Relaciones de equivalencia

Omar Porfirio García

ESFM

6 de febrero de 2023

Contenido

Introducción

Supóngase que se está en un evento donde se forman personas en filas dependiendo su edad. Se tiene una fila de personas todas de 18 años, otra de 20, otra de 37, etc.

Resulta que cada una de estas filas cumple ciertas propiedades.
¿Hay filas vacías?
¿Todas las personas están en alguna fila?
¿Existen personas en más de una fila?
Si dos personas están en la misma fila, ¿tienen la misma edad?
¿Todas las filas tienen a alguien que está hasta adelante?

Denotemos a cada fila como L_i ($1 \leq i \leq n$ para algún n). Sean dos personas a, b, si a tiene la misma edad que b, entonces b tiene la misma edad que a, entonces $a, b \in L_i$ (a y b están en la misma fila). También tenemos que una persona tiene su misma edad, entonces necesariamente están en alguna fila (aunque puede que esté solito). Y finalmente, tenemos que si a tiene la misma edad que b y b tiene la misma edad que c, entonces a tiene la misma edad que c y entonces los tres están en una misma fila.

Propiedades de la igualdad

Retomemos a la relación de igualdad $(=)$. Sabemos que siempre se cumplen las siguientes tres propiedades:

1. $a = a$
2. Si $a = b$, entonces $b = a$.
3. Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$

Estas propiedades se denominan *reflexividad*, *simetría* y *transitividad* respectivamente.

Esas tres propiedades caracterizan a la igualdad, pero la igualdad no es la única relación que cumple esas tres propiedades.
El formar a personas de acuerdo a su edad también cumple esas tres propiedades:

1. (Reflexividad) Una persona tiene su misma edad.
2. (Simetría) Si una persona a tiene la misma edad que otra persona b, la persona b tiene la misma edad que a.
3. (Transitividad) Si una persona a tiene la misma edad que otra persona b y b tiene la misma edad de otra persona c, a tiene la misma edad de c.

Relaciones

Recordemos la definición de relación binaria.

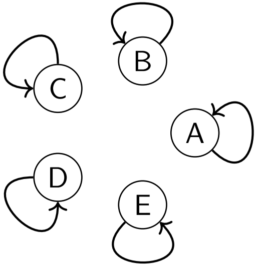
Definición 1.1 (Relación binaria)

Sean A, B conjuntos. Una *relación binaria* de A y B es un conjunto $R \subseteq A \times B$.
Si $(a, b) \in R$, decimos que a *está relacionado con* b y lo denotamos como aRb.

Dado que $=$ es una relación, se pueden tener relaciones que cumplan las tres propiedades de la igualdad.

Definición 1.2 (Relación reflexiva)

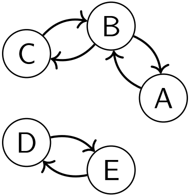
Sea A un conjunto y $R \subseteq A^2$ una relación binaria. R se dice *reflexiva* si para cada $a \in A$, aRa.



Dado que $=$ es una relación, se pueden tener relaciones que cumplan las tres propiedades de la igualdad.

Definición 1.2 (Relación simétrica)

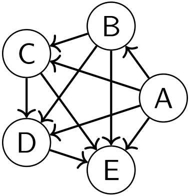
Sea A un conjunto y $R \subseteq A^2$ una relación binaria. R se dice *simétrica* si para cada $a, b \in A$, $aRb \implies bRa$.



Dado que $=$ es una relación, se pueden tener relaciones que cumplan las tres propiedades de la igualdad.

Definición 1.2 (Relación transitiva)

Sea A un conjunto y $R \subseteq A^2$ una relación binaria. R se dice *transitiva* si para cada $a, b, c \in A$, $(aRb \wedge bRc) \implies aRc$



Ejercicios

Ejercicio:

Suponga que se tiene un grupo de personas y las juntaremos. Dos personas están juntas si y solo si tienen edades diferentes.
¿Esta relación es reflexiva, simétrica o transitiva?

Ejercicios

Ejercicio:

Dos números están relacionados si y solo si su resta es menor que 0.
¿Esta relación es reflexiva, simétrica o transitiva?

Ejercicios

Ejercicio:

Dos personas en un concierto se sientan en la misma fila si y solo si pagaron lo mismo por su boleto.
¿Esta relación es reflexiva, simétrica o transitiva?

Ejercicios

Ejercicio:

Dos números están relacionados si y solo si su resta es menor o igual que 0.

¿Esta relación es reflexiva, simétrica o transitiva?

Ejercicios

Ejercicio:

Dos rectas en el plano cartesiano están relacionadas si su pendiente es la misma.
¿Esta relación es reflexiva, simétrica o transitiva?

Ejercicios

Ejercicio:

Dos números están relacionados si y solo si su resta es par.
¿Esta relación es reflexiva, simétrica o transitiva?

Ejercicios

Ejercicio:

Dos personas están en el mismo grupo si y solo si residen en el mismo estado.
¿Esta relación es reflexiva, simétrica o transitiva?

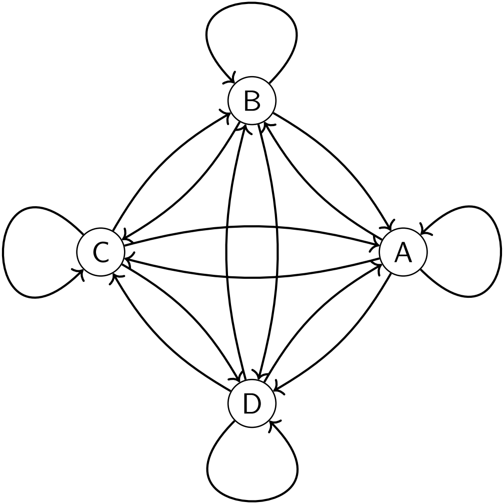
Generalización de la igualdad

Dado que existen relaciones con las mismas propiedades de la igualdad, podemos generalizar el concepto de igualdad a algo denominado *equivalencia*. A las relaciones que indican *equivalencia* se les denomina *de equivalencia*.

Definición 1.3 (Relaciones de equivalencia)

Sea A un conjunto y $R \subseteq A^2$ una relación. R se denomina *de equivalencia* si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Para mayor eficiencia, denotaremos a una relación de equivalencia por $\sim$.


B
C
A
D

Algunas relaciones de equivalencia

Fracciones equivalentes

Ejercicio:

Sean $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N}^2$. Diremos que $(a,b) \sim (c,d)$ si y solo si:

$$ad = cb$$

Demuestre que esta relación es de equivalencia.

Demostración

Demostración.

- Reflexividad
  Sea $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. Claramente se tiene que:
  $$ab = ba$$
  Por lo tanto, $(a,b) \sim (a,b)$.

$\square$

Demostración

Demostración.

- Simetría

  Sean $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N}^2$ tales que $(a, b) \sim (c, d)$. Entonces tenemos que:

$$ad = cb$$
$$cb = ad$$

  Por lo tanto, $(c, d) \sim (a, b)$.

$\square$

Demostración

Demostración.

- Transitividad

  Sean $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N}^2$ tales que $(a,b) \sim (c,d)$ y $(c,d) \sim (e,f)$. Entonces se tiene que:

$$ad = cb \implies c = \frac{ad}{b}$$

$$cf = ed \implies c = \frac{ed}{f}$$

$$\frac{ad}{b} = \frac{ed}{f} \implies adf = bed$$

$$af = eb$$

Por lo tanto, $(a,b) \sim (e,f)$.

$\square$

Fracciones equivalentes

Esta relación entre puntos de números enteros es como podemos definir a las fracciones equivalentes. Dos fracciones $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ las podemos ver como pares $(a, b), (c, d)$ donde estas son equivalentes si y solo si:

$$ad = bc$$

Definición 2.1 (Fracciones equivalentes)

Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$. Decimos que $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son *equivalentes* si y solo si $(a, b) \sim (c, d)$ con la relación de equivalencia descrita anteriormente.

Módulos

Ejercicio:

Sean $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Decimos que $a \sim b$ si y solo si

$$n \mid (a-b)$$

Demuestre que $\sim$ es de equivalencia.

Demostración

Demostración.

- Reflexividad

  Sea $a \in \mathbb{Z}$. Es claro que:

  $$n \mid (a - a)$$

  Por lo tanto, $a \sim a$.

$\square$

Demostración

Demostración.

- Simetría

  Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $a \sim b$. Entonces se tiene que:

$$n \mid (a - b)$$
$$n \mid (b - a)$$

Por lo tanto, $b \sim a$.

$\square$

Demostración

Demostración.

- Transitividad

  Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $a \sim b$ y $b \sim c$. Entonces se tiene que existen k, m tales que:

$$nk = a - b$$
$$nm = b - c$$

De esto vemos que:

$$nk + nm = (a - b) + (b - c)$$
$$n(k + m) = a - c$$

Por lo tanto, $a \sim c$.

$\square$

Módulos

Dos números relacionados de esta forma se dicen *iguales módulo* n.

Definición 2.2 (Módulo)

Sean $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Decimos que $a = b$ módulo n, denotado por $a = b \mod n$, si y solo si $a \sim b$ con la relación de equivalencia descrita anteriormente.

Relación mediante una función

Ejercicio:

Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a, b \in \mathrm{Dom}\,(f)$. $a \sim b$ si y solo si $f(a) = f(b)$.
Demuestre que esta relación es de equivalencia.

Demostración

Demostración.

- Reflexividad
  Sea $a \in \operatorname{Dom}(f)$. Claramente $f(a) = f(a)$ y entonces $a \sim a$.

$\square$

Demostración

Demostración.

- Simetría
  Sean $a, b \in \mathrm{Dom}\,(f)$ tales que $a \sim b$, entonces $f(a) = f(b)$. Dado que $f(b) = f(a)$, entonces $b \sim a$.

$\square$

Demostración

Demostración.

- Transitividad
  Sean $a, b, c \in \mathrm{Dom}\,(f)$ tales que $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces $f(a) = f(b)$ y $f(b) = f(c)$. Por lo tanto, $f(a) = f(c)$ y entonces $a \sim c$.

$\square$

Clases de equivalencia

Concepto de clase

Volviendo al ejemplo de las filas. Sabemos que si varias personas tienen la misma edad, entonces forman una fila. Resulta que el conjunto de todos los elementos que están mutuamente relacionados (la fila) cumple ciertas propiedades.

1. Ninguna fila está vacía.
2. No hay una persona en dos filas diferentes.
3. Todas las personas están en una fila.

A lo que denominamos *fila*, en este caso, es a lo que se le denomina de forma general como *clase de equivalencia*.

Clase de equivalencia

Definición 3.1 (Clase de equivalencia)

Sean A un conjunto, $\sim \subseteq A^2$ una relación de equivalencia y $a \in A$. Definimos a la *clase de equivalencia* de a como:

$$[a] := \{b \in A : a \sim b\}$$

Ejercicio:

Dada la relación de equivalencia de fracciones equivalentes, determine la clase de equivalencia de $\frac{3}{2}$ y $\frac{1}{2}$.

Ejercicio:

Dada la relación de equivalencia de fracciones equivalentes. Demuestre que si $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$[n] = \left\{(nt, t) \in \mathbb{N}^2 : t \in \mathbb{N}\right\}$$

Ejercicio:

Dada la relación de equivalencia de fracciones equivalentes. Demuestre que para cada fracción $\frac{a}{b}$, su clase de equivalencia es:

$$\left[\frac{a}{b}\right] = \left\{(at, bt) \in \mathbb{N}^2 : t \in \mathbb{N}\right\}$$

Ejercicio:

Dada la relación de equivalencia de módulos, determine la clase de equivalencia de $2, 3, 4$ cuando $n = 5$.

Ejercicio:

Dada la relación de equivalencia de módulos. Demuestre que para cada $a \in \mathbb{Z}$, su clase de equivalencia es:

$$[a] = \{nk + a \in \mathbb{Z} : k \in \mathbb{Z}\}$$

Teorema 3.1 (Propiedades de las clases de equivalencia)

Sea A un conjunto, $\sim \subseteq A^2$ y $a, b \in A$.

1. $[a] \neq \varnothing$
2. $a \sim b \iff [a] = [b]$
3. $[a] \neq [b] \iff [a] \cap [b] = \varnothing$

Demostración

Demostración.

- $[a] \neq \varnothing$
  Sabemos que $a \sim a$, por lo tanto la clase de a tiene al menos como elemento a a. Por lo tanto, $[a] \neq \varnothing$

$\square$

Demostración

Demostración.

- $a \sim b \iff [a] = [b]$

$\Longrightarrow$) Sea $w \in [b]$, entonces $b \sim w$ y por transitividad $a \sim w$, es decir que $w \in [a]$. Por lo tanto, $[b] \subseteq [a]$.
Sea $w \in [a]$, entonces $w \sim a$ y por transitividad $w \sim b$ es decir que $w \in [b]$. Por lo tanto, $[a] \subseteq [b]$.
Por lo tanto, $[a] = [b]$.

$\Longleftarrow$) Dado que $[a] = [b]$, entonces claramente $a \sim b$.

□

Demostración

Demostración.

- $[a] \neq [b] \iff [a] \cap [b] = \varnothing$

$\Longrightarrow$) Demostremos por contradicción. Supongamos que $[a] \neq [b]$ pero $[a] \cap [b] \neq \varnothing$. Entonces existe un $w \in [a] \cap [b]$ y luego $w \in [a]$ y $w \in [b]$, es decir, $w \sim a$ y $w \sim b$. Por transitividad se tiene que $a \sim b$ y por la propiedad anterior tenemos que $[a] = [b]$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $[a] \cap [b] = \varnothing$.

$\Longleftarrow$) Dado que $[a], [b] \neq \varnothing$ y $[a] \cap [b] = \varnothing$, entonces necesariamente $[a] \neq [b]$.

$\square$

Concepto de partición

Algo importante en matemáticas es el concepto de partición. Si tenemos un grupo de personas, entonces podemos separarlas en grupos distintos de modo que cada persona esté en un único grupo. Por ejemplo, si las separamos por la primer letra de su primer nombre, se tienen las siguientes propiedades:

1. Todas las personas están en un grupo.
2. No hay una persona en dos grupos distintos.
3. En todo grupo hay al menos una persona.

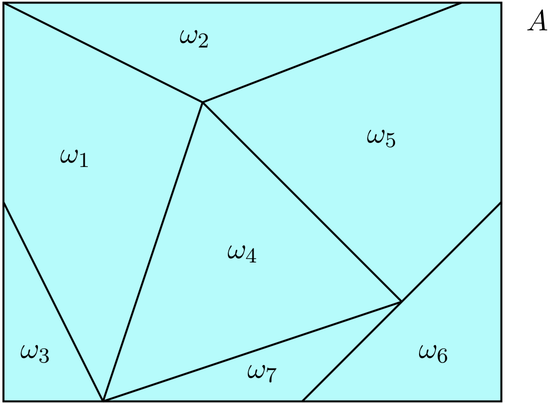
De esta forma podemos dividir el conjunto en partes independientes, como romper un vidrio en pedazos.

Partición de un conjunto

Definición 3.2 (Partición)

Sea A un conjunto y $\Omega \subseteq \mathfrak{P}(A)$ una familia de subconjuntos. Ω se denomina *partición* de A si y solo si:

1. $\forall \omega \in \Omega, \omega \neq \varnothing$
2. $\displaystyle\bigcup_{\omega \in \Omega} \omega = A$
3. $\forall \upsilon, \omega \in \Omega, \upsilon \neq \omega \implies \upsilon \cap \omega = \varnothing$


ω_2
A
ω_5
ω_1
ω_4
ω_3
ω_7
ω_6

Ejercicio:

Demuestre que dado un conjunto A, $\Omega = \mathfrak{P}(A)$ no es una partición de A.

Ejercicio:

Demuestre que dado un conjunto A y $\Omega \subsetneq \mathfrak{P}(A)$ una partición, $|\Omega| = 1$ si y solo si $\Omega = \{A\}$.

Ejercicio:

Sea A un conjunto y $B \subsetneq A$. Demuestre que $\Omega = \{B, A \setminus B\}$ es una partición.

Representante

Usando otra vez el ejemplo de las filas. Sabemos que en cada fila hay una persona que está al frente de esta. A esta persona la podemos usar para identificar a la fila entera.

Representante

Ya en clases de equivalencia en general, podemos elegir un elemento de cada clase que identifique a su clase entera. A este elemento se le denomina *representante de la clase*.

Representante de una clase

Definición 3.3 (Representante)

Sea A un conjunto y $\sim \subseteq A^2$ una relación de equivalencia. Para cada clase C, se elige un elemento único el cual se denominará *representante* de C. Al conjunto de todos los representantes de las clases se le denotará por $\tilde{R}$.

Ejercicio:

Dada la relación de equivalencia de fracciones equivalentes. Demuestre que los $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tales que $\operatorname{mcd}(a, b) = 1$ son elementos representantes.

Ejercicio:

Dada la relación de equivalencia de módulos. Demuestre que $\tilde{R} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ es un conjunto de representantes.

Conjunto cociente y el teorema fundamental

Conjunto cociente

Definición 4.1 (Conjunto cociente)

Sea A un conjunto y $\sim \subseteq A^2$ una relación de equivalencia. Definimos al *conjunto cociente* de A bajo $\sim$ como:

$$A/\sim := \left\{[a] : a \in \tilde{R}\right\}$$

Conjunto cociente de módulos

Sabemos que el conjunto de representantes de la relación de módulos es:

$$\tilde{R} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

Por lo tanto, el conjunto cociente de la relación de módulos es:

$$\mathbb{Z}/\sim = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$$

Conjunto cociente de fracciones equivalentes

Sabemos que el conjunto de representantes de fracciones equivalentes es:

$$\tilde{R} = \left\{ (a, b) \in \mathbb{N}^2 : \mathrm{mcd}\,(a, b) = 1 \right\}$$

Por lo tanto, el conjunto cociente de la relación de fracciones equivalentes es:

$$\mathbb{N}^2 / \sim = \left\{ [(a, b)] : \mathrm{mcd}\,(a, b) = 1 \right\}$$

Teorema 4.1

Sean A un conjunto y $\sim \subseteq A^2$ una relación de equivalencia, entonces $A/\sim$ es una partición de A.

Demostración

Demostración.

- $A/\sim$ no tiene elementos vacíos
  Sabemos que cada clase es no vacía por el teorema 3.1. Por lo tanto, $A/\sim$ es de elementos no vacíos.

$\square$

Demostración

Demostración.

- La unión de los elementos es A
  Otra forma de verlo es que cualquier elemento $a \in A$ está en alguna clase de equivalencia. Dado que $a \sim a$, entonces $a \in [a]$, pero sabemos que toda clase tiene un representante, por lo tanto existe un $[r] \in A/\sim$ tal que $a \in [a] = [r]$. Por lo tanto, la unión de clases de equivalencia es A.

$\square$

Demostración

Demostración.

- Los elementos son disjuntos
  Dado que cada $r \in \tilde{R}$ es un representante único de cada clase, entonces si $r, s \in \tilde{R}$ tales que $r \neq s$, entonces $[r] \neq [s]$ y por el teorema 3.1 $[r] \cap [s] = \varnothing$. Por lo tanto, los elementos de $A/\sim$ son disjuntos.

Por lo tanto, $A/\sim$ es una partición de A $\square$

De hecho, hay una relación entre las particiones de un conjunto y las relaciones de equivalencia sobre ese conjunto. Esta relación nos permite crear relaciones de equivalencia que nos convengan para partir un conjunto en particiones que nos interese tener.

Teorema fundamental de las relaciones de equivalencia

Teorema 4.2 (Teorema fundamental de las relaciones de equivalencia)

Sea A un conjunto.

1. Si una relación $\sim \subseteq A^2$ es de equivalencia, entonces $A/\sim$ es una partición de A.
2. Si $\Omega \subsetneq \mathfrak{P}(A)$ es una partición de A, entonces existe una relación de equivalencia $\sim \subseteq A^2$ tal que $A/\sim = \Omega$.

Demostración

Demostración.

El primer punto se demostró en el teorema 4.1. Entonces solo demostremos el segundo punto.

Sea $\Omega \subsetneq \mathfrak{P}(A)$ una partición de A. Definamos a la relación $\sim \subseteq A^2$ como:

$$a \sim b \iff \text{existe } \omega \in \Omega \text{ tal que } a, b \in \omega$$

Demostremos que esta relación es de equivalencia.

$\square$

Demostración

Demostración.

- Reflexividad
  Dado que Ω es una partición, existe $\omega \in \Omega$ tal que $a \in \omega$. Por lo tanto, $a \sim a$.

$\square$

Demostración

Demostración.

- Simetría
  Sean $a, b \in A$ tales que $a \sim b$, entonces existe $\omega \in \Omega$ tal que $a, b \in \omega$. Claramente $b \sim a$.

$\square$

Demostración

Demostración.

- Transitividad
  Sean $a, b, c \in A$ tales que $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces existen $v, \omega \in \Omega$ tales que $a, b \in v$ y $b, c \in \omega$. Dado que $b \in v, \omega$, entonces $b \in v \cap \omega$. Supongamos que $v \neq \omega$, entonces $v \cap \omega = \varnothing$ al ser particiones de A, pero $b \in v \cap \omega$, por lo tanto $v \cap \omega \neq \varnothing$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $v = \omega$ y entonces $a, c \in \omega$, es decir, $a \sim c$.

□

Demostración

Demostración.

Por lo tanto, $\sim$ es de equivalencia y entonces podemos determinar $A/\sim$. Sabemos que dado $a \in A$, existe $\omega \in \Omega$ tal que $a \in \omega$. Demostremos que $[a] = \omega$ □

Demostración

Demostración.

Primero demostremos que $[a] \subseteq \omega$.
Sea $b \in [a]$, entonces $a \sim b$, es decir, $a, b \in \omega$. En particular, se tiene que $b \in \omega$, por lo tanto, $[a] \subseteq \omega$. $\square$

Demostración

Demostración.

Ahora demostremos que $\omega \subseteq [a]$.
Sea $b \in \omega$. Dado que $a \in \omega$, entonces $a, b \in \omega$ y por consiguiente $a \sim b$.
En consecuencia, $b \in [a]$ y por lo tanto, $\omega \subseteq [a]$.
Por lo tanto, $[a] = \omega$. $\square$

Demostración

Demostración.

Dado que para cada $a \in A$ existe $\omega \in \Omega$ tal que $a \in \omega$, entonces por lo anterior tenemos que:

$$A/\sim = \{[a] : a \in A\} = \{\omega : \omega \in \Omega\} = \Omega$$

Dando por demostrado el teorema. $\square$