Tarea

- Obtenga la expresión a segundo orden de la primera derivada caso discreto derecho
- Obtenga la expresión de la segunda derivada el caso discreto derecho
- Obtenga la expresión de la cuarta derivada el caso discreto derecho

Expresión a segundo orden de la primera derivada caso discreto derecho

Por extrapolación de Richardson

Fórmula:

$$G = \frac{2^P g\left(\frac{h}{2}\right) - g(h)}{2^P - 1} + O(h^{P+Q})$$

Partimos de la expresión para la derivada hacia delante de primer orden

$$g(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Como es de primer orden, entonces P=1

Sustituimos en G

$$G = \frac{2^{(1)} g\left(\frac{h}{2}\right) - g(h)}{2^{(1)} - 1} + O(h^{(2*1)})$$

$$= 2g\left(\frac{h}{2}\right) - g(h) + O(h^2)$$

Sustituimos, empleamos la fórmula

$$G = 2\frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f(x)}{h/2} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Operamos

$$G = 4\frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f(x)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \frac{4f\left(x+\frac{h}{2}\right) - 4f(x) - f(x+h) + f(x)}{h}$$

$$= \frac{4f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f(x+h) - 3f(x)}{h} \; O(h^2)$$

Quedamos a segundo orden, pues: (h^2)

Comparamos con las fórmulas

Como tenemos (h^2) sustituimos como 2h

$$\frac{4f\left(x+\frac{2h}{2}\right)-f(x+2h)-3f(x)}{2h}$$

$$\frac{4f(x+h)-f(x+2h)-3f(x)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2h}-f_{i+2}+4_{fi+1}-3_{fi}$$

Expresión de la segunda derivada el caso discreto derecho

Debemos hacer suficientes sumas y/o restas de la serie de Taylor para f(x+h) y f(x-h) (hacia adelante y hacia atrás) para obtener la expresión

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+O(h^3)$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+O(h^3)$$

Sumamos las expresiones y así eliminamos la primera derivada

$$f(x+h)+f(x-h)=2f(x)+h^2f''(x)+O(h^3)$$

De esta expresión despejamos f’’(x)

$$f''(x)=\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}+O(h)$$

Expresión de la cuarta derivada el caso discreto derecho

Para obtener la expresión de la cuarta derivada del caso discreto derecho, debemos hacer las suficientes sumas de series de Taylor para cancelar los términos no deseados, en este caso como queremos la cuarta derivada (par) debemos eliminar los impares

Podemos utilizar

$$f\left(x+\frac{h}{2}\right)+f(x-\frac{h}{2})$$

Junto con

$$f(x+h)+f(x-h)$$

Estas son

$$f\left(x+\frac{h}{2}\right)=f(x)+\frac{h}{2}f'(x)+\frac{h^2}{8}f''(x)+\frac{h^3}{48}f'''(x)+\frac{h^4}{384}f^{(4)}(x)+\cdots$$

$$f\left(x-\frac{h}{2}\right)=f(x)-\frac{h}{2}f'(x)+\frac{h^2}{8}f''(x)-\frac{h^3}{48}f'''(x)+\frac{h^4}{384}f^{(4)}(x)+\cdots$$

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f'''(x)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(x)+\cdots$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)-\frac{h^3}{6}f'''(x)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(x)+\cdots$$

Hacemos las sumas

$$f\left(x+\frac{h}{2}\right)+f\left(x-\frac{h}{2}\right)=2f(x)+\frac{h^4}{4}f''(x)+\frac{h^4}{192}f''''(x)+O(h^5)$$

$$f(x+h)+f(x-h)=2f(x)+h^2f''(x)+\frac{h^4}{12}f''''(x)+O(h^5)$$

Sumamos los resultados y despejamos f’’’’(x)

$$f''''(x)=\frac{192}{17h^4}[f\left(x+\frac{h}{2}\right)+f\left(x-\frac{h}{2}\right)+f(x+h)+f(x-h)-4f(x)-\frac{5h^2}{4}f''(x)]$$