STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor: 1. Matematika a statistika

Analýza hry člověče nezlob se a jiných kruhových-křížových her

Jakub Kuchařík

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

ANALÝZA HRY ČLOVĚČE NEZLOB SE A JINÝCH KRUHOVÝCH-KŘÍŽOVÝCH HER

MATHEMATICAL ANALYSIS OF LUDO AND OTHER CIRCLE-CROSS GAMES

AUTOR	Jakub Kuchařík
ŠKOLA	Gymnázium Karla Čapka, Dobříš, Školní
KRAJ	Středočeský
ŠKOLITEL	Ing. Vladimír Jarý, Ph.D.
OBOR	1. Matematika a statistika

Prohlášení

Prohlašuji, že svou práci na téma *Analýza hry člověče nezlob se a jiných kruhových-křížových her* jsem vypracoval samostatně pod vedením Ing. Vladimíra Jarého, Ph.D. a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Dále prohlašuji, že tištěná i elektronická verze práce SOČ jsou shodné a nemám závažný důvod proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a změně některých zákonů (autorský zákon) v platném změní.

V Praze dne: ____________________

Jakub Kuchařík

Poděkování

Děkuji svému školiteli Ing. Vladimír Jarý, Ph.D. za veškerou pomoc, kterou poskytl v rámci tvorby této odborné činnosti.

Abstrakt

Cílem této práce je jasnou matematickou strukturou popsat hru člověče nezlob se a podobné hry, které označujeme za tzv. kruhové-křížové. Na základě této analýzy se tato práce následně pokouší i určit, co nejoptimálnější algoritmus pro hraní těchto her.

Klíčová slova

člověče nezlob se; teorie her; Markovovy rozhodovací procesy; stavový prostor; optimalizace herního agenta

Abstract

The goal of this work is to build a mathematical framework to study Ludo and other cross circle games. Using this newly developed form of analysis we then strive to create an algorithm, that is able to play Ludo and other cross circle games as optimally as possible.

Keywords

Ludo; game theory; Markov processes; state space; optimalization of game agent

Obsah

Úvod **7**

1 Historie **8**

1.1 Historie (Včetně historie matematického rozboru) 8

1.2 Člověče nezlob se a jiné Kruhové-Křížové hry 8

2 Definice kruhové křížové hry **9**

2.1 Interakce Figurek 12

2.2 Typy her 14

3 Stavový prostor **15**

3.1 Ovlivnitelnost tahů 20

4 Extremální formy kruhových-křížových her **21**

4.1 Stochastická hra o jedné figurce 21

Literatura 26

Seznam obrázků 26

Seznam tabulek 27

Úvod

Hry jsou nedělnou součástí většiny lidských společností, ať už těch moderních či historických. Vůbec první doložené hry o kterých víme pocházéjí ze starověkké mezopotámie, inide a číny. Druhů her je dnes již celá řada, avšak napříč sociálními rozdíly a napříč celou historií lidstva se táhne jedna hra, lépe řečeno jeden typ hry, který je téměř universální: Ludo, Královská hra z Uru, Pačísí či jak ji nejlépe známe Člověče nezlob se. Házení kostkou a posouvání figurkami za účelem dostání se jako první do cíle je opravdu starobylá idea, ale má mnohem složitější strukturu než by se mohlo zprvu zdát.

Tomuto typu hry se říká kruhové-křížové hry a tato odborná činnost se bude zaměřovat na jejich analýzu. Za pomocí kombinatoriky, teorie her, lineární algebry a počítačových simulací se v mnohých kruhových-křížových hrách pokusíme najít nejlepší strategii. Mimo to narazíme i na analytický rozbor těchto her z různých perspektiv a dokážeme některá fakta, jež o nich platí.

Kapitola 1

Historie

1.1 Historie (Včetně historie matematického rozboru)

1.2 Člověče nezlob se a jiné Kruhové-Křížové hry

Kapitola 2

Definice kruhové křížové hry

Abychom mohli všechny kruhové-křížové hry popisovat rigorózně, tak musíme definovat nějaké pojmy, které nám budou pomáhat popisovat jednotlivé skutečnosti. Začněme od statických částí her a propracujme se postupně k obecné definici kruhové-křížové hry a jejích podtypů.

Základní vlastnost, která odděluje většinu kruhových-křížových her je tvar jejich pole a způsob, kterým figurky cestují po tomto poli, proto začneme s jeho definicí.

Definice 2.1. ***Hrací plochou*** *kruhové-křížové hry myslíme nulový graf tj. takový graf, který má pouze vrcholy a ne hrany.*

Proč bychom chtěli graf definovat bez hran? Obecně platí, že v kruhové křížové hře nemusí všichni hráči chodit po stejné cestě, neboli nemusí vždy procházet stejnými vrcholy. To platí například i pro Člověče nezlob se, ve kterém jsou poslední čtyři pole unikátně dosažitelné pouze jedním hráčem.

Je tedy jednodušší pokud vytvoříme nový graf pro každého hráče zvlášť. Tento graf bude naší původní hrací plochou s tím rozdílem, že do něj zasadíme nějaké orientované hrany. To budeme nejčastěji dělat pomocí funkcí, které jako argument budou brát hrací plochu a jejichž funkční hodnoty tytéž grafy s novými orientovanými hranami.

Definice 2.2. ***Figurkovou fukcní*** *dané figurky na hrací ploše budeme myslet funkci $F : G_0 \to G$, kde G_0 je množina nulových grafů a G je množina všech orientovaných grafů. Funkčními hodnotami této funkce jsou vždy graf, do jehož každého vrcholu vede nanejvýš jedna hrana.*

Z definice 2. již plyne několik zjednodušení, které zavedeme v tomto dokumentu. Zaprvé nepřipuštíme jiné typy hran pro daného hráče než cesty, což znamená, že si hráči nikdy nebudou moci vybrat, kterým směrem se vydají, neboť jejich trasa je determinována již na začátku hry.

Následně vidíme i že hrany jsou orientované, takže nepřipouštíme jakékoliv vracení hráčů resp. jejich figurek za libovolným účelem. Hráčův graf taktéž nedovoluje jakékoliv křížení cesty samy se sebou, aby nedocházelo k nejasným výsledkům.

Dále budeme potřebovat dosadit do tohoto pole nějaké figurky, které se v něm budou moci pohybovat.

Definice 2.3. ***Figurkou*** *daného hráče myslíme nějakého agenta, který se může pohybovat v rámci hráčova hracího pole po cestě. Figurky se mohou hýbat pouze při tahu hráče, jimž patří.*

Další důležitý detail, který musíme zmínit je jak hráč může zvítězit a v jakém stavu začíná. Kruhové-křížové hry mají pro tyto dva mezní stavy různá pravidla, ale v tomto dokumentu se budeme soustředit na dvě variace platící jak pro začátek, tak pro konec hry.

Začnemě s jednoduší variací, ta nám říká, že naše figurky na začátku resp. na konci hry neexistují na hracím poli a mohou z něj libovolně mizet v průběhu hry. My tedy máme všechny figurky u sebe, nějak je zahrajeme na pole a následně s nimi pohybujeme, pakliže zemřou tak se vrací k nám do ruky a pakliže se dostanou do konce, tak taktéž mizí a my dostáváme pomyslný bod. Z těchto vlastností plynou následující dvě definice:

Definice 2.4. *Kruhová-křížová hra s* ***jednoduchým začátkem*** *je taková hra, při níž jsou na začátku všechny figurky mimo hrací plochu a dostávají se do ní jiným způsobem.*

Definice 2.5. *Kruhová-křížová hra s* ***jednoduchým koncem*** *je taková hra, při které figurka po dosažení nějakého výlsedného pole mizí. Pakliže hráči zmizí všechny figurky tímto způsobem vyhrál.*

Tyto varianty ovšem nemusejí nastávat. Další častou variací pro hry tohoto typu je takzvaný koncept **domečku**. Ten se může vyskytovat jak na začátku, tak na konci hry, přičemž všechny figurky musí být v tomto domečku, když začínají nebo když chtějí hru dokončit. Domeček na konci hry se vyskytuje například v klasickém podání Člověče nezlob se.

Čím je domeček na konci zajímavý je fakt, že figurky se do něj mohou dostat pouze pokud jim jiná figurka nepřekáží narozdíl od her s jednoduchým koncem.

Domeček na začátku dále lehce znepříjemňuje hru tím, že se figurky mohou navzájem plést.

Proto si zaveďme definice i pro tyto stavy:

Definice 2.6. *Kruhová-křížová hra s **domečkovým začátkem** je taková hra, na jejímž začátku jsou všechny figurky všech hráču již na hracím poli a po při jakémkoliv sebrání se vrací zpět na nějaké pole na hracím poli.*

Definice 2.7. *Kruhová-křížová hra s **domečkovým koncem** je taková hra, která má jasně danou pozici figurek (ne nutně stejnou pro každého hráče), do které dostane-li se hráč, tak vítězí.*

Poslední ze základních aspektů kruhových-křížových her, který ještě nebyl zmíněn je kostka. Kostky, či jiné generátory náhodných čísel, jsou neoddělitelnou součástí všech kruhových her. Hlavní role kostek je určování počtu kroků, které figurka může udělat v jendom tahu, ale pro hry s jednoduchým začátkem často slouží i jako inicátor dané hry.

Mezi tyto generátory patří především standardní evropská krychlová kostka s čísly 1 až 6 rovnoměrné pravděpodobnosti, ale nesmíme opomenout ani házení čtymi žetony, populární alternativu v indii.

Nejlepším způsobem jak modelovat kostky bude pomocí uspořádané množiny výlsedků a jejich pravděpodobností, čímž obejdeme nutnost starat se o několik kostek najednou. Zadefinujme si tedy kostku následovně.

Definice 2.8. ***Kostkou** myslíme množinu uspořádaných dvojic $[x_i; P_i]$, kde $x_i \in \mathbb{N}$ je výsledek hodu a $P_i \in \langle 0; 1\rangle$ je pravděpodobnost pro získání tohoto výsledku. Pro všechny hodnoty P_i musí platit následující vztah: $\sum_{i=0}^{n}(P_i) = 1$, kde n je počet prvků v naší neuspořádané množině.*

Pro ilustraci ukažme některé z možných kostek a jejich korespondující množinové systémy:

Kostka	**Systém množin**
Hod mincí	$\{(0 \mid \frac{1}{2}); (1 \mid \frac{1}{2})\}$
Standartní šestistěnná kostka	$\{(1 \mid \frac{1}{6}); (2 \mid \frac{1}{6}); (3 \mid \frac{1}{6}); (4 \mid \frac{1}{6}); (5 \mid \frac{1}{6}); (6 \mid \frac{1}{6})\}$
Čtyřstěny v královské hře Uru	$\{(0 \mid \frac{1}{16}); (1 \mid \frac{1}{4}); (2 \mid \frac{3}{8}); (3 \mid \frac{1}{4}); (4 \mid \frac{1}{16})\}$

Tabulka 2.1: Různé typy kostek a jejich množinové systémy

2.1 Interakce Figurek

Čím se liší kruhovékřížové hry od jiných příkladů z teorie her jsou především interakce mezi jednotlivými figurkami.

Tyto interakce lze namodelovat pomocí tabulky, nazvěme ji **interakční tabulka**. Kdy sloupce představují figurku, která se zrovna hýbe a řádky figurku, na kterou přistála figurka, jež se hýbe. Jednotlivé buňky potom představují výsledky těchto interakcí. Příklad takové tabulky pro člověče nezlob se může vypadat takto:

	Hráč 1	Hráč 2
Hráč 1	Ilegální tah	Figurka hráče 1 je vyhozena
Hráč 2	Figurka hráče 2 je vyhozena	Ilegální tah

Tabulka 2.2: Příklad interakční tabulky pro člověče nezlob se

Ve výše uvedeném příkladu na tabulce 2 jsou pozice obou hráčů komutativní; pravidla pro oba hráče fungují symetricky. To je ovšem vlastnost hry a ne obecné tvrzení. Tabulka může teoreticky být rozšířena i na jednotlivé figurky hráčů, které spolu mohou mít rozličné interakce.

Dalším zdrojem rozdílnosti ve hrách je podmínka, kdy nastává interakce. Pro některé hry nastává interakce pouze pokud se jedna figurka dostane na stejný vrchol jako jiná figurka. Pro jiné hry je interakce obecnější pojem a nastává kdykoliv, kdy se jedna figurka pohybuje po cestě na níž stojí druhá figurka.

Tuto nejasnou definici je třeba upřesnit. Proto si zaveďme nový symbol:

Definice 2.9. *Pro libovolné interakční pravidlo $\mathcal{A}$ budeme značit jeho interakci pro figurky, které pouze procházejí kolem jiné figurky symbolem $\mathcal{A}\star$. Pokud bude toto pravidlo platné pouze pro figurky, které končí na stejném vrcholu, tak pravidlo označme bez hvězdičky jako $\mathcal{A}$. Pravidlo $\mathcal{A}$ nazvěme* ***přeskočitelným*** *a pravidlo $\mathcal{A}\star$ nazvěme* ***nepřeskočitelným****.*

Nyní můžeme hovořit o hodnotách, které jsou napsány v buňkách. Možných hodnot těchto buněk je nekonečně mnoho, neboť je nekonečně mnoho různých změn, které ve hře mohou proběhnout (uvažujme například přidání nějakého herního bodu, posunutí všech figurek či změna pravidel), avšak některé z nich se budou opakovat v kruhových-křížových hrách pořád dokola a proto si je pojďme vysvětlit a zadefinovat.

Definice 2.10. *Jakékoliv pravidlo popisující interakci dvou figurek na hracím poli (jednotlivé buňky v interakční tabulce), zavěme* ***interakčním pravidlem****.*

Definice 2.11. *Seřazená množina všech seřazených kombinací figurek dvou hráčů společně s interakčním pravidlem nazvěme* ***interakční tabulkou****.*

Máme-li již tyto dva pojmy, tak můžeme pohlédnout na jednotlivé příklady interakčních pravidel, které budeme vídat v praxi.

Interakční pravidlo 1 (Obcházení)**.** *Pokud se nic nestane po interakci dvou figurek na jednom vrcholu hrací plochy. Tedy obě figurky zůstávají na stejných pozicích. Pak tuto interakci nazýváme* ***obcházením****.*

Interakční pravidlo 2 (Ilegální tah)**.** *Pokud nedovolujeme jendomu hráči interagovat s druhou figurkou (tedy mu nedovolíme učinit tento tah), pak nazvěme tuto situaci* ***ilegálním tahem****.*

Interakční pravidlo 3 (Vyhazování)**.** *Pokud se jedna figurka pohne na druhou, která je následně vyhozena, pak nazvěme tuto interakci* ***vyhozením****.*

U vyhazovacího pravidla je nutné dodat, že "vyhozením"figurky můžeme v různých hrách myslet různé procesy. Tyto procesy jsou většinou závislé na začátku hry. Pokud hra má jednoduchý začátek, pak jsou figurky po vyhození většinou na stejné pozici, na jaké by byli na začátku hry. U domečkového začátku se figurky obvykle vrací na vrchol, na němž začínali hru.

Proto vyhazovací pravidlo není zcela přesně popisováno jako jednozačná interakce dvou figurek, ale spíše jako celá rodina interakčních pravidel, která mohou různě interpretovat koncept vyhození.

Nakonec můžeme pohlédnout na pravidla unikátní k jednotlivým hrám, ve kterých se vyskytují:

Interakční pravidlo 4 (Soudržnost)**.** *Pokud se jedna figurka pohne na druhou, pak se tyto figurky stávají nazvázjem* ***soudržejícími****. Pokud se jedna ze soudržejících figurek pohne o libovolný počet tahů, pak se druhá figurka pohybuje o stejný počet tahů.*

Interakční pravidlo 5 (Sloučení)**.** *Pokud se jedna figurka pohne na druhou, pak obě tyto figurky mizí a stává se z nich jedna nová figurka (ne nutně stejného typu). Tato figurka se pro účely výhry a vyhození chová jako dvě soudržející figurky.*

Interakční pravidla 4 a 5 jsou obzvlášť důležitá pro modelování některých indických her, jmenovitě například **Ašte-Kašte**.

Poslední notační zkratku, kterou pro tato pravidla zavedme je jejich obecné pojmenování - přesněji interakčních pravidel 1, 2 a 3. Pravidla obecně budeme zančit velkými kaligrafickými písmeny. Tato tři specifická jsou tak častá, že si zaslouží vlastní písmena, která nebudou již v průběhu textu vysvětlována vit tabluka 3.

Pravidlo	Symbol
Obcházení	$\mathcal{O}$
Ilegální tah	$\mathcal{I}$
Vyhazování	$\mathcal{V}$

Tabulka 2.3: Pravidla a jejich obecné symboly

2.2 Typy her

Kapitola 3

Stavový prostor

Dříve než se pustíme do jakýchkoliv hlubších analýz pozic a tahů, tak by bylo vhodné vědět s jak velkým stavovým prostorem pracujeme. Jinak řečeno kolik unikátních pozic můžeme ve hře nalézt.

Pro určování velikosti stavového prostoru pochopitelně potřebujeme znát některé vlastnosti hry. Většina z nich plynou již z definice hry, avšak některé musíme odvodit sami. První z našich odvození je schopnost figurek překrávat se.

Naštěstí je toto odvození relativně triviální: pokud pro dva typy figurek A a B bude platit interakční pravidlo $\mathcal{I}$ (tedy, že nikdy nemohou skončit na sobě) či $\mathcal{V}$ (tedy, že jedna vyhazuje druhou) nebo jakákoliv kombinace obou, pak se figurky nemohou překrývat. Pokud tak není (a podmínku stačí naplnit pouze z jedné strany), tak figurky mohou ležet na stejném poli.

Další veličina, která bude determinovat velikost stavového prostoru bude typ začátku a konce (domečkový či jednoduchý). Řešme prvně stavové prostory pro domečkové začátky a konce, které následně generalizujme i pro jednoduché začátky a konce.

Nyní si odvodíme několik vztahů pro specifickou hru $\mathfrak{F}$ s následujícími vlastnostmi: hrací polocha má $\mathbf{D}$ polí, hra probíhá mezi $\mathbf{n}$ hráči, počet figurek hráče $\mathbf{i}$ je $\mathbf{f_i}$ a hra má níže uvedenou interakční tabulku.

	Hráč 1	Hráč 2
Hráč 1	$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}$
Hráč 2	$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}$

Tabulka 3.1: Interakční tabulka $\mathfrak{F}$

$\mathfrak{F}$ je v podstatě nejjednodušší možnou kruhovou-křížovou hrou, neboť figurky mezi sebou nikdy neinteragují. $\mathfrak{F}$ budeme často používat jako modelovou kruhovou-křížovou hru, neboť má velmi jednoduché vlastnosti, ale zároveň zajímavé spojitosti s jinými hrami. Pro $\mathfrak{F}$ nyní můžeme dokázat několik lemmat.

Lemma 3.1. *Nechť S je stavový prostor $\mathfrak{F}$, potom platí, že $|S| = |H_1|^{f_1} \cdot |H_2|^{f_2} \cdots |H_n|^{f_n}$, kde H_i jsou všechna pole dosažitelná figurkami i-tého hráče.*

Důkaz. Uvažujme prvně první figurku prvního hráče: ta si může vybrat z $|H_1|$ možných vrcholů, to ovšem platí pro každou figurku prvního hráče a tedy je počet rozdělení $|H_1|^{f_1}$.

Tutéž logiku můžeme použít pro všechny hráče na celém poli, neboť jejich figurky nepodléhají žádným restrikcím ohledně jejich rozpoložení vůči jiným figurkám. Proto zjistíme, že i-tý hráč má $|H_i|$ volných vrcholů a f_i figurek, z čehož opět plyne $|H_i|^{f_i}$.

Po roznásobení tedy zjistíme, že hráču mají $|S| = |H_1|^{f_1} \cdot |H_2|^{f_2} \cdots |H_n|^{f_n}$ možných kombinací, což jsme chtěli ukázat. □

Lemma 3.2. *Asymptotický růst velikosti stavového prostoru $\mathfrak{F}$ je nanejvýš $\Theta(D^{n \cdot F})$, kde D je velikost hrací plochy, n je celkový počet hráčů a $F := max(f_1, f_2, \ldots, f_n)$.*

Důkaz. Zaveďme si opět množinu S jako stavový prostor pro hru $\mathfrak{F}$. Z lemmatu 1. jistě víme, že velikost stavového prostoru pro tuto hru bude $|H_1|^{f_1} \cdot |H_2|^{f_2} \cdots |H_n|^{f_n}$. Následně je patrné, že pro všechna H_i musí platit, že $|H_i| \leq |D|$, protože H_i je vždy podmnožinou celého prostoru. Pokud tedy veškeré H_i nahradíme D v našem diagramu, tak musí platit nerovnost:

$$|S| = |H_1|^{f_1} \cdot |H_2|^{f_2} \cdots |H_n|^{f_n} \leq D^{f_1} \cdot D^{f_2} \cdots D^{f_n} = D^{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}$$

Zavedeme-li si $F := max(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, pak můžeme podobně dosadit do nerovnosti a zjistíme, že:

$$|S| \leq D^{n \cdot F} f_1 + f_2 + \cdots + f_n \leq D^{n \cdot F}$$

Je patrné, že budou-li fixní dvě honoty z trojice D, F, n, pak musí asymptotický růst této funkce odpovídající poslední nezávislé proměnné, tudíž je asymtotický růst $|S|$ nanejvýš $\Theta(D^{n \cdot F})$. □

Nyní by bylo dobré zmínit, symbolem $\Theta(f(n))$ myslíme asymptotický růst funkce v závislosti na n přitom co se $n \to \infty$. Tyto asymptotické růsty se nyní mohou zdát pohou banalitou, avšak při testování algoritmů v reálném kódu je třeba mít napaměti, jak rychle naše výrazy budou růst, abychom neprohledávali zbytečně velké stavové prostory.

Například již z lemmatu 2. jsme schopni říct, že je pro nás lepší určit F a n jako fixní, neboť potom se bavíme o polynomiálním růstu (pořád velmi rychlé, ale zvladatelné pro menší D), ale mělo-li by být jendo z F a n proměnnou, pak bychom se bavili o exponenciálním růstu, který by byl nezvladatelný velmi rychle.

Lemma 3.3. *Asymptotický růst libovolné křížové-kruhové hry s domečkovým počátkem i koncem $\mathfrak{H}$ je vždy nižší nebo ekvivalentní k $\mathfrak{F}$ se stejnými D, F a n (viz. lemma 2).*

Důkaz. Tento fakt vyplívá docela zřejmě z obecnosti pravidel $\mathfrak{F}$, neboť již nelze najít větší stavový prostor než ten který má $\mathfrak{F}$.

Pokud by existovalo více typů figurek, které by mohli na poli existovat, pak bychom je museli též přidat do $\mathfrak{F}$, abychom dostali tížený výsledek. Uvažovali bychom tedy všechny možné kombinace figurek na všech polích.

Pro běžnou hru by pravidla zakazovala alespoň některé ze stavů, ale $\mathfrak{F}$ je natolik obecná, že nezakazuje žádnou pozici, z čehož plyne že růst této funkce musí být buď vyšší nebo stejný jako jakákoliv hra s domečkovým začátkem a koncem.

Podmínka domečkovosti začátku a konce je vyynucená, protože přidává možné stavy, jež v $\mathfrak{F}$ neexistují. □

Lemma 3.4. *Asymptotický růst všech kruhových-křížových je polynomiální s fixním počtem hráčů a figurek na hráče. Polynom popisující tento vztah je vždy nanejvýš stupně rovnému součtu všech figurek všech hráčů $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$.*

Důkaz. Jak víme z lemmatu 1., tak velikost stavového prostoru pro nejobecnější kruhovou-křížovou hru s domečkovým začátkem a koncem $\mathfrak{F}$ je $|H_1|^{f_1} \cdot |H_2|^{f_2} \cdots |H_n|^{f_n}$.

Ze znění lemmatu víme, že f_i jsou fixní hodnoty. Nyní bez úhony na obecnosti můžeme říci, že H_1 je nejmenší hráčovský prostor, tedy že $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : |H_1| \leq |H_i|$.

Protože platí, že $|H_i| \in$, tak můžeme libovolné $|H_i|$ přepsat jako $|H_1| + a_i$, kde a_i je jednoduše definováno jako $a_i := |H_i| - |H_1|$.

Nyní celý výraz popisující množinu S můžeme popsat jako:

$$|S| = |H_1|^{f_1} \cdot (|H_1| + a_2)^{f_2} \cdots (|H_1| + a_n)^{f_n}$$

z čehož je patrné, že pouze roznásobujeme několik polynomů závislých na $|H_1|$. H_1 se samozřejmě může a nemusí měnit s D a to samé platí i pro a_i, avšak pokud D

vyroste o 1, pak buď $|H_1|$ vyroste o jedna nebo některé z a_i vyrostou o jedna, tudíž si urdžujeme tento polynomiální růst.

Pokud zavedeme do hry více těsná pravidla než má $\mathfrak{F}$, neboli pokud do hry zavedme jakákoliv pravidla, pak odečítáme od tohoto prostoru nějaké množství možných stavů. Toto množství nazvěme z. Potom by náš výraz vypadal následovně:

$$|S| = |H_1|^{f_1} \cdot (|H_1| + a_2)^{f_2} \cdots (|H_1| + a_n)^{f_n} - z$$

V podstatě totožně, jenže odečítáme z, ale pokud odečítáme konstantu od polynomu, pak se bavíme pouze o jiném polynomu. Pakliže by z bylo závislé na velikosti $|H_1|$, pak bychom odečítali od našeho polynomu pouze nějkou funkci $z(H_1)$, což by ji pouze zmenšovalo, z čehož plyne, že konstantní z umožňuje nejrychlejšímu růstu polynomu.

Stupeň tohoto polynomu je též relativně jednoduché najít, stačí si uvědomit následující vztahy platící pro libovolné polynomy $P(x)$ a $Q(x)$. (symbolem $deg(P(x))$, myslíme stupeň polynomu $P(x)$):

$$deg(P(x)Q(x)) = deg(P(x)) + deg(Q(x))$$
$$deg(P(x) - z) = deg(P(x)); z \in$$
$$deg((x-n)^p) = p; n \in$$

Tyto závislosti jsou triviální a jejich důkazy, zde nebudeme představovat, ale po troše promyšlení by mělo čtenáři dojít proč by se tak měli chovat. Hledáním stupně našeho odvozeného polynomu je nyní triviální s těmito vzahy. Symbolicky jej nebudeme ani představovat, ale slovy jednoduše zanedbáme konstantu a podíváme se na stupně jednotlivých činitelů, které nám musí dávat součet $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$. □

Doteď jsme se bavili pouze o hrách s domečkovým počátkem a koncem a zcela jsme opomíjeli hry s jednoduchým začátkem a jednoduchým koncem. Tyto hry mají v zásadě velice podobné vlastnosti v rámci pravidel $\mathfrak{F}$.

Neexistuje moc hezká bijekce mezi množinou her s jednoduchým začátkem a začátkem domečkovým, potažmo tedy i jejich konci, která by zachovávala všechny vlastnosti. Pro účeli asymptotických růstů a obecně odhadů však můžeme některé tyto vlastnosti opomenout a vytvořit jasnou bijekci mezi množinou všech her s domečkovým začátkem resp. koncem a jednoduchým začátkem resp. koncem.

Lemma 3.5. *Pro každou kruhovou-křížovou hru $\mathfrak{H}$ s jednoduchým začátkem existuje hra $\mathfrak{H}'$, která má naprosto totožnou rychlost růstu s konstantní chybou. $\mathfrak{H}'$ se od $\mathfrak{H}$ liší jen o velikost hrací plochy, která je o $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ vyšší u $\mathfrak{H}'$.*

Důkaz. Důkaz můžeme udělat velice jednoduchou konstrukcí. Učiňme tak, tím, že přidáme pro každou figurku přidáme do hrací plochy jeden vrchol, který určíme jako domeček pro dannou figurku. Následně v každé figurkové funkci přídáme hranu vedoucí z tohoto nového domečku do jejího původního počátečního vrcholu.

Můžeme se přesvědčit, že tímto způsobem můžeme opravdu zredukovat veškeré problémy s jednoduchým začátkem, které mohou vyvstat při počítání stavového prostoru či jiných charakteristik hry.

□

Lemma 3.6. *Stavový prostor člověče nezlob se pro dva hráče s hráčovskými prostory H_1 a H_2 je:*

$$\sum_{k=max(0,f_1-|H_1|+s)}^{min(f_1,s)} \binom{s}{k}\binom{|H_1|}{f_1-k}\binom{|H_2|-k}{f_2}$$

přičemž $s := |H_1 \cap H_2|$

Důkaz. Tento výraz dokažme pomocí konstukce. Co nás nejvíc zajímá je počet figurek na průniku hráčovských prostorů, který nám bude říkat možná rozdělení i mimo něj.

Uvažujme z pohledu hráče 2: nebude-li žádná figurka hráče 1 na průniku, pak existuje $\binom{|H_2|}{f_2}$ možností jak rozestavit figurky hráče 2. Pokud na průniku bude 1 figurka hráče 1, pak bude mít hráč 2 $\binom{|H_2|-1}{f_2}$ a tak dále i pro vyšší počty figurek na průniku. Tento počet figurek hráče 1, které jsou na průniku nazývejme k.

S rostoucím k však upadadá možná velikost rozestavění figurek hráče 1 rozdílu jeho hráčovského prostoru a průniku obou prosotorů. Jmenovitě tento počet bude roven $\binom{|H_1|}{f_1-k}$. Hráč 1 však nemusí mít figurky pouze na rozdílu jeho pole s polem hráče 2, ale i na jejich průniku. Pro danné k má právě $\binom{s}{k}$ možností jak rozeskládat své figurky na tento průnik.

Pohlédneme-li na libovolné k, tak zjsitíme, že stavy generované tímto k musí být dolišné od stavů generované jiným reálným číslem, alespoň počtem hráče 1 na průniku hráčovských prostorů. Pakliže tedy zjistíme všechny možné hodnoty k a spočítáme počet kombinací generovaným každým z nich, tak dostaneme výsledek. Dostat počet kombinací pro dané k je vskutku jednoduché stačí totiž roznásobit všechny naše již nalezené vztahy, což určuje počet kombinací, pro dané k máme tedy výraz $\binom{s}{k}\binom{|H_1|}{f_1-k}\binom{|H_2|-k}{f_2}$.

Nyní tedy musíme zjistit hranice k. Jistě víme, že horní hranice k jsou dvě, nutně musí totiž platit, že $k \leq f_1$, protože bychom nemohli do průniku dávat víc figurek než máme a že $k \leq s$, protože do průniku nemůžeme dávat víc figurek nežli je v něm místa. Pakliže k splní tyto dvě podmínky, tak jej zeshora již nic neomezuje, tudíž maximální hodnota, kterou k může nabýt je $k = min(s, f_1)$.

Pro dolní hranici jistě musí platit, že $k \geq 0$, neboť k určuje počet figurek na hrací ploše, takže nemůže být záporné. Nejmenší k ovšem nemusí být nula, což lze ukázat jednoduchým protipříkladem a to když $H_1 \subset H_2$, potom vidíme, že $|H_1| = s$, což znamená, že $k = f_1$. Obecněji tedy můžeme tvrdit, že $k \geq f_1 - (|H_1| - s) = f_1 - |H_1| + s$, protože se snažíme rozdělit f_1 figurek do rozdílu hráčovské plochy hráče 1 aa hráče 2, která má velikost $|H_1| - s$, pokud však máme víc figurek, tak se nám to nepovede a musíme nějaké dát do s, platí tedy, že počet figurek v s je alespoň $k \geq f_1 - (|H_1| - s) = f_1 - |H_1| + s$. Tyto dvě podmínky můžeme dát dohromady a získáme minimální hodnotu k jako $k = max(0, f_1 - |H_1| + s)$.

Všechny ostatní hodnoty k, které jsou mezi těmito dvěmi hranicemi jsou validní. Můžeme si tedy dovolit vzít sumu jednotlivých členů generovaných k a zjistíme tedy, že velikost stavového prostoru pro dva hráče je:

$$\sum_{k=max(0,f_1-|H_1|+s)}^{min(f_1,s)} \binom{s}{k} \binom{|H_1|}{f_1 - k} \binom{|H_2| - k}{f_2}$$

$\square$

3.1 Ovlivnitelnost tahů

Kapitola 4

Extremální formy kruhových-křížových her

Abychom se dokázali propracovat k řešení obecné kruhové-křížové hry je dobré začít s jednoduššími extemálními případy. V této kapitole pohlédneme na dva možné extrémy kruhových-kížových her: na hru plně stochastickou, v níž hráči nemohou hru jakkoliv ovlivnit a na hru plně determenistickou, kterou naopak hráči mohou ovlivňovat zcela.

4.1 Stochastická hra o jedné figurce

Začněme od úplně nejjednodušší možné konfigurace a tou bude jedna figurka, která s ničím neinteraguje. Ačkoliv se může zdát, že tato konfigurace je až příliš jednoduchá opak je pravdou, neboť pohlédneme-li například na hru $\mathfrak{F}$ (definovanou ZDE), pak můžeme vidět, že se jedná kombinaci několik figurek, z nichž každá z nich cestuje po své cestě danné její figurkovou funkcí.

Jako užitečný nástroj pro analýzu pohybu těchto figurek jsou Markovovy řetězce. Markovův řetězec je matematický objekt, studující agenta pohybujícího se na vážených orientovaných hranách grafu. Váha dané hrany určuje pravděpodobnost přechodu agenta z jednoho vrcholu do jiného vrcholu. Z toho tedy vyplívá, že součet všech vah hran vycházejících z daného vrcholu musí být vždy 1, neboť se s každým agentem musí něco stát.

Markovovi řetězce však musí splňovat ještě jedno kritérium, kterému se říká tzv. Markovova vlastnost. Tato vlastnost nám říká, že známe-li hodnotu nynějšího stavu, pak dokážeme přesně přepokládat hodnotu nadcházejícího stavu bez znalosti stavu předešlého. S touto znalostí již můžeme definovat Markovův řetězec.

Definice 4.12. ***Markovův řetězec*** *je stochastický proces závislý na diskrétním časovém kroku, jehož stav v kroku $n+1$ je závislý pouze na stav v kroku n.*

Další velmi důležitý vztah vyvstávající z Markovových řetězců je jejich spojitost s lineární algebrou. Nechť $\vec{p_i}$ je řádkový vektor, kde každá hodnota představuje pravděpodobností distribuci mezi stavy Markovova řetězce v i-tém kroce. Pokud je tedy 50% šance na to, že bude ve stavu 2 a 50% šance na to, že bude ve stavu 3, pak takový vektor vypadá následovně: $\vec{p_i} = (0; 0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \dots)$ My bychom chtěli vyjádřit $\vec{p_{i+1}} = f(\vec{p_i})$, kde f je nějaká funkce závislá pouze na hodnotě $\vec{p_i}$. Pro nalezení této funkce si budeme muset zavést nový koncept a to přechodové matice.

Definice 4.13. ***Přechodová matice*** *stavového prostoru X s markovoým rětězcem je taková matice, jejíž hodnota $P_{i,j}$ je rovna pravděpodobnosti přechodu ze stavu $i \in X$ do stavu $j \in X$. Taková matice musí splňovat, že $\sum_{j \in X} P_{i,j} = 1$.*

Nyní můžeme formulovat větu o přechodech mezi těmito stavy:

Věta 5. *Pro stavový konečný prostor X s markovovým řetězcem, jehož distribuce v i-tém kroku je řádkový vektor $\vec{p_i}$, a jehož přechodová matice je M platí, že:*

$$\vec{p_{i+1}} = \vec{p_i} M$$

Důkaz. Nechť X je stavový prostor se stavy $\{0; 1; 2; \dots; n\}$, pak platí. Pokud je $p_i(k)$ k-tá hodnota řádkového vektoru p_i, pak platí, že $p_i(k) = P(X_i = k)$. Dále zaveďme přechodovou matici M, tak, že $M_{j,k} = P(X_{i+1} = k \mid X_i = j)$. Z definice Markova řetězce víme, že tato matice je stejná pro libovolné i. My chceme zjistit hodnotu $p_{i+1}(k)$, kterou můžeme relativně snadno vyjádřit ze zákona celkové pravděpodobnosti:

$$p_{i+1}(k) = P(X_{i+1} = k) = \sum_{j=0}^{n} P(X_i = k) \cdot P(X_{i+1} = k \mid X_i = j) = \sum_{j=0}^{n} p_i(j) M_{j,k}$$

My však vidíme, že suma, která nám z našeho zjednodušení vyvstala je právě právě ekvivalentní k násobení řádkového vektoru s maticí, tudíž platí, že $p_{i+1} = p_i M$. □

Se znalostí této věty dokážeme nyní přesně určit pravděpodobnostní rozložení celého systému po libovolném počtu tahů, stačí nám pouze určit přechodovou matici. Uvědomme si, že pokud máme libovolnou hru $\mathfrak{F}$, pak nezáleží na tom má-li domečkový či jednoduchý konec, protože si figurky nebudou bránit v dostávání se do finálního políčka.

Abychom však určili pravděpodobnostní rozložení po větším množství tahů, pak potřebujeme nějak vytvořit přechodovou matici. My totiž v rámci hry máme pouze figurkovou funkci F a kostku jako uspořádanou množinu čísel.

Poznámka 1. *Ve figurkové funkci F budeme označovat jako* ***počáteční vrchol*** *jediný vrchol, do nějž nevede žádná orientovaná hrana a* ***konečný vrchol*** *jako jediný vrchol, jehož orientovaná hrana míří právě do téhož vrcholu.*

Nechť tedy T je přechodová matice $F(G)$, kde F je figurková funkce a G hrací plocha. Dále nechť $d(i)$ je i-tý prvek kostkové množiny (šance, že se figurka pohne o i polí vpřed). Naši tíženou matici s pravděpodobnostně váženými přechody nazvěme M. Potom platí následující výraz.

$$M_{u,v} = \sum_{i=0}^{n} d(i)[T^i]_{u,v}$$

n v tomto výrazu jednodušše značí počet prvků v kostkovém prostoru. Klidně bychom ho mohli nahradit za ∞ bez úhony na obecnosti, neboť jako nedosazené prvky v množině bychom brali 0. Nutno dodat, že pro funkčnost tohoto důkazu definujeme pro libovolnou matici A hodnotu výrazu

$$A^0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Poznámka 2. *Symbolem $[T^i]_{u,v}$ myslíme hodnotu v u-tém řádku a v-tém sloupci matice T^i.*

O pravdivosti tohoto výrazu se můžeme přesvědčit snadno, pomocí konstrukce této matice. Hleďme na prvek s index u, v v M. Hodnota této buňky musí být rovna šanci na to, že se figurka dostane z předešlého stavu plus šance na to, že se dostane ze stavu předtím, atd. Když násobíme matici T opakovaně samo sebou, tak postupně zjištujeme pohyb v rámci prostoru. Celý tento proces je velmi podobný k hledání pravděpodobnostní distribuce po i tazích v determenistickém markovově řetězci.

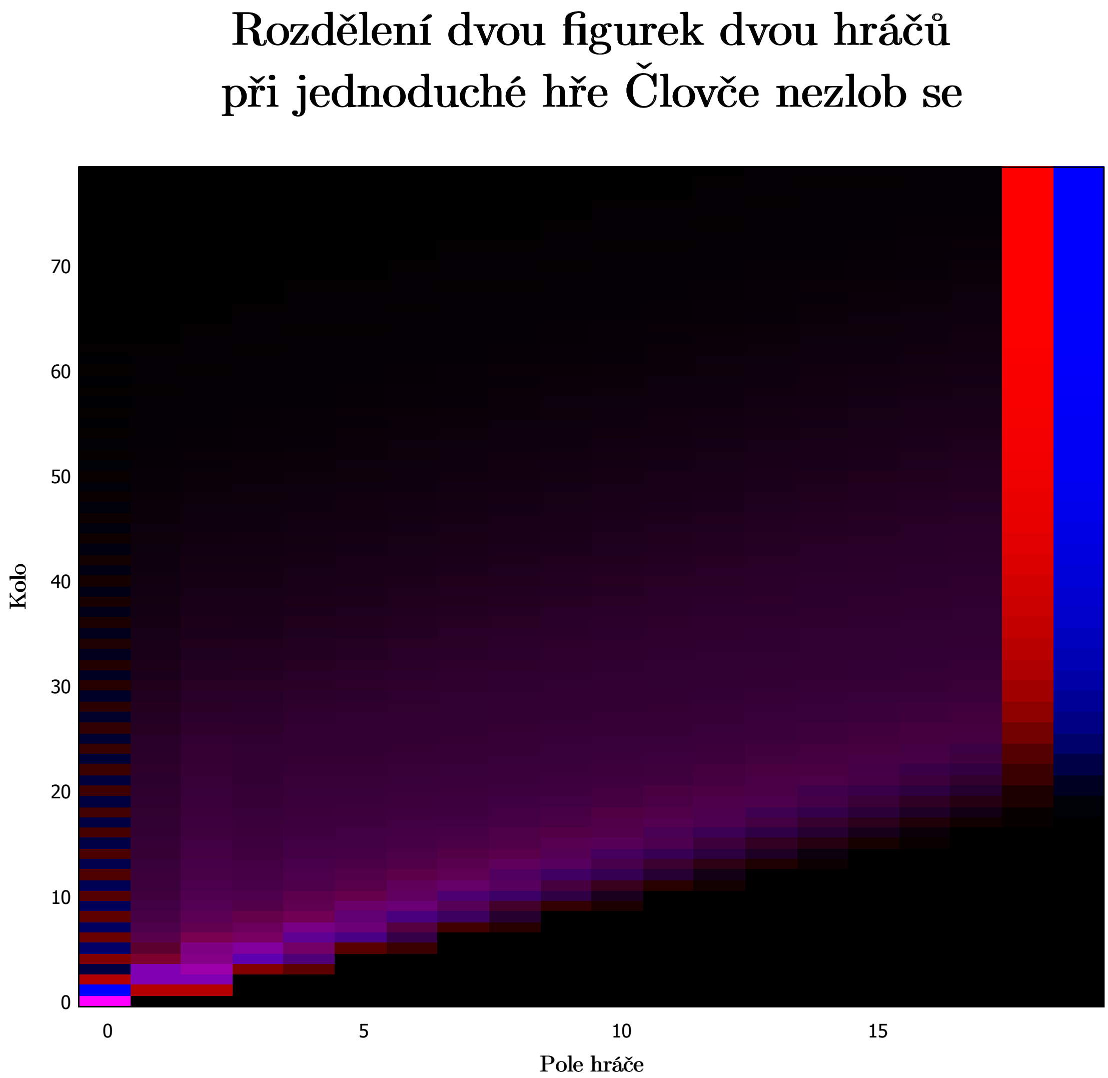
Uvědomme si však, že jsme si nadefinovali $F(G)$, tak, že každý vrchol má právě jednu vyházející hranu. Proto můžeme zavést funkci $Suc(t)$, která pro libovolný vrchol s indexem t dá jako funkční hodnotu index vrcholu, do kterého vede hrana vrcholu t. Potom můžeme celé naše umocňování T vyjádřit následovně:

$$[T^i]_{u,v} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } Suc^i(u) = v, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Výrazem $Suc^i(n)$ myslíme naši funkci iterovanou i-krát a ne její i tou mocninu. S tímto můžeme naši funkci pro získávání tížené vážené přechodové matice pro náš Markovův řetězec vyjádřit jako:

$$A_{u,v} = \sum_{i:\ Suc^i(u)=v} v_i$$

IMG test:



Obrázek 5.1: Rozdělení figurek

Seznam obrázků

5.1 Rozdělení figurek 25

Seznam tabulek

2.1 Různé typy kostek a jejich množinové systémy 11
2.2 Příklad interakční tabulky pro člověče nezlob se 12
2.3 Pravidla a jejich obecné symboly 14

3.1 Interakční tabulka $\mathfrak{F}$ 15