Metodo del "finto dato" per la determinazione della funzione generatrice di un bipolo

Prof. Simone Fiori
DII – Università Politecnica delle Marche
eMail: s.fiori@univpm.it

L'applicazione pratica dei teoremi (di caratterizzazione esterna di reti bipolari) di Thevenin e Norton si riconduce alla determinazione della funzione generatrice $f(v, i, t)$ del bipolo da caratterizzare. Si assume che i bipoli siano formati da componenti lineari tempo-invarianti (LTI) e da generatori indipendenti di tensione (GIT) e di corrente (GIC). Se l'analisi è condotta nel dominio dei fasori, si deve assumere che i generatori siano sinusoidali isofrequenziali.

Perché sia possibile applicare un teorema di caratterizzazione esterna ad un bipolo è necessario che questo sia *completo*, ovvero che tutte le reti 2-porte siano completamente contenute all'interno del bopolo e che i generatori controllati presenti all'interno del bipolo facciano riferimento a grandezze controllanti interne al bipolo stesso. Ad esempio, il bipolo mostrato nella Figura 1 è completo perché la rete 2-porte in configurazione "Z" è completamente contenuta all'interno del bipolo stesso. Al contrario, il bipolo

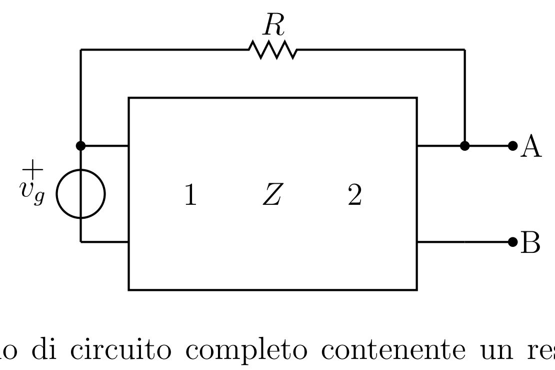

Figura 1: Esempio di circuito completo contenente un resistore, un GIT e una rete 2-porte in configurazione "Z".

mostrato nella Figura 2 *non* è completo perché la rete 2-porte giratore *non* è completamente contenuta all'interno del bipolo stesso.

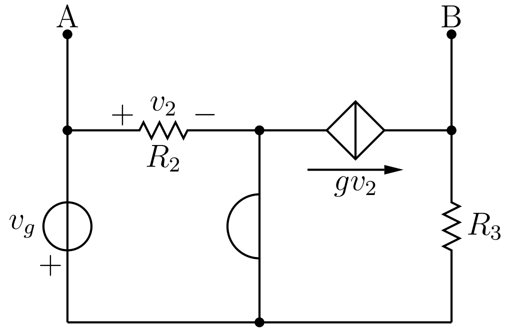

Figura 2: Esempio di circuito incompleto contenente due resistori, un GIT, un GCCT (completo) e un giratore incompleto.

Esistono due metodi distinti per la determinazione dei parametri dei circuiti equivalenti di Thevenin e Norton:

- **Metodo puramente circuitale**: E' il metodo classico che ha alcuni svantaggi, tra i quali la necessità di risolvere due circuiti distinti per un bipolo da caratterizzare.
- **Metodo puramente algebrico**: E' il metodo moderno, basato sull'applicazione del Teorema dei determinanti di Cramer.

Anche in vista della risoluzione tramite uno strumento di calcolo (ad esempio MATLAB), è preferibile utilizzare il metodo algebrico, detto del "finto dato", oggetto della presente nota.

1 Il metodo del "finto dato": Partiamo da un esempio

Consideriamo il bipolo mostrato nella Figura 3 e determiniamone la funzione generatrice.

Passo 1: Dato che i metodi di analisi circuitale (MABM e MABN) si applicano a circuiti e non a bipoli, chiudiamo il bipolo da caratterizzare con un bipolo inteterminato β, come mostrato nella Figura 4. Conviene osservare che la tensione v ai capi del bipolo β coincide con la tensione ai capi del bipolo del quale vogliamo determinare la funzione generatrice, così come la corrente

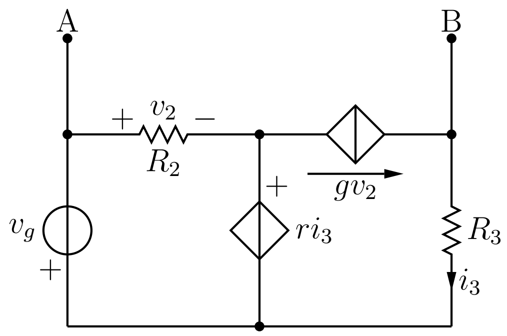

Figura 3: Esempio di circuito per l'applicazione del metodo del "finto dato". I dati del problema sono R_2 (Ω), R_3 (Ω), v_g (V), r (Ω) e g (S) e si vuole determinare la funzione generatrice del bipolo.

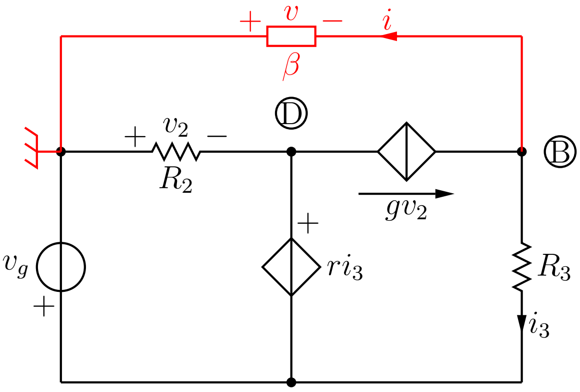

Figura 4: Esempio di circuito per l'applicazione del metodo del "finto dato": chiusura con un bipolo indeterminato β ed inserimento, nel disegno, delle informazioni relative all'applicazione del MABN scelto per la risoluzione del problema.

i che scorre sul bipolo indeterminato β coincide con la corrente del bipolo del quale vogliamo determinare la funzione generatrice. Tuttavia, mentre la coppia (v, i) è coordinata sul bipolo del quale vogliamo determinare la funzione generatrice, essa risulta necessariamente *scoordinata* sul bipolo β.

Passo 2: Il circuito così ottenuto può essere studiato tramite il MABM o tramite il MABN (in generale, puri o misti, nel tempo o ai fasori). In ogni caso, l'applicazione del metodo di analisi prescelto condurrà ad un sistema risolvente di tipo algebrico. E', ora, importante osservare che, a differenza di quanto accade quando si applica un metodo di analisi nella risoluzione "ordinaria" di un circuito, nel caso presente il sistema risolvente risulta necessariamente *sotto-determinato*. In particolare, certamente **il numero di**

incognite eccederà sempre di 1 il numero di equazioni. Per esempio, nel caso del circuito di Figura 4, il sistema risolvente si scrive:

$$\begin{cases} G_3(e_B - v_g) - g(-e_D) + i = 0, \\ e_D - v_g = rG_3(e_B - v_g), \\ v = -e_B. \end{cases} \tag{1}$$

Il sistema è formato da 3 equazioni ma contiene 4 incognite (e_B, e_D, v, i). L'equazione mancante è la relazione costitutiva che del bipolo β che, essendo quest'ultimo indeterminato, non è nota e non può essere inserita nel sistema.

Evidentemente, il sistema risolvente che, in generale, contiene n equazioni in $n+1$ incognite, non può essere risolto, a meno di non considerare una delle incognite (scelta tra v e i) come quantità "nota". *Si tratta, tuttavia, di una quantità che non è realmente nota, in quanto non fa parte dei dati del problema, e viene definita "finto dato".*

Passo 3: Scegliamo la corrente di bipolo i come "finto dato" e scriviamo il sistema risolvente in forma matriciale prendendo come incognite v, e_D, e_B:

$$\begin{bmatrix} G_3 & g & 0 \\ -rG_3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_B \\ e_D \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_3 v_g - i \\ (1 - rG_3) v_g \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Si noti che:

- l'incognita v è stata posta in ultima posizione all'interno del vettore delle incognite: questa scelta facilita l'utilizzo del metodo di Cramer per determinarla;
- l'incognita i (il "finto dato") fa parte del vettore dei termini noti (compare, infatti, a destra del segno =).

Passo 4: Si applica il metodo di Cramer per determinare l'incognita v. In questo caso, il metodo fornisce:

$$v = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} G_3 & g & G_3 v_g - i \\ -rG_3 & 1 & (1 - rG_3) v_g \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} G_3 & g & 0 \\ -rG_3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)} = \frac{i + [g - G_3(1 + rg)] v_g}{(1 + rg) G_3}, \tag{3}$$

o, equivalentemente:

$$-(1+rg)G_3v + i + [g-(1+rg)G_3]v_g = 0. \tag{4}$$

L'equazione ottenuta vincola tra loro la tensione v e la corrente i di bipolo incognite (le altre grandezze che vi compaiono sono quantità note), pertanto, per definizione, è la *relazione costitutiva* del bipolo che si vuole caratterizzare. In altri termini, la funzione

$$f(v,i,t) = -(1+rg)G_3v + i + [g-(1+rg)G_3]v_g(t) \tag{5}$$

è una funzione generatrice del bipolo[1].

2 Il metodo del "finto dato": Generalità

I passi visti nella sezione precedente sono relativi a un esempio specifico ma possono essere generalizzati ad una ampia gamma di circuiti. Inoltre, tali passi contengono alcune informazioni di carattere generale che ora si vogliono rendere esplicite.

Dopo aver svolto i passi da 1 a 3, si ottiene un sistema risolvente algebrico del tipo $Mx = d$ dove M è una matrice $n \times n$ contenente solo termini noti, x è il vettore (matrice $n \times 1$) delle incognite che contiene, in ultima posizione, la tensione di bipolo v se si è scelta la corrente i come "finto dato" (oppure la corrente di bipolo i se si è scelta v come "finto dato"), e d è un vettore (matrice $n \times 1$) di termini noti che contiene anche il "finto dato" i (oppure v). Per fissare le idee, assumiamo, come nella sezione precedente, i come "finto dato".

Dall'esempio precedente si può osservare che il vettore d può sempre essere scritto come $d = \ell + hi$, dove ℓ e h sono vettori $n \times 1$ completamente noti. In altri termini, il sistema risolvente assume la forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \dots & m_{2n} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \dots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ v \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \vdots \\ \ell_n \end{bmatrix}}_{\ell} + \underbrace{\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}}_{h} i. \tag{6}$$

[1] Si ricorda che un bipolo ha infinite funzioni generatrici.

Per esempio, dal sistema risolvente (3), si trova:

$$\ell = \begin{bmatrix} G_3 v_g \\ (1 - rG_3)v_g \\ 0 \end{bmatrix}, \ h = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Ora, per applicare il teorema di Cramer per ricavare l'incognita v dal sistema risolvente generale (6), è necessario partizionare la matrice M e, in particolare, è necessario definire la sotto-matrice N (rettangolare, di dimensioni $n \times n - 1$ come:

$$N = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1(n-1)} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \dots & m_{2(n-1)} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \dots & m_{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \dots & m_{n(n-1)} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Per esempio, nel sistema risolvente (3), si trova:

$$N = \begin{bmatrix} G_3 & g \\ -rG_3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Il metodo di Cramer fornisce

$$v = \frac{\det([N|d])}{\det(M)} = \frac{\det([N|\ell + hi])}{\det(M)}, \tag{10}$$

dove il simbolo | indica concatenazione per colonne. Ricordiamo che l'operatore "determinante" (det) non è lineare, ovvero $\det(A+B) \neq \det(A)+\det(B)$, tuttavia, se una singola colonna è una combinazione lineare di due colonne, vale una proprietà di *linearità limitata*, ovvero, nel caso in esame, si può scrivere che

$$\det([N|\ell + hi]) = \det([N|\ell]) + i \det([N|h]). \tag{11}$$

Sostituendo questa relazione nella equazione (10) e riordinando i termini, si ottiene:

$$-v + \frac{\det([N|\ell]) + i \det([N|h])}{\det(M)} = 0. \tag{12}$$

Dato che risulta certamente $\det(M) \neq 0$, è possibile moltiplicare ambo i membri della relazione precedente per $\det(M)$, ottenendo così la relazione costitutiva del bipolo da caratterizzare:

$$f(v, i, t) = -\det(M)v + \det([N|h])i + \det([N|\ell]). \tag{13}$$

Notiamo, allora, che il bipolo da caratterizzare è di tipo *affine*, ovvero la sua funzione generatrice è del tipo $f(v, i, t) = a\, v + b\, i + c(t)$, dove a e b sono costanti (non dipendono da v, i o t), mentre c non dipende da v né da i ma, in generale, dipende dal tempo t (infatti, essa contiene i valori dei GIT/GIC presenti all'interno del bipolo).

Nell'esempio della sezione precedente, si ha:

$$
\begin{aligned}
&\det(M) = (1 + rg)G_3, \\
&\det([N|\ell]) = \det\left(\begin{bmatrix} G_3 & g & G_3 v_g \\ -rG_3 & 1 & (1 - rG_3)v_g \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = [g - (1 + rg)G_3]v_g(t), \\
&\det([N|h]) = \det\left(\begin{bmatrix} G_3 & g & -1 \\ -rG_3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1,
\end{aligned}
$$

pertanto, la funzione generatrice affine (13) coincide con la funzione generatrice (5) determinata nella sezione precedente.