UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIAS

Práctica 1 - Transformaciones Geométricas

Materia: *Sistemas Inteligentes II* Profesor: *Javier Enrique Gomez Avila*

Carlos Omar Rodriguez Vazquez
219570126

Fecha de Entrega: September 15, 2024

1 Introducción

La transformación de similitud se utiliza para trasladar, rotar y escalar puntos en un plano.

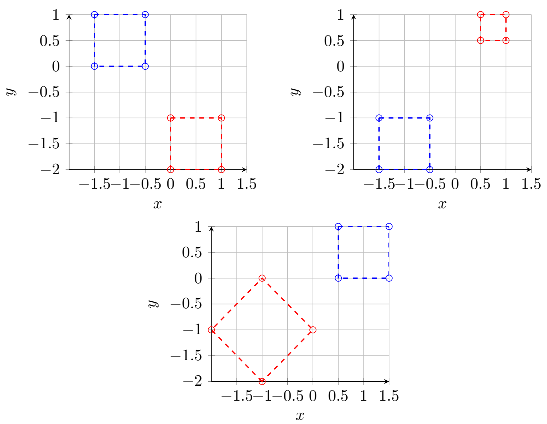

Figure 1: Original Transformados.

Podemos transformar una coordenada (x, y) a una nueva coordenada (x', y') utilizaoms la siguiente ecuación.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta \\ s\sin\theta & s\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} \tag{1}$$

Donde

- d_x y d_y son desplazamientos
- θ indica un ángulo de rotación
- s es el factor de escalamiento

Distancia Euclidiana

La distancia Euclidiana expresa la distnacia entre dos puntos $p_1 = (x_a, y_a)$ y $p_2 = (x_b, y_b)$. utilizando:

$$e = d(p_1, p_2) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

donde e es una medida de error que indica la distancia entre los dos punto.

Fución objetivo

Para un valor estimado $\hat{\mathbf{y}}$ y un valor esperado $\hat{\mathbf{y}}$, se puede proponer funciones objetivo $\mathbf{f}$ con base en errores definidos como

$$e = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$$

Cuando contamos con más de un error, $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$, entonces tenemos **Raíz del Error Cuadrático Medio**.

$$f = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}$$

2 Plantamiento del Problema

Se propone utilizar la transformación de similitud para posicionar una imagen deseada, en un área en específico dentro de una imagen de referencia.

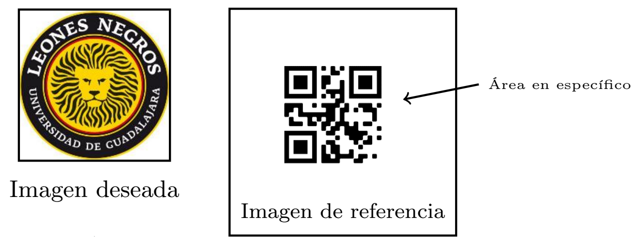

Figure 2

Comenzamos por definir $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ y $\mathbf{_3}$ que representan las dimensiones de la imagen deseada.

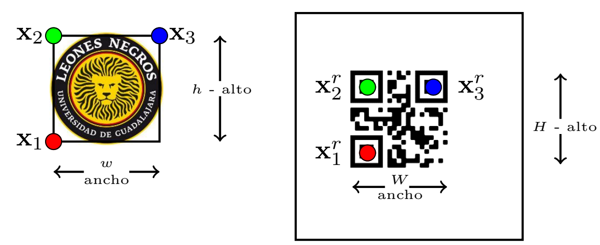

Figure 3

Asi que

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utilizamos la información de un QR para definir valore de referencia para definir valores de referencia $\mathbf{x}_1^r, \mathbf{x}_2^r$ y $\mathbf{x}_3^r$.

3 Solución Analitica

Para resolver el problema necesitamos encontrar los valores de d_x, d_y, θ y s tal que al transformar todos los puntos de la imagen deseada mapeen la imagen de referencia bajo la funcion 1.

Pero como es un mapeo lineal, bastan con que la transformación de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_3$ sean $\mathbf{x}_1^r, \mathbf{x}_2^r$ y $\mathbf{x}_3^r$ respectivamente.

Encontrando s

La relación del valor de escalamiento s esta directamente relacionada con el area de la imagen deseada y el area de la imagen de referencia. La relación esta dada por la ecuación

$$s^2 = \frac{A_{referencia}}{A_{deseada}} \implies s = \sqrt{\frac{A_{referencia}}{A_{deseada}}}.$$

Por lo que el valor de s esta dado por

$$s = \sqrt{\frac{d(\mathbf{x}_2^r, \mathbf{x}_3^r) \cdot d(\mathbf{x}_1^r, \mathbf{x}_2^r)}{d(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \cdot d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}} = \sqrt{\frac{W \cdot H}{w \cdot h}}. \tag{2}$$

Encontranto θ

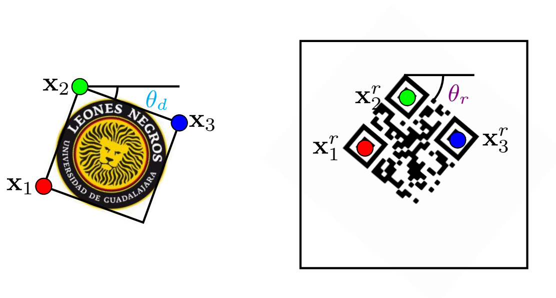

Figure 4

Como se observa en la Figura 4 el valor de θ es la diferencia entre el ángulo θ_r y el ángulo θ_d. Por lo que

$$\theta = \theta_r - \theta_d.$$

Peor sabemos que

$$\tan\theta_r = \frac{x^r_{3_y} - x^r_{2_y}}{x^r_{3_x} - x^r_{2_x}} \quad \text{y} \quad \tan\theta_d = \frac{x_{3_y} - x_{2_y}}{x_{3_x} - x_{2_x}}.$$

Asi que

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x^r_{3_y} - x^r_{2_y}}{x^r_{3_x} - x^r_{2_x}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x_{3_y} - x_{2_y}}{x_{3_x} - x_{2_x}}\right). \tag{3}$$

Encontrando d_x y d_y

Sabiendo los valores de s y θ aplicamos la transformación de similitud con dichos valores y desplazamiento nulo. La cual llamaremos T_{rs}.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta \\ s\sin\theta & s\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{4}$$

Bajo esta transformación obtenemos nuevas coordenad para cada putno de la imagen de referencia. Recordando que la transformación de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_3$ tiene que ser $\mathbf{x}^r_1, \mathbf{x}^r_2$ y $\mathbf{x}^r_3$ respectivamente y sabiendo que

$$\mathbf{x}_1 \xmapsto{T_{rs}} \mathbf{x}'_1$$
$$\mathbf{x}_2 \xmapsto{T_{rs}} \mathbf{x}'_2$$
$$\mathbf{x}_3 \xmapsto{T_{rs}} \mathbf{x}'_3.$$

Por lo que

$$\begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} = \mathbf{x}^r_1 - \mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}^r_2 - \mathbf{x}'_2 = \mathbf{x}^r_3 - \mathbf{x}'_3 \tag{5}$$

Proposición 3.1:

Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_3$ las coordenadas de las esquinas de la imagen de referencia y $\mathbf{x}^r_1, \mathbf{x}^r_2$ y $\mathbf{x}^r_3$ sus respectivas imagenes antes la transformación de similitud T y además $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ entonces los valores d_x y d_y de T son

$$\begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} = \mathbf{x}^r_2.$$

Prueba: Sean s_1 y θ_1 el factor de escalamiento y el ángulo de rotación de T. Por hipotesis sabesmos el valor de $\mathbf{x}_2$, al aplicar la ecuación 4 tenemos que

$$\mathbf{x}'_2 = \begin{bmatrix} s_1\cos\theta_1 & -s_1\sin\theta_1 \\ s_1\sin\theta_1 & s_1\cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

asi que aplicando la ecuacón 5

$$\begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} = \mathbf{x}^r_2 - \mathbf{x}'_2 = \mathbf{x}^r_2 - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^r_2.$$

Por transitividad

$$\begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} = \mathbf{x}^r_2.$$

4 Solución como Problema de Optimización

Para reoslver el problema de optimización necesitmos definir los parámetros que se deben optimizar. Los cuales son s, θ, d_x y d_y. Definimos:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} s & \theta & d_x & d_y \end{bmatrix}^\top.$$

Para plantear una función objetivo, definimos los siguuiente valores:

$$\begin{aligned} e_1 &= d(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}^r_1) \\ e_2 &= d(\mathbf{x}'_2, \mathbf{x}^r_2) \\ e_3 &= d(\mathbf{x}'_3, \mathbf{x}^r_3) \end{aligned}$$

Ahora planteamos la función objetivo como

$$f = \sqrt{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}(e_i)^2} \tag{6}$$

Respecto al esacio de búsqueda

- Inicializamos los desplazamientos d_x y d_y considerando las dimensiones de la imagen de referencia $(H, W$.
- El ángulo θ lo inicializamos en el rango $[-\pi, \pi)]$.
- El escalamiento s se considera positivo.

Por lo que los limites del espacio de búsqueda son

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} s \\ \theta \\ d_x \\ d_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_l = \begin{bmatrix} 0 \\ -\pi \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{q}_u = \begin{bmatrix} 10 \\ \pi \\ W \\ H \end{bmatrix}.$$

El algoritmos a utilizar sera $(\mu + \lambda)$-ES debido a su bajo tiempo de convergencia.

5 Caso 1

Figure 5: Imagen de referencia e imagen deseada para el caso 1.

Datos

- $h = 200$
- $\mathrm{w} = 200$
- $\mathrm{H} = 230$
- $\mathrm{W} = 230$

Imagen deseada

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 200 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Imagen de referencia

$$\mathbf{x}_1^r = \begin{bmatrix} 327 \\ 425 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2^r = \begin{bmatrix} 327 \\ 195 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_3^r = \begin{bmatrix} 557 \\ 195 \end{bmatrix}.$$

5.1 Solución Anlitica

$$s = \sqrt{\frac{200 \cdot 200}{230 \cdot 230}} = 1.15.$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0-0}{200-0}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{195-195}{557-327}\right) = 0.$$

Por la proposición 3.1

$$\begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} = \mathbf{x}_2^r = \begin{bmatrix} 327 \\ 195 \end{bmatrix}$$

Por lo que

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0 \\ 327 \\ 195 \end{bmatrix}$$

Figure 6: Imagen deseada ante la transformación de similitud con los valroes obtenidos analiticamente.

Solución como Problema de Optimización

Parametros

- $G = 50$
- $\mu = 80$
- $\lambda = 110$

Resultados

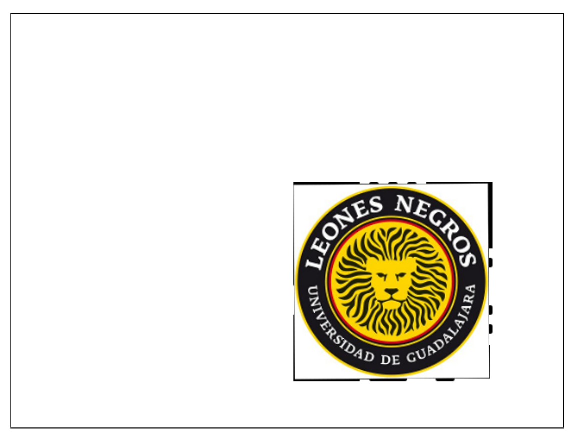

Figure 7: Imagen deseada ante la transformación de similitud con los valroes obtenidos con $(\mu + \lambda)$-ES.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1.1264 \\ -6.96 \cdot 10^{-3} \\ 327.435 \\ 198.44 \end{bmatrix}, \quad e = 4.0575$$

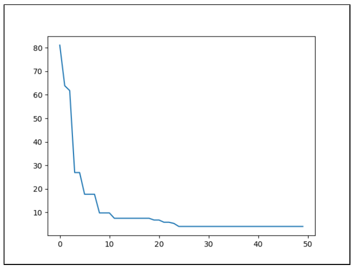

Figure 8: Tabla de convergencia de $(\mu + \lambda)$-ES.

6 Caso 2

Figure 9: Imagen de referencia e imagen deseada para el caso 2.

Datos

- $h = 200$
- w $= 200$
- H $= 280$
- W $= 276.0217$

Imagen deseada

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 200 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Imagen de referencia

$$\mathbf{x}_3^r = \begin{bmatrix} 602.0217 \\ 306 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1^2 = \begin{bmatrix} 326 \\ 306 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_3^r = \begin{bmatrix} 326 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

Figure 10: Imagen deseada ante la transformación de similitud con los valroes obtenidos analiticamente.

Al no tener solución, la solución encontrada tiene un error bajo al función objetivo 6 de 1.991.

6.1 Solución Analitica

Nota: Este caso no tiene solución. Como la imagen deseada es un cuadrado y la trasformación de similitud es un mapeo linea, lo unico a lo que se podra transformar es a otro cuadrado, pero como se puede notar en las dimensiones W y H la imagen de referencia no es un cuadrado. Sin embargo al utilizar las formulas obtenidas de la solución anlitca, el resultado es bastante bueno.

$$s = \sqrt{\frac{(280)(276.0217)}{(200)(2))}} = 1.39$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{26 - 306}{326 - 326}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{0 - 0}{200 - 0}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Por la proposición 3.1

$$\begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} = \mathbf{x}_2^r = \begin{bmatrix} 326 \\ 306 \end{bmatrix}$$

Por lo que

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1.39 \\ -\frac{\pi}{2} \\ 326 \\ 306 \end{bmatrix}$$

Solución como Problema de Optimización

Parametros

- $G = 50$
- $\mu = 150$
- $\lambda = 200$

Resultados

Figure 11: Imagen deseada ante la transformación de similitud con los valroes obtenidos con $(\mu + \lambda)$-ES.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1.3797 \\ -1.559 \\ 297.308 \\ 323.5327 \end{bmatrix}, \quad e = 5.9459$$

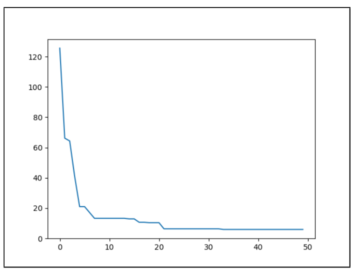

Figure 12: Tabla de convergencia de $(\mu + \lambda)$-ES.

7 Conclusiones

La actividad fue una excelente aplicación de los algoritmos aprendidos en clase para resolver un problema de optimización de la vida real. En este caso, se trató de encontrar la función objetivo, que era una función de error, y adaptar el algoritmo para un problema de cuatro dimensiones. Aunque en la mayoría de los problemas reales no es posible encontrar una solución analítica, en este caso sí lo fue. Al comparar los resultados obtenidos analíticamente con los obtenidos por el algoritmo de optimización, se observó que este último entregó un resultado bastante cercano al óptimo, además de una rápida convergencia. Sin embargo, no es necesaria una solución analítica para determinar la efectividad del algoritmo, ya que al evaluar la solución en nuestra función objetivo, obtenemos valores cercanos a 0, lo que indica que es una buena solución.