بسم الله الرحمن الرحيم .

ملخص التفاضل

y	y'
c	0
x^n	$n x^{n-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e$

y	y'
$c x^n$	$c n x^{n-1}$
$[f(x)]^n$	$n [f(x)]^{n-1} * f'(x)$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} * f'(x)$
$a^{f(x)}$	$a^{f(x)} \cdot \ln a * f'(x)$
$\ln f(x)$	$\frac{1}{f(x)} * f'(x)$
$\log_a f(x)$	$\frac{1}{f(x)} \cdot \log_a e * f'(x)$

y	y'
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x \cdot \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \cdot \cot x$
الذي يبدأ بـ (c) سالب	الإشارة .

y	y'
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\operatorname{sech}^2 x$
$\coth x$	$-\operatorname{csch}^2 x$
$\operatorname{sech} x$	$-\operatorname{sech} x \tanh x$
$\operatorname{csch} x$	$-\operatorname{csch} x \coth x$

y	y'
$\sin^{-1}x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1}x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1}x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot^{-1}x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sec^{-1}x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\csc^{-1}x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

y	y'
$\sinh^{-1}x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cosh^{-1}x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\tanh^{-1}x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\coth^{-1}x$	$-\frac{1}{x^2-1}$
$\text{sech}^{-1}x$	$-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$
$\text{csch}^{-1}x$	$-\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$

سهل الحفظ

* $\sin^{-1}$ ، $\cos^{-1}$ $\leftarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ واحد ⊕ ، الآخر ⊖
* $\tan^{-1}$ ، $\cot^{-1}$ $\leftarrow \frac{1}{1+x^2}$ واحد ⊕ ، الآخر ⊖
* $\sec^{-1}$ ، $\csc^{-1}$ $\leftarrow \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ واحد ⊕ ، الآخر ⊖

لاحظ

← إذا كان مابداخل الزاوية دالة ← يتم الضرب فى تفاضل مابداخل الزاوية

Ex: $\sin f(x) \longrightarrow [\cos f(x)] * f'(x)$

Ex: $\sin^{-1}u \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} * u'$

بسم الله الرحمن الرحيم

ملخص التكامل

- $\int 0 \, dx = c$
- $\int A \, dx = Ax + c$
- $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$: $\boxed{n \neq -1}$ شرط
- $\int [f(x)]^n \cdot f'(x) \, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$
- $\int e^{bx} \, dx = \frac{e^{bx}}{b} + c$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + c$

- $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
- $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + c$
- $\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + c$
- $\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$
- $\int \csc x \, dx = -\ln|\csc x + \cot x| + c$
- $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$
- $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$

$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$

$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$

- $\int \sinh x \, dx = \cosh x + c$
- $\int \cosh x \, dx = \sinh x + c$
- $\int \tanh x \, dx = \ln(\cosh x) + c$
- $\int \coth x \, dx = \ln(\sinh x) + c$
- $\int \operatorname{sech} x \, dx = \tan^{-1}(\sinh x) + c$
- $\int \operatorname{csch} x \, dx = -\ln|\operatorname{csch} x + \coth x|$
- $\int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tanh x + c$
- $\int \operatorname{csch}^2 x \, dx = -\coth x + c$

- $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
- $\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
- $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = -\frac{1}{a}\coth^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

- $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\operatorname{csch}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
- $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
- $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

بسم الله الرحمن الرحيم.

قواعد التكامل

1	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$ شرط $n \neq -1$
2	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln(f(x)) + c$
3	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c$
4	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$
5	$\int \cos[f(x)] \cdot f'(x)\, dx = \sin[f(x)] + c$
6	* فك ما بداخل التكامل بالقوانين المحفوظة $\cos^2 x = \frac{1}{2}[1+\cos 2x]$
7	* تكامل بالتجزئ
8	* تكامل باستخدام الكسور الجزئية
9	* تكامل باستخدام إكمال المربع للمقام

القاعدة الأولى

* (قوس مرفوع لأس) ومضروب في (تفاضل ما بداخل القوس)

I $$\int [f(x)]^n * f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$ شرط $n \neq -1$

Examples

① $$\int \underbrace{[x^2+3x+7]}_{\text{قوس}}^4 \underbrace{(2x+3)}_{\text{تفاضل ما بداخل القوس}}\, dx = \frac{[x^2+3x+7]^5}{5} + c$$

② $$\int \frac{2x+3}{[x^2+3x+7]^4}\, dx = \int [x^2+3x+7]^{-4}(2x+3)\, dx = \frac{[x^2+3x+7]^{-3}}{-3} + c$$

③ $$\int \underbrace{[\tan x]}_{\text{قوس}}^4 \cdot \underbrace{\sec^2 x}_{\text{تفاضل ما بداخل القوس}}\, dx = \frac{[\tan x]^5}{5} + c$$

④ $$\int [\ln x]^3 * \left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{[\ln x]^4}{4} + c$$

⑤ $$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\, dx = \int [\ln x]^{-1/2} \left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{(\ln x)^{1/2}}{1/2} + c$$

$$= 2\sqrt{\ln x} + c$$

القاعدة الثانيـة : البسط تفاضل المقام

2

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(f(x)) + c$$

Example

① $\int \frac{(2x+3)}{(x^2+3x+7)}\,dx = \ln(x^2+3x+7) + c$

البسط تفاضل المقام

② $\int \frac{1}{x \ln x}\,dx = \int \frac{(1/x)}{\ln x}\,dx = \ln(\ln x) + c$

البسط
تفاضل المقام

③ $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \ln(e^x+1) + c$

④ $\int \frac{1}{e^{-x}+1}\,dx = \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \ln(1+e^x) + c$

ضربنا المسألة $* \frac{e^x}{e^x}$

البسط تفاضل
المقام

القاعدة الثالثة: دالة أسية اساسها(e) مضروبه فى تفاضل الأس

$$\boxed{3} \quad \int e^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int e^{x^2+3} \underbrace{(2x)}_{\text{تفاضل الأس}} dx = e^{x^2+3} + c$$

$$\int e^{\sin x} (\cos x)\, dx = e^{\sin x} + c$$

القاعدة الرابعة: دالة اسية مضروبه فى تفاضل الأس

$$\boxed{4} \quad \int a^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

$$\int \underbrace{2^{x^3}}_{\text{دالة اسية}} \underbrace{(3x)}_{\text{تفاضل الأس}} dx = \frac{2^{x^3}}{\ln 2} + c$$

$$\int 3^{\sin x} (\cos x)\, dx = \frac{3^{\sin x}}{\ln 3} + c$$

$$\int 5^{x^2} (x)\, dx = \frac{1}{2} \int 5^{x^2} (2x)\, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{5^{x^2}}{\ln 5} + c \right]$$

القاعدة الخامسة: دالة مثلثية مضروبة في تفاضل الزاوية

$$\int \cos(f(x)) \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{تفاضل الزاوية}}\, dx = \sin(f(x)) + c$$

① $\int \cos(3x)\, dx = \frac{1}{3}\int \cos(3x) \cdot \underbrace{(3)}_{\text{تفاضل الزاوية}}\, dx = \frac{1}{3}\left[\sin(3x) + c\right]$

② $\int \sin(6x^2) * \underbrace{(12x)}_{\text{تفاضل الزاوية}}\, dx = -\cos(6x^2) + c$

③ $\int \tan(x^2) \cdot \underbrace{(2x)}_{\text{تفاضل الزاوية}}\, dx = \underbrace{-\ln(\cos(x^2))}_{\text{تكامل الـ } \tan} + c$

لاحظ: كأنك بتكامل الدوال المثلثية فقط لو لقيت تفاضل الزاوية.

القاعدة السادسة: شيء يمكن فكه بالقوانين (سيتم توضيح القوانين في مكانها بإذن الله)

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + c$$

$$\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + c$$

$$\int \tan^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \tan x - x + c$$

القاعدة السابعة : تكامل حاصل ضرب دالتين (تكامل بالتجزئ)

* تكامل حاصل ضرب دالتين ليس لهم علاقة ببعض

← الدالة سهلة التفاضل ← نفرضها ونسميها u

← ~ ~ سهلة التكامل ← ~ ~ dv

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

* يوجد حالتين فى المسائل

* الحالة الأولى (دالة منتهية + دالة غير منتهية)

دالة منتهية بالتفاضل

دالة غير منتهية

$$I = \int \underbrace{x}_{\substack{\text{سهلة تفاضل} \\ u}} \; \underbrace{e^x}_{\substack{\text{سهلة تكامل} \\ dv}} \, dx$$

$u = x \qquad dv = e^x$

$du = dx \qquad v = e^x$

$$I = xe^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x + c$$

* الحالة الثانية (دالتين غير منتهيتين) (تكامل يكرر نفسه)

دالتين غير منتهيتين

Ex $\int \sin x \, e^x \, dx$

سهلة التفاضل (u)   سهلة التكامل (dv)

$u = \sin x \qquad dv = e^x$

$du = \cos x \, dx \qquad v = e^x$

$\therefore \int \sin x . e^x dx = \sin x \, e^x - \int \cos x \, e^x \, dx$

I_1

$u = \cos x \qquad dv = e^x$

$du = -\sin x \, dx \qquad v = e^x$

$I_1 = \cos x \, e^x - \int -\sin x \, e^x \, dx$

$I_1 = \cos x \, e^x + \int \sin x \, e^x \, dx$

I_1

$\therefore \int \sin x \, e^x \, dx = \sin x \, e^x - \boxed{\cos x \, e^x + \int \sin x \, e^x \, dx}$

* نلاحظ ظهور تكامل مرة أخرى لكنه يشبه التكامل الأصلي $\int \sin x \, dx$

$$\int \sin x \, e^x \, dx = \sin x \, e^x - \cos x \, e^x - \int \sin x \, e^x \, dx$$

$$I = \sin x \, e^x - \cos x \, e^x - I$$

$$2I = \sin x \, e^x - \cos x \, e^x$$

$$I = \frac{1}{2} \sin x \, e^x - \frac{1}{2} \cos x \, e^x + c$$

القاعدة الثامنة : التكامل بإستخدام الكسور الجزيئية
Partial Fraction

Ex $\int \frac{1}{x^2-x}\,dx$

* هذا الكسر يتم عمل له partial Fraction اولاً (كما سيتم توضيحه)

$$\frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)}$$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)}$$

$$\therefore 1 = A(x-1) + Bx$$

$$1 = Ax - A + Bx$$

معامل الحد المطلق $1 = -A \longrightarrow \boxed{A = -1}$

معامل x $0 = A + B \longrightarrow \boxed{B = 1}$

$$\therefore \frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{(x-1)}$$

$$\therefore \int \frac{1}{x^2-x}\,dx = \int \frac{-1}{x} + \frac{1}{(x-1)}\,dx = -\ln x + \ln(x-1) + C$$

القاعدة التاسعة :(التكامل باستخدام إكمال المربع للمقام)

* إذا كان المقام يحتوي على x^2 ، x ← نعمل مربع كامل للمقام

Ex
$$\int \frac{1}{x^2+2x}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2-1}\,dx = -\tanh^{-1}(x+1) + c$$

Ex
$$\int \frac{x}{x^2+2x+7}\,dx = \int \frac{x}{(x+1)^2+6}\,dx$$

$$= \int \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2+6}\,dx$$

$$= \int \frac{(x+1)}{(x+1)^2+6} - \frac{1}{(x+1)^2+6}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+6}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2+6}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left((x+1)^2+6\right) - \frac{1}{\sqrt{6}}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right) + c$$

لاحظ إذا كان البسط ← ثابت ← غالباً التكامل يكون على شكل الدوال المثلثية العكسية $\tan^{-1}$ ، $\sin^{-1}$ ، $\sinh^{-1}$ -

← درجة أولى ← نجعل البسط يشبه مشتقة المقام ونجزئ الكسر.

بسم الله الرحمن الرحيم

قوانين مساعدة

فرق الزاويتين — مجموع الزاويتين

- $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$
- $\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$

لاحظ

او $\cos(x-y)$ / $\cos(y-x)$

عادى المهم انها فرق x و y

لأن $\cos(-x) = \cos x$

- $\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right]$

لاحظ

$\sin(x-y)$

زاوية الـ sin — زاوية الـ cos

هنا لابد الفرق بالترتيب

من التعريف

$\cos^2 x = \cos x \cos x$

$\sin^2 x = \sin x \sin x$

- $\cos^2 x = \frac{1}{2}\left[1 + \cos 2x\right]$
- $\sin^2 x = \frac{1}{2}\left[1 - \cos 2x\right]$
- $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

لأن

$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$

- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

من التعريف

$\sin 2x = \sin(x+x)$

$\cos 2x = \cos(x+x)$

- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$= 2\cos^2 x - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 x$$

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \tan^2 x = \sec^2 x - 1 \\ \cot^2 x = \csc^2 x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \\ \tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x \end{cases}$$

- $\cosh^2 x = \frac{1}{2}\left[\cosh 2x + 1\right]$
- $\sinh^2 x = \frac{1}{2}\left[\cosh 2x - 1\right]$