UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIAS

Modelado de Sistemas Fisicos y Emepleo de la Transfomada de Laplace

---

Materia: *Teoría de Sistemas II* Profesor: *Emmanuel Cruz Zavala*
Unidad de Aprendizaje: *Repaso de Ecuaciones Diferenciales y Modelado*

Los Carlos

Aguirre Gonzales Alberto Carlos
Almanza Castañeda Carlos Eduardo
Rodriguez Vazquez Carlos Omar

Fecha de Entrega: September 5, 2024

1 Introducción

Resistencia Eléctrica

Es la oposición que presentan los conductores o elementos al paso de la corriente eléctrica. Las variables asociadas con este elemento son voltaje y corriente. Su comportamiento está definido por la ley de Ohm.

$$V_R = R \cdot i_R.$$

donde:

- $\boldsymbol{V_R}$ es el voltaje a través de la resistencia. [V]
- $\boldsymbol{i_R}$ es la corriente que fluye a través de la resistencia. [A]
- $\boldsymbol{R}$ es el valor de la resistencia eléctrica. [Ω;]

Capacitancia Eléctrica

La capacitancia eléctrica o comúnmente denominada capacitor son dispositivos eléctricos que almacenan energía. Las variables asociadas a este elemento son voltaje y corriente y su comportamiento físico está definido por.

$$V_C = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau')\,d\tau'$$

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}V_C}{\mathrm{d}t}.$$

donde:

- $\boldsymbol{V_C}$: es el voltaje a través del capacitor o capacitancia eléctrica. [V]
- $\boldsymbol{i_C}$: es la corriente que fluye a través del capacitor o capacitancia eléctrica. [A]
- $\boldsymbol{C}$: es el valor del capacitor o capacitancia eléctrica. [F]

Inductancia Eléctrica

La inductancia eléctrica o comúnmente denominada inductor, es un componente que almacena energía. Las ariables asociadas con este elemento son voltaje y corriente y su comportamiento físico está definido por.

$$V_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}.$$

donde:

- $\boldsymbol{V_L}$: es el voltaje a través de la inductancia eléctrica. [V]
- $\boldsymbol{i_L}$ es la corriente que fluye a través de la inductancia eléctrica. [A]
- $\boldsymbol{L}$: es el valor de la inductancia eléctrica. [H]

Ley de Voltajes de Kirchhoff

Esta ley establece que para cualquier circuito eléctrico con un número de ramas y l número de mallas, la suma algebraica de voltajes en cualquiera de sus mallas es igual a cero, así la ley de voltajes de Kirchhoff pueder ser expresada como.

$$\sum_{j=1}^{m} v_{kj}V_j = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, l.$$

2 Desarrollo

2.1 Sistema

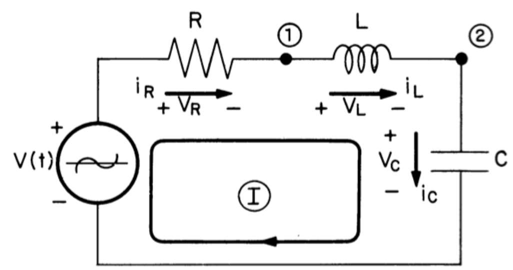

Figure 1: Sistema RCL

2.2 Modelado Matematico

El sistema esta formado por los siguiente elementos.

- Fuente de voltaje. $V(t)$
- Resistencia eléctrica. R
- Inductancia eléctrica. L
- Capacitancia eléctria. C

Por la **Ley de Voltajes de Kirchhoff**, se tiene que

$$V(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t).$$

Remplazando el voltaje de cada elemento en el sistema por su respectiva expresión, se tiene que

$$V(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau')\,d\tau'.$$

Como la salidad de interes es el voltaje del capacitor, sustituimos la siguiente expresión que relaciona la corriente con el voltaje del capacitor en la ecuacion anterior.

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}.$$

Por lo tanto

$$V(t) = LC\frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + v_C(t).$$

2.3 Valores Particulares del Sistema

Tomando en cuenta los siguiente valores particulares del sistema

- $R = 100[\Omega]$.
- $C = 200[\mu\text{F}]$.
- $L = 500[\text{mH}]$.
- $V(t) = 120\cos(337t)[\text{V}]$.
- $v_C(0) = 0$.
- $\dot{v}_C(0) = 0$.

se tiene que

$$0.0001\frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + 0.02\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + v_C(t) = 120\cos(337t).$$

2.4 Resolución de la Ecuación Diferencial asociada al Sistema

Transformada de Laplace

Aplicamos la Transformada de Lapalce a la ecuación diferencial

$$\mathcal{L}\left\{10^{-4}\frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + 0.02\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + v_C(t) = 120\cos(337t)\right\}$$

Considerando los valores iniciales y que

$$V_C(s) = \mathcal{L}\left\{v_C(t)\right\}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
10^{-4}s^2V_C(s) + 2\cdot 10^{-2}sV_C(s) + V_C(s) &= \frac{120s}{s^2+337^2}\\
(10^{-4}s^2 + 2\cdot 10^{-2}s + 1)V_C(s) &= \frac{120s}{s^2+337^2}\\
10^{-4}(s^2 + 200s + 10000)V_C(s) &= \frac{120}{s^2+337^2}
\end{aligned}$$

$$V_C(s) = \frac{12\cdot 10^5 s}{(s^2+337^2)(s+100)^2}$$

Transformada Inversa de Laplace

Para resolver la ecuaíon diferencia, se debe aplicar la Transformada Inversa de Laplace a la ecuación antrior y para esto se hace uso de fracciones parciales.

Fracciones Parciales

$$\frac{12\cdot 10^5 s}{(s^2+337^2)(s+100)^2} = 12\cdot 10^5\left[\frac{As+B}{s^2+337^2} + \frac{C}{s+100} + \frac{D}{(s+100)^2}\right].$$

por lo que

$$\begin{aligned}
s = {} & (As+B)(s+100)^2 + C(s^2+337^2)(s+100)\\
& + D(s^2+337^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s = {} & As^3 + 200As^2 + 10^4As + Bs^2 + 200Bs + 10^4B\\
& + Cs^3 + 100Cs^2 + 337^2Cs + 100\cdot 337^2C\\
& + Ds^2 + 337^2D\\
s = {} & (A+C)s^3 + (200A + B + 100C + D)s^2\\
& + (10^4A + 200B + 337^2C)s\\
& + (10^4B + 100\cdot 337^2C + 337^2D)
\end{aligned}$$

quedandonos con 4 eucaciones

$$\begin{aligned}
A + C &= 0\\
200A + B + 100C + D &= 0\\
10^4A + 200B + 337^2C &= 1\\
10^4B + 100\cdot 337^2C + 337^2D &= 0
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de eucaciones, se tien que

$$\begin{aligned}
A &= -6.78\cdot 10^{-6}\\
B &= 0.0015\\
C &= 6.78\cdot 10^{-6}\\
D &= -8.09\cdot 10^{-4}
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\frac{12\cdot 10^5 s}{(s^2+337^2)(s+100)^2} = \frac{-8.13s + 1785}{s^2+337^2} + \frac{8.13}{s+100} - \frac{971.11}{(s+100)^2}.$$

Ahora al aplicar la **Transformada Inversa de Laplace**, se tiene que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{V_C(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-8.13s+1785}{s^2+337^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8.13}{s+100}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{971.11}{(s+100)^2}\right\}.$$

Dado que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-8.13s+1785}{s^2+337^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-8.13s}{s^2+337^2}\right\}\\
&\quad + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1785}{s^2+337^2}\right\}\\
&= -8.13\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+337^2}\right\}\\
&\quad \frac{1785}{337}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{337}{s^2+337^2}\right\}\\
&= -8.13\cos(337t) + \frac{1785}{337}\sin(337t).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boldsymbol{v_C(t)} = \frac{1785}{337}\sin(337t) - 8.13\cos(337t) + 8.13e^{-100t} - 971.11te^{-100t}.$$

Esta ecuación representa el voltaje del capacitor en el instante t para $t \geq 0$.

2.5 Grafica de la Solución

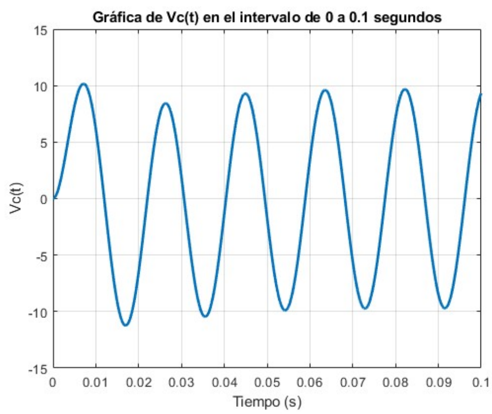

Figure 2: Grafica de la solución a la Ecuación Diferencial.

2.6 Modelado en Simulink

Para realizar el modelado del sistema en Simulink, de la ecuación diferencial despejamos la derivada de segundo orde, es decir,

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{LC}\left[V(t) - v_C(t) - RC\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}\right]$$

y lo agregamos a una función de matlab para posteriormente integrar dos veces teniendo en cuanta las condiciones iniciales.

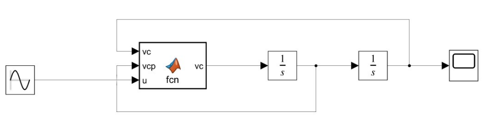

Figure 3: Diagrama de bloques del model en Simulink.

Al correr la simulación, se obitene el siguiente resultado.

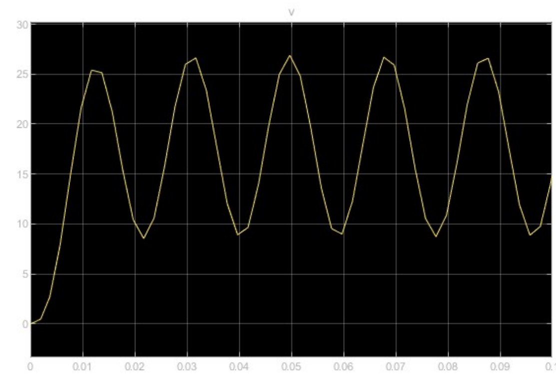

Figure 4: Grafica de la simulación en Simulink.

Al graficar la salida de la simulación del sistema en Simulink, se obtiene una gráfica similar a la obtenida de la solución analítica de la ecuación diferencial.

3 Conclusiones

Obtener el modelo de un sistema físico en crucial, ya que es importante saber cómo realizar el modelo de un sistema a partir del comportamiento y del modelo matemático de cada uno de los elementos que los componenen. Conociendo las leyes de equilibrio, se puede formular una ecuación que describa el modelo. Al resolver la ecuación diferencial mediante la transformada de Laplace, obtuvimos una función que describe el voltaje del capacitor en cada momento del tiempo. Ademas, al utilizar software de simulación como Simulink, encontramos una solución que coincide de manera bastante similar con la obtenida analíticamente.