Simulazione numerica dei circuiti lineari con memoria in presenza di generatori non sinusoidali

Prof. Simone Fiori

s.fiori@univpm.it

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione (DII)

Università Politecnica delle Marche

Argomenti

- Motivazione: Studio di circuiti lineari **con memoria** in presenza di generatori indipendenti **non sinusoidali**
- Circuiti a tempo discreto (TD)
- Campionamento uniforme
- Circuito TD passa-basso del I ordine
- Circuiti TD del II ordine.
- Circuiti TD di tipo ARMA
- Rappresentazioni in spazio di stato dei circuiti e loro simulazione numerica

Metodi di risoluzione dei circuiti elettrici

I circuiti elettrici possono essere risolti con varie tecniche, a seconda della loro tipologia:

- **Circuiti lineari, tempo-invarianti, senza memoria**: Possono essere risolti **esattamente**, utilizzando un metodo di analisi circuitale e risolvendo esattamente il sistema risolvente, che risulta di tipo algebrico.
- **Circuiti lineari, tempo-invarianti, con memoria, con generatori sinusoidali**: Possono essere risolti **esattamente**, ricorrendo alla **trasformazione nel dominio fasoriale**, utilizzando un metodo di analisi circuitale e risolvendo il sistema risolvente, che risulta di tipo algebrico.

Metodi di risoluzione dei circuiti elettrici

I circuiti elettrici possono essere risolti con varie tecniche, a seconda della loro tipologia:

- **Circuiti lineari, con memoria, con generatori non sinusoidali**: In generale **non possono essere risolti esattamente**, ma una soluzione approssimata può essere ottenuta utilizzando una tecnica di discretizzazione temporale e tecniche numeriche adeguate.
- **Circuiti non-lineari**: In generale **non possono essere risolti esattamente**, ma una soluzione approssimata può essere ottenuta utilizzando una tecnica di discretizzazione temporale e delle tecniche numeriche adatte alla specificità di ogni singolo problema.

Circuiti a tempo discreto

I circuiti a *tempo discreto* si distinguono dai circuiti a *tempo continuo* in quanto, a differenza di questi ultimi, evolvono solo in corrispondenza di istanti temporali isolati.
Nei circuiti a tempo discreto, le grandezze elettriche sono note e valutabili solo in corrispondenza di tali istanti temporali. I circuiti a tempo discreto si distinguono in

- **Nativi**: Sono circuiti che vengono progettati e realizzati (tipicamente tramite software) direttamente per evolvere e per elaborare grandezze a tempo discreto.
- **Derivati**: Sono circuiti che vengono progettati a tempo continuo e poi modellati a tempo discreto tramite un procedimento noto come *campionamento temporale*.

Circuiti a tempo discreto

Di particolare interesse è il **campionamento uniforme**, che constiste nell'osservare delle grandezze a tempo continuo in corrispondenza di istanti temporali posti ad intervalli regolari. La durata di tali intervalli è una quantità detta **periodo di campionamento**.

I circuiti a tempo discreto derivati permettono di studiare circuiti complessi nei casi in cui:

- i circuiti siano **con memoria** ma i generatori indipendenti **non** siano sinusoidali (pertanto il metodo dei fasori non sarebbe utilizzabile).
- i generatori indipendenti, che rappresentano le sorgenti di segnali e di informazione, siano nativamente a tempo discreto (come accade, ad esempio, nel caso dell'elaborazione delle immagini).

Segnali elettrici e campionamento uniforme

Un *segnale* rappresenta l'evoluzione nel tempo di una grandezza misurabile. Esempi di segnale sono l'evoluzione nel tempo della tensione elettrica ai capi di un bipolo in un circuito, l'evoluzione nel tempo della velocità di rotazione dell'asse di un motore e l'evoluzione temporale della portata di fluido in una condotta.
Per rappresentare un segnale generico verranno utilizzate le notazioni $x(t)$ e $x[n]$, dove:

- la variabile $x \in \mathbb{K}$ denota il valore istantaneo del segnale;
- la notazione (t) denota un segnale che varia con continuità nel tempo, ovvero $t \in \mathbb{R}$; in questo caso ci si riferisce a un segnale a *tempo continuo*;

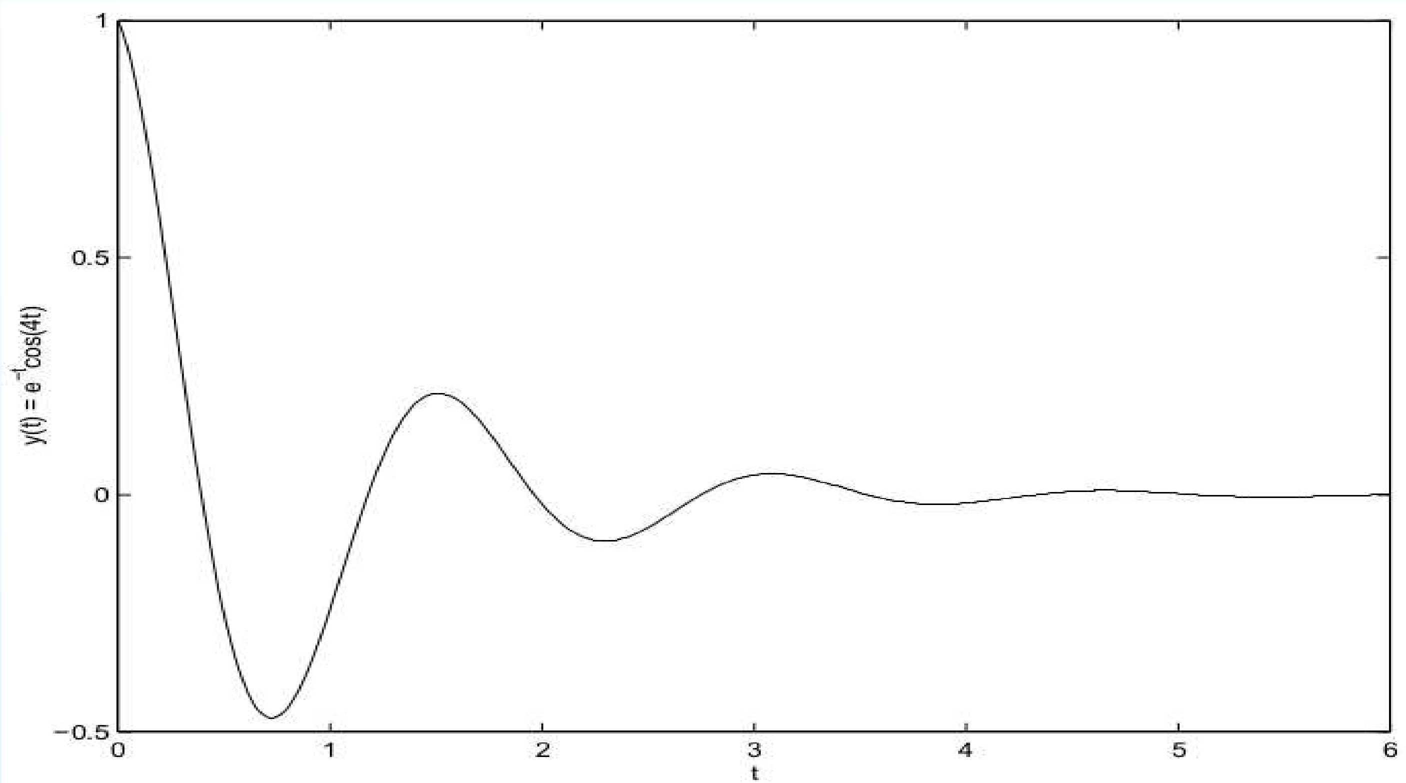
Segnali elettrici e campionamento uniforme

- la notazione $[n]$ denota un segnale che varia in istanti temporali discreti, ovvero $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$; in questo caso ci si riferisce a un segnale a *tempo discreto*.

Per quanto riguarda l'insieme dei valori che la variabile x può assumere, l'insieme $\mathbb{K}$ è un campo scalare che può coincidere con l'insieme dei numeri reali, $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, nel quale caso il segnale è detto a *valori reali*, o con l'insieme dei numeri complessi, $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, nel quale caso il segnale è detto a *valori complessi*.

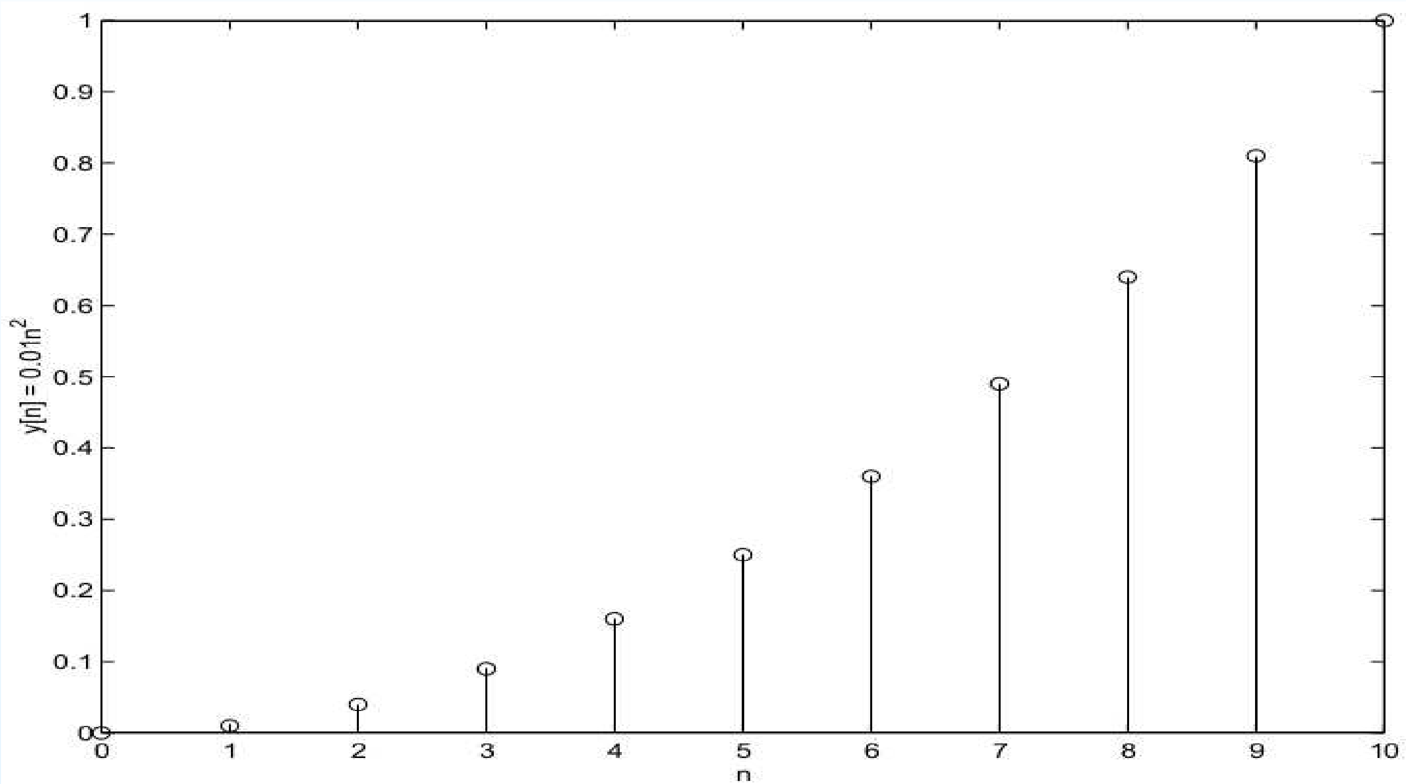
Segnali elettrici e campionamento uniforme

Un esempio di segnale a tempo continuo a valori reali è $y(t) = e^{-t}\cos(4t)$:



Segnali elettrici e campionamento uniforme

Un esempio di segnale a tempo discreto a valori reali è $y[n] = 0.01n^2$:



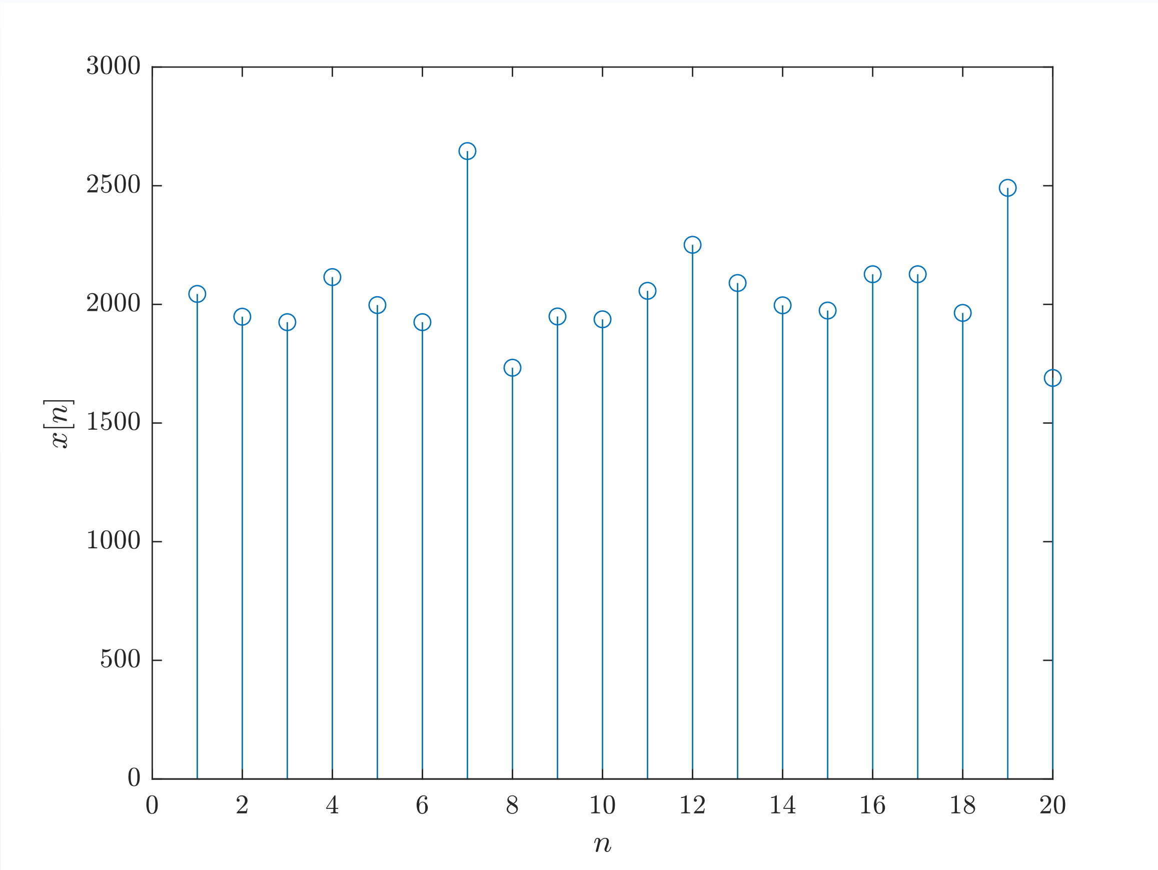
Segnali elettrici e campionamento uniforme

Con riferimento ai segnali a tempo discreto, è utile ricordare che essi possono derivare da segnali a tempo continuo a seguito di campionamento nel tempo, ma i segnali a tempo discreto possono ‘nascere’ direttamente a tempo discreto.

Si pensi, a esempio, all’operazione di scrittura di un testo su tastiera: se a ogni carattere si associa un valore numerico, la sequenza dei valori ottenuti è una sequenza temporalmente discreta, infatti, tra la pressione successiva di due tasti non è definito alcun valore intermedio.

Segnali elettrici e campionamento uniforme

Come esempio di segnale reale, consideriamo la porzione di elettrocardiogramma (ECG) mostrata in figura:



Segnali elettrici e campionamento uniforme

Un sistema è un oggetto che trasforma uno o più segnali di *ingresso* (o *eccitazioni*) in uno o più segnali di *uscita* (o *risposte*).

Esempi di sistema sono

- **Filtro audio**: Un circuito che accetta in ingresso un segnale vocale contaminato da rumore di fondo e lo restituisce in uscita con il rumore attenuato o cancellato.
- **Motore elettrico**: Un circuito che accetta in ingresso una eccitazione in tensione o corrente e risponde con un segnale che rappresenta la velocità angolare dell'asse di rotazione.

Segnali elettrici e campionamento uniforme

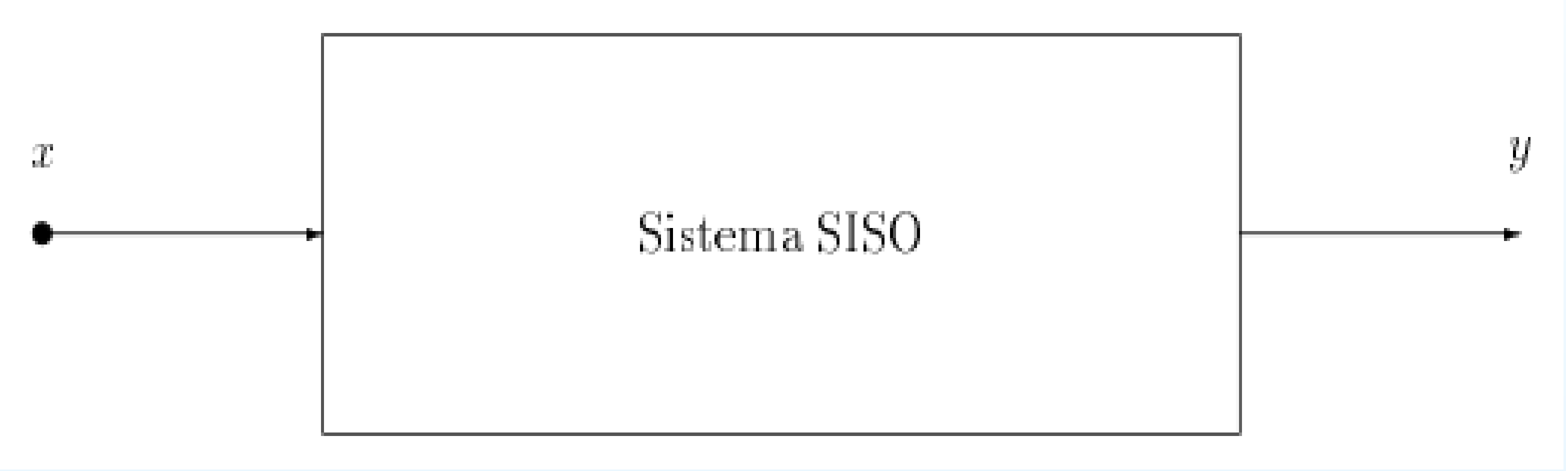
In generale, un sistema ammette almeno due tipi di rappresentazione formale:

- Rappresentazione *ingresso-uscita*: Il sistema viene visto come “scatola nera” (*black box*) accessibile solo dai canali di ingresso e di uscita. Tutte le informazioni relative al comportamento interno del sistema non sono accessibili dall’esterno.
- Rappresentazione *ingresso-stato-uscita*: Il sistema viene descritto dai segnali di ingresso, dai segnali di uscita e da segnali interni detti *variabili di stato*.

La rappresentazione in spazio di stato è più ricca di informazione e rispetto alla rappresentazione ingresso-uscita.

Segnali elettrici e campionamento uniforme

In generale, un sistema con un ingresso e una uscita (sistema SISO) può essere schematizzato come:



Schema generale di sistema SISO con segnale di ingresso x e segnale di uscita y.

Segnali elettrici e campionamento uniforme

Formalmente, la descrizione matematica del comportamento (ingresso-uscita) del sistema può essere dato in forma implicita, per esempio in termini di una equazione differenziale nella variabile y.
Alcuni esempi di descrizioni ingresso-uscita di sistemi sono:

$$y(t) = x^2(t) + 2x(t-\pi) - 3,$$

$$y(t) = \sqrt{\frac{1}{t}\int_0^t x^2(\tau)d\tau},$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + a_1\frac{d}{dt}y(t) + a_2 y(t) = x(t) \text{ (con condizioni iniziali).}$$

Segnali elettrici e campionamento uniforme

Il campionamento uniforme consente di convertire un segnale a tempo continuo $x(t)$ in un segnale a tempo discreto $x[n]$.

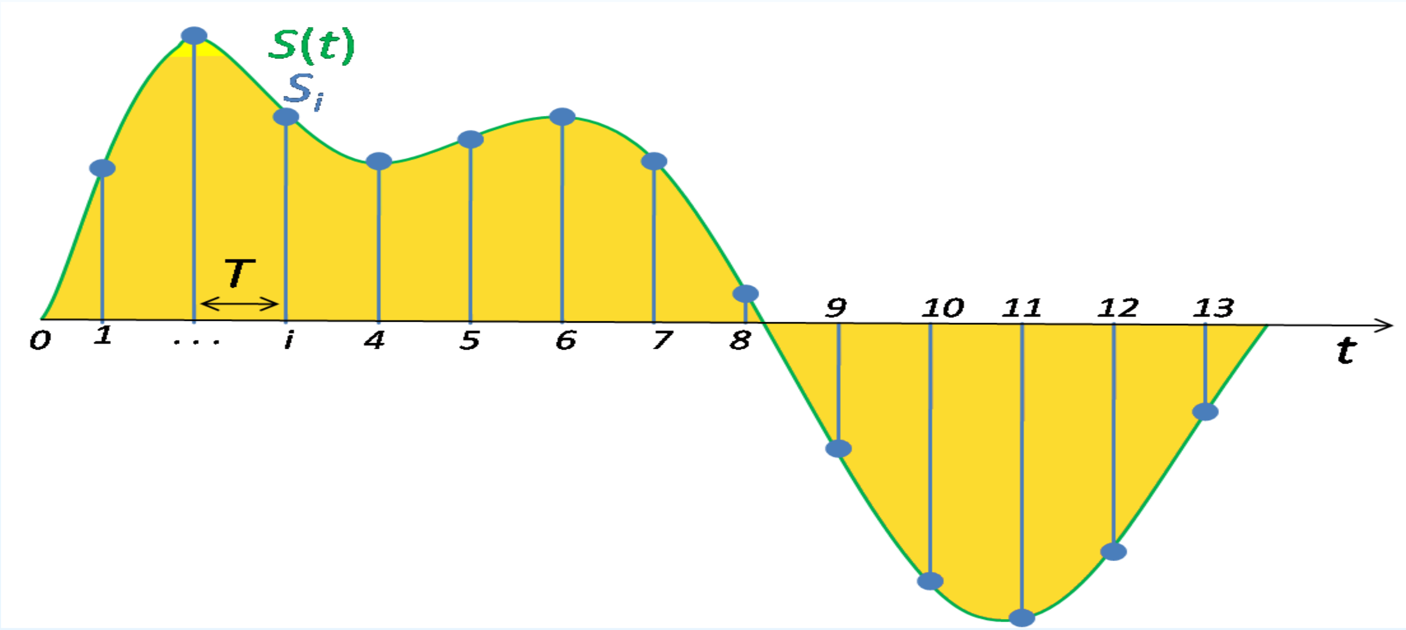
Il campionamento uniforme consiste nel restringere i valori del tempo t a singoli istanti ben distinti $n \cdot T$, equispaziati di un intervallo fisso T.

La relazione di campionamento è

$$x[n] := x(n \cdot T).$$

Segnali elettrici e campionamento uniforme

Un procedimento di campionamento temporale uniforme è mostrato nella figura seguente:



Procedimento di campionamento temporale uniforme con periodo di campionamento T.

Segnali elettrici e campionamento uniforme: Esempio

Fissato $T > 0$ (e di solito $T \ll 1$), il segnale a tempo discreto corrispondente al segnale a tempo continuo $x(t) = e^{-t}\cos(4t)$ è $x[n] = e^{-T\cdot n}\cos(4\cdot T\cdot n)$. Numericamente:

- Se $T := 0.01$, i primi valori del segnale a tempo discreto sono $x[0] = 1$, $x[1] \approx 0.9893$, $x[2] \approx 0.9771$, $x[3] \approx 0.9635$ e così via.
- Se $T := 0.05$, i primi valori del segnale a tempo discreto sono $x[0] = 1$, $x[1] \approx 0.9323$, $x[2] \approx 0.8334$, $x[3] \approx 0.7104$ e così via.

Nel secondo caso, il periodo di campionamento è maggiore, quindi il segnale varia più rapidamente.

Segnali elettrici e campionamento uniforme

Tanto minore è scelto il periodo di campionamento (cioè tanto più piccolo è T), tanto maggiore è l'accuratezza con cui il segnale $x[n]$ rappresenta il segnale $x(t)$.

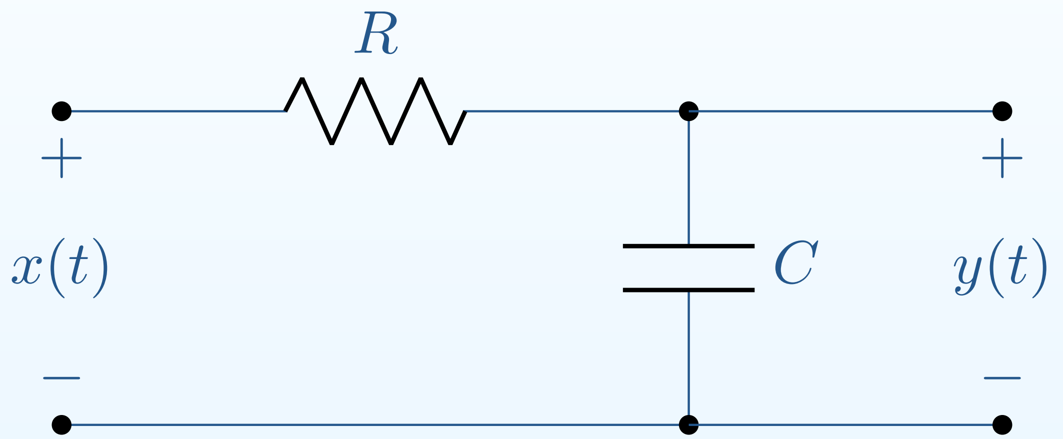
- **Campionamento di segnali musicali**: Nelle applicazioni audio di buona qualità, la *frequenza di campionamento*, ovvero $f := \frac{1}{T}$, utilizzata per acquisire segnali musicali, viene scelta come $f = 44,000$ Hz, che corrisponde a 44,000 campioni al secondo!
- **Campionamento di segnali vocali**: Nelle telecomunicazioni, la frequenza minima utilizata per acquisire i segnali vocali è, invece, di $f = 8$ kHz, perché 8,000 campioni al secondo sono sufficienti a garantire l'intelleggibilità del parlato. Una frequenza di $8,000$ Hz corrisponde ad un periodo di campionamento $T = 125\ \mu$s.

Segnali elettrici e campionamento uniforme

Al campionamento delle variabili elettriche descrittrive dei segnali in un circuito deve seguire il campionamento temporale del circuito stesso.
Nella sezione seguente verrà esaminato un esempio specifico, relativo ad un circuito R-C (filtro passa basso del I ordine).

Filtro passa basso del I ordine

Si consideri, come esempio, il circuito R-C rappresentato in figura.



In questo circuito, il segnale $x(t)$ rappresenta l'ingresso del sistema (corrispondente alla tensione elettrica impressa da un generatore indipendente di tensione), mentre il segnale $y(t)$ rappresenta l'uscita del sistema (corrispondente alla tensione elettrica ai capi del bipolo condensatore).

Filtro passa basso del I ordine

La legge di Kirchhoff alle tensioni scritta sull'unica maglia presente nel circuito è $-x(t) + R\,i(t) + y(t) = 0$, dove $i(t)$ indica la corrente di maglia (circolante in verso orario). La relazione costitutiva del condensatore si scrive $i(t) = C\frac{dy(t)}{dt}$.
Si vede quindi che il segnale di ingresso e il segnale di uscita sono legati dalla relazione differenziale:

$$RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t),$$

corredata da una opportuna condizione iniziale (per esempio, $y(0) = y_0$.) Si noti, inoltre, che in questo caso il segnale di uscita $y(t)$ coincide con la variabile di stato del sistema.

Filtro passa basso del I ordine

Per *discretizzare temporalmente questo circuito* è necessario discretizzare l'equazione differenziale che lo descrive. Per quanto riguarda i segnali di ingresso e di uscita, questi vengono discretizzati tramite il campionamento temporale uniforme, ovvero

$$\begin{cases} x(t) \to x[n], \\ y(t) \to y[n]. \end{cases}$$

La derivata temporale $\frac{dy(t)}{dt}$, può essere approssimata numericamente considerando che, a seguito del campionamento uniforme, i valori di y sono noti solo in istanti specifici e che tra due campioni successivi esiste una spaziatura temporale fissa di T secondi.

Filtro passa basso del I ordine

La derivata temporale può essere approssimata tramite il *rapporto incrementale* in diversi modi, tra cui ricordiamo

- **Approssimazione di Eulero in avanti (fEul)**: $\dot{y}(nT) := \frac{y[n+1]-y[n]}{T}$. Questa relazione costituisce una approssimazione numerica della 'derivata destra' di una funzione.
- **Approssimazione di Eulero all'indietro (bEul)**: $\dot{y}(nT) := \frac{y[n]-y[n-1]}{T}$. Costituisce una approssimazione numerica della 'derivata sinistra' di una funzione.
- **Approssimazione trapezoidale**: $\dot{y}(nT) := \frac{y[n+1]-y[n-1]}{2T}$. Questa approssimazione si ottiene come media della approssimazione in avanti e dell'approssimazione all'indietro.

Tempo discreto: Nota importante

È importante tenere a mente che, in genere, nelle relazioni:

- L'istante temporale n rappresenta l'istante **attuale**.
- L'istante temporale $n-1$ rappresenta un istante **precedente**, nel quale il valore delle grandezze elettriche da calcolare si considera noto da calcoli precedenti.
- L'istante temporale $n+1$ rappresenta un istante **futuro**, nel quale il valore delle grandezze elettriche da calcolare si considera incognito e – pertanto – da determinare.

Filtro passa basso del I ordine

Applicando il campionamento temporale e l'approssimazione fEul all'equazione differenziale che descrive il circuito R-C

$$RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t),$$

si ottiene l'*equazione alle differenze*

$$\frac{RC}{T}(y[n+1] - y[n]) + y[n] = x[n],$$

nella quale sono noti i valori R, C, T, la sequenza di ingresso $x[0], x[1], x[2], x[3], \ldots$ e il valore iniziale $y[0]$ e rimangono da determinare i valori successivi dell'uscita $y[1], y[2], y[3], \ldots$.

Filtro passa basso del I ordine

I valori di $y[n]$ possono essere determinati risolvendo l'equazione alle differenze nell'incognita $y[n+1]$, cioè per mezzo dell'algoritmo

$$y[n+1] = \left(1 - \frac{T}{RC}\right) y[n] + \frac{T}{RC} x[n], \; n = 0,\; 1,\; 2,\; \ldots .$$

Ad esempio, assumendo che $\frac{T}{RC} = 0.01$, si avrà

$$\begin{aligned} y[1] &= 0.99\, y[0] + 0.01\, x[0], \\ y[2] &= 0.99\, y[1] + 0.01\, x[1], \\ y[3] &= 0.99\, y[2] + 0.01\, x[2], \\ y[4] &= 0.99\, y[3] + 0.01\, x[3], \\ &\vdots \end{aligned}$$

Filtro passa basso del I ordine

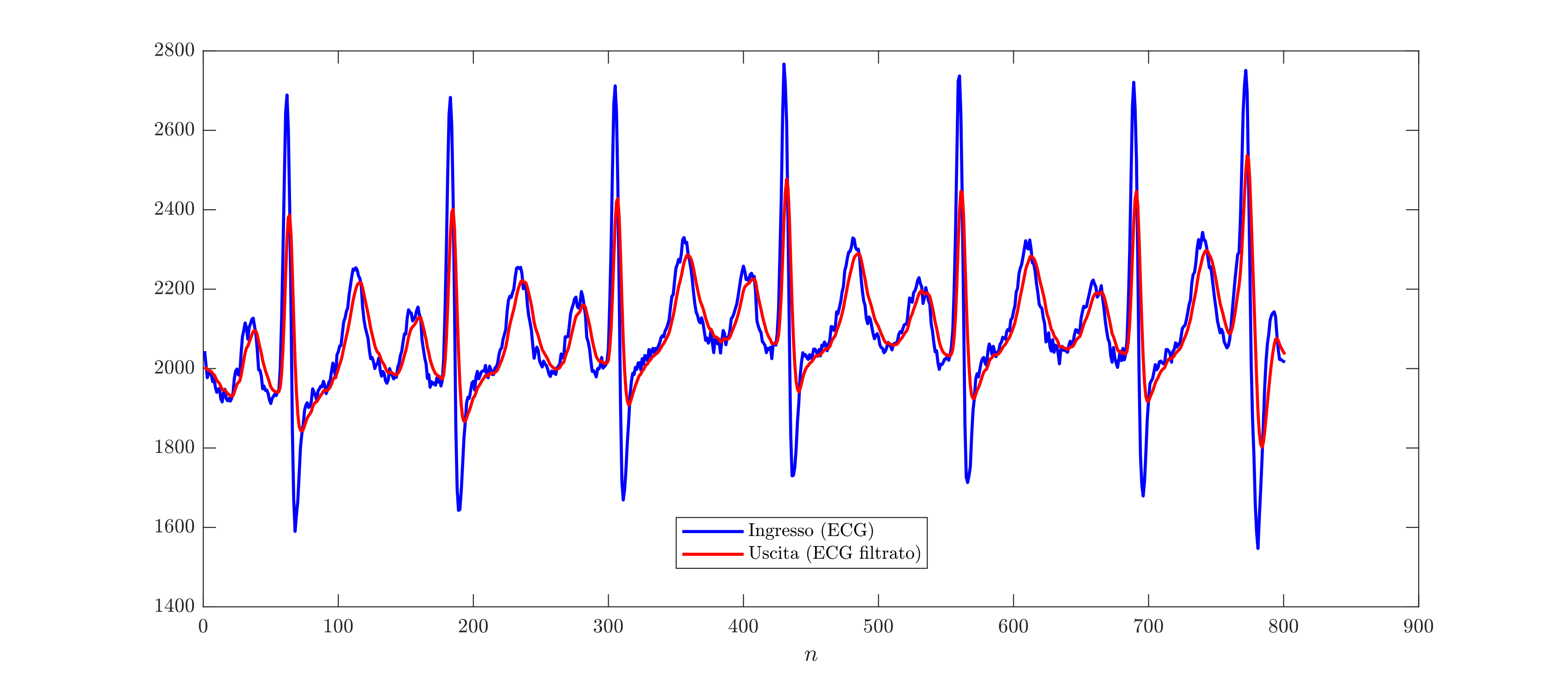
Dall'esempio numerico si vede che il circuito/sistema pesa poco il valore dell'ingresso e pesa molto il valore dell'uscita precedente.

Di conseguenza, questo circuito a tempo discreto non è in grado di reagire prontamente alle variazioni dell'ingresso ed è quindi un filtro passa basso (del I ordine, in quanto 'ricorda' un solo campione dell'uscita per volta).

Un filtro *passa basso* è un circuito in grado di 'smussare' i segnali, ovvero di attenuare le brusche variazioni di valore.

Filtro passa basso del I ordine

Un esempio di filtraggio passa basso è mostrato in figura, con applicazione al filtraggio di un segnale elettrocardiografico.



Circuiti equivalenti dei componenti con memoria

Nel passaggio dal tempo continuo al tempo discreto è possibile costruire dei circuiti equivalenti dei componenti con memoria, sulla base di elementi senza memoria, in modo da ricondursi a circuiti senza memoria a tempo discreto.

Analizziamo, a titolo esemplificativo, il circuito equivalente a tempo discreto del bipolo condensatore a tempo continuo. La relazione costitutiva del condensatore è

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt},$$

dove C rappresenta la capacità del condensatore e (v, i) sono tensione e corrente in versi coordinati.

Circuiti equivalenti dei componenti con memoria

Discretizzando tale relazione tramite il metodo bEul si ottiene:

$$i[n] = C\frac{v[n]-v[n-1]}{T},$$

dove T rappresenta il periodo di campionamento uniforme. La precedente relazione si può riscrivere come

$$i[n] = \frac{C}{T}v[n] - \frac{C}{T}v[n-1].$$

Circuiti equivalenti dei componenti con memoria

La corrente

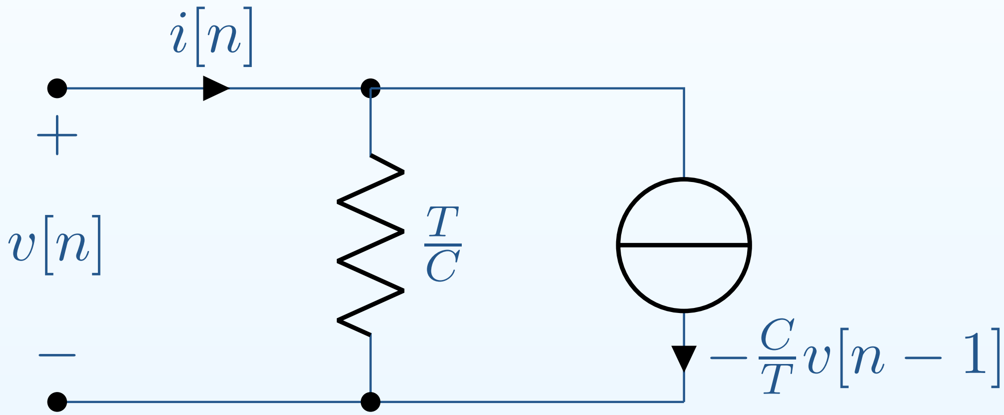
$$i[n] = \frac{C}{T}v[n] - \frac{C}{T}v[n-1]$$

è quindi somma di due termini:

- il primo è proporzionale alla tensione sul condensatore stesso tramite il coefficiente di proporzionalità $\frac{C}{T}$, che corrisponde quindi a un resistore formale,
- il secondo è un termine noto, che corrisponde quindi a un GIC formale.

Circuiti equivalenti dei componenti con memoria

Il circuito equivalente del condensatore a tempo discreto ha quindi la struttura mostrata in figura:



Esso rappresenta un circuito equivalente *parallelo* a tempo discreto di un condensatore di capacità C quando l'intervallo di campionamento è T.

Circuiti equivalenti dei componenti con memoria

La relazione costitutiva del condensatore a tempo discreto si può riscrivere anche come

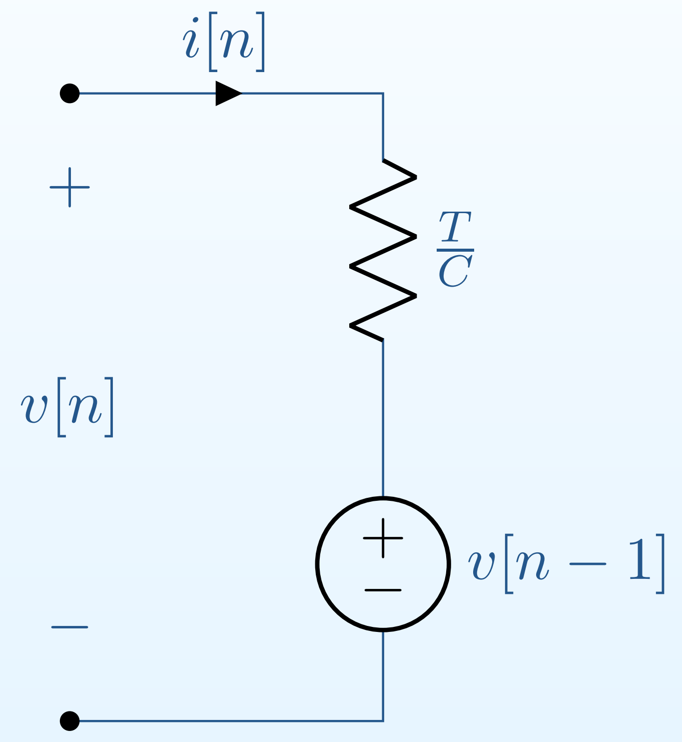
$$v[n] = \frac{T}{C} i[n] + v[n-1].$$

La tensione ai capi del condensatore è somma di due termini:

- il primo dei quali è proporzionale alla corrente sul condensatre stesso tramite il coefficiente di proporzionalità $\frac{T}{C}$, e corrisponde quindi a un resistore formale,
- il secondo è un termine noto, che corrisponde quindi ad un GIT formale.

Circuiti equivalenti dei componenti con memoria

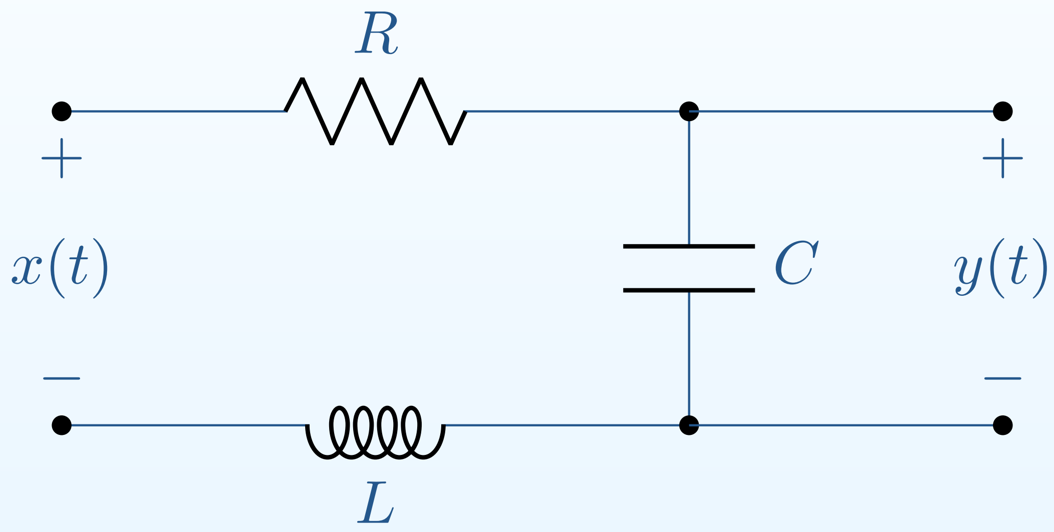
Un ulteriore circuito equivalente del condensatore a tempo discreto assume la struttura mostrata in figura:



Esso rappresenta un circuito equivalente *serie* a tempo discreto di un condensatore di capacità C quando l'intervallo di campionamento è T.

Circuito a tempo discreto del II ordine

Si consideri, come ulteriore esempio, il circuito R-L-C rappresentato in figura:



Esso rappresenta una rete 2-porte R-L-C con tensione di ingresso $x(t)$ e tensione di uscita $y(t)$. I valori di R, L e C e $x(t)$ si intendono noti (dati).

Circuito a tempo discreto del II ordine

Anche questo circuito, il segnale $x(t)$ rappresenta l'ingresso del sistema (corrispondente alla tensione elettrica impressa da un generatore indipendente di tensione), mentre il segnale $y(t)$ rappresenta l'uscita del sistema (corrispondente alla tensione elettrica ai capi del bipolo condensatore prelevata tramite un circuito aperto) con i versi indicati in figura.

Detta $i(t)$ la corrente di maglia circolante in verso orario, il sistema risolvente per questo circuito si scrive

$$\begin{cases} -x(t) + L\,\frac{di(t)}{dt} + R\,i(t) + y(t) = 0, \\ i(t) = C\,\frac{dy(t)}{dt}. \end{cases}$$

Circuito a tempo discreto del II ordine

Eliminando la corrente i dalle equazioni, si ottiene la relazione ingresso-uscita

$$LC\,\frac{d^2y}{dt^2} + RC\,\frac{dy}{dt} + y - x = 0,$$

ovvero una equazione differenziale lineare, a coefficienti costanti, non omogenea del II ordine, che necessita di due condizioni iniziali per poter essere risolta. Si considerino, ad esempio, le condizioni $y(0) = y_0$ e $\dot{y}(0) = i_0/C$, dove

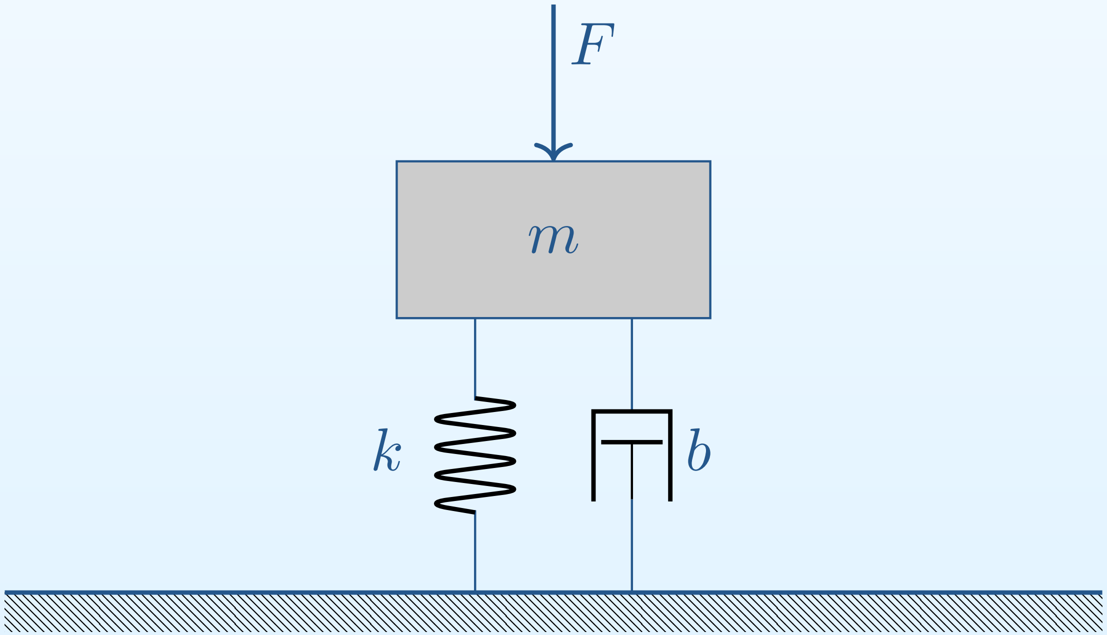
- y_0 è la tensione iniziale sul condensatore,
- i_0 è la corrente iniziale sull'induttore (e quindi anche sul condensatore, dato che la corrente i è unica).

Circuito a tempo discreto del II ordine: Nota

L'equazione differenziale

$$LC\,\frac{d^2y}{dt^2} + RC\,\frac{dy}{dt} + y - x = 0,$$

compare anche in altre sistemi fisici, come ad esempio un sistema massa-molla-smorzatore:



Circuito a tempo discreto del II ordine: Nota

In questo contesto, troveremmo le seguenti analogie:

- il prodotto $LC \equiv m$ rappresenta la massa di un oggetto,
- il prodotto $RC \equiv b$ rappresenta il coefficiente di smorzamento (attrito viscoso),
- il coefficiente di Hooke della molla è pari a $k = 1$,
- la forza esterna agente sulla massa è pari a $x \equiv F$.

Circuito a tempo discreto del II ordine

L'equazione differenziale del II ordine può essere discretizzata ricorrendo ai metodi già descritti, con però una difficoltà aggiuntiva, ovvero la presenza di una *derivata temporale seconda.*
Mentre la derivata prima $\dot{y}$ può essere approssimata con il metodo bEul

$$\dot{y}(t) \to \frac{y[n] - y[n-1]}{T},$$

la derivata seconda $\ddot{y}$ può essere approssimata applicando *due volte* il metodo bEul, ovvero con

$$\ddot{y}(t) \to \frac{\frac{y[n]-y[n-1]}{T} - \frac{y[n-1]-y[n-2]}{T}}{T} = \frac{y[n] - 2y[n-1] + y[n-2]}{T^2}.$$

Circuito a tempo discreto del II ordine

È interessante osservare come le approssimazioni delle derivate (prima, seconda, e così via) appaiono come *somme pesate* o *combinazioni lineari* della variabile da derivare in diversi istanti di tempo. Per esempio, la derivata seconda appena descritta ha l'espressione

$$\ddot{y}[n] := \underbrace{\frac{1}{T^2}}_{\text{Peso}} y[n] + \underbrace{\frac{-2}{T^2}}_{\text{Peso}} y[n-1] + \underbrace{\frac{1}{T^2}}_{\text{Peso}} y[n-2],$$

che appare come una somma pesata dei valori $y[n]$, $y[n-1]$ e $y[n-2]$ con pesi $\frac{1}{T^2}$, $-\frac{2}{T^2}$ e $\frac{1}{T^2}$, rispettivamente.

Circuito a tempo discreto del II ordine

In definitiva, l'equazione differenziale del II ordine discretizzata diventa

$$LC\,\frac{y[n]-2y[n-1]+y[n-2]}{T^2}+RC\,\frac{y[n]-y[n-1]}{T}+y[n]-x[n]=0,$$

che, dopo aver raccolto i termini omologhi, si scrive

$$\left(\frac{LC}{T^2}+\frac{RC}{T}+1\right)y[n]+\left(-\frac{2LC}{T^2}-\frac{RC}{T}\right)y[n-1]+\frac{LC}{T^2}y[n-2]=x[n].$$

Implementando questa equazione alle differenze (o sistema a tempo discreto) attraverso una piattaforma di calcolo (es. MATLAB) è possibile simulare numericamente il comportamento del circuito.

Sistemi ARMA-SISO in generale

Riscriviamo l'equazione alle differenze per il sistema del I ordine

$$y[n+1] = \left(1 - \tfrac{T}{RC}\right) y[n] + \tfrac{T}{RC} x[n],\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

come

$$y[n] - \left(1 - \tfrac{T}{RC}\right) y[n-1] = \tfrac{T}{RC} x[n-1],$$

dove si sono ritardati tutti i campioni di 1 passo temporale: questa è un caso particolare della equazione più generale

$$\boxed{\begin{aligned} & y[n] + \alpha_1\, y[n-1] + \alpha_2\, y[n-2] + \cdots + \alpha_p\, y[n-p] = \\ & \beta_0\, x[n] + \beta_1\, x[n-1] + \beta_2\, x[n-2] + \cdots + \beta_q\, x[n-q]. \end{aligned}}$$

Sistemi ARMA-SISO in generale

$$y[n] + \alpha_1 \, y[n-1] + \alpha_2 \, y[n-2] + \cdots + \alpha_p \, y[n-p] =$$
$$\beta_0 \, x[n] + \beta_1 \, x[n-1] + \beta_2 \, x[n-2] + \cdots + \beta_q \, x[n-q].$$

Tale sistema a tempo discreto viene indicato come ***modello ARMA(p,q)***, dove ARMA è un acronimo che sta per *Auto-Regressive Moving-Average*, p è la *profondità di memoria per l'uscita* e q è la *profondità di memoria per l'ingresso.*

Sistemi ARMA-SISO in generale

$$y[n] + \alpha_1\, y[n-1] + \alpha_2\, y[n-2] + \cdots + \alpha_p\, y[n-p] =$$
$$\beta_0\, x[n] + \beta_1\, x[n-1] + \beta_2\, x[n-2] + \cdots + \beta_q\, x[n-q].$$

La parte a sinistra del segno $=$ è detta ‘parte auto-regressiva’, mentre la parte a destra è detta ‘media mobile’.

In effetti, possiamo osservare che se si prendono i coefficienti $\beta_0 = \beta_1 = \cdots = \beta_q = \frac{1}{q+1}$ la parte a destra corrisponde con la media di $q+1$ campioni di ingresso che vanno dall’istante temporale $n-q$ all’istante attuale.

Sistemi ARMA-SISO in generale

Allora, il circuito descritto dal sistema del I ordine:

$$y[n] - \left(1 - \frac{T}{RC}\right) y[n-1] = \frac{T}{RC} x[n-1],$$

è un esempio di modello ARMA(1,1) con $\alpha_1 = \frac{T}{RC} - 1$, $\beta_0 = 0$ e $\beta_1 = \frac{T}{RC}$.

Sistemi ARMA-SISO in generale

Il metodo di discretizzazione scelto influenza la forma del modello ARMA. Per esempio, se si sceglie di discretizzare il circuito del I ordine con il metodo bEul, si ottiene

$$\frac{RC}{T}(y[n]-y[n-1])+y[n]=x[n],$$

per cui il modello corrispondente si scrive

$$y[n]+\alpha_1\, y[n-1]=\beta_0\, x[n],$$

che è un sistema ARMA(1,0) con $\alpha_1=\frac{-RC}{RC+T}$ e $\beta_0=\frac{T}{RC+T}$.

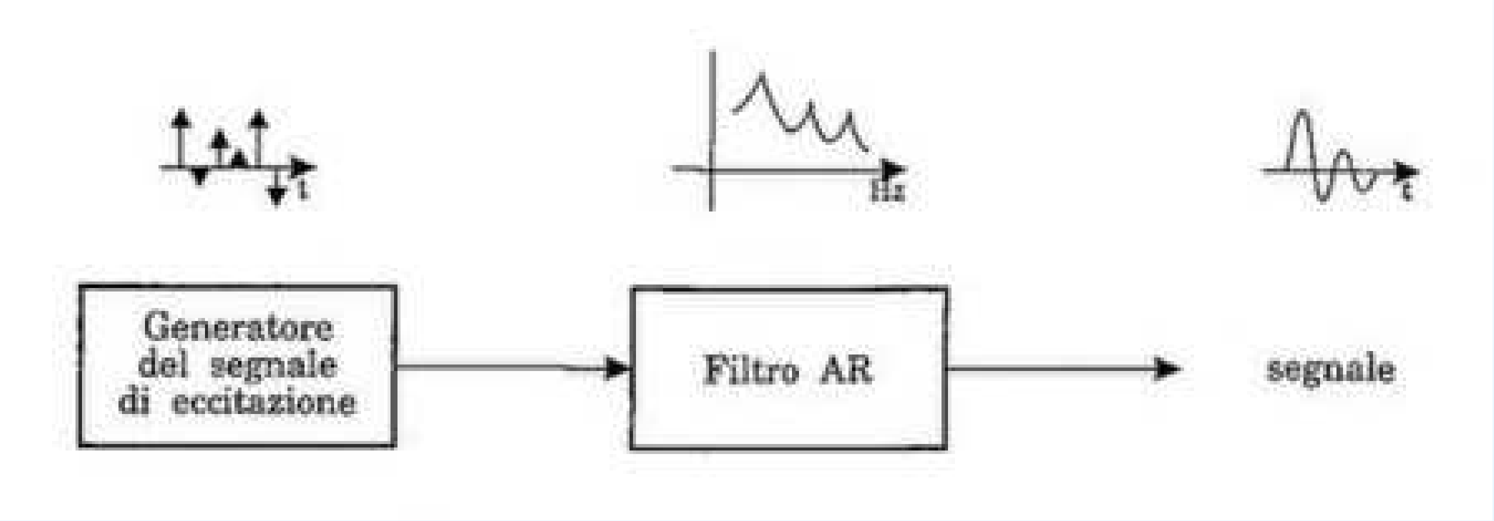
Sistemi ARMA-SISO in generale

In maniera del tutto analoga, ci si accorge che il circuito del II ordine è un caso particolare di modello ARMA con $p = 2$ e $q = 0$, pertanto è un modello ARMA(2,0) con coefficienti

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\left(\frac{LC}{T^2} + \frac{RC}{T} + 1\right)^{-1} \left(\frac{2LC}{T^2} + \frac{RC}{T}\right), \\ \alpha_2 = \left(\frac{LC}{T^2} + \frac{RC}{T} + 1\right)^{-1} \frac{LC}{T^2}, \\ \beta_0 = \left(\frac{LC}{T^2} + \frac{RC}{T} + 1\right)^{-1}. \end{cases}$$

Sistemi ARMA-SISO in generale

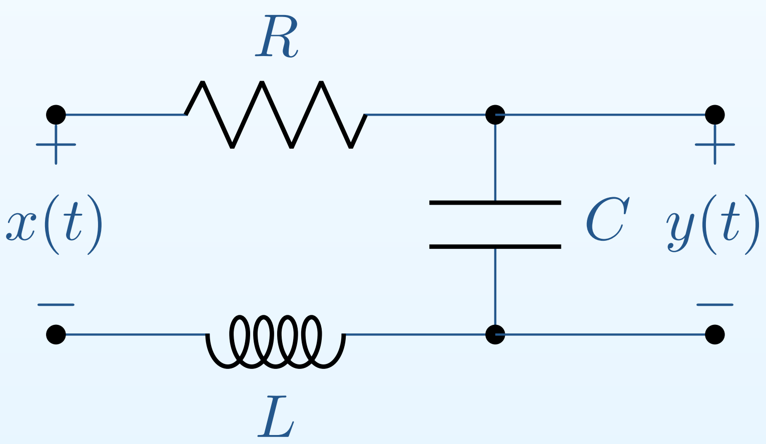
I circuiti ARMA possono anche essere utilizzati come **modelli generativi**. Ad esempio, un modello del tratto vocale può essere utilizzato come sintetizzatore vocale:



Rappresentazioni in spazio di stato

Oltre ai modelli ARMA, esiste una rappresentazione dei circuiti a tempo continuo estendibile al tempo discreto nota come *rappresentazione in spazio di stato*.

Per esempio, riscriviamo il sistema per il circuito del II ordine



come:

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}\, i - \frac{1}{L}\, y + \frac{1}{L}\, x, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{i}{C}. \end{cases}$$

Rappresentazioni in spazio di stato

Introducendo le variabili di stato (astratte) $x_1 := i$, $x_2 := y$, la variabile di ingresso $u := x$ e mantenendo la variabile di uscita y, le equazioni precedenti si scrivono in forma canonica come:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{R}{L}\,x_1 - \frac{1}{L}\,x_2 + \frac{1}{L}\,u, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{C}\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,u, \\ y = 0\,x_1 + 1\,x_2 + 0\,u. \end{cases}$$

Tali equazioni ammettono la rappresentazione matriciale

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A\,\xi + B\,u, \\ y = C\,\xi + D\,u, \end{cases}$$

Rappresentazioni in spazio di stato

In questo esempio, si è posto:

$$\xi = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},\ D = 0.$$

Rappresentazioni in spazio di stato

La discretizzazione temporale del sistema in spazio di stato può essere effettuata tramite campionamento uniforme dei segnali e approssimazione bEul della derivata prima dello stato, ovvero

$$\begin{cases} \xi(t) \to \xi[n], \\ u(t) \to u[n], \\ y(t) \to y[n], \\ \dot{\xi}(t) \to \frac{\xi[n]-\xi[n-1]}{T}, \end{cases}$$

per cui il sistema elgebrico-differenziale diventa

$$\begin{cases} \frac{\xi[n]-\xi[n-1]}{T} = A\,\xi[n] + B\,u[n], \\ y[n] = C\,\xi[n] + D\,u[n]. \end{cases}$$

Rappresentazioni in spazio di stato

In particolare, l'equazione di evoluzione dello stato si può esplicitare in $\xi[n]$ nel seguente modo

$$\xi[n] = (I - TA)^{-1}\xi[n-1] + (I - TA)^{-1}TB\,u[n],\ n \geq 1,$$

con $\xi[0]$ noto dalle condizioni iniziali.

Rappresentazioni in spazio di stato

Anche in questo caso, il metodo usato per l'approssimazione della derivata prima influenza la forma delle equazioni a tempo discreto. Infatti, scegliendo un metodo fEul, si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\xi[n+1]-\xi[n]}{T} = A\,\xi[n] + B\,u[n], \\ y[n] = C\,\xi[n] + D\,u[n] \end{cases}$$

e, in particolare, l'equazione di evoluzione dello stato si può esplicitare in $\xi[n+1]$ con

$$\xi[n+1] = (I + TA)\xi[n] + TB\,u[n],\ n \geq 0,$$

con $\xi[0]$ noto dalle condizioni iniziali.

Rappresentazioni in spazio di stato

Un esempio di filtraggio tramite un filtro discreto del II ordine è mostrato nella figura seguente, dove il segnale in ingresso è un *chirp*.