

מבוא לעיבוד ספרתי של אותות ומידע 300107

שנה"ל: תשפ"ד סמסטר: א'

עבודת בית

ד"ר אריק פארן ד"ר בני סלומון

הוראות לנבחן:

1. העבודה תוגש ע"י סטודנט יחיד או בזוג.
2. סטודנט/זוג אינו רשאי לעיין בפתרון, מלא או חלקי, של עבודת בית של סטודנט/זוג אחר (ובכלל זה פתרון השמור במדיה דיגיטלית כלשהי, לרבות רשתות חברתיות והודעות דוא"ל) או להיעזר בפתרון כאמור בכל צורה שהיא.
3. אסור לסטודנטים/זוגות שונים לנסח במשותף מסמך.
4. אין להיעזר בחברים, מכרים, בני-משפחה או גורמים אחרים.
5. יש להגיש מסמך Word/PDF עם פתרונות לשאלות והסברים מפורטים של העבודה שלך לפי ההנחיות שבשאלות. **בנוסף**

- כלל השאלות בחלק I (עיבוד אותות): ההגשה תכלול גם סרטוני MP4 (כתוב קישורים להורדה במסמך), קבצי Matlab, ובמידת הצורך קבצי אודיו. תעד היטב את הקוד שלך. **ההסברים בקוד ובסרטונים ישפיעו על הניקוד!**
 - כלל השאלות בחלק II (למידת מכונה): נא הקפידו לפרט הנחותיכם ולבסס את מסקנותיכם בתוצאות הניסויים שביצעתם, כולל גרפים/טבלאות וכיו"ב במקומות בהם זה יכול לסייע – **למרכיבים אלה יינתן משקל מרכזי בציון**. ההגשה תכלול גם סרטון MP4 (כתוב קישור להורדה במסמך), ואת כל הקוד הרלוונטי במחברת Jupyter יחידה כשהיא לאחר הרצה מלאה ומוכנה להרצה מחדש. **ההסברים בקוד ובסרטונים ישפיעו על הניקוד!**
6. למרצים יש אפשרות לזמן את הסטודנטים **להגנה (בחינה בעל פה)** לפני מתן ציון לעבודה.

בהצלחה!!

אנא אשר/י: הנני מתחייב/ת לעבודה עצמאית

חתימה _____

ת"ז לשם אישור _____

חלק 1 – עיבוד ספרתי של אותות (50 נקודות)

שאלה 1 (10 נקודות)

אין קשר בין החלקים של השאלה

חלק 1 (5 נקודות)

יהי $x[n]$ אות הנתון ע"י

$$x[n] = \cos(2\pi f_1 n) + \cos(2\pi f_2 n)$$

כאשר $f_1 = 7/128$, $f_2 = 5/128$. נתבונן באות

$$y[n] = x[n] \cos(2\pi f_c n)$$

כאשר $f_c = 50/128$.

א. עבור האות $y_1[n] = y[n]$, $0 \leq n \leq 127$, צייר באותו איור את

- המגניטודה של ה DTFT כפונקציה של ω ב $0 \leq \omega < 2\pi$ ב 1024 תדרים. השתמש בפונקציה plot. כלומר חשב את ה DTFT בתדרים $2\pi k/1024$, $k = 0, 1, \dots, 1023$ וצייר מגניטודה ע"י plot.
 - המגניטודה של ה DFT כפונקציה של k ב $0 \leq k \leq 127$, $2\pi k/128$. השתמש בפונקציה stem.
- ב. עבור האות

$$y_2[n] = \begin{cases} y[n] & 0 \leq n \leq 179 \\ 0 & 180 \leq n \leq 255 \end{cases}$$

צייר באותו איור את

- המגניטודה של ה DTFT כפונקציה של ω ב $0 \leq \omega < 2\pi$ ב 1024 תדרים. השתמש בפונקציה plot. כלומר חשב את ה DTFT בתדרים $2\pi k/1024$, $k = 0, 1, \dots, 1023$ וצייר מגניטודה ע"י plot.
- המגניטודה של ה DFT כפונקציה של k ב $0 \leq k \leq 255$, $2\pi k/256$. השתמש בפונקציה stem.

הסבר את התוצאות שהתקבלו בסעיפים א, ב.

האיורים, תשובות לשאלות, והסבר של התוצאות צריכים להופיע במסמך.

צרף להגשה קובץ Matlab (script) הניתן להרצה.

הכן סרטון (קובץ בפורמט MP4) שמסביר היטב את הפתרון שלך.

רשום קישור (link) להורדה של הסרטון. הסרטון צריך להיות זמין להורדה (ע"י הקישור) החל מזמן ההגשה.

חלק 2 (5 נקודות)

$h[n]$ היא תגובת ההלם של מסנן FIR

$$h[n] = \delta[n] - 0.5\delta[n-4]$$

יהי $H[k]$ ה DFT באורך 16 של $h[n]$ (לאחר ריפוד מתאים באפסים) ויהי

$$G[k] = 1/H[k], \quad 0 \leq k \leq 15$$

$g[n]$ היא תגובת ההלם של מסנן FIR

$$g[n] = IDFT_{16}\{G[k]\}, \quad 0 \leq n \leq 15$$

הערה. $g[n]$ היא תגובת הלם ממשית. אם יהיה חלק דמיוני קטן מאוד ב Matlab, אז יש לקחת את החלק הממשי.

$$d[n] = h[n] * g[n]$$

צייר את המגניטודה של תגובת התדר של מסנן עם תגובת הלם $d[n]$.

האם $G(\omega) = 1/H(\omega)$? האם $d[n]$ היא תגובת ההלם של מסנן All-Pass? הסבר את התוצאה שהתקבלה.

האיורים, תשובות לשאלות, והסבר של התוצאות צריכים להופיע במסמך.

צרף להגשה קובץ Matlab (script) הניתן להרצה.

הכן סרטון (קובץ בפורמט MP4) שמסביר היטב את הפתרון שלך.

רשום קישור (link) להורדה של הסרטון. הסרטון צריך להיות זמין להורדה (ע"י הקישור) החל מזמן ההגשה.

שאלה 2 (10 נקודות)

חלק אנליטי

נתבונן באות בזמן בדיד $x[n]$, $0 \leq n \leq L-1$ באורך L . נסמן

$$c[k] = X(\omega_k), \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

כאשר $X(\omega_k)$ הם ערכי ה DTFT של $x[n]$ בתדרים ω_k . נתבונן באות

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c[k] e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq n \leq L-1$$

מצא את הקשר בין $x[n]$ ו $\tilde{x}[n]$ עבור $N \geq L$ ועבור $N < L$.

משימת Matlab

נתבונן באות בזמן בדיד

$$x[n] = 0.9^n, \quad 0 \leq n \leq 9$$

נסמן

$$c[k] = X(\omega_k), \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

כאשר $X(\omega_k)$ הם ערכי ה DTFT של $x[n]$ בתדרים ω_k . נתבונן באות

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c[k] e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq n \leq 9$$

א. עבור $N = 20$, מצא וצייר את החלק הממשי של האות $\tilde{x}[n]$.

($\tilde{x}[n]$ אמור להיות ממשי, אבל ב Matlab ייתכן חלק דמיוני קטן מאוד בחישוב).

הסבר את התוצאה שהתקבלה וכתוב בצורה מפורשת את הקשר המדויק בין ערכי $x[n]$ וערכי $\tilde{x}[n]$.

ב. חזור על סעיף א עבור $N = 5$.

האיוורים, תשובות לשאלות, והסבר של התוצאות צריכים להופיע במסמך.

צרף להגשה קובץ Matlab (script) הניתן להרצה.

הכן סרטון (קובץ בפורמט MP4) שמסביר היטב את הפתרון שלך.

רשום קישור (link) להורדה של הסרטון. הסרטון צריך להיות זמין להורדה (ע"י הקישור) החל מזמן ההגשה.

שאלה 3 (10 נקודות)

נתבונן במסנן המתואר ע"י משוואת ההפרשים הבאה

$$y[n] = -r^2 y[n-2] + x[n]$$

א. הנח $r = 0.9$ ו $x[n] = \delta[n]$. מצא את $y[n]$ עבור $n = 0, 1, \dots, 127$ ומצא וצייר את הערך המוחלט של ה DFT של $y[n]$. כלומר צייר את $|Y[k]|$, $k = 0, 1, \dots, 127$.

ב. יהי

$$w[n] = 0.92^{-n} y[n]$$

מצא וצייר את הערך המוחלט של ה DFT של $w[n]$. כלומר צייר את $|W[k]|$, $k = 0, 1, \dots, 127$.

הסבר את התוצאות תוך התייחסות ל DTFT (היכן אמור להתקבל המקסימום ומידת החדות של המקסימום) ומישור הזמן.

ג. חזור על סעיף א עבור $r = 0.5$.

ד. חזור על סעיף ב עבור

$$w[n] = 0.55^{-n} y[n]$$

כאשר $y[n]$ הוא האות שמיוצר בסעיף ג.

הסבר את התוצאות תוך התייחסות ל DTFT (היכן אמור להתקבל המקסימום ומידת החדות של המקסימום) ומישור הזמן.

ה. כעת נוסיף רעש לאות $y[n]$ שהתקבל בסעיף ג ע"י

$$y = y + \text{sqrt}(0.1) * \text{randn}(1, 128);$$

מצא וצייר את הערך המוחלט של ה DFT של $y[n]$ לאחר הוספת הרעש וחזור על סעיף ד (ביחס ל $y[n]$ אחרי הוספת הרעש).

הסבר את התוצאות שהתקבלו לעומת הסעיפים הקודמים.

האיורים, תשובות לשאלות, והסבר של התוצאות צריכים להופיע במסמך.

צרף להגשה קובץ Matlab (script) הניתן להרצה.

הכן סרטון (קובץ בפורמט MP4) שמסביר היטב את הפתרון שלך.

רשום קישור (link) להורדה של הסרטון. הסרטון צריך להיות זמין להורדה (ע"י הקישור) החל מזמן ההגשה.

שאלה 4 (10 נקודות)

אין קשר בין החלקים של השאלה

חלק 1 (5 נקודות)

א. נתבונן באות $p[n]$, $0 \leq n \leq 206$ (כלומר אורך $N = 207$)

$$p[n] = \sum_{l=0}^8 \delta[n - 23l]$$

צייר את המגניטודה של ה DFT של $p[n]$ והסבר את התוצאה שהתקבלה ע"י חישוב אנליטי מלא של ה DFT ושל ה DTFT של האות.

ב. חזור על סעיף א, עבור אות באורך 414 (רפד קודם את האות באפסים). בנוסף הסבר את התוצאה שהתקבלה לעומת סעיף א'.

האיורים, תשובות לשאלות, והסבר של התוצאות צריכים להופיע במסמך.

צרף להגשה קובץ Matlab (script) הניתן להרצה.

הכן סרטון (קובץ בפורמט MP4) שמסביר היטב את הפתרון שלך.

רשום קישור (link) להורדה של הסרטון. הסרטון צריך להיות זמין להורדה (ע"י הקישור) החל מזמן ההגשה.

חלק 2 (5 נקודות)

א. (אנליטי) יהי $x[n]$, $0 \leq n \leq N - 1$ אות באורך N . נגדיר את האות $y[n]$, $0 \leq n \leq 4N - 1$ באורך $4N$ ע"י

$$y[n] = \begin{cases} x[n/4] & n \bmod 4 = 0 \\ 0 & n \bmod 4 \neq 0 \end{cases}$$

בטא את ה DFT של $y[n]$ באמצעות ה DFT של $x[n]$.

ב. (Matlab) יהי $x[n] = \cos(2\pi n/10)$, $n = 0, 1, \dots, 9$ אות באורך 10. ניצור אות $y[n]$, $0 \leq n \leq 39$ באורך 40 ע"י

$$y[n] = \begin{cases} x[n/4] & n \bmod 4 = 0 \\ 0 & n \bmod 4 \neq 0 \end{cases}$$

צייר את החלק הממשי של ה DFT של $x[n]$ וצייר את החלק הממשי של ה DFT של $y[n]$ (ה DFT אמורים להיות ממשיים, אבל ב Matlab ייתכן חלק דמיוני קטן מאוד בחישוב). הסבר את ה DFT של $y[n]$ ע"י הביטוי מסעיף א.

האיורים, תשובות לשאלות, והסבר של התוצאות צריכים להופיע במסמך.

צרף להגשה קובץ Matlab (script) הניתן להרצה.

הכן סרטון (קובץ בפורמט MP4) שמסביר היטב את הפתרון שלך.

רשום קישור (link) להורדה של הסרטון. הסרטון צריך להיות זמין להורדה (ע"י הקישור) החל מזמן ההגשה.

שאלה 5 (10 נקודות)

אין קשר בין החלקים של השאלה

חלק 1 (5 נקודות)

נתבונן במסנן בעל פונקציית התמסורת הבאה

$$H(z) = \frac{1 + 5.65685z^{-1} + 16z^{-2}}{1 - 0.8z^{-1} + 0.64z^{-2}}$$

- א. צייר את המגניטודה של תגובת התדר של המסנן וצייר מפת קטבים-אפסים של המסנן.
ב. מצא ע"י חישוב אנליטי (כלומר ידני לא באמצעות Matlab) ייצוג של המסנן בצורה הבאה

$$H(z) = H_{MP}(z)H_{AP}(z)$$

כאשר $H_{MP}(z)$ הוא מסנן פאזה מינימלית ו $H_{AP}(z)$ הוא מסנן all-pass. החישוב צריך להופיע במסמך.

- ג. צייר את המגניטודה של תגובת התדר של $H_{MP}(z)$ ואת המגניטודה של תגובת התדר של $H_{AP}(z)$.
ד. צייר מפת קטבים-אפסים של $H_{MP}(z)$ ומפת קטבים-אפסים של $H_{AP}(z)$.

האיוורים, תשובות לשאלות, והסבר של התוצאות צריכים להופיע במסמך.

צרף להגשה קובץ Matlab (script) הניתן להרצה.

הכן סרטון (קובץ בפורמט MP4) שמסביר היטב את הפתרון שלך.

רשום קישור (link) להורדה של הסרטון. הסרטון צריך להיות זמין להורדה (ע"י הקישור) החל מזמן ההגשה.

חלק 2 (5 נקודות)

נתבונן במסנן בעל פונקציית תמסורת

$$H(z) = z^{-1} + z^{-6}$$

צייר את תגובת ההלם, את המגניטודה של תגובת התדר ומפת קטבים-אפסים. הסבר את התוצאות שהתקבלו.

האיוורים, תשובות לשאלות, והסבר של התוצאות צריכים להופיע במסמך.

צרף להגשה קובץ Matlab (script) הניתן להרצה.

הכן סרטון (קובץ בפורמט MP4) שמסביר היטב את הפתרון שלך.

רשום קישור (link) להורדה של הסרטון. הסרטון צריך להיות זמין להורדה (ע"י הקישור) החל מזמן ההגשה.

חלק ו': אימון מלא של מסוג QDA (50 נקודות)

הקדמה

בחלק זה של הפרויקט תאמנו מסוג מסוג QDA, שהוא פונקציה $f: \mathcal{R}^D \mapsto \{1, 2, \dots, C\}$ המשייכת לכל וקטור במרחב המאפיינים $x \in \mathcal{R}^D$ אחד מ- C ערכים $y \in \{1, 2, \dots, C\}$. המידע $\mathcal{D} = \{(x_n, y_n)\}_{n=1}^N$ שישמש אתכם לאימון המסווגים מורכב מאוסף דוגמאות, כשכל x_n הינו מטריצה ריבועית במימד 28×28 (סה"כ 784 פיקסלים, כלומר בעבודה זאת $D=784$) המייצגת תמונה (grayscale) של יד המסמנת בשפת הסימנים אחת מהאותיות a-z, ו- y_n התיוג של כל דוגמא מייצג את האות המסומנת על-ידי היד (ראו איור 1).

ראינו כי מסוג מסוג QDA מתבסס על שערך $maximum likelihood$ של פרמטרי המודל הבא:

$$\forall c = 1, 2, \dots, C:$$

$$P(x|y = c, \mu_c, \Sigma_c) = \mathcal{N}(x|\mu_c, \Sigma_c)$$

$$P(y = c) = \pi_c$$

$$0 \leq \pi_c \leq 1 \quad (\text{and} \quad \sum_{c=1}^C \pi_c = 1)$$

וכי בהינתן שיערוכי הפרמטרים של המודל $\theta = \{\pi_{c,ML}, \mu_{c,ML}, \Sigma_{c,ML}\}_{c=1}^C$, ניתן להשתמש בחוק בייס באופן הבא

$$\begin{aligned} P(y = c|x, \theta) &= \frac{P(x|y = c, \mu_{c,ML}, \Sigma_{c,ML})P(y = c)}{\sum_{c'=1}^C P(x|y = c', \mu_{c',ML}, \Sigma_{c',ML})P(y = c')} \\ &= \frac{\mathcal{N}(x|\mu_{c,ML}, \Sigma_{c,ML})\pi_{c,ML}}{\sum_{c'=1}^C \mathcal{N}(x|\mu_{c',ML}, \Sigma_{c',ML})\pi_{c',ML}} \\ &\propto \mathcal{N}(x|\mu_{c,ML}, \Sigma_{c,ML})\pi_{c,ML} \quad \forall c = 1, 2, \dots, C \end{aligned}$$

ולסווג כל דוגמא x ע"פ הכלל

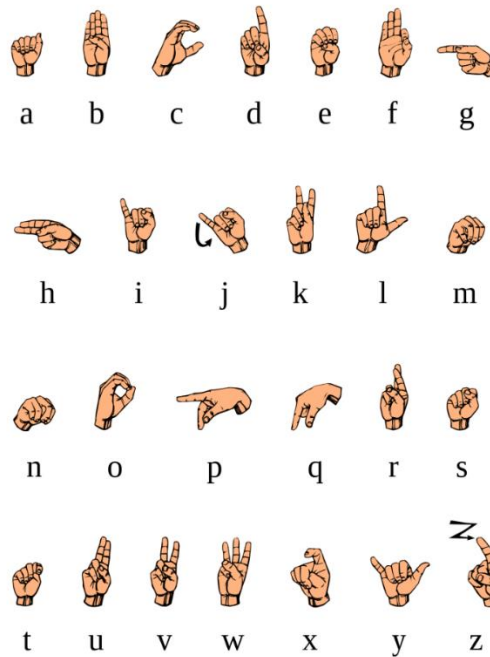
$$\begin{aligned} (1) \quad \hat{y}(x) = f(x) &= \underset{c=1,2,\dots,C}{\operatorname{argmax}} P(y = c|x, \theta) \\ &= \underset{c=1,2,\dots,C}{\operatorname{argmax}} \mathcal{N}(x|\mu_{c,ML}, \Sigma_{c,ML})\pi_{c,ML} \end{aligned}$$

כמו כן הגדרנו את דיוק (accuracy) המסווג $f(x)$, עבור הדאטה \mathcal{D} :

$$P_c(f, \mathcal{D}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbb{I}(y_n == f(x_n))$$

כאשר $\mathbb{I}(A)$ היא פונקציית האינדיקטור

$$\mathbb{I}(A) = \begin{cases} 1 & \text{if } A \text{ is TRUE} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



איור 1: שפת הסימנים. שימו לב ש האותיות j ו-z כוללות תנועה ולכן אינן חלק מהדאטה במטלה זאת המבוססת על תמונות בלבד.

שימו לב: בפתרונכם ניתן להשתמש בקוד שכתבתם במהלך הסמסטר בתרגילי הקידוד במעבדות ובמטלות הבית.

6. (1 נקודות) טענו את הדאטה שקיבלתם, והכינו אותו לאימון המסווג ע"י ייצוג כל תמונה כוקטור במרחב \mathcal{R}^{784} . סדרת האימון מכילה 27,455 דוגמאות, כל אחת כוללת מטריצה במימד 28×28 (המאפיינים x) ותיוג y לכל אחת מהדוגמאות. אוסף כל התמונות נתון לכם כמטריצה תלת-ממדית במימד $28 \times 28 \times 27,455$, והתיוגים של כל הדוגמאות כוקטור באורך 27,455.

א. טענו את הדאטה הנתון בקובץ TrainData.pkl, הכולל את מטריצת התמונות ואת וקטור התיוגים של סדרת המבחן.

ב. הציגו בתמונות נפרדות דוגמה אחת מכל אחד מהתיוגים הקיימים בדאטה, והוסיפו לתמונה את תיוגה ע"פ הדאטה (שימו לב כי a מיוצג ע"י התיוג 0, b ע"י התיוג 1, c ע"י התיוג 2 וכן הלאה).

ג. הגדירו מטריצה חדשה במימד $27,455 \times 784$, כאשר השורה ה-n-ית בה מכילה וקטור באורך $28 \times 28 = 784$ עם ערכי כל הפיקסלים של הדוגמא ה-n-ית x_n (המתקבל לאחר שכל השורות בה שורשרו זו לזו).
הערה - ניתן לבצע הנ"ל על-ידי np.reshape(...)

7. (2 נקודות) השתמשו בזהות המתמטית הבאה:

$$|\Sigma_{c,ML}| = \prod_{d=1}^D \lambda_{c,d} \text{ אזי } \Sigma_{c,ML} \text{ הם הערכים העצמיים של המטריצה}$$

והראו כי ניתן לחשב את המסווג $\hat{y}(x)$ כפי שהוא מוגדר ב-(1) למעלה, גם באופן הבא

$$(2) \hat{y}(x) = \underset{c=1,2,\dots,C}{\operatorname{argmax}} \left(-\frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \ln(\lambda_d) - \frac{1}{2} (x - \mu_{c,ML})^T \Sigma_{c,ML}^{-1} (x - \mu_{c,ML}) + \ln(\pi_{c,ML}) \right)$$

8. (30 נקודות) ממשו את אלגוריתם האימון של מסווג QDA עבור מידע רב-ממדי כפי שלמדנו בקורס

א. כתבו פונקציה המקבלת את סדרת האימון, ומחשבת את שערך maximum likelihood של כל אחד

$$\theta = \{\pi_{c,ML}, \mu_{c,ML}, \Sigma_{c,ML}\}_{c=1}^C$$

הערה: ערכי הפיקסלים בתמונות שקיבלתם מוגדרים כמשתנה מסוג int8. בכדי להימנע מבעיות נומריות

בשערוכי הפרמטרים מומלץ ראשית לשמור אותם בפורמט אחר דוגמת float64.

ב. כתבו פונקציה נוספת המקבלת את כל פרמטרי המודל ששערכתם ודוגמאות לא מתויגות, ומחזירה את

סיווג כל אחת מהתמונות ע"פ

$$\hat{y}(x) = \operatorname{argmax}_{c=1,2,\dots,C} P(y = c|x, \theta)$$

הערה ו: שימו לב כי ניתן להשתמש הן בנוסחה (1) מההקדמה או בביטוי (2) שהוכחתם בשאלה הקודמת,

שהם שקולים מבחינה מתמטית, על מנת לחשב את $\hat{y}(x)$. התייחסו במפורש בתשובתכם לביטוי בו

בחרתם להשתמש, והסבירו מדוע בחרתם בו.

הערה ו: בפיתון ניתן לקבל את כל הערכים העצמיים של מטריצה ע"י שימוש np.linalg.eigvals()

ג. יצגו כל אחד מהוקטורים הממוצעים ששערכתם כמטריצה ריבועית (כלומר יצגו כל וקטור באורך 784

כמטריצה במידת 28x28) והציגו אותו כתמונה. הוסיפו לתמונה את האות של התיג הרלוונטי ודונו בקצרה

בתוצאות שקיבלתם.

7. (5 נקודות) חשבו והציגו עבור סדרת האימון את

א. דיוק המסווג $P_c(f, \mathcal{D})$

ב. מטריצת הערבול

ג. ה- precision, recall של כל אחד מהתיגים

דונו בתוצאות שקיבלתם, תוך התייחסות מפורשת לכל אחד מהמדדים הנ"ל.

8. (10 נקודות) חיזרו על שאלות 6 ו-8 עבור סדרת המבחן הנתונה בקובץ TestData.pkl. דונו בהרחבה בתוצאות

שקיבלתם, תוך התייחסות מפורטת לדומה ולשונה בין הביצועים שמדדתם עבור כל אחת מהסדרות.

9. (2 נקודות) סווגו את הדוגמאות בסדרה הנוספת הנתונה בקובץ MessageData.pkl. סדרו את האותיות

שהתקבלו בהתאם לסדר התמונות בדאטה, והציגו את המסר שקיבלתם.

שימו לב - בסדרה זאת התווסף ערך נוסף לתיגים האפשריים באופן הבא: אם כל האיברים של דוגמא הם 0

(כלומר המטריצה x_n מכילה אך ורק אפסים), יש לפרש דוגמא זאת כייצוג של "רווח" ברצף האותיות שמתקבל.

שימו לב שאין צורך לאמן מחדש את המסווג, אלא רק להוסיף בדיקה מוקדמת לכל תמונה האם היא "רווח" או

תיג אחר, ואם היא לא "רווח" אז יש להשתמש במסווג שאומן בכדי לסווג הדוגמא.

בהצלחה!