Elementi di topologia circuitale

Prof. Simone Fiori

s.fiori@univpm.it

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione

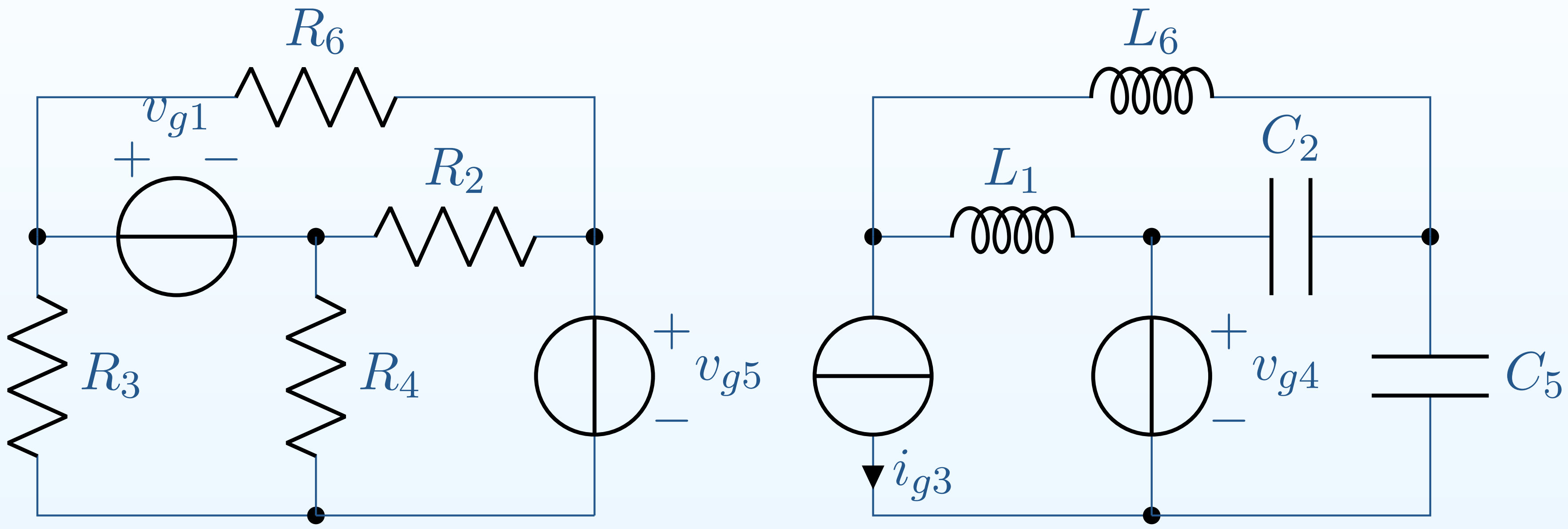
Università Politecnica delle Marche

Argomenti

- Grafo associato ad un circuito elettrico
- Grafo orientato
- Maglia topologica e taglio topologico
- Leggi di Kirchhoff alle tensioni e alle correnti
- Albero topologico e co-albero topologico
- Maglie fondamentali e tagli fondamentali
- Equazione topologica “B”
- Equazione topologica “A”
- Terza equazione topologica

Topologia circuitale

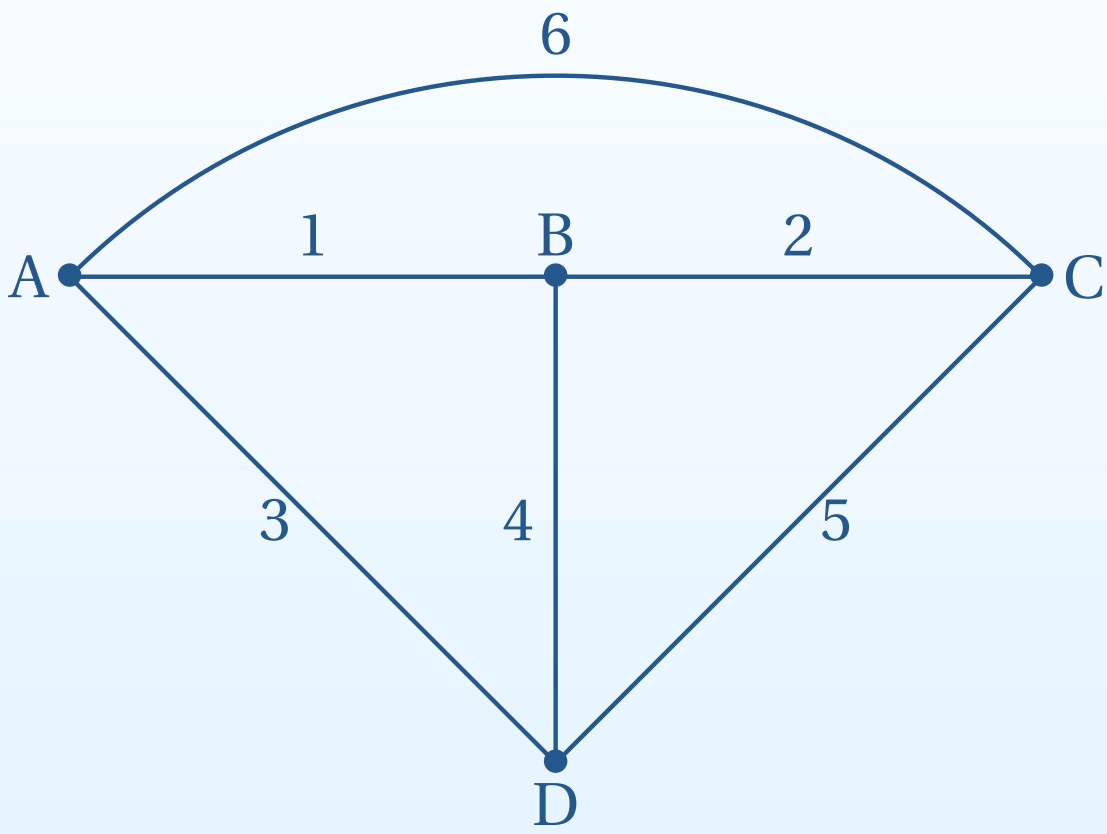
Si considerino i due seguenti circuiti elettrici:



Chiaramente si tratta di due circuiti differenti, che hanno però qualcosa in comune: la loro topologia (numero e connessione di nodi tramite bipoli).

Grafo associato ad un circuito elettrico

Ad ogni nodo del circuito si associa un nodo del grafo, ad ogni bipolo del circuito si associa un arco del grafo.

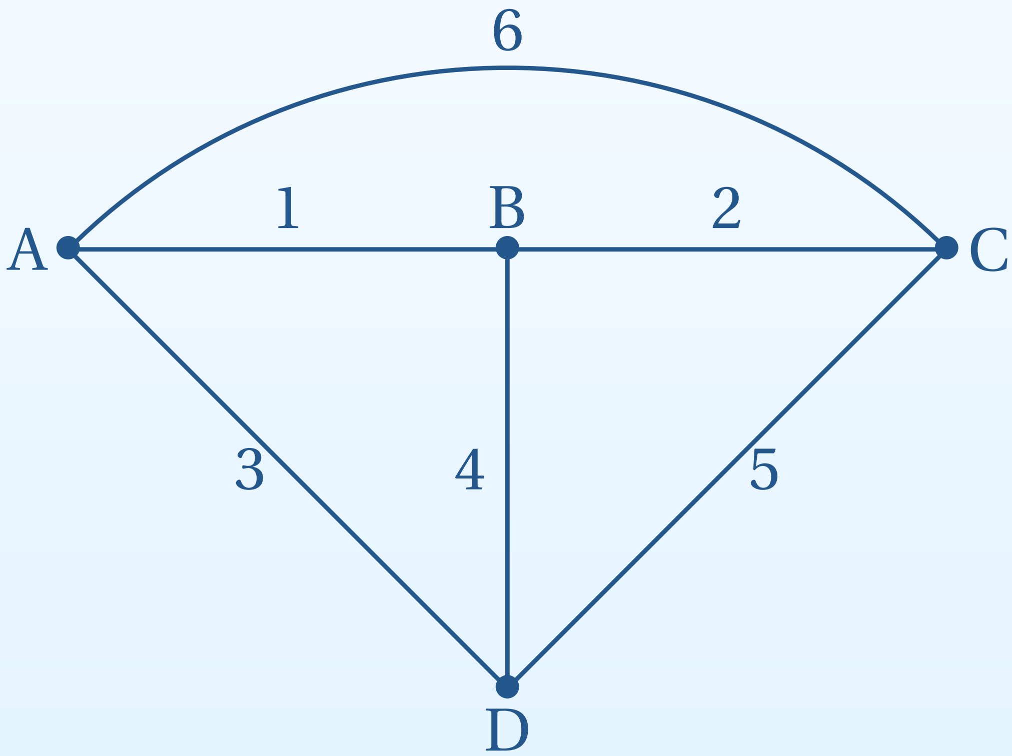


Il grafo si designa con l'insieme dei suoi archi: In questo esempio, $\mathcal{G} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Grafo associato ad un circuito elettrico

Indichiamo con:

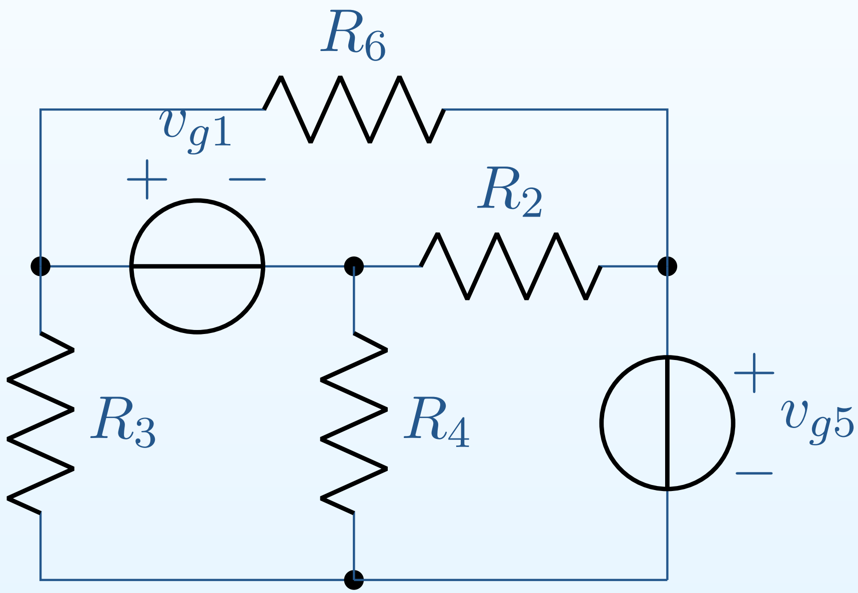
- N il numero di nodi di un grafo.
- R il numero di archi di un grafo.

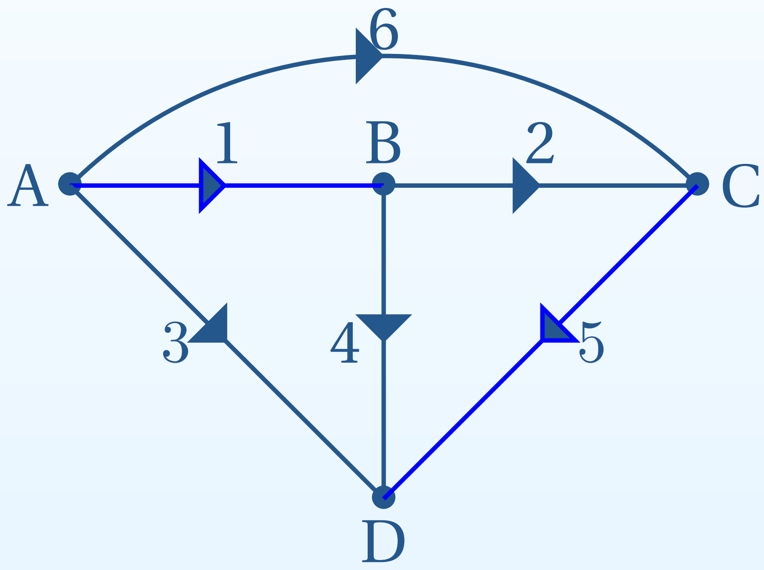


In questo esempio abbiamo $N = 4$, $R = 6$.

Grafo orientato associato ad un circuito elettrico

Ogni arco viene orientato secondo il verso della corrente nel ramo di circuito corrispondente. Per i rami in cui il verso della corrente non è noto a priori, si sceglie un verso **arbitrario**.

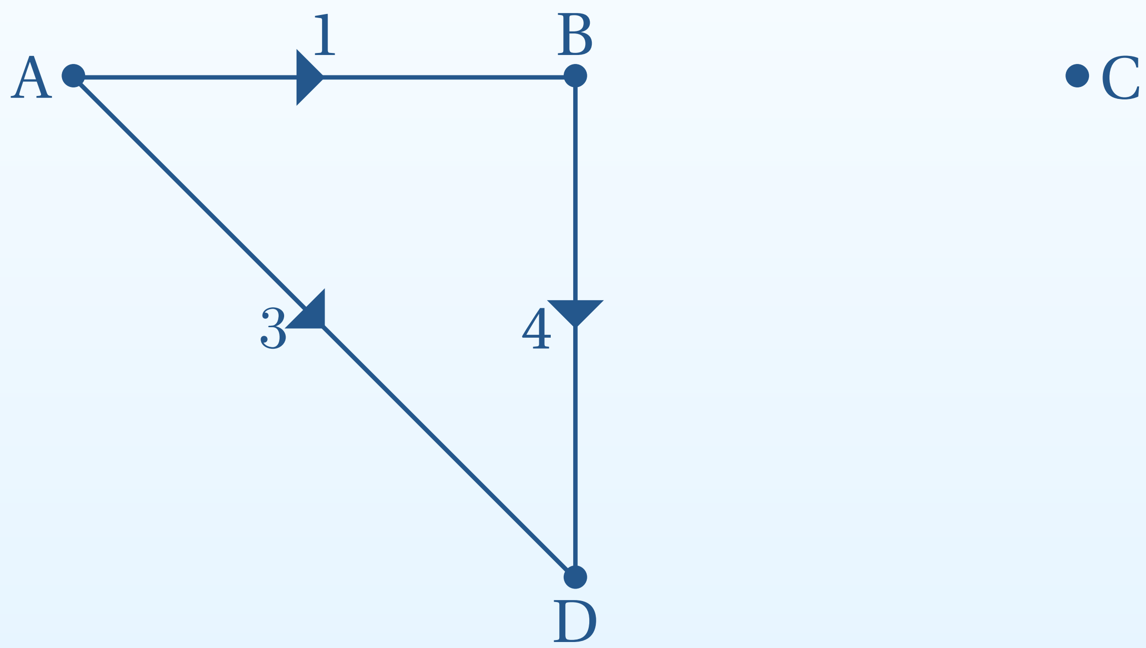




In blu sono evidenziati gli archi per i quali il verso è ‘obbligato’.

Maglia topologica

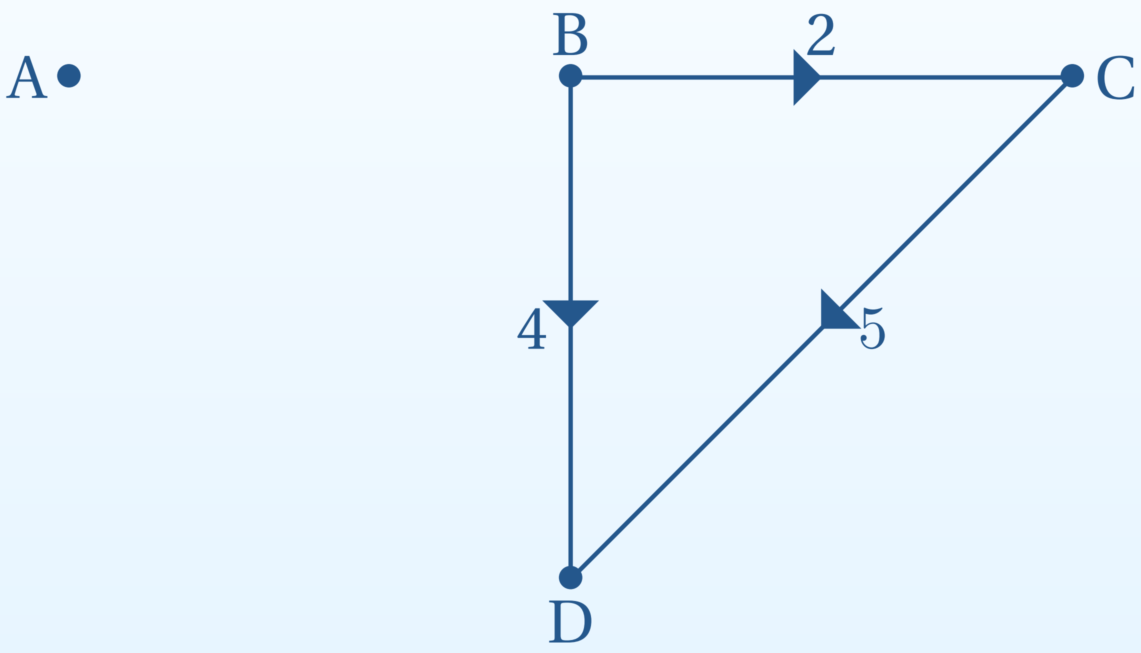
Ogni percorso **chiuso** composto da archi si chiama **maglia topologica**.
Esempio: $\mathcal{M}_1 = \{1, 3, 4\}$



Maglia topologica

Ogni percorso **chiuso** composto da archi si chiama **maglia topologica**.

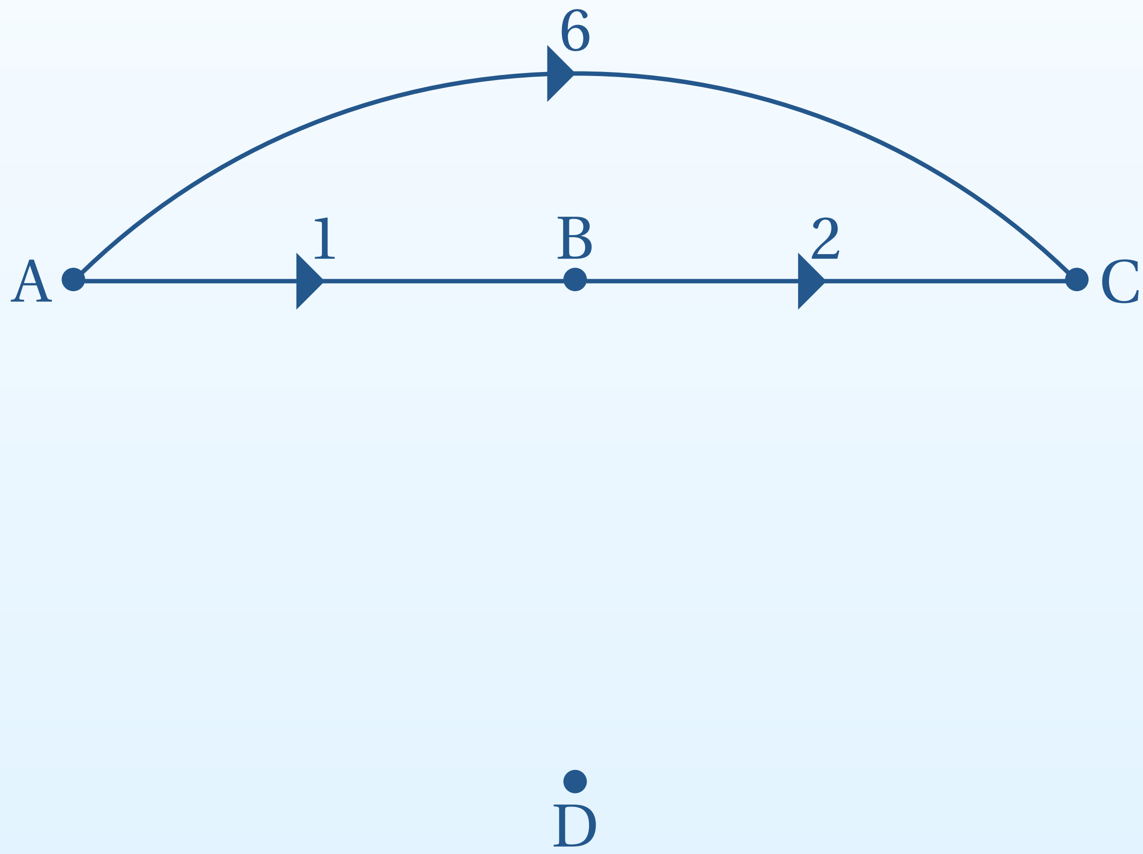
Esempio: $\mathcal{M}_2 = \{2, 4, 5\}$



Maglia topologica

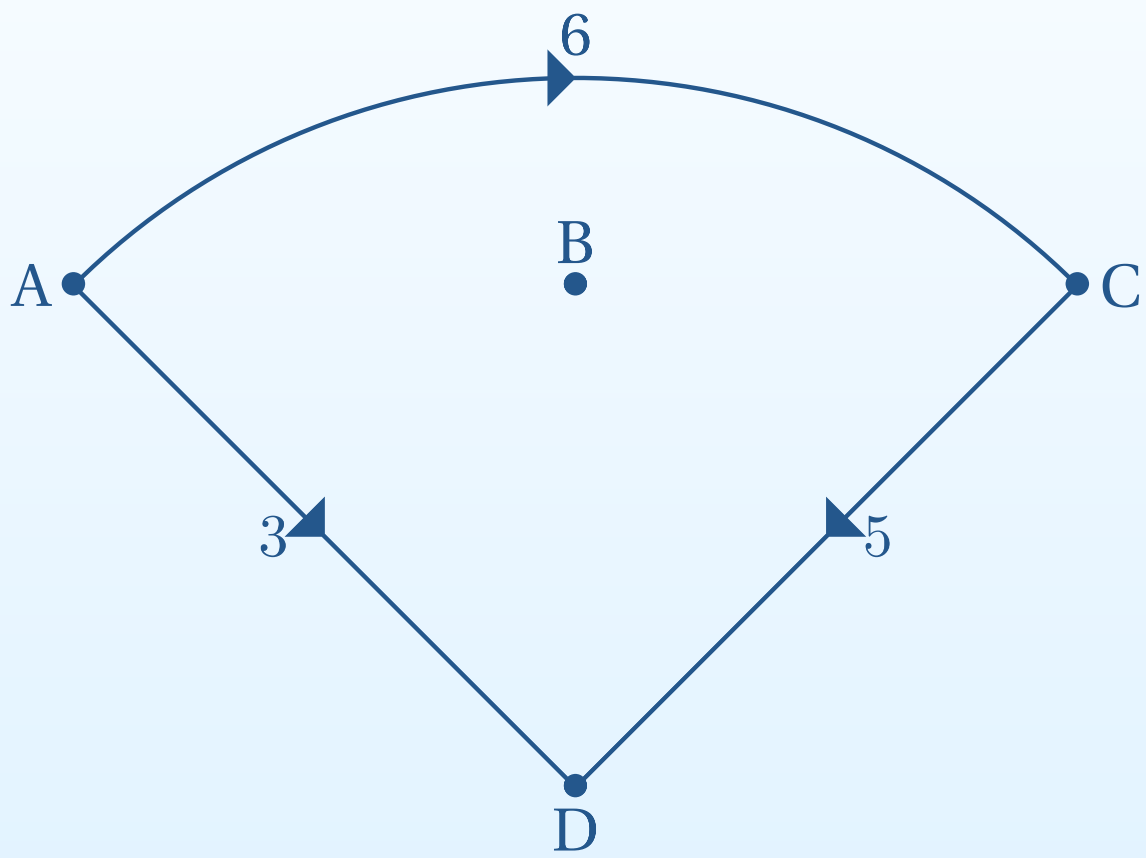
Ogni percorso **chiuso** composto da archi si chiama **maglia topologica**.

Esempio: $\mathcal{M}_3 = \{1, 2, 6\}$



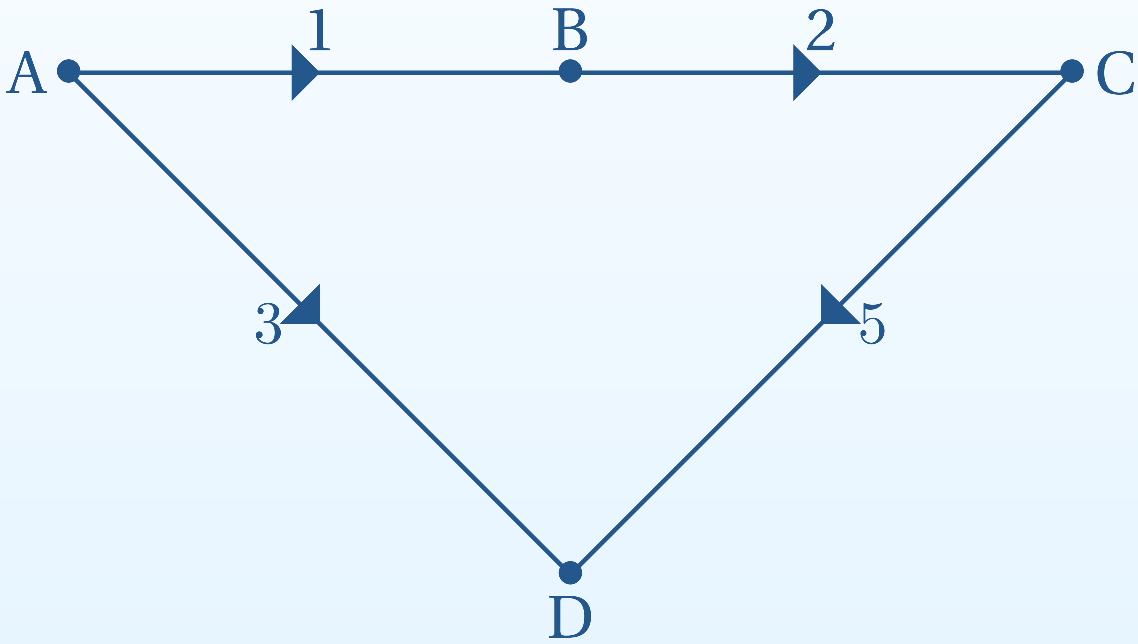
Maglia topologica

Ogni percorso **chiuso** composto da archi si chiama **maglia topologica**.
Esempio: $\mathcal{M}_4 = \{3, 5, 6\}$



Maglia topologica

Ogni percorso **chiuso** composto da archi si chiama **maglia topologica**.
Esempio: $\mathcal{M}_5 = \{1, 2, 3, 5\}$



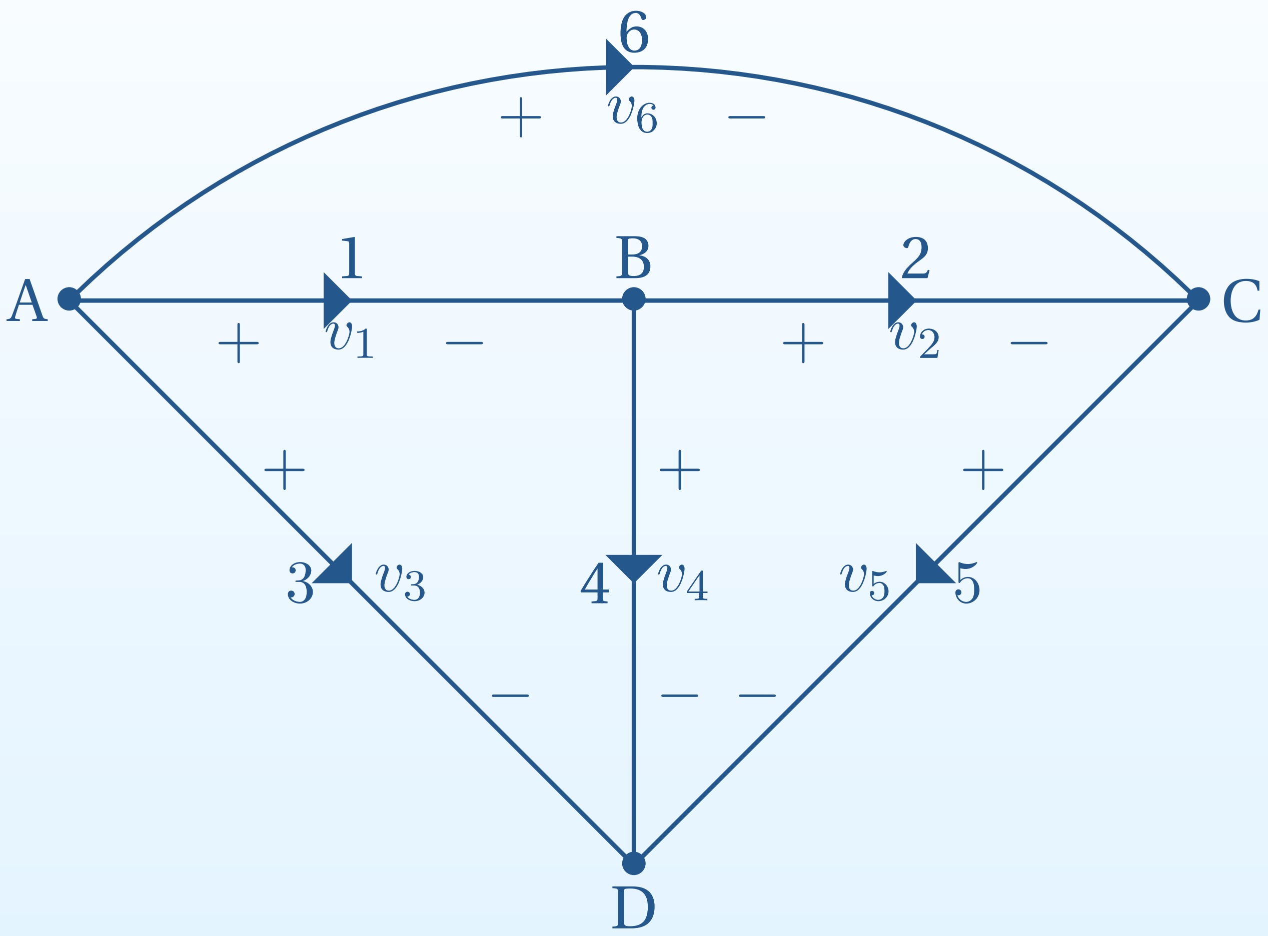
Maglia topologica

Alcuni dettagli da notare:

- Il verso delle frecce non ha alcuna rilevanza nella formazione delle maglie.
- Le maglie sono in grande numero, anche per un grafo relativamente piccolo come quello utilizzato negli esempi.
- Le maglie possono contenere un diverso numero di archi (3 o 4 in questo esempio).
- Un arco non può apparire più di una volta in una maglia.

Legge di Kirchhoff alle tensioni

Associamo ad ogni arco la tensione coordinata al proprio verso.



Leggi di Kirchhoff

Legge di Kirchhoff alle tensioni

La legge di Kirchhoff alle tensioni (LKT), riferita ad una maglia $\mathcal{M}$, si esprime come

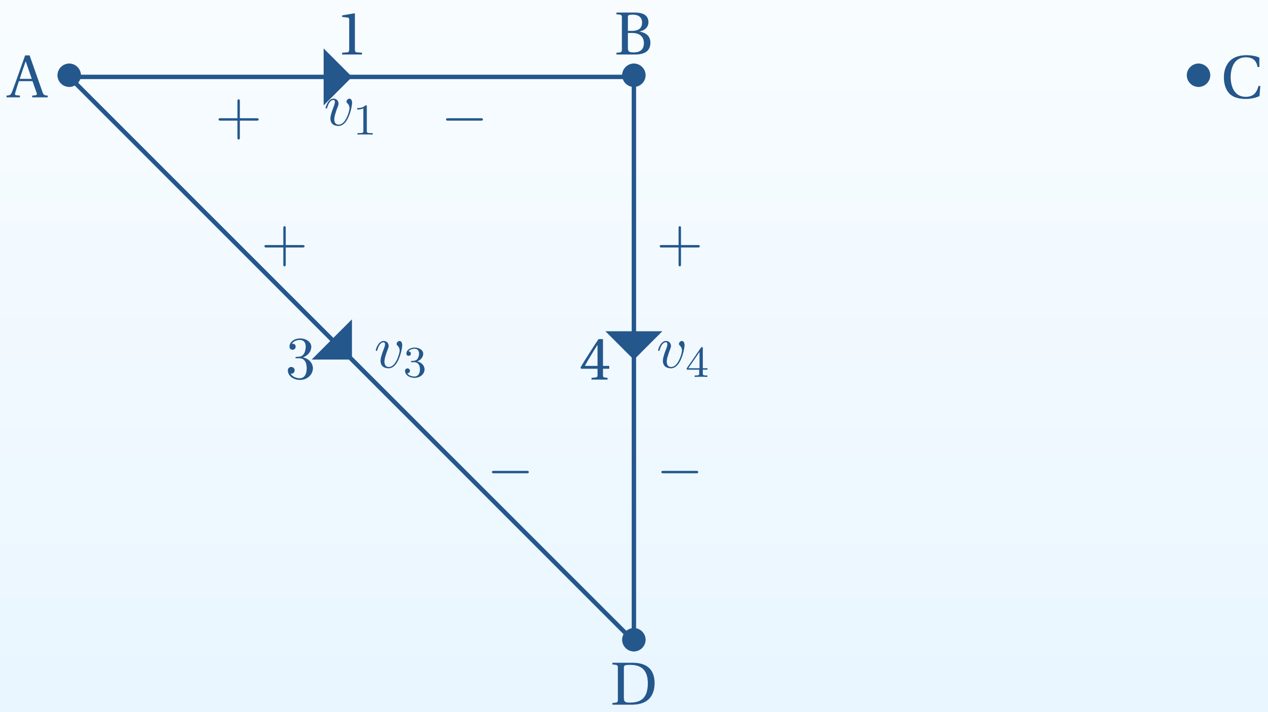
$$\sum_{k\in\mathcal{M}}^{\text{alg}} v_k(t) = 0.$$

LKT: **La somma algebrica delle tensioni su una maglia è identicamente pari a zero in ogni istante di tempo.**

Per scrivere la LKT su una maglia è necessario scegliere un verso di percorrenza (*orario* o *antiorario*). Il risultato (cioè la LKT) è indipendente dal verso di percorrenza scelto.

Leggi di Kirchhoff alle tensioni

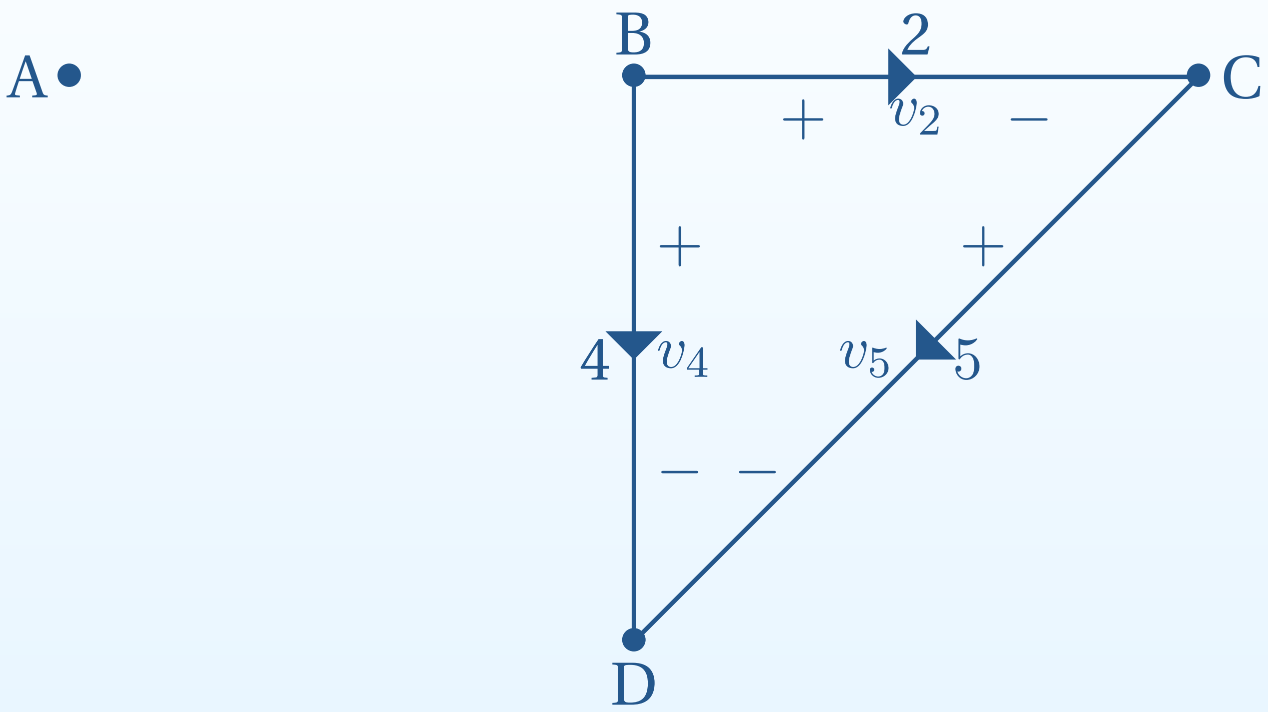
Esempio. LKT-$\mathcal{M}_1$ percorsa in verso *orario*: $v_1 - v_3 + v_4 = 0$.



Somma algebrica quindi significa: scelto un verso di percorrenza, se si incontra la tensione v_k con il segno $+$, la tensione appare con il segno $+$ nella somma, viceversa essa appare con il segno $-$.

Leggi di Kirchhoff alle tensioni

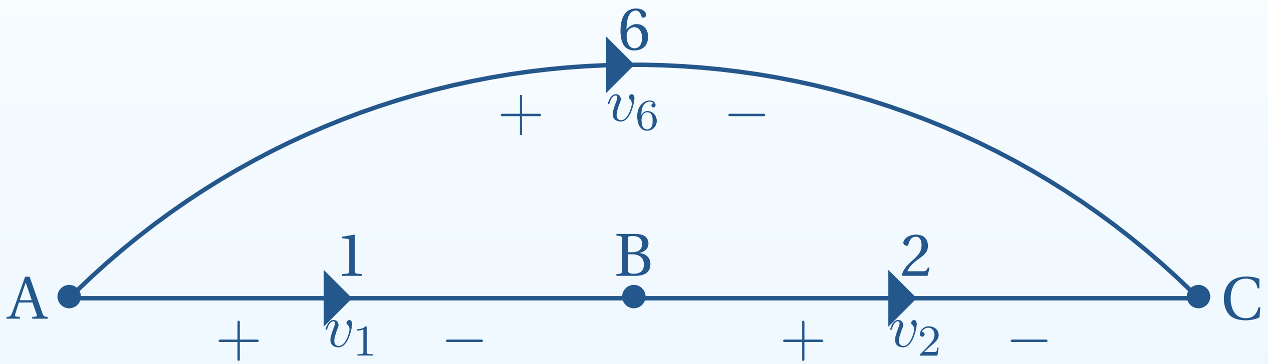
Esempio. LKT-$\mathcal{M}_2$ percorsa in verso *orario*: $v_2 - v_4 + v_5 = 0$.



(Somma algebrica: scelto un verso di percorrenza, se si incontra la tensione v_k con il segno $+$, la tensione appare con il segno $+$ nella somma, viceversa essa appare con il segno $-$.)

Leggi di Kirchhoff alle tensioni

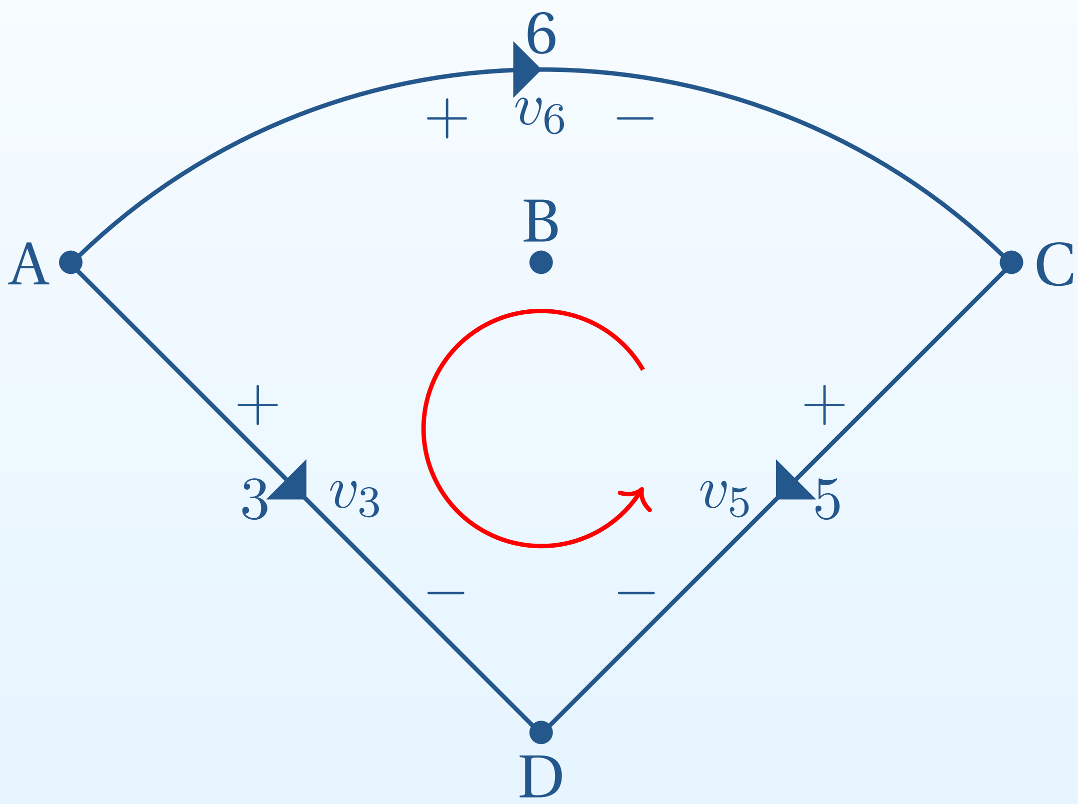
Esempio. LKT-$\mathcal{M}_3$ percorsa in verso *anti-orario*:
$v_1 + v_2 - v_6 = 0$.



(Ricordiamo il significato di somma algebrica: scelto un verso di percorrenza, se si incontra la tensione v_k con il segno $+$, la tensione appare con il segno $+$ nella somma, viceversa essa appare con il segno $-$.)
In assenza di requisiti particolari, il verso delle maglie può essere scelto in modo arbitrario.

Leggi di Kirchhoff alle tensioni

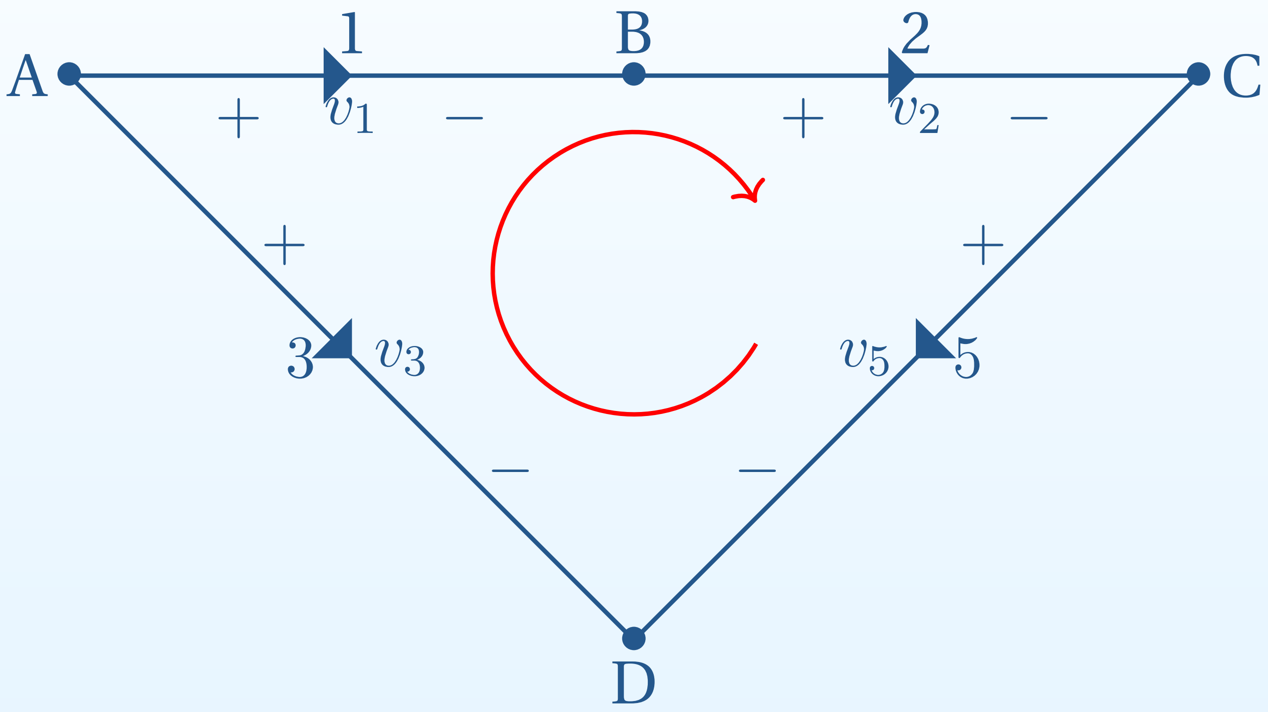
Esempio. LKT-$\mathcal{M}_4$ percorsa in verso *anti-orario*:
$v_3 - v_5 - v_6 = 0$.



(Scelto un verso di percorrenza, se si incontra la tensione v_k con il segno $+$, la tensione appare con il segno $+$ nella somma, viceversa essa appare con il segno $-$.)

Leggi di Kirchhoff alle tensioni

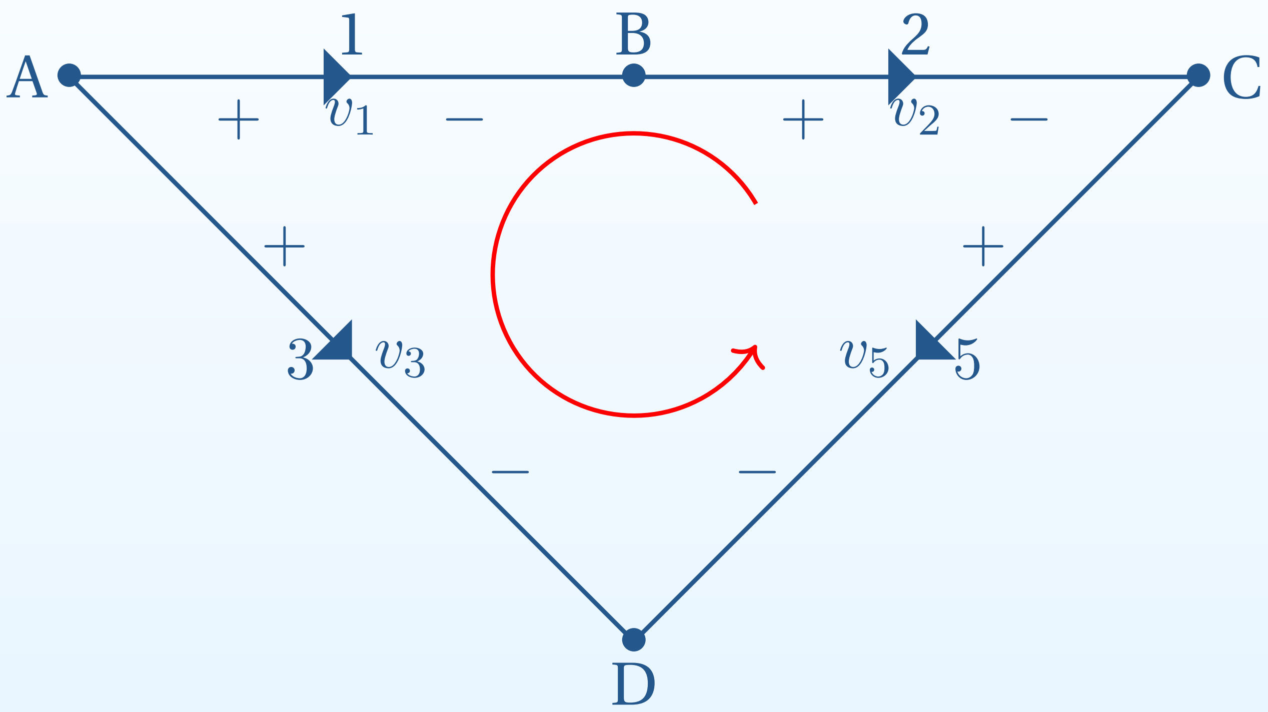
Esempio. LKT-$\mathcal{M}_5$ percorsa in senso *orario*:
$v_1 + v_2 - v_3 + v_5 = 0.$



(Somma algebrica: scelto un verso di percorrenza, se si incontra la tensione v_k con il segno $+$, la tensione appare con il segno $+$ nella somma, viceversa essa appare con il segno $-$.)

Leggi di Kirchhoff alle tensioni

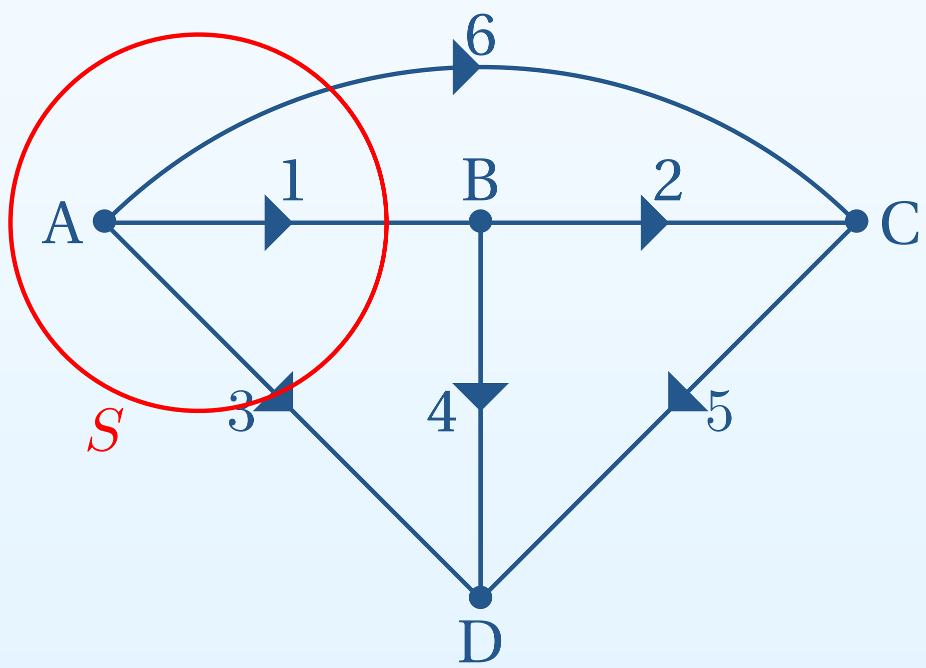
Esempio. LKT-$\mathcal{M}_5$ in senso *anti-orario*: $-v_1 - v_2 + v_3 - v_5 = 0$.



(Somma algebrica: scelto un verso di percorrenza, se si incontra la tensione v_k con il segno $+$, la tensione appare con il segno $+$ nella somma, viceversa essa appare con il segno $-$.)

Taglio topologico

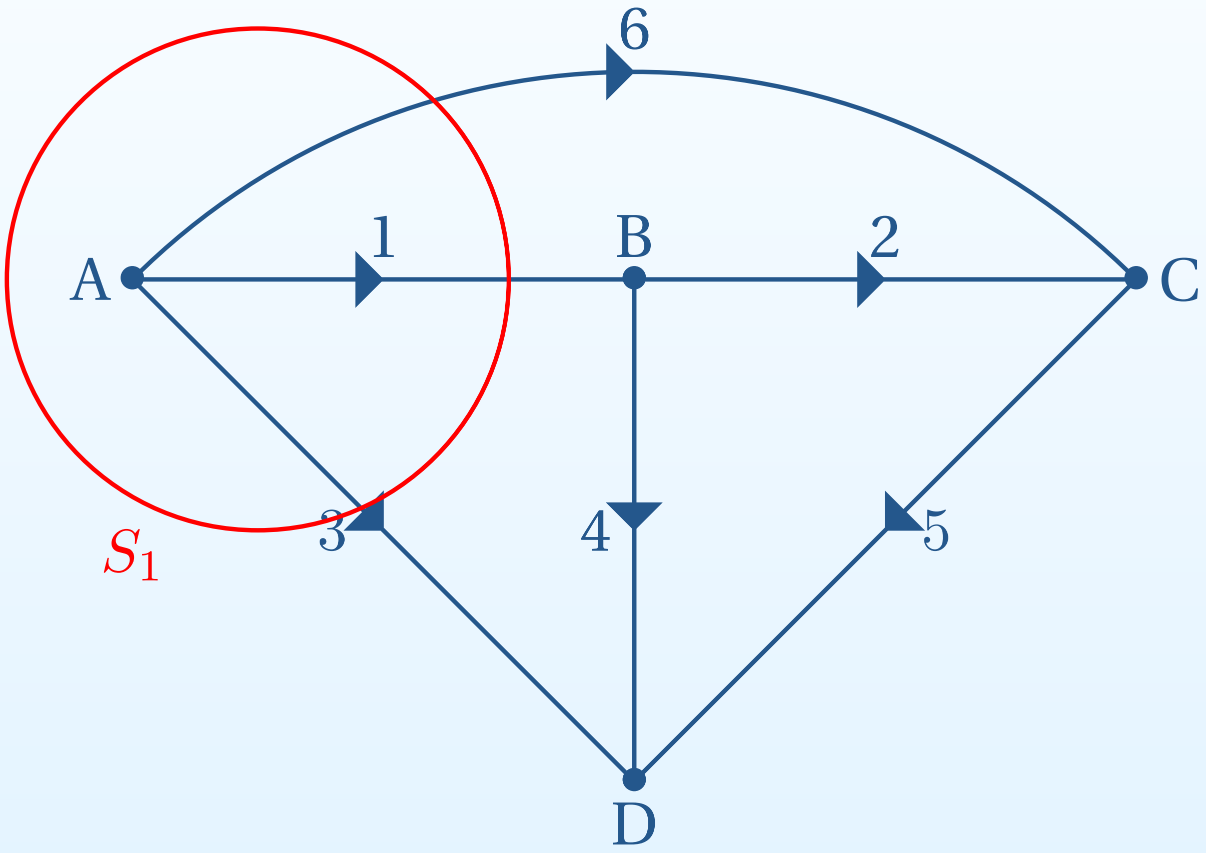
Per definire un taglio topologico è innanzitutto necessario considerare una superficie che tocca alcuni archi del grafo (un arco del grafo può essere toccato in un solo punto, detto *punto di taglio*).



In questo esempio, S *taglia* tre archi del grafo.

Taglio topologico

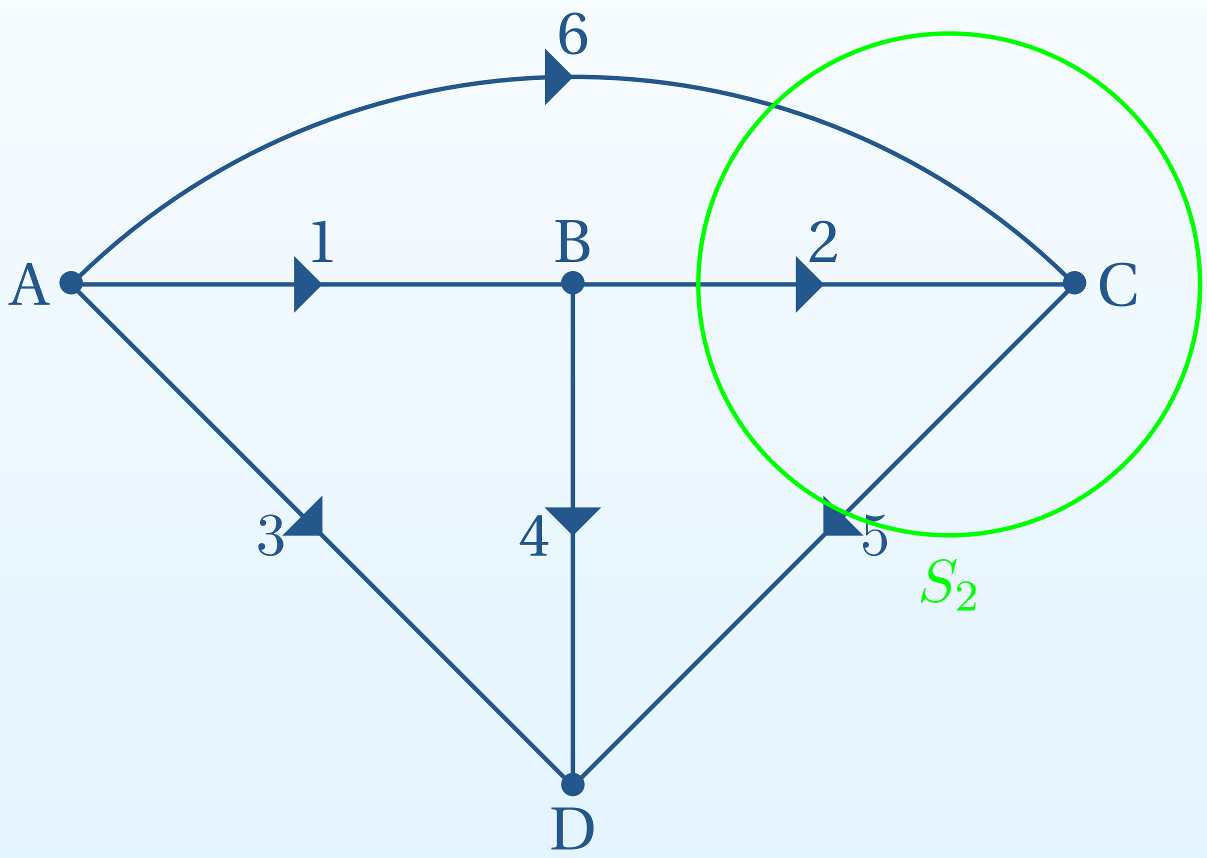
L'insieme degli archi *tagliati* da una superficie si dice *taglio topologico*. Esempio:



Nell'esempio, $\mathcal{T}_1 = \{1, 3, 6\}$.

Taglio topologico

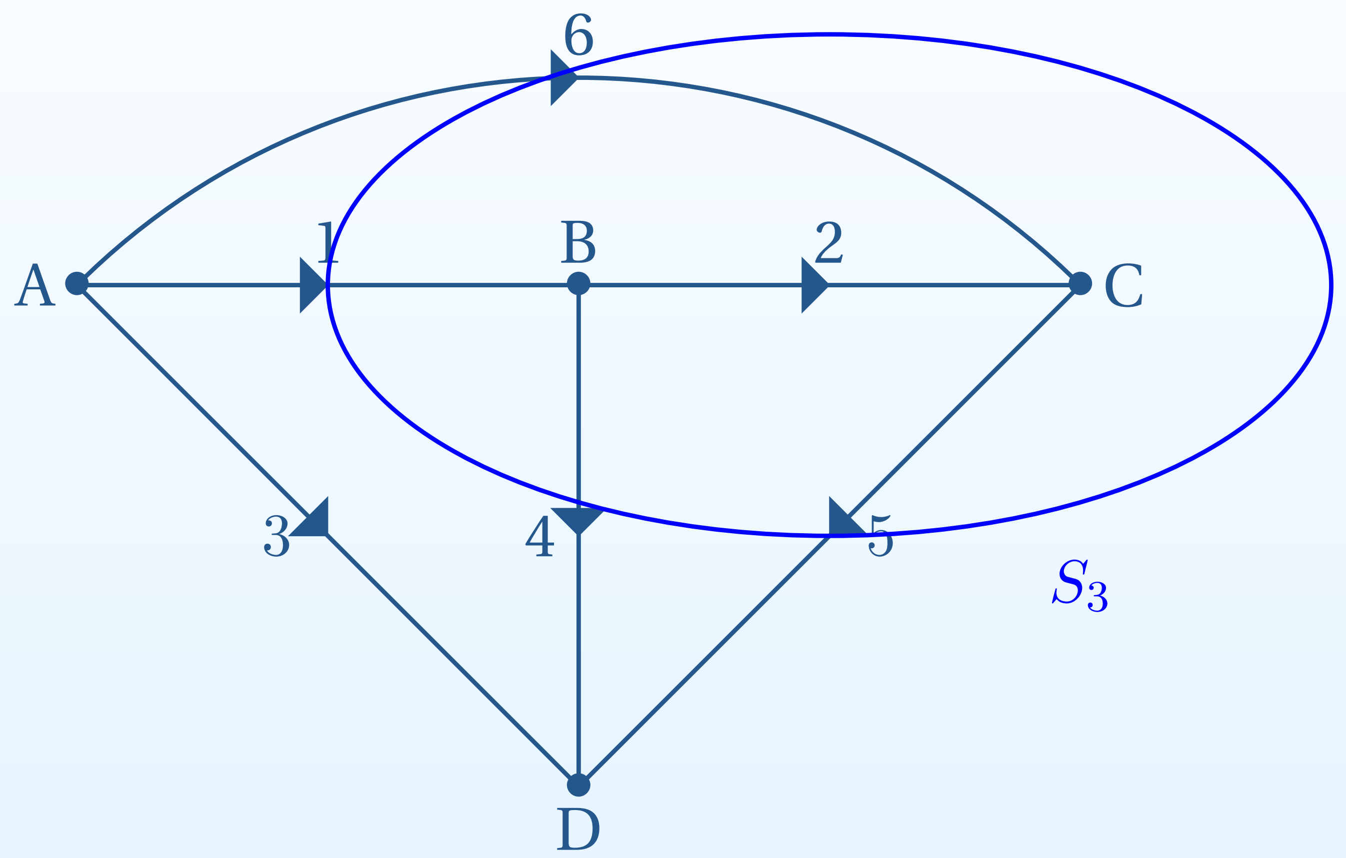
L'insieme degli archi *tagliati* da una superficie si dice *taglio topologico*. Esempio:



In questo esempio $\mathcal{T}_2 = \{2, 5, 6\}$.

Taglio topologico

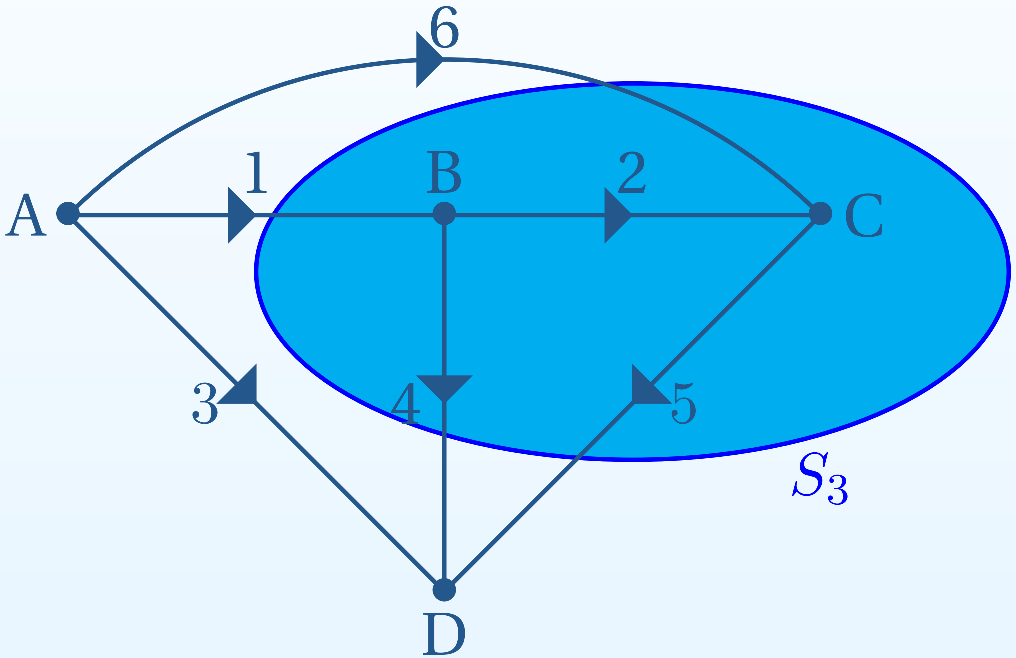
Esempio:



Qui $\mathcal{T}_3 = \{1, 4, 5, 6\}$. Si noti che l'arco 2 non viene tagliato dalla superficie S_3, pertanto non fa parte del taglio topologico $\mathcal{T}_3$.

Taglio topologico

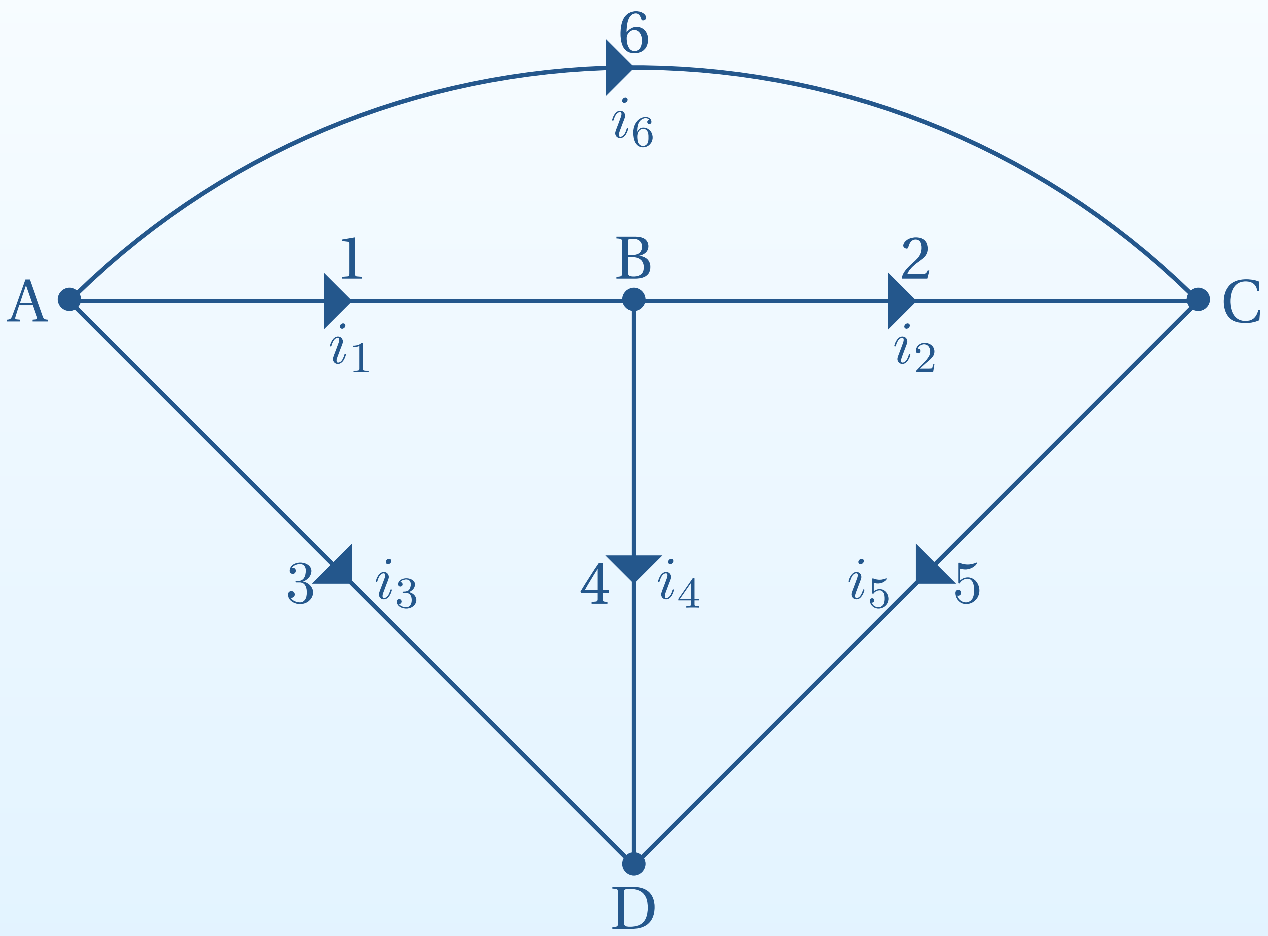
La superficie di taglio, in questo esempio S_3, divide il piano in due parti: parte *interna* e parte *esterna*.



Una corrente si dice *entrante* (es. i_1 e i_6) se va da parte esterna a parte interna. Una corrente si dice *uscente* (es. i_4 e i_5) se va da parte interna a parte esterna.

Legge di Kirchhoff alle correnti

Associamo ad ogni arco la corrente che scorre nel relativo ramo di circuito.



Legge di Kirchhoff alle correnti

La legge di Kirchhoff alle correnti (LKC), riferita ad un taglio topologico $\mathcal{T}$, si esprime come

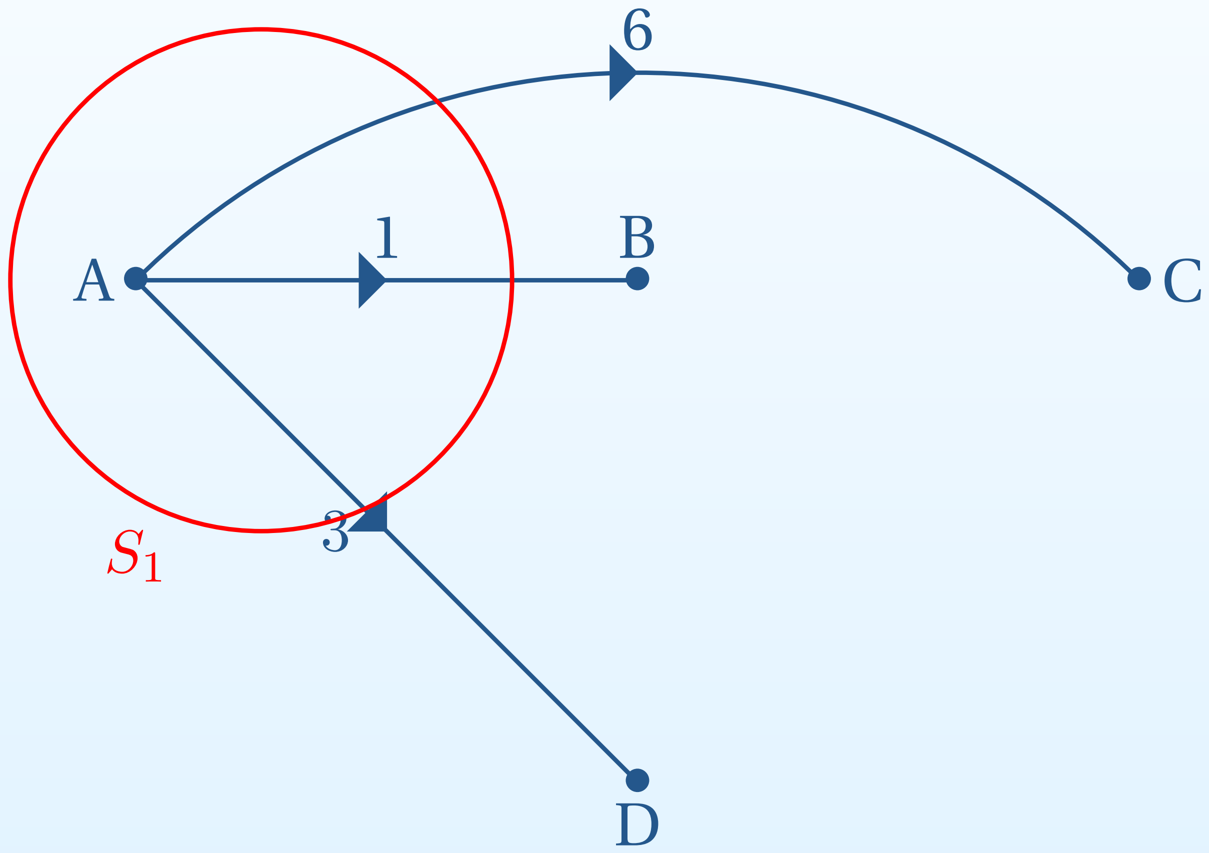
$$\sum_{k \in \mathcal{T}}^{\text{alg}} i_k(t) = 0.$$

LKC: **La somma algebrica delle correnti in un taglio è identicamente pari a zero in ogni istante di tempo.**

Per scrivere la LKC su un taglio è necessario scegliere un verso positivo (es. correnti entranti) e negativo (es. correnti uscenti). Il risultato (cioè la LKC) è comunque indipendente da tale scelta.

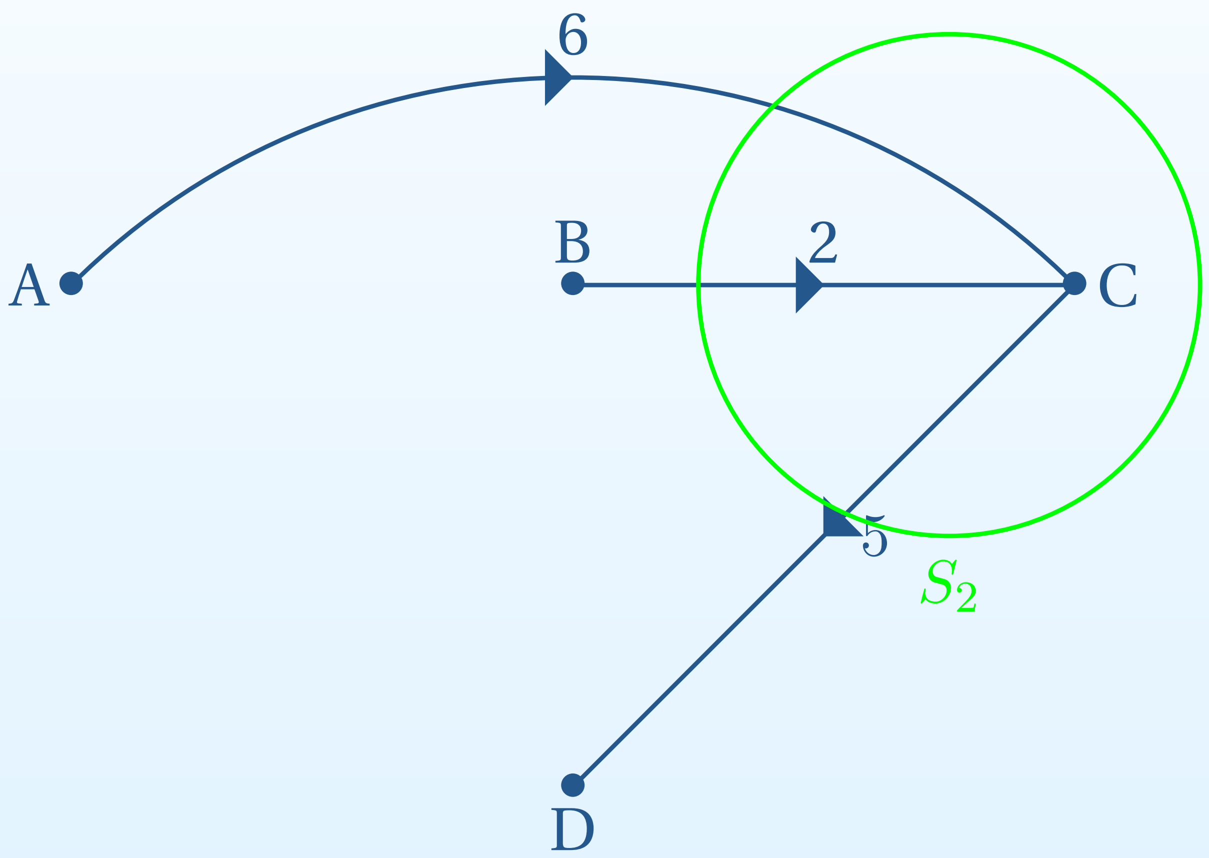
Leggi di Kirchhoff alle correnti

Esempio. LKC-$\mathcal{T}_1$: Dato che tutte le correnti sono uscenti dalla superficie, si prende *positivo il verso uscente*, per cui $i_1 + i_3 + i_6 = 0$.



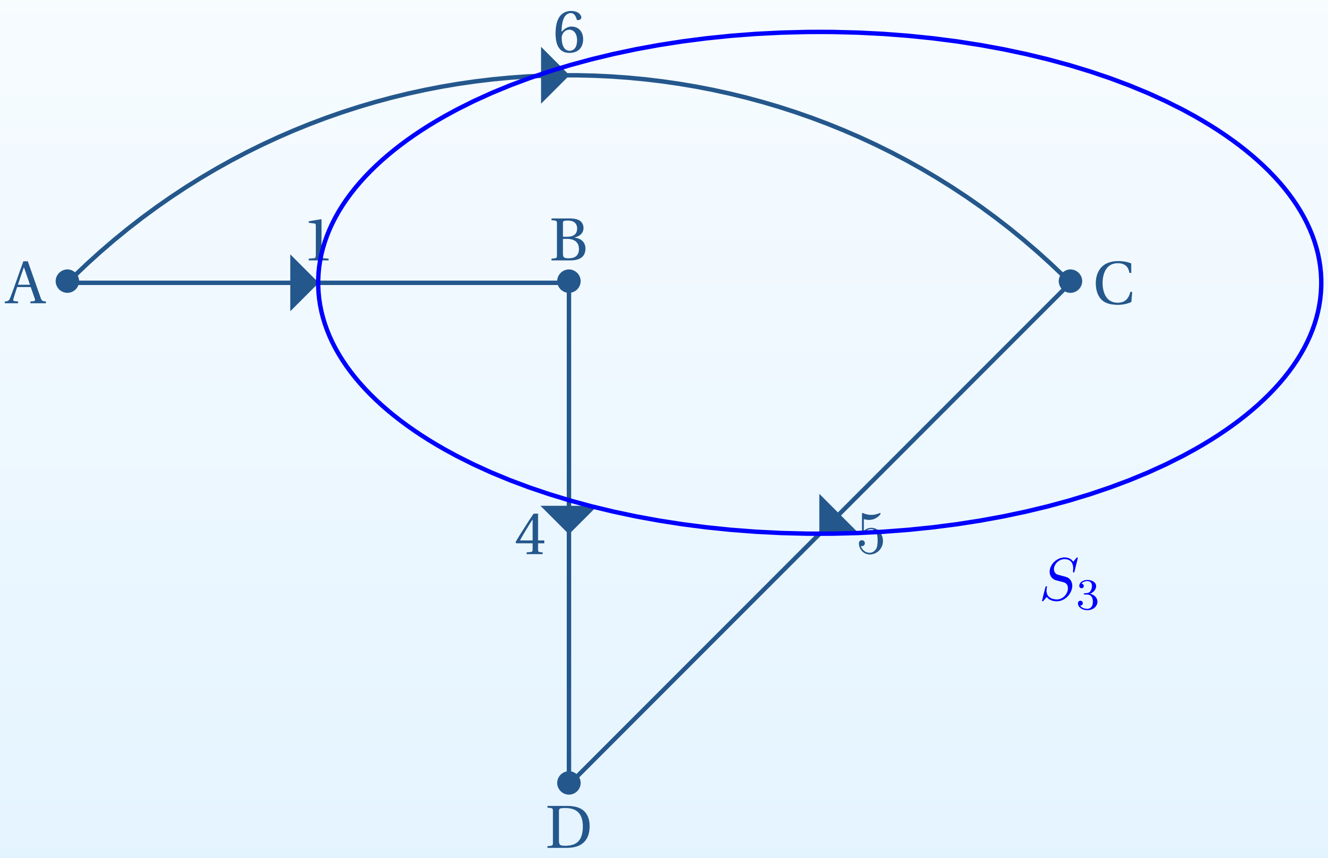
Leggi di Kirchhoff alle correnti

Esempio. LKC-$\mathcal{T}_2$: Dato che due correnti sono entranti nella superficie e una è uscente, si prende *positivo il verso entrante*, per cui $i_2 - i_5 + i_6 = 0$.



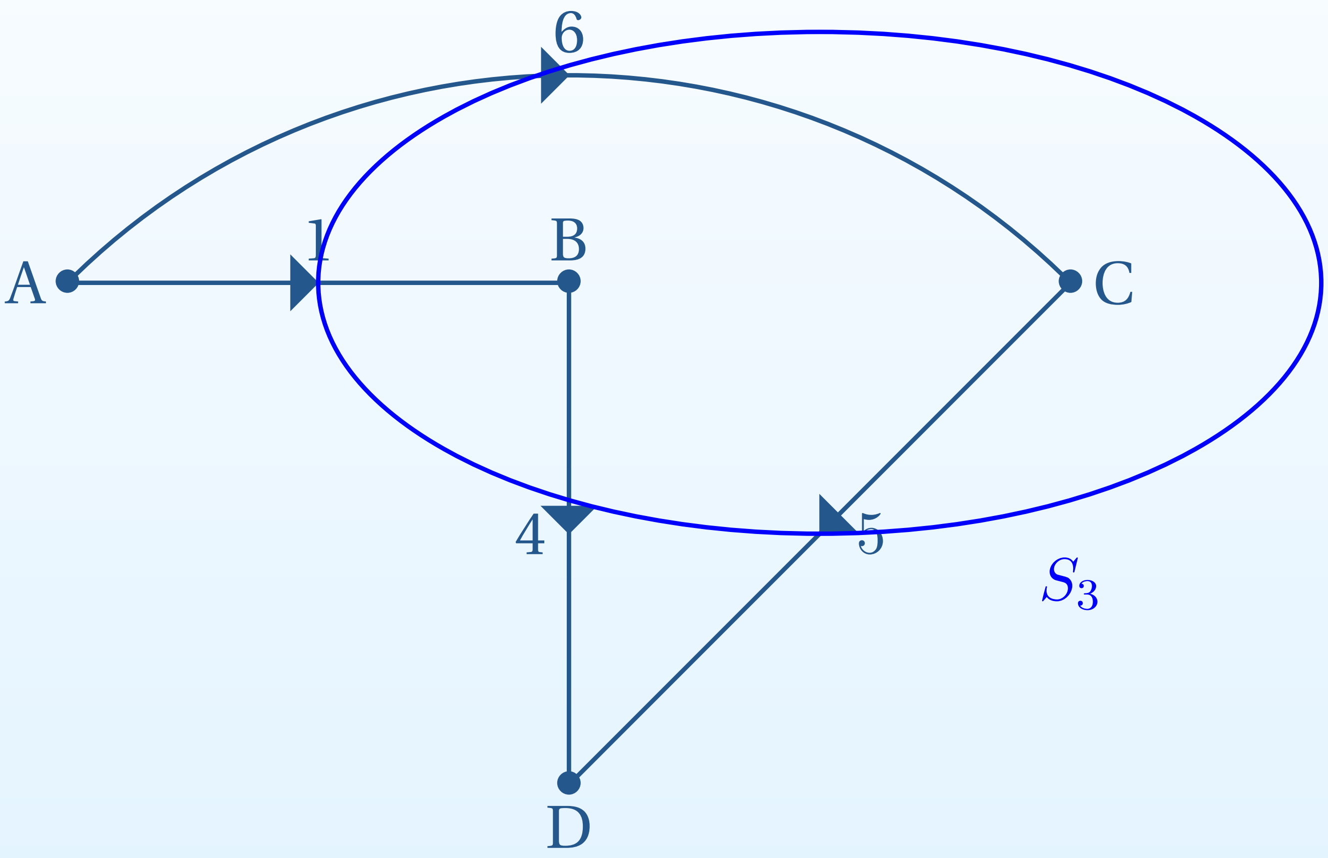
Leggi di Kirchhoff alle correnti

Esempio. LKC-$\mathcal{T}_3$: Si prende, in modo del tutto arbitrario, *positivo il verso entrante*, per cui $i_1 - i_4 - i_5 + i_6 = 0$.



Leggi di Kirchhoff alle correnti

Esempio. LKC-$\mathcal{T}_3$: Si prende, in modo del tutto arbitrario, *positivo il verso uscente*, per cui $-i_1 + i_4 + i_5 - i_6 = 0$.



Leggi di Kirchhoff alle correnti

Quando si scrivono le leggi di Kirchhoff alle correnti:

- In assenza di requisiti particolari, il segno positivo e negativo delle correnti può essere associato in modo del tutto arbitrario al verso entrante o uscente.
- Per ogni taglio dello stesso grafo si può scegliere una convenzione differente a seconda della convenienza.

Albero topologico e co-albero

Definiamo due concetti topologici:

- **Albero topologico**: Sottoinsieme di archi di un grafo che unisce tutti i nodi senza formare percorsi chiusi. Lo si denota come insieme $\mathcal{A}$.
- **Co-albero topologico**: Complemento dell'albero topologico rispetto al grafo. Lo si denota come insieme $\mathcal{C}$.

Si osservi che albero e co-albero formano una *partizione* di un grafo, nel senso che:

- **Albero e co-albero sono complementari**: Vale $\mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \emptyset$, infatti, ogni arco del grafo appartiene all'albero oppure al co-albero.
- **Albero e co-albero coprono l'intero grafo**: Infatti vale $\mathcal{A} \cup \mathcal{C} = \mathcal{G}$, ovvero ogni arco del grafo appartiene ad uno dei due sottoinsiemi.

Albero topologico e co-albero

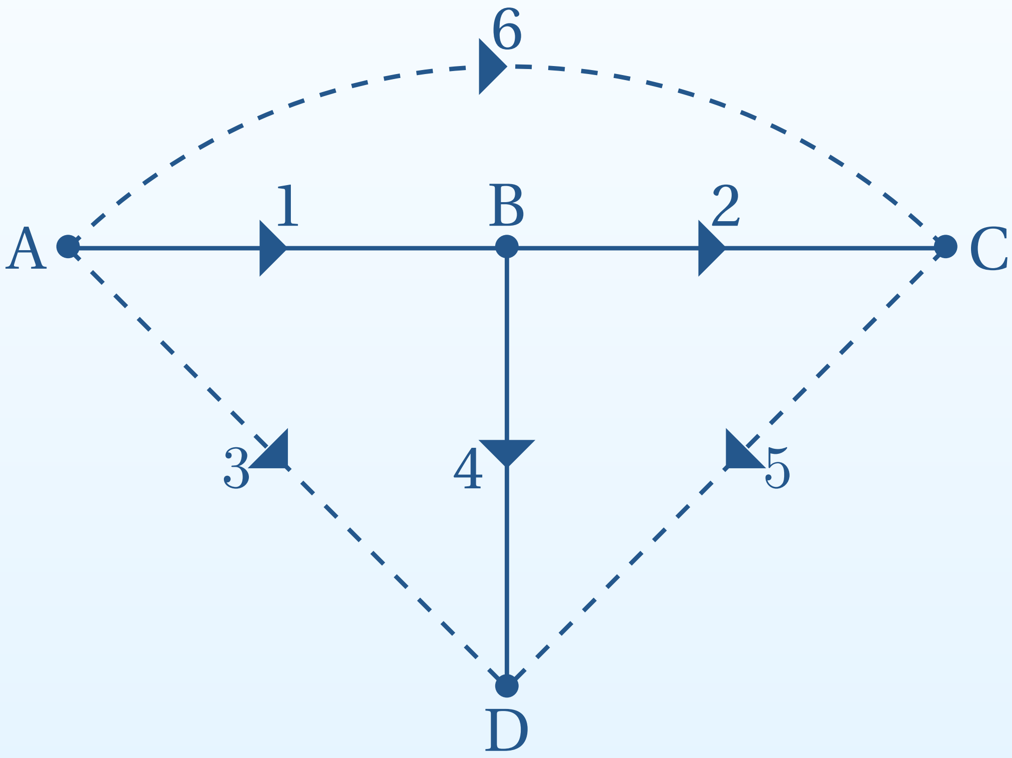
Albero e co-albero hanno dimensioni ben precise. Dato un grafo con N nodi e R archi, risulta:

- **Dimensione dell'albero**: Il numero di archi che fanno parte di un albero si indica con a. Risulta $a = N - 1$.
- **Dimensione del co-albero**: Il numero di archi che fanno parte di un co-albero si indica con c. Risulta $c = R - N + 1$.

Nell'esempio preso in considerazione, dato che $N = 4$ e $R = 6$, risulta che $a = 4 - 1 = 3$ e $c = 6 - 4 + 1 = 3$.
A parte questo esempio, in generale può risultare che $a \neq c$. In alcuni casi, $c \ll a$ oppure $c \gg a$.

Albero topologico e co-albero

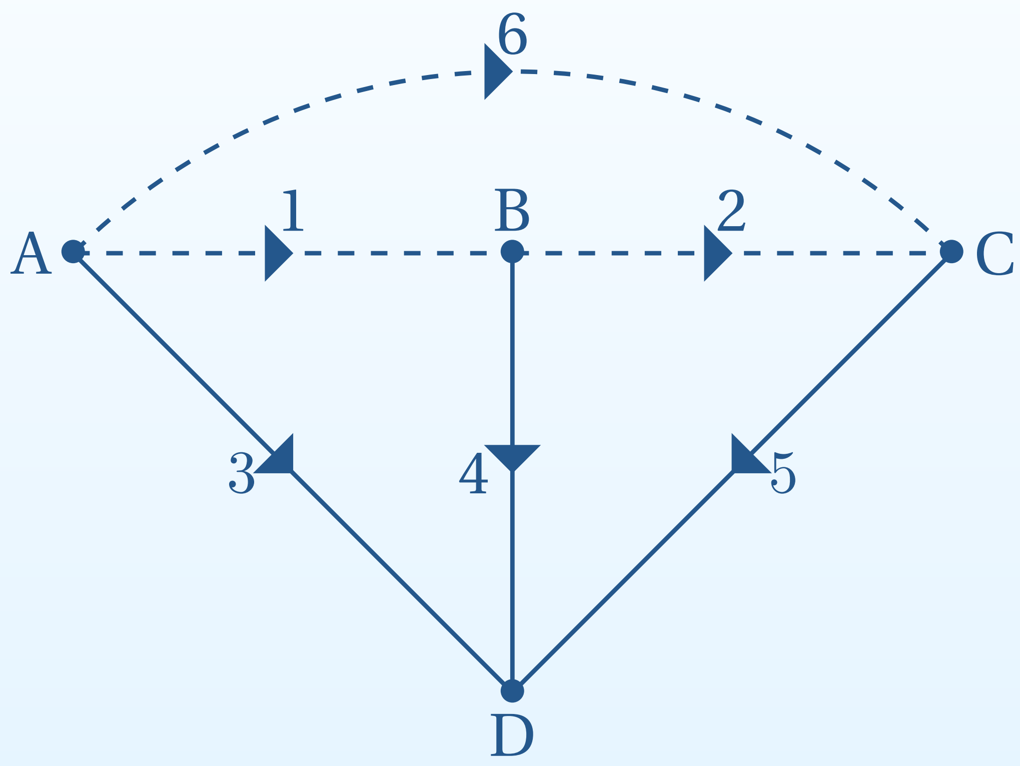
Esempio (la linea continua indica gli archi dell'albero $\mathcal{A}_1$, la linea tratteggiata gli archi del co-albero $\mathcal{C}_1$):



L'albero $\mathcal{A}_1 = \{1, 2, 4\}$ unisce tutti i nodi ma non contiene percorsi chiusi.

Albero topologico e co-albero

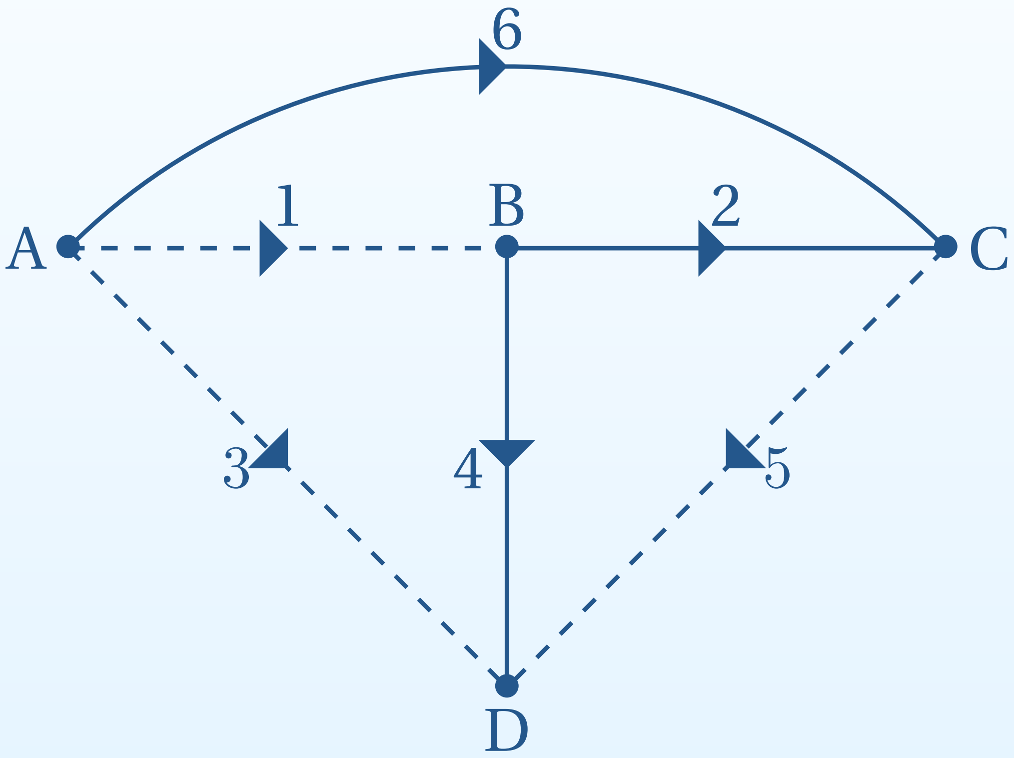
Esempio (la linea continua indica gli archi dell'albero $\mathcal{A}_2$, la linea tratteggiata gli archi del co-albero $\mathcal{C}_2$):



L'albero $\mathcal{A}_2 = \{3, 4, 5\}$ unisce tutti i nodi ma non contiene percorsi chiusi.

Albero topologico e co-albero

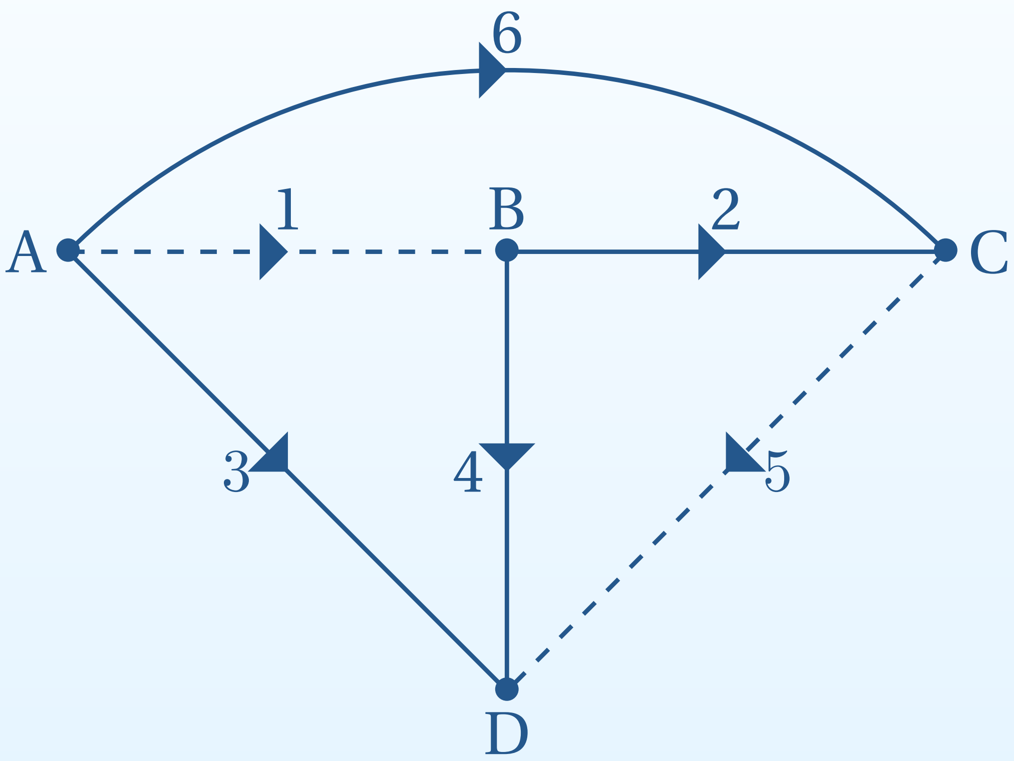
Esempio (la linea continua indica gli archi dell'albero $\mathcal{A}_3$, la linea tratteggiata gli archi del co-albero $\mathcal{C}_3$):



L'albero $\mathcal{A}_3 = \{2, 4, 6\}$ unisce tutti i nodi ma non contiene percorsi chiusi.

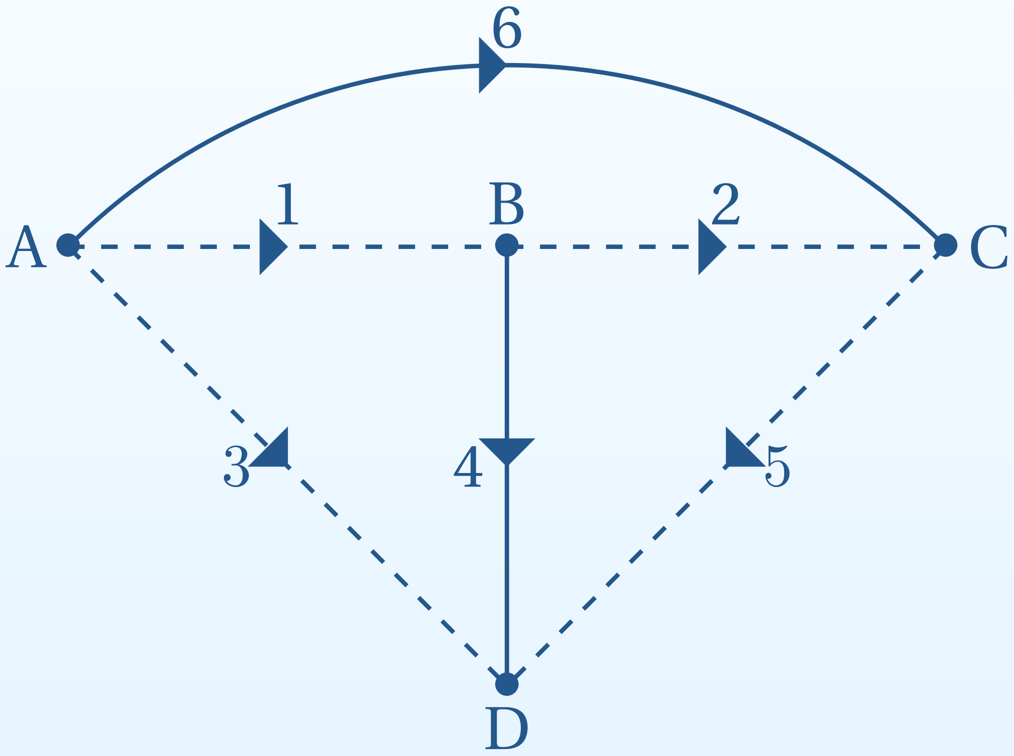
Albero topologico e co-albero

Contro-esempio: l'insieme di archi indicati dalla linea continua **non** forma un albero topologico.



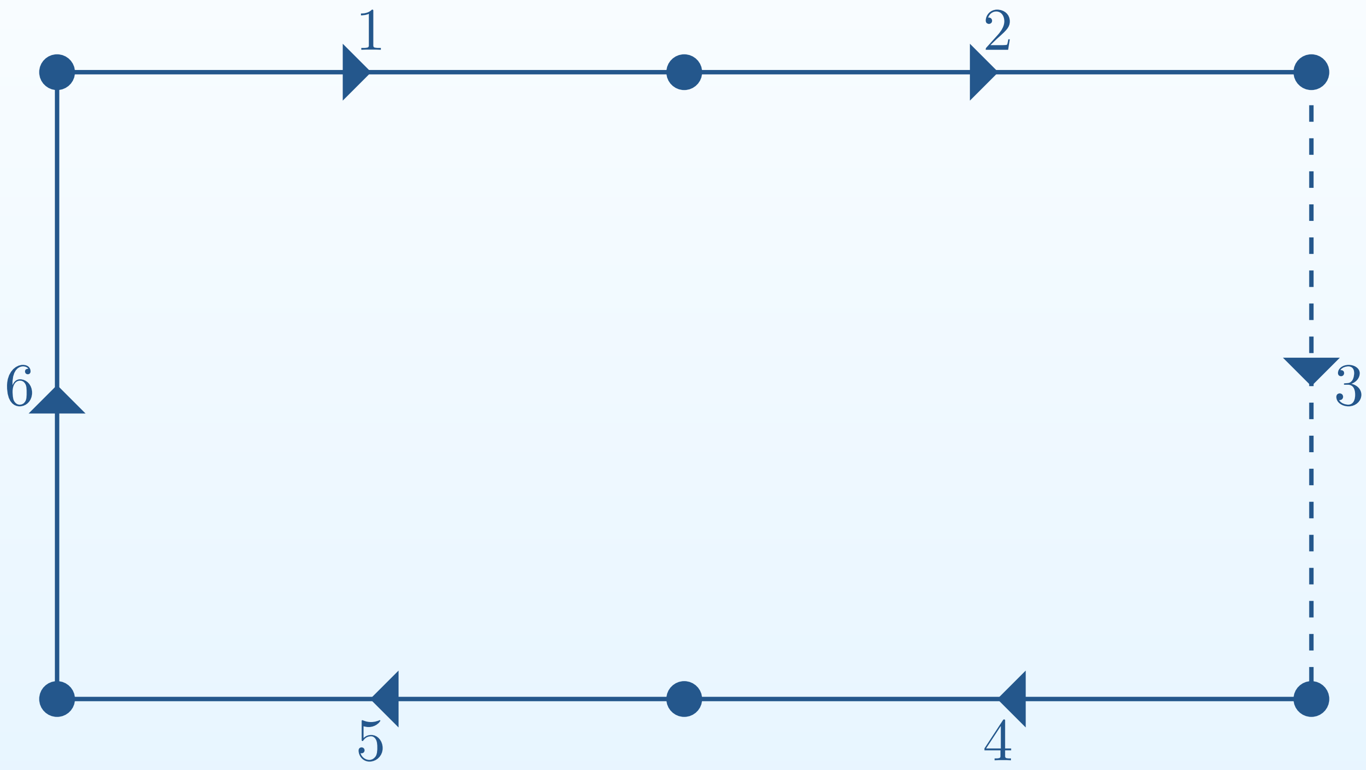
Albero topologico e co-albero

Contro-esempio: l'insieme di archi indicati dalla linea continua **non** forma un albero topologico.



Albero topologico e co-albero

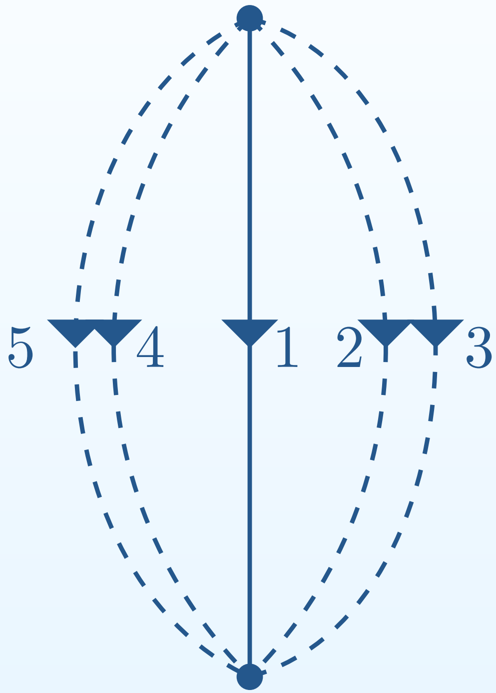
Consideriamo, a titolo di esempio, un caso in cui $a \gg c$:



In questo caso (6 bipoli collegati in serie) risulta $a = 5$ e $c = 1$.

Albero topologico e co-albero

Consideriamo, a titolo di esempio, un caso in cui $a \ll c$:



In questo caso (5 bipoli collegati in parallelo) risulta $c = 4$ e $a = 1$.

Maglie topologiche fondamentali

Una maglia topologica si dice *fondamentale* se contiene *un solo arco di co-albero*.

Dato che ogni maglia topologica fondamentale contiene un solo arco di co-albero:

- Stabiliamo che la maglia fondamentale che contiene l'arco $k$mo di co-albero venga denotata con $\mathcal{MF}_k$.
- Deduciamo che, se una maglia fondamentale contiene un arco di co-albero, il numero di maglie fondamentali in un grafo coincide con il numero di archi di co-albero, ovvero *numero di maglie fondamentali* $= c$.

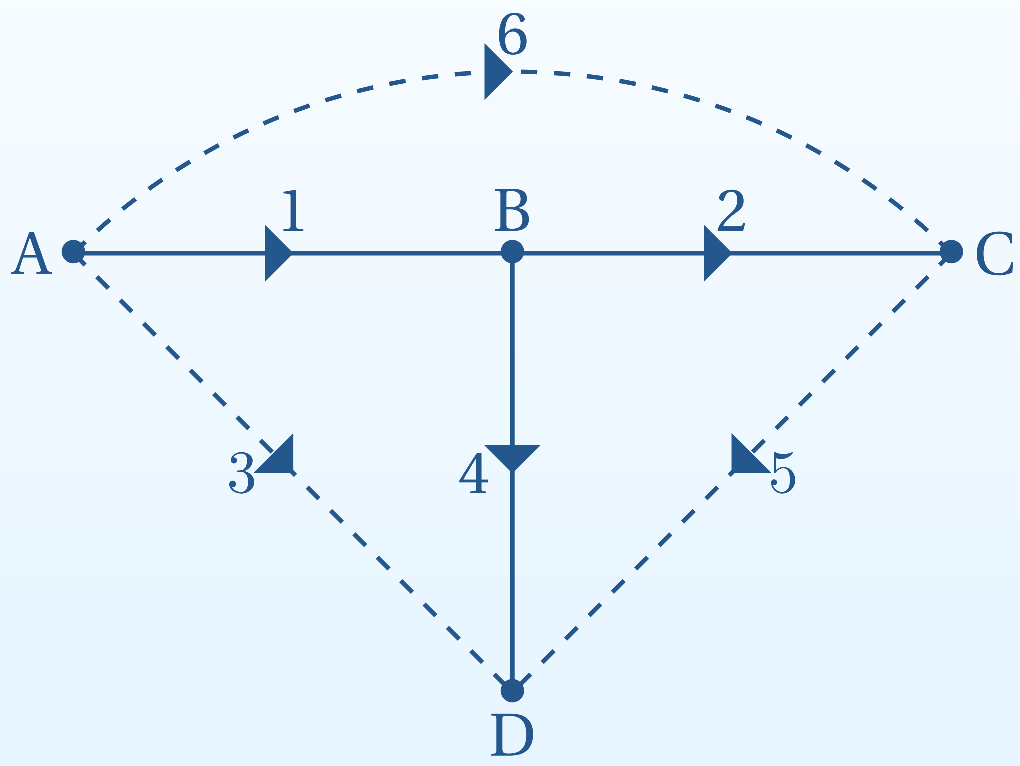
Maglie topologiche fondamentali

Osserviamo quanto segue:

- Chiaramente, le maglie fondamentali si possono stabilire solo dopo aver effettuato una partizione del grafo in albero/co-albero.
- Una maglia topologica fondamentale si costruisce aggiungendo all'albero un solo arco di co-albero. **L'albero, di per sé, non contiene percorsi chiusi, ma aggiungendo un arco di co-albero si viene senz'altro a formare un percorso chiuso: la maglia fondamentale associata a quell'arco di co-albero.**

Maglie topologiche fondamentali

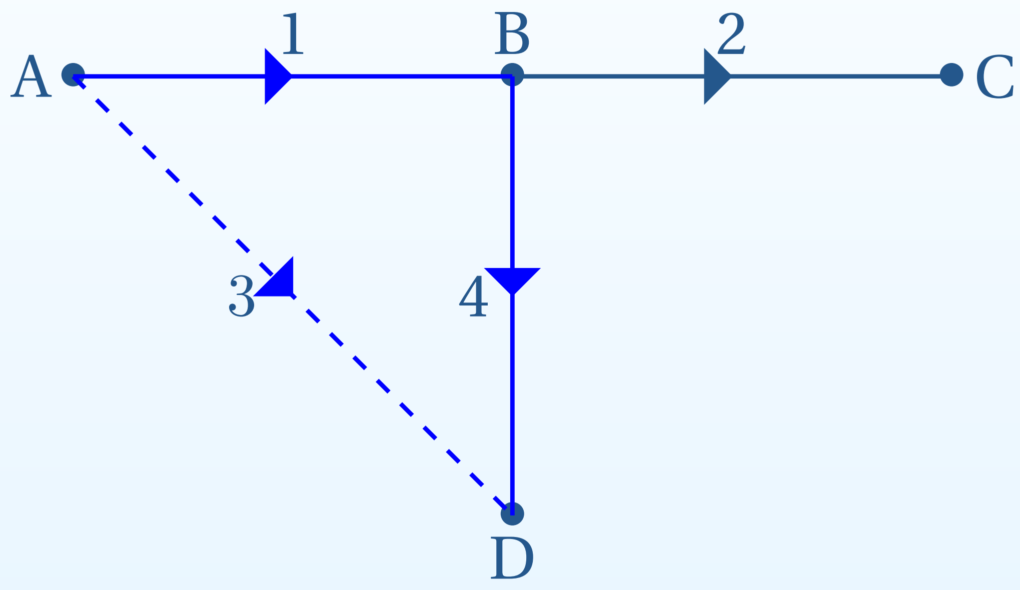
Esempio (la linea continua indica gli archi dell'albero $\mathcal{A}$, la linea tratteggiata gli archi del co-albero $\mathcal{C}$):



Il co-albero è $\mathcal{C} = \{3, 5, 6\}$.

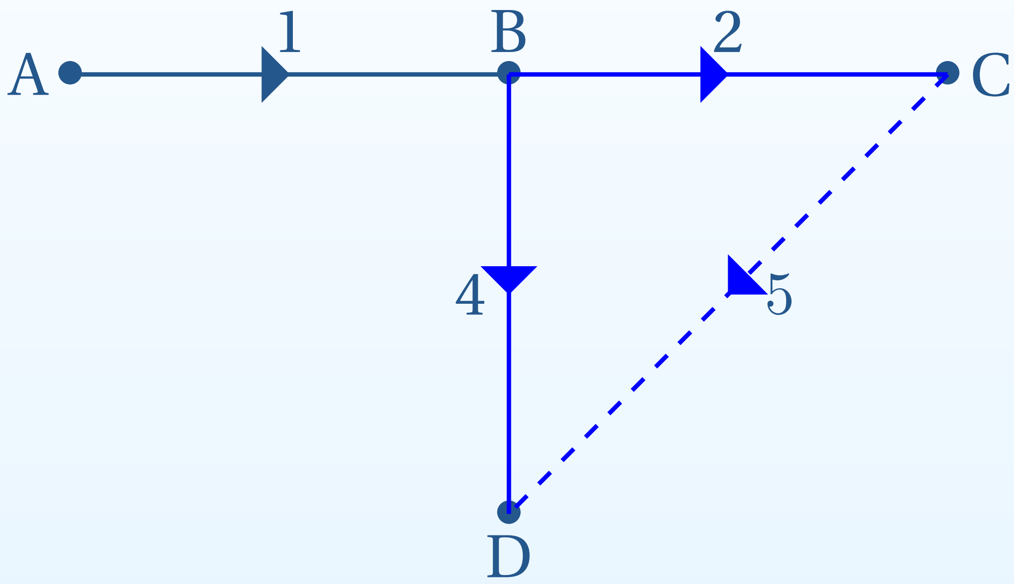
Maglie topologiche fondamentali

Aggiungendo l'arco di co-albero 3 all'albero, si viene a formare un percorso chiuso (maglia fondamentale) $\mathcal{MF}_3 = \{1, \underline{3}, 4\}$.



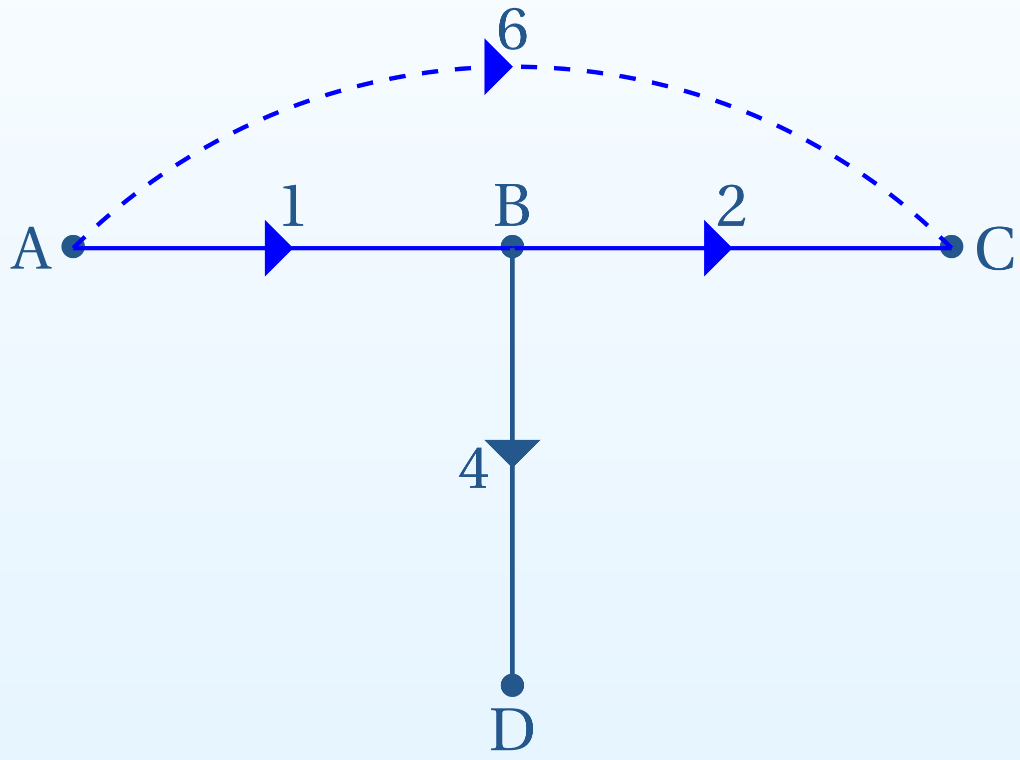
Maglie topologiche fondamentali

Aggiungendo l'arco di co-albero 5 all'albero, si viene a formare un percorso chiuso (maglia fondamentale) $\mathcal{MF}_5 = \{2, 4, \underline{5}\}$.



Maglie topologiche fondamentali

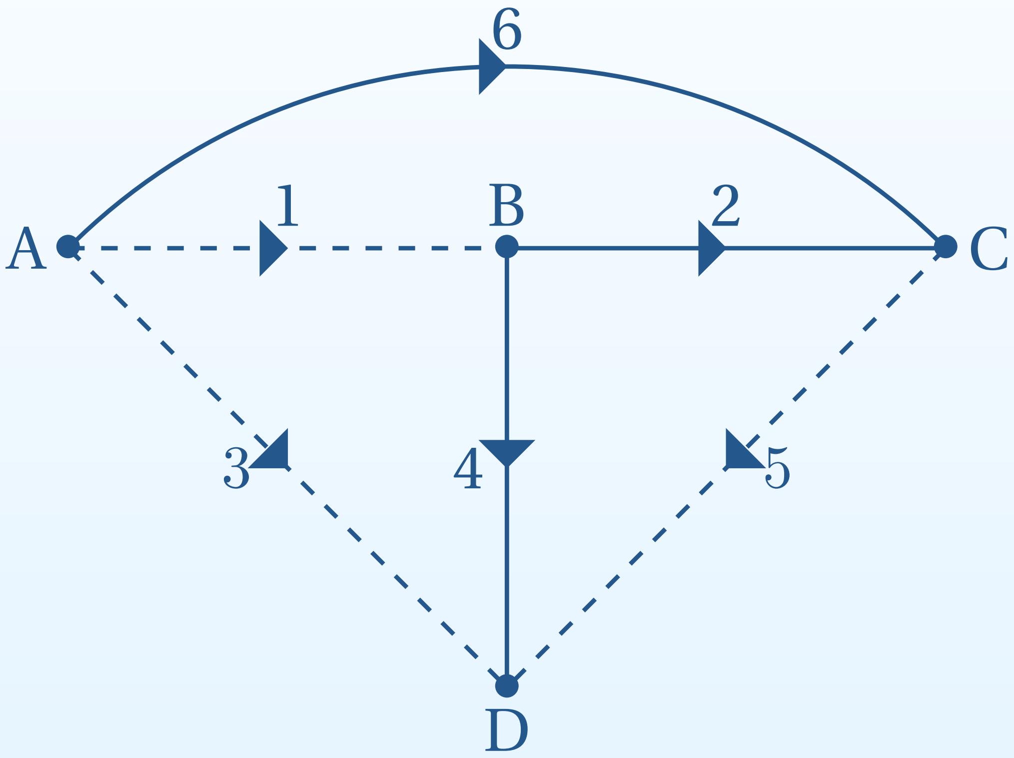
Aggiungendo l'arco di co-albero 6 all'albero, si viene a formare un percorso chiuso (maglia fondamentale) $\mathcal{MF}_6 = \{1, 2, \underline{6}\}$.



Non esistono ulteriori maglie fondamentali, in quanto $c = 3$ ed abbiamo individuato già tre maglie fondamentali.

Maglie topologiche fondamentali

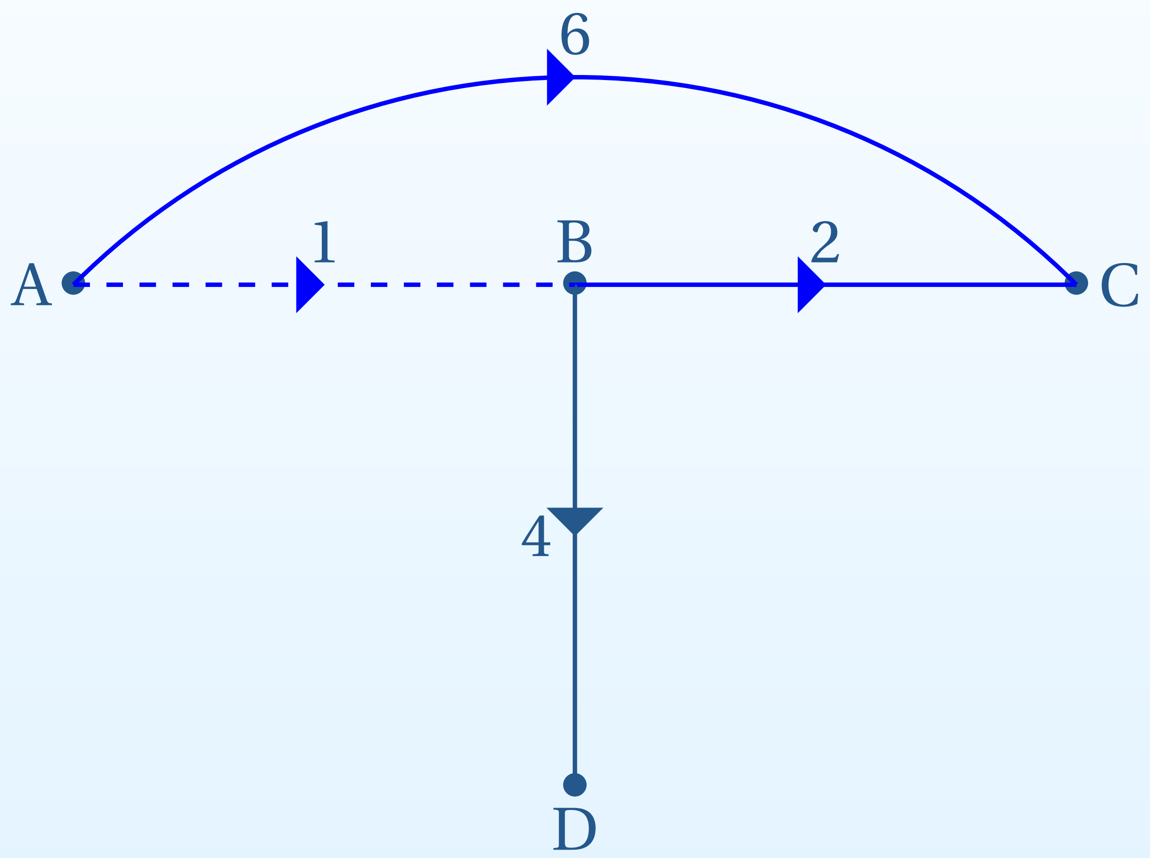
Esempio (la linea continua indica gli archi dell'albero $\mathcal{A}$, la linea tratteggiata gli archi del co-albero $\mathcal{C}$):



Il co-albero, in questo caso, è $\mathcal{C} = \{1, 3, 5\}$.

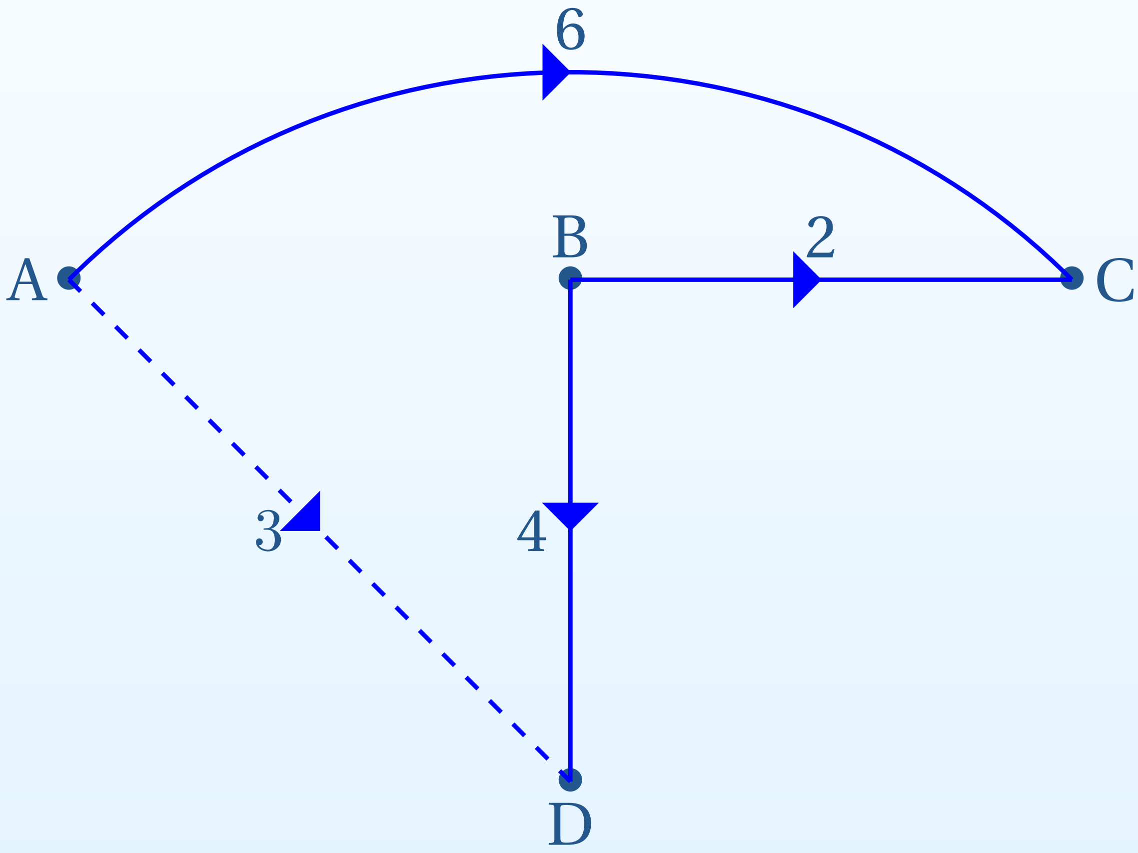
Maglie topologiche fondamentali

Aggiungendo l'arco di co-albero 1 all'albero, si viene a formare un percorso chiuso (maglia fondamentale) $\mathcal{MF}_1 = \{\underline{1}, 2, 6\}$.



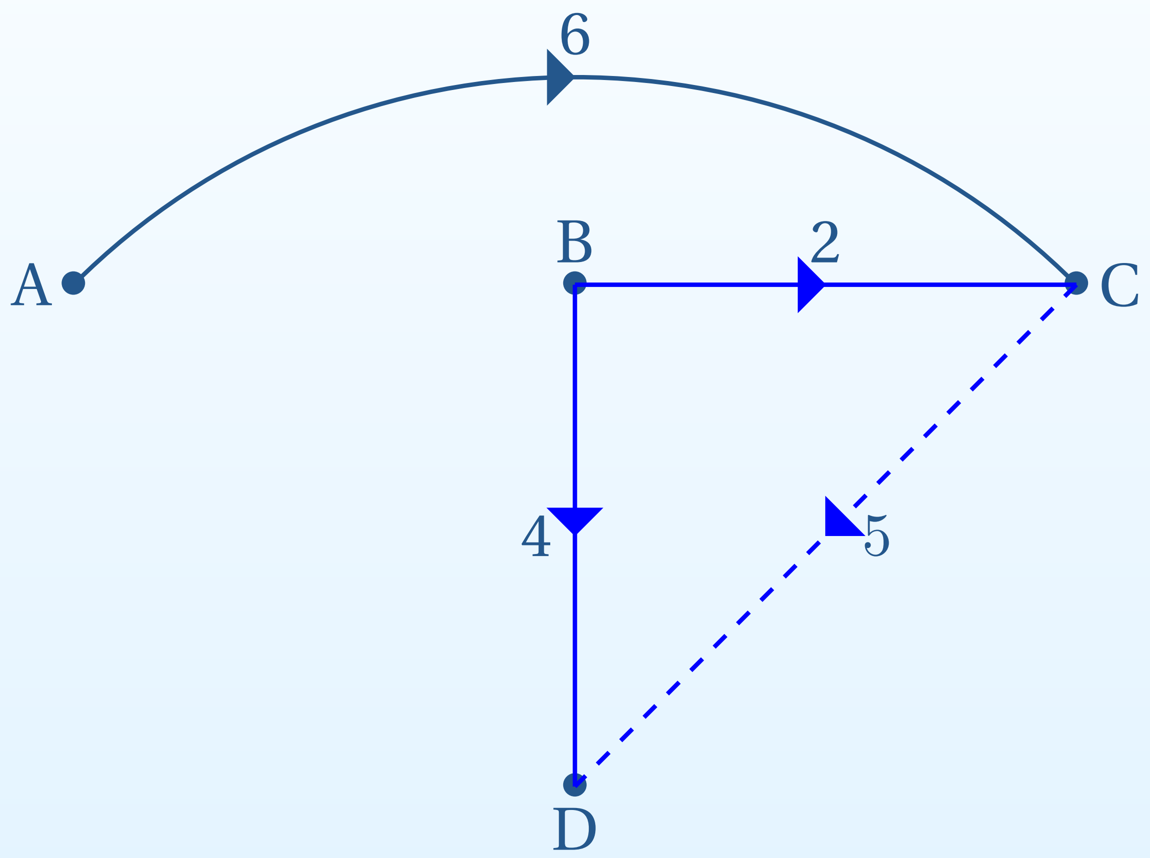
Maglie topologiche fondamentali

Aggiungendo l'arco di co-albero 3 all'albero, si viene a formare un percorso chiuso (maglia fondamentale) $\mathcal{MF}_3 = \{2, \underline{3}, 4, 6\}$.



Maglie topologiche fondamentali

Aggiungendo l'arco di co-albero 5 all'albero, si viene a formare un percorso chiuso (maglia fondamentale) $\mathcal{MF}_5 = \{2, 4, \underline{5}\}$.



Tagli topologici fondamentali

Un taglio topologico si dice *fondamentale* se contiene *un solo arco di albero*.

Dato che ogni taglio topologico fondamentale contiene un solo arco di albero:

- Stabiliamo che il taglio topologico fondamentale che contiene l'arco $k$mo di albero venga denotato con $\mathcal{TF}_k$.
- Deduciamo che, se un taglio fondamentale contiene un arco di albero, il numero di tagli fondamentali in un grafo coincide con il numero di archi di albero, ovvero *numero di tagli fondamentali* $= a$.

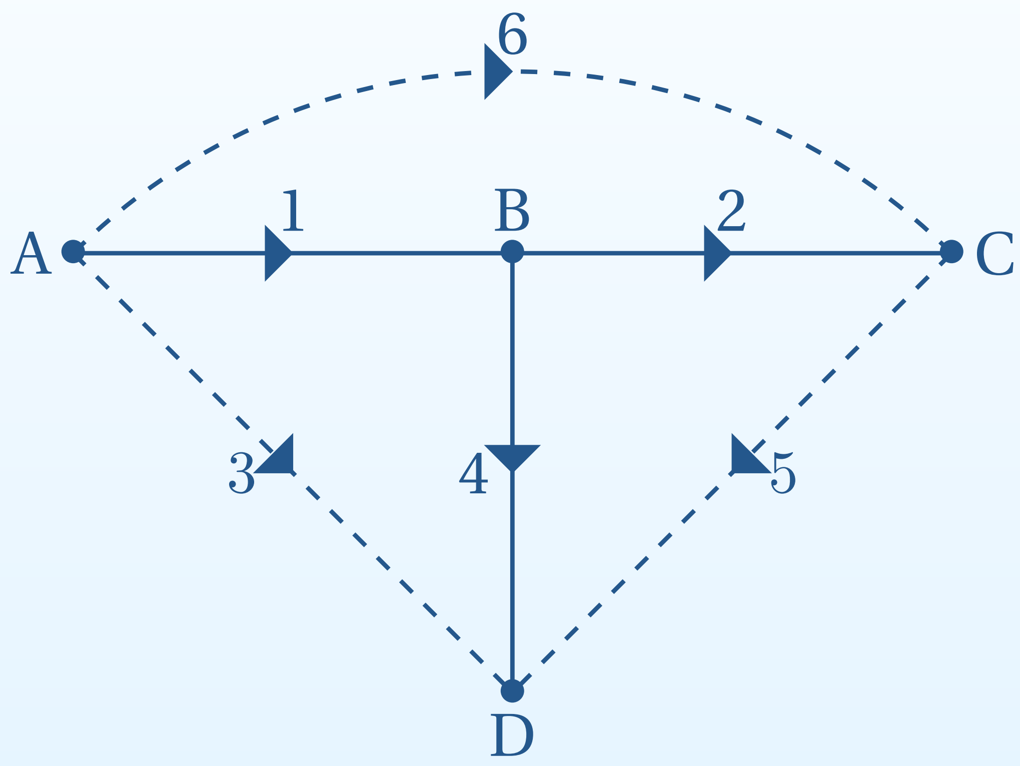
Tagli topologici fondamentali

Osserviamo quanto segue:

- I tagli topologici fondamentali si possono stabilire solo dopo aver effettuato una partizione del grafo in albero/co-albero.
- Un taglio topologico fondamentale si costruisce scegliendo una superficie che taglia un solo arco di albero.

Tagli topologici fondamentali

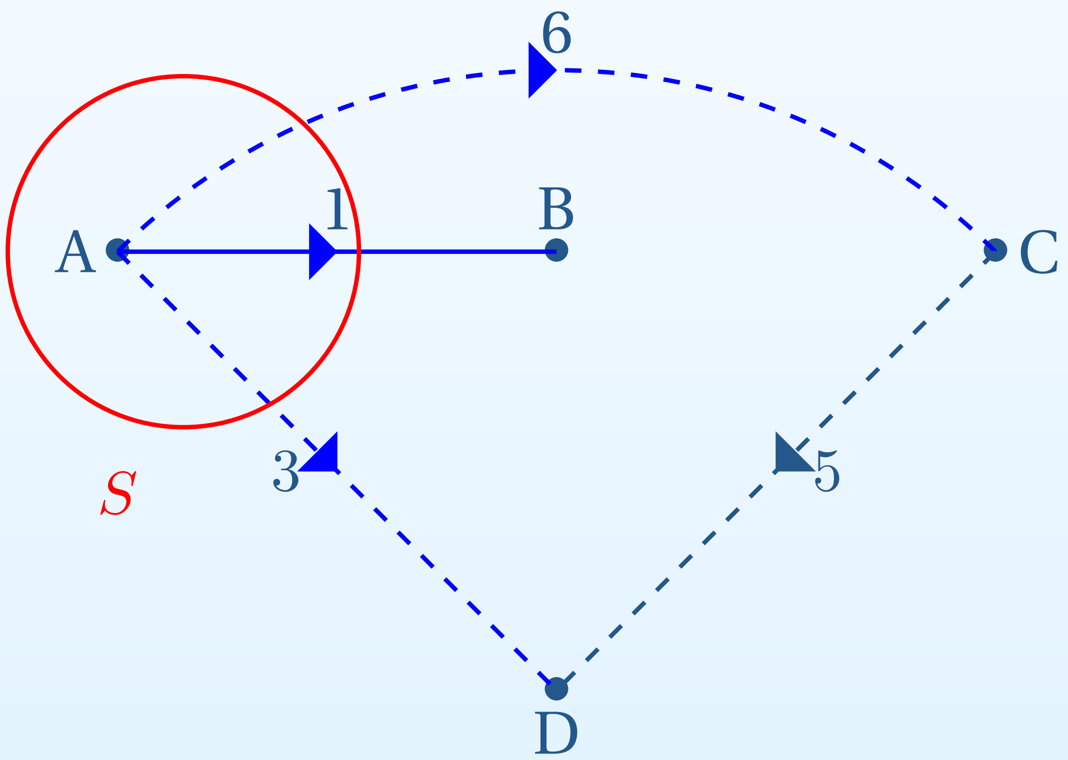
Esempio (la linea continua indica gli archi dell'albero $\mathcal{A}$, la linea tratteggiata gli archi del co-albero $\mathcal{C}$):



L'albero è $\mathcal{A} = \{1, 2, 4\}$.

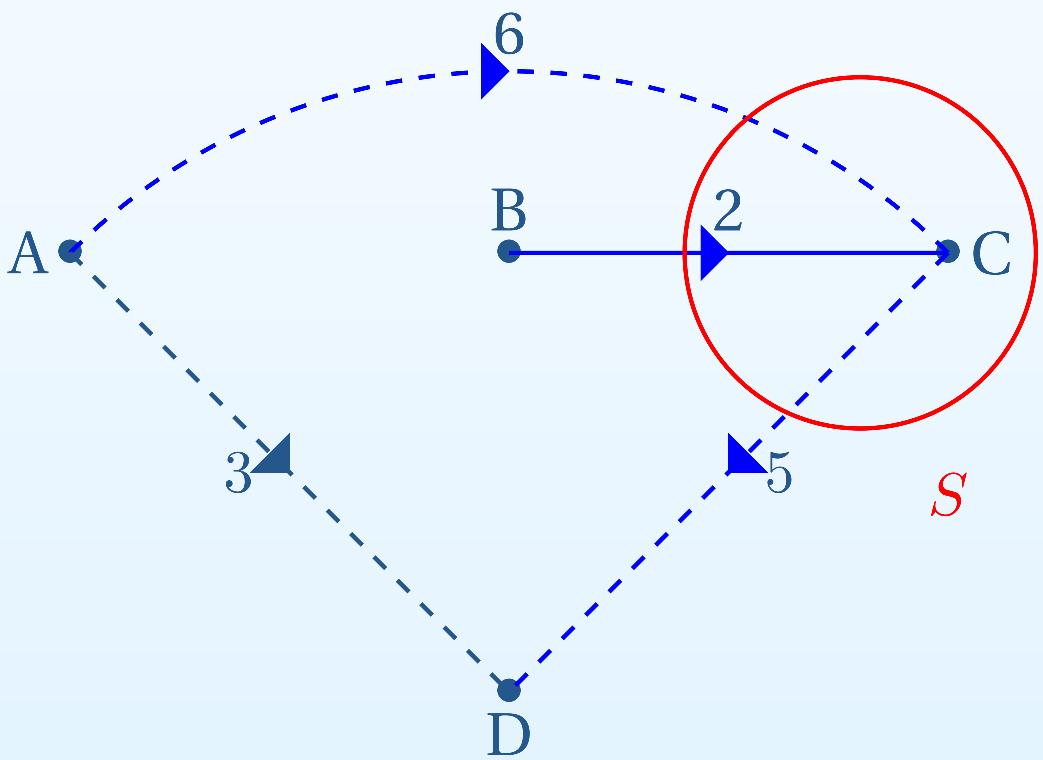
Tagli topologici fondamentali

Aggiungendo l'arco di albero 1 al co-albero, si vede che è possibile determinare una superficie chiusa S che tocca solo questo arco di albero e alcuni archi di co-albero. Tale superficie determina il taglio fondamentale $\mathcal{TF}_1 = \{\underline{1}, 3, 6\}$.



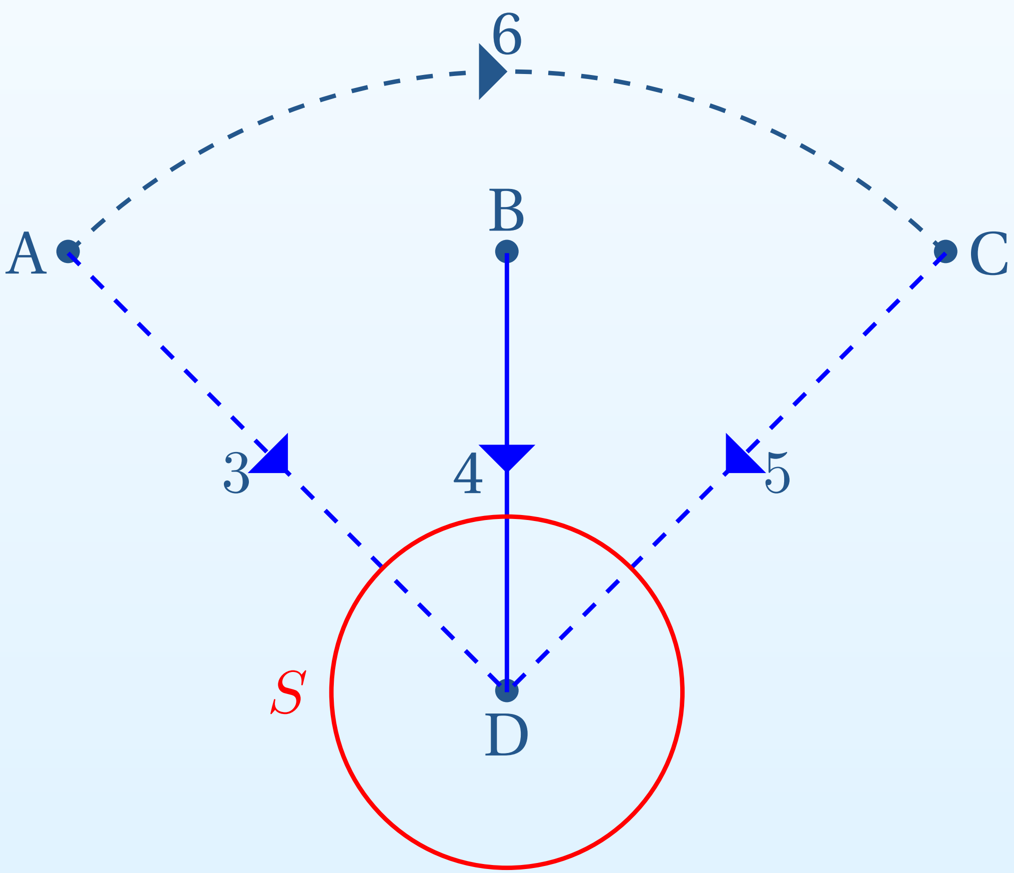
Tagli topologici fondamentali

Aggiungendo l'arco di albero 2 al co-albero, si trova una superficie chiusa S che tocca solo questo arco di albero e alcuni archi di co-albero. Tale superficie determina il taglio fondamentale $\mathcal{TF}_2 = \{\underline{2}, 5, 6\}$.



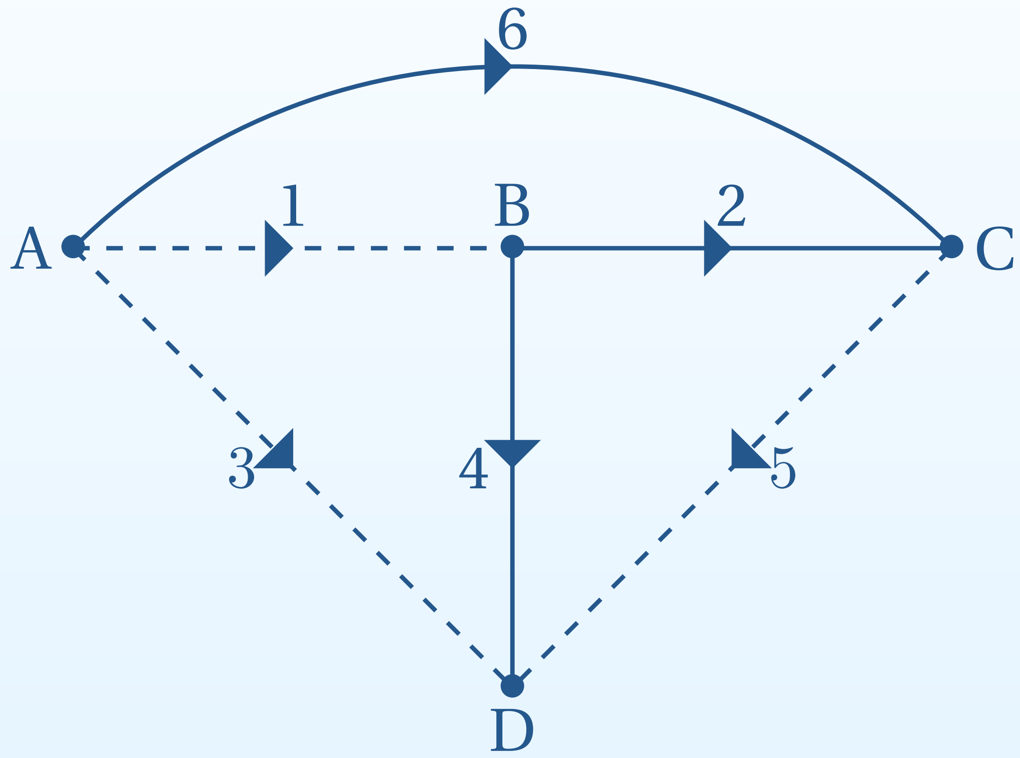
Tagli topologici fondamentali

Aggiungendo l'arco di albero 4 al co-albero, si trova una superficie chiusa S che tocca solo questo arco di albero e alcuni archi di co-albero. Tale superficie determina il taglio fondamentale $\mathcal{TF}_4 = \{3, \underline{4}, 5\}$.



Tagli topologici fondamentali

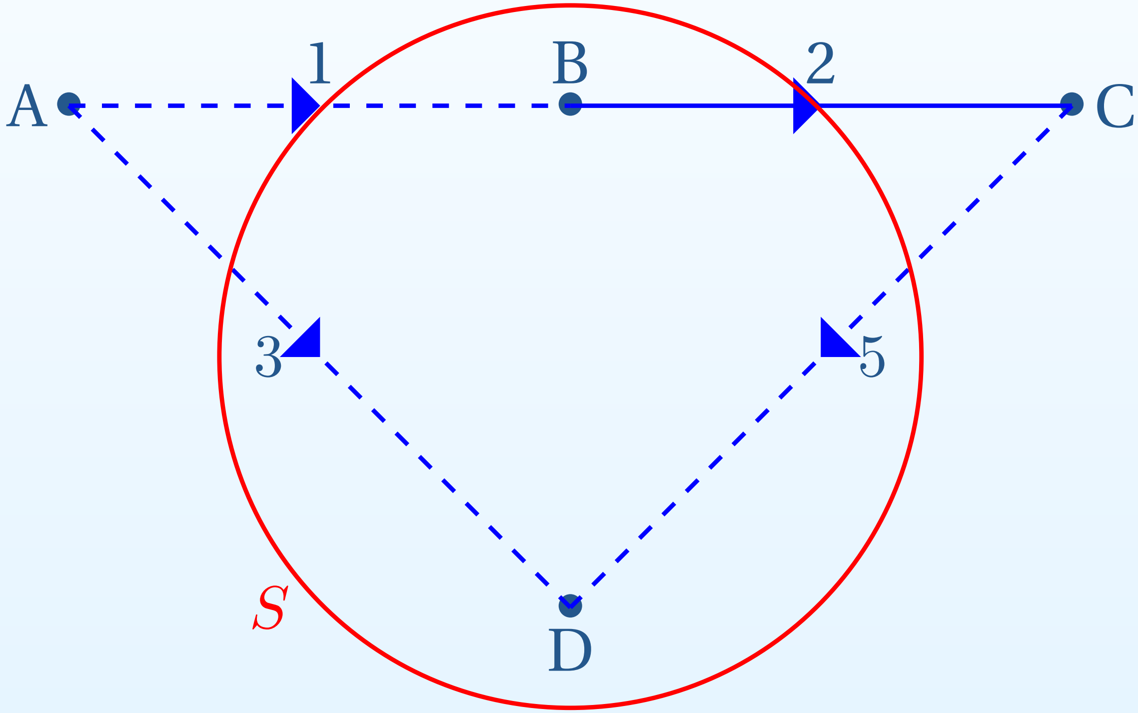
Esempio (la linea continua indica gli archi dell'albero $\mathcal{A}$, la linea tratteggiata gli archi del co-albero $\mathcal{C}$):



L'albero topologico, in questo caso, è $\mathcal{A} = \{2, 4, 6\}$.

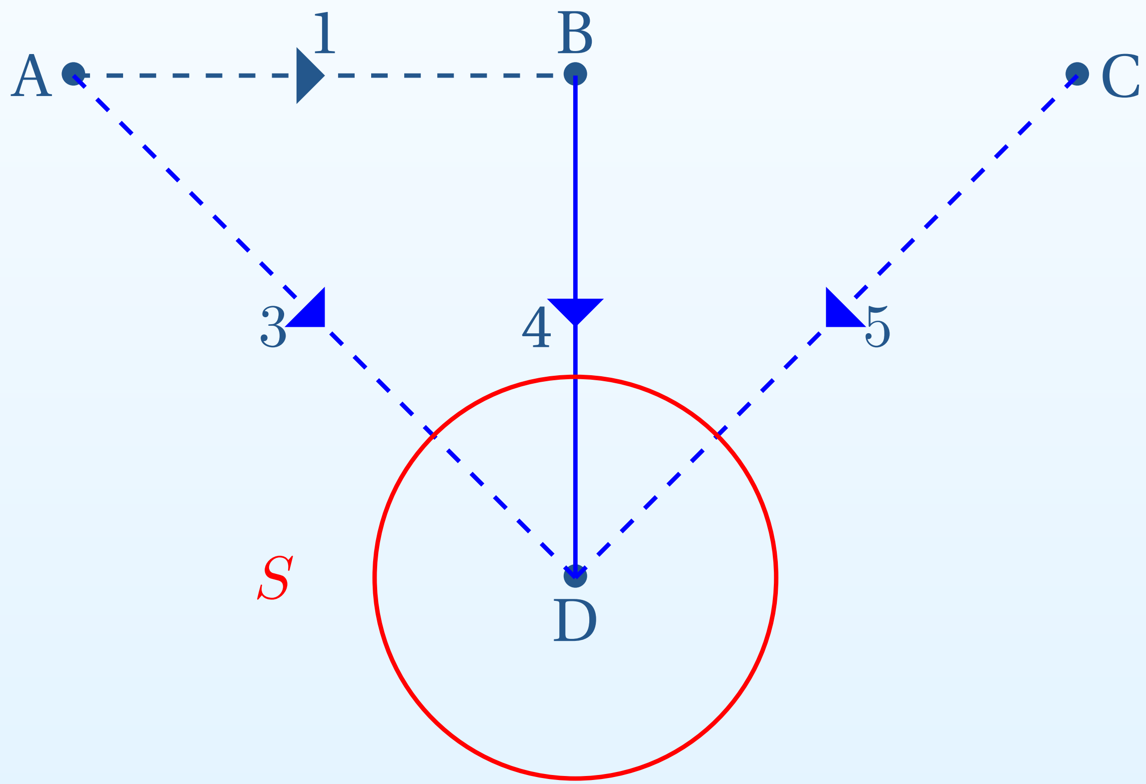
Tagli topologici fondamentali

Aggiungendo l'arco di albero 2 al co-albero, si trova una superficie chiusa S che tocca solo questo arco di albero. Tale superficie determina il taglio fondamentale $\mathcal{TF}_2 = \{1, \underline{2}, 3, 5\}$.



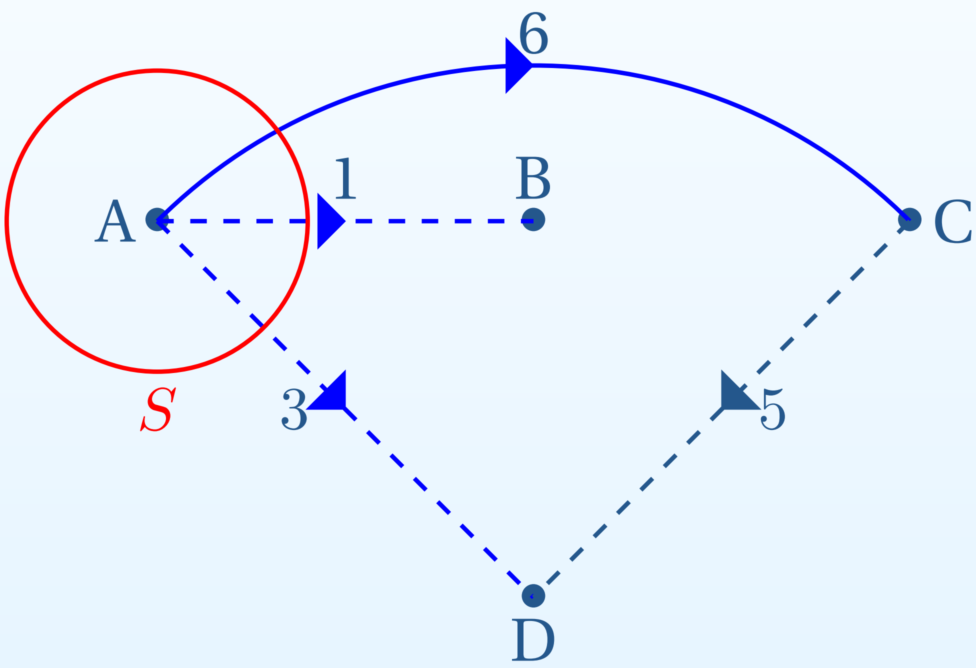
Tagli topologici fondamentali

Aggiungendo l'arco di albero 4 al co-albero, si trova una superficie chiusa S che tocca solo questo arco di albero. Tale superficie determina il taglio fondamentale $\mathcal{TF}_4 = \{3, \underline{4}, 5\}$.



Tagli topologici fondamentali

Aggiungendo l'arco di albero 6 al co-albero, si trova una superficie chiusa S che tocca solo questo arco di albero. Tale superficie determina il taglio fondamentale $\mathcal{TF}_6 = \{1, 3, \underline{6}\}$.



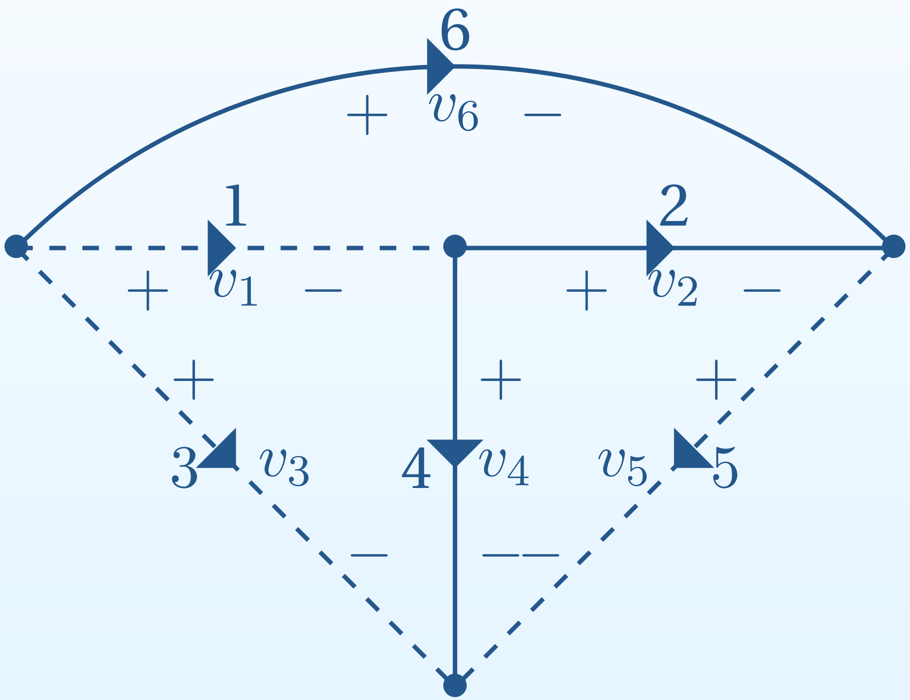
Non esistono ulteriori tagli fondamentali, in quanto $a = 3$ ed abbiamo individuato già tre tagli fondamentali.

Equazione topologica “B”

- In un grafo con dimensioni (N, R), qualsiasi partizione ha $c = R - N + 1$ archi di co-albero e quindi c maglie fondamentali. Si possono scrivere quindi **esattamente** c equazioni LKT alle c maglie fondamentali.
- Le tensioni di albero sono fra loro **linearmente indipendenti**, in quanto l’albero topologico, per definizione, non contiene maglie e non è quindi possibile scrivere alcun vincolo tra le sole tensioni di albero.
- Le tensioni di albero formano quindi una **base di tensioni** per il circuito/grafo e le LKT sulle maglie fondamentali esprimono la dipendenza delle tensioni di co-albero dalle tensioni di albero.
- Raggruppando le c LKT sulle maglie fondamentali tramite una scrittura vettoriale, si ottiene la cosiddetta **Equazione topologica “B”**.

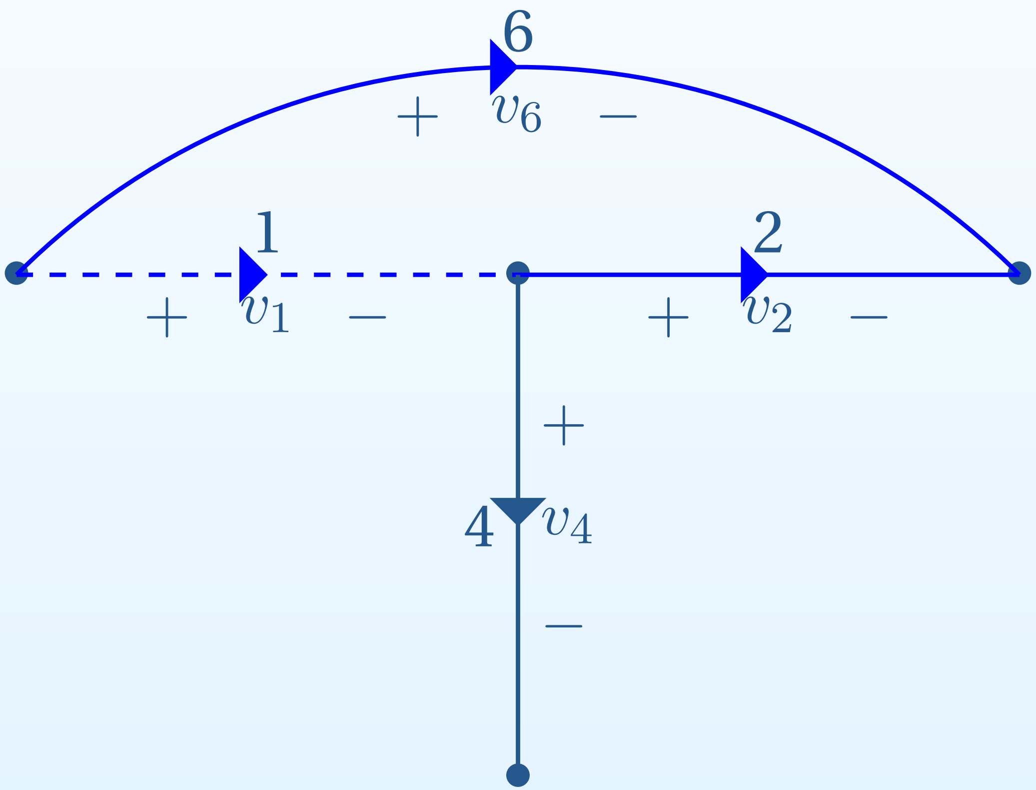
Equazione topologica "B"

Riprendiamo un esempio precedente di grafo e di partizione (la linea continua indica gli archi dell'albero, la linea tratteggiata gli archi del co-albero):



Equazione topologica “B”

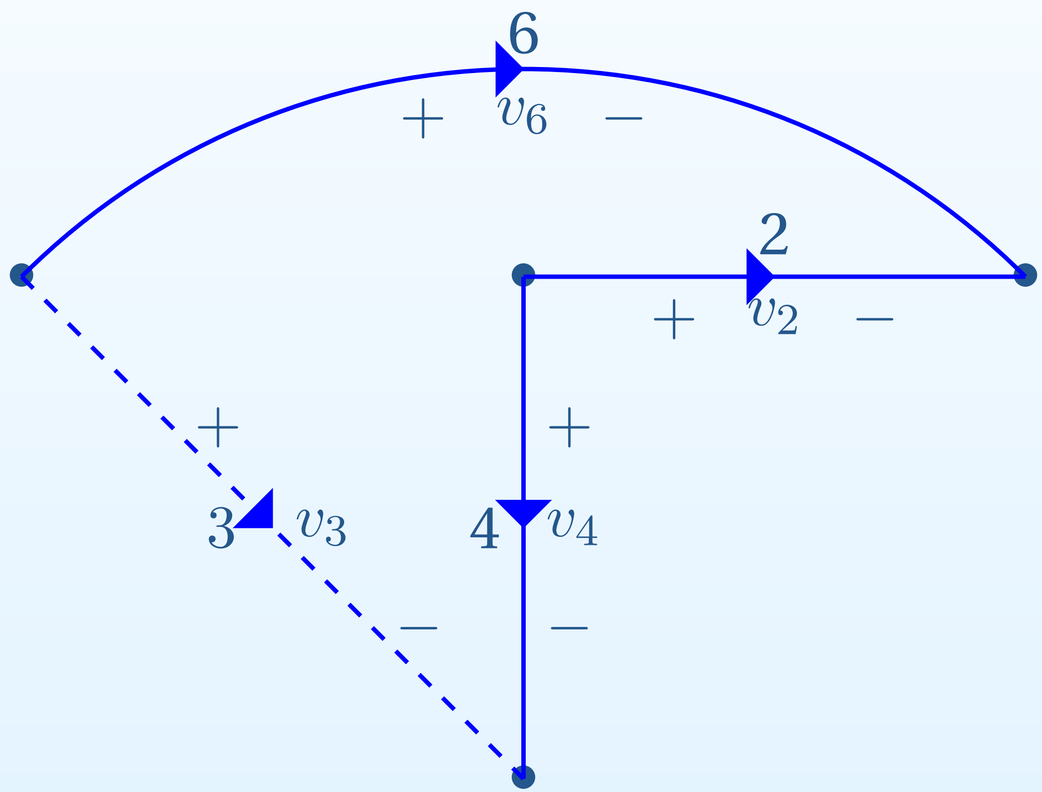
La maglia fondamentale $\mathcal{MF}_1 = \{\underline{1}, 2, 6\}$. Percorriamo questa maglia in modo che, nella LKT, la tensione di arco di co-albero 1 sia positiva, ovvero in verso anti-orario.



La LKT-$\mathcal{MF}_1$ si scrive $v_1 + v_2 - v_6 = 0$.

Equazione topologica "B"

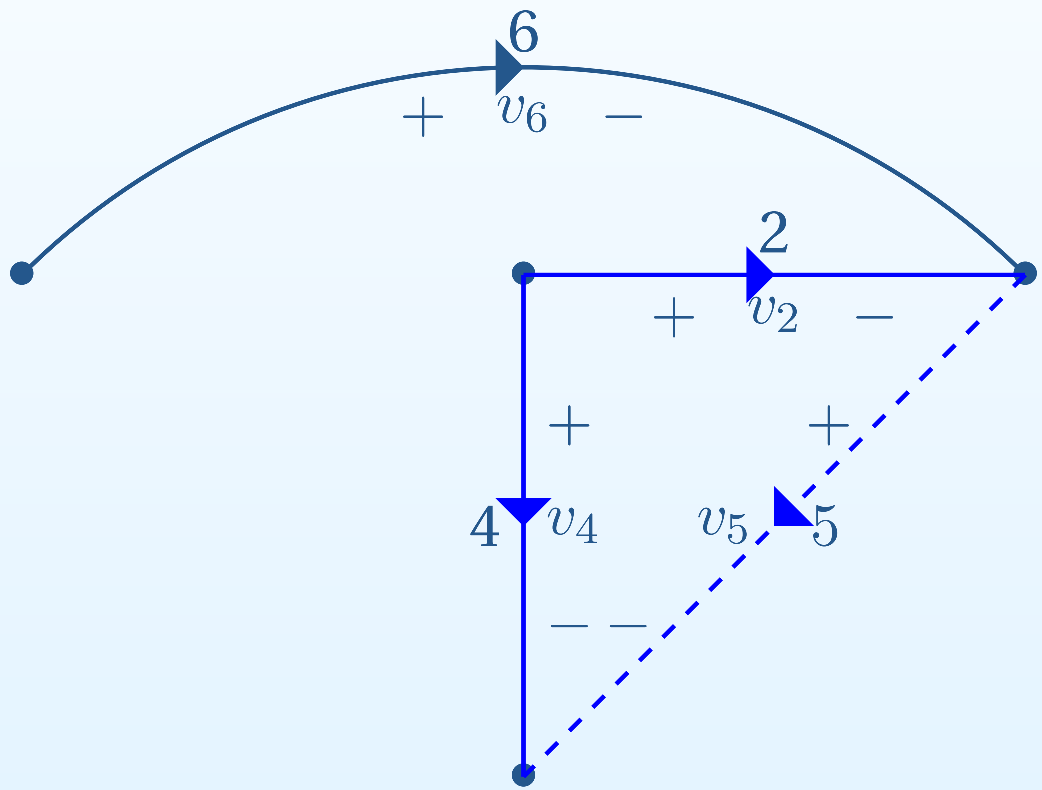
La maglia fondamentale $\mathcal{MF}_3 = \{2, \underline{3}, 4, 6\}$. Percorriamo questa maglia in modo che, nella LKT, la tensione di arco di co-albero 3 sia positiva, ovvero in verso anti-orario.



La LKT-$\mathcal{MF}_3$ si scrive $v_3 + v_2 - v_4 - v_6 = 0$.

Equazione topologica “B”

La maglia fondamentale $\mathcal{MF}_5 = \{2, 4, \underline{5}\}$. Percorriamo questa maglia in modo che, nella LKT, la tensione di arco di co-albero 5 sia positiva, ovvero in verso orario.



La LKT-$\mathcal{MF}_5$ si scrive $v_5 + v_2 - v_4 = 0$.

Equazione topologica “B”

Riassumendo le LKT trovate nell’esempio, abbiamo

- LKT-$\mathcal{MF}_1$) $v_1 + v_2 - v_6 = 0$.
- LKT-$\mathcal{MF}_3$) $v_3 + v_2 - v_4 - v_6 = 0$.
- LKT-$\mathcal{MF}_5$) $v_5 + v_2 - v_4 = 0$.

Due osservazioni importanti:

- La tensione di co-albero v_1 compare solo nella LKT-$\mathcal{MF}_1$, la tensione di co-albero v_3 compare solo nella LKT-$\mathcal{MF}_3$, la tensione di co-albero v_5 compare solo nella LKT-$\mathcal{MF}_5$ (sempre con il segno positivo, per costruzione).
- Le altre tensioni che compaiono nelle LKT sono le tensioni sugli archi di albero (v_2, v_4, v_6) pesate con i coefficienti $0, +1, -1$.

Equazione topologica “B”

Introducendo una notazione vettoriale, è possibile riscrivere le LKT trovate nell’esempio in modo più compatto. Inoltre, è possibile scrivere una espressione generale che lega le tensioni di albero alle tensioni di co-albero. Definiamo:

$$\mathbf{V}_{\mathrm{a}} := \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_6 \end{bmatrix}, \ \mathbf{V}_{\mathrm{c}} := \begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_5 \end{bmatrix}.$$

In generale, $\mathbf{V}_{\mathrm{a}}$ è un vettore colonna che contiene le tensioni sugli archi di albero ed ha dimensione $a \times 1$, $\mathbf{V}_{\mathrm{c}}$ è un vettore colonna che contiene le tensioni sugli archi di co-albero ed ha dimensione $c \times 1$.

Equazione topologica “B”

Le LKT sulle maglie fondamentali si possono scrivere, in modo compatto, come

$$\mathbf{V}_{\mathrm{c}} + \mathbf{B}\mathbf{V}_{\mathrm{a}} = \mathbf{0},$$

che viene detta **Equazione topologica “B”**. In questa equazione, B è una matrice di dimensione $c \times a$ i cui elementi possono valere solo 0, $+1$ o -1. Il vettore ‘0’ è un vettore nullo di dimensione $c \times 1$.

Equazione topologica “B”

Riprendendo l’esempio,

- LKT-$\mathcal{MF}_1$) $v_1 + v_2 - v_6 = 0$.
- LKT-$\mathcal{MF}_3$) $v_3 + v_2 - v_4 - v_6 = 0$.
- LKT-$\mathcal{MF}_5$) $v_5 + v_2 - v_4 = 0$.

l’Equazione topologica “B” ha la forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_c} + \underbrace{\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_a} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}$$

Vanno determinati gli elementi della matrice **B**.

Equazione topologica “B”

La prima riga della matrice è legata alla LKT-$\mathcal{MF}_1$:

- LKT-$\mathcal{MF}_1$) $v_1 + v_2 - v_6 = 0.$
- LKT-$\mathcal{MF}_3$) $v_3 + v_2 - v_4 - v_6 = 0.$
- LKT-$\mathcal{MF}_5$) $v_5 + v_2 - v_4 = 0.$

L’Equazione topologica “B” ha la forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_c} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_a} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}$$

Equazione topologica “B”

La seconda riga della matrice è legata alla LKT-$\mathcal{MF}_3$:

- LKT-$\mathcal{MF}_1$) $v_1 + v_2 - v_6 = 0.$
- LKT-$\mathcal{MF}_3$) $v_3 + v_2 - v_4 - v_6 = 0.$
- LKT-$\mathcal{MF}_5$) $v_5 + v_2 - v_4 = 0.$

L’Equazione topologica “B” ha la forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_\mathrm{c}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_\mathrm{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}$$

Equazione topologica “B”

La terza riga della matrice è legata alla LKT-$\mathcal{MF}_5$:

- LKT-$\mathcal{MF}_1$) $v_1 + v_2 - v_6 = 0.$
- LKT-$\mathcal{MF}_3$) $v_3 + v_2 - v_4 - v_6 = 0.$
- LKT-$\mathcal{MF}_5$) $v_5 + v_2 - v_4 = 0.$

L’Equazione topologica “B” ha la forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_\mathrm{c}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_\mathrm{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}$$

Equazione topologica “B”

Con questo procedimento si è determinata la matrice topologica

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

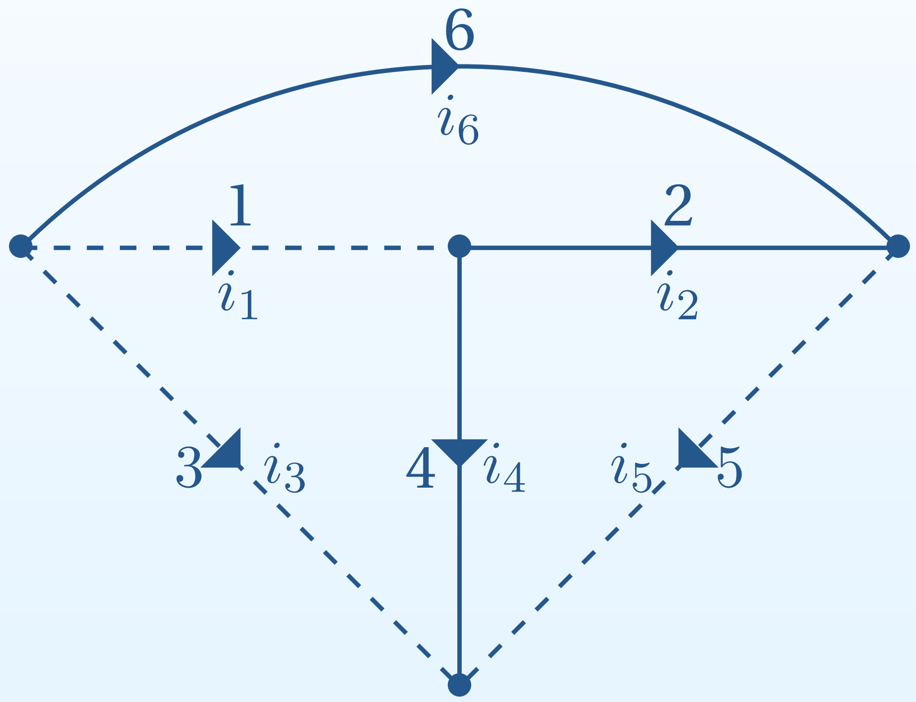
relativa all’esempio.

Equazione topologica “A”

- In un grafo con dimensioni (N, R), qualsiasi partizione ha $a = N - 1$ archi di albero e quindi a tagli fondamentali. Si possono scrivere quindi **esattamente** a equazioni LKC agli a tagli fondamentali.
- Le correnti di co-albero sono fra loro **linearmente indipendenti**.
- Le correnti di co-albero formano quindi una **base di correnti** per il circuito/grafo e le LKC sui tagli fondamentali esprimono la dipendenza delle correnti di co-albero dalle correnti di albero.
- Raggruppando le a LKC sui tagli fondamentali tramite una scrittura vettoriale, si ottiene la cosiddetta **Equazione topologica “A”**.

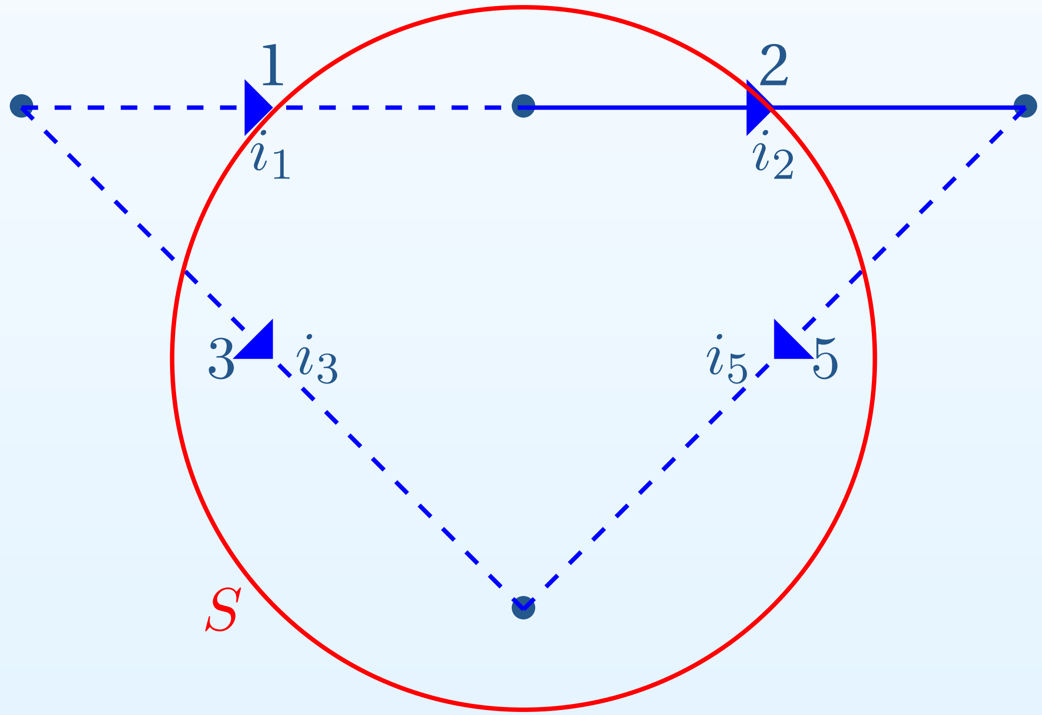
Equazione topologica “A”

Riprendiamo nuovamente l’esempio precedente di grafo e di partizione (la linea continua indica gli archi dell’albero, la linea tratteggiata gli archi del co-albero):



Equazione topologica “A”

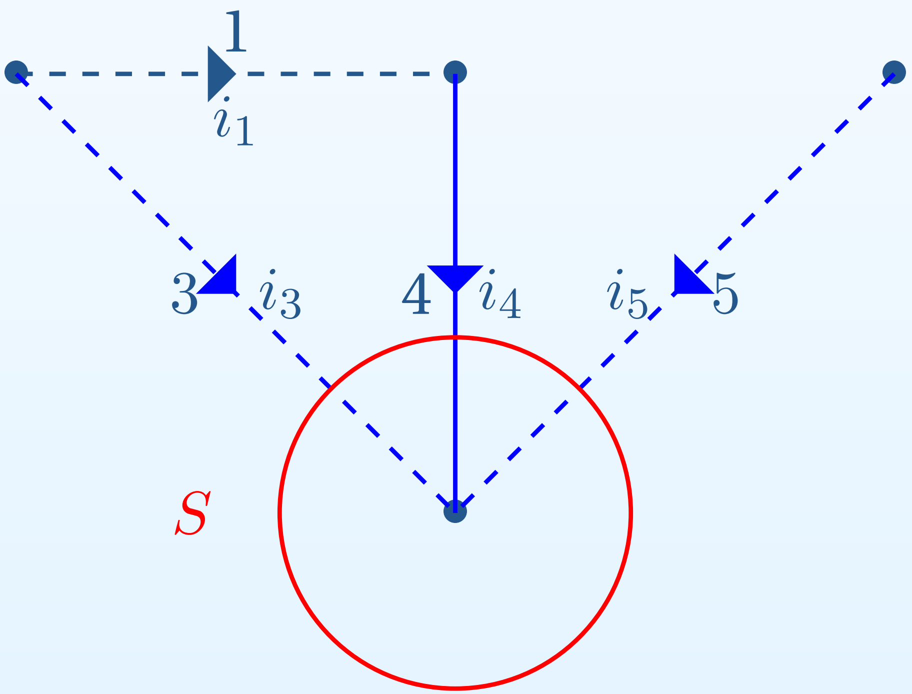
Consideriamo il taglio fondamentale $\mathcal{TF}_2 = \{1, \underline{2}, 3, 5\}$. Consideriamo, come verso a cui attribuire il segno $+$ alle correnti, quello dell’arco di albero (in questo caso, il verso uscente è positivo).



La LKC-$\mathcal{TF}_2$ si scrive $i_2 - i_1 - i_3 - i_5 = 0$.

Equazione topologica “A”

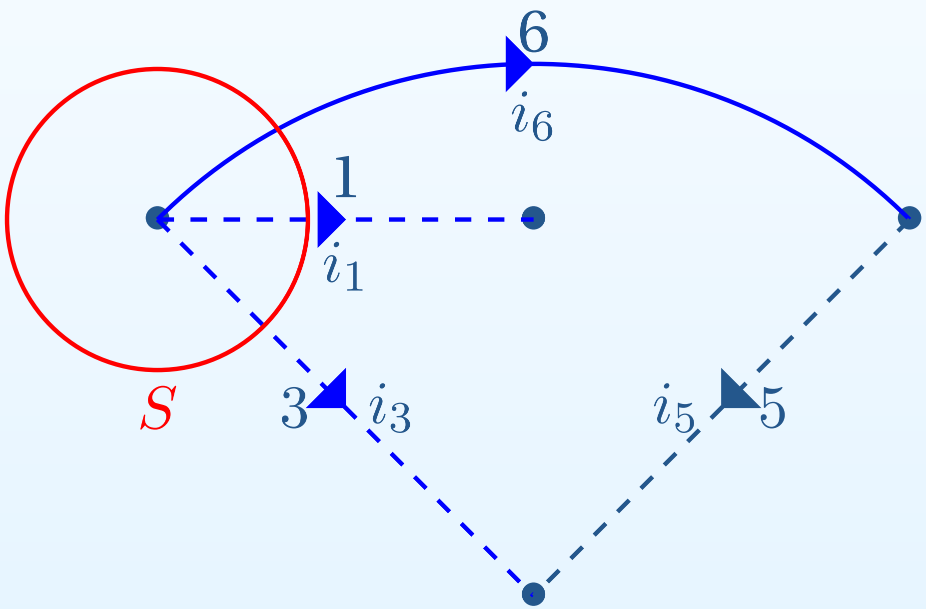
Consideriamo il taglio fondamentale $\mathcal{TF}_4 = \{3, \underline{4}, 5\}$. Consideriamo, come verso a cui attribuire il segno $+$ alle correnti, quello dell'arco di albero (in questo caso, il verso entrante è positivo).



La LKC-$\mathcal{TF}_4$ si scrive $i_4 + i_3 + i_5 = 0$.

Equazione topologica “A”

Consideriamo il taglio fondamentale $\mathcal{TF}_6 = \{1, 3, \underline{6}\}$. Consideriamo, come verso a cui attribuire il segno $+$ alle correnti, quello dell’arco di albero (in questo caso, il verso uscente è positivo).



La LKC-$\mathcal{TF}_6$ si scrive $i_6 + i_1 + i_3 = 0$.

Equazione topologica "A"

Riassumendo le LKC trovate nell'esempio, abbiamo

- LKT-$\mathcal{TF}_2$) $i_2 - i_1 - i_3 - i_5 = 0$.
- LKT-$\mathcal{TF}_4$) $i_4 + i_3 + i_5 = 0$.
- LKT-$\mathcal{TF}_6$) $i_6 + i_1 + i_3 = 0$.

Due osservazioni importanti:

- La correnti di albero i_2 compare solo nella LKC-$\mathcal{MF}_2$, la corrente di albero i_4 compare solo nella LKC-$\mathcal{MF}_4$, la corrente di albero i_6 compare solo nella LKC-$\mathcal{MF}_6$ (sempre con il segno positivo, per costruzione).
- Le altre correnti che compaiono nelle LKC sono le correnti sugli archi di co-albero (i_3, i_5, i_7) pesate con i coefficienti $0, +1, -1$.

Equazione topologica “A”

Introducendo una notazione vettoriale, è possibile riscrivere le LKC trovate nell’esempio in modo più compatto. Inoltre, è possibile scrivere una espressione generale che lega le correnti di albero alle correnti di co-albero. Definiamo:

$$\mathbf{I}_{\mathrm{a}} := \begin{bmatrix} i_2 \\ i_4 \\ i_6 \end{bmatrix}, \; \mathbf{I}_{\mathrm{c}} := \begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \\ i_5 \end{bmatrix}.$$

In generale, $\mathbf{I}_{\mathrm{a}}$ è un vettore colonna che contiene le correnti sugli archi di albero ed ha dimensione $a \times 1$, $\mathbf{I}_{\mathrm{c}}$ è un vettore colonna che contiene le correnti sugli archi di co-albero ed ha dimensione $c \times 1$.

Equazione topologica “A”

Le LKC sui tagli fondamentali si possono scrivere, in modo compatto, come

$$\mathbf{I}_{\mathrm{a}} + \mathbf{A}\mathbf{I}_{\mathrm{c}} = \mathbf{0},$$

che viene detta **Equazione topologica “A”**. In questa equazione, $\mathbf{A}$ è una matrice di dimensione $a \times c$ i cui elementi possono valere solo 0, $+1$ o -1. Il vettore ‘$\mathbf{0}$’ è un vettore nullo di dimensione $a \times 1$.

Equazione topologica "A"

Riprendendo l'esempio,

- LKC-$\mathcal{TF}_2$) $i_2 - i_1 - i_3 - i_5 = 0$.
- LKC-$\mathcal{TF}_4$) $i_4 + i_3 + i_5 = 0$.
- LKC-$\mathcal{TF}_6$) $i_6 + i_1 + i_3 = 0$.

L'Equazione topologica "A" ha la forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} i_2 \\ i_4 \\ i_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_\mathrm{a}} + \underbrace{\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \\ i_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_\mathrm{c}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}$$

Vanno ora determinati gli elementi della matrice **A**.

Equazione topologica "A"

La prima riga della matrice è legata alla LKC-$\mathcal{TF}_2$:

- LKC-$\mathcal{TF}_2$) $i_2 - i_1 - i_3 - i_5 = 0$.
- LKC-$\mathcal{TF}_4$) $i_4 + i_3 + i_5 = 0$.
- LKC-$\mathcal{TF}_6$) $i_6 + i_1 + i_3 = 0$.

L'Equazione topologica "A" ha la forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} i_2 \\ i_4 \\ i_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_\mathrm{a}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \\ i_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_\mathrm{c}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}$$

Equazione topologica “A”

La seconda riga della matrice è legata alla LKC-$\mathcal{TF}_4$:

- LKC-$\mathcal{TF}_2$) $i_2 - i_1 - i_3 - i_5 = 0$.
- LKC-$\mathcal{TF}_4$) $i_4 + i_3 + i_5 = 0$.
- LKC-$\mathcal{TF}_6$) $i_6 + i_1 + i_3 = 0$.

L’Equazione topologica “A” ha la forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} i_2 \\ i_4 \\ i_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_\mathrm{a}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \\ i_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_\mathrm{c}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}$$

Equazione topologica “A”

La terza riga della matrice è legata alla LKC-$\mathcal{TF}_6$:

- LKC-$\mathcal{TF}_2$) $i_2 - i_1 - i_3 - i_5 = 0$.
- LKC-$\mathcal{TF}_4$) $i_4 + i_3 + i_5 = 0$.
- LKC-$\mathcal{TF}_6$) $i_6 + i_1 + i_3 = 0$.

L’Equazione topologica “A” ha la forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} i_2 \\ i_4 \\ i_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_\mathrm{a}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \\ i_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_\mathrm{c}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}$$

Equazione topologica “A”

Con questo procedimento si è determinata la matrice topologica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

relativa all’esempio.

Terza equazione topologica

Esiste una terza relazione che lega fra loro le matrici topologiche $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Desumiamo questa relazione dall'ultimo esempio:

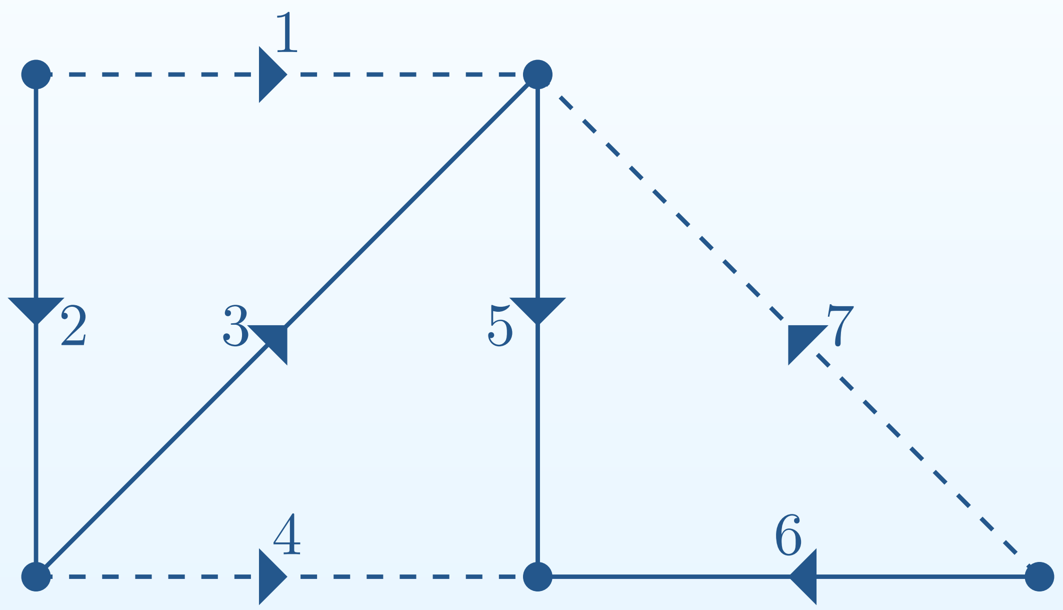
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si osserva facilmente come ogni riga di $\mathbf{A}$ coincida con la corrispondente colonna di $\mathbf{B}$ cambiata di segno, dunque risulta:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{B}^\top, \ \mathbf{B} = -\mathbf{A}^\top.$$

Esercizio sul calcolo delle matrici topologiche

Dato il seguente grafo orientato con la partizione indicata (linee continue = albero, linee tratteggiate = co-albero):



determinare le matrici topologiche $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

Esercizio sul calcolo delle matrici topologiche

Procedimento:

- Il numero di archi nell'albero è $a = 4$ e il numero di archi nel co-albero è $c = 3$.
- Determinare le 3 maglie fondamentali e scrivere le rispettive LKT. Definire i vettori $\mathbf{V}_{\mathrm{a}}$ e $\mathbf{V}_{\mathrm{c}}$ e determinare la matrice topologica rettangolare $\mathbf{B}$ estraendo i coefficienti dalle LKT.
- Determinare i 4 tagli fondamentali e scrivere le rispettive LKC. Definire i vettori $\mathbf{I}_{\mathrm{a}}$ e $\mathbf{I}_{\mathrm{c}}$ e determinare la matrice topologica rettangolare $\mathbf{A}$ estraendo i coefficienti dalle LKC.

Esercizio sul calcolo delle matrici topologiche

Suggerimento – Definire i vettori fondamentali come:

$$\mathbf{V}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}, \; \mathbf{V}_{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_4 \\ v_7 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} i_2 \\ i_3 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}, \; \mathbf{I}_{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_4 \\ i_7 \end{bmatrix}.$$

Esercizio sul calcolo delle matrici topologiche

Risposta:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ricordando che $\mathbf{A} = -\mathbf{B}^\top$, è sufficiente determinare una delle matrici per ottenere anche l'altra. In pratica, quindi, è sufficiente determinare solo le maglie fondamentali (i tagli fondamentali) e scrivere solo le LKT (LKC).