Sec5

حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية

حلها السبع
طرق حل

$$y' + 2y = \cos x$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى

حلها ← $y'' + y' + 3xy = 0$ ~~Cos x~~ — معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية

↓
Homogenous.

معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية غير متجانسة

$$y'' + y' + 3y = e^x$$

طريقة حلها

الحل العام ، الحل H ، حل خاص
① $y_G = y_H + y_p$

اول حاجة نجيب y_H ولما قال H يبقى متجانسة

ازاي

① اخلي المعادلة على الصورة $y'' + y' + y = \boxed{0}$ يبقى Homogenous

② استبدل كل
$y \to 1$
$y' \to \lambda$
$y'' \to \lambda^2$
$y''' \to \lambda^3$

لتكوين معادلة مميزة :

③ ايجاد جذور المعادلة المميزة وكتابة الحل (يبقى تحليل)

$$a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

الصورة العامة للمعادلة . $a_2 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_0 = 0$

يجي ازاي :- نفرض انه $y = e^{\lambda x}$ وافاضل : $y' = \lambda e^{\lambda x}$ ، $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

وارجع اعوض في المعادلة $a_2 \lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + e^{\lambda x} a_0 = 0$

$e^{\lambda x}(a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0)$ مستحيل $\neq 0$

المعادله التربيعيه Quadratic equ.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

القانون العام لإيجاد جذور المعادله

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Case 1: $b^2 - 4ac > 0$ $\quad r_1 \neq r_2$, real

Case 2: $b^2 - 4ac = 0$ $\quad r_1 = r_2$ real

Case 3: $b^2 - 4ac < 0$ $\quad r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ complex

$x^2 -$ (مجموع الجذرين) $x +$ (حاصل ضرب الجذرين) $= 0$

عشانه اجيب المعادله

$r_1 = m_1 \qquad r_2 = m_2$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$(r_1 - m_1) \qquad (r_2 - m_2)$

عددين حاصل ضربهم او مجموعهم

$\therefore$ in Case 1: $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

in Case 2: $y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{\lambda x} = (c_1 + c_2 x)\, e^{\lambda x}$

in Case 3: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$$y(x) = e^{\alpha x}\left[c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x\right]$$

عشانه اجيب الحل H للمعادله لبد ما نطلع الجذرين roots

لعوض في القانون العام

① $y'' + 3y^2 - 4y = 0$ ✓

$m^2 + 3m - 4 = 0$

عددين حاصل ضربهم 4
وطرحهم 3

$(m-1)(m+4)$

$m_1 = 1 \qquad m_2 = 4$

$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x}$

② $2y'' - 3y' = 0$ ✓

$2m^2 - 3m = 0$

هنا عامل
مشترك

$m(2m-3) = 0$

$m_1 = 0 \qquad 2m - 3 = 0$

$2m = 3$

$m_2 = 3/2$

$y(x) = C_1 + C_2 e^{\frac{3}{2}x}$

③ $y'' + 2y' + 5y = 0$ ✓

الحل العام

$m^2 + 2m + 5 = 0$

$m_{1,2} = -1 \pm 2i$

$m_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\alpha = -1 \qquad \beta = 2$

$y(x) = e^{-x}[C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x]$

④ $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 8\dfrac{dy}{dx} + 16y = 0$ ✓

$m^2 + 8m + 16 = 0$

عددين حاصل ضربهم 16
ومجموعهم 8

$(m+4)(m+4)$

$m_{1,2} = -4$

$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-4x}$

④ if $y(x) = C_1 + C_2 e^{-5x}$

find the roots of Ch. eq and D.E

$\rightarrow \quad y(x) = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$

then $m_1 = 0 \; , \; m_2 = -5$

Pa. [illegible]

and

$\therefore \; (m - 0)(m + 5) \rightarrow m^2 + 5m = 0$

$m^2 - 5m = 0$

and we have $am^2 + bm + C = 0$

$\therefore \; a = 1 \; , \; b = -5 \; , \; C = 0$

$\therefore$ D.E $= \; y'' - 5y' = 0$

$\therefore$
$m^2 \rightarrow y''$
$m \rightarrow y'$
ثابت $\rightarrow y$

⑤ $y = (C_1 + C_2 x) e^{5x}$

$\rightarrow \; y = (C_1 + C_2 x) e^{m_{1,2} x}$

$\therefore \; m_{1,2} = 5 \Rightarrow (m - 5)(m - 5) = (m - 5)^2$

$m^2 - 5m - 5m + 25 = 0$

$-10m$

$m^2 - 10m + 25 = 0$

D.E $\quad y'' - 10y' + 25y = 0$

$m^2 \rightarrow y''$
$m \rightarrow y'$
ثابت $\rightarrow y$

⑥ $y = C_1 + C_2 x$

$y = (C_1 + C_2 x) e^{m_{1,2} x}$

$m_{1,2} = 0$

$(m - 0)(m - 0)$

$(m - 0)(m - 0)$

$m^2 - 0 = 0$

$m^2 - 0$

$m^2 = 0$

D.E $\quad y'' = 0$

Find values of k, so that $y = e^{kx}$ is Solution of

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

عايز قيمة k عشان $y = e^{kx}$
يبقى حل المعادلة

then state the Solution

$y = e^{kx}$

عايز اجيب الاشتقاق
الاول والثاني

$\frac{dy}{dx} = y' = k e^{kx}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = k^2 e^{kx}$

التعويض في المعادلة اللي معايا

$$k^2 e^{kx} - k e^{kx} - 6 e^{kx} = 0$$

$$e^{kx} (k^2 - k - 6) = 0$$

الحالة الوحيده اللي المعادلة هتتحقق لجميع قيم X اي

$$k^2 - k - 6 = 0$$

$$(k + 2)(k - 3)$$

$$k_1 = -2 \qquad k_2 = 3$$

thus $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$

(8) $y'' + 2y' + 4y = 0$

$m^2 + 2m + 4 = 0 \qquad m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$m = -1 \pm \sqrt{3}\, i$

$\alpha = -1 \quad , \quad \beta = \sqrt{3}$

$$y(x) = e^{-x} [c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \sin \sqrt{3} x]$$

(9) $4y'' + 6y' - 4y = 0$

$4m^2 + 6m - 4 = 0 \quad \div 2$

$m_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(4 \cdot -4)}}{2(4)}$

$2m^2 + 3m - 2 = 0$

$m_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad m_2 = -2$

$(2m - 1)(m + 2) = 0$

$2m = 1$

$(2m - 1) \qquad (m_2 + 2)$

$m_1 = \frac{1}{2} \qquad m_2 = -2$

$y(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{-2x}$

(10) $2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0$

$2m^2 + 4m + 3 = 0 \qquad m = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(2 \cdot 3)}}{4}$

$m = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i$

$\alpha = -1 \quad , \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$y(x) = e^{-x}\left[c_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + c_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}}\right]$

(11) Form the ~~D.E~~ if $m_1 = m_2 = 2 \ , \ m_3 = -3, \ m_4 = 5$

$m_5 = 7 \ , \ m_{6,7} = -1 \pm 2i$

$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + c_3 e^{-3x} + c_4 e^{5x} + c_5 e^{7x} + e^{-x}\left[c_6 \cos 2x + c_7 \sin 2x\right]$

D.E : $\rightarrow (m-2)(m-2)(m+3)(m-5)(m-7)(m-(2-3i))(m-(2+3i))$

$(m^2 - 2m - 2m + 4)(m^2 - 5m + 3m - 15)(m^2 - 2m - 3\cancel{m}i - 2m + 3\cancel{m}i + 4 + 9)$

(12) $m_{1,2,3,4} = 7$

$(m^2 - 4m + 4)(m^2 - 2m - 15)(m^2 - 4m + 13)$

$(\cancel{m^4} - 2\cancel{m^3} - \cancel{15m^2} - \cancel{4m^3} + \cancel{8m^2} + 60m + 4\cancel{m^2} - 8m - 60)$

$y(x) = [c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3] \cdot e^{7x}$

$(m^4 - 6m^3 - 3m^2 + 52m - 60)(m^2 - 4m + 13)$

$(m-7)(m-7)(m-7)(m-7) = 0$

(13)

if the roots is $\frac{3 \pm 5i}{2}$ Find the D.E ② and the Ch.eq ① and wrote the Solution ÷

① Ch. eq : $m = \frac{3 \pm 5i}{2}$. $\alpha = 3/2$ $\beta = \pm \frac{5}{2} i$

$2m = 3 \pm 5i$

$(2m-3)^2 = (\pm 5i)^2$ تربيع الطرفين . $i^2 = -1$

$4m^2 - 12m + 9 = -25$

$4m^2 - 12m + 34 = 0$

D.E = $4y'' - 12y' + 34y = 0$

$y(x) = e^{3/2 x} [C_1 \cos \frac{5}{2} x + C_2 \sin \frac{5}{2} x]$

(14) $\frac{d^2y}{dx^2} + 5y = 0$

$m^2 + 5 = 0$

$m^2 = -5$ $\sqrt{-1} = i$

$m = \pm\sqrt{5}\, i$

$\alpha = 0$ $\beta = \sqrt{5}$

$y(x) = C_1 \cos \sqrt{5}\, x + C_2 \sin \sqrt{5}\, x$

(15) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0$

$m^2 - 4 = 0$

$m^2 = 4$

$m = \pm 2$

$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$