Ecuații cu derivate parțiale (EDP)

Ecuație diferențială $<$ Ecuație diferențială ordinară (EDO) / Ecuație cu derivate parțiale (EDP)

Notație: $u = u(x_1, \dots, x_n)$ sau $u = (\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{variabile spațiale}}, \underbrace{t}_{\text{timp}})$

Exemple de ecuații cu derivate parțiale:

1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$ Ecuația lui Laplace Bidimensională
(aici $u = u(x_1, x_2)$)

2) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ Ecuația coardei vibrante
(aici $u = u(x, t)$)

3) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = 0$ Ecuația suprafeței vibrante
(aici $u = u(x_1, x_2, t)$)

4) $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ Ecuația căldurii uni-dimensională

Notăm: $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ Laplacianul funcției u

unde $u = u(x_1, \dots, x_n)$

sau $u = (x_1, \dots, x_n, t)$

5) $\Delta u = 0$ Ecuația Laplace

6) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ Ecuația Undelor

7) $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ Ecuația căldurii

Obs: Toate ecuațiile de până acum sunt liniare și omogene

exemplu: Δ este liniar adică $\Delta(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 \Delta(u_1) + c_2 \Delta(u_2)$

$\Delta u = f$ – Ecuația Poisson

Clasificare EDP liniare cu coeficienți constanți:

- EDP Eliptice
- EDP Hiperbolice
- EDP Parabolice

$a_{ij} \in \mathbb{R}$, $P(U) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}$, $u = u(x_1, \dots, x_n)$

8) $P(U) + F(x, u, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n}) = 0$

$P(U)$ se numește partea principală a EDP

Asociem polinomul $P(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot \xi_i \cdot \xi_j$

Definiție: Spunem că polinomul P, respectiv EDP este de tip

- Eliptic: dacă $P(\xi) > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sau $P(\xi) < 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- Hiperbolic: dacă $\exists \xi, \eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a.î. $P(\xi) > 0$ și $P(\eta) < 0$
- Parabolic: dacă $P(\xi) \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ sau $P(\xi) \leq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ și $\exists \eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a.î. $P(\eta) = 0$

Spunem că P, respectiv EDP este în formă canonică dacă

$$P(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \xi_i^2 \text{ unde } \lambda_i \in \{-1, 0, 1\}$$

Exemple:

1) Ecuația lui Laplace: $\Delta u = 0$

$P(U) = \Delta U$

$u = u(x_1, \dots, x_n)$

$P(\xi_1, \dots, \xi_n) = \underbrace{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}_{\text{toți coeficienții sunt egali cu 1}} > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $\Rightarrow$ Ecuația lui Laplace este de tip eliptic în formă canonică

2) Ecuația Undelor: $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \Delta U = 0$, cu $a > 0$

$$P(U) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta U$$

$u = u(x_1, \dots, x_n, t)$

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \tau) = \tau^2 - (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2) \quad \begin{cases} P(0, \dots, 0, 1) = 1 > 0 \\ P(1, 0, \dots, 0) = -a < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Ecuația Undelor este de tip hiperbolic și este în formă canonică doar pentru $a = 1$

3) Ecuația Căldurii: $\frac{\partial U}{\partial t} - a^2 \Delta U = 0$

$P(U) = -a^2 \Delta U$, $u = u(x_1, \dots, x_n, t)$

$P(\xi_1, \dots, \xi_n, \tau) = -a^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2) \le 0, \forall (\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$P(\underbrace{0, \dots, 0, 1}_{\neq 0}) = 0 \Rightarrow$ Ecuația Căldurii este în formă parabolică

în formă canonică doar pentru $a = \pm 1$

Serii Fourier clasice

1) $\{1, \cos kx, \sin kx, k \in \mathbb{N}^*\}$ (1)

Observație:

1) Toate funcțiile sunt 2π – periodice

2) $\cos kx$ și $\sin kx$ se pot scrie ca polinoame de grad k în $\cos x$ și $\sin x$

3) Au loc următoarele

i) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx = 0$

ii) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx = 0$

iii) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx \, dx = 0$

iv) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin mx \, dx = 0$

v) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos mx \, dx = 0$

Adică sistemul de funcții (1) este ortogonal în spațiul $L^2(-\pi, \pi)$ cu produsul scalar $(f, g)_{L_2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x) \, dx, \forall f, g \in L^2(-\pi, \pi)$

4) Fie $m \in \mathbb{N}^*$. Vom arăta că $\{1, \cos kx, \sin kx : 1 \le k \le m\}$ sunt liniar independente

P.p. absurd că sunt liniar dependente $\Rightarrow \exists\, b_0, b_k, a_k$ nu toți nuli a.î.

a.î. $b_0 + \sum_{k=1}^{m} (b_k \cos kx + a_k \sin kx) = 0$

Integrăm de la $-\pi$ la π

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_0\, dx + \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\left(b_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dx + a_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, dx \right)}_{0} = 0$$

$\Rightarrow 2\pi b_0 = 0 \Rightarrow b_0 = 0$

deci $\sum_{k=1}^{m} (b_k \cos kx + a_k \sin kx) = 0 \quad | \cdot \cos x$ și integrăm

$\Rightarrow b_1 = 0$ și tot așa până când obținem $b_0 = b_1 = \ldots = b_m = a_1 = \ldots = a_m = 0$

$\Rightarrow$ liniar independente

Definiție: Fie $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{m} (b_k \cos kx + a_k \sin kx)$ unde $m \in \mathbb{N}^*$.
Spunem că T este un polinom trigonometric de gradul m iar b_k, a_k sunt coeficienții lui.

Obs: Un polinom trigonometric este o funcție 2π-periodică

Definiție: Fie $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție 2π periodică a.î. $g_{|(-\pi,\pi)} \in L^2(-\pi,\pi)$.

Fie $b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi)\, d\varphi$

$b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \cos k\varphi\, d\varphi$

$\forall k \ge 1$

$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \sin k\varphi\, d\varphi$

$S_g = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k \cos kx + a_k \sin kx)$

↳ Spunem că S_g este seria Fourier a lui g după sistemul (1), iar a_k, b_k sunt coef. seriei Fourier ai lui g.

Seminar 1

Operatori diferențiali fundamentali:

$n \geq 1$, $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă

$u \in C^1(\Omega)$, $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$\boxed{1}$ Gradientul $\nabla : C^1(\Omega) \to C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

$\boxed{2}$ Divergența $\operatorname{div} : C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \to C(\Omega)$

$$\operatorname{div} V : \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial V_n}{\partial x_n}$$

$\boxed{3}$ Operatorul lui Laplace

$$\Delta U (= \operatorname{div} U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2}$$

$\boxed{4}$ Derivata după direcție

$V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Derivata lui $u \in C^1(\Omega)$ după direcția V

$$\frac{\partial U}{\partial V} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{u(x + hv) - u(x)}{h} = \nabla U \cdot w$$

unde $w = \frac{v}{|v|}$

Funcția $u \in C^2(\Omega)$ este armonică dacă $\Delta U = 0$

Coordonate polare: $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$

$u(x, y) = u(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = V(\rho, \varphi)$

$\Delta U = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} \cdot u_{\varphi\varphi}$ unde $u_{\rho\rho} = \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}$, $u_\rho = \frac{\partial U}{\partial \rho}$, $u_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$

Funcție radială: $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$u(x,y) = f(\rho), \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad |X| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Exercițiul 1: $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad u(w) = |w|^2$

a) ∇U, $\operatorname{div}(\nabla U)$, ΔU

b) $U \in C^1(\mathbb{R}^3)$?

c) u armonică în $\mathbb{R}^3$

d) versorul v al direcției $(1,1,1)$

e) $\frac{\partial U}{\partial v}$

Soluție: a) $w = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$u(w) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2 = x^2+y^2+z^2$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= 2y \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= 2z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla U = (2x, 2y, 2z) \to \text{gradientul}$$

$$\operatorname{div}(\nabla U) = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2+2+2 = 6$$

b) $U \in C^1(\mathbb{R}^3)$ (derivatele parțiale de ordinul I sunt funcții continue)

c) $\Delta U = 6 \neq 0 \Rightarrow U$ nu este armonică

d) $v = (1,1,1) \Rightarrow |v| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow w = \frac{v}{|v|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

e) $$\frac{\partial U}{\partial v} = \nabla U \cdot w = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}}y + \frac{2}{\sqrt{3}}z$$

Exercițiul 3

$U : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$u(x) = \ln|x|$

a) $u \overset{?}{\in} C(\mathbb{R}^2)$

b) $\nabla U, \Delta U$

c) U- armonică în $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$?

d) $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\frac{\partial U}{\partial v}$

Soluție: $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

a) $u(x) = \ln|x| = \ln\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) = \frac{1}{2}\ln(x_1^2 + x_2^2)$ definită și continuă pe $\mathbb{R}^2$ $(x_1^2 + x_2^2 > 0)$

b) $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$

analog $\frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}$

$\Rightarrow \nabla U = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}\right) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right)$

c) $\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1^2}{(x_1^2 + x_2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$

analog $\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$

$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2 + x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = 0 \Rightarrow U$ este armonică

d) $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$|v| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 \Rightarrow w = \frac{v}{|v|} = v$

$\frac{\partial U}{\partial v} = \nabla U \cdot w = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}$

Exercițiul 4

Găsiți $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $(x,t) \mapsto u(x,t)$ a.î

a) $u_x = 0$, b) $u_{tx} = 0$, c) $u_{xx} = 0$ (temă)

Soluție:

a) $u(x,t) = \int u_x(x,t)\,dx = \int 0\,dx = g(t)$, $g \in C^2(\mathbb{R})$

b) $u_{tx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial t} = g(t) \in C^1$

Fie G o primitivă a lui G a.î $G'(t) = g(t)$

$\Rightarrow U(t) = \int g(t)\,dt = G(t) + g_2(x)$

c) $u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial U}{\partial x} = g(t) \in C^1$

$\Rightarrow U = g(t) \cdot x + g_2(t)$

Exercițiul 5

Det $A \in C^2(\mathbb{R})$ cu $A(0) = 0$ a.î $U(x,t) = A(x) \cdot e^{-9t}$ care să satisfacă ecuația căldurii în $\mathbb{R}^2$

Soluție:

Ecuația căldurii: $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial U}{\partial x^2} = 0 \iff u_t - u_{xx} = 0$ (1)

$u_t = \dfrac{\partial U}{\partial t} = -9\, A(x) \cdot e^{-9t}$

$u_{xx} = \dfrac{\partial U}{\partial x^2} = A''(x) \cdot e^{-9t}$

Înlocuind în (1) obținem: $-9A(x) \cdot e^{-9t} - A''(x) \cdot e^{-9t} = 0$

$-e^{9t}(A''(x) + 9A(x)) = 0 \Rightarrow A''(x) + 9A(x) = 0$

din Ecuația caracteristică $r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r = \pm 3i$

$\Rightarrow A(x) = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x$

$A(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow A(x) = c_1 \sin x$, $c_1 \in \mathbb{R}$

Exercițiul 6 (Temă)

Determinați $A \in C^2(\mathbb{R})$ a.î. $U(x,y) = e^{2x} \cdot A(y)$ să fie armonică în $\mathbb{R}^2$

Soluție:

U armonică $\Leftrightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$

$\frac{\partial U}{\partial x} = 2e^{2x}A(y)$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 4e^{2x}A(y)$

$\frac{\partial U}{\partial y} = e^{2x}A'(y)$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = e^{2x} \cdot A''(y)$

$\Rightarrow 4e^{2x}A(y) + e^{2x} \cdot A''(y) = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x}(A''(y) + 4A(y)) = 0$

$\Rightarrow A''(y) + 4A(y) = 0$

din ecuația caracteristică $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i$

$\Rightarrow A(y) = c_1 \sin 2y + c_2 \cos 2y$ cu $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Exercițiul 7 Folosind coordonatele polare determinați soluția radială în $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ pentru ecuația lui Laplace pentru:

a) $\Delta U = 0$

b) $\Delta U = 4$

c) $\Delta U = x^2 + y^2$

Soluție:

$U(\rho, \varphi) = f(\rho)$ și $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\Delta U = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} \underbrace{u_{\varphi\varphi}}_{0} = f''(\rho) + \frac{1}{\rho} f'(\rho)$$

funcția u depinde doar de ρ

a) $\Delta U = 0$

$$f''(\rho) + \frac{1}{\rho} f'(\rho) = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{f'(\rho)}$$

$$\frac{f''(\rho)}{f'(\rho)} = -\frac{1}{\rho} \quad \Big| \int \quad \Rightarrow \ln f'(\rho) = -\ln \rho + c_1$$

$$f'(\rho) = e^{\ln \frac{1}{\rho} + c_1} = e^{c_1} \cdot \frac{1}{\rho} = c_2 \cdot \frac{1}{\rho} \Big| \int$$

$\Rightarrow f(\rho) = c_2 \ln \rho + c_3$ cu $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

b) $\Delta U = 4$

$$f''(\rho) + \frac{1}{\rho} f'(\rho) = 4 \quad | \rho$$

$$\rho f''(\rho) + f'(\rho) = 4\rho$$

$$(f'(\rho) \cdot \rho)' = 4\rho \quad | \int$$

$$f'(\rho) \cdot \rho = 2\rho^2 + c_1$$

$$f'(\rho) = 2\rho + \frac{c_1}{\rho} \quad | \int$$

$$f(\rho) = \rho^2 + c_1 \ln \rho + c_2 \quad \text{cu } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

c) $\Delta U = x^2 + y^2 = \rho^2$

$$f''(\rho) + \frac{1}{\rho} f'(\rho) = \rho^2 \quad | \cdot \rho$$

$$\rho \cdot f''(\rho) + f'(\rho) = \rho^3$$

$$(\rho \cdot f'(\rho))' = \rho^3 \quad | \int$$

$$\rho \cdot f'(\rho) = \frac{\rho^4}{4} + c_1 \quad | \cdot \frac{1}{\rho}$$

$$f'(\rho) = \frac{\rho^3}{4} + \frac{c_1}{\rho} \quad | \int$$

$$f(\rho) = \frac{\rho^4}{16} + c_1 \ln \rho + c_2 \quad \text{cu } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Exercițiul 8

Det. valorile proprii și funcțiile proprii ale problemei Dirichlet pentru ecuația Laplace în $\Omega = (0,a) \subseteq \mathbb{R}$

Soluție:

$\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ s.n funcție proprie pentru pb. Dirichlet a lui Laplace în Ω dacă:

- $\phi \in C^2(\Omega)$
- $\phi \neq \emptyset$
- $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ a.î $-\Delta\phi = \lambda\phi$ în Ω

$\Downarrow$

valoare proprie

În $\mathbb{R}$ ecuația $-\Delta\phi = \lambda\phi$ devine

$$-\phi'' = \lambda\phi$$

$$\phi'' + \lambda\phi = 0$$

Adăugăm condițiile la limită $\phi(0) = \phi(a) = 0$

$$\phi''(x) + \lambda\phi(x) = 0$$

Cazul 1) dacă $\lambda < 0 \Rightarrow \exists\ \mu > 0$ a.î $\lambda = -\mu^2$

$$\phi''(x) - \mu^2\phi(x) = 0$$

$$\Rightarrow \phi(x) = c_1 \cdot e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}$$

$$\phi(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$$

$$\phi(a) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\mu a} + c_2 e^{-\mu a} = 0$$

Cazul 2) $\lambda = 0$

Cazul 3) $\lambda > 0$

analog