

**DISEÑO Y CONTROL MULTIVARIABLE DE UN HELICÓPTERO DE DOS
GRADOS DE LIBERTAD**

**ANGELO ANTONIO MARIN LÓPEZ
ALVARO JOSÉ BEDOYA GONZALEZ**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
INGENIERÍA EN MECATRÓNICA
PEREIRA-RISARALDA
13-NOV-2013**

**DISEÑO Y CONTROL MULTIVARIABLE DE UN HELICÓPTERO DE DOS
GRADOS DE LIBERTAD**

**ANGELO ANTONIO MARIN LÓPEZ
ALVARO JOSÉ BEDOYA GONZALEZ**

Trabajo de grado para optar al título de tecnólogo en mecatrónica

**DIRECTOR
PhD(c). EDUARDO GIRALDO SUAREZ**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
INGENIERÍA EN MECATRÓNICA
PEREIRA-RISARALDA**

13-NOV-2013

Dedicatoria

A nuestras familias en especial a nuestros padres y hermanos. A todos ellos que siempre nos han apoyado de manera incondicional y nos han motivado para seguir adelante.

Agradecimientos

A nuestro director de proyecto de grado Eduardo Giraldo Suarez; por acompañarnos en este proceso y por compartir sus valiosos conocimientos, mediante los cuales se hizo posible el desarrollo de este trabajo de grado.

A nuestros compañeros de ingeniería mecatrónica, que nos han acompañado y apoyado durante esta pequeña etapa de nuestras vidas.

Tabla de contenido

Índice de figuras	6
Índice de tablas	8
Resumen	9
Introducción	10
Capítulo 1.....	11
1. Conceptos generales	11
1.1 Sistemas análogos	11
1.2 Sistemas de control.....	12
1.3 Estrategias de control.....	12
1.3.1 Control no realimentado (lazo abierto)	12
1.3.2 Control realimentado (lazo cerrado)	12
1.3.2.1 Sistemas lineales y no lineales.....	13
1.3.2.2 Sistemas invariantes y variantes en el tiempo.....	13
1.4 Análisis de sistemas.....	14
1.4.1 Análisis por función de transferencia	14
1.4.2 Análisis por variables de estado.....	14
Capítulo 2	16
2. Descripción y modelado matemático	16
2.1 Helicóptero de dos grados de libertad.....	16
2.2 Ecuaciones del sistema.....	17
2.3 Modelo no-lineal	18
2.4 Modelo lineal	20
2.5 Funciones de transferencia	22
Capítulo 3	23
3. Diseño de controladores	23
3.1 Controladores multivariables.....	23
3.2 Sistemas de control desacoplados.....	23
3.3 Sistemas de control acoplados	24
3.3.1 Calculo de controladores.....	25
3.4 Diseño de controladores en espacio de estados.....	27
3.4.1 Controlabilidad	28
3.4.2 Observadores	28

3.5 Sistemas de seguimiento	29
3.5.1 Ganancia en lazo cerrado	29
3.5.1.1 Cálculo de ganancias	30
3.5.2 Realimentación integral de salida	32
3.5.2.1 Cálculo de ganancias	33
3.6 Cálculo de ganancias usando el regulador lineal óptimo con criterio (LQR)	34
Capítulo 4.....	37
4. Diseño tridimensional	37
4.1 Estructura base	37
4.2 Pivote	38
4.3 Helicóptero	39
4.4 Ensamble del helicóptero	40
4.5 Modelo para la simulación.....	41
Capítulo 5.....	43
5. Simulación y análisis de resultados.....	43
5.1 Implementación de controladores en Simulink.....	43
5.2 Control desacoplado	43
5.3 Control acoplado por matriz de desacople	45
5.4 controlador ganancia en lazo cerrado	46
5.5 Controlador realimentación integral de la salida	48
5.6 Modelo no lineal	49
5.7 Implementación del modelo tridimensional	50
Conclusiones	51
Bibliografía	52

Índice de figuras

Figura 1.0 Representación de un sistema multivariable	11
Figura 1.1 Sistema de control escalar en lazo abierto	12
Figura 1.2 Sistema de control escalar en lazo cerrado	13
Figura 1.3 Representación de un sistema lineal invariante en el tiempo	15
Figura 2.0 Helicóptero de dos grados de libertad	16
Figura 3.0 Control desacoplado	24
Figura 3.1 Control acoplado por matriz de desacople	24
Figura 3.2 Esquema de un sistema de seguimiento con ganancia en lazo cerrado..	29
Figura 3.3 sistema de seguimiento con acción integral	32
Figura 4.0 Grados de libertad	37
Figura 4.1 Estructura base	38
Figura 4.2 Pivote	38
Figura 4.3 Helicóptero	39
Figura 4.4 Ensamble helicóptero	40
Figura 4.5 Diagrama de bloques del helicóptero	41
Figura 4.6 Simulación SimMechanics	42
Figura 5.0 Diagrama de bloques del sistema de control implementado	44
Figura 5.1 Grafica de respuesta del sistema de control desacoplado	44
Figura 5.2 Diagrama de bloques del sistema de control acoplado por matriz de desacople implementado	45
Figura 5.3 Grafica de respuesta del sistema de control acoplado	45
Figura 5.4 Diagrama de bloques de controlador e por realimentación de estados con ganancia en lazo cerrado	46
Figura 5.5 Grafica del controlador ganancia en lazo de estados usando el método de reubicación de polos	46
Figura 5.6 Grafica del controlador ganancia en lazo cerrado usando LQR	47
Figura 5.7 Diagrama de bloques del controlador en espacio de estados realimentación integral de la salida	47

Figura 5.8 Grafica del controlador realimentación integral de la salida usando el método de reubicación de polos	48
Figura 5.9 Grafica del controlador realimentación integral de la salida usando LQR	48
Figura 5.10 Diagrama de bloques del modelo no lineal.....	49
Figura 5.11 Comportamiento del sistema no lineal.....	50
Figura 5.12 Implementación de los controladores en el modelo tridimensional	50

Índice de tablas

Tabla 2.0	Tabla de parámetros.....	21
Tabla 3.0	Parámetros de los controladores desacoplados.....	26
Tabla 3.1	Parámetros de los controladores acoplados por matriz de desacople ..	27

RESUMEN

En el presente trabajo se describe el proceso mediante el cual se desarrolló el proyecto, mostrando la identificación del sistema, el diseño de controladores y su implementación en el modelo tridimensional. El modelo y los parámetros físicos del helicóptero de dos grados de libertad se tomaron del manual de uno de los productos ofrecidos por la empresa “feedback instruments limited”, cuyo modelo es no lineal. Linealizando este último alrededor de un punto de operación, se determinó un modelo lineal que representa el sistema. A partir de este se construyen los diferentes controladores que luego fueron aplicados al modelo tridimensional hecho con el software SolidWorks y comparados con los controladores PID que entrega el fabricante.

INTRODUCCIÓN

En un principio los vehículos aéreos no tripulados (UAV's) fueron usados en fines militares, pero hoy en día son usados en diferentes actividades como fotografías aéreas, envío de correspondencia y alimentos, monitoreo, rescate, mapeo de terrenos, entre otras. Esto debido a que es necesario la combinación de muchos elementos y disciplinas de apoyo para que estos sistemas funcionen de manera autónoma, los cuales se han desarrollado en las últimas décadas. [1]

Los helicópteros a escala son un modelo de vehículo aéreo no tripulado que ha causado gran interés por parte de la comunidad científica, debido a la gran influencia de los efectos aerodinámicos, al alto grado de interacción de sus variables y a sus características no lineales, que hacen que estos sistemas sean difíciles de maniobrar. Por lo tanto sin una teoría de control bien desarrollada no se podrían tratar estos dispositivos de manera inteligente. [1]

En este proyecto se pretende estudiar y controlar dos de los seis grados de libertad que posee un helicóptero, identificando un modelo matemático que represente al sistema, a partir del cual se diseñan diferentes estrategias de control, que son analizadas por medio de gráficas y simulaciones en un modelo tridimensional. También se pretende adquirir una base para el análisis de acontecimientos reales, una base racional para la planificación de pruebas y diseño de manera inteligente. Las cuales son necesarias para enfrentar cualquier tipo de problema en general.

Capítulo 1

Conceptos generales

Sabiendo el propósito del proyecto, el cual consiste en diseñar diversas estrategias de control multivariable para un helicóptero de dos grados de libertad, en este capítulo se brinda toda la contextualización para el modelado y entendimiento del sistema.

1.1 Sistemas análogos

Un sistema físico es un modelo de un dispositivo o de un conjunto de ellos en el mundo real. Para el desarrollo del modelo de un sistema es necesario un profundo conocimiento del mismo y de sus rangos de operación. Por medio de las leyes de la física se puede identificar un modelo matemático que describa el comportamiento y la dinámica de estos. Se dice que un sistema físico es análogo cuando las señales en varias partes de este son todas función de una variable continua tiempo (t). [2]

En el mundo real la mayoría de sistemas análogos son de naturaleza multivariables, es decir que son sistemas con varias entradas y salidas, en las que una entrada afecta a varias salidas y recíprocamente una salida es afectada por varias entradas (ver figura 1.0). [2]

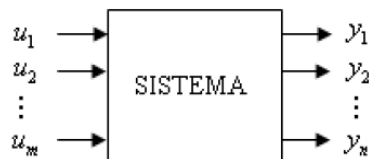


Figura 1.0 Representación de un sistema multivariable [2]

1.2 Sistemas de control

Los estudios de los sistemas se realizan con el fin de obtener respuestas deseadas a partir de ciertas entradas. Si las respuestas no son satisfactorias se diseñan sistemas de control, que se encargan de analizar las características dinámicas de los procesos y mejorar sus salidas, ya sea ajustando ciertos parámetros o introduciendo compensadores. [2]

Los sistemas de control se consideran eficientes cuando garantizan estabilidad y robustez ante perturbaciones y errores en los modelos.

1.3 Estrategias de control

Las estrategias de control determinan la estructura o circuito que sigue la información, el cual se define dependiendo la aplicación. [3] A continuación se presentan dos modelos.

1.3.1 Control no realimentado (lazo abierto)

Es un sistema en el cual la señal de salida no afecta la acción del controlador (ver figura 1.1). Por lo tanto cada entrada corresponde a una condición operativa fija. La efectividad de estos controladores depende de una correcta calibración del mismo. El control en lazo abierto es utilizado en sistemas donde se conoce la relación entre entradas y salidas, además este no debe contar con perturbaciones externas ni internas. [3][4]

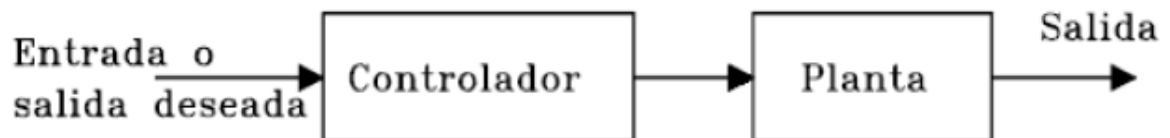


Figura 1.1 Sistema de control escalar en lazo abierto [2]

1.3.2 Control realimentado (lazo cerrado)

Este presenta un esquema de control en el que se miden las señales de salidas y se compara con las referencias, generando una señal de error que es recibida por el controlador, el cual a partir de esta envía la acción de control a los actuadores, de tal forma que la señal del error sea compensada y tienda a cero. [4]

La realimentación tiene efectos en las características del sistema, estos pueden ser positivos o negativos. Por lo tanto hay que aplicarla adecuadamente. Cuando

se maneja esta de manera óptima se puede lograr estabilidad e insensibilidad a perturbaciones externas y variaciones internas de los parámetros del sistema. [3]

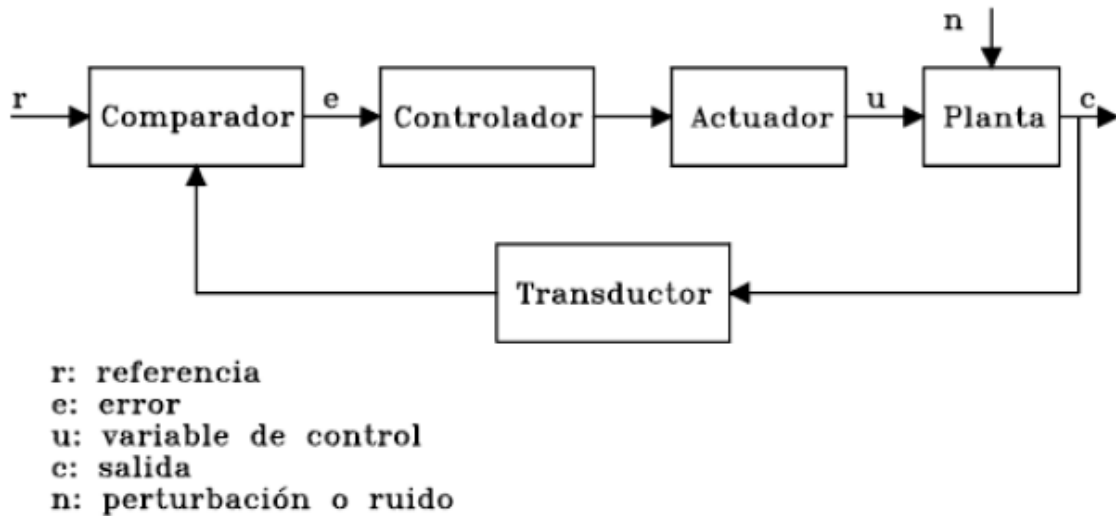


Figura 1.2 Sistema de control escalar en lazo cerrado [2]

Según el método de análisis y diseño, los sistemas de control con realimentación se clasifican como lineales o no lineales, variantes o invariantes en el tiempo.

1.3.2.1 Sistemas lineales y no lineales

Los sistemas lineales no existen en la práctica, ya que todos los sistemas físicos son no lineales en algún grado. Si los sistemas presentan propiedades de superposición y proporcionalidad, el sistema es esencialmente lineal. Cuando se pierden estas dos propiedades se dice que el sistema es no lineal. [2]

Para sistemas lineales hay varias técnicas de análisis y diseño. Los sistemas no lineales son generalmente difíciles de tratar en forma matemática y no existen métodos generales disponibles para resolver una gran variedad de clases de sistemas de este tipo. En el diseño de sistemas de control, es práctico primero diseñar el controlador basado en un modelo lineal del sistema despreciando las no linealidades. El controlador diseñado es luego aplicado al modelo del sistema no lineal para su evaluación o rediseño por simulación mediante computador. [3]

1.3.2.2 sistemas invariantes y variantes con el tiempo

Cuando los parámetros de un sistema de control son estacionarios con respecto al tiempo durante su operación, se dice que el sistema es invariante en el tiempo. En la práctica muchos sistemas físicos contienen elementos que varían con el

tiempo. Para el desarrollo de controladores se usan sistemas lineales e invariantes en el tiempo debido a la disponibilidad de métodos analíticos unificados y fáciles de entender. [3]

1.4 Análisis de sistemas

Para el estudio de sistemas de control se deben conocer las características dinámicas del proceso, las cuales son representadas mediante un modelo matemático. Sin embargo un sistema se puede representar de muchas formas dependiendo de la particularidad del mismo y las circunstancias de control. Las dos representaciones o modelos usados frecuentemente para el análisis de los sistemas son función de transferencia y variables de estado. [4]

1.4.1 Análisis por función de transferencia

En la teoría de control, a menudo se usan las funciones de transferencia para caracterizar las relaciones de entrada y salida de componentes o de sistemas que se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales e invariantes en el tiempo. Sin embargo estas no proporcionan ninguna información relativa acerca de la estructura del sistema. [4]

Para facilitar el manejo de los modelos matemáticos de los sistemas expresados en ecuaciones diferenciales, se usa la transformada de Laplace. Por medio de esta herramienta se pueden transformar las ecuaciones diferenciales lineales en funciones algebraicas de una variable compleja S . Una ventaja de este método es que permite usar técnicas de análisis gráficos. [4]

Por lo tanto una función de transferencia de un sistema lineal invariante en el tiempo se puede definir como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada, bajo la suposición inicial de que todas las condiciones iniciales son nulas (ver ecuación (1.0)).

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1.0)$$

1.4.2 Análisis por variables de estado

En general, las ecuaciones de n -ésimo orden que describen un sistema se pueden descomponer en n ecuaciones de primer orden. Ya que, en principio, las ecuaciones diferenciales de primer orden son más fáciles de resolver que otras de orden más alto. [3]

$$\dot{X}_1(t) = X_2(t)$$

$$\dot{X}_2(t) = X_3(t)$$

⋮

$$\dot{X}_n(t) = -a_0X_1(t) - a_1X_2(t) - \dots - a_{n-1}X_n(t) + f(t) \quad (1.1)$$

En la teoría de los sistemas de control, el conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden (ver ecuación (1.1)) se conocen como ecuaciones de estado, y X_1, X_2, \dots, X_n , son llamadas variables de estado. Estas últimas son las que describen las condiciones pasadas, presentes y futuras del comportamiento y la dinámica del sistema. (3)

El análisis de espacio de estados se centra en el estudio de tres tipos de variables que intervienen en el modelado de los sistemas dinámicos: las variables de entrada, salida y estado.

Cuando los sistemas no lineales e invariantes en el tiempo son linealizados alrededor de un punto de operación. Las ecuaciones de estado y de salidas se representan de la siguiente forma.

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \quad (1.2)$$

$$Y(t) = C(t)X(t) + D(t)U(t) \quad (1.3)$$

Donde A es la matriz de realimentación, B es la matriz de entrada, C es la matriz de salida y D es la matriz de transmisión directa. A continuación un diagrama de bloques que representa las ecuaciones (1.2) y (1.3).

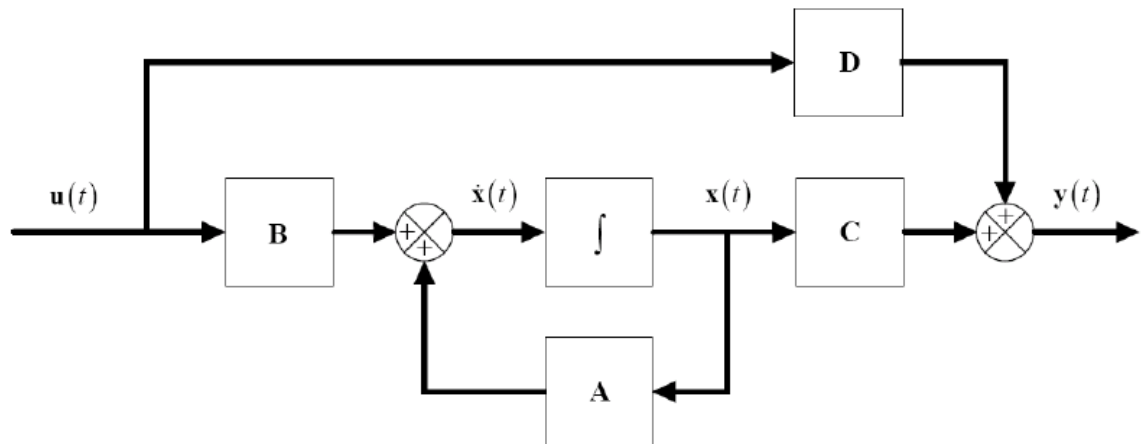


Figura 1.3 Representación de un sistema lineal invariante en el tiempo [2]

Capítulo 2

Descripción y modelado matemático

En este capítulo se determinan los parámetros de la planta que van a ser usados para el diseño de los controladores. Se explica brevemente el comportamiento del sistema y los parámetros generales de operación.

2.1 Helicóptero de dos grados de libertad

Un helicóptero de dos grados de libertad es un mecanismo que consta de un cuerpo o estructura que está sujeta a un pivote central, sobre el cual se generan dos movimientos angulares, uno sobre el eje z llamado Ψ y el otro sobre el eje x llamado θ . En cada extremo del cuerpo del helicóptero se encuentra un motor con una hélice acoplada, estos son los encargados de generar el empuje necesario para mover el sistema.

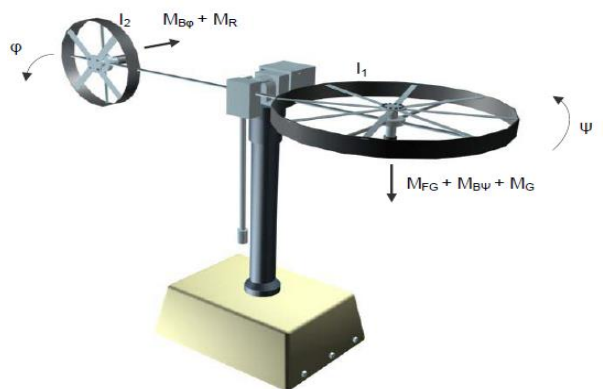


Figura 2.0 Helicóptero de dos grados de libertad [5]

2.2 Ecuaciones del sistema

El modelo que se muestra a continuación es tomado del manual del helicóptero de dos grados de libertad distribuido por la empresa “feedback instruments limited” (ver figura 2.0). En este se describe el helicóptero mediante un sistema de ecuaciones no lineales, en las cuales se encuentran todas las características electromecánicas de la planta.

Para el movimiento rotacional alrededor del eje z, se presenta la siguiente ecuación de momentos.

$$I_1 * \ddot{w} = M_1 - M_{FG} - M_{BW} - M_G - M_{R1} \quad (2.0)$$

Donde intervienen los siguientes momentos:

- Características no lineales del motor 1 (M_1)

$$M_1 = a_1 * T_1^2 + b_1 * T_1 \quad (2.1)$$

- Momento gravitacional (M_{FG})

$$M_{FG} = M_g * \sin w \quad (2.2)$$

- Momento de las fuerzas de fricción (M_{BW})

$$M_{BW} = B_{1W} * \dot{w} + B_{2W} * \text{sign}(\dot{w}) \quad (2.3)$$

- Momento de giro (M_G)

$$M_G = K_{gy} * M_1 * \dot{\theta} * \cos(w) \quad (2.4)$$

- Momento de reacción (M_{R1})

$$M_{R1} = \frac{K_{c1}(T_{01}S+1)}{T_{p1}S+1} * T_2 \quad (2.5)$$

Aplicando Laplace inversa a la ecuación anterior se obtiene.

$$\dot{M}_{R1}(t) = -\frac{M_{R1}(t)}{T_{p1}} + \frac{k_{c1}}{T_{p1}} * T_2(t) + \frac{k_{c1} * T_{01}}{T_{p1}} * \dot{T}_2 \quad (2.5.1)$$

Las características del motor son aproximadas mediante un modelo de primer orden expresado en el dominio de Laplace (ver ecuación (2.6)).

$$T_1 = \frac{k_1}{T_{11}S+T_{10}} * U_1(s) \quad (2.6)$$

Aplicando Laplace inversa a la ecuación anterior se obtiene.

$$\dot{T}_1 = -\frac{T_{10}}{T_{11}} * T_1(t) + \frac{k_1}{T_{11}} * u_1(t) \quad (2.6.1)$$

Para el movimiento rotacional alrededor del eje x, se presenta una ecuación de momentos similar a la anterior.

$$I_2 * \ddot{\theta} = M_2 - M_{B\theta} - M_{R2} \quad (2.7)$$

Donde intervienen los siguientes momentos:

- Características no lineales del motor 2 (M_2)

$$M_2 = a_2 * T_2^2 + b_2 * T_2 \quad (2.8)$$

- Momento de las fuerzas de fricción ($M_{B\theta}$)

$$M_{B\theta} = B_{1\theta} * \dot{\omega} + B_{2\theta} * \text{sign}(\dot{\theta}) \quad (2.9)$$

- Momento de reacción (M_{R2})

$$M_{R2} = \frac{k_{c2}(T_{02}S+1)}{(T_{p2}S+1)} * T_1 \quad (2.10)$$

Aplicando Laplace inversa a la ecuación anterior se obtiene.

$$\dot{M}_{R2}(t) = -\frac{M_{R2}(t)}{T_{p2}} + \frac{k_{c2}}{T_{p2}} * T_1(t) + \frac{k_{c2} * T_{02}}{T_{p2}} * \dot{T}_1 \quad (2.10.1)$$

Características del motor 2 en el dominio de Laplace.

$$T_2 = \frac{k_2}{T_{21}S+T_{20}} * U_2(s) \quad (2.11)$$

Aplicando Laplace inversa a la ecuación anterior se obtiene.

$$\dot{T}_2 = \frac{k_2}{T_{21}} * u_2(t) - \frac{T_{20}}{T_{21}} * T_2(t) \quad (2.11.1)$$

2.3 Modelo no-lineal

A partir de las ecuaciones descritas anteriormente se plantea el modelo no lineal que describe el comportamiento y la dinámica del sistema.

Reemplazando las ecuaciones (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) y (2.5.1) en la ecuación (2.0) se obtiene

$$\ddot{w} = \frac{a_1 * T_1^2 + b_1 * T_1 - M_g * \sin w - B_{1w} * \dot{w} - B_{2w} * \text{sign}(\dot{w}) - K_{gy} * a_1 * T_1^2 * \dot{\theta} * \cos w - K_{gy} * b_1 * T_1 * \dot{\theta} * \cos w - M_{R1}}{I_1} \quad (2.12)$$

Reemplazando la ecuación (2.11.1) en la ecuación (2.5.1)

$$\dot{M}_{R1} = -\frac{M_{R1}}{T_{p1}} + \left(\frac{K_{c1}}{T_{p1}} - \frac{K_{c1} * T_{01} * T_{20}}{T_{p1} * T_{21}} \right) * T_2 + \frac{K_{c1} * K_2 * T_{02}}{T_{p1} * T_{21}} * u_2(t) \quad (2.13)$$

Reemplazando la ecuación (2.6.1) en la ecuación (2.10.1)

$$\dot{M}_{R2} = -\frac{M_{R2}}{T_{p2}} + \left(\frac{K_{c2}}{T_{p2}} - \frac{K_{c2} * T_{02} * T_{10}}{T_{p2} * T_{11}} \right) * T_1 + \frac{K_{c2} * K_1 * T_{02}}{T_{p2} * T_{11}} * u_1(t) \quad (2.14)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.7) y (2.8) en la ecuación (2.6)

$$\ddot{\theta} = \frac{a_2 * T_2^2 + b_2 * T_2 - B_{1\theta} * \dot{w} - B_{2\theta} * \text{sing}(\dot{\theta}) - M_{R2}}{I_2} \quad (2.15)$$

En esta sección se definen las variables auxiliares.

- $x_1 = w$

$$\dot{x}_1 = \dot{w} = x_2 \quad (2.16)$$

- $x_2 = \dot{w} \quad \dot{x}_2 = \ddot{w}$

- $x_3 = \theta$

$$\dot{x}_3 = \dot{\theta} = x_4 \quad (2.17)$$

- $x_4 = \dot{\theta} \quad \dot{x}_4 = \ddot{\theta}$

- $x_5 = T_1 \quad \dot{x}_5 = \dot{T}_1$

- $x_6 = T_2 \quad \dot{x}_6 = \dot{T}_2$

- $x_7 = M_{R1} \quad \dot{x}_7 = \dot{M}_{R1}$

- $x_8 = M_{R2} \quad \dot{x}_8 = \dot{M}_{R2}$

Ecuaciones de salida.

$$w = x_1 \quad (2.18)$$

$$\theta = x_3 \quad (2.19)$$

Reemplazando las variables auxiliares en las ecuaciones (2.6.1), (2.11.1), (2.12), (2.13), (2.14) y (2.15) se obtiene la representación de las ecuaciones no lineales mediante variables auxiliares.

$$\dot{x}_2 = \frac{a_1 * x_5^2 + b_1 * x_5 - M_g * \sin X_1 - B_{1w} * X_2 - B_{2w} * \text{sign}(x_2) - K_{gy} * a_1 * x_5^2 * x_4 * \cos x_1 - K_{gy} * b_1 * x_5 * x_4 * \cos x_1 - X_7}{I_1} \quad (2.20)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{a_1 * x_6^2 + b_2 * x_6 - B_{1\theta} * x_2 - B_{2\theta} * \text{sign}(x_4) - x_8}{I_2} \quad (2.21)$$

$$\dot{x}_5 = -\frac{T_{10}}{T_{11}} * x_5 + \frac{K_1}{T_{11}} * u_1 \quad (2.22)$$

$$\dot{x}_6 = -\frac{T_{20}}{T_{21}} * x_6 + \frac{K_2}{T_{21}} * u_2 \quad (2.23)$$

$$\dot{x}_7 = -\frac{1}{T_{p1}} * x_7 + \left(\frac{K_{c1}}{T_{p1}} - \frac{K_{c1} * T_{01} * T_{20}}{T_{p1} * T_{21}} \right) * x_6 + \frac{K_{c1} * K_2 * T_{01}}{T_{p1} * T_{21}} * u_2 \quad (2.24)$$

$$\dot{x}_8 = -\frac{1}{T_{p2}} * x_8 + \left(\frac{K_{c2}}{T_{p2}} - \frac{K_{c2} * T_{02} * T_{10}}{T_{p2} * T_{11}} \right) * x_5 + \frac{K_{c2} * K_1 * T_{01}}{T_{p2} * T_{11}} * u_1 \quad (2.25)$$

2.4 Modelo lineal

Se linealizan las ecuaciones (2.18), (2.19), (2.20), (2.21), (2.22), (2.23) y (2.24) alrededor de todos los puntos de operación en cero.

$$\Delta \dot{x}_1 = \Delta x_2 \quad (2.26)$$

$$\Delta \dot{x}_2 = \frac{b_1 * \Delta x_5 - B_{1w} * \Delta x_2 - M_g * \Delta x_1 - \Delta x_7}{I_1} \quad (2.27)$$

$$\Delta \dot{x}_3 = \Delta x_4 \quad (2.28)$$

$$\Delta \dot{x}_4 = \frac{-\Delta x_8 + b_2 * \Delta x_6 - B_{1\theta} * \Delta x_2}{I_2} \quad (2.29)$$

$$\Delta \dot{x}_5 = -\frac{T_{10}}{T_{11}} * \Delta x_5 + \frac{K_1}{T_{11}} * \Delta u_1 \quad (2.30)$$

$$\Delta \dot{x}_6 = -\frac{T_{20}}{T_{21}} * \Delta x_6 + \frac{K_2}{T_{21}} * \Delta u_2 \quad (2.31)$$

$$\Delta \dot{x}_7 = \left(\frac{K_{c1}}{T_{p1}} - \frac{K_{c1} * T_{01} * T_{20}}{T_{p1} * T_{21}} \right) * \Delta x_6 - \frac{1}{T_p} * \Delta x_7 + \frac{K_{c1} * K_2 * T_{02}}{T_{p1} * T_{21}} * \Delta u_2 \quad (2.32)$$

$$\Delta \dot{x}_8 = \left(\frac{K_{c2}}{T_{p2}} - \frac{K_{c2} * T_{02} * T_{10}}{T_{p2} * T_{11}} \right) * \Delta x_5 - \frac{1}{T_{p2}} * \Delta x_7 + \frac{K_{c2} * K_1 * T_{02}}{T_{p2} * T_{11}} * \Delta u_1 \quad (2.33)$$

Los valores de los parámetros del sistema descrito anteriormente se encuentran en la siguiente imagen tomada del manual nombrado al comienzo del capítulo.

Para el diseño de los controladores se reemplazan estos valores y se determinan las matrices que componen la representación en espacio de estados, el modelo no lineal y las funciones de transferencia.

Parámetro	Valor
I_1 – Momento de inercia del rotor vertical	$6.8 * 10^{-2} \text{ Kg} * \text{m}^2$
I_2 – Momento de inercia del rotor horizontal	$2 * 10^{-2} \text{ Kg} * \text{m}^2$
a_1 – Característica estática	0.0135
b_1 – Característica estática	0.0924
a_2 – Característica estática	0.02
b_2 – Característica estática	0.09
M_g – Momento de gravedad	0.32 N*m
$B_{1\psi}$ – Parámetro función del momento de inercia	$6 * 10^{-3} \text{ N} * \text{m} * \text{s} / \text{rad}$
$B_{2\psi}$ – Parámetro función del momento de inercia	$1 * 10^{-3} \text{ N} * \text{m} * \text{s} / \text{rad}$
$B_{1\theta}$ – Parámetro función del momento de inercia	$1 * 10^{-1} \text{ N} * \text{m} * \text{s} / \text{rad}$
$B_{2\theta}$ – Parámetro función del momento de inercia	$1 * 10^{-2} \text{ N} * \text{m} * \text{s} / \text{rad}$
K_{gy} – Parámetro de momento giroscópico	0.05 s/rad
K_1 – Ganancia motor 1	1.1
K_2 – Ganancia motor 2	0.8
T_{11} – Parámetro denominador del motor 1	1.1
T_{10} – Parámetro denominador del motor 1	1
T_{21} – Parámetro denominador del motor 2	1
T_{20} – Parámetro denominador del motor 2	1
T_{p1} – parámetro de momento de reacción	2
T_{p2} – parámetro de momento de reacción	2
T_{01} – parámetro de momento de reacción	3.5
T_{02} – parámetro de momento de reacción	3.5
K_{c1} – Ganancia de momento de reacción	-0.2
K_{c2} – Ganancia de momento de reacción	-0.2

Tabla 2.0 Tabla de parámetros

Reemplazando los valores de la tabla en el modelo lineal se obtiene.

$$\Delta \dot{x}_1 = \Delta x_2 \quad (2.34)$$

$$\Delta \dot{x}_2 = -4.7059\Delta x_1 - 0.0882\Delta x_2 + 1.3588\Delta x_5 - 14.705\Delta x_7 \quad (2.35)$$

$$\Delta \dot{x}_3 = \Delta x_4 \quad (2.36)$$

$$\Delta \dot{x}_4 = -5\Delta x_2 + 4.5\Delta x_6 - 50\Delta x_8 \quad (2.37)$$

$$\Delta \dot{x}_5 = -0.9090\Delta x_5 + \Delta u_1 \quad (2.38)$$

$$\Delta \dot{x}_6 = -\Delta x_6 + 0.8\Delta u_2 \quad (2.39)$$

$$\Delta \dot{x}_7 = 0.25\Delta x_6 - 0.5\Delta x_7 - 0.28\Delta u_2 \quad (2.40)$$

$$\Delta \dot{x}_8 = 0.2181\Delta x_5 - 0.5\Delta x_8 - 0.35\Delta u_1 \quad (2.41)$$

2.5 Funciones de transferencia

Aplicando Laplace y despejando las variables de salida (Δx_1 , Δx_3) en función de las variables de entrada (Δu_1 , Δu_2) se obtienen las siguientes funciones de transferencia.

$$w = \Delta x_1(s) = \frac{1.3588}{s^3 + 0.821s^2 - 5.508s - 4.2781} \Delta u_1(s) + \frac{4.118s + 1.176}{s^4 + 1.412s^3 - 4.338s^2 - 7.103s - 2.353} \Delta u_2 \quad (2.42)$$

$$\theta = \Delta x_3(s) = \frac{17.5s^3 - 3.338s^2 - 86.191s - 23.529}{s^6 - 0.321s^5 - 5.918s^4 - 7.032s^3 - 2.139s^2} \Delta u_1 + \frac{3.6s^3 + 5.6s^2 - 15.92s - 8.47}{s^6 + 1.41s^5 - 4.34s^4 - 7.10s^3 - 2.35s^2} \Delta u_2 \quad (2.43)$$

Capítulo 3

Diseño de controladores

Teniendo en cuenta la naturaleza multivariable del helicóptero de dos grados de libertad y el modelamiento del sistema, ya realizado, en esta sección se tratará el diseño de controladores para sistemas multivariables.

3.1 Controladores multivariables

Un proceso multivariable es aquel que posee múltiples variables de entrada y múltiples variables de salida (controladas), las cuales presentan un fenómeno denominado interacción el cual hace que el desempeño de un lazo de control afecte al de los otros y viceversa. [9]

A continuación se plantean algunas estrategias de control para sistemas multivariables. Las primeras dos se desarrollan a partir de la representación externa del sistema (función de transferencia) y las otras sobre la representación interna (espacio de estados).

3.2 Sistemas de control desacoplado

En general, este tipo de control se usa cuando las interacciones entre sus variables de control son débiles, debido a que no amortigua de manera óptima los efectos de las entradas. [9] En la figura 3.0 se puede observar el diagrama de bloques de un sistema de control desacoplado para un proceso de dos entradas y dos salidas.

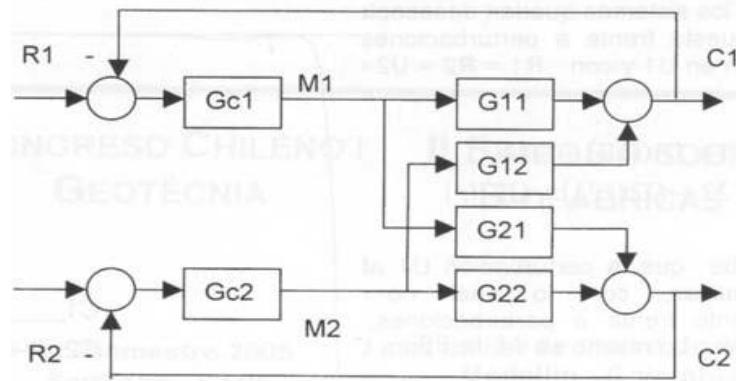


Figura 3.0 Control desacoplado [7]

Los controladores para estos sistemas se realizan de manera independiente, suponiendo un apareamiento de la forma $M1 \rightarrow C1$ y $M2 \rightarrow C2$. En donde cada variable controlada, se controla mediante la variable manipulada que tenga mayor influencia en ella. [9]

3.3 Sistemas de control acoplados

Este control se usa cuando la interacción entre las variables de control es fuerte, debido a que brinda mayor estabilidad y robustez ante las perturbaciones internas. [9]

El acople de las funciones de transferencia se realiza mediante una matriz de desacople la cual tiene como objetivo eliminar o reducir las interacciones de cada variable de entrada con las variables de salida que controla. [10]

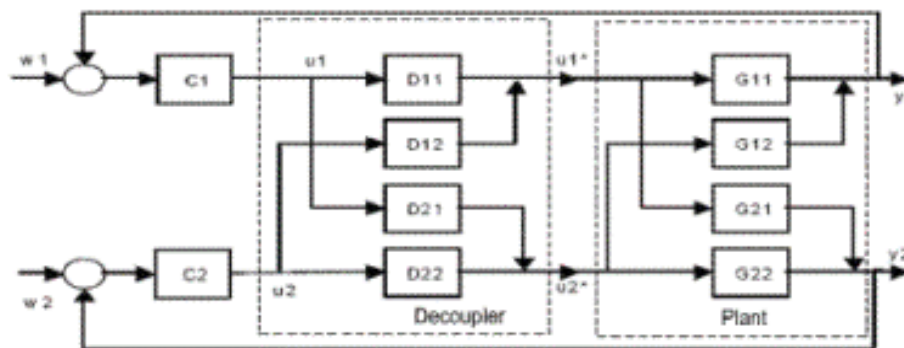


Figura 3.1 Control acoplado por matriz de desacople [8]

La matriz de desacople está dada de la siguiente forma.

$$D_{21}(s) = -\frac{G_{21}(s)}{G_{22}(s)}, D_{12}(s) = -\frac{G_{12}(s)}{G_{11}(s)}, D(s) = \begin{bmatrix} 1 & D_{12}(s) \\ D_{21}(s) & 1 \end{bmatrix} \quad (3.0)$$

Para la construcción de los controladores $C_1(s)$ y $C_2(s)$ se usa una nueva matriz de transferencia denominada $G(s)D(s)$ (ver ecuación (3.1)). Estos se construyen de manera independiente, suponiendo un apareamiento de la forma $u_1(s) \rightarrow y_1$ y $u_2(s) \rightarrow y_2$ (ver figura 3.1). [10]

$$G(s)D(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s)D_{11}(s) + G_{12}(s)D_{21}(s) & 0 \\ 0 & G_{21}(s)D_{12}(s) + G_{22}(s)D_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

3.3.1 Cálculo de controladores

El procedimiento que se muestra a continuación aplica para los dos modelos de control vistos anteriormente, los controladores variaran dependiendo la función de transferencia usada.

Para el cálculo de los controladores se usa reubicación de polos por métodos polinomiales, definiendo un controlador de la forma.

$$C(s) = \frac{L(s)}{P(s)} \quad (3.2)$$

Se conocen dos casos generales para representar este controlador.

Primer caso: donde el grado del polinomio del numerador y del denominador del controlador es igual que el del denominador de la función de transferencia.

$$C(s) = \frac{l_0 s^m + l_1 s^{m-1} + l_2 s^{m-2} + \dots + l_m}{p_0 s^m + p_1 s^{m-1} + p_2 s^{m-2} + \dots + p_m} \quad (3.3)$$

Segundo caso: donde el grado del denominador del controlador es igual que el de la función de transferencia, pero el numerador del controlador es un grado menor que el del denominador.

$$c(s) = \frac{l_1 s^{n-1} + l_2 s^{n-2} + \dots + l_n}{p_0 s^n + p_1 s^{n-1} + p_2 s^{n-2} + \dots + p_n} \quad (3.4)$$

Para hallar los valores de P y L se debe encontrar el polinomio característico (P_c), el cual es el denominador de la función de transferencia en lazo cerrado, y compararlo con un polinomio deseado (P_d), donde este último debe ser del mismo orden que el P_c .

El polinomio característico está dado por la siguiente ecuación.

$$p_c(s) = a_s * p_s + b_s * l_s \quad (3.5)$$

Dónde:

a_s = denominador de la funcion de transferencia

b_s = numerador de la funcion de transferencia

l_s = numerador del controlador

p_s = denominador del controlador

Mientras que el polinomio deseado esta dado de la siguiente forma. Donde los valores de este deben estabilizar el sistema.

$$P_d(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n \quad (3.6)$$

Al implementar estos cálculos en el modelo del helicóptero determinado en el capítulo anterior, se obtienen los siguientes valores de P y L para los controladores desacoplados.

C1(s)	C2(s)
p0=1.0000	p0=1.0000
p1=9.0030	p1=13.0030
p2=30.9870	p2=72.9990
p3=39.4788	p3=221.4449
p4=31.1176	p4=325.3001
p5=20.7657	p5=313.0116
p6=6.1500	p6=221.7030
l0=-41.4116	p7=90.6607
l1=-104.3943	p8=14.6774
l2=-121.0240	l0=8.4413
l3=-108.0080	l1=26.4889
l4=-66.3945	l2=38.0120
l5=-16.4278	l3=37.5354
	l4=27.5414
	l5=12.7176
	l6=3.0069
	l7=0.2597

Tabla 3.0 Parámetros de los controladores desacoplados

En el caso del sistema acoplado por matriz de desacople se determinan los siguientes parámetros.

C1(s)	C2(s)
p0=0.3679	p0=0
p1=4.7840	p1=1
p2=26.7663	p2=10
p3=80.3691	p3=44
p4=455.7993	p4=-17326
p5=415.3445	p5=-268998
p6=22.5194	p6=-1247
p7=0.0092	p7=11911
p8=15.8646	p8=3256
p9=2.8841	p9=-167
l0=29.7257	p10=0
l1=81.9008	p11=16
l2=216.9974	l0=-353
l3=378.7578	l1=-1064
l4=256.8009	l2=-970
l5=9.2139	l3=-3
l6=-36.6051	l4=425
l7=-0.0003	l5=174
l8=3.2136	l6=-1
	l7=-6
	l8=0
	l9=0
	l10=0

Tabla 3.1 Parámetros de los controladores acoplados por matriz de desacople

3.4 Diseño de controladores en espacio de estados

En este tipo de controladores las variables realimentadas son las del vector de estados, ya que este resume toda la información actual del sistema. Una ventaja de estos sistemas es que resuelven problemas fundamentales, tales como el problema de regulación que consiste en llevar todos los estados a cero y el problema de seguimiento el cual consiste en que el sistema siga una referencia. [2]

3.4.1 Controlabilidad

Antes de iniciar con la construcción de los controladores en espacio de estados se debe definir si el sistema es controlable. Un sistema compuesto por las matrices A, B y C es controlable si es posible determinar una señal de control $u(t)$ tal que se pueda llevar el estado inicial $X(t_0)$ a un estado final $X(t_f)$ en un tiempo finito. [2]

Considere un sistema descrito por $\{A, B, C\}$, donde la matriz de controlabilidad está dada por:

$$\zeta = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$$

Donde el sistema $\{A, B, C\}$ es controlables si el Rango (ζ) $\geq n$ (n es el número de variables de estado).

Para el caso del modelo estudiado en este proyecto se obtiene un rango igual al número de variables de estado, por tanto se deduce que el sistema es controlable.

3.4.2 Observadores

Es poco realístico suponer que todos los estados de un sistema se puedan ser medidos. Por esto es necesario determinar los estados de realización, a partir de medidas disponibles: entrada $u(t)$ y salida $y(t)$. [2]

De esta forma, un observador de estado es un sistema dinámico que permite estimar las variables de estado $X(t)$ con base en las mediciones del vector $u(t)$ y el vector de salida $y(t)$. [2]

Un observador de un sistema dinámico se puede definir de la forma:

$$\dot{\tilde{X}}(t) = A\tilde{X}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\tilde{X}(t)) \quad (3.7)$$

Donde L es la matriz de ganancia del observador que determina la velocidad con la cual $\tilde{X}(t)$ (variable de estado estimada) tiende a $X(t)$.

El polinomio característico en lazo cerrado de un sistema en espacio de estados que involucre la ganancia L está definido de la siguiente forma.

$$P_{cl} = \det(sI - A + LC) \quad (3.8)$$

3.5 Sistemas de seguimiento

El objetivo de este problema es hacer que los estados y las salidas de un sistema respondan a señales de referencia de una manera específica. [2]

3.5.1 Ganancia en lazo cerrado

La figura 3.2 muestra un sistema simplificado para un modelo de seguimiento con regulación y observador. El cual cuenta con dos ganancias K y K_c encargadas de lograr un control que elimine las perturbaciones y conduzca los estados del sistema a cero, además de hacer que el sistema siga una referencia.

K_c es llamada la matriz de ganancias de realimentación y es usada con el fin de obtener un nuevo sistema con valores propios especificados, es decir un sistema estable con unos parámetros de respuesta en un tiempo acorde a los criterios de diseño. [2]

K_c se usa para alterar directamente la señal de referencia, tal que permita alcanzar a la salida el estado deseado, sin causar errores en el observador. [2]

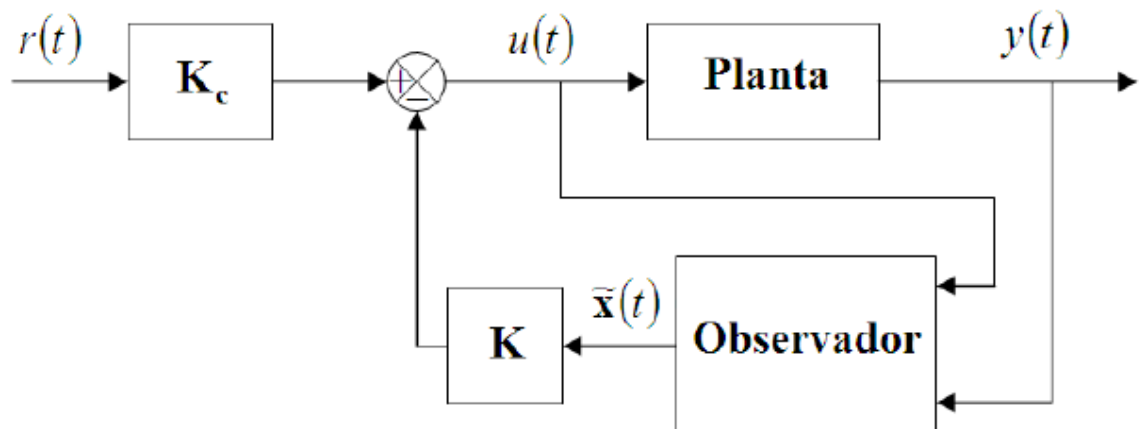


Figura 3.2 Esquema de un sistema de seguimiento con ganancia en lazo cerrado [2]

El sistema completo en lazo cerrado estaría dado por.

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = CX(t)$$

$$\dot{\tilde{X}}(t) = A\tilde{X}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\tilde{x}(t))$$

$$u(t) = -K\tilde{X}(t) + K_cr(t) \quad (3.9 - 3.12)$$

Del cual se puede determinar un polinomio característico, donde claramente se puede ver la intervención de la ganancia K en el sistema.

$$P_{ck} = \det(sI - A + BK) \quad (3.13)$$

3.5.1.1 Cálculo de ganancias

Para el cálculo de la ganancia K y la ganancia del observador L se compara el polinomio deseado con el polinomio característico.

- Ganancia K

Considere un sistema de orden n, con n ganancias de realimentación, como se muestra en la ecuación (3.14).

$$K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n] \quad (3.14)$$

Por comparación de las ecuaciones (3.6) (polinomio deseado) y (3.14) (polinomio característico), se puede determinar los valores de la ganancia de realimentación, como se muestra en la ecuación (3.15).

$$\det(sI - A + BK) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n \quad (3.15)$$

Usando Matlab se puede realizar este cálculo con la siguiente instrucción.

$$K = \text{place}(a, b, [-1; -1.5; -2; -2.5; -3; -3.5; -4; -4.5])$$

Donde a y b son matrices de la representación por espacio de estados del sistema modelado en el capítulo 2 y el vector que les sigue son los valores del polinomio deseado.

Para el caso del proyecto se determinaron los siguientes valores de K.

-10.8	-5	2.2	-0.2	145.9	26.8	83.6	395.8
50.4	11.5	-3.3	6.7	-593.5	-93.1	-307.5	-1698

- Ganancia L

Considere un sistema de orden n, con n ganancias del observador, como se muestra en la ecuación (3.16).

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Al igual que en el caso anterior los valores de L se obtienen a partir de la comparación del polinomio característico (ecuación (3.8)) y el polinomio deseado (ecuación (3.6)).

$$\det(sI - A + CL) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n \quad (3.17)$$

Se debe tener en cuenta que los valores del polinomio deseado de la ganancia del observador sean por lo menos el doble que los valores de la ganancia de realimentación.

Usando Matlab se puede realizar este cálculo con la siguiente instrucción.

$$L = \text{place}(a', c', [-20; -40; -60; -80; -100; -120; -140; -160])'$$

Donde a y c son matrices de la representación por espacio de estados del modelo determinado y el vector que les sigue son los valores del polinomio deseado.

Para el caso del proyecto se determinaron los siguientes valores de L.

376.95	-29.9
49422	-8017.2
-46.25	340.04
-13182	40022.7
4884394	-3622536
-13026473	4893184
273901	-290113
-1153397	40311

- Para el cálculo de la ganancia K_c se usa el teorema del valor final a partir de una entrada escalón, obteniendo un K_c para entradas múltiples de la siguiente forma.

$$K_c = ((C - DK)(-A + BK^{-1})B + D)^{-1} \quad (3.18)$$

Usando Matlab se determina los valores de la ganancia K_c para el proyecto, donde A , B , C y D son matrices de la representación de estados del modelo matemático del helicóptero.

$$K_c = \text{inv}(c * \text{inv}(-a + b * K) * b + d)$$

$$\begin{bmatrix} -51.88 & 2.15 \\ 220 & -3.28 \end{bmatrix}$$

3.5.2 Realimentación integral de la salida

El principio básico del sistema de seguimiento con acción integral consiste en incluir un integrador a la salida del comparador entre el vector de referencia $r(t)$ y el vector de salida $y(t)$, para obtener una integral de la señal de error y sumarlo a la señal de control correspondiente a la realimentación lineal de las variables de estados, [2] como se muestra en la figura 3.3

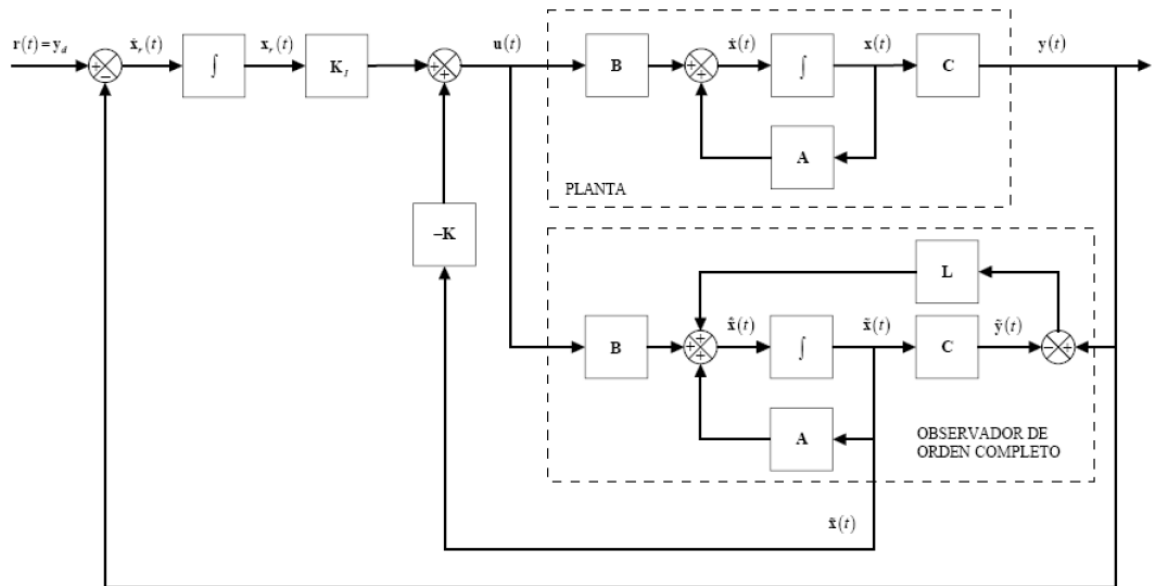


Figura 3.3 sistema de seguimiento con acción integral [2]

El sistema mostrado en la anterior imagen esta descrito por el siguiente modelo en espacio de estados.

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = CX(t)$$

$$\dot{X}_r(t) = r(t) - CX(t)$$

$$u(t) = -K\tilde{X}(t) + K_i X_r(t) \quad (3.19 - 3.22)$$

Donde X_r corresponde a la salida del integrador (integral del error \dot{X}_r) y se considera como una variable de estado adicional.

Para obtener las ganancias de realimentación de la acción integral y del vector original se aumenta el modelo de espacio de estados de la siguiente forma.

$$\begin{bmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{X}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ X_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r(t) \quad (3.23)$$

Definiendo

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{X} = \begin{bmatrix} X(t) \\ X_r(t) \end{bmatrix}$$

Ahora se tiene que el diseño de seguimiento de referencia con acción integral se convierte en el diseño de un regulador de orden $n + p$ con p como el número de salidas para el sistema aumentado dado por. [2]

$$\dot{\hat{X}} = \hat{A}\hat{X} + \hat{B}u \quad (3.24)$$

Donde el vector de control está definido por

$$u = -\hat{K}\hat{X} \quad (3.25)$$

Con \hat{K} definido como

$$\hat{K} = [K \quad -K_i]$$

El modelo aumentado se utiliza para el cálculo de la ganancia \hat{K} , para lo cual se debe garantizar que el sistema aumentado sea controlable.

3.5.2.1 Cálculo de ganancias

La ganancia L para este sistema es igual que en el controlador anterior, por tanto no se calcula nuevamente.

Comparando un polinomio característico del modelo aumentado con un polinomio deseado, se pueden determinar los valores de \hat{K} .

$$\det(sI - \hat{A} + \hat{B}\hat{K}) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n \quad (3.26)$$

Por definición los valores de la ganancia de realimentación K y la ganancia integral K_i son extraídos de la ganancia \hat{K} . Donde para el caso del proyecto corresponden a los siguientes.

K=

27418.9	-568.63	-77.94	586.94	-43176.6	1044.6	2991	-12343.32
-6863.19	1520.07	340.34	-1453.13	109082.66	-42821.17	-12329.65	311663.56

Ki=

3540.74	-136.61
-9496.97	146.46

3.6 Cálculo de ganancias usando el regulador lineal óptimo con criterio cuadrático (LQR)

En esta sección se calculan las ganancias de realimentación y observadores considerando algunos criterios de optimización, tales como la ubicación de polos y magnitudes máximas permisibles en la señal de control y las variables de estado. [11]

Para ello se plantea una función de costo simplificada que permite obtener un mejor controlador a partir de la minimización de la misma función. [11]

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (3.27)$$

Donde Q y R, son matrices (n*n), (m*m) positivas definidas, y donde n es el número de variables de estado y m el número de entradas.

La cantidad $x^T Q x$ es una medida de la desviación del estado, con respecto al estado cero, en un tiempo t y $u^T R u$ es una medida del esfuerzo de la señal de control en un tiempo t; la integral obtiene como resultado el acumulado de las medidas anteriores.[11]

Las matrices Q y R, son determinadas por el diseñador de forma empírica y cuyos elementos deben ser positivos o cero.

Para el diseño de la ganancia de realimentación K se usa la siguiente instrucción de Matlab.

$$K=lqr(a,b,Q,R)$$

Mientras que para determinar la ganancia L se usa la siguiente instrucción.

$$L=lqr(a',c',Qo,Ro)'$$

La ganancia del modelo aumentado para el control con acción integral se calcula de igual manera que la ganancia K, sin embargo se deben de tener en cuenta los estados adicionales que se generan en el diseño de este.

- Calculo de las ganancias K, L y Kc del primer controlador por espacio de estados usando la instrucción LQR.

K=

0.4147	-5.463	3.0984	1.3015	0.3917	5.0012	-57.6602
7.6937	-5.7454	0.6325	0.2944	-2.7616	2.0161	-19.3215

Kc=

11.833	3.0984
-57.9659	0.6325

L=

9.6117	0.2163
-3.7841	-4.4678
0.2163	16.4444
10.1029	85.232
0	0
0	0
0	0

- Calculo de las ganancias K y K_i del controlador por espacio de estados con acción integral usando la instrucción LQR.

K=

0.9415	-5.2545	1.7983	1.1622	0.2813	4.7326	-54.6743
7.3197	-5.6029	0.3881	0.267	-2.7966	1.9435	-18.8077

K_i=

-0.2041	-0.9789
0.9789	-0.2041

El cálculo del observador es el mismo para ambos controladores.

Capítulo 4

Diseño tridimensional

En este capítulo se muestra como se realizó el modelo tridimensional del helicóptero de dos grados de libertad, usando el software de diseño mecánico SolidWorks. Es necesario aclarar que se planteó el diseño considerando una futura fabricación del mismo, por ello en este se valoran brevemente algunas características como lo son el comportamiento del sistema, los materiales a usar, acabados, medidas, entre otros.

Teniendo en cuenta los dos grados a controlar Ψ y θ (ver figura 4.0), se diseñó un pivote que pueda brindar libertad a estos dentro de un rango de operación establecido. Este pivote soporta toda la estructura del helicóptero, la cual se mueve por medio del impulso generado por las hélices acopladas a los motores.

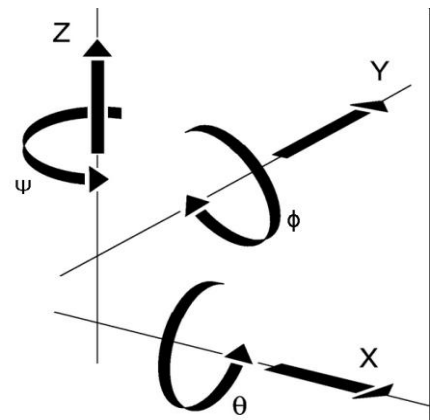


Figura 4.0 Grados de libertad (6)

4.1 Estructura base

El pivote es soportado por una estructura base, que brinda estabilidad y equilibrio al sistema (ver figura 4.1). Esta tiene una altura de 20 cm, lo que es suficiente para evitar golpes entre la superficie y el helicóptero, además es apoyada en una plataforma cuadrada de (20 x 20) cm. Estas partes serán fabricadas en acero

1020, mediante un proceso de arranque de viruta, este material brinda el peso necesario para mantener la base firme ante los movimientos de la planta.

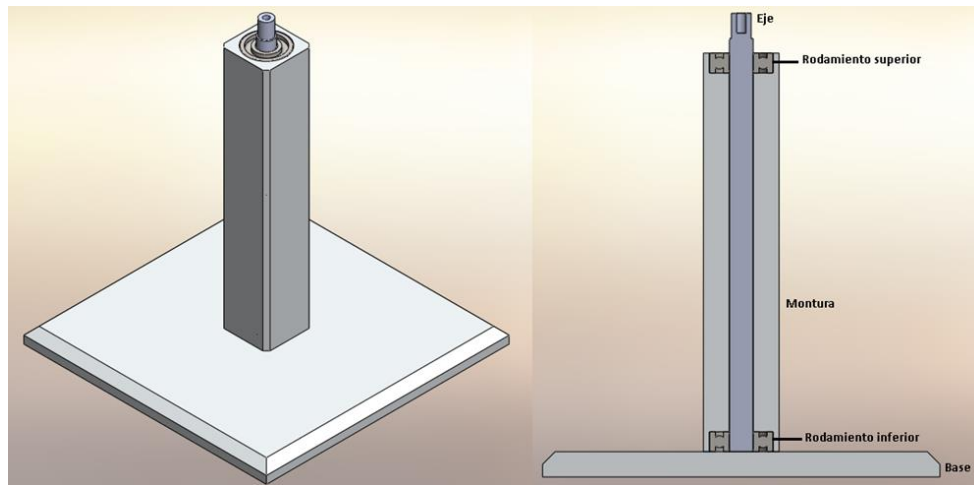


Figura 4.1 Estructura base

La montura de la estructura lleva internamente el eje sobre el cual se va a producir el movimiento angular Ψ , este está apoyado en los rodamientos SKF 6201 inferior y superior que se muestran en la figura 4.1

4.2 Pivote

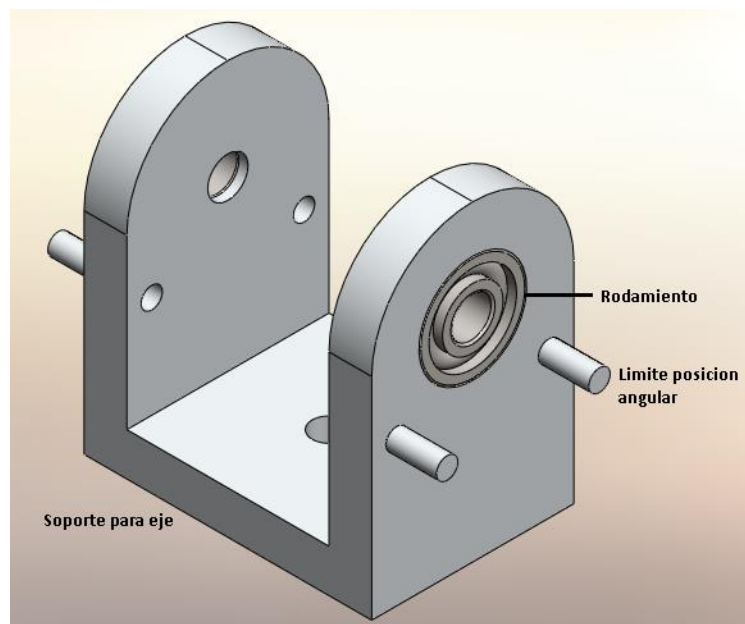


Figura 4.2 Pivote

Esta parte es el centro de la planta, en ella se acoplan los ejes sobre los cuales se producen los movimientos angulares. Se fabricara en un material liviano y fácil de mecanizar como lo es el aluminio, con el fin de evitar al máximo cualquier inercia que se pueda producir.

Como se observa en la figura 4.2 esta pieza se compone de un agujero ubicado en la base de la misma, para ajustar el eje de la estructura anterior. Además cuenta con dos rodamientos SKF 6201, sobre los cuales se apoya el eje en el que se producirá el movimiento angular θ . Con el propósito de limitar este movimiento, el pivote tiene dos pines que aseguran que el helicóptero solo se mueva dentro del rango establecido.

4.3 Helicóptero

Esta es la estructura sobre la cual se van a controlar las posiciones angulares Ψ y θ (ver figura 4.3), Consta de dos piezas que se fabricaran en acrílico con la silueta de un helicóptero, estas son unidas mediante unos pasadores en aluminio distribuidos de manera uniforme. Además cuenta con dos bases de aluminio para la sujeción de los motores, los cuales llevan consigo las hélices.

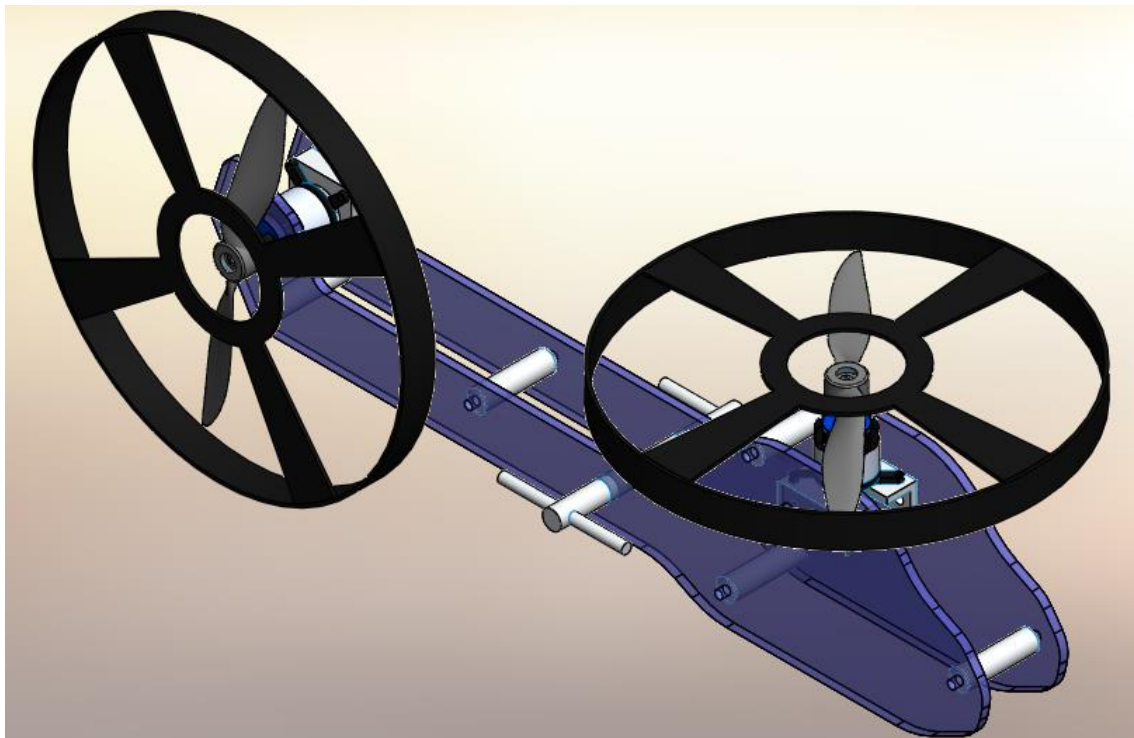


Figura 4.3 Helicóptero

Con el propósito de brindar seguridad al usuario también se diseñaron las jaulas para las hélices, estas serán fabricadas en fibra de vidrio y evitaran cualquier golpe sin limitar la fuerza generada por el movimiento de estas.

En la parte central de la estructura se encuentra ajustado el eje de aluminio, que estará acoplado a los rodamientos del pivote. En los extremos del eje se encuentran unos pines que chocan con los límites de posición angular del pivote, permitiendo un movimiento de $\pm 30^\circ$.

4.4 Ensamble del helicóptero

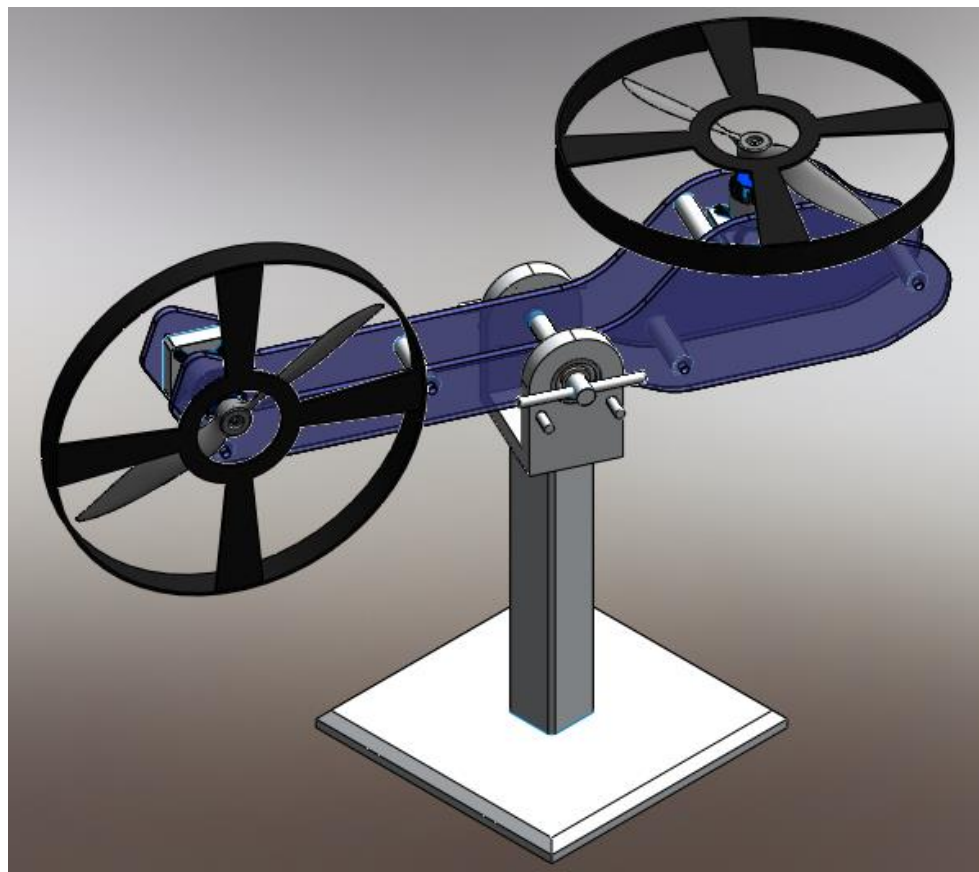


Figura 4.4 Ensamble helicóptero

La figura 4.4 muestra el ensamble final del helicóptero, el cual se puede fabricar con materiales livianos y fáciles de trabajar como se ha visto en cada una de las descripciones anteriores. Se debe tener en cuenta que este trabajo más que tratar

el diseño de un prototipo se centra en la simulación de diferentes estrategias de control en tiempo continuo aplicadas a un modelo tridimensional, sin embargo en este proyecto se ha querido tratar el tema considerando una futura construcción de un modelo.

4.5 Modelo para la simulación

Para el trabajo se usó el complemento SimMechanics de Matlab-Simulink, que es una herramienta que sirve para simular y modelar sistemas mecánicos. Este programa trae un traductor que permite convertir ensamblajes de piezas CAD en archivos de modelado físico XML, los cuales son reconocidos como bloques en Simulink y SimMechanics.

Con el fin de eliminar bloques superfluos y facilitar el trabajo en este software, el helicóptero presentado anteriormente se compone de 3 piezas o sub-ensambles, los cuales se consideran de interés.

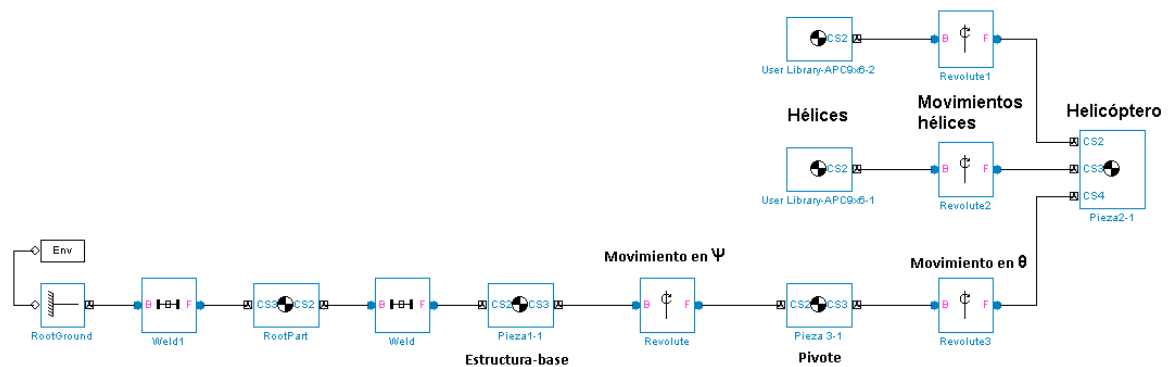


Figura 4.5 Diagrama de bloques del helicóptero

En la figura 4.5 se muestra el diagrama de bloques del helicóptero, con los elementos que representan las piezas que lo componen y los bloques que generan el movimiento de estas.

Para ver el modelo tridimensional (ver figura 4.6) en la herramienta de matlab es necesario correr el programa, sin embargo este presentara movimientos aleatorios debido a que aun no se le ha implementado el control al sistema. Para aplicar este a la planta hay que añadir otra entrada a los bloques de los movimientos angulares, pero esto se tratara en el siguiente capítulo.

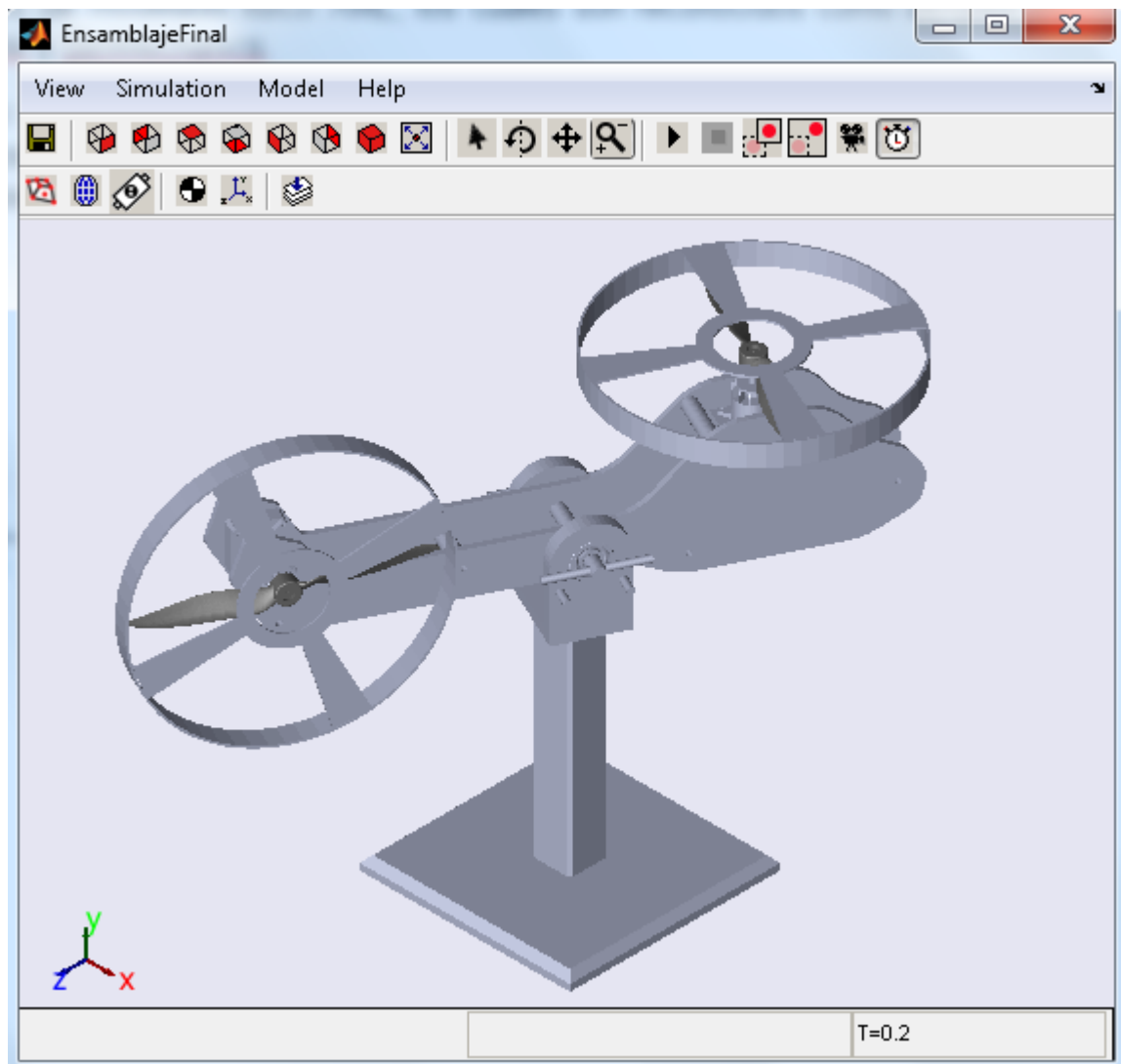


Figura 4.6 Simulación SimMechanics

Capítulo 5

Simulación y análisis de resultados

En esta sección se presentan los resultados obtenidos en el desarrollo del proyecto, presentando la implementación del modelo matemático y de los controladores en Simulink, a partir del cual se obtienen las gráficas del comportamiento del sistema para su respectivo análisis. Además de la simulación del modelo tridimensional construido.

5.1 Implementación de controladores en Simulink

A partir del modelo identificado en el capítulo 2 y de los controladores calculados en el capítulo 3 de este proyecto se construyen los siguientes diagramas de bloques en Simulink.

5.2 Control desacoplado

Con los valores de los controladores obtenidos en la tabla 3.0 se arman los controladores para el sistema desacoplado, los cuales se aplican a las funciones de transferencia del sistema linealizado visto en el capítulo 2, como se muestra en la figura 5.0.

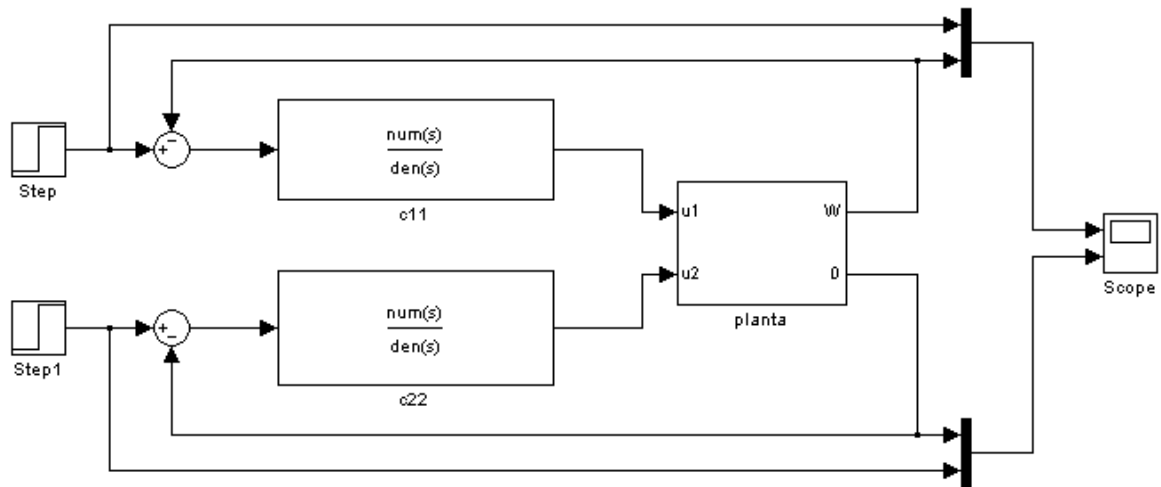


Figura 5.0 Diagrama de bloques del sistema de control implementado

En la siguiente figura se puede ver el comportamiento del sistema ante una función escalon, donde la línea amarilla representa la señal de referencia y la línea morada la respuesta de la planta. La grafica superior corresponde a la salida Ψ y se puede notar que a pesar de que el sistema estabiliza, no lo hace en el valor de referencia. Mientras que en la grafica inferior, que corresponde a la salida θ , si iguala el valor de referencia, sin embargo, resalta el fuerte efecto que causa la señal de control para la primer posicion angular sobre la segunda salida.

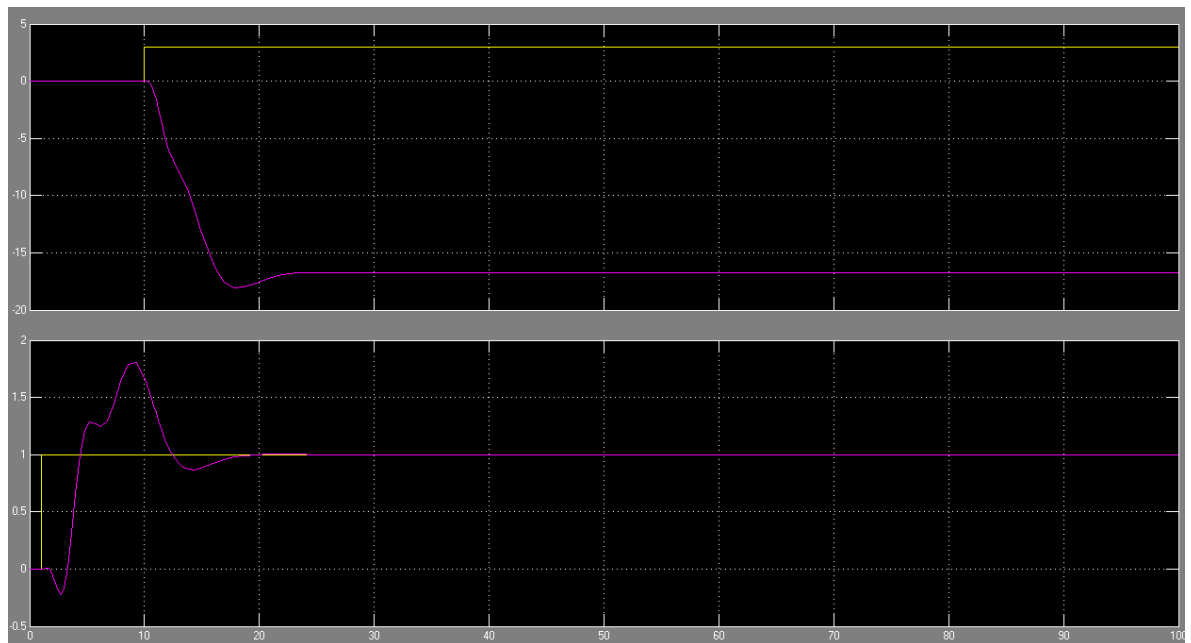


Figura 5.1 Grafica de respuesta del sistema de control desacoplado

5.3 Control acoplado por matriz de desacople

Como se nota en la figura 5.2 este sistema cuenta con un bloque de desacople que permite disminuir la fuerte interacción vista en el sistema anterior, los controladores fueron contruidos con los paramtros mostrados en la tabla 3.1, mientras que la funcion de transferencia sigue siendo la misma del sistema anterior.

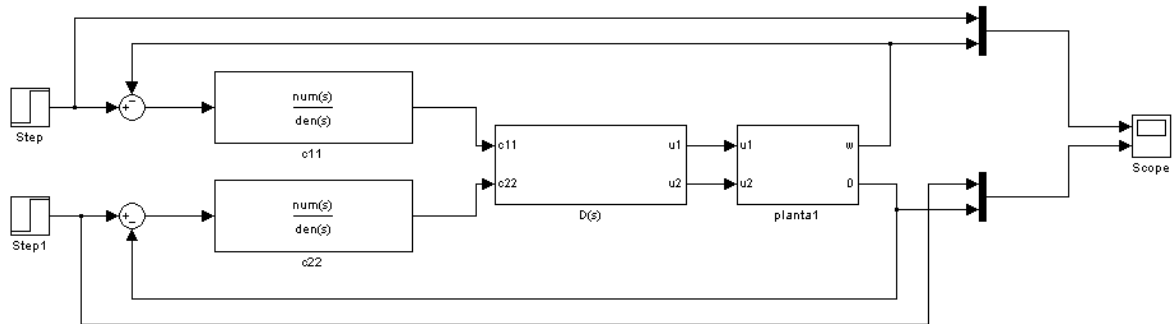


Figura 5.2 Diagrama de bloques del sistema de control acoplado por matriz de desacople implementado

En la siguiente grafica se puede ver como disminuyen los efectos de una entrada sobre la otra variable controlada y viceversa. Además de estabilizar el sistema en el punto de referencia.

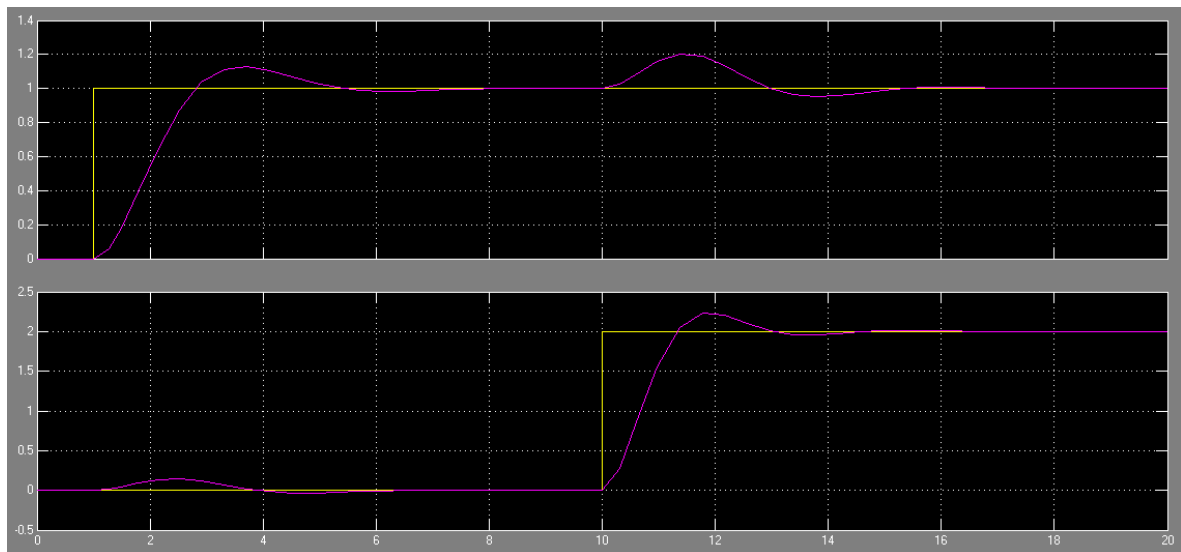


Figura 5.3 Grafica de respuesta del sistema de control acoplado

5.4 controlador ganancia en lazo cerrado

En este punto se empieza a mostrar los resultados obtenidos a partir de los controladores de sistemas en espacio de estados. En la siguiente imagen se observa el controlador por realimentación de estados con ganancia en lazo cerrado, con la representación obtenida en espacio de estados del modelo linealizado del capítulo 2.

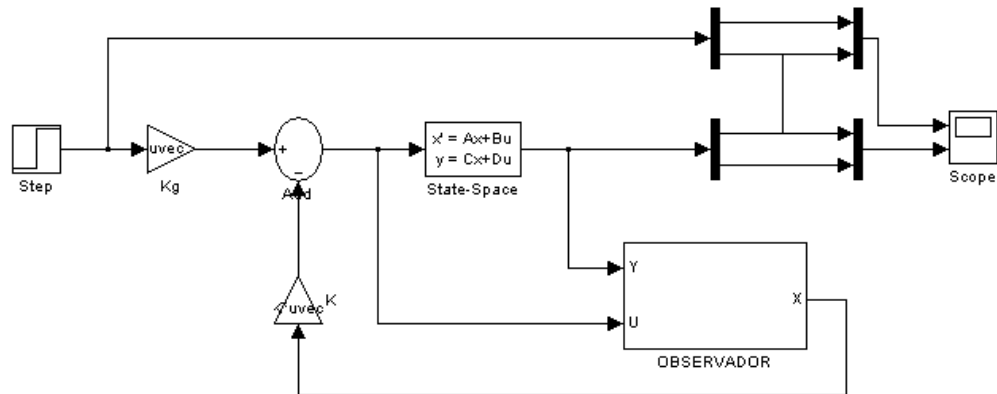


Figura 5.4 Diagrama de bloques de controlador e por realimentación de estados con ganancia en lazo cerrado

Para los cálculos de las ganancias del controlador y del observador usando el método de reubicación de polos se obtiene la siguiente gráfica, en la que se puede ver que existe una fuerte interacción entre las variables controladas, a pesar de que estabiliza el sistema y lo lleva al punto de referencia (ver figura 5.5).

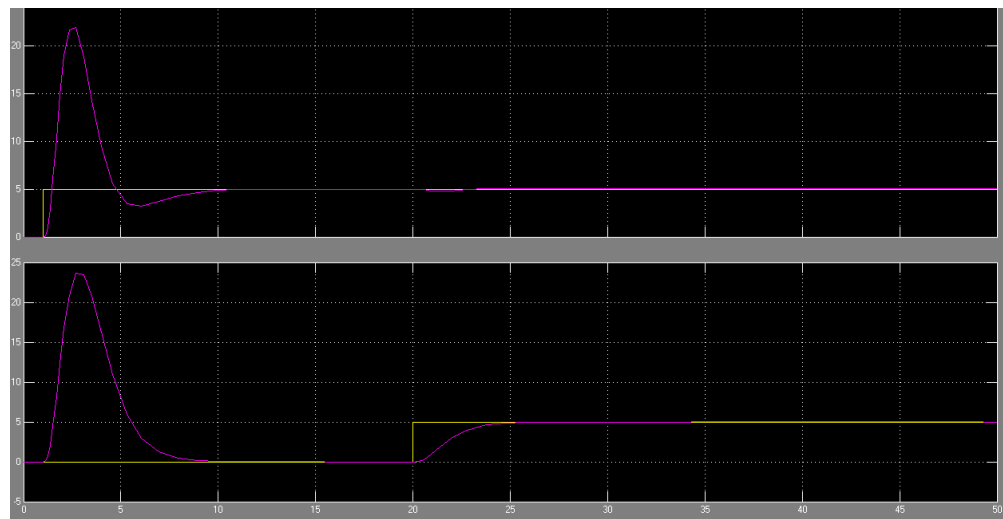


Figura 5.5 Grafica del controlador ganancia en lazo de estados usando el método de reubicación de polos

Aplicando la metodología del regulador lineal óptimo con criterio cuadrático (LQR) se logra una respuesta más suave, en la que la interacción de las variables es imperceptible y al igual que en el caso anterior la señal de salida iguala el punto de referencia (ver figura 5.6).

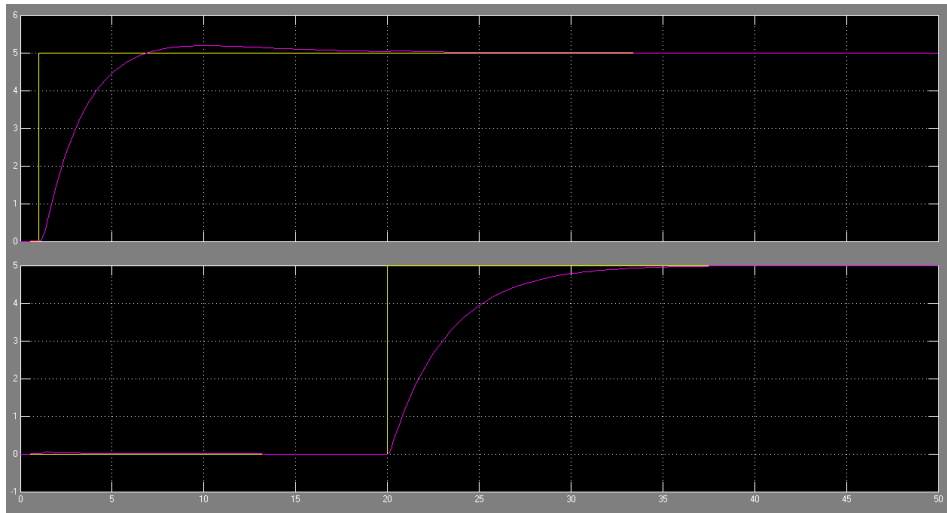


Figura 5.6 Grafica del controlador ganancia en lazo cerrado usando LQR

5.5 Controlador realimentación integral de la salida

A continuación se muestra la implementación del controlador en espacio de estados con realimentación integral de la salida en Simulink.

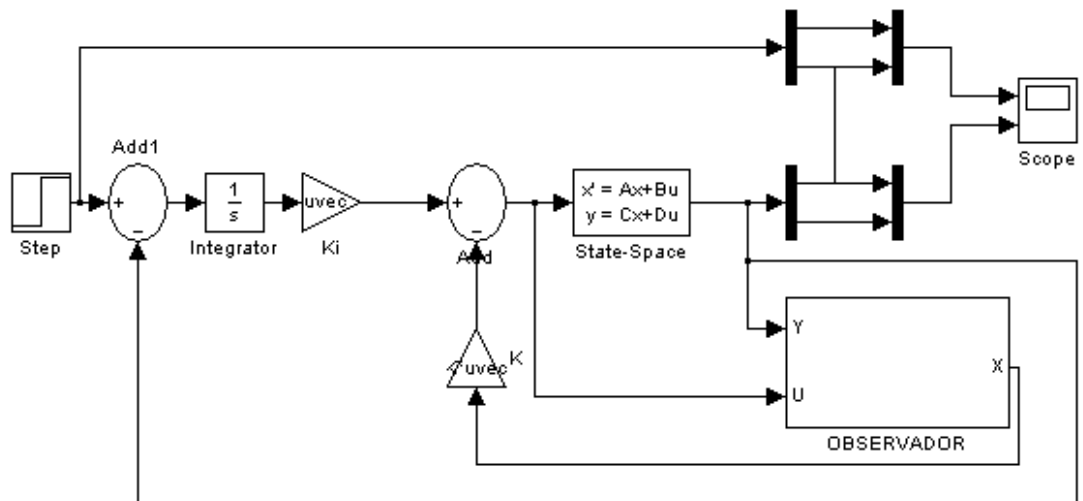


Figura 5.7 Diagrama de bloques del controlador en espacio de estados realimentación integral de la salida

En la siguiente grafica se logra observar el efecto del controlador sobre la planta, donde las ganancias son calculadas con el metodo de reubicacion de polos. Se nota la existencia de la interaccion de las variables, que a pesar de que es menor que en el control anterior sigue siendo considerable.

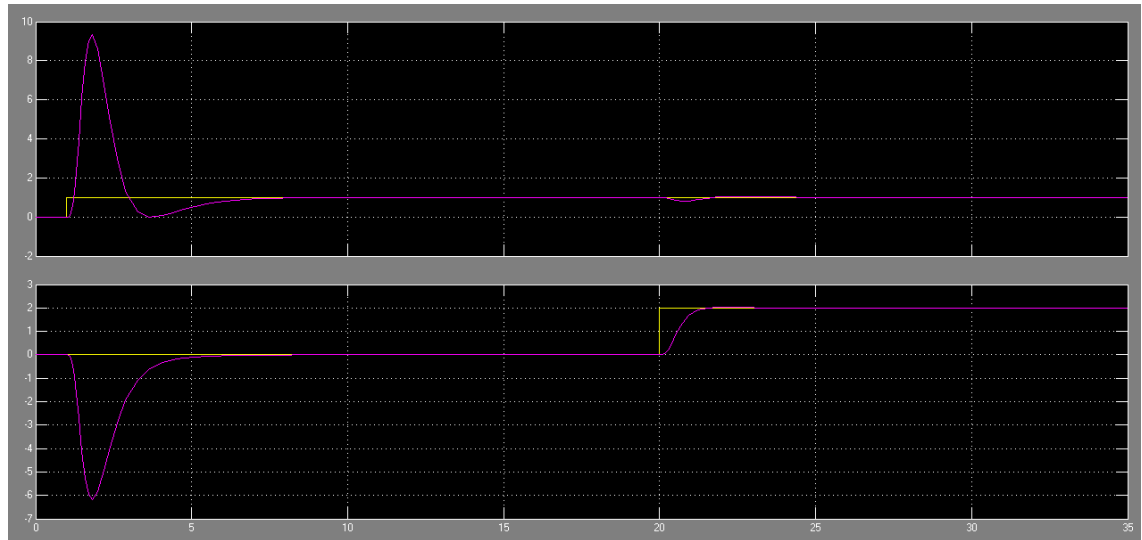


Figura 5.8 Grafica del controlador realimentación integral de la salida usando el método de reubicación de polos

En la figura 5.9 se muestra la respuesta del sistema al cual se le calcularon las ganancias usando la metodología LQR, en este se puede ver que la interaccion entre sus variables es casi nula y que el sistema se estabiliza de manera optima.

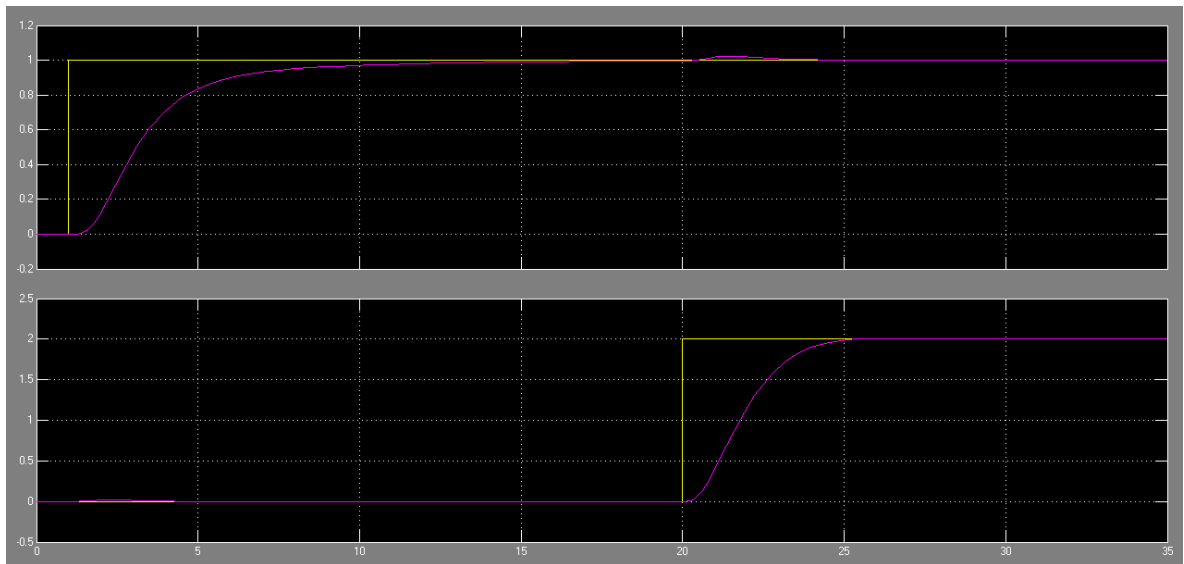


Figura 5.9 Grafica del controlador realimentación integral de la salida usando LQR

5.6 Modelo no lineal

A partir de las ecuaciones no lineales que representan el sistema (ver capítulo 2), se construye un diagrama de bloques en Simulink para la simulación y análisis de la planta. Con el fin de que en un trabajo posterior se construyan algoritmos de control para el modelo no lineal.

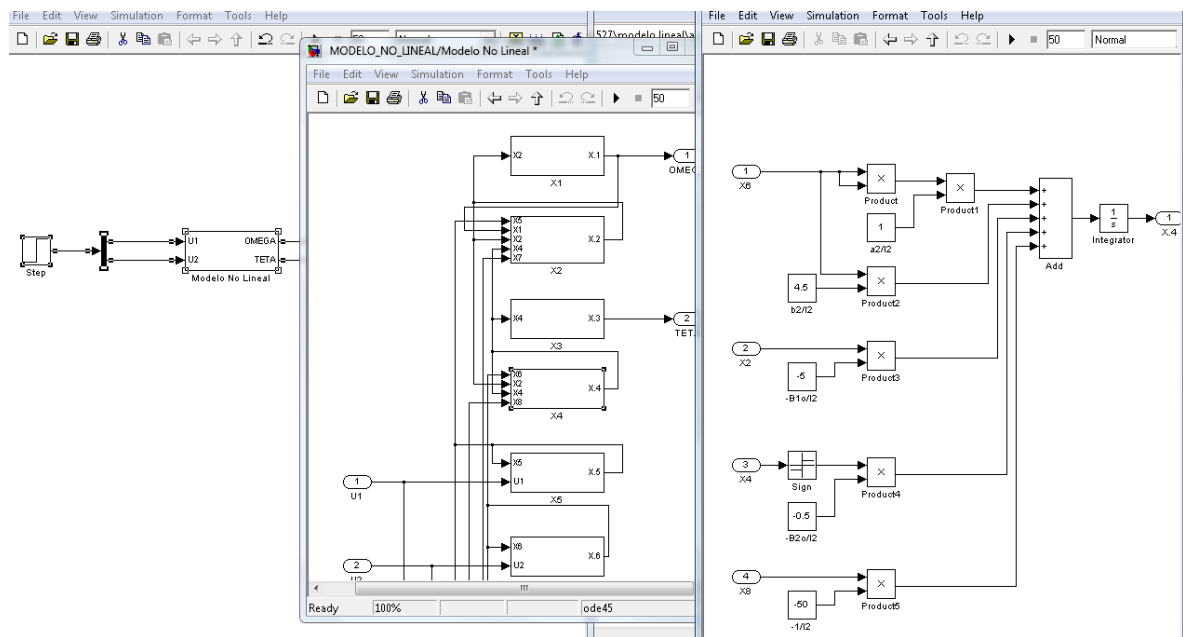
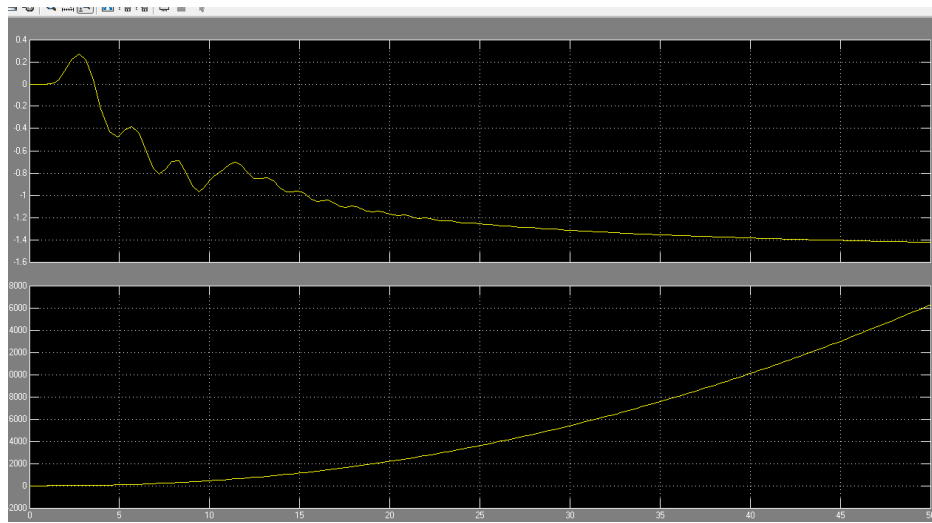


Figura 5.10 Diagrama de bloques del modelo no lineal

A pesar de que algunos controladores se diseñaron con criterios de optimización, estos no lograron llevar la salida al punto de referencia establecido, debido a que los controladores diseñados se realizaron a partir de un modelo linealizado del sistema, obviando muchos parámetros importantes en este proceso.

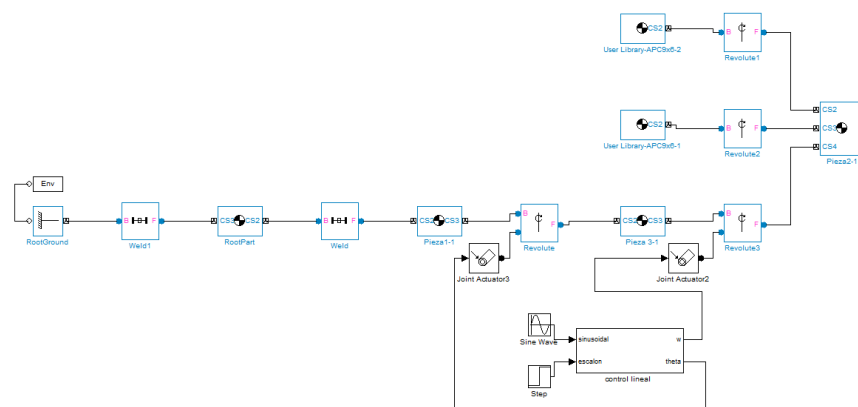
En la siguiente figura se muestra el comportamiento del sistema ante una función escalón, donde la gráfica superior corresponde al movimiento angular Ψ , mientras que la inferior corresponde al movimiento angular θ . Se puede observar en la gráfica superior que la posición angular se estabiliza en un tiempo t . Por el contrario la señal del grafo inferior tiende a infinito. Esto se debe a la fuerte dinámica que presenta el sistema.



5.7 Implementación del modelo tridimensional

En el siguiente esquema se muestra como se unen los sistemas de control al modelo tridimensional ya diseñado (ver capítulo 4). Para ello se deben identificar los bloques que representan los grados de libertad del sistema, a los cuales se añade un bloque llamado Join, que se encarga de convertir la señal de salida en un movimiento del modelo tridimensional.

Los controladores se encuentran dentro de un sub-sistema, los cuales cuentan con dos entradas (referencias) y dos salidas (Ψ y θ). Para cada simulación la imagen es la misma, por tanto solo se muestra un esquema general del diagrama de bloques.



CONCLUSIONES

- Los controladores por realimentación de variables de estado muestran una ventaja a la hora de igualar el valor de referencia, con respecto a los controladores basado en características externas del sistema (función de transferencia), a pesar de que estos últimos estabilizan el sistema, en algunas ocasiones presentan un error de estado estacionario.
- A pesar de que el cálculo de las ganancias para los controladores por realimentación de variables de estado usando el método de LQR, se realiza de manera empírica, se nota una mayor eficiencia en los resultados del sistema, en comparación con el método de reubicación de polos.
- La eficiencia de los controladores depende de un correcto modelamiento del sistema, sin embargo al trabajar con sistemas no lineales, los controladores son diseñados a partir de un modelo linealizado alrededor de un punto de operación, obviando algunos parámetros fundamentales del sistema. Por lo que no son tan eficientes a la hora de implementarlos sobre el sistema no lineal.
- La teoría nunca es final o exacta, por lo que el diseño de controladores se está desarrollando constantemente y adaptándose a las diferentes circunstancias.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Marin Lopez, Angelo Antonio. Bedoya Gonzalez, Alvaro José. Diseño y Control multivariable de un helicóptero de dos grados de libertad. Anteproyecto de tecnología. Presentado en la universidad tecnológica de Pereira.
- [2] Giraldo Buitrago, Didier. Giraldo Suarez, Eduardo. Teoría de control análogo. Primera edición. Pereira, Colombia: Universidad Tecnológica de Pereira, 2010. 299 p.
- [3] Kuo, Benjamin. Sistemas de control automático. Séptima edición. Prentice Hall Hispanoamericana, S.A. 1996. 931 pag.
- [4] Ogata, Katsuhiko. Modern Control Engineering. Fourth edition. New Jersey: Prentice hall inc, 2002. 976 pag.
- [5] Twin Rotor MIMO system, control experiments. Feddback instruments limited.
- [6] Imagen grados de libertad. {en línea}. {1 de noviembre del 2013}. Disponible en: (<http://www.fotosimagenes.org/seis-grados-de-libertad>)
- [7] V. Köppel, M. Segal y M. Remer. Análisis de Estrategias de Desacoplamiento en Sistemas Interactuantes de Control de Procesos. {En línea}. {1 de noviembre del 2013}. Disponible en: (http://www.scielo.cl/scielo.php?pid=S0718-07642004000600013&script=sci_arttext)
- [8] López, José David. Espinosa, Jairo José. Agudelo, John. Control desacoplado para bancos de ensayo para investigación en motores de combustión interna. {en línea}. {1 de noviembre del 2013}. Disponible en: (http://www.sci.unal.edu.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0120-62302011000300002&lng=es&nrm=iso)
- [9] Control de Sistemas Multivariables. {En línea}. {1 de noviembre del 2013}. Disponible en: (http://fjartnmusic.com/Personal/UIA_files/mimo.pdf)
- [10] J. Garrido a, F. Vázquez, F. Morilla. Diseño de Sistemas de Control Multivariable por Desacoplo con Controladores PID. {En línea}. {1 de noviembre del 2013}. Disponible en: (http://www.dia.uned.es/~fmorilla/Publicaciones/2012_TesisJGarrido_XSimposioIC.pdf)

[11] Escobar Davila, Luisa Fernanda. Montoya Giraldo, Oscar Danilo. Control híbrido del péndulo de Futura, Pereira 2012. Proyecto de grado presentado como requisito para optar por el título de Ingeniero (a) Electricista.