

Le equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} = -j\omega \mu \vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} = \vec{J} + j\omega \varepsilon \vec{E}$$

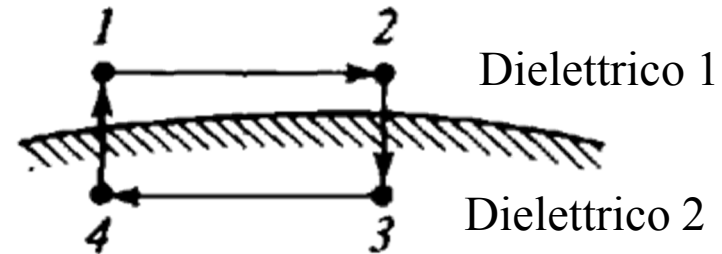
$$\nabla \cdot \vec{J} + j\omega \rho = 0$$

Condizioni al contorno

- Abbiamo le equazioni differenziali. Quali sono le condizioni al contorno?
- Come si devono comportare i campi quando incontrano un materiale diverso?
- Le equazioni di Maxwell valgono ovunque: usiamo la loro forma integrale e vediamo che vincoli devono rispettare le soluzioni delle equazioni differenziali (valide nel “punto”)

Condizioni al contorno: continuità componente elettrica tangenziale

- Supponiamo di avere due mezzi, caratterizzati da permittività (ϵ_1, μ_1) e (ϵ_2, μ_2) , rispettivamente



- Decomponiamo il campo nelle sue componenti tangenziali (E_t) ed ortogonali (E_n) alla superficie di separazione
- Usiamo la legge di Faraday, applicata ad un percorso rettangolare intorno all'interfaccia

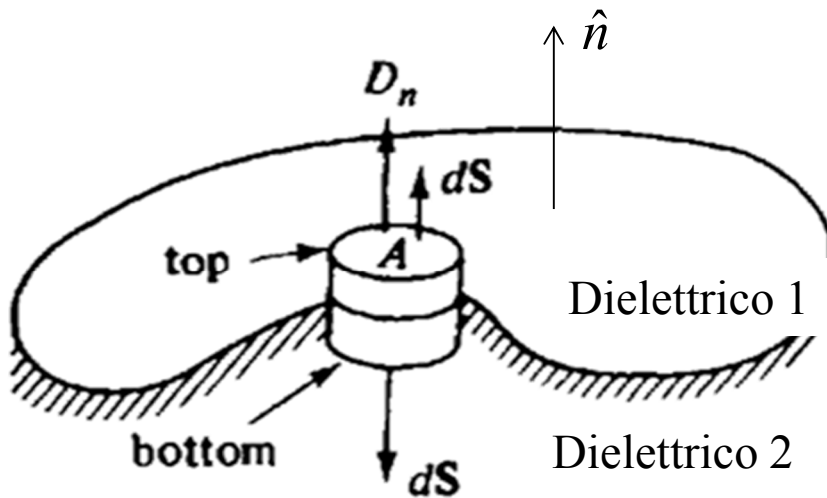
$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_2^3 \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_3^4 \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_4^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 E_{t1} dl + \int_2^3 E_n dl + \int_3^4 E_{t2} dl + \int_4^1 E_n dl = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

- Riduciamo l'altezza del rettangolo fino a renderla infinitesima: il contributo alla circuitazione di E_n diventa nullo, come il flusso Φ_B per cui

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (E_{t1} - E_{t2})\Delta l = -\partial_t \Phi_B = 0$$

- Quindi la componente tangenziale di E deve essere continua all'interfaccia

Condizioni al contorno: componente elettrica normale



Applichiamo il teorema di Gauss ad un cilindretto a cavallo della superficie di separazione:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}}$$

$$\int_{\text{top}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{bottom}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{side}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_A \rho_s dS$$

Se facciamo tendere a zero l'altezza del cilindro, il flusso attraverso la sup. laterale è nullo e dunque l'integrale dipende solamente dalle componenti normali del campo.

$$\int_{\text{top}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{bottom}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{top}} D_{n,1} dS - \int_{\text{bottom}} D_{n,2} dS = \int_S \rho_s dS$$

Cioè definendo \hat{n} la normale alla superficie del dielettrico 2 come in figura

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = D_{n,1} - D_{n,2} = \rho_s$$

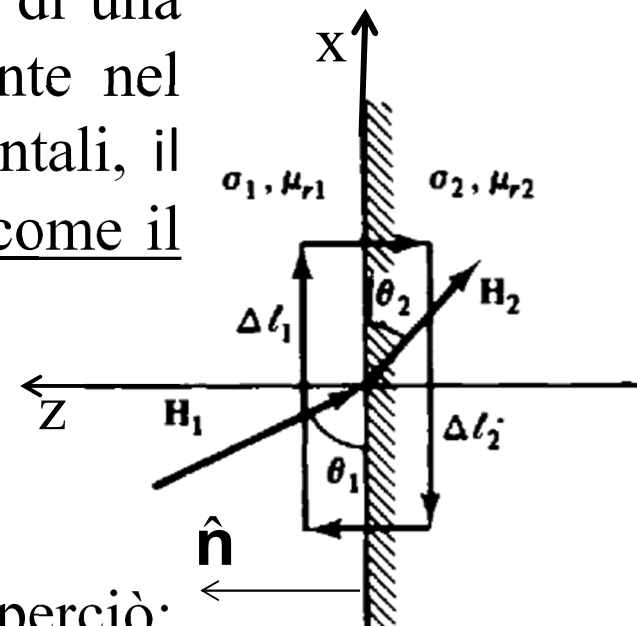
Quindi, il campo \mathbf{D} normale ad una superficie di separazione dielettrica si mantiene costante soltanto in assenza di cariche superficiali.

Il campo \mathbf{E} normale è sempre discontinuo, anche in assenza di cariche.

Condizioni al contorno: componente magnetica tangenziale

Applichiamo la legge di Ampere ad un percorso rettangolare che racchiude due mezzi, in presenza di una densità di corrente superficiale J_s lungo y , entrante nel foglio. Facciamo tendere a zero i cammini orizzontali, il contributo alla circuitazione di H_n diventa nullo, come il flusso Φ_D :

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{x,1} \Delta l_1 - H_{x,2} \Delta l_2 = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{\partial \Phi_D}{\partial t} = I$$



I cammini verticali tendono così ad essere uguali e perciò:

$$(H_{x,1} - H_{x,2}) \Delta l = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = I \Rightarrow H_{x,1} - H_{x,2} = \frac{I}{\Delta l} = J_s$$

Poiché x è la coordinata tangente alla superficie, e definendo \mathbf{n} la normale alla superficie 2 (coincidente con \mathbf{z}), si può scrivere:

$$H_{tg,1} - H_{tg,2} = J_s \Rightarrow \vec{J}_s = \hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)$$

In assenza di correnti: $H_{tg,1} = H_{tg,2}$

Condizioni al contorno: continuità componente elettrica B normale

Applichiamo il teorema di Gauss ad un cilindretto a cavallo della superficie di separazione:

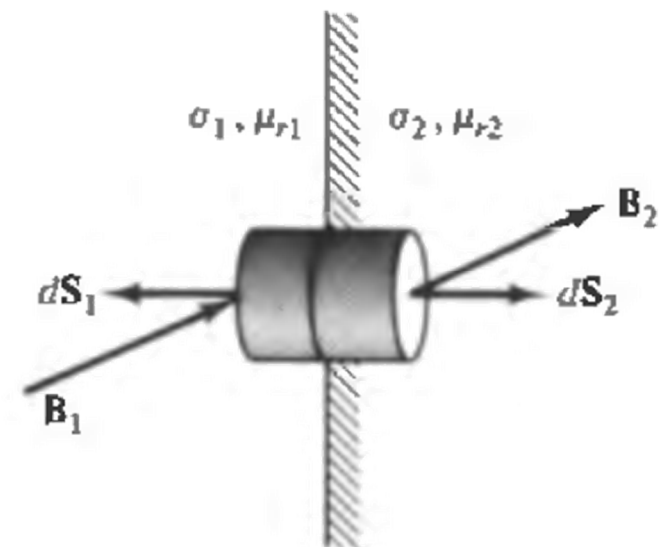
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{end 1}} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \int_{\text{cyl}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{end 2}} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 = 0$$

Se l'altezza del cilindretto tende a zero, il flusso sulla sup. laterale si annulla e le due superfici di base tendono a coincidere. Inoltre, se le sup. di base tendono a zero, possiamo supporre B_{n1} e B_{n2} costanti su dS_1 e dS_2 .

$$\begin{aligned} \int_{\text{end 1}} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \int_{\text{end 2}} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 &= 0 \\ -B_{n1} \int_{\text{end 1}} dS_1 + B_{n2} \int_{\text{end 2}} dS_2 &= 0 \end{aligned}$$

Perciò:

$$B_{n1} = B_{n2} \Rightarrow \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}$$



Condizioni al contorno: cosa succede in prossimità di un conduttore ideale?

- Il campo elettrico interno è nullo, così come il campo magnetico visto che non ci sono correnti
- Sicuramente ci sono cariche e correnti superficiali

$$\hat{n} \times \vec{E} = 0$$

Campo elettrico **tangenziale** nullo

$$\hat{n} \cdot \vec{B} = 0$$

Campo di induzione magnetica **normale** nullo

$$\hat{n} \cdot \vec{D} = \sigma_s$$

Campo induzione elettrica **normale** pari alla densità superficiale di carica

$$\hat{n} \times \vec{H} = \vec{J}_s$$

Campo magnetico **tangenziale** pari alla densità di corrente superficiale

Teorema di Poynting nel dominio del tempo

Il teorema di Poynting è un teorema fondamentale nell'elettromagnetismo perché stabilisce le relazioni energetiche di un campo elettromagnetico. Esso parte dalla definizione del “vettore di Poynting” che rappresenta la densità di potenza per unità di superficie associata ad un campo e.m.

$$\vec{P}(\mathbf{r}, t) = \vec{E}(\mathbf{r}, t) \times \vec{H}(\mathbf{r}, t) \quad [P] = \frac{V}{m} \frac{A}{m} = \frac{W}{m^2}$$

Nomenclatura alternativa:

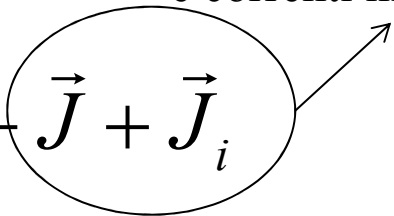
$$\vec{S}(\mathbf{r}, t) = \vec{E}(\mathbf{r}, t) \times \vec{H}(\mathbf{r}, t) \quad [P] = \frac{V}{m} \frac{A}{m} = \frac{W}{m^2}$$

Relazioni energetiche in un campo elettromagnetico: teorema di Poynting

Le equazioni del rotore sono in questo caso

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \vec{J} + \vec{J}_i$$

Correnti di conduzione
e correnti impresse



Calcoliamo la divergenza del vettore di Poynting

$$\nabla \cdot \vec{P} = \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H}$$

Sostituiamo a secondo membro le eq di Maxwell

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{P} = -\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J} - \vec{E} \cdot \vec{J}_i$$

Relazioni energetiche in un campo elettromagnetico: teorema di Poynting

$$\nabla \cdot \vec{P} = -\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J} - \vec{E} \cdot \vec{J}_i$$

- Immaginiamo che le correnti indotte \vec{J} fluiscano in un conduttore con conducibilità σ : la legge di Ohm

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = \sigma E^2$$

- Inoltre, per mezzi lineari, isotropi, senza memoria

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

Esprime la conservazione dell'energia

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{P} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) + \sigma E^2 = -\vec{E} \cdot \vec{J}_i$$

densità di energia del campo
elettromagnetico

densità di potenza
dissipata per effetto
termico

densità di potenza fornita
dal generatore

Relazioni energetiche in un campo elettromagnetico: teorema di Poynting

- Integriamo su un volume per ricavarne la forma integrale: applichiamo il teorema della divergenza

$$\oiint_S \vec{P} \cdot \hat{n} ds + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) dV + \iiint_V \sigma E^2 dV = - \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J}_i dV$$

- *Il primo termine è un flusso di energia nel volume per unità di tempo*
- Allora, rileggendo il teorema di Poynting come conservazione dell'energia, leggiamo l'equazione di sopra dicendo che l'energia che forniamo nell'unità di tempo ad una certa regione deve essere uguale alla somma di
 - Potenza dissipata per effetto Joule nei conduttori
 - Potenza immagazzinata dal campo elettromagnetico in tale regione
 - Potenza netta portata via attraverso la superficie di bordo S della regione V dalle onde elettromagnetiche

Vettore di Poynting

Il vettore di Poynting \mathbf{P} è un vettore che rappresenta la direzione e l'intensità della densità di potenza per unità di superficie (ovvero del flusso della densità di energia per unità di tempo e di superficie) associata ad un campo e.m.

$$\vec{P}(\mathbf{r}, t) = \vec{E}(\mathbf{r}, t) \times \vec{H}(\mathbf{r}, t) \quad [P] = \frac{V}{m} \frac{A}{m} = \frac{W}{m^2}$$

Si osservi che il flusso del vettore di Poynting può essere anche nullo e ciò avviene quando:

- \mathbf{E} ed \mathbf{H} sono paralleli
- \mathbf{E} o \mathbf{H} sono nulli
- siamo in condizioni statiche (\mathbf{E} ed \mathbf{H} esistono indipendentemente l'uno dall'altro)

Valor medio del vettore di Poynting

Se ipotizziamo delle variazioni periodiche dei campi e.m. (tipo sinusoidali), ci possiamo aspettare che il vettore di Poynting \mathbf{P} sia periodico anch'esso. In tal caso, si definisce il valor medio del vettore di Poynting come:

$$\vec{P}_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{P}(\mathbf{r}, t) dt$$

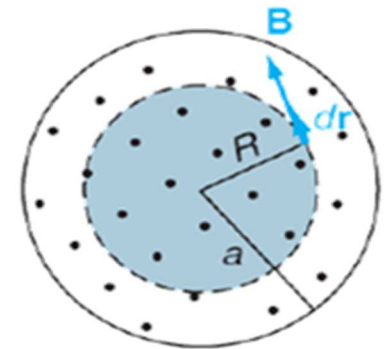
Il valor medio di \mathbf{P} rappresenta la densità di potenza che può essere utilizzata per effettuare dei “cambi energetici” ovvero la densità di potenza associata ad un campo e.m. che può essere trasformata in:

- calore (forno a microonde)
- accensione della lampadina (luce)
- funzionamento degli elettrodomestici
- trasmissione (e ricezione) di segnali radio, TV, telefonici, analogici o digitali
- ...

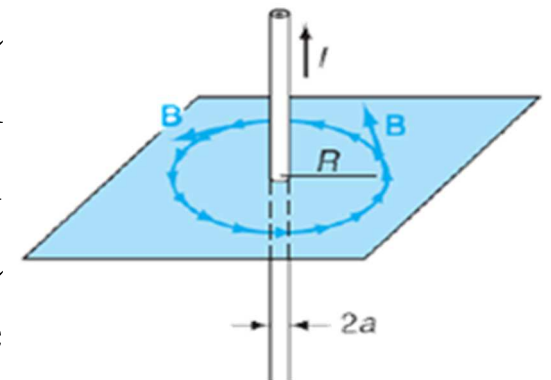
Vettore di Poynting in un filo conduttore reale 1/3

Si consideri un conduttore reale ($\sigma \neq \infty$) in cui fluisca una corrente I . Abbiamo già determinato sia E che H al suo interno. Valutiamo il vettore di Poynting:

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{J_z}{\sigma} \hat{z} \times \frac{ir}{2\pi R^2} \hat{\phi} = \frac{J_z}{\sigma} \hat{z} \times \frac{J_z r}{2} \hat{\phi} = -\frac{J_z^2}{2\sigma} \hat{r}$$

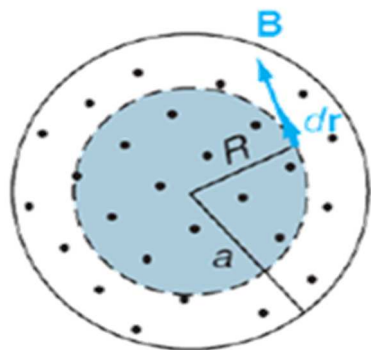


Esso risulta diretto radialmente verso l'interno del conduttore cilindrico reale e rappresenta una potenza entrante nel conduttore. Quindi il conduttore reale non genera un flusso di potenza verso l'esterno, ma, al contrario, richiede che un generatore esterno fornisca la potenza che deve entrare nel suo interno. Che fine fa tale potenza?



Vettore di Poynting in un filo conduttore reale 2/3

Valutiamo l'intera potenza che entra nel conduttore cilindrico considerando dapprima una superficie di raggio r concentrica al conduttore



$$\begin{aligned}\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} &= \int_{Sup.Base1} \vec{P} \cdot d\vec{S} + \int_{Sup.Base2} \vec{P} \cdot d\vec{S} + \int_{Sup.Lat.} \vec{P} \cdot d\vec{S} = \\ &= 0 + 0 + \int_{Sup.Lat.} \left(-\frac{J_z^2 r}{2\sigma} \hat{r} \right) \cdot dS \hat{r} = -\frac{J_z^2 r}{2\sigma} 2\pi r L = -\frac{J_z^2}{\sigma} \pi r^2 L = \\ &= -\frac{\left(\frac{I}{\pi a^2} \right)^2}{\sigma} \pi r^2 L = -\rho \frac{I^2 r^2}{\pi a^4} L\end{aligned}$$

Vettore di Poynting in un filo conduttore reale 3/3

La potenza totale che entra nel conduttore si ottiene per $r=a$.

$$W = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\rho \frac{I^2}{\pi a^2} L = -\rho \frac{L}{S} I^2 = -RI^2$$

Quindi, la potenza valutata tramite il vettore di Poynting coincide esattamente con la potenza dissipata per effetto Joule all'interno del conduttore stesso. Inoltre, essa risulta negativa perché è una potenza dissipata nel volume considerato e non generata da esso.

Vettore di Poynting nel dominio dei fasori

Calcolare il vettore di Poynting nel dominio dei fasori, non equivale a calcolare il fasore del vettore

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$$

dato che l'operazione prodotto vettoriale è un'operazione **non lineare** e il segnale risultante non ha la stessa pulsazione dei segnali originali

Nel campo complesso il vettore di poynting si modifica, vediamo come.

Vettore di Poynting nel dominio dei fasori

Calcoliamo il vettore di Poynting nel dominio complesso, provando a manipolare le equazioni di Maxwell

$$\left\{ \bar{H}^* \cdot (\nabla \times \bar{E} = -j\omega \bar{B}) \right\} -$$
$$\left\{ \bar{E} \cdot (\nabla \times \bar{H}^* = \bar{J}^* - j\omega \bar{D}^*) \right\} =$$

$$\bar{H}^* \cdot \nabla \times \bar{E} - \bar{E} \cdot \nabla \times \bar{H}^* = -j\omega \bar{H}^* \cdot \bar{B} - \bar{E} \cdot \bar{J}^* + j\omega \bar{E} \cdot \bar{D}^*$$

da cui si ricava

$$\nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{H}^*) = -j\omega \bar{H}^* \cdot \bar{B} + j\omega \bar{E} \cdot \bar{D}^* - \bar{E} \cdot \bar{J}^*$$

Vettore di Poynting nel dominio dei fasori

Applichiamo, come fatto nel dominio del tempo l'integrale di volume all'equazione trovata.

Facendo uso del teorema della divergenza otteniamo:

$$\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{S} + \int_V \vec{E} \cdot \vec{J}_i^* dV = -j\omega \int_V [\mu |H|^2 - \varepsilon |E|^2] dV - \int_V \sigma |E|^2 dV$$

Se calcoliamo il valore medio del vettore di Poynting nel dominio del tempo otteniamo che:

$$\langle \vec{E}(t) \times \vec{H}(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}(\omega) \times \vec{H}^*(\omega))$$

Inoltre il valore medio dell'energia immagazzinata dal campo elettrico e dal campo magnetico sono rispettivamente:

$$U_E = \frac{1}{4} \varepsilon |E|^2 \qquad U_M = \frac{1}{4} \mu |H|^2$$

Vettore di Poynting nel dominio dei fasori

Possiamo dunque scrivere che il vettore di Poynting nel dominio dei fasori è pari a:

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*$$

Dunque:

$$\operatorname{Re} \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\operatorname{Re} \int_V \vec{E} \cdot \vec{J}_i^* dV - \int_V \sigma |E|^2 dV$$

Potenza attiva (media) uscente dalla superficie S: è data dalla differenza tra la potenza erogata dalla sorgente e di quella dissipata all'interno del volume.

$$\operatorname{Im} \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\operatorname{Im} \int_V \vec{E} \cdot \vec{J}_i^* dV - 2\omega \int_V [U_E - U_M] dV$$

Potenza reattiva media uscente dalla superficie S: è data dalla differenza tra la potenza reattiva (potenza di scambio) fornita dal generatore, e da quella che serve per controbilanciare la differenza tra l'energia immagazzinata dal campo elettrico e quella del campo magnetico

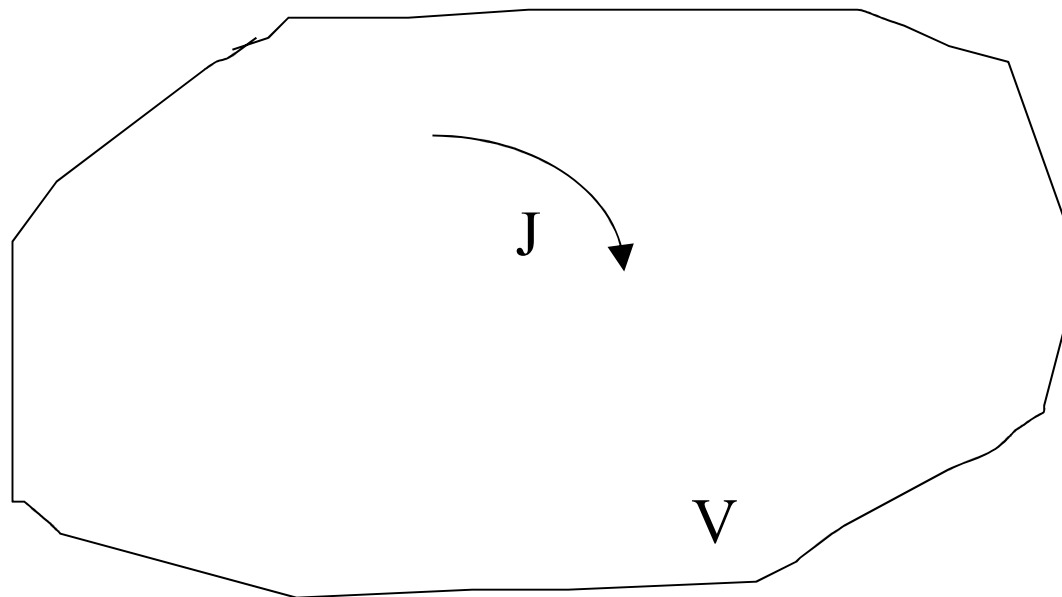
Teorema dell'unicità della soluzione delle eq. di Maxwell

Le eq. di Maxwell nel dominio dei fasori sono un sistema di equazioni differenziali spaziali del secondo ordine. Consideriamo un volume chiuso all'interno del quale abbiamo delle sorgenti. Vogliamo determinare il campo em all'interno del volume.

Le soluzioni verranno ottenute applicando le condizioni al contorno.

Ma la soluzione trovata è unica?

Ed inoltre, dobbiamo applicare tutte le condizioni al contorno (sembrano tante rispetto al numero delle costanti di integrazione!)



Teorema dell'unicità della soluzione delle eq. di Maxwell

Dato un mezzo lineare isotropo in un volume chiuso, la soluzione delle equazioni di Maxwell è unica se, nota la sorgente in ogni istante di tempo, sono specificate le condizioni al contorno (sulla superficie di contorno del volume) delle componenti tangenti del campo elettrico o del campo magnetico, e le condizioni iniziali dei campi in tutti i punti del volume

Teorema dell'unicità della soluzione delle eq. di Maxwell (fasori)

2/7

Per rispondere a questa osservazione, ragioniamo per assurdo: supponiamo che ci siano due campi e.m. soluzioni delle eq. di Maxwell nel dominio chiuso scelto: $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ ed $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$. Ovviamente, questa coppia di possibili soluzioni è generata dalla stessa sorgente \mathbf{J} . Inoltre, entrambe le coppie DEVONO soddisfare le stesse condizioni al contorno esistenti sulle pareti della superficie che racchiudono il dominio spaziale chiuso scelto.

$$\nabla \cdot \vec{E}_1 = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_1 = 0$$

$$\nabla \times \vec{E}_1 = -j\omega\mu\vec{H}_1$$

$$\nabla \times \vec{H}_1 = \vec{J} + j\omega\epsilon\vec{E}_1$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_2 = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_2 = 0$$

$$\nabla \times \vec{E}_2 = -j\omega\mu\vec{H}_2$$

$$\nabla \times \vec{H}_2 = \vec{J} + j\omega\epsilon\vec{E}_2$$

Teorema dell'unicità della soluzione delle eq. di Maxwell (fasori)

3/7

Operiamo la differenza di questa coppia di soluzioni :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 - \vec{E}_2 \quad \vec{H} = \vec{H}_1 - \vec{H}_2$$

Possiamo sottrarre membro a membro le equazioni precedenti e otteniamo:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E}$$

Si osservi che le sorgenti sono scomparse in queste equazioni poiché abbiamo ipotizzato che le due soluzioni siano generate, ovviamente, dalle stesse sorgenti.

Teorema dell'unicità della soluzione delle eq. di Maxwell (fasori)

4/7

Applichiamo il teorema di Poynting a questo campo e.m. “differenza”

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\int_V \sigma |\vec{E}|^2 dV + j\omega \left[\int_V \varepsilon |\vec{E}|^2 dV - \int_V \mu |\vec{H}|^2 dV \right]$$

Il primo integrale è di superficie e, quindi, vengono coinvolti i valori dei campi e.m. sulla superficie S , su cui devono essere applicate le condizioni al contorno. Ipotizzando di definire due vettori generici tangenziali alla superficie S , τ_1 e τ_2 , ed uno normale, \mathbf{n} , si ha:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} &= \oint_S \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot d\vec{S} = \oint_S \left(E_{\tau_1} \hat{\tau}_1 + E_{\tau_2} \hat{\tau}_2 + E_n \hat{n} \right) \times \left(H_{\tau_1} \hat{\tau}_1 + H_{\tau_2} \hat{\tau}_2 + H_n \hat{n} \right)^* \cdot \hat{n} dS \\ &= \oint_S \left(E_{\tau_1} H_{\tau_2}^* - E_{\tau_2} H_{\tau_1}^* \right) dS \end{aligned}$$

Teorema dell'unicità della soluzione delle eq. di Maxwell (fasori)

5/7

Poiché le condizioni al contorno sono le stesse per entrambe le soluzioni ipotizzate, risulta:

$$\begin{aligned} E_{\tau_1} = E_{1,\tau_1} - E_{2,\tau_1} &= 0 & E_{\tau_2} = E_{1,\tau_2} - E_{2,\tau_2} &= 0 \\ H_{\tau_1} = H_{1,\tau_1} - H_{2,\tau_1} &= 0 & H_{\tau_2} = H_{1,\tau_2} - H_{2,\tau_2} &= 0 \end{aligned}$$

Quindi:

$$0 = -\int_V \sigma |\vec{E}|^2 dV + j\omega \left[\int_V \varepsilon |\vec{E}|^2 dV - \int_V \mu |\vec{H}|^2 dV \right]$$

Questo integrale è costituito di una parte reale e di una parte immaginaria, per le quali:

$$0 = -\int_V \sigma |\vec{E}|^2 dV \qquad 0 = j\omega \left[\int_V \varepsilon |\vec{E}|^2 dV - \int_V \mu |\vec{H}|^2 dV \right]$$

Teorema dell'unicità della soluzione delle eq. di Maxwell (fasori)

6/7

$$0 = -\int_V \sigma |\vec{E}|^2 dV \qquad 0 = j\omega \left[\int_V \varepsilon |\vec{E}|^2 dV - \int_V \mu |\vec{H}|^2 dV \right]$$

Le funzioni integrande sono entrambe positive e quindi deve risultare

$$\vec{E} = \vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0 \text{ su } V$$

$$\vec{H} = \vec{H}_1 - \vec{H}_2 = 0 \text{ su } V$$

Le due soluzioni perciò devono coincidere nell'intero volume, negando l'ipotesi da cui eravamo partiti. La soluzione delle equazioni di Maxwell è quindi unica, PURCHE' siano imposte le condizioni al contorno sulla superficie e sia nota la sorgente.

Teorema dell'unicità della soluzione delle eq. di Maxwell (fasori)

7/7

Ma quante condizioni al contorno devono essere imposte?

Basta ricordare che

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \oint_S \left(E_{\tau_1} H_{\tau_2}^* - E_{\tau_2} H_{\tau_1}^* \right) dS = 0$$

Dunque, basta imporre le condizioni al contorno sul campo elettrico tangente OPPURE sul campo magnetico tangente.

In virtù del teorema di unicità della soluzione, una volta imposte una di queste condizioni (campo elettrico tangente OPPURE campo magnetico tangente), TUTTE le altre verranno soddisfatte.

Condizione di Sommerfeld

Abbiamo visto come essere certi dell'unicità della soluzione delle eq. di Maxwell in un dominio chiuso.

Ma se il dominio è aperto, ovvero la superficie tende all'infinito?

In questo caso, la dimostrazione è abbastanza complicata ma si può asserire che anche in questo caso la soluzione è unica se vengono fissate le sorgenti e se vengono rispettate le seguenti condizioni (condizioni di Sommerfeld):

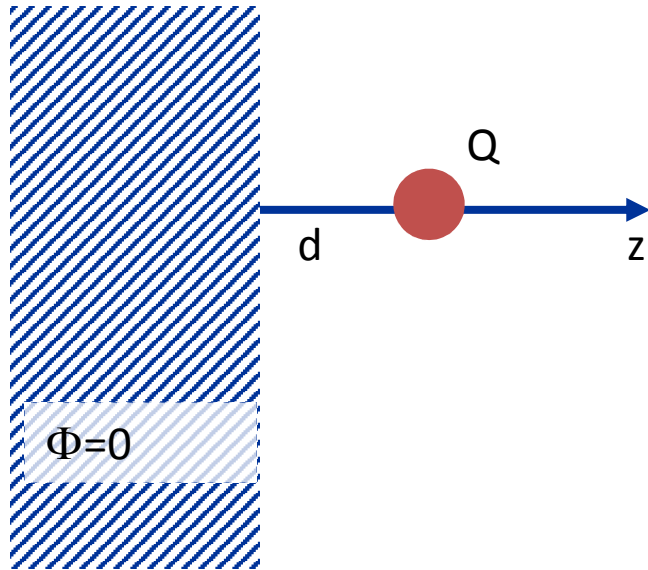
$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left| \vec{E}(\vec{r}) \right| < \infty$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left| \vec{H}(\vec{r}) \right| < \infty$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left| \vec{E}(\vec{r}) - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \vec{H}(\vec{r}) \times \hat{r} \right| = 0$$

Vedremo che queste condizioni saranno soddisfatte da tutti i campi e.m. prodotti da antenne che irradiano nello spazio libero

Carica in prossimità di un piano conduttore



Calcolare il potenziale sapendo che
 $\Phi=0$ sul piano e
 $\Phi=0$ per $z \rightarrow \infty$

Dobbiamo risolvere l'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Proviamo a dare una soluzione di tentativo:
potenziale di una carica nello spazio libero

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}}$$

- E' soluzione dell'equazione di Poisson
- Soddisfa la condizione $\Phi=0$ per $z \rightarrow \infty$
- NON soddisfa la condizione $\Phi=0$ per $z=0$

Carica in prossimità di un piano conduttore

La soluzione trovata non soddisfa tutte le condizioni al contorno richieste, proviamo a modificarla per cercare di soddisfarle tutte

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}}$$

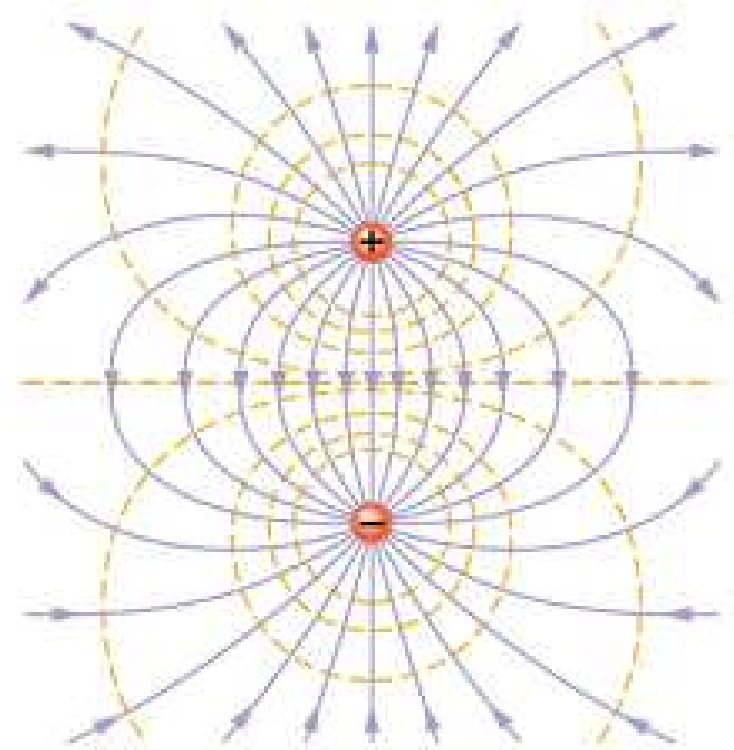
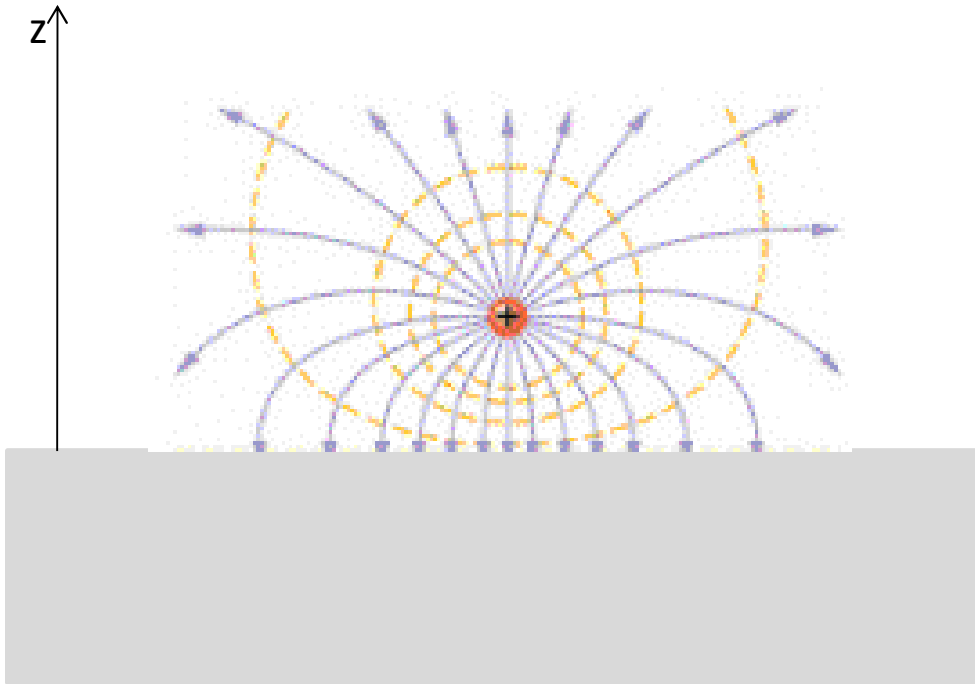
- E' soluzione dell'equazione di Poisson
- Soddisfa la condizione $\Phi=0$ per $z \rightarrow \infty$
- Soddisfa la condizione $\Phi=0$ per $z=0$

Abbiamo trovato la soluzione del nostro problema per $z>0$

MA COSA RAPPRESENTA?

Carica in prossimità di un piano conduttore

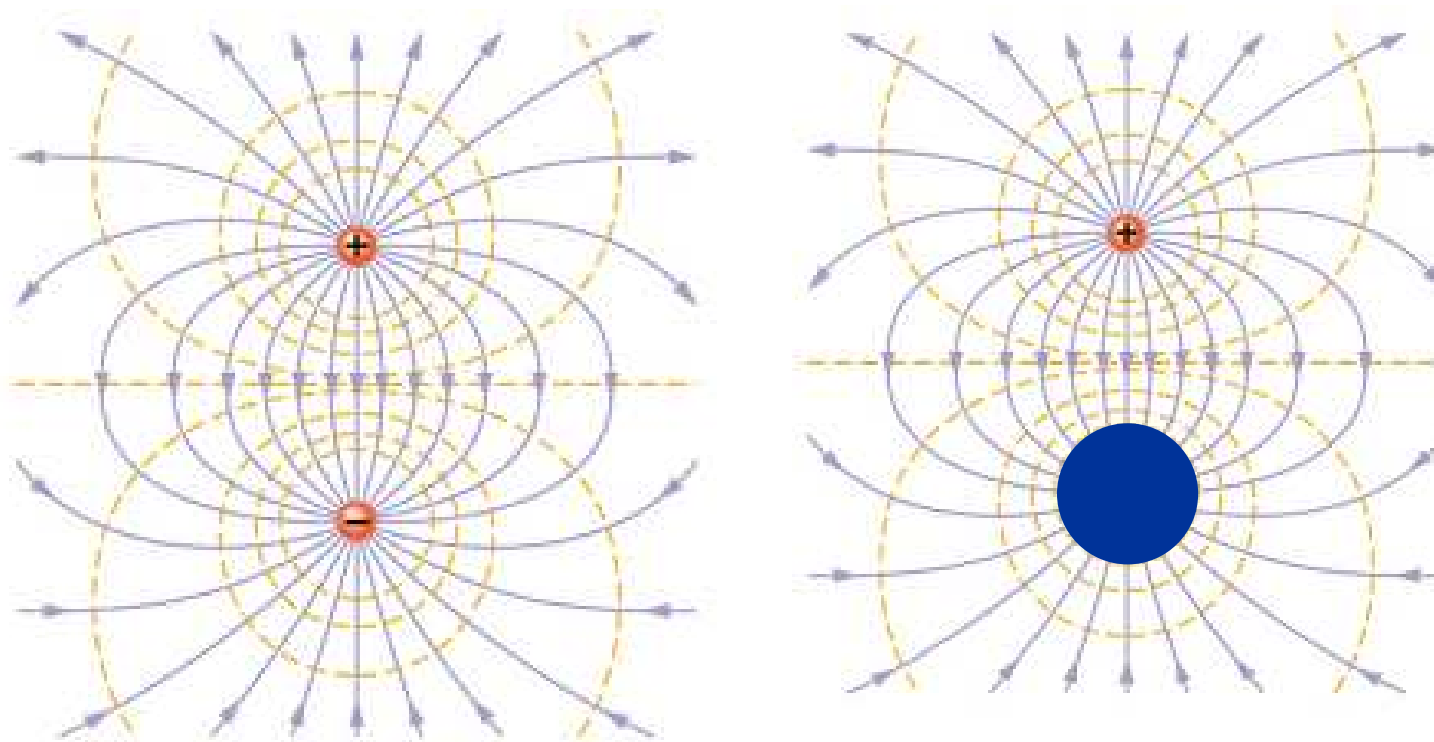
La soluzione trovata è quella del potenziale di una carica Q posta ad una distanza pari a $2d$ dalla carica $-Q$ (nello spazio libero). La carica $-Q$ la chiamiamo carica “immagine”. I due problemi si dicono equivalenti.



ATTENZIONE: I due problemi sono equivalenti solamente per $z > 0$

Per $z < 0$ il potenziale del conduttore è sempre zero, mentre quello delle due cariche varia nei diversi punti

Metodo delle Immagini



- Se sostituiamo una superficie equipotenziale con una superficie conduttrice (o un conduttore pieno) avente il corretto potenziale, il campo rimane identico!
- IDEA: studiare i campi di distribuzioni di cariche in prossimità di conduttori rimpiazzando i conduttori con distribuzioni di carica appropriate, o viceversa, a seconda della difficoltà del problema