rapporti

$$\frac{p_h}{a_h} = \min\left(\frac{p_j}{a_j}\right)$$

e per $j = h,\ldots,n$ si ha

$$z_h^* = \cdots = z_n^* = 0$$

In conclusione, $(y^*, \mathbf{z}^*)$ è una soluzione ammissibile duale che soddisfa tutte le condizioni di ortogonalità, quindi $\mathbf{x_R}$ è una soluzione ottima del rilassamento continuo P_R. ■

… torniamo allo smaltimento di RSU

$$
\begin{aligned}
z = 195000 - \max\ & 210E + 240P + 170C \\
& 10E \quad + 24P \quad + 16C \leq 9120 \\
& P \leq 180 \\
& C \leq 300 \\
& E \leq 480 \\
& E\,,\, C\,,\, P \geq 0
\end{aligned}
$$

- Il probema è uno zaino **intero** (e non 0-1) ma si trasforma facilmente in zaino 0-1. …Come?
- Possiamo applicare la procedura di Dantzig per calcolare la soluzione ottima.

… torniamo allo smaltimento di RSU

$$
\begin{aligned}
z = 195000 - \max\ & 210E + 240P + 170C \\
& 10E + 24P + 16C \leq 9120 \\
& P \leq 180 \\
& C \leq 300 \\
& E \leq 480 \\
& E, C, P \geq 0
\end{aligned}
$$

- Le variabili ordinate per rapporto profitto peso sono E, C e P

$$\frac{210}{10} > \frac{170}{16} > \frac{240}{24}$$

- La soluzione ottima è:

$$
\begin{aligned}
E &= 480 \\
C &= (9120 - 4800)/16 = 270 \\
P &= 0
\end{aligned}
$$

… torniamo allo smaltimento di RSU

- La soluzione ottima è:

$$E = 480$$
$$C = (9120 - 4800)/16 = 270$$
$$P = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} p &= 180 - P \\ c &= 300 - C \\ e &= 480 - E \end{aligned}}$$

da cui

$e = 0$ MWh di energia da acquistare;
$p = 180$ ton. di plastica da destinare alla cogenerazione;
$c = 30$ ton. di altro combustibile da destinare alla cogenerazione.

$$z = 210e + 240p + 170c - 94200 = 43200 + 5100 - 94200 = -45900$$

L'impianto ha un profitto netto di 45900 Euro