UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIAS

Modelado de Sistemas Mecánicos

Nombre: *Carlos Omar Rodriguez Vazquez* Codigo: *219570126*

Materia: *Modelado y Simulación de Sistemas* Profesor: *Jairo Cain Sanchez Estrada*
Fecha de Entrega: *September 25, 2024*

1. Considere la figura (1) donde un disco homogéneo de radio R y masa m puede girar alrededor de su centro de masa, el cual cuelga del techo y esta precargado por resortes (dos resortes que están conectados mediante un alambre que pasa sobre la polea). Cada resorte está estirado una cantidad x. Suponiendo que el disco inicialmente está girado un pequeno angulo θ y luego se le suelta, obtenga la ecuación que modela al sistema medinate Euler-Lagrange. Represente el mode en espacios de estados.

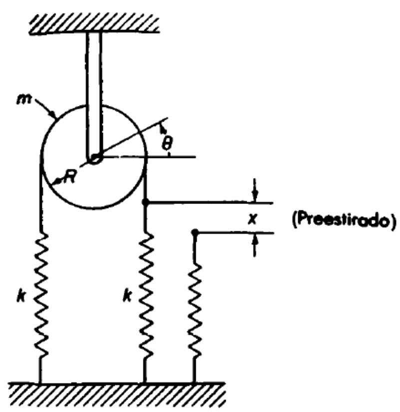

Figure 1: Sistema de resorte y polea.

Energia Cinetica

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2.$$

Energia Potencial

$$U = \frac{1}{2}kR^2\theta^2 + \frac{1}{2}kR^2\theta^2 = kR^2\theta^2.$$

Lagrangiano

$$L = T - U = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - kR^2\theta^2.$$

Ecuaciones Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = J\dot{\theta} \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = J\ddot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 2kR^2\theta, \quad \frac{\partial L}{\partial R} = 0, \quad Q = 0.$$

$$J\ddot{\theta} + kR^2\theta^2 = 0.$$

Modelo

$$J\ddot{\theta} + kR^2\theta^2 = 0. \tag{1}$$

Variables de estado

$$x_1 = \theta$$
$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta}$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta} = \frac{1}{J}\left[-2kR^2\theta\right]$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{J}\left[2kR^2 x_1\right]$$

2. Considere el péndulo invertido de la figure (2) como un problema de dos dimensiones, en el cual el péndulo sólo se mueve en el plano de la página. Se le aplica al carro la fuerza de control u. Suponga que el centro de gravedad de la barra del péndulo está en su centro geométrico. Obtenga un modelo matemático para este sistema mediante Euler-Lagrange. Represente el modelo en espacios de estados.

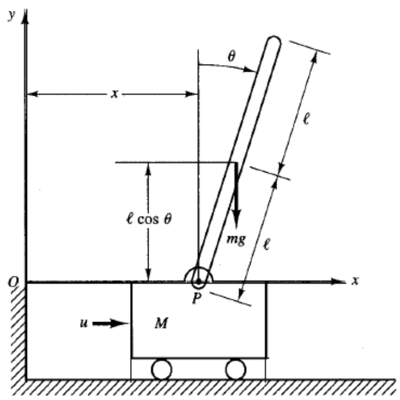

Figure 2: Sistema del péndulo invertido.

Energia Cinetica

$$T_M = \frac{1}{2}M\dot{x}^2, \quad T_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{f}v^2.$$

$$\begin{aligned} x_m &= l\sin\theta + x \\ y_m &= l\cos\theta \\ &\Longrightarrow \\ \dot{x}_m &= l\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x} \\ \dot{y}_m &= -l\dot{\theta}\sin\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^2 = \dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2 &= (l\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x})^2 + (-l\dot{\theta}\sin\theta)^2 \\ &= l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta \\ &= l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x}^2. \end{aligned}$$

$$T = T_M + T_c = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x}^2\right).$$

Energia Potencial

$$U = U_c = mgl\cos\theta.$$

Lagrangiano

$$L = T - U = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x}^2\right) - mgl\cos\theta.$$

Ecuaciones Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = J\dot{\theta} + ml^2\dot{\theta} + m\dot{x}l\cos\theta.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = (J+ml^2)\ddot{\theta} + m\ddot{x}l\cos\theta - ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m\dot{x}l\dot{\theta}\sin\theta + mgl\sin\theta\sin\theta.$$

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = 0, \quad Q_o = 0.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial R}{\partial \theta} = Q_o \implies (J+ml^2)\ddot{\theta} + m\ddot{x}l\cos\theta - m\dot{x}l\dot{\theta}\sin\theta + ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta = 0. \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta.$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad Q_x = u$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial R}{\partial \theta} = Q_o \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}^2\cos\theta - ml\dot{\theta}\sin\theta = u. \tag{3}$$

Modelo

$$(J+ml^2)\ddot{\theta} + m\ddot{x}l\cos\theta - m\dot{x}l\dot{\theta}\sin\theta + ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta = 0$$
$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}^2\cos\theta - ml\dot{\theta}\sin\theta = u.$$

3. En el sistema mecánico de la figura (3), un extremo de la palanca está conectado a un resorte y a un amortiguador, y se le aplica una fuerza F al otro extremo de la palanca. ¿Cuál es la ecuación de movimiento del sistema, si se supone un pequeño desplazamiento x?. Suponga también que la palanca es rigida y sin masa. Obtenga la ecuación de movimiento mediante Euler-Lagrange. Represente el modelo en espacios de estados.

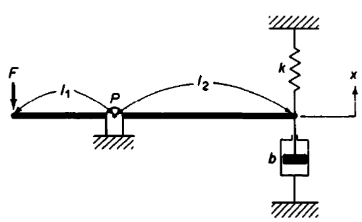

Figure 3: Sistema de palanca.

Energia Cinetica

$$T = 0.$$

Energia Potencial

$$U = U_k = \frac{1}{2}kx^2.$$

Lagrangiano

$$L = T - U = -\frac{1}{2}kx^2.$$

Ecuaciones Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad Q_x = T_f - T_b$$

$$kx = Fl_1\sin\frac{\pi}{2} - b\dot{x}\sin\frac{\pi}{2}.$$

Modelo

$$kx = Fl_1 - b\dot{x}l_2. \tag{4}$$

Variables de estado

$$w_1 = x$$
$$\dot{w} = \dot{x} = \frac{1}{b}\left[\frac{Fl_1}{l_2}\right]$$

4. Se aplica un par T a la flecha 1 en el sistema de engranes de la figura (4). Obtenga la ecuación de movimiento del sistema mediante Euler-Lagrange. Suponga que los momentos de incercia de los engranes son J_1 y J_2 como se muestra en el diagrama y que el par de la carga es T_L. Represente el modelo en espacios de estados.

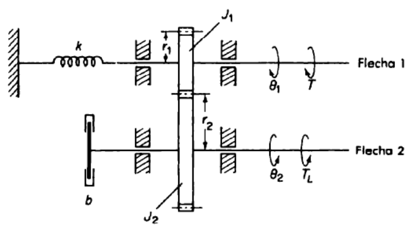

Figure 4: Sistema de tren de engranes.

Energia Cinetica

$$T_{m_1} = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta_1}^2, \quad T_{m_2} = \frac{1}{2}J_2\dot{\theta_2}^2.$$
$$T = T_{m_1} + T_{m_2} = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta_1}^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta_2}^2.$$

Energia Potencial

$$U = U_k = \frac{1}{2}k\theta_1^2.$$

Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta_1}^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta_2}^2 - \frac{1}{2}k\theta_1^2.$$

Ecuaciones Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = J_1\dot{\theta_1} \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = J_1\ddot{\theta_1}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -k\theta_1, \quad \frac{\partial R}{\partial \theta_1} = 0, \quad Q_{\theta_1} = T - T_1.$$
$$J_1\ddot{\theta_1} + k\theta_1 = T - Fr_1 \sin\frac{\pi}{2}.$$
$$J_1\ddot{\theta_1} + k\theta_1 + Fr_1 = T. \tag{5}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta_2}} = J_2\dot{\theta_2} \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta_2}}\right) = J_2\ddot{\theta_2}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \theta_2} = 0, \quad Q_{\theta_2} = T_L + T_2 - b\dot{\theta_2}.$$
$$J_2\ddot{\theta_2} + b\dot{\theta_2} - Fr_2 \sin\frac{\pi}{2} = T_L.$$
$$J_2\ddot{\theta_2} + b\dot{\theta_2} - Fr_2 = T_L. \tag{6}$$

Modelo

$$J_1\ddot{\theta_1} + k\theta_1 + Fr_1 = T$$
$$J_2\ddot{\theta_2} + b\dot{\theta_2} - Fr_2 = T_L.$$

Variables de estado

$$w_1 = \theta_1$$
$$w_2 = \dot{\theta_1}$$
$$w_3 = \theta_2$$
$$w_4 = \dot{\theta_2}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{w}_1 &= \dot{\theta}_1 \\
\dot{w}_2 &= \ddot{\theta}_1 = \frac{1}{J_1}\left[T - Fr_1 - k\theta_1\right] \\
\dot{w}_3 &= \dot{\theta}_2 \\
\dot{w}_4 &= \ddot{\theta}_2 = \frac{1}{J}\left[T_L + Fr_2 - b\dot{\theta}_2\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{w}_1 &= w_2 \\
\dot{w}_2 & \frac{1}{J_1}\left[T - Fr_1 - kw_1\right] \\
\dot{w}_3 &= w_4 \\
\dot{w}_4 & \frac{1}{J}\left[T_L + Fr_2 - bw_4\right]
\end{aligned}
$$

5. Model el sistema masa-resorte-amortiguador de la figura (5) mediante Euler-Lagrange. Represente el modelo en el espacios de estados.

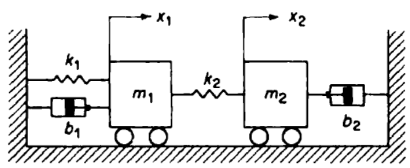

Figure 5: Sistema de masa-resorte-amortiguador.

Energia Cinetica

$$T_{m_1} = \frac{1}{2}m_1\dot{x_1}^2, \quad T_{m_2} = \frac{1}{2}m_2\dot{x_2}^2.$$

$$T = T_{m_1} + T_{m_2} = \frac{1}{2}m_1\dot{x_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x_2}^2.$$

Energia Potencial

$$U = U_{k_1} + U_{k_2} = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2.$$

Lagrngiano

$$L = T - U = \frac{1}{2}m_1\dot{x_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x_2}^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2.$$

Ecuaciones Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}} = m_1\dot{x_1} \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}}\right) = m_1\ddot{x_1}, \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = -k_1x_1 - k_2x_1 + k_2x_2, \quad \frac{\partial R}{\partial x_1} = 0, Q_{x_1} = -b_1\dot{x_1}.$$

$$m_1\ddot{x_1} + k_1x_1 + k_2x_1 - k_2x_2 + b_1\dot{x_1} = 0. \tag{7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x_2}} = m_2\dot{x_2} \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_2}}\right) = m_2\ddot{x_2}, \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = k_2x_1 - k_2x_2, \quad \frac{\partial R}{\partial x_1} = 0, Q_{x_1} = -b_2\dot{x_2}.$$

$$m_2\ddot{x_2} - k_2x_1 + k_2x_2 + b_2\dot{x_2} = 0. \tag{8}$$

Modelo

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{x_1} + k_1x_1 + k_2x_1 - k_2x_2 + b_1\dot{x_1} &= 0 \\
m_2\ddot{x_2} - k_2x_1 + k_2x_2 + b_2\dot{x_2} &= 0.
\end{aligned}
$$