UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIAS

Sistemas Lineales y no Lineales

Nombre: *Carlos Omar Rodriguez Vazquez* Codigo: *219570126*

Materia: *Modelado y Simulación de Sistemas* Profesor: *Jairo Cain Sanchez Estrada*
Fecha de Entrega: *August 19, 2024*

1. Representa en espacios de estadis los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

   (a) $L\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}q(t) + R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q(t) + \frac{x}{\epsilon A}q = v$
   $M\ddot{x} + B\dot{x} + kx + \frac{q^2}{2\epsilon A} = f_s(t)$
   El sistema de ecuaciones diferenciales consta de **2 ecuaciones diferenciales** y son de **orden 2** ambas, por lo que se proponen **4 nuevas variables**.

$$\begin{aligned} w_1 &= q \\ w_2 &= \dot{q} \\ w_3 &= x \\ w_4 &= \dot{x} \end{aligned}$$

   Derivando estas nuevas variables, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \dot{q} \\ \dot{w}_2 &= \ddot{q} = \frac{1}{L}\left[v - \frac{x}{\epsilon A}q - R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q\right] \\ \dot{w}_3 &= \dot{x} \\ \dot{w}_4 &= \ddot{x} = \frac{1}{M}\left[f_s(t) - \frac{q^2}{2\epsilon A} - kx - B\dot{x}\right] \end{aligned}$$

   Sustituyendo en las nuevas variables, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= w_2 \\ \dot{w}_2 &= \frac{1}{L}\left[v - \frac{w_3}{\epsilon A}w_1 - Rw_2\right] \\ \dot{w}_3 &= w_4 \\ \dot{w}_4 &= \frac{1}{M}\left[f_s(t) - \frac{w_1^2}{2\epsilon A} - kw_3 - Bw_4\right] \end{aligned}$$

(b) $\ddot{\theta}_m + \dot{\theta}_m + 1 = 10i_a$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}i_a + 100i_a - 5\dot{\theta}_m = 50v_a$

El sistema de ecuaciones diferenciales consta de **2 ecuaciones diferenciales** y de **orden 2 y orden 1** respectivamente, por lo que se proponen **3 nuevas variables**.

$$\begin{aligned} w_1 &= \theta_m \\ w_2 &= \dot{\theta}_m \\ w_3 &= i_a \end{aligned}$$

Derivando estas nuevas variables, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \dot{\theta}_m \\ \dot{w}_2 &= \ddot{\theta}_m = 10i_a - 1 - \dot{\theta}_m \\ \dot{w}_3 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}i_a = 50v_a + 5\dot{\theta}_m - 100i_a \end{aligned}$$

Sustituyendo en las nuevas variables, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= w_2 \\ \dot{w}_2 &= 10w_3 - 1 - w_2 \\ \dot{w}_3 &= 50v_a + 5w_2 - 100w_3 \end{aligned}$$

(c) $(m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \left[\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)\right] + (m_1 + m_2)g \sin\theta_1 = 0$

$l_2\ddot{\theta}_2 + l_1 \left[\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)\right] + g\sin\theta_2 = 0$

El sistema de ecuaciones diferenciales consta de **2 ecuaciones diferenciales** y son de **orden 2** ambas, por lo que se propronen **4 nuevas variables**.

$$\begin{aligned} w_1 &= \theta_1 \\ w_2 &= \dot{\theta}_1 \\ w_3 &= \theta_2 \\ w_4 &= \dot{\theta}_2 \end{aligned}$$

Derivando estas nuevas variables, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \dot{\theta}_1 \\ \dot{w}_2 &= \ddot{\theta}_1 \\ \dot{w}_3 &= \dot{\theta}_2 \\ \dot{w}_4 &= \ddot{\theta}_2 \end{aligned}$$

Desarrollando el sistema de ecuacioens diferenciales, se obtiene:

$$(m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)\ddot{\theta}_2 = m_2 l_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_2^2 - (m_1 + m_2)g\sin\theta_1$$
$$l_2\ddot{\theta}_2 + l_1\cos(\theta_2 - \theta_1)\ddot{\theta}_1 - = l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1^2 - g\sin\theta_2$$

El cual se puede ver como:

$$\begin{bmatrix} (m_1 + m_2) & m_2 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 l_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_2^2 - (m_1 + m_2)g\sin\theta_1 \\ l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1^2 - g\sin\theta_2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo:

$$d = \frac{1}{(m_1+m_2)l_2 - m_2 l_1 l_2 \cos^2(\theta_2-\theta_1)}$$

$$\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix} = d\begin{bmatrix} l_2 & -m_2 l_2\cos(\theta_2-\theta_1)\\ -l_1\cos(\theta_2-\theta_1) & (m_1+m_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_2 l_2 \sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_2^2 - (m_1+m_2)g\sin\theta_1 \\ l_1\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1^2 - g\sin\theta_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix} = d\begin{bmatrix} m_2 l_2^2\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_2^2 - (m_1+m_2)gl_2\sin\theta_1 - m_2 l_2\cos(\theta_2-\theta_1)(l_1\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1^2 - g\sin\theta_2) \\ l_1\cos(\theta_2-\theta_1)((m_1+m_2)g\sin\theta_1 - m_2 l_2\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_2^2) + (m_1+m_2)(l_1\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1^2 - g\sin\theta_2)\end{bmatrix}$$

Por lo que

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{m_2 l_2^2\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_2^2 - (m_1+m_2)gl_2\sin\theta_1 - m_2 l_2\cos(\theta_2-\theta_1)(l_1\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1^2 - g\sin\theta_2)}{(m_1+m_2)l_2 - m_2 l_1 l_2\cos^2(\theta_2-\theta_1)}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{l_1\cos(\theta_2-\theta_1)((m_1+m_2)g\sin\theta_1 - m_2 l_2\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_2^2) + (m_1+m_2)(l_1\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1^2 - g\sin\theta_2)}{(m_1+m_2)l_2 - m_2 l_1 l_2\cos^2(\theta_2-\theta_1)}$$

Sustituyendo en las nuevas variables, se obtiene:

$$\dot{w}_1 w_2$$

$$\dot{w}_2 = \frac{m_2 l_2\sin(w_3-w_1)w_4^2 - (m_1+m_2)g\sin w_1 - m_2\cos(w_3-w_1)(l_1\sin(w_3-w_1)w_2^2 - g\sin w_3)}{(m_1+m_2) - m_2 l_1\cos^2(w_3-w_1)}$$

$$\dot{w}_3 = w_4$$

$$\dot{w}_4 = \frac{l_1\cos(w_3-w_1)((m_1+m_2)g\sin w_1 - m_2 l_2\sin(w_3-w_1)w_4^2) + (m_1+m_2)(l_1\sin(w_3-w_1)w_2^2 - g\sin w_3)}{(m_1+m_2)l_2 - m_2 l_1 l_2\cos^2(w_3-w_1)}$$

(d) $m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 - b_1\dot{x}_2 + k_1x_1 - k_1x_2 = f(t)$
$m_2\ddot{x}_2 - b_1\dot{x}_1 + b_1\dot{x}_2 - k_1x_1 + (k_1+k_2)x_2 = -f(t) + k_2z(t)$
El sistema de ecuaciones diferenciales consta de **2 ecuaciones diferenciales** y son de **orden 2** ambas, por lo que se proponen **4 nuevas variables**.

$$\begin{aligned} w_1 &= x_1\\ w_2 &= \dot{x}_1\\ w_3 &= x_2\\ w_4 &= \dot{x}_2 \end{aligned}$$

Derivando estas nuevas variable, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \dot{x}_1\\ \dot{w}_2 &= \ddot{x}_1 = \frac{1}{m_1}\left[f(t) + k_1x_2 - k_1x_1 + b_1\dot{x}_2 - -b_1\dot{x}_1\right]\\ \dot{w}_3 &= \dot{x}_2\\ \dot{w}_4 &= \ddot{x}_2 = \frac{1}{m_2}\left[-f(t) + k_2z(t) - (k_1+k_2)x_2 + k_1x_1 - b_1\dot{x}_2 + b_1\dot{x}_1\right] \end{aligned}$$

Sustituyendo en las nuevas variables, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= w_2\\ \dot{w}_2 &= \frac{1}{m_1}\left[f(t) + k_1w_3 - k_1w_1 + b_1w_4 - -b_1w_2\right]\\ \dot{w}_3 &= w_4\\ \dot{w}_4 &= \frac{1}{m_2}\left[-f(t) + k_2z(t) - (k_1+k_2)w_3 + k_1w_1 - b_1w_4 + b_1w_2\right] \end{aligned}$$

2. Poner en forma matricial las representaciones de espacios de estados obtenidos en el ejeericio anterios.

(a)

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \\ \dot{w}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_2 \\ \frac{1}{L}\left[v - \frac{1}{\epsilon A} w_1 w_3 - R w_2\right] \\ w_4 \\ \frac{1}{M}\left[f_s(t) - \frac{w_1^2}{2\epsilon A} - k w_3 - B w_4\right] \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 10 \\ 0 & 5 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 50 v_a \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \\ \dot{w}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_2 \\ \frac{-1}{(m_1+m_2)l_1}\left[m_2 l_2 \left[\dot{w}_4 \cos(w_3 - w_1) - w_4^2 \sin(w_3 - w_1)\right] + (m_1 + m_2) g \sin w_1\right] \\ w_4 \\ \frac{-1}{l_2}\left[l_1 \left[\dot{w}_2 \cos(w_3 - w_1) - w_2^2 \sin(w_3 - w_1)\right] + g \sin w_3\right] \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \\ \dot{w}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_1} & \frac{-b_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & \frac{-(k_1+k_2)}{m_2} & \frac{-b_1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f(t)}{m_1} \\ 0 \\ \frac{k_2 z(t) - f(t)}{m_2} \end{bmatrix}$$

3. Observando los espacios de estados representados de forma matricial en el ejercicio 2, clasifique a los sistemas segun sean lineales, no lineales, variantes en el tiempo o invariantes en el tiempo.

   (a) Ya que la representación matricial de los espacios de estados es de la forma $\dot{w} = f(w, u)$ por lo que es un sistema **no lineal variante en el tiempo**.

   (b) Ya que la representación matricial de los espacios de estados es de la forma $\dot{w} = Aw + B$ por lo que es un **sistema lineal invariante en el tiempo**.

   (c) Ya que la representación matricial de los espacios de estados es de la forma $\dot{w} = f(w, u)$ por lo que es un **sistema no lineal invariante en el tiempo**.

   (d) Ya que la representación matricial de los espacios de estados es de la forma $\dot{w} = Aw + B$ por lo que es un **sistema lineal invariante en el tiempo**.