Legge di Ampère rivista: la legge di Ampère-Maxwell

- James Clerk Maxwell (1831-1879) diede una trattazione unitaria e sistematica dei risultati di Faraday, Ampère e Gauss. Le forme differenziali che abbiamo visto sono sue….

- Si accorse che la legge di Ampère, così come scritta, aveva una limitazione gravissima: contraddiceva il principio di conservazione della carica !!

Le contraddizioni della legge di Ampere

Si consideri l'equazione di Ampere in forma differenziale per i casi statici e se ne operi la divergenza. E' noto che, per le note proprietà vettoriali, il risultato è nullo:

$$\nabla \times \vec{\mathrm{H}} = \vec{\mathrm{J}} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \nabla \times \vec{\mathrm{H}} = 0 = \nabla \cdot \vec{\mathrm{J}}$$

Ma, per i casi dinamici, si ha:

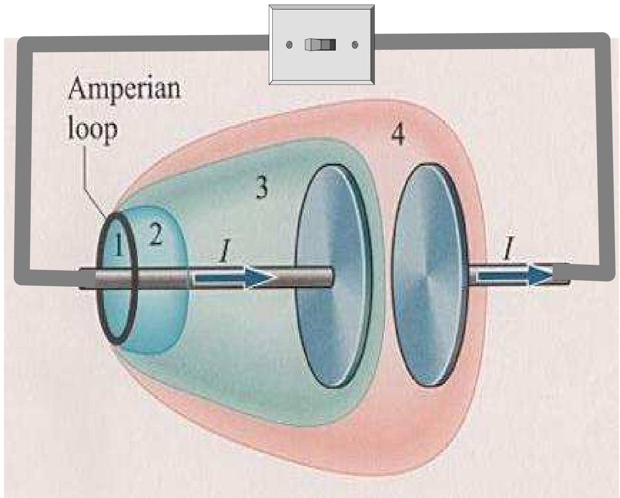
$$\oint_S \vec{\mathrm{J}} \cdot d\mathrm{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{\mathrm{J}} dV = -\frac{dQ}{dt} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{\mathrm{J}} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$$

Quindi, Maxwell immaginò che nella legge di Ampere mancasse un termine che si annullasse soltanto in condizioni statiche e che Maxwell definì "corrente di spostamento".

Le contraddizioni della legge di Ampere

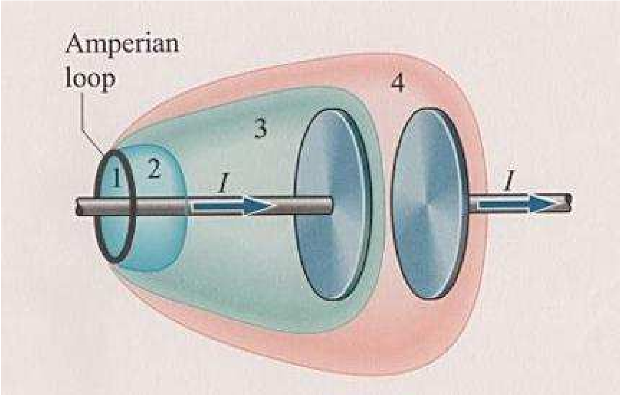
Un altro caso contraddittorio riguarda un semplice condensatore alimentato da un generatore variabile nel tempo. Dalla legge di Ampere sappiamo che, fissato un percorso chiuso che delimiti una superficie, la circuitazione è uguale alla corrente che "taglia" la superficie stessa:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{S_3} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{S_4} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$



Ma, nel caso in questione, dobbiamo porci la domanda se la legge di Ampere è rispettata per tutte le superfici S_2, S_3, S_4. In realtà, soltanto gli integrali sulle superfici S_2 e S_4 danno lo stesso valore, I, mentre la superficie S_3 non "taglia" alcun valore di densità di corrente di conduzione, non essendo presente, tra le armature del condensatore tale corrente.
Come risolvere il problema?

Corrente di spostamento



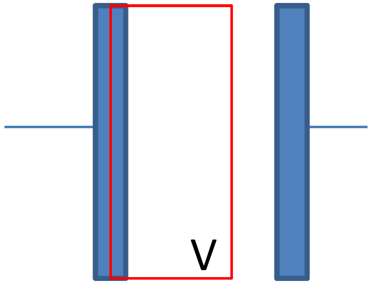
A= Area delle armature del condensatore

Anche in questo caso Maxwell ipotizzo che affinchè il risultato della circuitazione fosse sempre lo stesso indipendentemente dalla superficie scelta dovesse esistere una <u>corrente di spostamento uguale a quella di conduzione.</u>

Calcoliamo la corrente di conduzione in funzione della carica sul condensatore.

$$I_c = \int_{S_2} \vec{J}_c \cdot d\vec{S} = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

Corrente di spostamento



Calcoliamo la carica all'interno dell'armatura del condensatore utilizzando il volume V in figura. Come vediamo una faccia del volume V è immersa all'interno dell' armatura dove il campo è nullo e l'altra è immersa nel dielettrico

$$Q = \int_V \rho dV = \int_V \nabla \cdot \vec{D} dV = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$\Downarrow$$

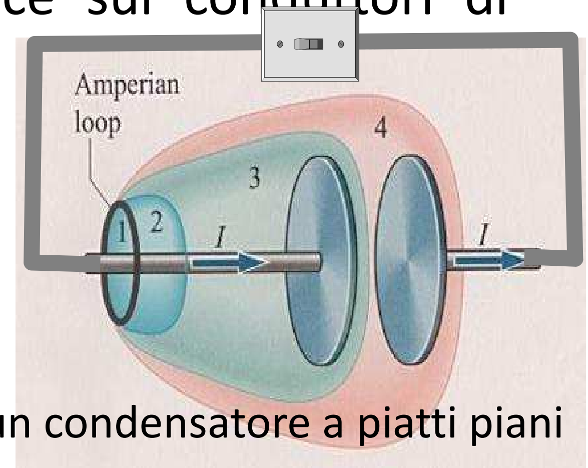
$$I_c = \frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Da questo semplice esempio possiamo ricavare l'espressione della densità di corrente di spostamento

$$\vec{J}_d = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \qquad \left[\frac{C}{s \cdot m^2} = \frac{A}{m^2} \right]$$

Verifica dell'esistenza della corrente di spostamento

Calcoliamo la corrente di conduzione nel circuito di carica del condensatore. Ricordando che la capacità è una caratteristica puramente geometrica del condensatore e del mezzo dielettrico che lo riempie, ne consegue che la carica sulle armature deve variare nel tempo. Possiamo quindi esprimere la corrente di alimentazione del condensatore (corrente di conduzione che fluisce sui conduttori di alimentazione) come:



$$\frac{Q}{V(t)} = \frac{\int I_c(t)dt}{V(t)} = C \Rightarrow I_c(t) = C\frac{dV(t)}{dt}$$

Calcoliamo la corrente di spostamento appena introdotta per un condensatore a piatti piani e paralleli

$$I_d(t) = \frac{d}{dt}\int_{S_{armatura}} \vec{D}(t)\cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt}\int_{S_{armatura}} \varepsilon\frac{V(t)}{d}dS = \varepsilon\frac{S_{armatura}}{d}\frac{dV(t)}{dt} = C\frac{dV(t)}{dt}$$

Come vediamo è esattamente identica a quella di conduzione

Legge di Ampère rivista: la legge di Ampère-Maxwell

- Maxwell postulò dunque che dovesse esistere un altro termine nella legge di Ampère che sparisce in assenza di variazioni temporali, ovvero

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$$

- Il termine aggiuntivo si definisce corrente di spostamento

- Se ora calcoliamo la divergenza della legge così modificata, ricordando la legge di Gauss,

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{H} = 0 = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

- Cioè proprio il principio di conservazione (o di continuità) di carica
- Come vediamo l’espressione per la corrente di spostamento ricavata in un esempio particolare (condensatore) ha una validità generale

Considerazioni finali

Un campo elettrico è prodotto:

- o da cariche elettriche
- o da un campo magnetico che varia nel tempo

Un campo magnetico è prodotto:

- o da cariche elettriche in movimento (correnti)
- o da un campo elettrico che varia nel tempo

Possiamo avere un campo elettrico dove non ci sono cariche ed un campo magnetico dove non ci sono correnti

Equazioni di Maxwell

sorgenti

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times H = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

sorgenti

Forza di Lorentz $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$

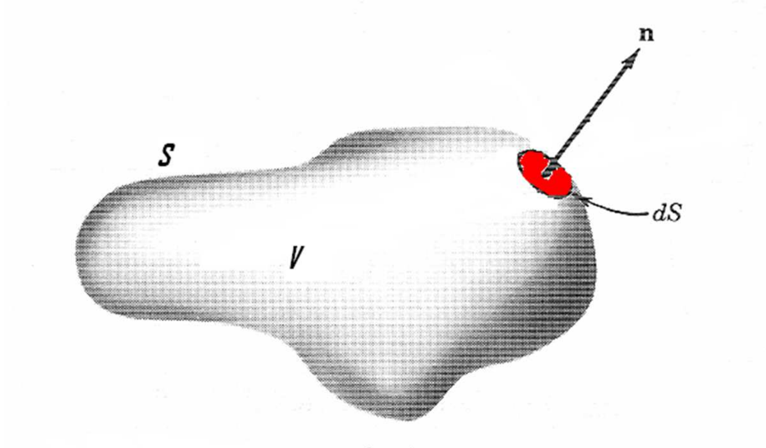
Equazioni di Maxwell in forma integrale

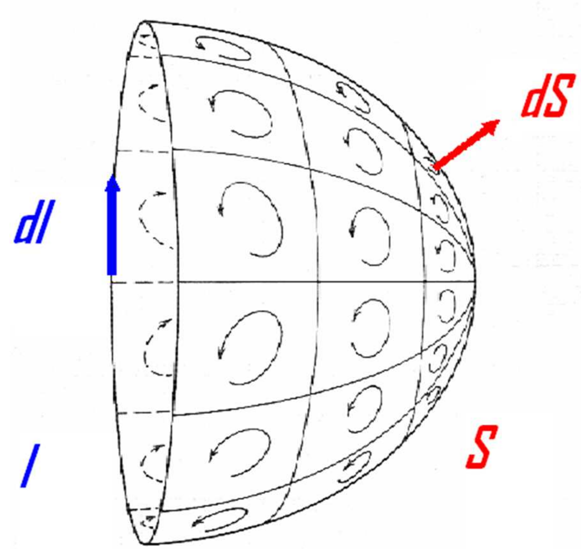
$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \, dV$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$





$$\vec{J} = \vec{J}_c + \vec{J}_i$$

$$\vec{J}_c = \sigma \; \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \; \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \; \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

$$\mu_0 = 4\pi \; 10^{-7} \; \left[H / m\right]$$

$$\varepsilon_0 = 8.854 \; 10^{-12} \; \left[F / m\right]$$

$$\left[D\right] = \left[C / m^2\right]$$

$$\left[\rho\right] = \left[C / m^3\right]$$

$$\left[B\right] = \left[Wb / m^2\right] = \left[T\right]$$

$$\left[E\right] = \left[V / m\right]$$

$$\left[H\right] = \left[A / m\right]$$

$$\left[J\right] = \left[A / m^2\right]$$

$$\left[\sigma\right] = \left[S / m\right]$$