Complementi su bipoli, reti 2-porte e complementi di topologia circuitale

Prof. Simone Fiori

`s.fiori@univpm.it`

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione (DII)

Università Politecnica delle Marche

Argomenti

- Porte elettriche e reti 2-porte
- Reti 2-porte elementari
- Comportamento energetico delle reti 2-porte elementari
- Generatori controllati
- Teorema della conservazione della potenza istantanea
- Metodo di analisi su base maglie *misto*

Porta elettrica e rete “2-porte”

Diamo le seguenti definizioni:

- **Porta elettrica**: Coppia di terminali sui quali scorre una unica corrente. Tale corrente è detta *corrente di porta* mentre la tensione tra i due terminali è detta *tensione di porta*.
- **Rete 2-porte**: Un circuito accessibile da 4 terminali che si comportano come 2 porte elettriche. Una rete 2-porte è descritta da 4 variabili (2 tensioni di porta e 2 correnti di porta).
- **Generalizzazione**: E’ possibile generalizzare questo concetto introducendo reti N-porte descritte da $2N$ variabili elettriche.

Generalità sulle reti 2-porte

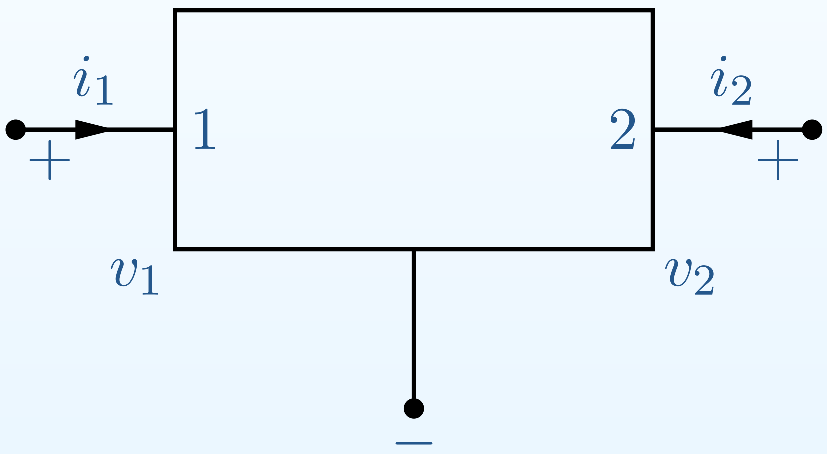
Una generica rete 2-porte si indica con il simbolo grafico:

Il comportamento di una rete 2-porte è descritto da una coppia di funzioni generatrici (f_1, f_2) e dalle due equazioni di vincolo:

$$\begin{cases} f_1(v_1, i_1, v_2, i_2, t) = 0, \\ f_2(v_1, i_1, v_2, i_2, t) = 0. \end{cases}$$

Reti 2-porte “in configurazione sbilanciata”

In diversi casi di interesse pratico, i due terminali “$-$” delle due porte sono collegati insieme e fungono da unico terminale “$-$”. In questo caso, si usa il simbolo grafico:



Il comportamento della rete 2-porte è identico, e la rete si dice *in configurazione sbilanciata.*

Potenza istantanea ed energia per reti 2-porte

La potenza istantanea associata ad una rete 2-porte è definita come:

$$\boxed{p(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t).}$$

L'energia associata ad una rete 2-porte è definita come:

$$e(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} (v_1(\tau)i_1(\tau) + v_2(\tau)i_2(\tau))d\tau,$$

con la convenzione $e(-\infty) = 0$.

Una rete 2-porte si dice *energeticamente passiva* se:

$$e(t) \geq 0, \ \forall t.$$

Reti 2-porte

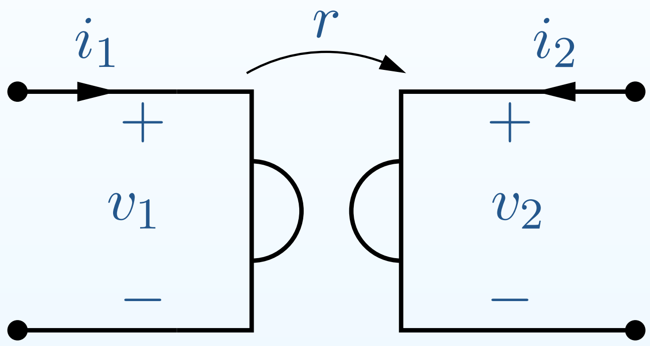
Le reti 2-porte elementari sono:

- Giratore
- Trasformatore ideale
- Induttori mutuamente accoppiati (IMA)
- Nullore
- Rete 2-porte in configurazione "Z" e "Y"

Tutti questi componenti sono lineari tempo-invarianti.

Il 2-porte elementare "giratore"

Il simbolo grafico del giratore (dall'inglese *gyrator*) è:

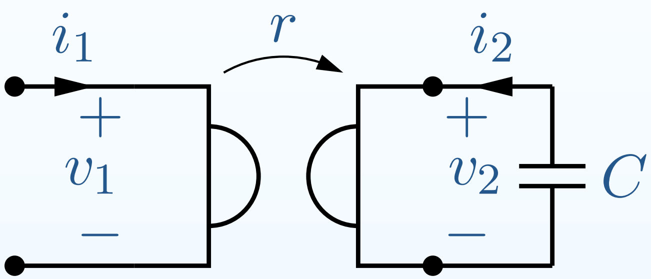


Il giratore ha un parametro caratteristico, indicato con r, detto *rapporto di girazione*, che si misura in Ohm.
Il comportamento del giratore è descritto dalle relazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1(t) = -r \cdot i_2(t), \\ v_2(t) = r \cdot i_1(t). \end{cases}$$

Applicazione: Il giratore come convertitore $L \leftrightarrow C$

Consideriamo il seguente bipolo:



con r e C noti. Combinando le relazioni:

$$v_1 = -r\, i_2,\; v_2 = r\, i_1,\; i_2 = -C\frac{dv_2}{dt},$$

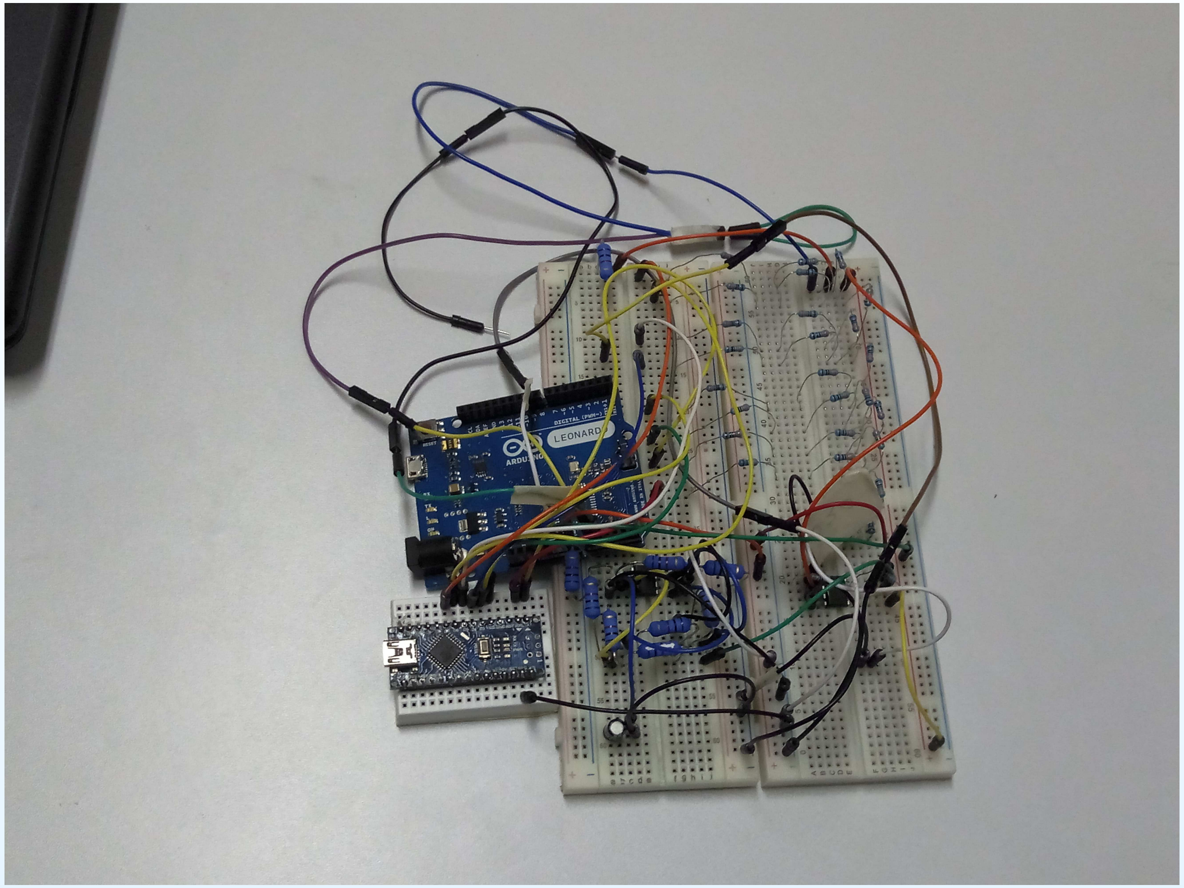
si ottiene:

$$v_1 = r^2 C\frac{di_1}{dt} \;(\text{induttore di valore } r^2 C).$$

Applicazione: Il giratore come convertitore $L \leftrightarrow C$

Questa tecnica viene utilizzata per costruire induttori microscopici (tecnologia integrata), che altrimenti sarebbero di dimensioni non compatibili con la miniaturizzazione.

Realizzazione di un giratore



Comportamento energetico del giratore

La potenza istantanea scambiata da un giratore vale:

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 = (-r i_2) i_1 + (r i_1) i_2 = 0.$$

Dunque, il giratore, nel complesso, non accresce né decrementa il proprio contenuto energetico nel tempo.

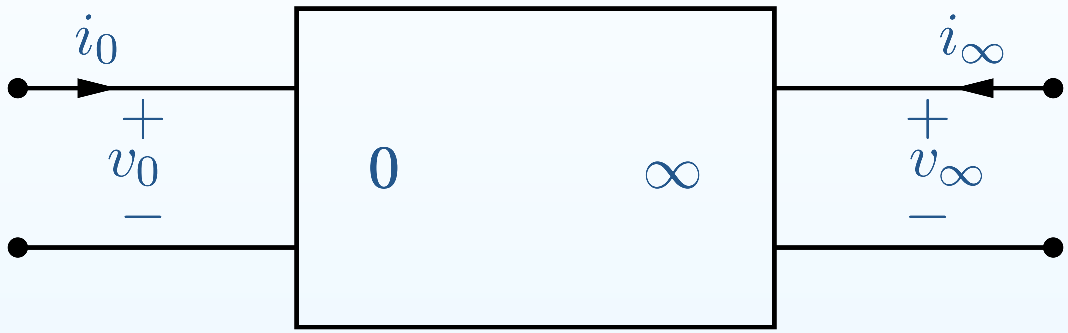
L'energia istantanea scambiata da un giratore vale:

$$e(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau) d\tau = 0.$$

Dunque, il giratore è un 2-porte *passivo*.

Il 2-porte elementare “nullore”

Il simbolo grafico del nullore è:



Il comportamento del nullore è descritto dalle relazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_0(t) = 0, \\ i_0(t) = 0. \end{cases}$$

Il nullore non ha parametri e non vincola le variabili elettriche della porta “∞”.

Comportamento energetico del nullore

La potenza istantanea scambiata da un nullore vale:

$$p = v_0 i_0 + v_\infty i_\infty = v_\infty i_\infty .$$

Poiché non è possibile dire alcunché, a priori, sulla potenza istantanea, il nullore può sia assorbire che erogare energia in quantità arbitraria.

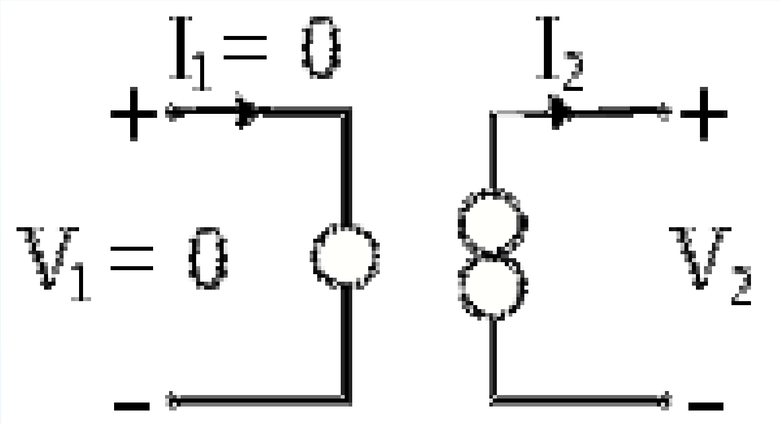
L'energia istantanea scambiata da un nullore vale:

$$e(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t} v_\infty(\tau) i_\infty(\tau) d\tau \lesseqqgtr 0.$$

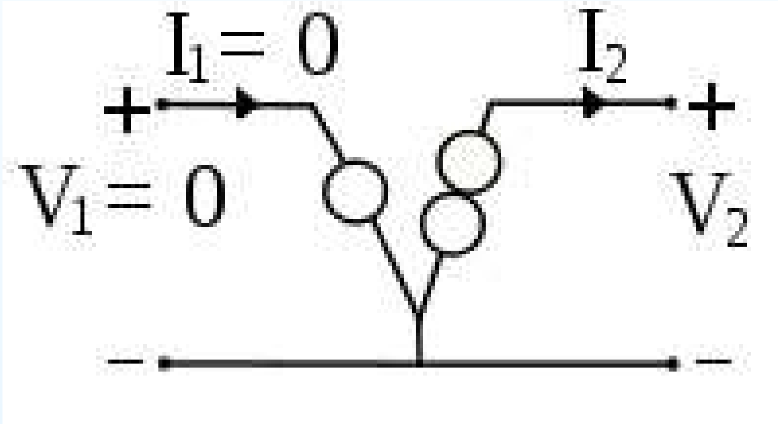
Poiché non è possibile dire alcunché, a priori, sul segno dell'energia istantanea, il nullore è un 2-porte *attivo*.

Il 2-porte elementare “nullore”

Al fine di semplificare l’analisi circuitale, il nullore si può scomporre in due bipoli (non fisicamente realizzabili separatamente) chiamati “nullatore” e “noratore”.



(a) Bilanciato

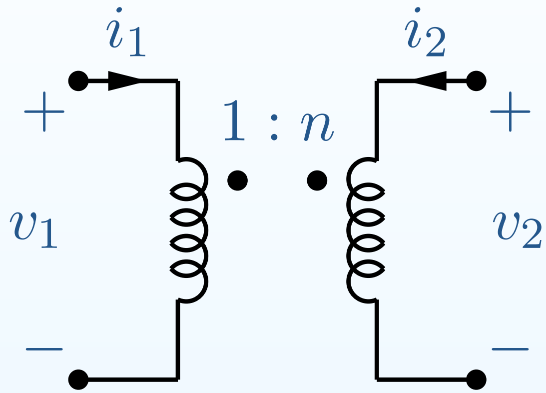


(b) Sbilanciato

Qui il nullatore rappresenta la prima porta e il noratore rappresenta la seconda porta.

Il 2-porte elementare “trasformatore ideale”

Il simbolo grafico del trasformatore è:



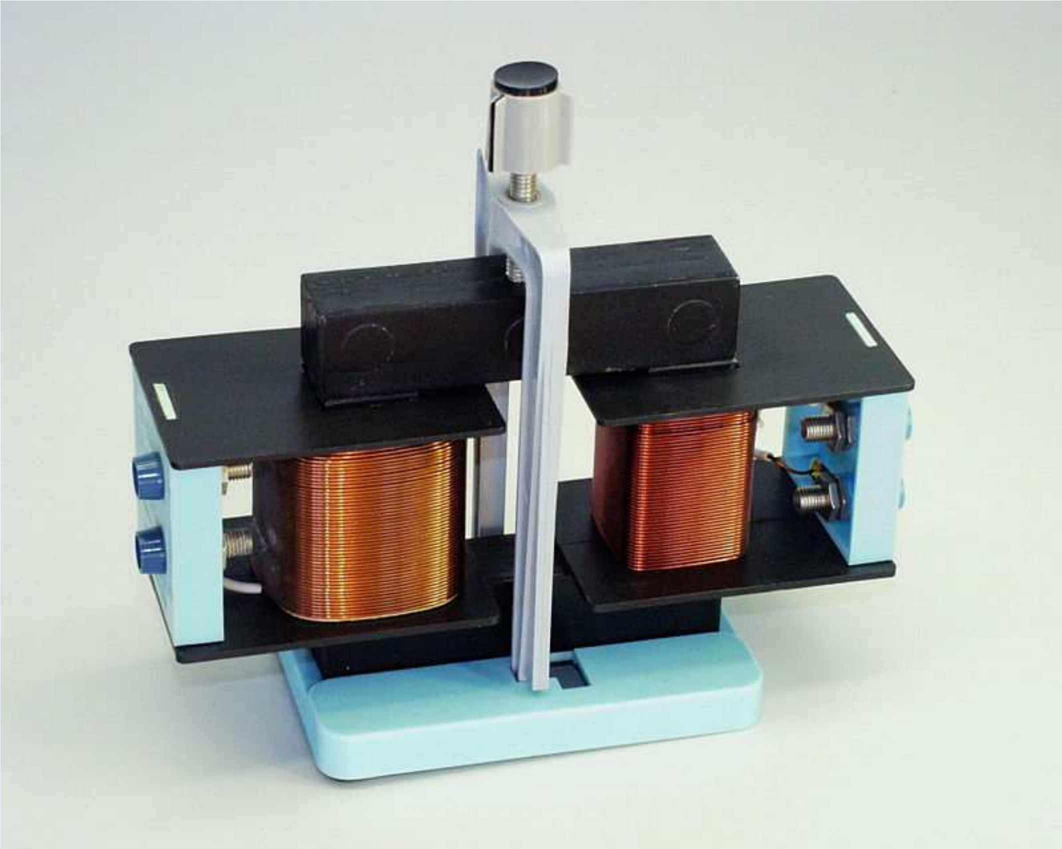
Il comportamento del trasformatore ideale è descritto dalle relazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_2(t) = n \cdot v_1(t), \\ i_2(t) = -\frac{1}{n} i_1(t). \end{cases}$$

Il parametro n è detto *rapporto di trasformazione*.

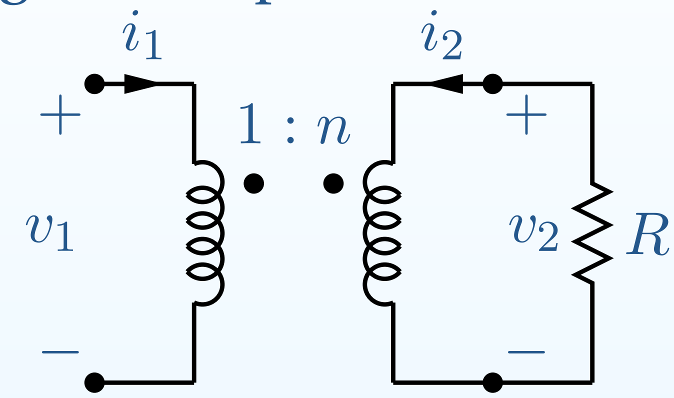
Il 2-porte elementare “trasformatore ideale”

E’ un componente ideale che rappresenta il comportamento di trasformatori reali.



Il trasformatore come riduttore di resistenza

Consideriamo il seguente bipolo:



con n e R noti. Combinando le relazioni:

$$v_2 = n v_1, \; i_2 = -\frac{1}{n} i_1, \; v_2 = -R i_2,$$

si ottiene:

$$v_1 = \frac{R}{n^2} i_1 \; \left(\text{resistore di valore } \frac{R}{n^2}\right).$$

Comportamento energetico del trasformatore

La potenza istantanea scambiata da un trasformatore vale:

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 = v_1 i_1 + (n \cdot v_1)\left(-\frac{1}{n} i_1\right) = 0.$$

Dunque, il bilancio istantaneo dell'energia scambiata dal trasformatore è nullo.

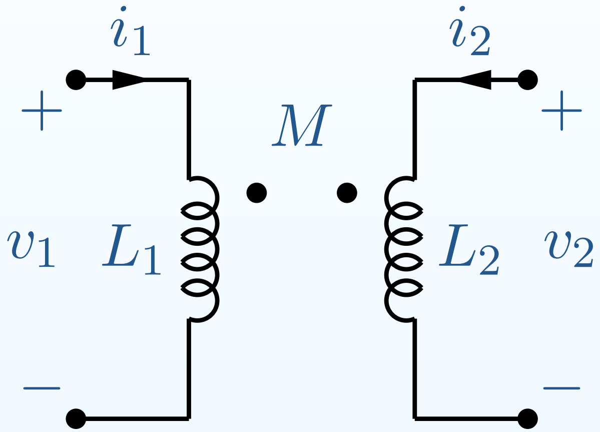
L'energia istantanea scambiata da un trasformatore vale:

$$e(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau) d\tau = 0.$$

Dunque, il trasformatore è un 2-porte *passivo*.

Il 2-porte “induttori mutuamente accoppiati (IMA)”

Il simbolo grafico è:



Il comportamento degli induttori mutuamente accoppiati è descritto dalle relazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}, \\ v_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}. \end{cases}$$

I parametri L_1, L_2 e M si misurano in Henry (H)

Comportamento energetico degli IMA

La potenza istantanea scambiata dagli IMA vale:

$$
\begin{aligned}
p &= v_1 i_1 + v_2 i_2 \\
&= \left(L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}\right) i_1 + \left(M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}\right) i_2 \\
&= L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M \left(i_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{di_1}{dt}\right) \\
&\lesseqqgtr 0.
\end{aligned}
$$

Poiché non è possibile dire alcunché, a priori, sulla potenza istantanea, gli IMA possono sia assorbire che erogare energia in quantità arbitraria.

Comportamento energetico degli IMA (2)

L'energia istantanea scambiata dagli IMA vale:

$$\begin{aligned} e(t) &= \int_{-\infty}^{t} p(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} \left[L_1 i_1 \frac{di_1}{d\tau} + L_2 i_2 \frac{di_2}{d\tau} + M\left(i_1 \frac{di_2}{d\tau} + i_2 \frac{di_1}{d\tau}\right)\right] d\tau \\ &= \frac{1}{2}L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2}L_2 i_2^2(t) + M i_1(t) i_2(t). \end{aligned}$$

Gli IMA costituiscono un 2-porte *passivo* se e solo se sono verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} L_1 \geq 0, \\ L_2 \geq 0, \\ |M| \leq \sqrt{L_1 \cdot L_2}. \end{cases}$$

Comportamento energetico degli IMA (3)

L'energia istantanea scambiata dagli IMA vale:

$$e(t) = \frac{1}{2}L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2}L_2 i_2^2(t) + M i_1(t) i_2(t).$$

Affinché la rete 2-porte risulti energeticamente passiva, è necessario che $e(t) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.
Dato che l'energia istantanea non dipende esplicitamente dal tempo, conviene definire la funzione:

$$e(i_1, i_2) = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

e determinare per quali valori dei coefficienti L_1, L_2 ed M risulta $e(i_1, i_2) \geq 0$ per ogni $(i_1, i_2) \in \mathbb{R}^2$.

Comportamento energetico degli IMA (4)

Per $i_1 = 0$, la condizione di passività si scrive:

$$e(0, i_2) = \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \geq 0 \ \Rightarrow \ \boxed{L_2 \geq 0}.$$

Per $i_2 = 0$, la condizione di passività si scrive:

$$e(i_1, 0) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \geq 0 \ \Rightarrow \ \boxed{L_1 \geq 0}.$$

Per $i_1 \neq 0$ e $i_2 \neq 0$, se $L_1 \neq 0$ conviene definire l'energia normalizzata:

$$\tilde{e}(i_1, i_2) = \frac{e(i_1, i_2)}{e(i_1, 0)}.$$

Comportamento energetico degli IMA (5)

L'energia normalizzata ha espressione:

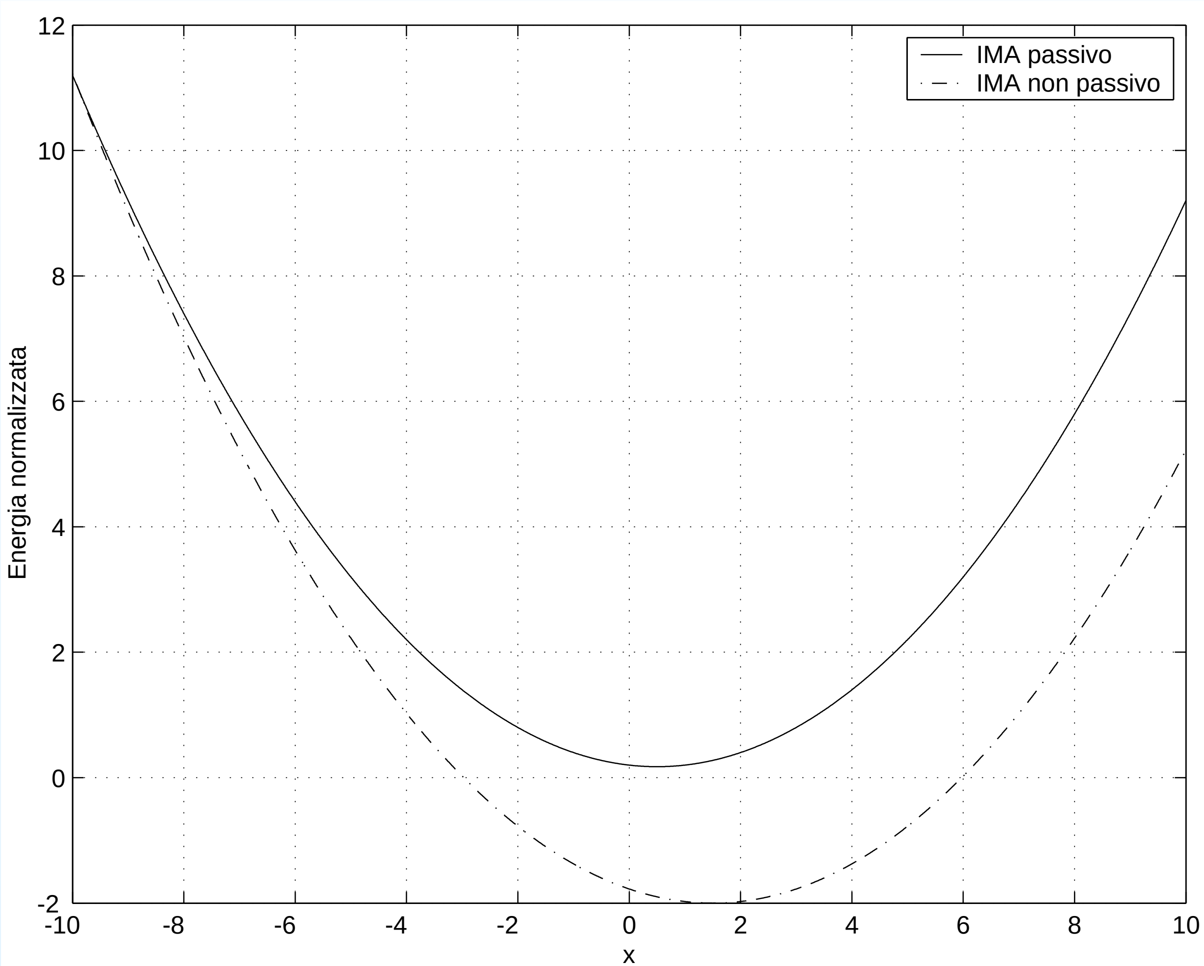
$$\tilde{e}(i_1, i_2) = \frac{\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2}{\frac{1}{2}L_1 i_1^2} = 1 + \frac{L_2}{L_1}\left(\frac{i_2}{i_1}\right)^2 + \frac{2M}{L_1}\left(\frac{i_2}{i_1}\right).$$

Dunque, l'energia normalizzata dipende solo dal rapporto $x = \frac{i_2}{i_1}$ e si può scrivere:

$$\tilde{e}(x) = \frac{L_2}{L_1}x^2 + \frac{2M}{L_1}x + 1.$$

Comportamento energetico degli IMA (6)

Esempi di energia normalizzata:



Comportamento energetico degli IMA (7)

La funzione $\tilde{e}(x)$ rappresenta una parabola nella variabile x. La condizione $\tilde{e}(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ si può visualizzare come: Il valore minimo della funzione parabolica deve essere maggiore di zero.
Per determinare il punto di minimo x_{m} si impone la condizione:

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{d\tilde{e}(x)}{dx}\right|_{x=x_{\mathrm{m}}} \\ &= 2\frac{L_2}{L_1}x_{\mathrm{m}} + \frac{2M}{L_1} \end{aligned}$$

la cui soluzione è $x_{\mathrm{m}} = -\frac{M}{L_2}$.

Comportamento energetico degli IMA (8)

Il valore minimo della funzione parabolica $\tilde{e}(x)$ è:

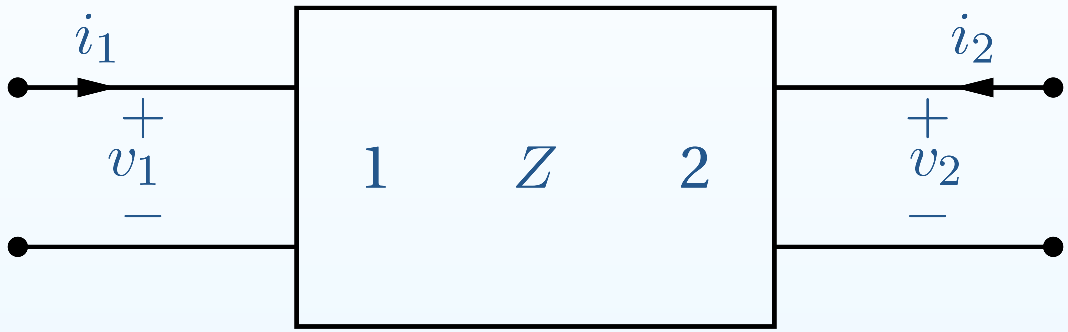
$$\begin{aligned}\tilde{e}(x_{\mathrm{m}}) &= \frac{L_2}{L_1}\left(-\frac{M}{L_2}\right)^2 + \frac{2M}{L_1}\left(-\frac{M}{L_2}\right) + 1 \\ &= 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}.\end{aligned}$$

La condizione di passività $\tilde{e}(x_{\mathrm{m}}) \geq 0$ fornisce, quindi:

$$\boxed{M^2 \leq L_1 L_2}.$$

La rete 2-porte “in configurazione Z”

Il simbolo grafico è:



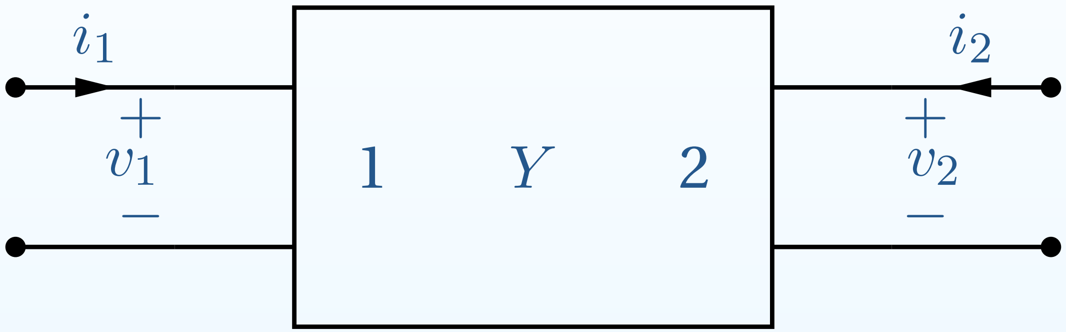
Il comportamento della rete 2-porte “Z” è descritto dalle relazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1(t) = Z_{11} i_1(t) + Z_{12} i_2(t), \\ v_2(t) = Z_{21} i_1(t) + Z_{22} i_2(t). \end{cases}$$

I 4 parametri Z_{kh} si misurano in Ohm (Ω).

La rete 2-porte “in configurazione Y”

Il simbolo grafico è:



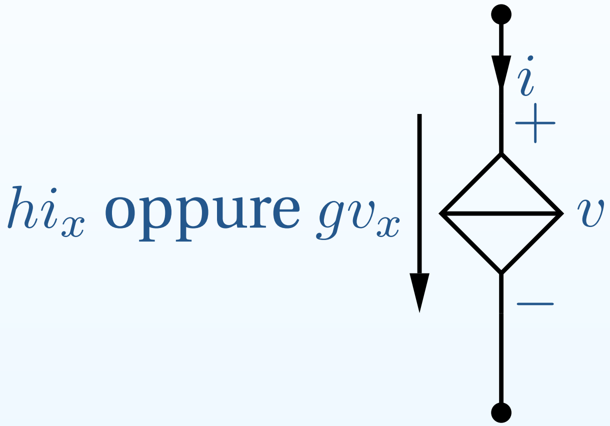
Il comportamento della rete 2-porte “Y” è descritto dalle relazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1(t) = Y_{11}v_1(t) + Y_{12}v_2(t), \\ i_2(t) = Y_{21}v_1(t) + Y_{22}v_2(t). \end{cases}$$

I 4 parametri Y_{kh} si misurano in Ω^{-1}.

I generatori di corrente controllati (GCCT, GCCC)

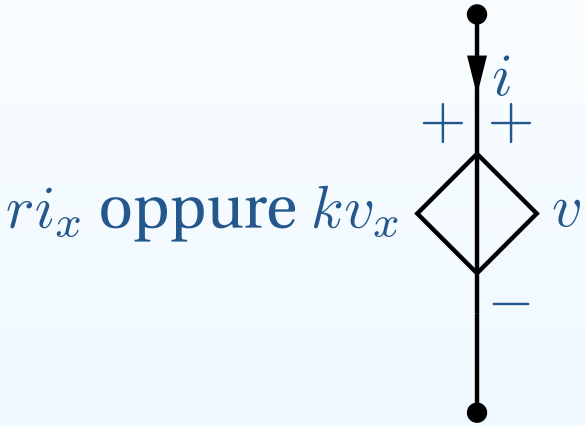
Il simbolo grafico è:



- Generatore di corrente controllato in tensione (GCCT): Relazione costitutiva: $i(t) = g \cdot v_x(t)$. Il parametro g si dice *trans-conduttanza* e si misura in Ω^{-1}. La tensione $v_x(t)$ si trova tra due punti diversi del circuito.
- Generatore di corrente controllato in corrente (GCCC): Relazione costitutiva: $i(t) = h \cdot i_x(t)$. Il parametro h è adimensionale. La corrente $i_x(t)$ scorre in un ramo diverso del circuito.

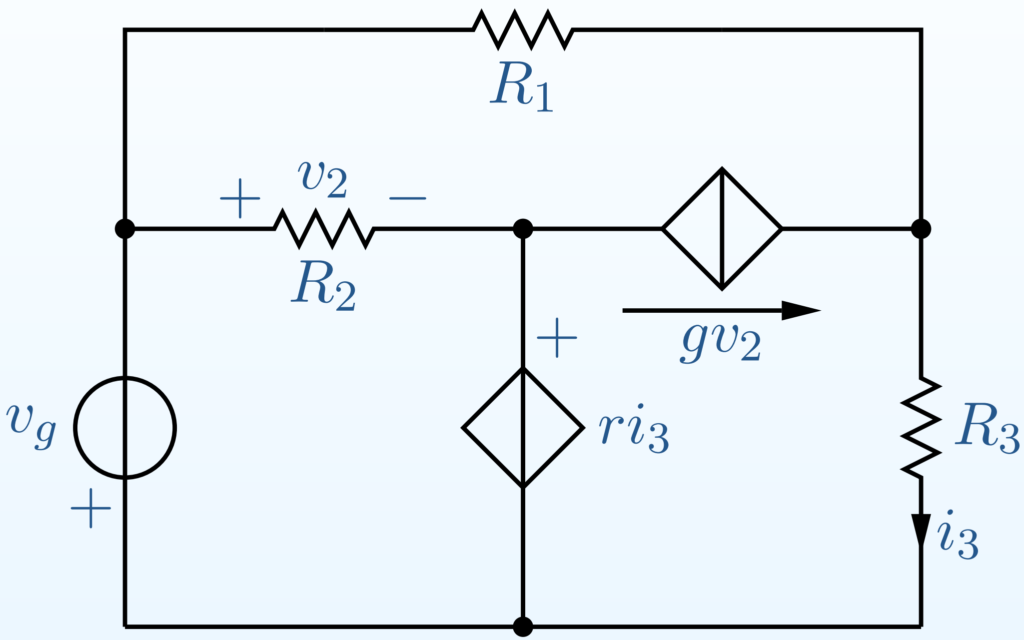
I generatori di tensione controllati (GTCT, GTCC)

Il simbolo grafico è:



- **Generatore di tensione controllato in tensione (GTCT):** Relazione costitutiva: $v(t) = k \cdot v_x(t)$. Il parametro k è adimensionale. La tensione $v_x(t)$ si trova tra due punti diversi del circuito.
- **Generatore di tensione controllato in corrente (GTCC):** Relazione costitutiva: $v(t) = r \cdot i_x(t)$. Il parametro r si dice *trans-resistenza* e si misura in Ohm. La corrente $i_x(t)$ scorre in un ramo diverso del circuito.

Esempio: Circuito con generatori controllati



Dati: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 5\Omega$, $v_g = 14V$, $g = \frac{1}{2}\Omega^{-1}$, $r = \frac{2}{5}\Omega$.

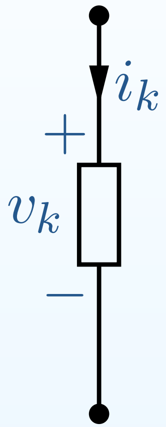
Proprietà dei generatori controllati

I generatori controllati sono componenti 2-porte *attivi*, poiché non è possibile stabilire a priori il segno dell’energia istantanea associata.

I generatori controllati sono componenti lineari tempo-invarianti.

Teorema di conservazione della potenza istantanea

In **ogni circuito** formato da porte elettriche:



la potenza istantanea totale si conserva, ovvero:

$$p_{\text{tot}}(t) = \sum_k v_k(t) i_k(t) = 0.$$

Teorema di conservazione della potenza istantanea (2)

Stabilendo una struttura albero/coalbero arbitraria per il grafo associato al circuito, la potenza istantanea totale si scrive:

$$p_{\text{tot}} = \mathbf{V}_{\text{c}}^{\top} \mathbf{I}_{\text{c}} + \mathbf{V}_{\text{a}}^{\top} \mathbf{I}_{\text{a}}.$$

Dalle equazioni topologiche, $\mathbf{V}_{\text{c}} = -\mathbf{B}\mathbf{V}_{\text{a}}$ e $\mathbf{I}_{\text{a}} = -\mathbf{A}\mathbf{I}_{\text{c}}$, quindi:

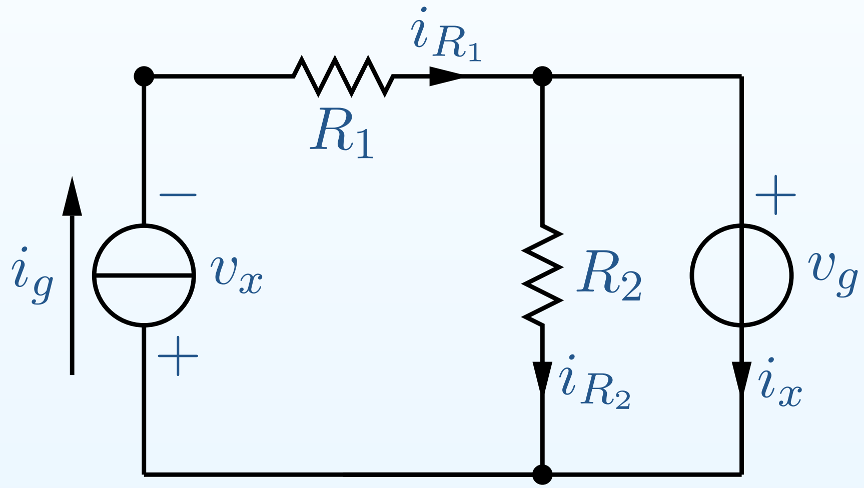
$$\begin{aligned} p_{\text{tot}} &= (-\mathbf{B}\mathbf{V}_{\text{a}})^{\top} \mathbf{I}_{\text{c}} + \mathbf{V}_{\text{a}}^{\top} (-\mathbf{A}\mathbf{I}_{\text{c}}) \\ &= -\mathbf{V}_{\text{a}}^{\top} \mathbf{B}^{\top} \mathbf{I}_{\text{c}} - \mathbf{V}_{\text{a}}^{\top} \mathbf{A}\mathbf{I}_{\text{c}}. \end{aligned}$$

Dall'equazione topologica $\mathbf{A} = -\mathbf{B}^{\top}$, si ha:

$$p_{\text{tot}} = \mathbf{V}_{\text{a}}^{\top} (-\mathbf{B}^{\top}) \mathbf{I}_{\text{c}} - \mathbf{V}_{\text{a}}^{\top} \mathbf{A}\mathbf{I}_{\text{c}} = \mathbf{V}_{\text{a}}^{\top} \mathbf{A}\mathbf{I}_{\text{c}} - \mathbf{V}_{\text{a}}^{\top} \mathbf{A}\mathbf{I}_{\text{c}} = 0.$$

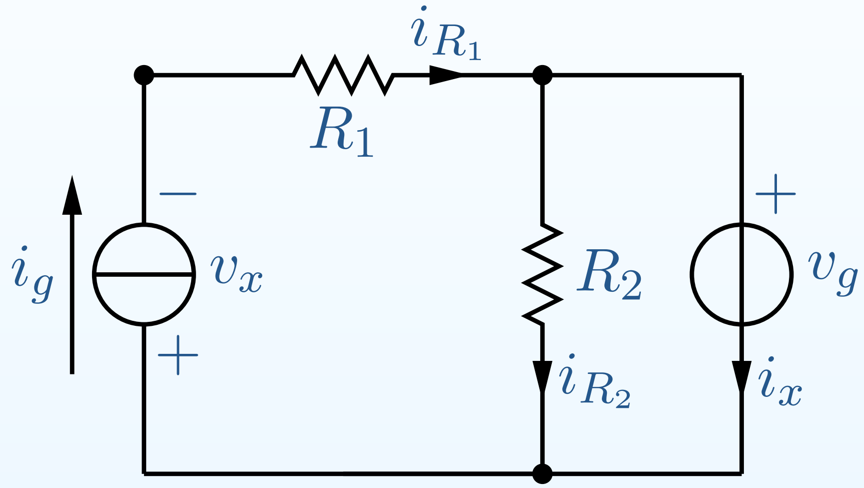
Conservazione della potenza istantanea: Esempio

Si esamini il circuito in figura, dove: $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $v_g = 4V$, $i_g = 3A$.



Conservazione della potenza istantanea: Esempio (2)

I valori trovati sono: $i_{R_1} = 3A$, $i_{R_2} = 4A$, $i_x = -1A$, $v_x = -10V$.



Valori delle potenze istantanee: $p_{\text{gic}} = i_g v_x = -30W$,
$p_{R_1} = R_1 i_{R_1}^2 = 18W$, $p_{R_2} = R_2 i_{R_2}^2 = 16W$, $p_{\text{git}} = v_g i_x = -4W$.

Verifica conservazione della potenza istantanea:
$p_{\text{gic}} + p_{R_1} + p_{R_2} + p_{\text{git}} = -30 + 18 + 16 - 4 = 0.$

Metodo di analisi su base maglie *misto* (1)

Il metodo di analisi su base maglie *misto* estende il metodo di analisi su base maglie (o delle correnti fittizie di maglia) al caso in cui il circuito da analizzare contenga bipoli **diversi** da resistori e generatori indipendenti di tensione e contenga reti 2-porte (esclusi i componenti con memoria).

Esso **consiste nel riguardare ciascuna porta elettrica diversa da un resistore o da un generatore indipendente di tensione come un generatore indipendente di tensione fittizio (ovvero con tensione impressa incognita)**. Ciò dà luogo ad una incognita in più ma anche ad una equazione in più per ogni porta elettrica così sostituita.

Metodo di analisi su base maglie *misto* (2)

Il sistema risolvente nel caso di analisi tramite metodo di analisi su base maglie misto è lineare del tipo:

$$Ax = b,$$

dove A è la matrice (quadrata) dei coefficienti del sistema lineare risolvente, b è il vettore dei termini noti e x è il vettore delle incognite. Da notare che:

- Il vettore delle incognite può contenere contemporaneamente sia incognite in tensione che incognite in corrente.
- La matrice A non è, in generale, né simmetrica né omogenea dimensionalmente.
- Il vettore b non è, in generale, omogeneo dimensionalmente.

Metodo di analisi su base maglie *misto* (3)

Per determinare una tensione o una corrente in uno specifico ramo del circuito occorre:

- Scrivere il sistema risolvente e determinare le incognite fondamentali.
- Per determinare la tensione ai capi di un ramo del circuito che non faccia parte delle incognite fondamentali, occorre scrivere la LKT su una maglia qualsiasi (cioè, non necessariamente una maglia fondamentale) che contenga tale ramo.
- Per determinare la corrente su di un ramo del circuito che non faccia parte delle incognite fondamentali, occorre scrivere la LKC su un taglio qualsiasi (cioè, non necessariamente un taglio fondamentale) che contenga tale ramo.

Metodo di analisi su base maglie *misto* (4)

Due criteri utili per la scelta della partizione del grafo:

- E' utile posizionare gli archi interni del grafo nell'albero topologico. Questo consente di ottenere maglie fondamentali 'corte' e poco sovrapposte.
- E' utile posizionare i GIC sul co-albero. Questo consente di determinare immediatamente alcune correnti fittizie di maglia e, quindi, di diminuire il numero di incognite nel sistema risolvente.

Appendice: Teorema di Tellegen

Il teorema di conservazione della potenza istantanea si può anche riformulare in modo puramente geometrico, introducendo i vettori

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{\mathrm{a}} \\ \mathbf{V}_{\mathrm{c}} \end{bmatrix}, \ \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\mathrm{a}} \\ \mathbf{I}_{\mathrm{c}} \end{bmatrix}$$

e osservando che $\mathbf{V}^\top \mathbf{I} = 0$, ovvero il vettore delle correnti è ortogonale al vettore delle tensioni.

Appendice: Teorema di Tellegen

Bernard Tellegen (1900-1990)
click here for a biography

Bernard Tellegen ha osservato quanto segue: dati due circuiti differenti ma *aventi stesso grafo*, detti $(\mathbf{V}_1, \mathbf{I}_1)$ tensioni e correnti del primo circuito e $(\mathbf{V}_2, \mathbf{I}_2)$ tensioni e correnti del secondo circuito, risulta sempre $\mathbf{V}_1^\top \mathbf{I}_2 = 0$ e $\mathbf{V}_2^\top \mathbf{I}_1 = 0$. Questo teorema consente di costruire una “rete aggiunta” ad un circuito per valutare la sensibilità della sua funzione di trasferimento alla variazione dei suoi parametri.