Relaciones de equivalencia

Omar Porfirio García

ESFM

31 de enero de 2023

Contenido

Introducción

Supóngase que se está en un evento donde se forman personas en filas dependiendo su edad. Se tiene una fila de personas todas de 18 años, otra de 20, otra de 37, etc.

Resulta que cada una de estas filas cumple ciertas propiedades.
¿Hay filas vacías?
¿Todas las personas están en alguna fila?
¿Existen personas en más de una fila?
Si dos personas están en la misma fila, ¿tienen la misma edad?
¿Todas las filas tienen a alguien que está hasta adelante?

Denotemos a cada fila como L_i ($1 \leq i \leq n$ para algún n). Sean dos personas a, b, si a tiene la misma edad que b, entonces b tiene la misma edad que a, entonces $a, b \in L_i$ (a y b están en la misma fila). También tenemos que una persona tiene su misma edad, entonces necesariamente están en alguna fila (aunque puede que esté solito). Y finalmente, tenemos que si a tiene la misma edad que b y b tiene la misma edad que c, entonces a tiene la misma edad que c y entonces los tres están en una misma fila.

Propiedades de la igualdad

Retomemos a la relación de igualdad $(=)$. Sabemos que siempre se cumplen las siguientes tres propiedades:

1. $a = a$
2. Si $a = b$, entonces $b = a$.
3. Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$

Estas propiedades se denominan *reflexividad*, *simetría* y *transitividad* respectivamente.

Esas tres propiedades caracterizan a la igualdad, pero la igualdad no es la única relación que cumple esas tres propiedades.
El formar a personas de acuerdo a su edad también cumple esas tres propiedades:

1. (Reflexividad) Una persona tiene su misma edad.
2. (Simetría) Si una persona a tiene la misma edad que otra persona b, la persona b tiene la misma edad que a.
3. (Transitividad) Si una persona a tiene la misma edad que otra persona b y b tiene la misma edad de otra persona c, a tiene la misma edad de c.

Relaciones

Recordemos la definición de relación binaria.

Definición 1.1 (Relación binaria)

Sean A, B conjuntos. Una *relación binaria* de A y B es un conjunto $R \subseteq A \times B$.
Si $(a, b) \in R$, decimos que a *está relacionado con* b y lo denotamos como aRb.

Dado que $=$ es una relación, se pueden tener relaciones que cumplan las tres propiedades de la igualdad.

Definición 1.2 (Relación reflexiva)

Sea A un conjunto y $R \subseteq A^2$ una relación binaria. R se dice *reflexiva* si para cada $a \in A$, aRa.

Dado que $=$ es una relación, se pueden tener relaciones que cumplan las tres propiedades de la igualdad.

Definición 1.2 (Relación simétrica)

Sea A un conjunto y $R \subseteq A^2$ una relación binaria. R se dice *simétrica* si para cada $a, b \in A$, $aRb \implies bRa$.

Dado que $=$ es una relación, se pueden tener relaciones que cumplan las tres propiedades de la igualdad.

Definición 1.2 (Relación transitiva)

Sea A un conjunto y $R \subseteq A^2$ una relación binaria. R se dice *transitiva* si para cada $a, b, c \in A$, $(aRb \wedge bRc) \implies aRc$

Ejercicios

Ejercicio:

Suponga que se tiene un grupo de personas y las juntaremos. Dos personas están juntas si y solo si tienen edades diferentes.
¿Esta relación es reflexiva, simétrica o transitiva?

Ejercicios

Ejercicio:

Dos números están relacionados si y solo si su resta es menor que 0.
¿Esta relación es reflexiva, simétrica o transitiva?

Ejercicios

Ejercicio:

Dos personas en un concierto se sientan en la misma fila si y solo si pagaron lo mismo por su boleto.
¿Esta relación es reflexiva, simétrica o transitiva?

Ejercicios

Ejercicio:

Dos números están relacionados si y solo si su resta es menor o igual que 0.
¿Esta relación es reflexiva, simétrica o transitiva?

Ejercicios

Ejercicio:

Dos rectas en el plano cartesiano están relacionadas si su pendiente es la misma.
¿Esta relación es reflexiva, simétrica o transitiva?

Ejercicios

Ejercicio:

Dos números están relacionados si y solo si su resta es par.
¿Esta relación es reflexiva, simétrica o transitiva?

Ejercicios

Ejercicio:

Dos personas están en el mismo grupo si y solo si residen en el mismo estado.
¿Esta relación es reflexiva, simétrica o transitiva?

Generalización de la igualdad

Dado que existen relaciones con las mismas propiedades de la igualdad, podemos generalizar el concepto de igualdad a algo denominado *equivalencia*. A las relaciones que indican *equivalencia* se les denomina *de equivalencia*.

Definición 1.3 (Relaciones de equivalencia)

Sea A un conjunto y $R \subseteq A^2$ una relación. R se denomina *de equivalencia* si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Para mayor eficiencia, denotaremos a una relación de equivalencia por $\sim$.

Algunas relaciones de equivalencia

Fracciones equivalentes

Ejercicio:

Sean $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \left\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : b = 0\right\}$. Diremos que $(a,b) \sim (c,d)$ si y solo si:

$$ad = cb$$

Demuestre que esta relación es de equivalencia.

Demostración

Demostración.

- Reflexividad
  Sea $(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : b = 0\}$. Claramente se tiene que:

$$ab = ba$$

Por lo tanto, $(a,b) \sim (a,b)$.

$\square$

Demostración

Demostración.

- Simetría

  Sean $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : b = 0\}$ tales que $(a,b) \sim (c,d)$. Entonces tenemos que:

$$ad = cb$$
$$cb = ad$$

Por lo tanto, $(c,d) \sim (a,b)$.

$\square$

Demostración

Demostración.

- Transitividad

  Sean $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : b = 0\}$ tales que $(a,b) \sim (c,d)$ y $(c,d) \sim (e,f)$. Entonces se tiene que:

$$ad = cb \implies c = \frac{ad}{b}$$

$$cf = ed \implies c = \frac{ed}{f}$$

$$\frac{ad}{b} = \frac{ed}{f} \implies adf = bed$$

$$af = eb$$

Por lo tanto, $(a,b) \sim (e,f)$.

$\square$

Fracciones equivalentes

Esta relación entre puntos de números enteros es como podemos definir a las fracciones equivalentes. Dos fracciones $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ las podemos ver como pares $(a, b), (c, d)$ donde estas son equivalentes si y solo si:

$$ad = bc$$

Definición 2.1 (Fracciones equivalentes)

Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$. Decimos que $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son *equivalentes* si y solo si $(a, b) \sim (c, d)$ con la relación de equivalencia descrita anteriormente.

Módulos

Ejercicio:

Sean $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Decimos que $a \sim b$ si y solo si

$$n \mid (a - b)$$

Demuestre que $\sim$ es de equivalencia.

Demostración

Demostración.

- Reflexividad
  Sea $a \in \mathbb{Z}$. Es claro que:
  $$n \mid (a - a)$$
  Por lo tanto, $a \sim a$.

$\square$

Demostración

Demostración.

- Simetría

  Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $a \sim b$. Entonces se tiene que:

$$n \mid (a - b)$$
$$n \mid (b - a)$$

Por lo tanto, $b \sim a$.

$\square$

Demostración

Demostración.

- Transitividad

  Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $a \sim b$ y $b \sim c$. Entonces se tiene que existen k, m tales que:

$$nk = a - b$$
$$nm = b - c$$

De esto vemos que:

$$nk + nm = (a - b) + (b - c)$$
$$n(k + m) = a - c$$

Por lo tanto, $a \sim c$.

□

Dos números relacionados de esta forma se dicen *iguales módulo* n.

Definición 2.2 (Módulo)

Sean $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Decimos que $a = b$ módulo n, denotado por $a = b \mod n$, si y solo si $a \sim b$ con la relación de equivalencia descrita anteriormente.