- Come funziona una LAN o una WLAN?
- Come funziona il navigatore satellitare?
- Come faccio a vedere le televisione?
- Come funziona un forno a microonde?
- Come funziona un telefono cellulare?
- A cosa serve la bussola?
- Come arriva la corrente a casa mia?
- …….

Alla base di tutto ciò e molto altro… c'è

l' ELETTROMAGNETISMO

Elettromagnetismo

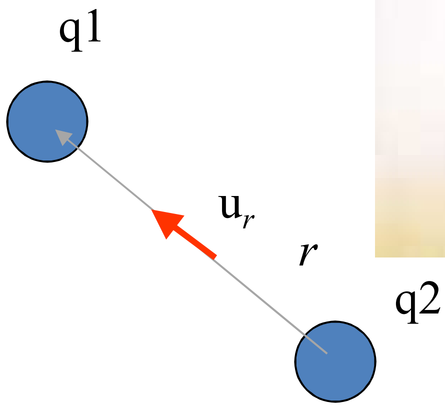
- Con elettromagnetismo s’intende l’insieme dei fenomeni dovuti alle interazioni generate da cariche elettriche statiche e/o in movimento

Quantificazione interazione tra cariche

Charles Augustin de Coulomb [1736-1806]

- Legge di Coulomb (1785)

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r$$



$$\vec{\mathbf{u}}_r \equiv \frac{\vec{\mathbf{r}}}{|r|} \qquad \vec{\mathbf{F}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|r|^3}\vec{\mathbf{r}}$$

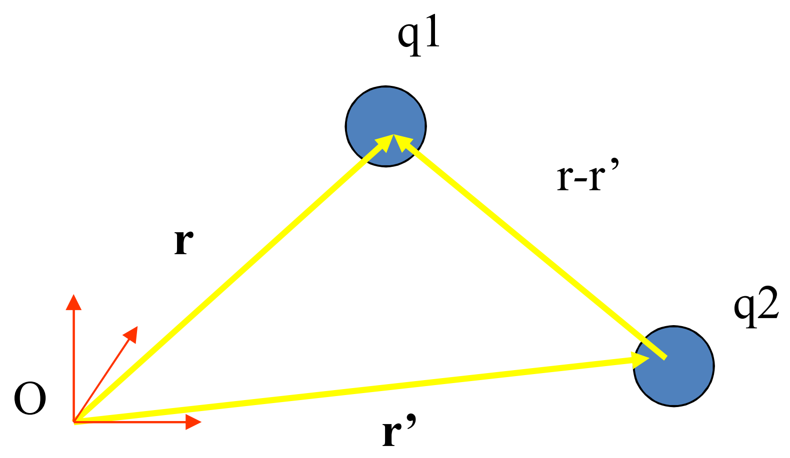
Nel vuoto

La forza può essere sia repulsiva (cariche dello stesso segno) che attrattiva (cariche di segno opposto): nella formula la carica “entra” con il proprio segno

Legge di Coulomb

- Se l'origine non coincide con una delle due particelle

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|r - r'|^3}(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}')$$



Nota: permettività o permeabilità elettrica nel vuoto

$$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \quad \left[C^2 N^{-1} m^{-2} \right]$$

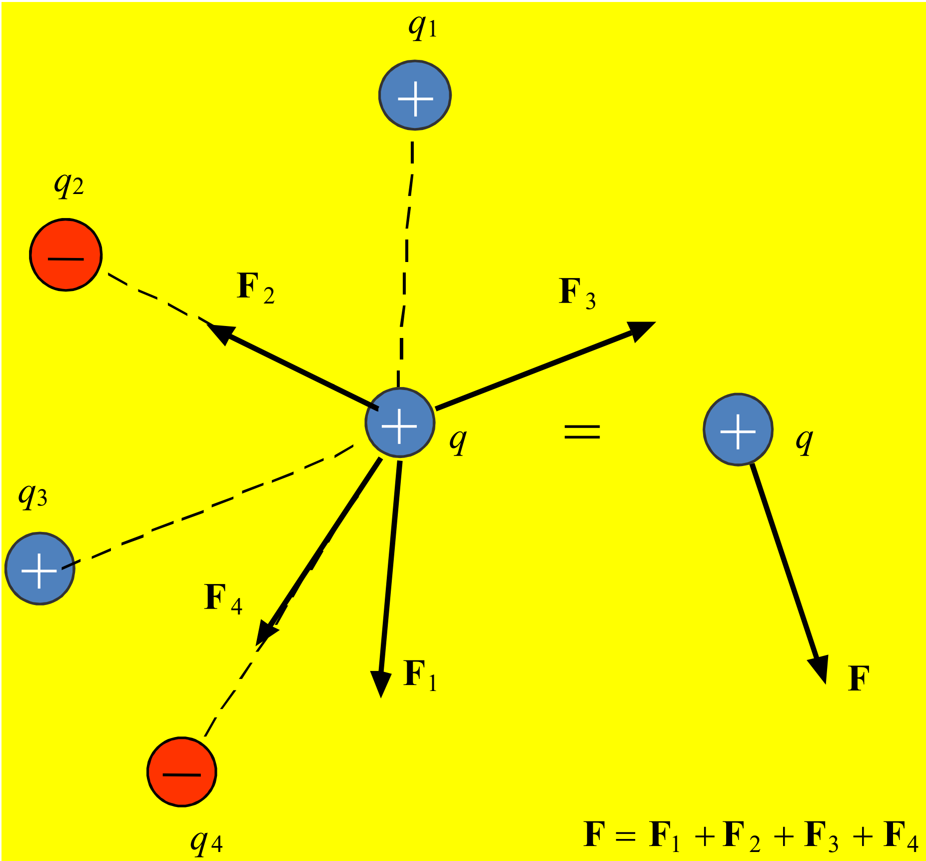
$$[\varepsilon_0] = \left[\mathrm{C}^2 \mathrm{N}^{-1} \mathrm{m}^{-2} \right] = [\mathrm{C}^2 Joule^{-1} \cdot m^{-1}] = [Fm^{-1}]$$

[F]=Farad

Forze in un sistema di cariche

Sovrapposizione degli effetti

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\ q_1}{r_1^2}\vec{\mathbf{u}}_{r1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\ q_2}{r_2^2}\vec{\mathbf{u}}_{r2} + \ldots + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\ q_N}{r_N^2}\vec{\mathbf{u}}_{rN}$$



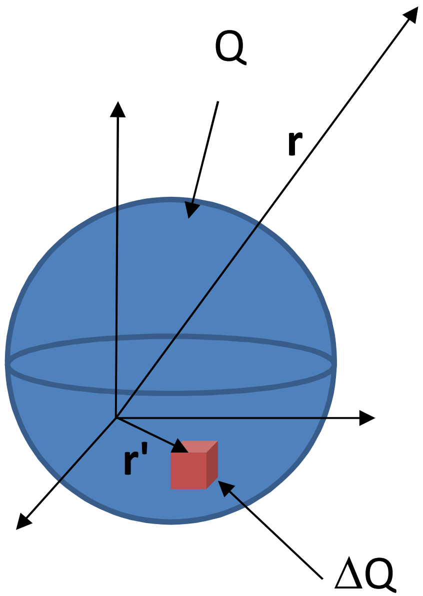
$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\vec{\mathbf{u}}_{ri}$$

http://webphysics.davidson.edu/Applets/efield4/prb1.html

Densità di carica in un volume

Carica totale distribuita nel volume V

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \qquad Q = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(\vec{r}_i)\Delta V_i = \int_V \rho \,\mathrm{d}V$$

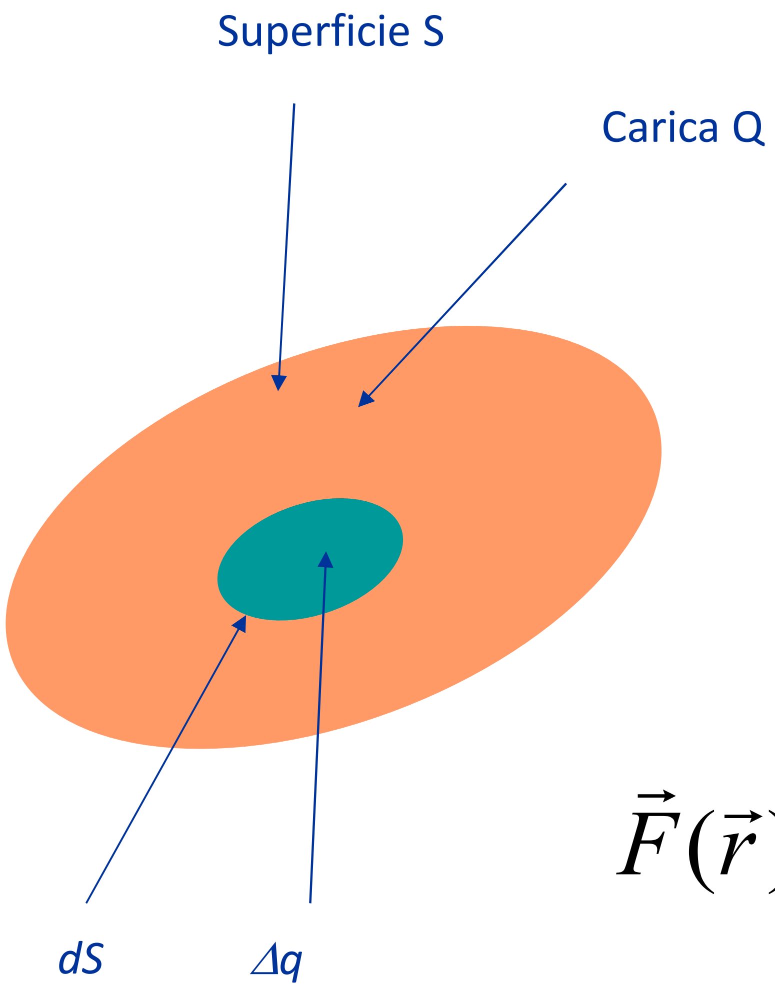


$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta Q_i(\vec{r} - \vec{r}_i\,')}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r} - \vec{r}_i\,'\right|^3} =$$

$$= \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho(\vec{r}_i\,')\Delta V_i(\vec{r} - \vec{r}_i\,')}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\,'\right|^3}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = q_0 \int_V \rho(\vec{r}\,')dV' \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3}$$

Densità Superficiale di carica



Densità superficiale di carica

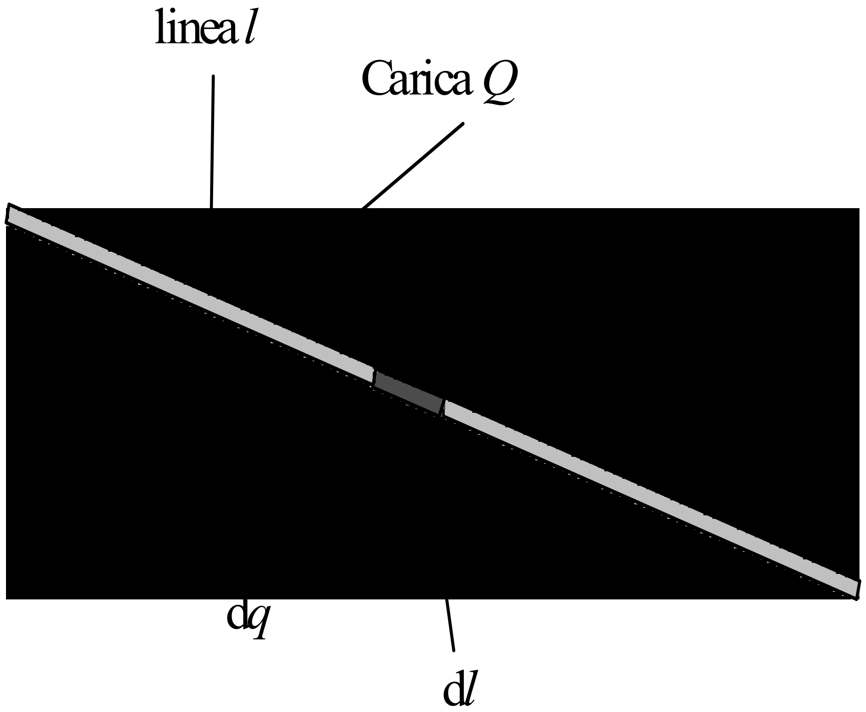
$$\sigma(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S}$$

Carica totale sulla superficie

$$Q = \int_S \sigma \, \mathrm{d}S$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = q_0 \int_S \sigma(\vec{r}\,')dS' \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3}$$

Densità Lineare di carica



Densità lineare di carica

$$\lambda(\vec{r}) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l}$$

Carica totale sul filo

$$Q = \int_l \lambda \, \mathrm{d}l$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = q_0 \int_l \lambda(\vec{r}\,')dl' \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3}$$

Campo elettrico

La legge di Coulomb individua un’azione a distanza, cioè un’azione senza contatto tra due cariche.

Conviene, per discutere questa azione a "distanza", introdurre il concetto di campo.

L’esistenza di una sola carica produce una modifica dello spazio circostante tale da sottoporre la seconda carica ad una forza.

Nello spazio intorno alla carica iniziale si dice che c’è un campo.

Prima caratteristica di un campo è **l'azione senza contatto**

Seconda caratteristica: per evidenziare un campo occorre un **oggetto di prova** su cui si esercitano le forze dovute al campo

L’introduzione del concetto di campo elettrico evidenzia la modifica, da parte della sorgente, dello spazio circostante.

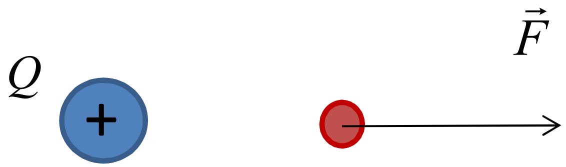
Vettore campo elettrico

Il campo elettrico viene definito:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

[N/C]=[V/m]

In questo modo il campo è indipendente dalla carica prova (che per convenzione viene presa positiva) e dipende solamente dalla sorgente

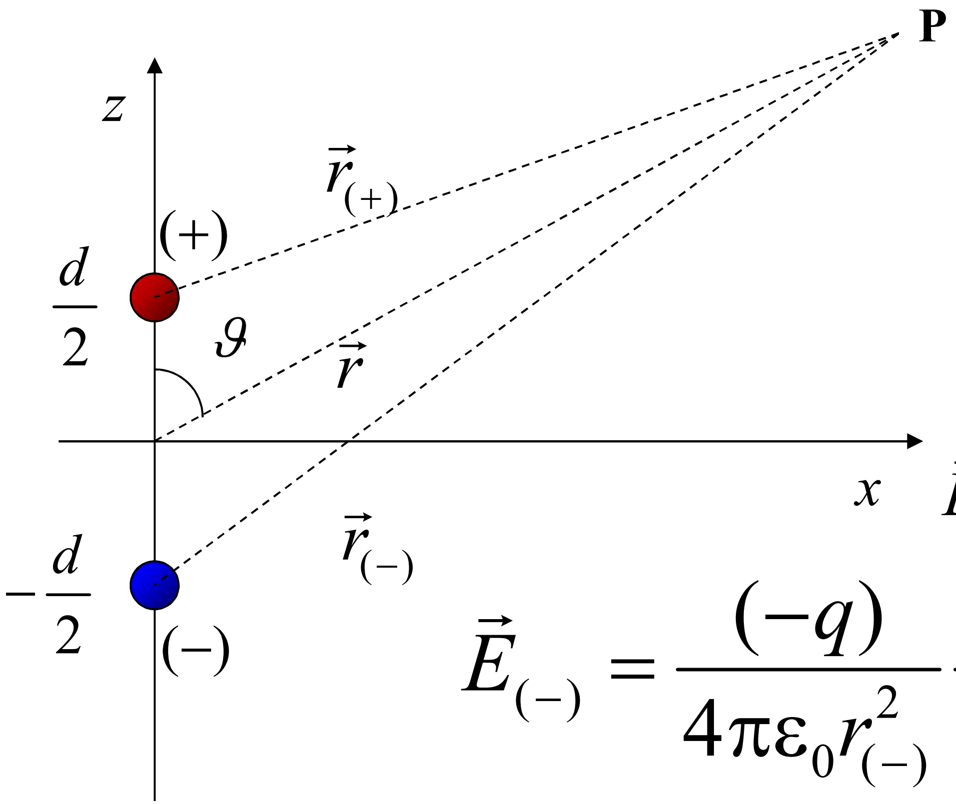


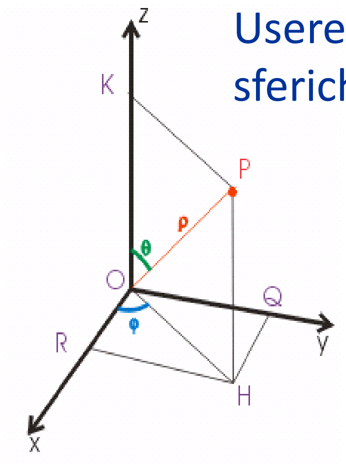
$$\vec{F} = \frac{Q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Campo Elettrico prodotto da un dipolo

Il problema ha simmetria cilindrica: il campo non dipende da ϕ





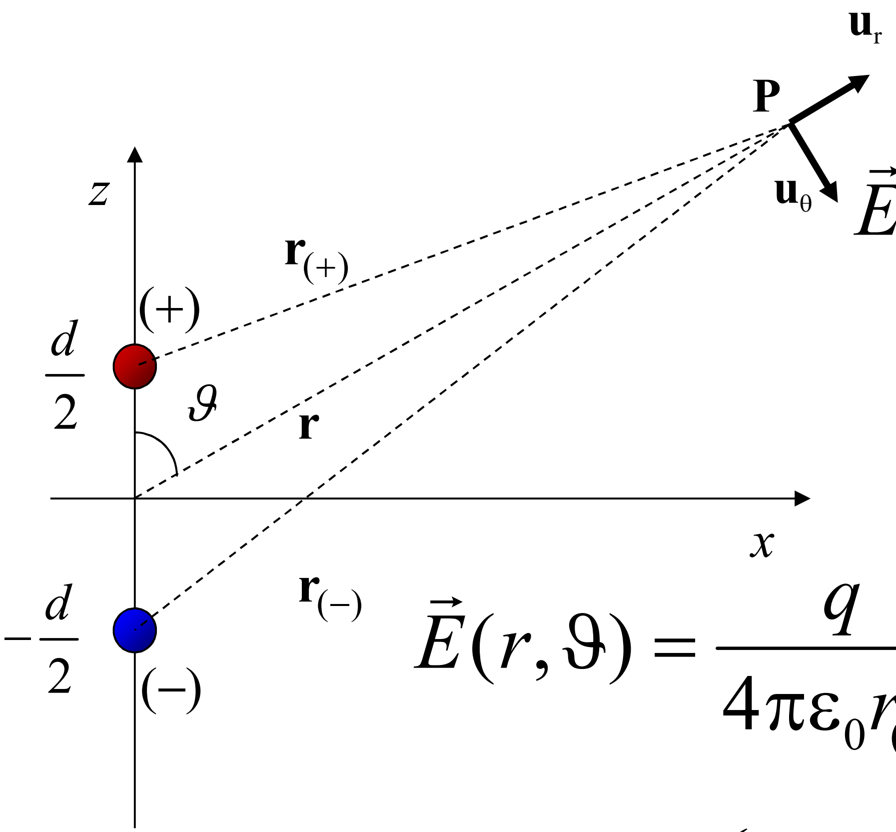
Useremo le coordinate sferiche

$$\vec{E}(r,\vartheta,\phi) = \vec{E}_{(+)}(r,\vartheta) + \vec{E}_{(-)}(r,\vartheta)$$

$$\vec{E}_{(-)} = \frac{(-q)}{4\pi\varepsilon_0 r_{(-)}^2}\frac{\vec{r}_{(-)}}{\left|\vec{r}_{(-)}\right|} \qquad \vec{E}_{(+)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_{(+)}^2}\frac{\vec{r}_{(+)}}{\left|\vec{r}_{(+)}\right|}$$

$$\vec{E}(r,\vartheta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_{(+)}^2}\frac{\vec{r}_{(+)}}{r_{(+)}} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_{(-)}^2}\frac{\vec{r}_{(-)}}{r_{(-)}}$$

Campo Elettrico prodotto da un dipolo



$$\vec{E}(r,\vartheta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_{(+)}^2}\frac{\vec{r}_{(+)}}{r_{(+)}} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_{(-)}^2}\frac{\vec{r}_{(-)}}{r_{(-)}}$$

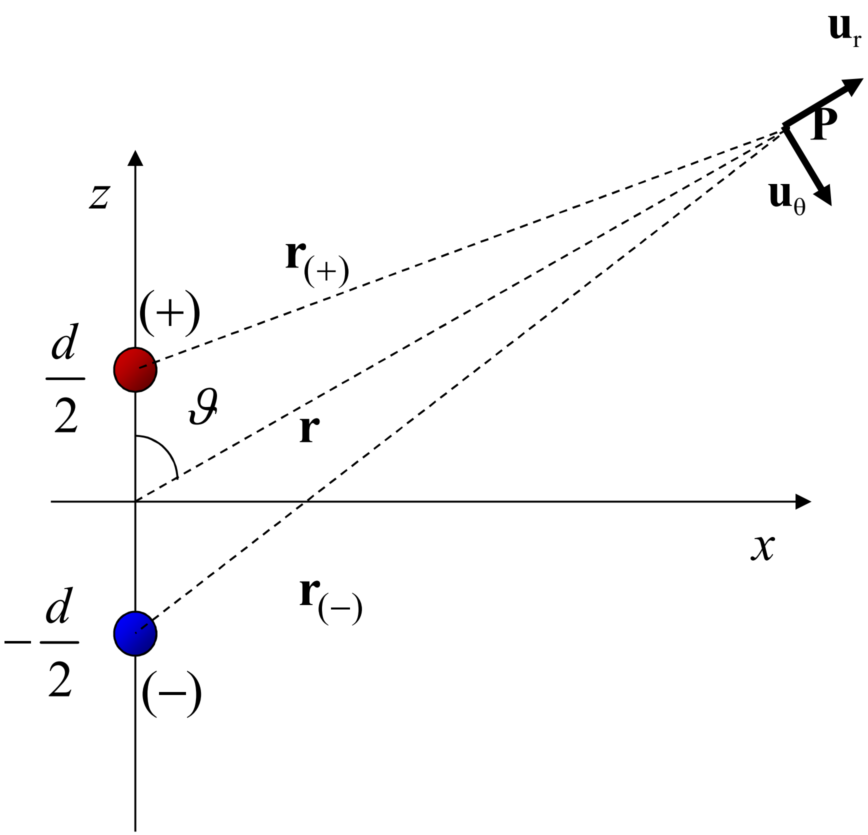
$$\vec{r}_{(+)} = \vec{r}_{(-)} - d\,\hat{u}_z$$

$$\vec{E}(r,\vartheta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_{(+)}^3}\left(\vec{r}_{(-)} - d\hat{u}_z\right) - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_{(-)}^3}\vec{r}_{(-)}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_{(-)}^3 - r_{(+)}^3}{r_{(-)}^3 r_{(+)}^3}\vec{r}_{(-)} - \frac{d}{r_{(+)}^3}\hat{u}_z\right)$$

Campo Elettrico prodotto da un dipolo

Supponiamo P molto lontano (d<<r):



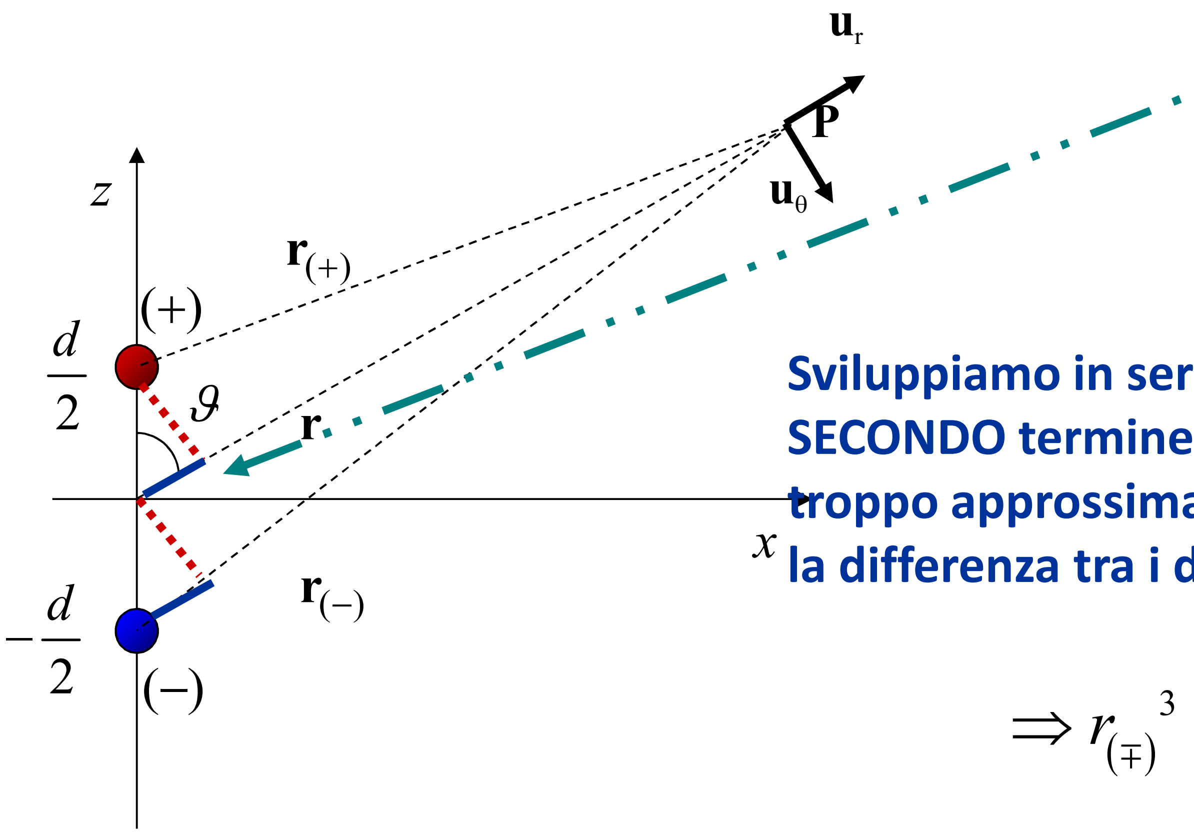
1. $\vec{r}_{(-)}$ e $\vec{r}_{(+)}$ possono essere considerati paralleli

2 Troviamo una espressione approssimata per $r^3_{(-)} - r^3_{(+)}$

3. Troviamo una espressione approssimata per $r^3_{(-)}$ e $r^3_{(+)}$

Campo Elettrico prodotto da un dipolo

Troviamo una espressione approssimata per $r_{(-)}^3 - r_{(+)}^3$



$$r_{(\mp)} = r \pm \frac{d}{2}\cos\vartheta$$
$$= r\left(1 \pm \frac{d}{2r}\cos\vartheta\right)$$

Sviluppiamo in serie di Taylor a tronchiamo al SECONDO termine (al primi termine sarebbe troppo approssimato visto che stiamo cercando la differenza tra i due percorsi

$$\Rightarrow r_{(\mp)}{}^3 \approx r^3\left(1 \pm 3\frac{d}{2r}\cos\vartheta\right)$$

$$\Rightarrow r_{(-)}{}^3 - r_{(+)}{}^3 \approx \left(r^3 + 3r^2\frac{d}{2}\cos\vartheta\right) - \left(r^3 - 3r^2\frac{d}{2}\cos\vartheta\right) = 3r^2 d\cos\vartheta$$

Campo Elettrico prodotto da un dipolo

Troviamo una espressione approssimata per $r_{(-)}^3$ **e** $r_{(+)}^3$

$$r_{(\mp)} = r \pm \frac{d}{2}\cos\vartheta \quad \Rightarrow r_{(\mp)}{}^3 \approx r^3$$

Tronchiamo lo sviluppo in serie al PRIMO termine

Inoltre $\vec{r}_{(-)} \approx r\hat{u}_r$ (ricordate?...siamo lontani)

Esprimo in coordinate sferiche

$$\hat{u}_z = \cos\vartheta\ \hat{u}_r - \sin\vartheta\ \hat{u}_\vartheta$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r,\vartheta) \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3r^2 d\cos\vartheta}{r^6} r\hat{u}_r - \frac{d}{r^3}(\cos\vartheta\hat{u}_r - \sin\vartheta\hat{u}_\vartheta)\right)$$

$$\vec{E}(r,\vartheta) \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2d\cos\vartheta\hat{u}_r + d\sin\vartheta\hat{u}_\vartheta\right)$$

Campo Elettrico prodotto da un dipolo

Se definiamo

$$p \triangleq qd$$ Momento di dipolo elettrico

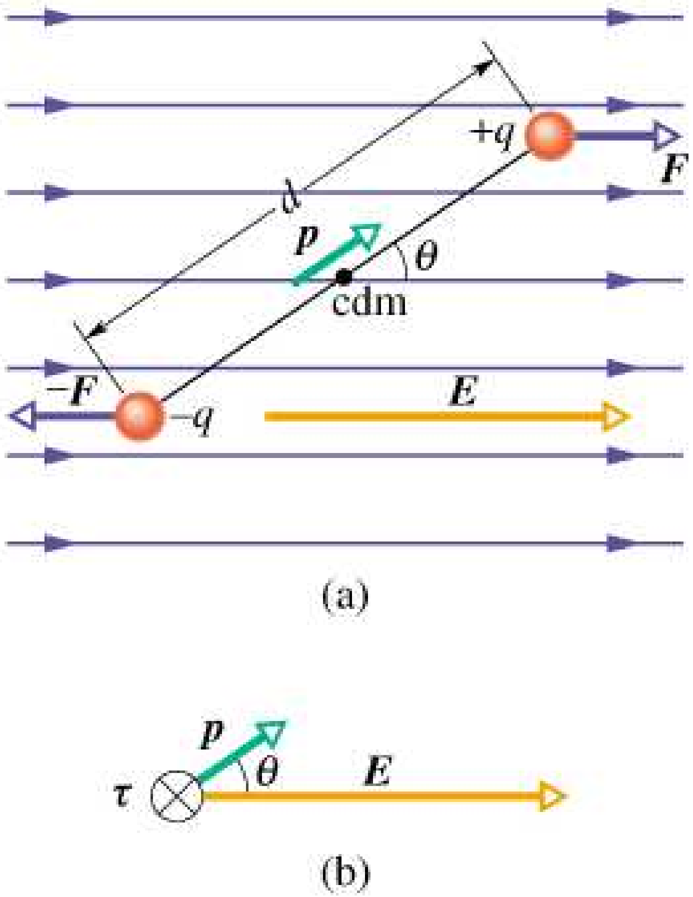
$$\vec{E}(r,\vartheta) \approx \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\vartheta\,\hat{u}_r + \sin\vartheta\,\hat{u}_\vartheta\right)$$

E *dipende solo da p*: se per es. raddoppiamo q e dimezziamo d, il campo non cambia

p si definisce anche come un vettore orientato lungo $\mathbf{u}_z$

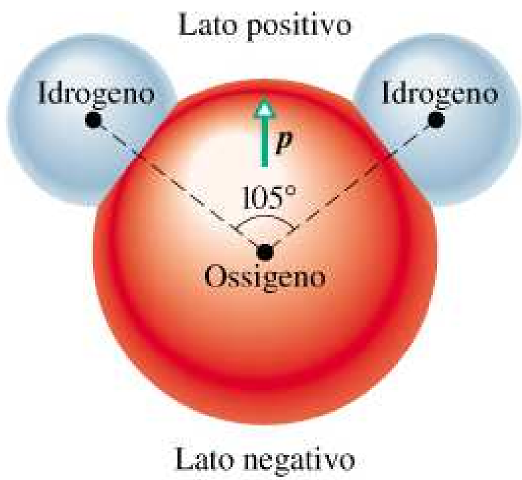
Dipolo in un campo elettrico uniforme

Momento di torsione τ



$$\boldsymbol{\tau} = 2\left(\frac{\mathbf{d}}{2} \times \mathbf{F}\right) = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

τ fa ruotare il dipolo in senso orario fino ad allinearlo al campo



Le molecole d'acqua sono dipoli

Divergenza di un vettore

Consideriamo un volume V che circonda un punto P, e la sua superficie di contorno S.
Si definisce divergenza di un vettore $\vec{A}$ in un punto P, il flusso del vettore $\vec{A}$ uscente dalla superficie S diviso per il volume V, quando il volume tende a zero

$$div\,\vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

http://citadel.sjfc.edu/faculty/kgreen/vector/block2/del_op/node5.html

http://www.geogebra.org/m/1123115

https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/divergence-and-curl-articles/a/divergence

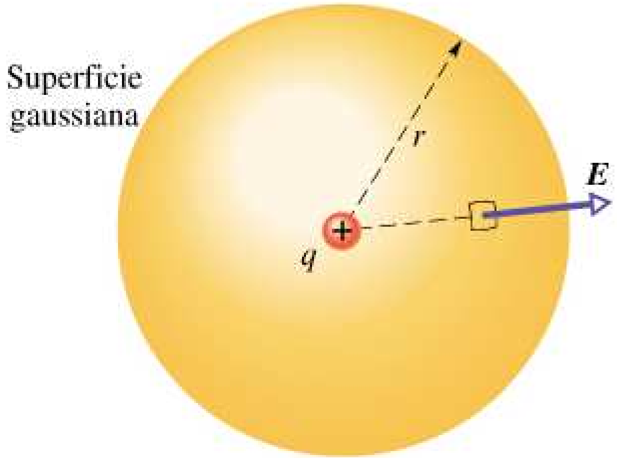
Teorema della Divergenza

Consideriamo un volume V e la sua superficie di contorno S. E' possibile dimostrare che:

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{D} \, dv$$

DALLA LEGGE SPERIMENTALE DI COULOMB
ALLA FORMULAZIONE MATEMATICA DI GAUSS

Carica puntiforme: flusso attraverso una sfera

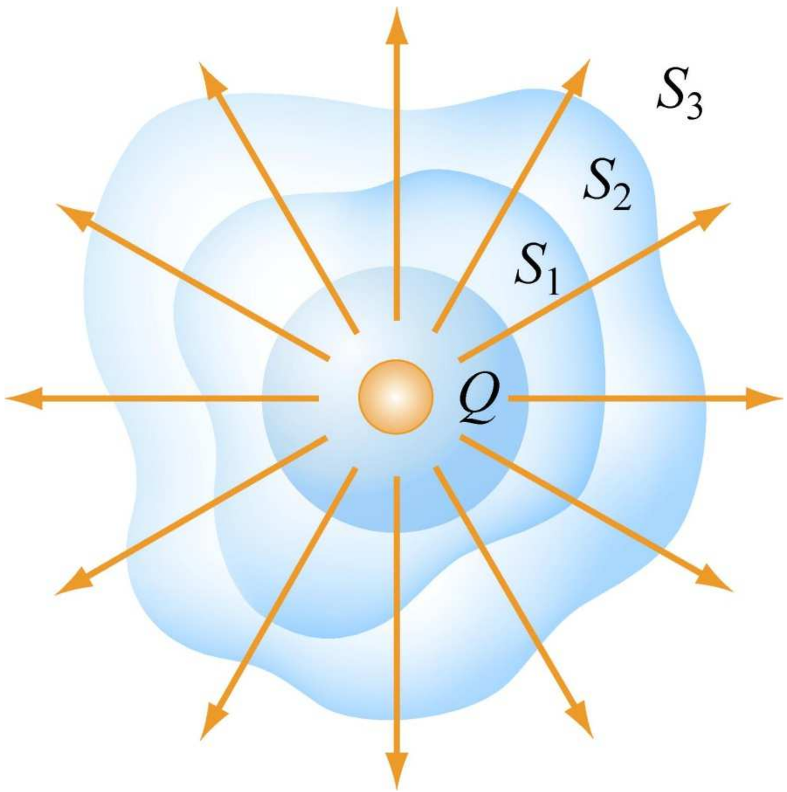


$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{r} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Superficie gaussiana arbitraria



$$\Phi_E = \oiint_{S_1} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{S} =$$

$$= \oiint_{S_2} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{S} =$$

$$= \oiint_{S_3} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{S}$$

Il flusso è lo stesso qualunque sia la superficie attraversata.
E' possibile dimostrarlo intuitivamente considerando che le tre superfici sono attraversate dallo stesso numero di linee di campo.

Legge di Gauss – L'equazione

$$\Phi_E = \underset{\text{Superficie chiusa S}}{\oiint} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa S è proporzionale alla carica totale contenuta all'interno del volume racchiuso da S

Osservazioni

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

- ***Legge di Gauss in forma Integrale***

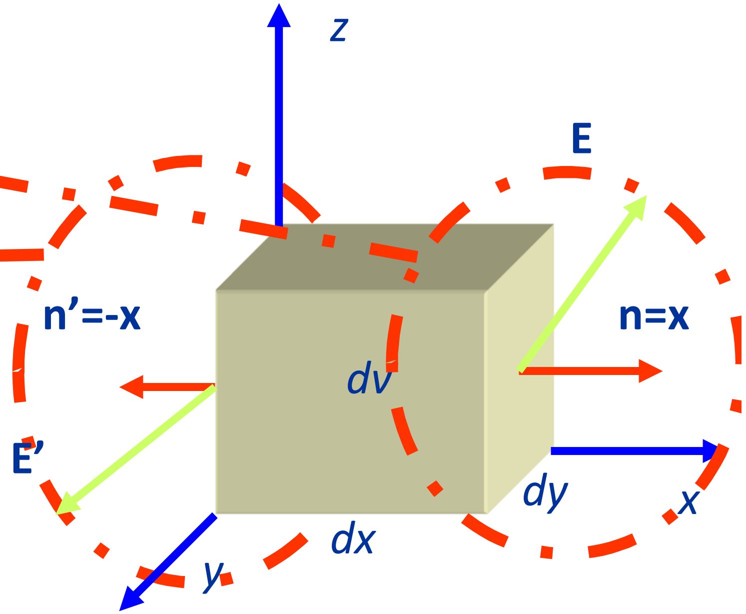
- La carica netta totale ***racchiusa*** richiede sia le cariche libere che quelle indotte, nel caso ci sia un materiale nel volume racchiuso dalla superficie di Gauss
- Non importa la posizione delle cariche (purché distinguiamo quelle interne da quelle esterne alla superficie)
- Il campo che compare è quello ***totale***, cioè anche dovuto ad eventuali cariche esterne
- però una carica esterna non altera il flusso totale (tanto ne entra quanto ne esce)
- La legge di Gauss è una forma alternativa della legge di Coulomb: consente di sfruttare le simmetrie, ed è valida anche per cariche in moto

Teorema di Gauss in forma differenziale

Applichiamo il teorema di gauss ad una distribuzione di carica uniformemente distribuita nello spazio

$$d\phi_{x1} = \vec{\mathbf{E}}\cdot\vec{\mathbf{n}}ds = E_x dy\,dz$$

$$d\phi_{x2} = -E_x' dy\,dz$$



$$d\phi_{x1} + d\phi_{x2} = (E_x - E_x')dy\,dz$$

$$= dE_x dy\,dz = \frac{\partial E_x}{\partial x}dxdydz = \frac{\partial E_x}{\partial x}dv$$

$$\Rightarrow d\phi_{tot} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dv = \frac{dQ}{\varepsilon_0} = \frac{\rho dv}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi_{tot}}{dv} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\Rightarrow Div(\vec{\mathbf{E}}) = \nabla\cdot\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Materiali: prima classificazione

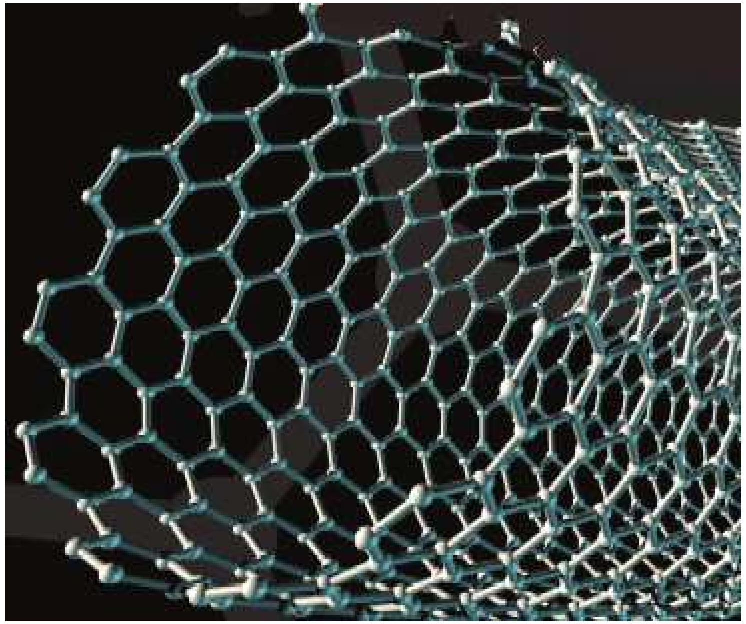
- **Conduttori : sostanze nelle quali alcune o tutte le cariche elettriche possono muoversi liberamente sotto l'azione di forze elettriche (elettroni di conduzione nei metalli, ioni nelle soluzioni acquose).**

- **Isolanti (dielettrici): gli elettroni sono vincolati agli atomi (es.: vetro, ebanite).**

- **Semiconduttori: classe di materiali intermedia tra i conduttori e gli isolanti per le loro proprietà di condurre elettricità (es. : silicio, germanio). In realtà in questi la conduzione avviene in modo piuttosto peculiare**

Altri materiali

- **Superconduttori** **(scoperti nel 1911; recenti scoperte nel 1997)**
- **Nanotubi e nanofili** **(scoperti nel 1991)**



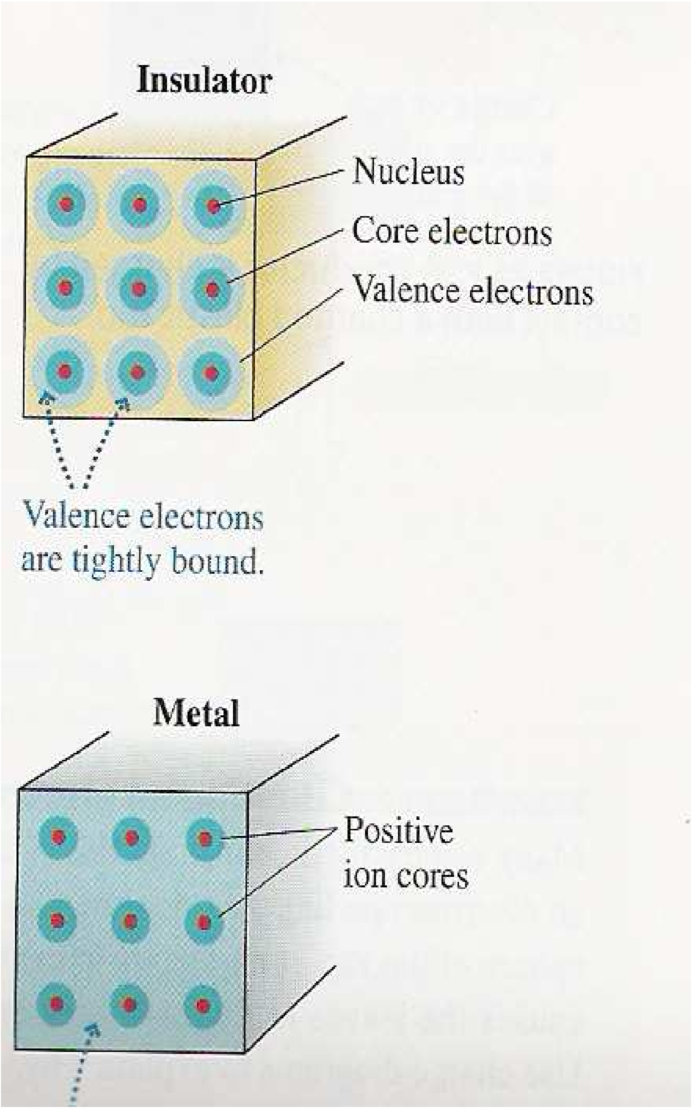
Conduttori e isolanti (dielettrici)

Isolanti (dielettrici): Gli elettroni sono legati agli atomi, e non possono muoversi.

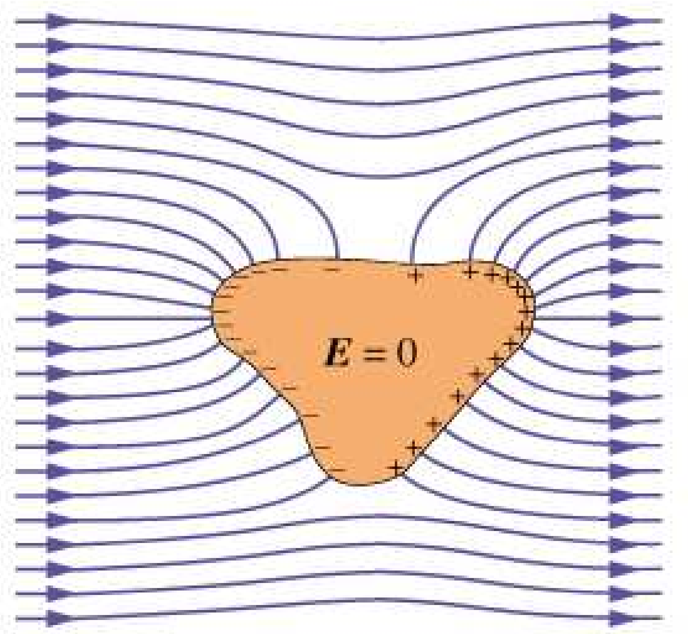
Plastica, vetro ecc.

Conduttori:

Metalli: Gli elettroni degli strati piu' esterni sono liberi di muoversi in tutto il conduttore. In un atomo isolato sono legati al proprio nucleo, all'interno di un metallo si muovono liberamente se sottoposti ad una forza . La densità netta di carica rimane comunque nulla.



Conduttore immerso in un campo elettrico

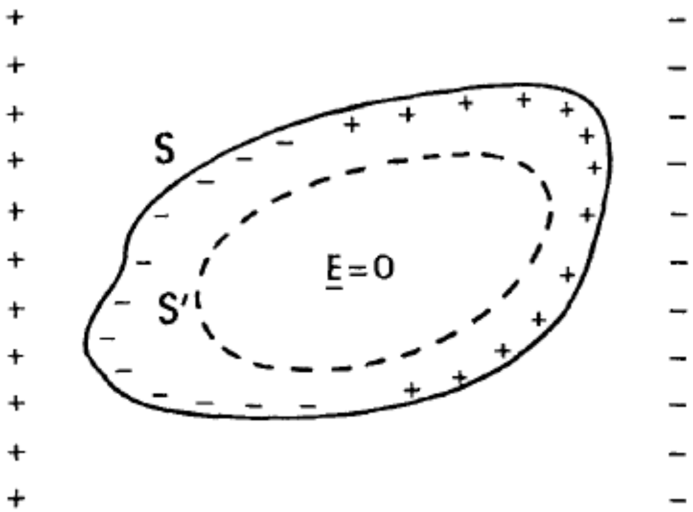


Gli elettroni interni al conduttore sono sottoposti alla forza del campo elettrico e si spostano

Si crea un ulteriore campo elettrico dovuto alla separazione degli elettroni dagli ioni. Questo campo è opposto a quello esterno, e aumenta fino a che non ci sono più forze all'interno del conduttore che spostano altri elettroni. All'equilibrio il campo netto all'interno del conduttore è nullo

All'equilibrio il campo elettrico interno a un conduttore e quello tangente alla superficie DEVONO essere nulli

Conduttore immerso in un campo elettrico



Le cariche in un conduttore immerso in un campo elettrico possono solamente accumularsi sulla superficie del conduttore stesso

Applichiamo il teorema di Gauss per dimostrarlo

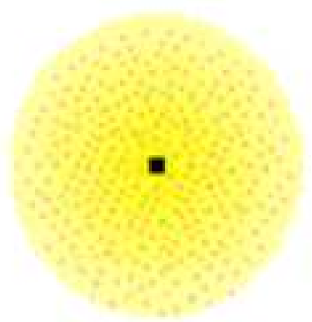
$$\oiint_{S'} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{S} = Q_{in} \quad \Longrightarrow \quad Q_{in} = 0$$

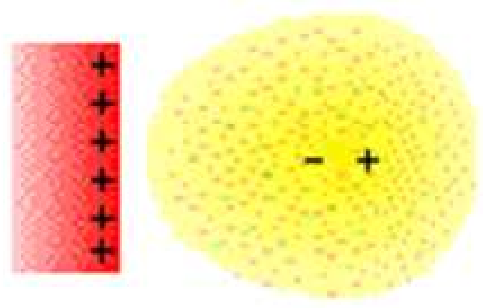
Se facciamo tendere ad S la superficie S' vedremo che la carica può solamente accumularsi sulla superficie esterna del conduttore

Dielettrico immerso in un campo elettrico

Nuvola elettronica in un atomo in assenza di campo Elettrico: l'atomo è neutro

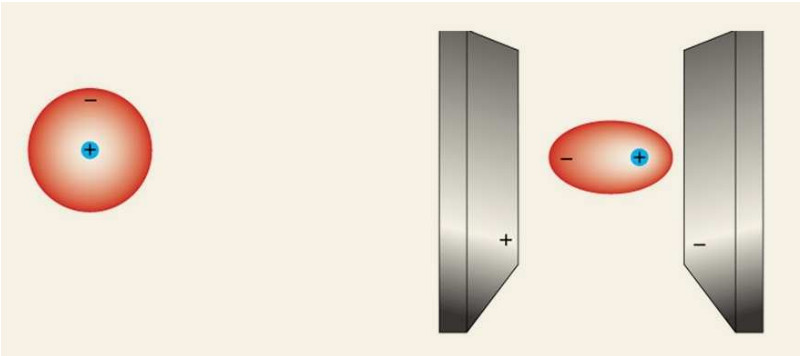
In presenza di un oggetto carico, ovvero di un campo elettrico, la nuvola si distorce e l'atomo diviene polare



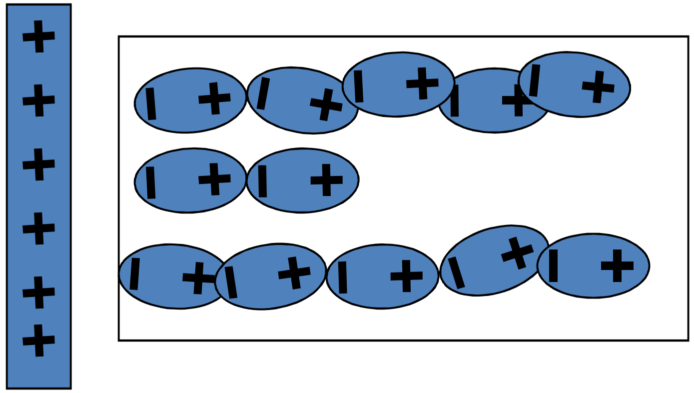


Induzione elettrostatica

Dielettrico immerso in un campo elettrico



Atomo sottoposto ad un campo elettrico



Gli atomi si polarizzano se sottoposti ad un campo esterno

La carica non si muove, ma si redistribuisce, polarizzando il materiale. Si crea un campo elettrico all’interno del materiale, dato dalla sovrapposizione dei campi create dai dipoli all'interno del materiale.

Polarizzazione di un dielettrico

All'interno di un dielettrico in presenza di un campo elettrico esterno possono avvenire diversi fenomeni di polarizzazione:

1) Polarizzazione atomica e molecolare: gli atomi e le molecole (es. NaCl) si polarizzano e si orientano secondo la direzione del campo elettrico esterno;
2) Polarizzazione per orientamento: le molecole già polarizzate (es. acqua) si orientano secondo la direzione del campo esterno;

A questi effetti se ne può aggiungere un altro:

3) Polarizzazione di carica spaziale (tipico dei tessuti biologici) anche detta polarizzazione ionica o interstiziale: le cariche libere di muoversi vengono spinte dal campo esterno, ma la presenza di ostacoli al loro libero fluire (membrane cellulari o altro tipo) creano degli accumuli di cariche positive e negative sui lati opposti di queste barriere creando dei dipoli orientati come il campo

In ognuno delle situazioni descritta sopra si creano dei dipoli ognuno con un proprio momento di dipolo. Data la sovrapposizione degli effetti è come se si creasse un momento di dipolo elettrico netto P che crea un campo che si sovrappone al campo esterno producendo una modifica dello stesso all’interno del materiale:

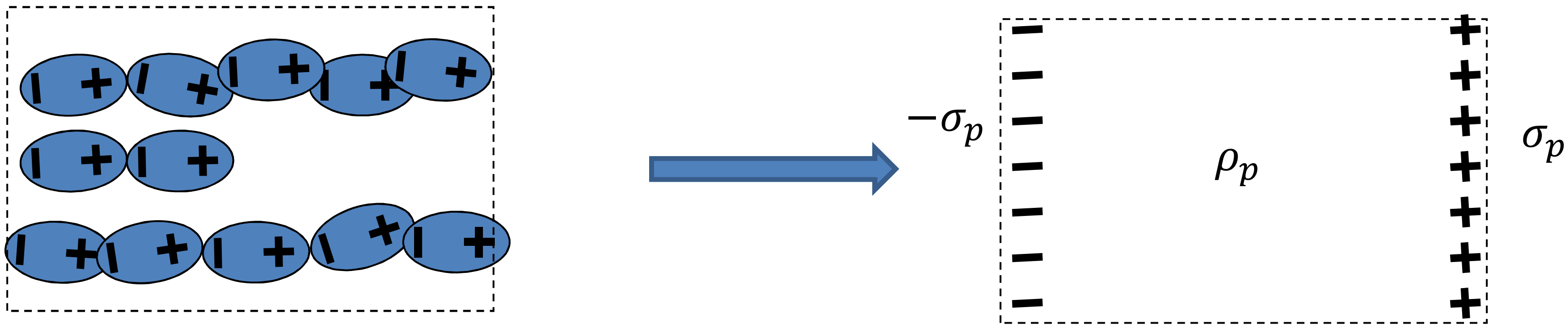
$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$$

Dielettrico immerso in un campo elettrico

Vediamo più in dettaglio il campo all'interno:

E' possibile dimostrare che il campo dovuto ai dipoli E$_{pol}$ è calcolabile come se fosse stato creato da una distribuzione di cariche che chiamiamo di polarizzazione:

1) Una distribuzione di cariche superficiali $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$
2) Una distribuzione di cariche di volume $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$ (questo se la polarizzazione non è uniforme all'interno del materiale)



Dielettrico immerso in un campo elettrico

Per calcolare il campo all'interno del dielettrico immerso in un campo elettrico applichiamo la legge di Gauss in forma differenziale ricordando che dobbiamo considerare tutte le cariche sia quelle libere che quelle indotte o di polarizzazione:

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho_l + \rho_p = \rho_l - \nabla \cdot \vec{P} \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} = \rho_l$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_l$$

E' dunque comodo introdurre un nuovo vettore che chiameremo Vettore di Spostamento elettrico che sarà legato solamente alle ***cariche libere***:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho_l}$$

Teorema di Gauss all'interno di un dielettrico

Legge di Gauss nei dielettrici

Il Teorema di Gauss per D dunque diventa

$$\Phi\left(\vec{D}\right) = \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

Ma quanto vale il campo elettrico E?

Consideriamo il vettore P, esso è legato al campo elettrico che ha polarizzato il mezzo. Nel caso di dielettrici isotropi, lineari ed omogenei è dimostrabile sperimentalmente che il vettore P è direttamente proporzionale al vettore E:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

χ_e Suscettività Elettrica

$$\Downarrow$$

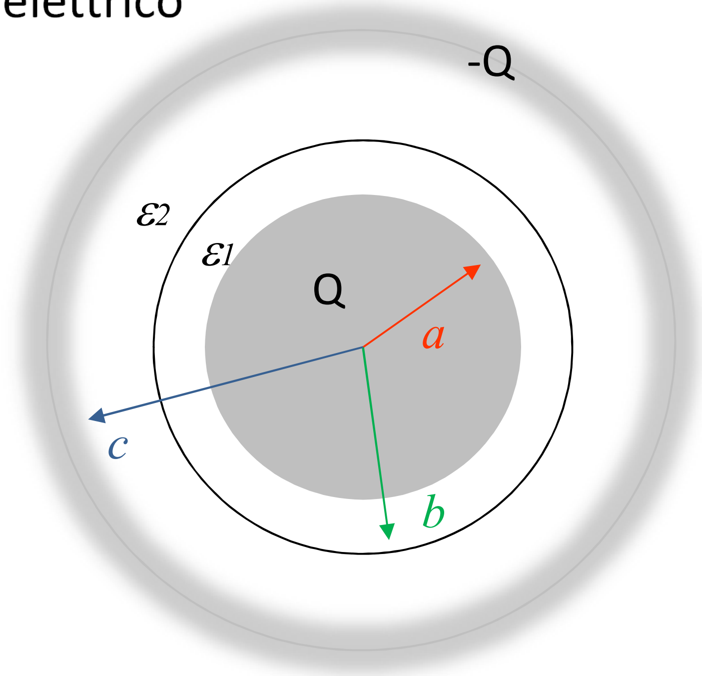
$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

$\varepsilon \; \left[\frac{F}{m}\right]$ Costante dielettrica del mezzo

ε_r Costante dielettrica relativa del mezzo

Esercizio: Elettrodi Sferici

Elettrodi sferici separati da due strati di materiale dielettrico



- Simmetrie radiale: campo radiale
- Sfera interna: Q; sfera esterna -Q

Applichiamo il th. Di Gauss ad una sfera intermedia tra le due senza considerare i due dielettici.

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad \Longrightarrow \quad D_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Il campo elettrico nei due mezzi sarà:

$$E_r = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_1} \quad se \quad a < r < b$$

$$E_r = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_2} \quad se \quad b < r < c$$