Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Licenciatura en Matemática Algorítmica

Tarea

Autor:
Omar Porfirio García

Índice

Teoría de gráficas

Combinatoria

Notación
Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos a $[\![n]\!] := \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definición 1.1: Conjuntos finitos e infinitos

Sea X un conjunto cualquiera. X se considera *finito* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que existe una función biyectiva $f : X \to [\![n]\!]$ o bien $X = \varnothing$.

Si X no es finito, se dice *infinito*.

Definición 1.2: Cardinalidad

Sea X un conjunto finito. La *cardinalidad* de X se define por:

$$|X| := \begin{cases} 0, & X = \varnothing \\ n, & \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que existe } f : X \to [\![n]\!] \text{ biyectiva} \end{cases}$$

Teorema 1.1

Sean X, Y conjuntos finitos disjuntos, entonces:

$$|X \sqcup Y| = |X| + |Y|$$

Corolario 1.2: Principio aditivo

Sean $X_1, \ldots, X_n$ conjuntos finitos disjuntos por pares, entonces:

$$\left| \bigsqcup_{i=1}^{n} X_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |X_i|$$

Teorema 1.3: Principio de inclusión-exclusión

Sean X, Y conjuntos finitos, entonces:

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

Corolario 1.4: Principio de inclusión-exclusión generalizado

Sean $X_1, \ldots, X_n$ conjuntos finitos, entonces:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} X_i \right| = \sum_{k=1}^{n+1} \left((-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k \leq n} \left| \bigcap_{j=1}^{k} X_{i_j} \right| \right)$$

Teorema 1.5

Sean X, Y conjuntos finitos, entonces:

$$|X \times Y| = |X|\,|Y|$$

Corolario 1.6: Principio multiplicativo

Sean $X_1, \dots, X_n$ conjuntos finitos, entonces:

$$\left|\prod_{i=1}^{n} X_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |X_i|$$

Teorema 1.7

Sea X un conjunto finito, entonces:

$$|\mathfrak{P}(X)| = 2^{|X|}$$

Definición 1.3: Permutaciones

Sea $X = \{a_1, \dots, a_n\}$ un conjunto finito. Definimos a las *permutaciones* de A, denotado por S_X, como:

$$S_X := \{(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) : j \neq k \implies i_j \neq i_k\}$$

Teorema 1.8

Sea X un conjunto finito, entonces:

$$|S_X| = |X|!$$

Definición 1.4: Coeficiente binomial

Sean X un conjunto finito tal que $|X| = n$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq n$. El *coeficiente binomial* de n en k se define por:

$$\binom{n}{k} := |\{E \in \mathfrak{P}(X) : |E| = k\}|$$

Teorema 1.9

Sean $n, k \in \mathbb{N}$ tales que $k \leq n$, entonces:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Teorema 1.10: Propiedades del coeficiente binomial

Sean $n, k \in \mathbb{N}$ tales que $k \leq n$, entonces:

1. $\binom{n}{0} = 1$
2. $\binom{n}{1} = n$
3. $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
4. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
5. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Teorema 1.11: Binomio de Newton

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Corolario 1.12

Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Teorema 1.13: Principio del palomar

Sean X, Y conjuntos finitos tales que $|X| > |Y|$, entonces no existe $f : X \to Y$ inyectiva.

Teorema 1.14: Principio general del palomar

Sean X, Y conjuntos finitos tales que $|X| = n > m = |Y|$ y además existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n > km$, entonces para cada $f : X \to Y$ existe al menos un $y \in Y$ tal que $\left|f^{-1}(b)\right| > k$.

Teorema 1.15: Equivalencia del principio general del palomar

Sean X, Y conjuntos finitos tales que $|X| = n > m = |Y|$ y además existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq (k-1)m + 1$, entonces para cada $f : X \to Y$ existe al menos un $y \in Y$ tal que $\left|f^{-1}(b)\right| \geq k$.

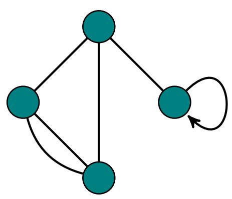
Gráficas

Definición 1.5: Gráfica

Una *gráfica* es una terna (V, E, φ) tal que:

1. $V \neq \varnothing$
2. $E \cap V = \varnothing$
3. $\varphi : E \to \{A \in \mathfrak{P}(V) : 0 < |A| \leq 2\}$ es una función.

V se denomina *conjunto de vértices* y E se denomina *conjunto de aristas*.



Definición 1.6: Conceptos básicos

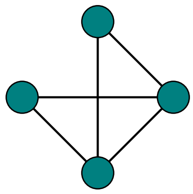
Sea $G = (V, E, \varphi)$ una gráfica.

- Si $v \in V$ y $e \in E$, entonces se dice que v *incide* en e si $v \in \varphi(e)$.

- Si $e \in E$, entonces a los $v, w \in V$ tales que $\varphi(e) = \{v, w\}$ se les dice *extremos* de e.
- Si dos vértices son extremos de una arista, se dice que son *adyacentes*.
- Si $e, f \in E$ tales que $\varphi(e) \cap \varphi(f) \neq \varnothing$, entonces se denominan *adyacentes*.
- A una arista $e \in E$ tal que $|\varphi(e)| = 1$ se denomina *lazo*, *bucle* o *loop*.
- A las aristas $e, f \in E$ tales que $e \neq f$, $|\varphi(e)| = |\varphi(f)| = 2$ y $\varphi(e) = \varphi(f)$ se denominan *múltiples*.

Definición 1.7: Gráfica simple

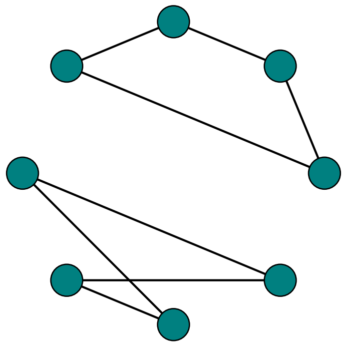
Sea G una gráfica. G se denomina *simple* si no tiene loops ni aristas múltiples.



Definición 1.8: Isomorfismo

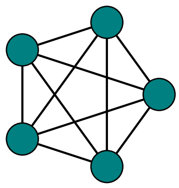
Sean $G = (V, E, \varphi), G' = (V', E', \varphi')$ gráficas. Un par de funciones (ϕ_v, ϕ_e) donde $\phi_v : V \to V', \phi_e : E \to E'$ son biyectivas y además para cada $e \in E$ tal que $\varphi(e) = \{u, v\}$ se cumple que $\varphi'(\phi_e(e)) = \{\phi_v(u), \phi_v(v)\}$ se denomina *isomorfismo* entre G, G'.

Si existe un isomorfismo entre G, G', entonces G y G' se dicen *isomorfas* y se denota por $G \cong G'$.



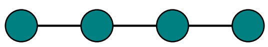
Definición 1.9: Gráfica completa

Sea $n \in \mathbb{N}$. La gráfica K_n simple tal que cada par de vértices son adyacentes se denomina *completa*.



Definición 1.10: Trayectoria

Sea $n \in \mathbb{N}$. La gráfica T_n simple se denomina *trayectoria* si $V(T_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $E(T_n) = \{v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n\}$.

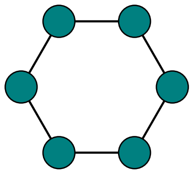


Definición 1.11: Ciclo

Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$. La gráfica C_n simple tal que:

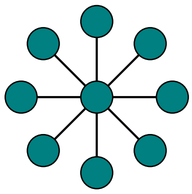
$$C_n = T_n + v_n v_1$$

se denomina *ciclo*.



Definición 1.12: Estrella

Sea $n \in \mathbb{N}$. La gráfica S_n simple tal que $V(S_n) = \{v_0, \ldots, v_n\}$ y $E(S_n) = \{v_0 v_k : 1 \leq k \leq n\}$ se denomina *estrella*.

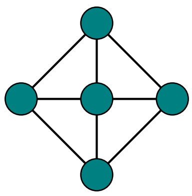


Definición 1.13: Rueda

Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$. La gráfica W_n simple tal que:

$$W_n = C_n + S_n$$

se denomina *rueda*.



Definición 1.14: Grado de un vértices

Sea G una gráfica y $v \in V(G)$, entonces definimos al *grado* de v como:

$$\deg_G(v) \coloneqq |\{e \in E(G) : v \in \varphi(e), |\varphi(e)| = 2\}| + 2\,|\{e \in E(G) : \varphi(e) = 1\}|$$

Además, definimos al *grado máximo* y *mínimo* de G como:

- $\delta(G) \coloneqq \min\limits_{v \in V(G)} \deg_G(v)$
- $\Delta(G) \coloneqq \max\limits_{v \in V(G)} \deg_G(v)$

Teorema 1.16

Sea G una gráfica, entonces:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2e(G)$$

Corolario 1.17

Cualquier gráfica tiene un número par de vértices impares.

Definición 1.15: Regularidad

Sea G una gráfica y $k \in \mathbb{N}$. G se denomina *k-regular* si $\delta(G) = k = \Delta(G)$. Una gráfica se dice solamente *regular* si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que es k-regular.

Teorema 1.18

Sea G una gráfica k-regular para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces:

$$e(G) = \frac{v(G)k}{2}$$

Definición 1.16: Representanción matricial de una gráfica

Sea $G = (V, E, \varphi)$ con $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. (vea la figura 1)

1. Matriz de incidencia
   La *matriz de incidencia* de G es una matriz $M_I \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ con $M_I = (m_{ij})$ donde:

$$m_{ij} := \begin{cases} 0, & v_i \notin \varphi(e_j) \\ 1, & v_i \in \varphi(e_j), |\varphi(e_j)| = 2 \\ 2, & v_i \in \varphi(e_j), |\varphi(e_j)| = 1 \end{cases}, M_I(G) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Matriz de adyacencia
   La *matriz de adyacencia* de G es una matriz $M_A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ con $M_A = (m_{ij})$ donde:

$$m_{ij} := \begin{cases} |\{e \in E : \varphi(e) = \{v_i, v_j\}\}|, & i \neq j \\ 2|\{e \in E : \varphi(e) = \{v_i\}\}|, & i = j \end{cases}, M_A(G) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

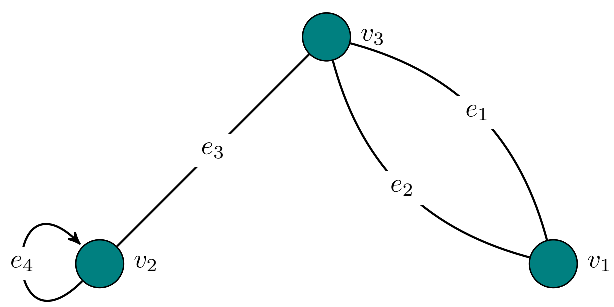


Figura 1: Gráfica de la definición 1.16

Teorema 1.19: Caracterización de las representanciones matriciales

Sea G una gráfica.

1. Matriz de incidencia
   La matriz de incidencia $M_I(G) = (m_{ij})$ de G cumple que:
   - $\forall i, j, m_{ij} \in \{0, 1, 2\}$
   - $\forall j, \sum_i a_{ij} = 2$

   Recíprocamente, si una matriz A cumple los dos puntos anteriores, entonces existe una gráfica G tal que $A = M_I(G)$.
2. Matriz de adyacencia
   La matriz de adyacencia $M_A(G) = (m_{ij})$ de G cumple que:
   - $M_A(G) \in \mathcal{M}_{\mathbb{N}}(nn)$
   - $\forall i, 2 \mid m_{ii}$
   - $M_A(G)$ es simétrica.

   Recíprocamente, si una matriz A cumple los tres puntos anteriores, entonces existe una gráfica G tal que $A = M_A(G)$.

Teorema 1.20

Sea G una gráfica, entonces:

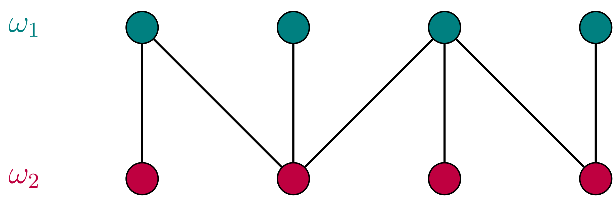
- Si $M_I(G) = (m_{ij})$ es su matriz de incidencia, entonces:
$$\deg_G(v_i) = \sum_j m_{ij}$$
- Si $M_A(G) = (m_{ij})$ es su matriz de adyacencia, entonces:
$$\deg_G(v_i) = \sum_j m_{ij} = \sum_j m_{ji}$$
- Para ambas matrices se cumple que:
$$2e(G) = \sum_{i,j} m_{ij}$$

Teorema 1.21

Sea G una gráfica y $M_A(G) = (m_{ij})$ su matriz de adyacencia. G es simple si y solo si para cada i, j, $0 \leq m_{ij} \leq 1$.

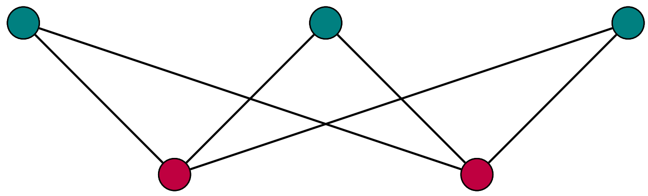
Definición 1.17: Gráfica bipartita

Sea G una gráfica. G se denomina *bipartita* si existe una bipartición $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ de $V(G)$ tal que para cada $e \in E(G)$ esta tiene un extremo en ω_1 y otro en ω_2.



Definición 1.18: Gráfica bipartita completa

Sean $n, m \in \mathbb{N}$. La gráfica K_{nm} bipartita con bipartición $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ tal que $|\omega_1| = n$ y $|\omega_2| = m$ tal que cada vértice en ω_1 es adyacente a cada vértice en ω_2 o viceversa se denomina *bipartita completa*.

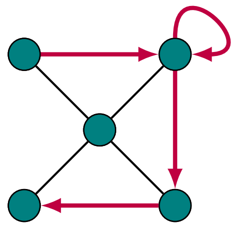


Definición 1.19: Trayectoria

Sea G una gráfica. Una *trayectoria* en G es una sucesión de vértices y aristas tal que:

$$T = \{v_0, e_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n\}$$

con $\varphi(e_i) = \{v_i, v_{i+1}\}$. La *longitud* de la trayectoria, denotada por $\ell(T)$, es el número de aristas en la sucesión.



Definición 1.20: Tipos de trayectorias y concatenación

Sea G una gráfica y $T = \{v_0, e_0, \ldots, e_{n-1}, v_n\}, S = \{w_0, f_0, \ldots, f_{m-1}, w_m\}$ trayectorias en G.

- T es *cerrada* si $v_0 = v_n$.
- T es un *camino* si para cada i, j, si $i \neq j$, entonces $e_i \neq e_j$.
- T^{-1} se denomina *trayectoria inversa* de T y se define como:

$$T^{-1} := \{v_n, e_{n-1}, \ldots, e_0, v_0\}$$

- Si $v_n = w_0$, entonces $T \frown S$, denominado T *concatenado con* S, se define como:

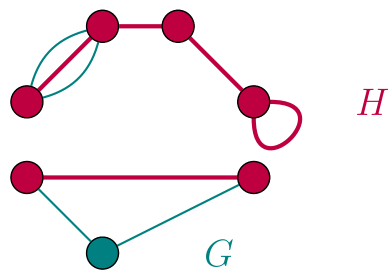
$$T \frown S := \{v_0, e_0, \ldots, v_n = w_0, f_0, \ldots, w_m\}$$

Definición 1.21: Conexidad

Sea G una gráfica y $u, v \in V(G)$. u, v se dicen *conectados* si existe una trayectoria tal que $T = \{u, \ldots, v\}$. G se dice *conexa* si cada par de vértices están conectados. Si G no es conexa, se dice *disconexa*

Definición 1.22: Subgráfica

Sean $G = (V, E, \varphi), H = (V', E', \varphi')$ gráficas. H se dice *subgráfica* de G si y solo si $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ y para cada $e \in E'$, $\varphi'(e) = \varphi(e)$, y se denota por $H \leq G$.



Definición 1.23: Subgráfica inducida y generadora

Sean $G = (V, E, \varphi), H = (V', E', \varphi')$ gráficas con $H \leq G$.

1. Si $V = V'$, entonces H se denomina *subgráfica generadora* de G.
2. Si cada $e \in E$ con extremos en V' pertenece en E', entonces H se denomina *subgráfica inducida* por V'.
3. Sea $W \subseteq V$, entonces la subgráfica inducida por W se denota por $G[W]$.

Teorema 1.22: Caracterización de las subgráficas generadora e inducida

Sea G una gráfica y $H \leq G$.

1. H es generadora si y solo si existe $X \subseteq E(G)$ tal que $G - X = H$.
2. H es inducida si y solo si existe $Y \subseteq V(G)$ tal que $G - Y = H$.

Definición 1.24: Relación de conexidad

Sea G una gráfica. La relación $\sim \subseteq V(G)$ definida como:

$$u \sim v \iff u \text{ está conectado con } v$$

es de equivalencia.

Sea $v \in V(G)$, entonces definimos a la *componente* de v como:

$$C(v) := [v] = \{u \in V(G) : u \sim v\}$$

Además, definimos al *número de componentes* de G como:

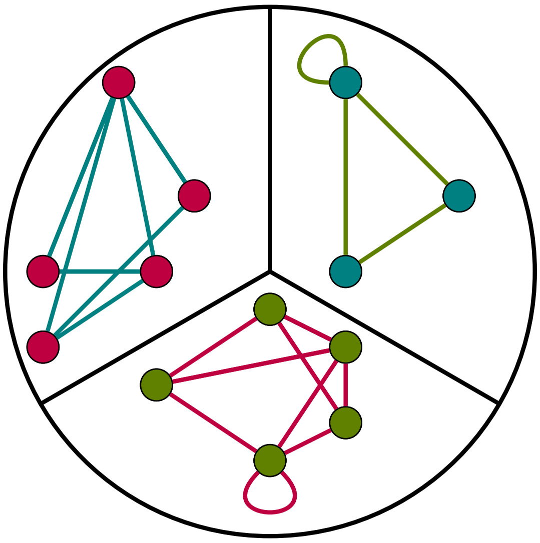
$$c(G) := |V(G)/\sim| = |\{C(v) : v \in V(G)\}|$$

Teorema 1.23

Sea G una gráfica. G es conexa si y solo si $c(G) = 1$.

Definición 1.25: Componente conexa

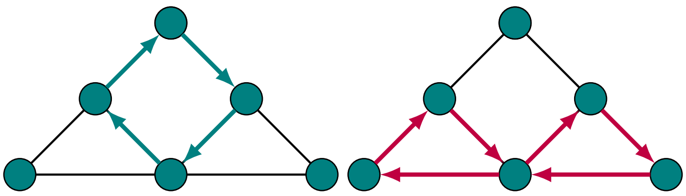
Sea G una gráfica y $v \in V(G)$. La *componente conexa* de G dado v es la subgráfica inducida $G[C(v)]$.



Definición 1.26: Circuitos y ciclos

Sea G una gráfica y T una trayectoria de G.

1. T se denomina *circuito* si T es cerrada.
2. T se denomina *ciclo* si es cerrada y para cada i, j, si $\{i, j\} \neq \{0, \ell(T)\}$, entonces $v_i \neq v_j$. Si G admite al menos un ciclo, se dice que es *cíclica*. Si G no es cíclica, se denomina *acíclica*.



Teorema 1.24

Sea G una gráfica tal que $\delta(G) \geq 2$, entonces G tiene al menos un ciclo.

Corolario 1.25

Sea G una gráfica 2-regular simple, entonces cada componente conexa de G es isomorfa a C_k para algún $k \in \mathbb{N}$.

Corolario 1.26

Sea G una gráfica. Si G es acíclica, entonces $\delta(G) \leq 1$

Teorema 1.27

Sea G una gráfica. G es bipartita si y solo si no admite ciclos impares.

Definición 1.27: Distancia entre vértices

Sea G una gráfica. La función $\mathrm{d} : V(G)^2 \to \mathbb{N}$ definida por:

$$\mathrm{d}(u,v) = \begin{cases} \min\{\ell(T) : T \text{ es un camino de } u \text{ a } v\}, & u,v \text{ están conectados} \\ \infty, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

se denomina *distancia* y $\mathrm{d}(u,v)$ se denomina *distancia entre* u *y* v.

Teorema 1.28

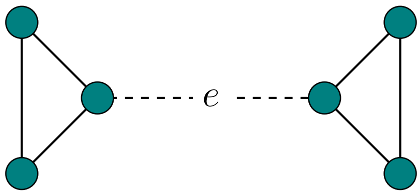
Sea G una gráfica y $\mathrm{d} : V(G)^2 \to \mathbb{N}$ la función distancia, entonces d es una métrica, es decir:

1. $\forall u, v \in V(G), \mathrm{d}(u,v) = 0 \iff u = v$
2. $\forall u, v \in V(G), \mathrm{d}(u,v) = \mathrm{d}(v,u)$
3. $\forall u, v, w \in V(G), \mathrm{d}(u,v) \leq \mathrm{d}(u,w) + \mathrm{d}(w,v)$

Definición 1.28: Arista de corte

Sea G una gráfica y $e \in E(G)$. e se denomina *de corte* si:

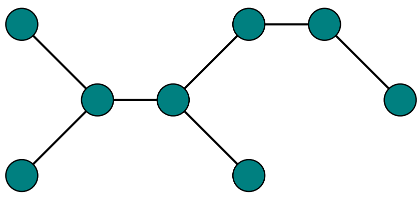
$$c(G) < c(G - e)$$



Definición 1.29: Árboles y bosques

Sea G una gráfica. G se denomina *bosque* si es acíclica y cada componente conexa de G se denomina *árbol*. En particular, si G también es conexa, entonces G se denomina *árbol*.

Cada vértice de grado 1 se denomina *hoja*.



Definición 1.30: Árbol generador

Sea G una gráfica y $T \leq G$. T se dice *árbol generador* de G si es un árbol y es una subgráfica generadora.

Teorema 1.29

Sea G una gráfica. G es conexa si y solo si admite un árbol generador.

Teorema 1.30: Caracterización de los árboles

Sea G una gráfica conexa. G es un árbol si y solo si:

1. para cada par de vértices existe un único camino que los conecta.
2. todas sus aristas son de corte.

Teorema 1.31

Sea T un árbol. Si $V(T) \geq 2$, entonces existen al menos dos vértices de grado 1.

Teorema 1.32

Sea G una gráfica, entonces $v(G) \leq e(G) + c(G)$.

Corolario 1.33

Sea G una gráfica conexa, entonces $v(G) \leq e(G) + 1$.

Corolario 1.34

Sea G una gráfica conexa. G es un árbol si y solo si $e(G) = v(G) - 1$

Definición 1.31: Vértice de corte

Sea G una gráfica y $v \in V(G)$. v se denomina *de corte* si existe una bipartición $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ de $E(G)$ tal que $G[\omega_1] \cap G[\omega_2] = \{v\}$.

Teorema 1.35

Sea G una gráfica y $v \in V(G)$.

1. Si v tiene algún bucle, entonces v es de corte.
2. Si v no tiene bucles, v es de corte si y solo si $c(G) < c(G - v)$.

Teorema 1.36

Sea T un árbol y $v \in V(T)$. v es de corte si y solo si $\deg_T(v) > 1$.

Corolario 1.37

Sea G una gráfica sin bucles con $v(G) > 1$, entonces G tiene al menos dos vértices no de corte.

Conectividad

Definición 1.32: Conjunto de corte por vértices

Sea G una gráfica y $S \subseteq V(G)$. S se denomina *conjunto de corte por vértices* si $G - S$ es disconexa.

Definición 1.33: Conexidad

Sea G una gráfica. G se denomina k-*conexa* para algún $k \in \mathbb{N}$ si para cualquier $S \subseteq V(G)$ de corte, $k \leq |S|$.

Definición 1.34: Conectividad

Sea G una gráfica. La *conectividad* de G, denotada por $\kappa(G)$, se define por:

$$\kappa(G) := \text{mín}\,\{|S| : S \subseteq V(G) \text{ es de corte}\} = \text{máx}\,\{k \in \mathbb{N} : G \text{ es } k\text{-conexa}\}$$