Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Licenciatura en Matemática Algorítmica

Lista de ejercicios

Autores:
Omar Porfirio García
Alejandra Sánchez Barajas

Ejercicio 1

Determine si el conjunto dado es una base para el espacio vectorial a que se refiere: en P_3:

$$\{1, 1+x, 1+x^2, 3+2x+x^3\}$$

Solución: Demostremos que $\gamma = \left\{ \underbrace{1}_{v_1}, \underbrace{1+x}_{v_2}, \underbrace{1+x^2}_{v_3}, \underbrace{3+2x+x^3}_{v_4} \right\}$ es linealmente independiente.

Sea $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ la base canónica de P_3, entonces:

$$[1]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [1+x]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [1+x^2]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [3+2x+x^3]_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces para demostrar que γ es L.I., debemos demostrar que la matriz $\left[\ [v_1]_\beta \mid [v_2]_\beta \mid [v_3]_\beta \mid [v_4]_\beta\ \right]$ es invertible.

$$A = \left[\ [v_1]_\beta \mid [v_2]_\beta \mid [v_3]_\beta \mid [v_4]_\beta\ \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado que la matriz es triangular, entonces $\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$. Por lo tanto, A es invertible y entonces γ es L.I.

Puesto que $\dim(P_3) = 4$, entonces γ necesariamente genera P_3 y por consiguiente es base.

Ejercicio 2

Determine si el conjunto dado es una base para el espacio vectorial a que se refiere: en M_{22}:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Solución: Notemos que $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] = 2\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Por lo tanto, el conjunto no es L.I. y entonces no es base de M_{22}.

Ejercicio 3

Encuentre una base para el espacio solución del sistema homogéneo dado:

$$2x + y = 0$$
$$x - 3y = 0$$

Solución: El sistema se puede representar como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se tiene que A es invertible, pues:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (2)(-3) - (1)(1) = -6 - 1 = -7 \neq 0$$

Lo cual implica que el sistema tiene como solución única la trivial. Por lo tanto, el espacio solución es $\{\hat{0}\}$ y su base es $\varnothing$. (Recordemos que $\operatorname{gen}(\varnothing) = \{\hat{0}\}$)

Ejercicio 4

Encuentre bases para los 4 espacios fundamentales. Determine el rango y la nulidad de la matriz dada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución:

a) Espacio columna

Sabemos que:

$$C_A = \operatorname{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Determinemos cuáles son los vectores linealmente independientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_2 - 3R_1}{\to} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -6 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}R_2}{\to} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \overset{R_1 + \frac{1}{2}R_2}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}R_2}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Entonces $\left\{ \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \right\}$ es L.I. y por tanto $\left\{ \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \right\}$ es base de C_A. Además, se tiene que $\dim(C_A) = 2$.

b) Espacio renglón

Sabemos que:

$$R_A = \operatorname{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Demostremos que $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ es L.I. Supongamos que β no es L.I., entonces existiría $c \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3c \\ 1c \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde obtenemos que $2 = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, β es L.I. y por consiguiente base de R_A. Además, $\dim(R_A) = 2$.

c) Imagen

Sabemos que $\operatorname{Im}(A) = C_A$, entonces $\left\{ \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \right\}$ es base de $\operatorname{Im}(A)$ y además $\rho(A) = 2$.

d) Núcleo

Sabemos que $\operatorname{N}(A) = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^3 : A\hat{x} = \hat{0}\}$. Si $\hat{x} = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right]$, entonces se tiene el sistema homogéneo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De la reducción del inciso (a) se tiene que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}z \\ \frac{3}{2}z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que $\operatorname{N}(A) = \operatorname{gen}\left\{ \left[\begin{smallmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \right\} = \operatorname{gen}\left\{ \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] \right\}$ y entonces $\left\{ \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] \right\}$ es base de $\operatorname{N}(T)$. Además, $\nu(A) = 2$.

Ejercicio 5

Sea $T : M_{22} \to M_{22}$ la transformación lineal definida por:

$$T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

a) ¿Cuáles, si hay alguna, de las siguientes matrices están en $\mathrm{N}\,(T)$?

I) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

II) $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

III) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

b) ¿Cuáles, si hay alguna, de las matrices del inciso (a) están en $\mathrm{Im}\,(T)$?

c) Describa el núcleo e imagen de T.

Solución:

a) Resulta que:

$$T\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$
$$T\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$T\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Por lo que la única matriz que está en $\mathrm{N}\,(T)$ es (aII).

b) Del inciso anterior (a) se tiene que la única matriz que está en $\mathrm{Im}\,(T)$ es (aIII) pues es imagen de ella misma. Las demás no, pues sus componentes $(1, 2)$ y $(2, 1)$ no son cero.

c) Obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\,(T) &= \{A \in M_{22} : T(A) = \hat{0}\} \\
&= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22} : T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \\
&= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22} : \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \\
&= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22} : a = d = 0\right\} = \left\{\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \in M_{22} : b, c \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_{22} : b, c \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{gen}\,\{e_{12}, e_{21}\}
\end{aligned}$$

Concluyendo que $\{e_{12}, e_{21}\}$ es base de $\mathrm{N}\,(T)$ y $\nu\,(T) = 2$.

Ahora para la imagen obtenemos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(T) &= \{A \in M_{22} : \exists B \in M_{22}, T(B) = A\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22} : \exists \begin{bmatrix} t & u \\ v & w \end{bmatrix} \in M_{22}, T\begin{bmatrix} t & u \\ v & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22} : \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22} : a = t, d = w, b = c = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} \in M_{22} : t, w \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{22} : t, w \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{gen}\{e_{11}, e_{22}\}
\end{aligned}$$

Concluyendo que $\{e_{11}, e_{22}\}$ es base de $\operatorname{Im}(T)$ y $\rho(T) = 2$.

Ejercicio 6

Encuentre la nulidad y rango de T de la transformación dada. Determinar si T es un isomorfismo, $T : M_{22} \to M_{22}$ definida por $T(A) = AB$ donde $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Solución: Sea $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$, entonces:

$$T(A) = T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b & b-a \\ c-d & d-c \end{bmatrix}$$

Obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\operatorname{N}(T) &= \{A \in M_{22} : T(A) = \hat{0}\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22} : T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22} : \begin{bmatrix} a-b & b-a \\ c-d & d-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22} : a-b = 0, b-a = 0, c-d = 0, d-c = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22} : a = b, c = d \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ c & c \end{bmatrix} \in M_{22} : a, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{22} : a, c \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{gen}\{e_{11} + e_{12}, e_{21} + e_{22}\}
\end{aligned}$$

Por lo que $\{e_{11} + e_{12}, e_{21} + e_{22}\}$ es base de $\operatorname{N}(T)$ y $\nu(T) = 2$. Por el teorema de la dimensión sabemos que $\rho(T) = \dim(M_{22}) - \nu(T) = 4 - 2 = 2$. En conclusión, T no es isomorfismo.

Ejercicio 7

Verificar que el siguiente es un producto interno en $\mathbb{R}^2$:

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$$

Solución: Comprobemos las cuatro características del producto interno. Sean $u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^\mathsf{T}, v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}^\mathsf{T}, w = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle u, v \rangle &= u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 3u_2v_2 \\
&= v_1u_1 - v_1u_2 - v_2u_1 + 3v_2u_2 = \langle v, u \rangle
\end{aligned}$$

2. $\langle u, \alpha v + w \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$

$$\begin{aligned}\langle u, \alpha v + w \rangle &= u_1 (\alpha v_1 + w_1) - u_1 (\alpha v_2 + w_2) - u_2 (\alpha v_1 + w_1) + 3u_2 (\alpha v_2 + w_2) \\ &= \alpha u_1 v_1 + u_1 w_1 - \alpha u_1 v_2 - u_1 w_2 - \alpha u_2 v_1 - u_2 w_1 + 3\alpha u_2 v_2 + 3u_2 w_2 \\ &= \alpha (u_1 v_1 - u_1 v_2 - u_2 v_1 + 3u_2 v_2) + u_1 w_1 - u_1 w_2 - u_2 w_1 + 3u_2 w_2 \\ &= \alpha \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle\end{aligned}$$

3. $\langle u, u \rangle \geq 0$

$$\begin{aligned}\langle u, u \rangle &= u_1 u_1 - u_1 u_2 - u_2 u_1 + 3u_2 u_2 \\ &= u_1^2 - 2u_1 u_2 + 3u_2^2 \\ &= \left(u_1^2 - 2u_1 u_2 + u_2^2\right) + 2u_2^2 \\ &= (u_1 - u_2)^2 + 2u_2^2 \geq 0\end{aligned}$$

4. $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = \hat{0}$

   Del inciso anterior sabemos que $\langle u, u \rangle = (u_1 - u_2)^2 + 2u_2^2$, por lo que si $u = \hat{0}$, entonces $\langle u, u \rangle = 0$.

   Si $\langle u, u \rangle = 0$, entonces $(u_1 - u_2)^2 + 2u_2^2 = 0$ y dado que ambos términos son no negativos, necesariamente $u_1 - u_2 = 0$ y $u_2 = 0$. En conclusión, $u_1 = u_2 = 0$, o equivalentemente, $u = \hat{0}$.

Ejercicio 8

Considere el espacio vectorial V de los polinomios con producto interno definido por $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$ y los polinomios $f(t) = t + 2$, $g(t) = 3t - 2$ y $h(t) = t^2 - 2t - 3$. Hallar:

a) $\langle f, g \rangle$

b) $\langle f, h \rangle$

c) $\|f\|$

Solución:

a) $\langle f, g \rangle$

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \int_0^1 f(t)g(t)\, dt = \int_0^1 (t+2)(3t-2)\, dt \\ &= \int_0^1 \left(3t^2 + 4t - 4\right) dt \\ &= \left[t^3 + 2t^2 - 4t\right]_0^1 \\ &= 1^2 + 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = -1\end{aligned}$$

b) $\langle f, h \rangle$

$$\begin{aligned}\langle f, h \rangle &= \int_0^1 f(t)h(t)\, dt = \int_0^1 (t+2)\left(t^2 - 2t - 3\right) dt \\ &= \int_0^1 \left(t^3 - 7t - 6\right) dt \\ &= \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{7}{2}t^2 - 6t\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1^3 - \frac{7}{2} \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -\frac{37}{4}\end{aligned}$$

c) $\|f\|$

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \int_0^1 f(t)^2 \ dt = \int_0^1 (t+2)^2 \ dt \\ &= \int_2^3 u^2 \ du = \left[\frac{1}{3}u^3\right]_2^3 = \frac{1}{3}\left(3^3 - 2^3\right) = \frac{19}{3} \\ &\implies \|f\| = \frac{\sqrt{57}}{3}\end{aligned}$$

Ejercicio 9

Sea $S = \left\{v_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^\mathsf{T}, v_2 = \begin{bmatrix}1 & 2 & -3\end{bmatrix}^\mathsf{T}, v_3 = \begin{bmatrix}5 & -4 & -1\end{bmatrix}^\mathsf{T}\right\}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^3$.

a) Probar que S es un conjunto ortogonal y que es una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Escribir $v = \begin{bmatrix}1 & 5 & -7\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ como combinación de los vectores que pertenecen a S.

Solución:

a) Comprobemos que S es ortogonal.

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix} = 1 + 2 - 3 = 0$$
$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}5\\-4\\-1\end{bmatrix} = 5 - 4 - 1 = 0$$
$$\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}5\\-4\\-1\end{bmatrix} = 5 - 8 + 3 = 0$$

Por lo tanto, S es ortogonal, por consiguiente L.I. y entonces S es base de $\mathbb{R}^3$.

b) Sabemos que la descomposición ortogonal de v en S es la suma de sus proyecciones:

$$\operatorname{proj}_{v_1}(v) = \frac{\begin{bmatrix}1\\5\\-7\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\|^2} \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{1+5-7}{1+1+1} \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{proj}_{v_2}(v) = \frac{\begin{bmatrix}1\\5\\-7\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}\right\|^2} \begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix} = \frac{1+10+21}{1+4+9} \begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix} = \frac{16}{7} \begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{proj}_{v_3}(v) = \frac{\begin{bmatrix}1\\5\\-7\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}5\\-4\\-1\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}5\\-4\\-1\end{bmatrix}\right\|^2} \begin{bmatrix}5\\-4\\-1\end{bmatrix} = \frac{5-20+7}{25+16+1} \begin{bmatrix}5\\-4\\-1\end{bmatrix} = -\frac{4}{21} \begin{bmatrix}5\\-4\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\5\\-7\end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{16}{7} \begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix} - \frac{4}{21} \begin{bmatrix}5\\-4\\-1\end{bmatrix}$$

Ejercicio 10

Encontrar una matriz ortogonal Q cuyo primer renglón sea $\begin{bmatrix}1/3 & 2/3 & 2/3\end{bmatrix}$.

Solución: Notemos que:

$$\begin{vmatrix}1/3 & 1 & 0\\2/3 & 0 & 0\\2/3 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1/3 & 1\\2/3 & 0\end{vmatrix} = -\frac{2}{3} \neq 0$$

entonces $\left\{v_1 = \frac{1}{3}\left[\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}\right], v_2 = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right], v_3 = \left[\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right]\right\}$ es L.I. Ortogonalicemos:

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\\
u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1\\
&= \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{bmatrix}\right\|^2}\begin{bmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{9}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}8\\-2\\-2\end{bmatrix}\\
u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2\\
&= \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{bmatrix}\right\|^2}\begin{bmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}8/9\\-2/9\\-2/9\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}8/9\\-2/9\\-2/9\end{bmatrix}\right\|^2}\begin{bmatrix}8/9\\-2/9\\-2/9\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix}8/9\\-2/9\\-2/9\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Entonces el conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ es un conjunto ortogonal. Normalicemos:

$$\begin{aligned}
\|u_1\| &= \left\|\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\right\| = \frac{1}{3}\left\|\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\right\| = \frac{1}{3}\sqrt{1+4+4} = 1 \implies u_1' = \begin{bmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{bmatrix}\\
\|u_2\| &= \left\|\frac{1}{9}\begin{bmatrix}8\\-2\\-2\end{bmatrix}\right\| = \frac{1}{9}\left\|\begin{bmatrix}8\\-2\\-2\end{bmatrix}\right\| = \frac{1}{9}\sqrt{64+4+4} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \implies u_2' = \begin{bmatrix}2\sqrt{2}/3\\-\sqrt{2}/6\\-\sqrt{2}/6\end{bmatrix}\\
\|u_3\| &= \left\|\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{1+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies u_3' = \begin{bmatrix}0\\-\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto $\{u_1', u_2', u_3'\}$ es ortonormal y entonces la matriz:

$$\begin{bmatrix}1/3 & 2/3 & 2/3\\ 2\sqrt{2}/3 & -\sqrt{2}/6 & -\sqrt{2}/6\\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{bmatrix}$$

es ortogonal.

Ejercicio 11

Sea $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 4\\ 7 & -5 & 2\end{bmatrix}$. Determine si A es una matriz ortogonal. Si no lo es, ¿cómo podría convertir a A en una matriz ortogonal?

Ejercicio 12

Encuentre una base ortogonal empleando Gram-Schmidt para el subespacio W de $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x - y + 2z = 0 \right\}$$

Solución: Obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} W &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x - y + 2z = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x + 2z = y \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x + 2z \\ z \end{bmatrix} : x, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2z \\ z \end{bmatrix} : x, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} : x, z \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Dado que $\left\{ v_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], v_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \right\}$ es L.I., entonces es base de W. Ortogonalicemos:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo que $\{u_1, u_2\}$ es una base ortogonal de W.

Ejercicio 13

Encuentre una base ortogonal empleando Gram-Schmidt para $\mathbb{R}^3$ que contenga al vector:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Solución: Notemos que:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

entonces $\left\{v_1=\left[\begin{smallmatrix}3\\-1\\5\end{smallmatrix}\right], v_2=\left[\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right], v_3=\left[\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right]\right\}$ es L.I. y entonces base de $\mathbb{R}^3$. Ortogonalicemos:

$$u_1 = v_1 = \begin{bmatrix}3\\-1\\5\end{bmatrix}$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\-1\\5\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}3\\-1\\5\end{bmatrix}\right\|^2}\begin{bmatrix}3\\-1\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{3}{35}\begin{bmatrix}3\\-1\\5\end{bmatrix} = \frac{1}{35}\begin{bmatrix}26\\3\\-15\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\-1\\5\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}3\\-1\\5\end{bmatrix}\right\|^2}\begin{bmatrix}3\\-1\\5\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}26/35\\3/35\\-3/7\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}26/35\\3/35\\-3/7\end{bmatrix}\right\|^2}\begin{bmatrix}26/35\\3/35\\-3/7\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{35}\begin{bmatrix}3\\-1\\5\end{bmatrix} - \frac{3}{26}\begin{bmatrix}26/35\\3/35\\-3/7\end{bmatrix} = \frac{1}{26}\begin{bmatrix}0\\25\\5\end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left\{\left[\begin{smallmatrix}3\\-1\\5\end{smallmatrix}\right], \frac{1}{35}\left[\begin{smallmatrix}26\\3\\-15\end{smallmatrix}\right], \frac{1}{26}\left[\begin{smallmatrix}0\\25\\5\end{smallmatrix}\right]\right\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 14

Calcule una base para el subespacio H y para $H^{\perp}$:

$$H = \left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + 3z - w = 0\right\}$$

Solución: Obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} H &= \left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + 3z - w = 0\right\} = \left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + 3z = w\right\} \\ &= \left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\\2x-y+3z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x,y,z \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}x\\0\\0\\2x\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\y\\0\\-y\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\z\\3z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x,y,z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x\begin{bmatrix}1\\0\\0\\2\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}0\\0\\1\\3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x,y,z \in \mathbb{R}\right\} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\3\end{bmatrix}\right\} \end{aligned}$$

Dado que $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\3\end{bmatrix}\right\}$ es L.I., entonces es base de H.

$$\begin{aligned}
H^{\perp} &= \{\hat{x}\in\mathbb{R}^4 : \forall\hat{y}\in H, \langle\hat{x},\hat{y}\rangle = 0\}\\
&= \left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4 : \forall\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}\in H, \begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=0\right\}\\
&= \left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4 : \forall x,y,z\in\mathbb{R}, \begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\\2x-y+3z\end{bmatrix}=0\right\}\\
&= \left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4 : \forall x,y,z\in\mathbb{R}, ax+by+cz+d\,(2x-y+3z)=0\right\}\\
&= \left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4 : \forall x,y,z\in\mathbb{R}, (a+2d)x+(b-d)y+(c+3d)z=0\right\}
\end{aligned}$$

En particular, si $x,y=0$, $c=-3d$; si $y,z=0$, $a=-2d$ y si $x,z=0$, $b=d$.

$$\begin{aligned}
H^{\perp} &= \left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4 : a=-2d, b=d, c=-3d\right\}\\
&= \left\{\begin{bmatrix}-2d\\d\\-3d\\d\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4 : d\in\mathbb{R}\right\} = \left\{d\begin{bmatrix}-2\\1\\-3\\1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4 : d\in\mathbb{R}\right\} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\-3\\1\end{bmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\-3\\1\end{bmatrix}\right\}$ es base de $H^{\perp}$.

Ejercicio 15

Calcule una base para el subespacio H y para $H^{\perp}$:

$$H = \left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 : x=y=z\right\}$$

Solución: Obtenemos lo siguiente:

$$H = \left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 : x=y=z\right\} = \left\{\begin{bmatrix}x\\x\\x\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 : x\in\mathbb{R}\right\} = \left\{x\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 : x\in\mathbb{R}\right\} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

Por lo que $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ es base de H.

$$
\begin{aligned}
H^{\perp} &= \left\{ \hat{x} \in \mathbb{R}^3 : \forall \hat{y} \in H, \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \forall \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in H, \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \forall x \in \mathbb{R}, \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \forall x \in \mathbb{R}, ax + bx + cx = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \forall x \in \mathbb{R}, (a + b + c)x = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a + b + c = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a = -b - c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -b - c \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : b, c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ b \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : b, c \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{gen} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ es base de $H^{\perp}$.