UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIAS

Resolución de Ecuaciones Diferenciales utilizando la transformada de Laplace y Reducción de Diagrma de Bloques

Materia: *Teoría de Sistemas II* Profesor: *Emmanuel Cruz Zavala*
Unidad de Aprendizaje: *Repaso de Ecuaciones Diferenciales y Modelado*

Los Carlos
Aguirre Gonzales Alberto Carlos
Almanza Castañeda Carlos Eduardo
Rodriguez Vazquez Carlos Omar

Fecha de Entrega: September 10, 2024

1 Introducción

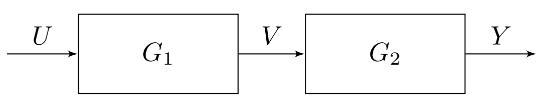
1.1 Función de Transferencia

La función de transferencia es una función que permite caracterizar las relaciones entrada-salida de componentes o sistemas que pueden describirse por ecuaciones diferenciales lineales, invariantes en el tiempo. Esta se define como la relación entre la tranformada de Laplace ($\mathcal{L}$) de la salida (función respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función excitación), bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero.

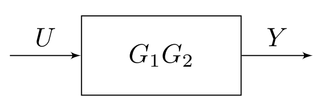
$$G(s) = \frac{\mathcal{L}_{(salida)}}{\mathcal{L}_{(entrada)}}|_{CI=0}$$

1.2 Algebra de Bloques Basica

Combinación de bloques en cascada



(a)



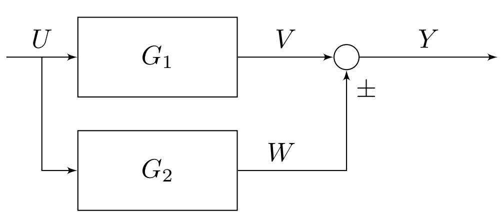
(b)

Figure 1: Diagrmas de bloques.

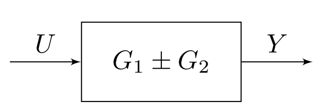
Los Diagramas de Bloque (a) y (b) son equivalentes. En ambos casos

$$Y = G_1 G_2 U.$$

Combinación de bloques en paralelo



(a)



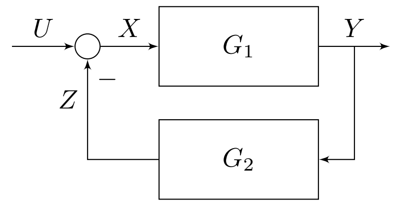
(b)

Figure 2: Diagrmas de bloques.

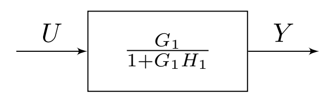
Los Diagramas de Bloque (a) y (b) son equivalentes. En ambos casos

$$Y = G_1 \pm G_2 U.$$

Retroalimentación negativa



(a)



(b)

Figure 3: Diagrmas de bloques.

Los Diagramas de Bloque (a) y (b) son equivalentes. En ambos casos

$$Y = \frac{G_1}{1 + G_1 H_1} U.$$

2 Desarrollo

2.1 Ecuación Diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 5e^{-2t} + t$$

$$x(0) = 5; \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -2$$

2.2 Transformada de Laplace

Aplicamos la Transformada de Laplace a la Ecuación Diferencial

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 5e^{-2t} + t\right\}$$

Considerenado los valores iniciales y que

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} s^2X(s) - 5s + 2 + 2sX(s) - 10 + X(s) &= \frac{5}{s+2} + \frac{1}{s^2} \\ (s^2 + 2s + 1)X(s) &= \frac{5}{s+2} + \frac{1}{s^2} + 5s \\ &\quad + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(s) = &\frac{5}{(s+2)(s^2+2s+1)} + \frac{1}{s^2(s^2+2s+1)} \\ &+ \frac{5s+8}{s^2+2s+1} \end{aligned}$$

2.3 Transformada Inverda de Laplace

Para resolver la ecuación, se debe aplicar la Transformada Inversa de Laplace a la ecuación anterior y para esto podemos utilizar dos métodos, usar la definición de la tranformada inversa de Laplace y fracciónes parciales.
Aplicando la transformada inversa de Laplace a la ecuación anterior, se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{X(s)\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+2)(s^2+2s+1)}\right\}\\ &+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+2s+1)}\right\}\\ &+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s+8}{s^2+2s+1}\right\}\\ &=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+2)(s+1)^2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right\}\\ &+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s+8}{(s+1)^2}\right\}\end{aligned}$$

Definición 1 *Transformada Inversa de Laplace Sea $F(s)$ una función analitica en el semiplano $Re(s) \geq a$ del plano complejo s. Supongamos que exite tres constantes positivas m, R_0 y k tales que $|F(s)| \leq \frac{m}{|s|^k}$ cuando $|s| > R^0$ en dicho semiplano. Entonces existe una función $f(t)$ cuya transformada de Laplace e $F(s)$; esta función está dada por*

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(s)e^{st}ds$$

La tranformada inversa de Laplace se puede calcular mediante la siguiente expresión.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(s)e^{st}ds=\sum_{k=1}^{n}\text{Res}\left[F(s)e^{st},s_k\right]$$

Por lo que calcular la transformada inversa de Laplace se reduce a encontrar el residuo de cada polo de la función $F(s)e^{st}$.
Aplicando esto a nuestra ecuación, resolveremos cada transformada inversa de laplace por separado.
Para

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+2)(s+1)^2}\right\}$$

Los polos de la función $F_1(s)e^{st}$ son $s=-2$ un polo de orden simple y $s=-1$ un polo de orden 2. Asi que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+2)(s+1)^2}\right\}=\text{Res}\left[F_1e^{st},-2\right]+\text{Res}\left[F_1e^{st},-1\right]$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\text{Res}\left[F_1e^{st},-2\right]&=\lim_{s\to-2}\frac{5e^{st}}{(s+1)^2}\\ &=5e^{-2t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Res}\left[F_1e^{st},-1\right]&=\lim_{s\to-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{5e^{st}}{(s+2)}\right]\\ &=\lim_{s\to-1}\frac{5t(s+2)e^{st}-5e^{st}}{(s+2)^2}\\ &=\lim_{s\to-1}\frac{5(t(s+2)-1)e^{st}}{(s+2)^2}\\ &=5te^{-t}-5e^{-t}\end{aligned}$$

Por lo que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+2)(s+1)^2}\right\}=5e^{-2t}+5te^{-t}-5e^{-t}$$

Ahora para

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right\}$$

Los polos de la función F_2e^{st} son $s=0$ y $s=-1$ ambos polos de orden 2. Asi que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right\}=\text{Res}\left[F_2e^{st},-1\right]+\text{Res}\left[F_2e^{st},0\right]$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\text{Res}\left[F_2e^{st},-1\right]&=\lim_{s\to-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{e^{st}}{s^2}\right]\\ &=\lim_{s\to-1}\frac{ts^2e^{st}-2se^{st}}{s^4}\\ &=te^{-t}+2e^{-t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Res}\left[F_2e^{st},0\right]&=\lim_{s\to0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{e^{st}}{(s+1)^2}\right]\\ &=\lim_{s\to0}\frac{(s+1)^2te^{st}-2(s+1)e^{st}}{(s+1)^4}\\ &=t-2\end{aligned}$$

Por lo que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right\}=te^{-t}+2e^{-t}+t-2$$

Ahora para

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s+12}{(s+1)^2}\right\}$$

Los polos de la función F_3e^{st} son $s=-1$ polo de orden 2. Asi que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s+8}{(s+1)^2}\right\}=\text{Res}\left[F_3e^{st},-1\right]$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\text{Res}\left[F_3e^{st},-1\right]&=\lim_{s\to-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[(5s+8)e^{st}\right]\\ &=\lim_{s\to-1}\left[5e^{st}+t(5s+8)e^{st}\right]\\ &=5e^{-t}+3te^{-t}\end{aligned}$$

Por lo que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s+8}{(s+1)^2}\right\} = 5e^{-t} + 3te^{-t}$$

Asi que sustituyendo los resoltado en la ecuación original

$$\begin{aligned} x(t) &= 5e^{-2t} + 5te^{-t} - 5e^{-t} + te^{-t} + 2e^{-t} \\ &\quad + t - 2 + 5e^{-t} + 3te^{-t} \end{aligned}$$

$$\boxed{x(t) = (9t+2)e^{-t} + 5e^{-2t} + t - 2}$$

Fracciones Parciales

Otra forma de obeter este mismo resultado es utilizar fracciones parciales.
Tenemos que

$$\frac{5}{(s+2)(s+1)^2} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{s^2(s+1)^2} = \frac{D}{s} + \frac{E}{s^2} + \frac{F}{s+1} + \frac{G}{(s+1)^2} \qquad (2)$$

$$\frac{5s+8}{(s+1)^2} = \frac{G}{s+1} + \frac{H}{(s+1)^2} \qquad (3)$$

Para (1)

$$\begin{aligned} 5 &= A(s+1)^2 + B(s+1)(s+2) + C(s+2) \\ &= As^2 + 2As + A + Bs^2 + 3Bs + 2B + Cs + 2C \\ &= (A+B)s + (2A+3B+C)s + (A+2B+2C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ 2A + 3B + C &= 0 \\ A + 2B + 2C &= 5 \end{aligned}$$

Al resolver es sistema de eciones se tien que

$$\begin{aligned} A &= 5 \\ B &= -5 \\ C &= 5 \end{aligned}$$

Por lo que

$$\frac{5}{(s+2)(s+1)^2} = \frac{5}{s+2} - \frac{5}{s+1} + \frac{5}{(s+1)^2}$$

Para (2)

$$\begin{aligned} 1 &= Ds(s+1)^2 + E(s+1)^2 + Fs^2(s+1) + Gs^2 \\ &= Ds^3 + 2Ds^2 + Ds + Es^2 + 2Es + E + Fs^3 \\ &\quad + Fs^2 + Gs^2 \\ &= (D+F)s^3 + (2D+E+F+G)s^2 + (D+2E)s + E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D + F &= 0 \\ 2D + E + F + G &= 0 \\ D + 2E &= 0 \\ E &= 1 \end{aligned}$$

Al resolver es sistema de eciones se tien que

$$\begin{aligned} D &= -2 \\ E &= 1 \\ F &= 2 \\ G &= 1 \end{aligned}$$

Por lo que

$$\frac{1}{s^2(s+1)^2} = -\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

Para (3)

$$5s + 8 = G(s+1) + H \qquad = Gs + (G+H)$$

$$\begin{aligned} G &= 5 \\ G + H &= 8 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se tiene que

$$\begin{aligned} G &= 5 \\ h &= 3 \end{aligned}$$

Por lo que

$$\frac{5s+8}{(s+1)^2} = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{(s+1)^2}$$

Asi que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+2)(s+1)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s+2} - \frac{5}{s+1} + \frac{5}{(s+1)^2}\right\} \\ &= 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\ &\quad + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} \\ &= 5e^{-2t} - 5e^{-t} + 5te^{-t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}\right\} \\ &= -2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \\ &\quad + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} \\ &= -2 + t + 2e^{-t} + te^{-t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s+8}{(s+1)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s+1} + \frac{3}{(s+1)^2}\right\} \\ &= 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} \\ &= 5e^{-t} + 3te^{-t} \end{aligned}$$

Asi que sustituyendo los resoltado en la ecuación original

$$\begin{aligned} x(t) &= 5e^{-2t} - 5e^{-t} + 5te^{-t} - 2 + t \\ &\quad + 2e^{-t} + te^{-t} + 5e^{-t} + 3te^{-t} \end{aligned}$$

$$\boxed{x(t) = (9t+2)e^{-t} + 5e^{-2t} + t - 2}$$

2.4 Gráfica de la solución

Al graficar la solución obtenida $(9t+2)e^{-t} + 5e^{-2t} + t - 2$ obtenemos la siguiente gráfica.

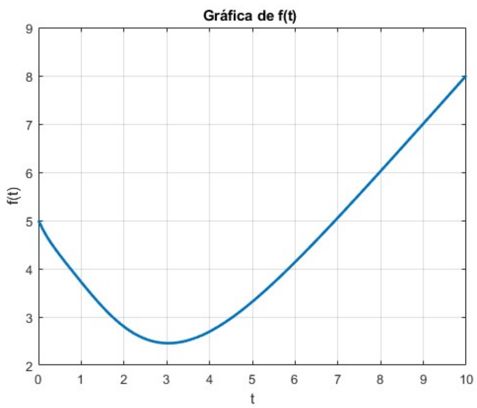


Figure 4: Grafica de la solución anlitica a la Ecuación Diferencial.

2.5 Solución en SIMULINK

Para realizar el modelado de la ecuación diferencial en SIMULINK, de la ecuación diferencial despejamos la derivada de segundo orden, es decir,

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 5e^{-2t} + t - 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x$$

y lo agregamos a un bloque de funcion de matlab para posterior mente integrar dos veces teniendo en cuenta las condiciones iniciales.

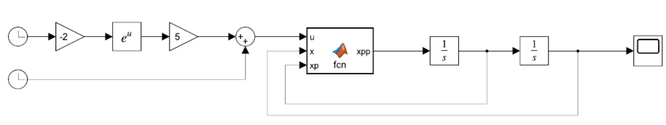


Figure 5: Diagrama de bloques del modelo en SIMULINK.

Al correr la simulación, se obitene el siguiente resultado.

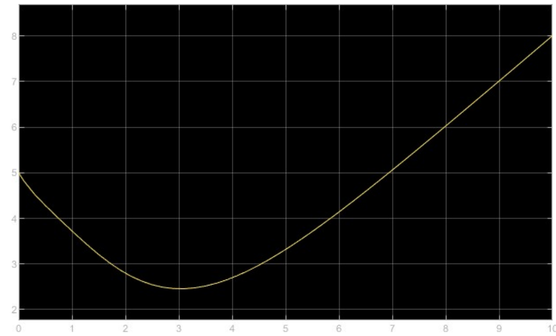


Figure 6: Grafica de la simulación en Simulink.

Al graficar la salida de la simulación en SIMULINK, se obtiene una gráfica similar a la obtenida de la solución analítica de la ecuación diferencial.

2.6 Diagrama de Bloques 1

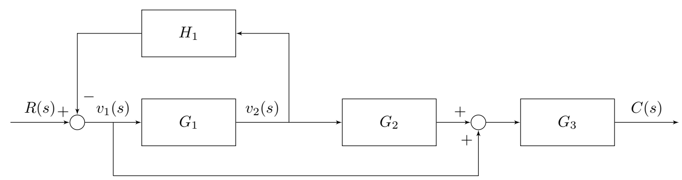
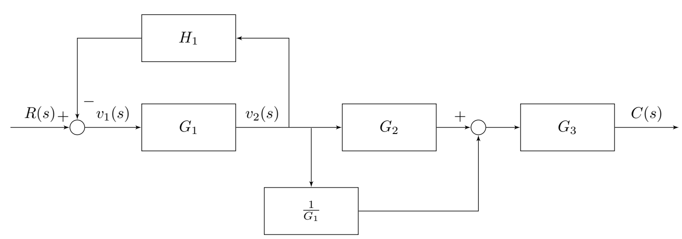


Figure 7: Diagrama de Bloques 1.

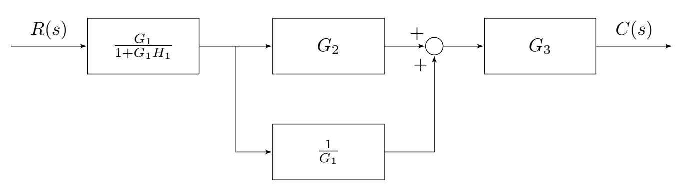
Al considera la relación entre las señales $v_1(s)$ y $v_2(s)$ se tiene que

$$v_2(s) = G_1(s)v_1(s) \implies v_1(s) = \frac{1}{G_1(s)}v_2(s).$$

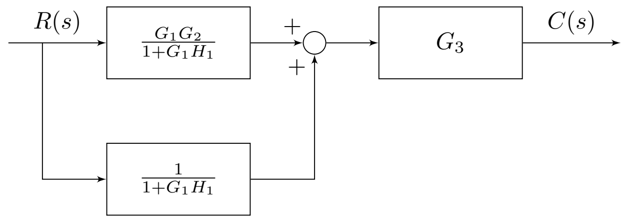
Por lo que podemos redibujar el diagrama de bloques de la siguiente manera.



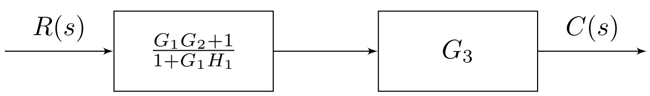
Los bloques G_1 y H_1 estan conectados de la forma Retroalimentación negativa 3.



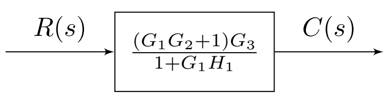
Los bloques $\dfrac{G_1}{1+G_1H_1}$ con G_2 y $\dfrac{G_1}{1+G_1H_1}$ con $\dfrac{1}{G_1}$ estan concectados de la forma Combinación de bloques en cascada 1.



Los bloques antes del sumador estan conectados de la forma Combinación de bloques en paralelo 2.



Estos ultimos bloques estan conectados de la forma Combinación de bloques en csacada 1.



Asi que la relación entrada-salida esta dada por la expresión

$$C(s) = \frac{(G_1G_2 + 1)G_3}{1 + G_1H_1} R(s).$$

Por lo que por definición la función de transferencia del sistema es

$$T(s) = \frac{(G_1G_2 + 1)G_3}{1 + G_1H_1}.$$

2.7 Diagrama de Bloques 2

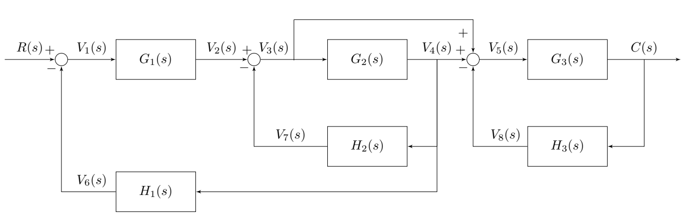
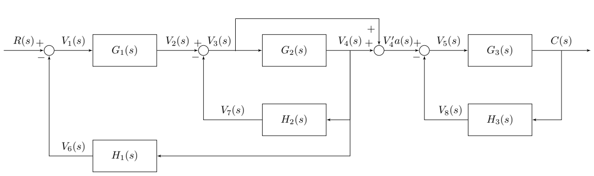


Figure 8: Diagrama de Bloques 2.

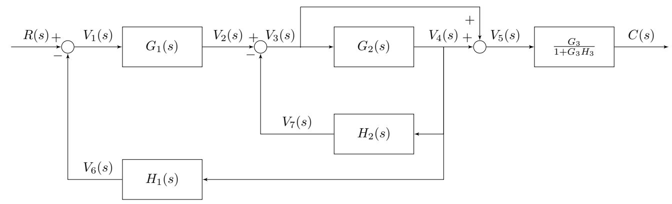
Es trivial ver que en el algebra de bloques la suma es asociativa por lo que

$$V_5(s) = V_3(s)+V_4(s)+V_8 \implies V_5(s) = (V_3(s) + V_4(s))+V_8$$

Asi que podemos redibujar el diagram de bloques de la siguiente manera.



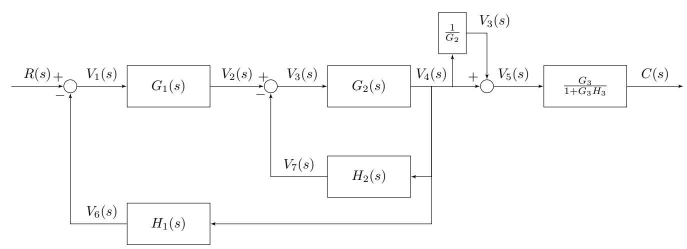
Los bloques G_3 y H_3 estan concectados de la forma Retroalimentación negativa 3.



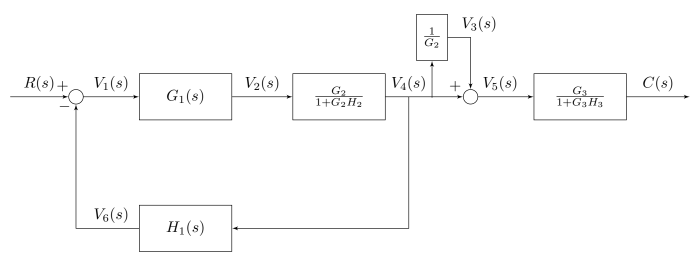
Al considerar la relación entre las señales $V_3(s)$ y $V_4(s)$ se tiene que

$$V_4(s) = G_2(s)V_3(s) \implies V_3(s) = \frac{1}{G_2(s)} V_4(s).$$

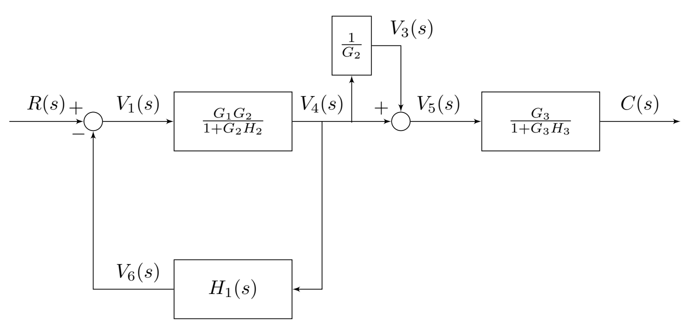
Por lo que podemos redibujar el diagrama de bloques de la siguiente manera.



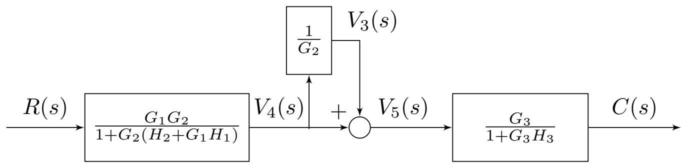
Los bloques G_2 y H_2 estan conectados de la forma Retroalimentación negativa 3.



Los bloques G_1 y $\frac{G_2}{1 + G_2H_2}$ estan conectados de la forma Combinación de bloques en cascada 1.



Los bloques $\frac{G_1G_2}{1 + G_2H_2}$ y H_1 estan conectados de la forma Retroalimentación negativa 3.



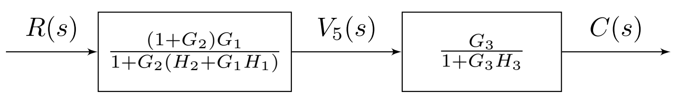
Al considerar la relación entre las señales $R(s), V_4(s), V_3(s)$ y V_5

$$
\begin{aligned}
V_5(s) &= V_4(s) + V_4'(s) \\
V_4(s) &= \frac{G_1G_2}{1+G_2(H_2+G_1H_1)}R(s) \\
V_3(s) &= \frac{1}{G_2}V_4(s) = \frac{G_1}{1+G_2(H_2+G_1H_1)}R(s).
\end{aligned}
$$

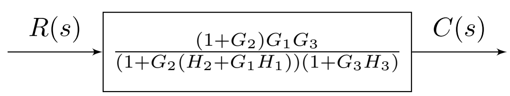
Por lo que

$$V_5(s) = \frac{(G_2+1)G_1}{1+G_2(H_2+G_1H_1)}R(s).$$

Asi que



Estos ultimos bloques estan conectados de la forma Combinación de bloques en csacada 1.



Asi que la relación entrada-salida esta dada por la expresión

$$C(s) = \frac{(1+G_2)G_1G_3}{(1+G_2(H_2+G_1H_1))(1+G_3H_3)}R(s)$$

Por lo que por definición la función de transferencia del sistema es

$$\boxed{T(s) = \frac{(1+G_2)G_1G_3}{(1+G_2(H_2+G_1H_1))(1+G_3H_3)}}$$

3 Conclusiones

La ecuación diferencial dada fue un ejemplo perfecto para retomar la solución de ecuaciones diferenciales mediante la transformada de Laplace. Además, la implementación de la ecuación diferencial en SIMULINK nos permitió comparar la solución analítica con la numérica, demostrando que ambas son consistentes. Por otro lado, la reducción de diagramas de bloques es crucial para el análisis de sistemas LTI a través de la función de transferencia. Al simplificar los diagramas, se reforzaron los conocimientos adquiridos sobre la reducción de diagramas de bloques, consolidando lo aprendido de manera efectiva.