מבחן במקצוע גרפיקה ממוחשבת

11 בפברואר 2021

תוכן העניינים

שאלה מספר 1

סעיף א

הערה 1. השאלה מנוסחת באופן בו ניתן שהמט' פועלות מימים על הווקטורים באופן הבא vA.

הערה 2. **בסריקה הציעו אלג' פשוט שמבצע את אותו הדבר.ההוכחה כאן מתמטית/אלגברית ריגורוזית על דרך האינדוקציה וחשבתי שזו הייתה כוונת השאלה כשפתרתי אותה.**

כן.

על מנת להוכיח את המבוקש ,תחילה נוכיח כמה טענות עזר.

טענה 3. יהיו T_1, T_2 מט הזזה כלהיא ב$\mathbb{R}^3$ אזי **קיימת <u>מט' הזזה</u> שקולה** T_3 ב$\mathbb{R}^3$ כך שמתקיים ש $T_3 = T_1T_2 = T_2T_1$.

הוכחה.

- T_1 מט הזזה כלהיא ב$\mathbb{R}^3$ כלומר $\exists v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ כך ש $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- T_2 מט הזזה כלהיא ב$\mathbb{R}^3$ כלומר $\exists u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$ כך ש $T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- קיימים $w_i = u_i + v_i \in \mathbb{R}$: $\forall i \in \{1,2,3\}$ כך ש

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & 0 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 & w_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u_1+v_1 \\ 0 & 1 & 0 & u_2+v_2 \\ 0 & 0 & 1 & u_3+v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_1T_2$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & 0 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 & w_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u_1+v_1 \\ 0 & 1 & 0 & u_2+v_2 \\ 0 & 0 & 1 & u_3+v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_2T_1$$

כלומר $T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & 0 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 & w_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ היא **מט' הזזה** המקיימת $T_3 = T_1T_2 = T_2T_1$.

□

טענה 4. יהיו R_1, R_2 מט סיבוב כלהיא ב$\mathbb{R}^3$ אזי **קיימת <u>מט' סיבוב</u> שקולה** R_3 ב$\mathbb{R}^3$ כך שמתקיים ש $R_3 = R_1R_2$.

הוכחה.

- R_1 מט' סיבוב ולכן (לפי משפט אמ"מ) היא אורטונורמלית $R_1R_1^T=R_1R_1^T=I$.
- R_2 מט' סיבוב ולכן (לפי משפט אמ"מ) היא אורטונורמלית $R_2R_2^T=R_2R_2^T=I$.
- המט' $R_3=R_1R_2$ מקיימת

$$R_3R_3^T=\left(R_1R_2\right)\left(R_1R_2\right)^T=R_1R_2R_2^TR_1^T=R_1IR_1^T=R_1R_1^T=I$$

$$R_3^TR_3=\left(R_1R_2\right)^T\left(R_1R_2\right)=R_2^TR_1^TR_1R_2=R_2^TIR_2=R_2^TR_2=I$$

כלומר מתקיים

$$R_3R_3^T=R_3^TR_3=I$$

כלומר $R_3=R_1R_2$ היא **מט' סיבוב** (לפי משפט אמ"מ) המקיימת $R_3=R_1R_2$.

□

נוכיח את הטענה המבוקשת באינדוקציה.

- בסיס: $n=1$, $n=2$.
  - עבור $n=1$ עבור סדרה באורך אחד של סיבובים והזזות באורך 1 נפריד למקרים זרים ומשלימים:
    - הסדרה R_1.(סיבוב אחד)
      - סדרה זו שקולה לסיבוב בR על ידי הראשית ולאחר מכן הזזה ב0 בכל אחד מהצירים (מט' יחידה) כלומר

$$R_1=\overbrace{R_1}^{\text{Rotate}}\overbrace{I}^{\text{Translate}}$$

ולכן הטענה נכונה עבור מקרה זה

    - הסדרה T_1.(הזזה אחד)
      - סדרה זו שקולה לסיבוב ב0 מעלות בציר כלשהו (מט' יחידה) ולהזזה בודדת כלומר

$$T_1=\overbrace{I}^{\text{Rotate}}\overbrace{T_1}^{\text{Translate}}$$

ולכן הטענה נכונה עבור מקרה זה

    - מסקנה: טענת האינדוקציה נכונה עבור כל סדרה באורך 1.
  - עבור $n=2$ עבור סדרה באורך אחד של סיבובים והזזות באורך 1 נפריד למקרים זרים ומשלימים:
    - הסדרה R_1R_2.(שני סיבובים)
      - לפי 4 נובע כי קיימת מט' סיבוב שקולה לסדרה,נסמנה R_3.זו סדרה באורך 1.והטענה נכונה עבור כל סדרה באורך 1 בפרט עבור R_3.כלומר הטענה נכונה עבור מקרה זה.
    - הסדרה T_1T_2.(שני הזזות)

⋄ לפי 3 נובע כי קיימת מט' הזזה שקולה לסדרה,נסמנה T_3.זו סדרה באורך 1.והטענה נכונה עבור כל סדרה באורך 1 בפרט עבור T_3.כלומר הטענה נכונה עבור מקרה זה.

∗ הסדרה R_1T_2.(סיבוב ואז הזזה סביב הראשית (ראה הערה מעלה))

⋄ זו כבר סדרה של סבוב סביב הראשית ולאחר מכן הזזה.היא שקולה לעצמה .כלומר הטענה נכונה עבור מקרה זה.

∗ הסדרה T_1R_2.

⋄ R_2 מט' סיבוב ולכן R_2 מהצורה

$$R_2 = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⋄ T_1 מט' הזזה ולכן T_1 מהצורה

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \tilde{x} \\ 0 & 1 & 0 & \tilde{y} \\ 0 & 0 & 1 & \tilde{z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

מתקיים כי

$$TR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \tilde{x} \\ 0 & 1 & 0 & \tilde{y} \\ 0 & 0 & 1 & \tilde{z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & \tilde{x} \\ d & e & f & \tilde{y} \\ g & h & i & \tilde{z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

∗ תזכורת:
מחוקי כפל מט' אנו ויודעים כי בנוסף מתקיים

$$RT = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \tilde{x} \\ 0 & 1 & 0 & \tilde{y} \\ 0 & 0 & 1 & \tilde{z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & a\tilde{x} + b\tilde{y} + c\tilde{z} \\ d & e & f & d\tilde{x} + e\tilde{y} + f\tilde{z} \\ g & h & i & g\tilde{x} + h\tilde{y} + i\tilde{z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

∗ נבחר $R_1 = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R^*$ ו $T^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \hat{x} \\ 0 & 1 & 0 & \hat{y} \\ 0 & 0 & 1 & \hat{z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ונקבל

כי

$$\begin{aligned} a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z} &= \tilde{x} \\ d\hat{x} + e\hat{y} + f\hat{z} &= \tilde{y} \\ g\hat{x} + h\hat{y} + i\hat{z} &= \tilde{z} \end{aligned}$$

$$R^*T^* = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \hat{x} \\ 0 & 1 & 0 & \hat{y} \\ 0 & 0 & 1 & \hat{z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & a\hat{x}+b\hat{y}+c\hat{z} \\ d & e & f & d\hat{x}+e\hat{y}+f\hat{z} \\ g & h & i & g\hat{x}+h\hat{y}+i\hat{z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\overset{!}{=}} \begin{bmatrix} a & b & c & \tilde{x} \\ d & e & f & \tilde{y} \\ g & h & i & \tilde{z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

כלומר עלינו לפתור מע' משואות לינארית מהצורה

$$\begin{aligned} a\hat{x}+b\hat{y}+c\hat{z} &= \tilde{x} \\ d\hat{x}+e\hat{y}+f\hat{z} &= \tilde{y} \\ g\hat{x}+h\hat{y}+i\hat{z} &= \tilde{z} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}$$

כאשר ווקטור הנעלמים הם $\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}$ ושאר האלמנטים ידועים.מכיוון שRמט' סיבוב נובע כי $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ מט' אורטוגונלית (קיים הופכי והוא הטרנפוס למט') ולכן מהווה לפי משפט בסיס פורש למרחב $\mathbb{R}^3$ ולכן מכאן נובע כי קיים פתרון יחיד למע' המשוואות הנ"ל והוא:

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\tilde{x}+d\tilde{y}+g\tilde{z} \\ b\tilde{x}+e\tilde{y}+h\tilde{z} \\ c\tilde{x}+f\tilde{y}+i\tilde{z} \end{bmatrix}$$

כלומר אם נבחר $R_1 = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R^*$ ו $T^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \hat{x} \\ 0 & 1 & 0 & \hat{y} \\ 0 & 0 & 1 & \hat{z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

כך ש $\begin{bmatrix} a\tilde{x}+d\tilde{y}+g\tilde{z} \\ b\tilde{x}+e\tilde{y}+h\tilde{z} \\ c\tilde{x}+f\tilde{y}+i\tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}$ יתקיים כי

$$R^*T^* = TR$$

כלומר הטענה נכונה עבור מקרה זה.

- **הנחה** (נניח נכונות עבור N):
  - יהא $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ כלשהו.נניח את נכונות הטענה עבור כל $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ המקיים $n \leq N$.
- **צעד:**
  - יהא סדרה של $N+1$ סיבובים והזזות.

* נתבונן בסדרה של N הסיבובים והזזהות הראשונים נסמנה X.מהנחת האינדוקציה נובע כי קיימת מט' סביבוב R^* ומט' הזזה T^* כך ש $X = R^*T^*$.

  - נפריד למקרים זרים ומשלימים.

    * אם האיבר האחרון (ה$N+1$) בסדרה הוא הזזה , נמסנה T_{n+1} אזי הסדרה כולה שקולה לXT_{n+1} ראינו כי $X = R^*T^*$ ולכן מתקיים כי הסדרה שקולה ל $R^*T^*T_{n+1}$.מטענה 3 נובע כי קיימת מט' הזזה $\tilde{T}$ כך ש $\tilde{T} = T^*T_{n+1}$ ולכן הסדרה כולה שקולה ל$R^*\tilde{T}$.כלומר הטענה נכונה עבור מקרה זה.

    * אם האיבר האחרון (ה$N+1$) בסדרה הוא סיבוב,נסמנו R_{n+1}.אזי הסדרה כולה שקולה לXR_{n+1} ראינו כי $X = R^*T^*$ולכן מתקיים כי הסדרה שקולה ל $R^*T^*R_{n+1}$.נתבונן בתת הסדרה T^*R_{n+1} זו סדרה באורך 2 ולכן מנכונות הטענה למקרה של סדרה אורך 2 קיימים מט' סיבוב R^{**} ומט' הזזה T^{**}כך ש $T^*R_{n+1} = R^{**}T^{**}$ ולכן הסדר שקולה לסדרה הבאה

$$XR_{n+1} = R^*T^*R_{n+1} = R^*\left(T^*R_{n+1}\right) = R^*R^{**}T^{**} = \left(R^*R^{**}\right)T^{**}$$

מטענה 4 קיימת מט' סיבוב R^{***} כדש $R^{***} = R^*R^{**}$ ולכן מכאן נובע כי הסדרה שקולה ל$R^{***}T^{**}$.כלומר הסדרה שקולה ל

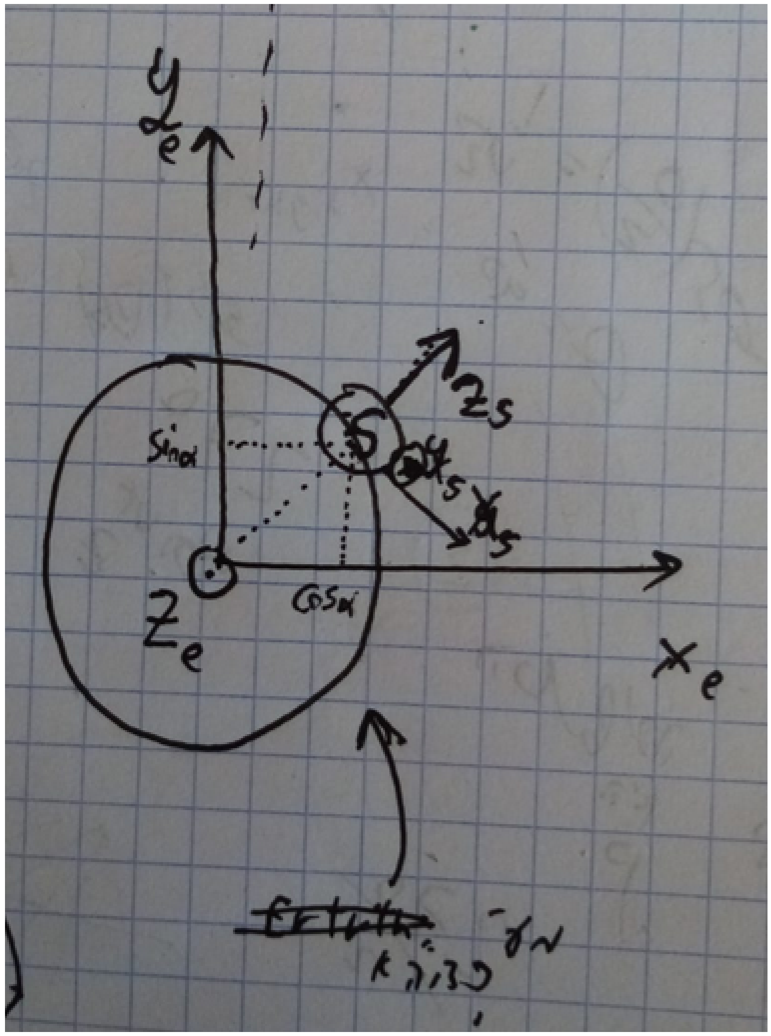
$$XR_{n+1} = \ldots = \left(R^*R^{**}\right)T^{**} = R^{***}T^{**}$$

כלומר הטענה נכונה עבור מקרה זה.

הוכנו את הטענה באינדוקציה.

סעיף ב

נתבונן בשרטוט



נדרוש כי הלוויון כל הזמן יפנה לאותו הכיוון.לצורך נוחות הפתרון נבחר כי ציר z של הלווין יתלכד עם הקו שיוצא ממרכז כדוה"א אל הלווין ויפנה החוצה מכיוון של כדוה"א.מכאן נובע כי כיוון ציר z של מע' הקור' של הלווין יהיה ב $(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ ביחס למע' הקור' של כדוה"א.

את שאר הצירים עלינו לבחור כך שיהיו מקבילים כלומר ציר x של הלווין ביחס לציר של כדוה"א כלומר עלינו למצוא a, b כך ש$(a, b, 0)$אורטוגונלי ל $(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ כלומר כך ש $a\cos(\alpha) + b\sin(\alpha) = 0$ כלומר נבחר $a = \sin(\alpha)$ ו $b = -\cos(\alpha)$.כלור ציר x של הלווין ביחס לכדוה"א הוא $(\sin(\alpha), -\cos(\alpha))$.

הציר השלישי y נבחר אותו להיות מאונך לשניהם $(0, 0, 1)$.

ולכן מט' הסיבוב המתאימה (לא הסופית) היא

$$\begin{pmatrix} \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ w_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_e \sin(\alpha) - y_e \cos(\alpha) \\ z_e \\ x_e \cos(\alpha) + y_e \sin(\alpha) \\ w_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \\ w_s \end{pmatrix}$$

בנוסף הלווין מוזז מכדוה"א ההנחה (שהסקתי רק מקריאת התושבות בתכלס) היא שהוא חג סיביב מעגל היחידה ולכן נרצה להזיז אותו לשם כלורמ נרצה להזיז אותו בציר x ב$\cos(\alpha)$ ובציר y ב $\sin(\alpha)$ כלורמ המט' המלאה היא

$$\begin{pmatrix} \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שאלה מספר 2

הערה 5. לא באמת ממש למדנו את הנושא הזה...

סעיף א

קלט:

- מודל.
- תמונת displacement.
- קורדינטות לתמונת דיספלייסמנט.
- נורמלים פאה במודל (יכול להיות normals faces ויכול להיותnormals vertex) לא מוצא הבדל חשיבות משמעותית במקרה הזה.

פלט:

- מודל שיש בו יותר פרטים : יכול להראות יותר מחוספס.

אלגוריתם:

בעת הרנדור נזיז מעט כל vertex בכיוון הנורמל המתאים לו (המתקבל בקלט) לפי העוצמה של הערך המתקבל בדגימה מתמונת הdisplacement מהקור' של תמנת הדיספלייסמנט.

הערה 6. אם הפיקסל שחור - אל תזיז את הוורטקס לכיוון הנורמל כלל

הערה 7. אם הפיקסל לבן לגמרי - תזיז את הווקרטס לכיוון הנורמל בעוצמה מירבית

הערה 8. על כל ערך בין שחור ללבן (ע"ע אפור) תבצע את ההזזה הנ"ל באופן יחסי.

למה האלג' משמש

האלג' מאפשר לאמן לשמור תמונה של המודל ללא פרטים גאומטריים רבים ולשמור בנפרד את הפרטים של החספוסים בתמונה שחור לבן.ואז בעת הרנדור להשתמש בה על מנת לרנדר את המודל בעל פרטים מפורטים יותר.

יש כאן tradeoff:

- מצד אחד, חסכון במקום - כל אובייקט מיוצג על ידי פחות מאשים.
- מצד שני,תקורה גדולה יותר של זמן רנדרור (כעת המודל בקלט הוא לא מודל המטרה הסופי ועלינו לבצע עליו עוד נדבך של עיבוד גאומטרי.)

דוגמה 9. נוכל לרנדר צמיג עם פרטים רבים יותר (לדוגמא החרכים בגומי השחור שלו) מבלי לשמור כל חרך כזה בגאומרטיה של המודל אלא על ידי מפה נפרדת).

סעיף ב

(קוד שלא נבדק בפועל...מקווה שקולע לכוונת המשורר)..חסר גם הקוד שבוא אני מכניס את הקור' של הקור' פר צומת

```
#______________________
#cpu renderer code
#______________________
#define HIGHT 512
#define WIDTH HIGHT
#define CHANNELS 1

//...
//...
//...

glActiveTexture(GL_TEXTURE); //enable textures
//assuming the displacemnt buffer is already defined as GLubyte texels [HIGHT][WIDTH][CHANNELS];
glTexImage2D(GL_TEXTURE_2D, 0, GL_RGB, HIGHT, WIDTH , 0, GL_RGB, GL_UNSIGNED_BYTE, texels);




#______________________
#vshader.glsl code
#______________________
#define INTENSEITY 10
in vec2 texcoord;
in vec4 vPosition;
in vec4 normal;
in vec4 in_color;
out vec4 f_color;
uniform sampler2D texMap;
void main(){
        f_color=in_color;
        gl_Position=INTENSEITY*texture2D(texMap,texcoord)*normal+vPosition;

}

#______________________
#fshader.glsl code
#______________________
in vec4 f_color;
out vec4 color;
void main(){
        in_color=color;
```

הערה 10. את GL_RGB נצרך להחליף בקבוע אחר שרלווטנטי לתמונות שחור לבן עם ערוץ אחד.

שאלה מספר 3

סעיף א

התנאי הוא שהקוונטריון יהיה על ספרת היחידה ב$\mathbb{R}^4$.כלומר התנאי הוא $\|q\| = 1$ כלומר התנאי על המקדמים הוא

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

סעיף ב

בזוויות אוילר יש בעיה שנקראת גימבל לוק (נעלית גימבל) שיכולה להגרם משימוש בזוויות אוילר כמצב זה קרוה - המתשמש מאבד דרגת חופש באפשרות שלו לבטא את הסיבובים במערכת.

הבעיה הזו נפתרת על ידי שימוש בקוונרטויונים (שיש להם אפילו דאבל קאבר/כסוי כפול של כל המעגלים האפשריים)

סעיף ג

עלידי אינטרפולציה לינארית בין שני מט' סיבוב אנחנו עלולים לא לקבל מט' סיבוב בשלבים מסויימים של האינטרפולציה (ואז הפעולה שהמט' תבצע על המודל לא תהיה סיבוב -אלא משהו אחר) היינו רוצים שלכל אורך האינטרפולציה נקבל סיבוב של המודל באופן חלק ואינטואיטיבי וכשזה לא קורה (כמו במקרה הזה) זהמוליד את הבעייתיות.

נדגים באמצעות דוגמא

תהא מט' סיבוב על מישור $X - Y$:

$$R^{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

עבור $\alpha = 90\,\mathrm{deg}$ מקבלים כי

$$R^{90\,\mathrm{deg}} = \begin{bmatrix} \cos(90) & -\sin(90) & 0 & 0 \\ \sin(90) & \cos(90) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

עבור $\alpha = -90\,\mathrm{deg}$ מקבלים כי

$$R^{-90\,\mathrm{deg}} = \begin{bmatrix} \cos(-90) & -\sin(-90) & 0 & 0 \\ \sin(-90) & \cos(-90) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

איטנרפולציה לינארית בין $R^{-90\deg}, R^{90\deg}$

$$\forall t\in[0,1]: R\left(t,R^{90\deg},R^{-90\deg}\right)=tR^{90\deg}+(1-t)\,R^{-90\deg}$$

עבור $t=0.5$ מקבלים כי

$$\begin{aligned}R\left(0.5,R^{90\deg},R^{-90\deg}\right)&=0.5R^{90\deg}+0.5R^{-90\deg}\\&=0.5\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}+0.5\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

כלומר $\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=R\left(0.5,R^{90\deg},R^{-90\deg}\right)$ (מט' שקיבלנו במהלך האינטרפולציהבדיוק בחצי הדרך) היא אינה מדרגה מלאה צ(ולכן אינה בסיס פורש למרחב $\mathbb{R}^4$ ולכן אינה מט' אוניטרית) ולכן אינה יכולה להיות מט' סיבוב.(למעשה היא שולחת את כל הקור' x,y לאפס..מטילה את כל המודל רק על ציר z).ולכן זה הבעיתיות.

סעיף ד

הערה 11. מניסוח השאלה אני מניח שהריבוע הוא דו מימדי.(מהשאלה כתוב "מט' הטרנס' הדו מימדית)

נתבונן במט':

$$T_0=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},T_1=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&-\sqrt{2}&5\\\sqrt{2}&\sqrt{2}&5\\0&0&1\end{bmatrix}$$

ונבין מה מט' הסיום מורכבת

$$T_1=SRT$$

- ממט' rotate בזווית 45 מעלות.

$$R=\begin{bmatrix}\cos(45)&-\sin(45)&0\\\sin(45)&\cos(45)&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

- ממט' scale פי 2.

$$S=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

- ממט' translate ב5 יחידות בצירים x,y.

$$T=\begin{bmatrix}1&0&5\\0&1&5\\0&0&1\end{bmatrix}$$

- נוכיח :

$$SRT=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&5\\0&1&5\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&-\sqrt{2}&0\\\sqrt{2}&\sqrt{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&5\\0&1&5\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&-\sqrt{}\\\sqrt{2}&\sqrt{}\\0&0\end{bmatrix}$$

- על מנת לבצע את האינטרפולציה נרצה לבצע אינטרפולציה לכל אחד מהגורמים של המט'.הscaling ו tranlatation אפשר לאפשר את האינטרפולציה שלהם באופן קלאסי בלי בעיה.

  - $\forall t\in[0,1]:S(t)=\begin{bmatrix}(t+1)&0&0\\0&(t+1)&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.
  - $\forall t\in[0,1]:T(t)=\begin{bmatrix}1&0&5t\\0&1&5t\\0&0&1\end{bmatrix}$.

- הבעיה היא כאמור להשתמש באינטרפולציה לינארית לצורך מט' הסיבוב.הדרך הנכונה לעשות זאת היא במקרה הזה:

$$\forall t\in[0,1]:R(t)=\begin{bmatrix}\cos(45\cdot t)&-\sin(45\cdot t)&0\\\sin(45\cdot t)&\cos(45\cdot t)&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

• לכן המט' המבוקשת היא

$$
\begin{aligned}
\forall t\in[0,1]: A_{\text{animate}}(t) &= S(t)\,R(t)\,T(t)\\
&= S(t)\,R(t)\,T(t)\\
&= \begin{bmatrix} (t+1) & 0 & 0\\ 0 & (t+1) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(45\cdot t) & -\sin(45\cdot t) & 0\\ \sin(45\cdot t) & \cos(45\cdot t) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5t\\ 0 & 1 & 5t\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} (t+1)\cos(45\cdot t) & -(t+1)\sin(45\cdot t) & 0\\ (t+1)\sin(45\cdot t) & (t+1)\cos(45\cdot t) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5t\\ 0 & 1 & 5t\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} (t+1)\cos(45\cdot t) & -(t+1)\sin(45\cdot t) & 5t\\ (t+1)\sin(45\cdot t) & (t+1)\cos(45\cdot t) & 5t\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

כלומר המט' האינטרפולציה המתקבלת היא

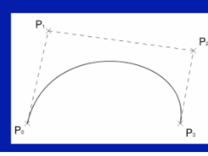
$$
\boxed{\forall t\in[0,1]: A_{\text{animate}}(t) = \begin{bmatrix} (t+1)\cos(45\cdot t) & -(t+1)\sin(45\cdot t) & 5t\\ (t+1)\sin(45\cdot t) & (t+1)\cos(45\cdot t) & 5t\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}
$$

שאלה מספר 4

נעזר בשקף המהמם הבא:

Bezier Curves*

- Another variant of the same game
- Instead of endpoints and tangents, four control points
  - points P0 and P3 are on the curve: P(u=0) = P0, P(u=1) = P3
  - points P1 and P2 are off the curve
  - P'(u=0) = 3(P1-P0), P'(u=1) = 3(P3 – P2)
- Convex Hull property
  - curve contained within convex hull of control points
- Gives more control knobs (series of points) than Hermite
- Scale factor (3) is chosen to make "velocity" approximately constant



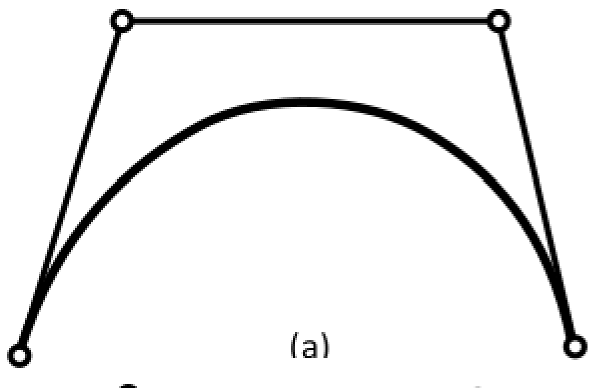
Comparison of Basic Cubic Splines

Type	Local Control	Continuity	Interpolation
Hermite	YES	C1	YES
Bezier	YES	C1	YES
Catmull-Rom	YES	C1	YES
Natural	NO	C2	YES
B-Splines	YES	C2	NO

- Summary
  - Can't get C2, interpolation and local control with cubics

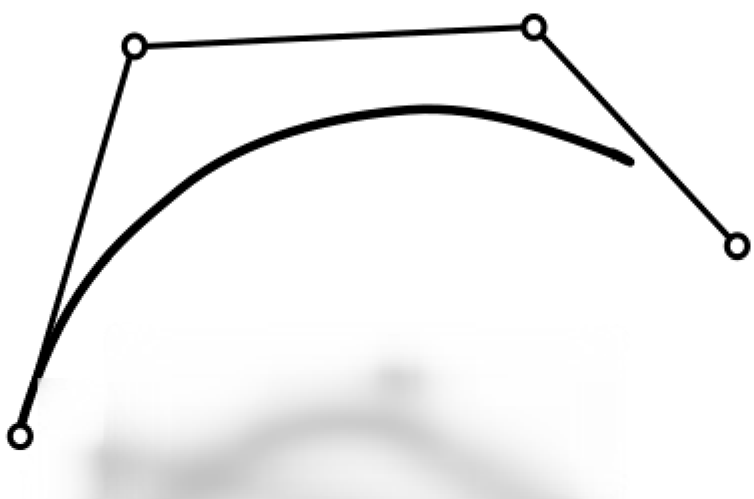
18

סעיף א



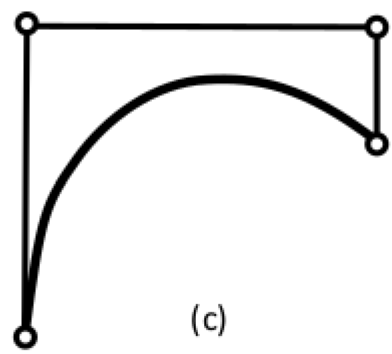
עקום (a)

ייתכן שהתקבל מבזייר.



עקום (b)

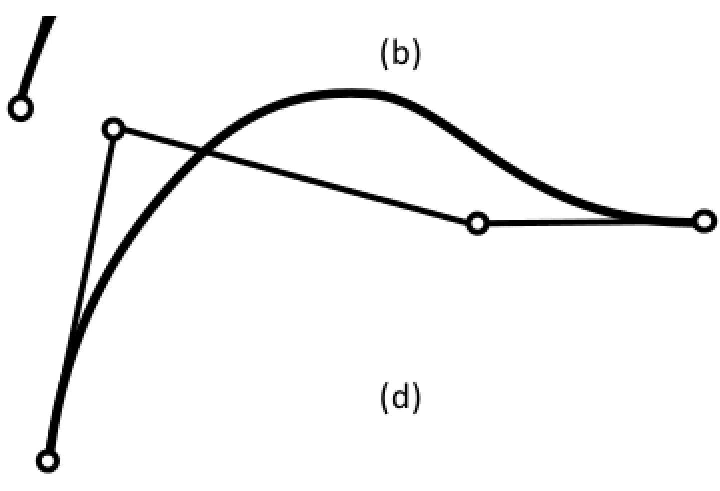
לא ייתכן שהתקבל מבזייר - נוגע רק ב1control point במקום ב2.

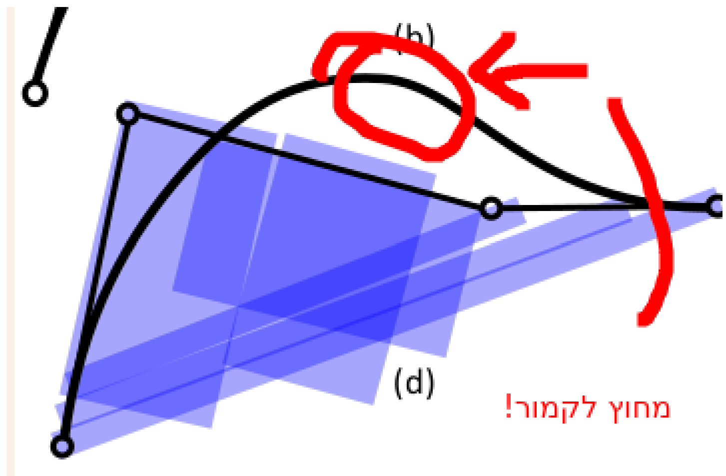


עקום (c)

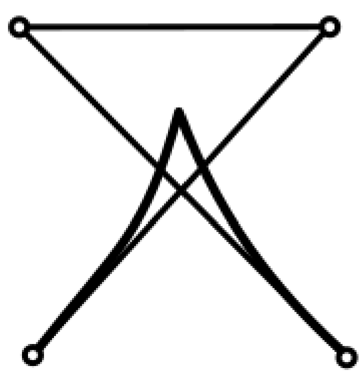
לא ייתכן שהתקבל מבזייר - הנגזרת של הcontrol point הימנית אינה מתאימה לנגזרת שמתוארת על ידי 2 הcontrol pointsהימניים.

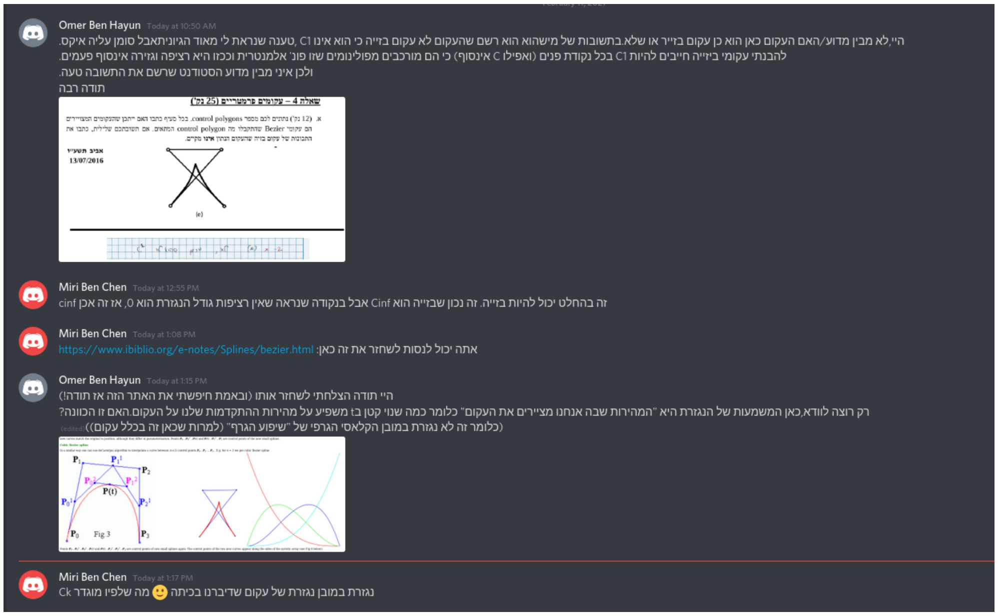
עקום (d) לא ייתכן שהתקבל מבזייר -העקום לא מוכל בconvex hull (a.k.a הקמור) של 4 הנקודות.



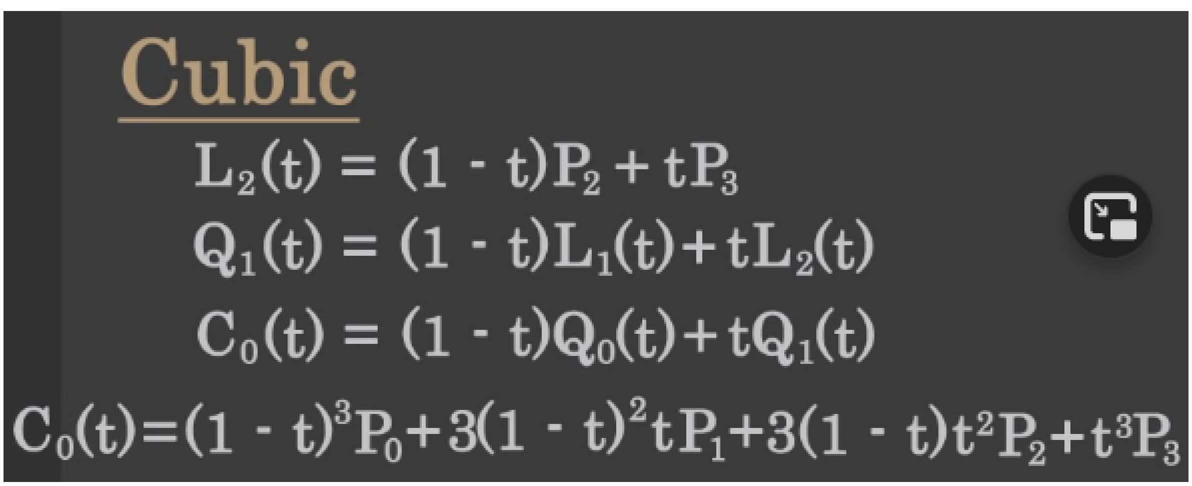


עקום (e) ייתכן שהתקבל מעקום ביזייר


(e)



קצת טריק מלוכלך כאן.
ננסה להצדיק את התשובה הזו.
מהסרטון



כלומר עקום קובי נתון על ידי

$$\mathbf{c}_0(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t) t^2 P_2 + t^3 P_3$$

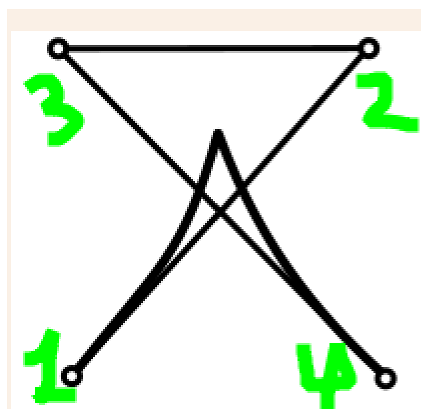
נגזור אותו

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{C}_0(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[(1-t)^3P_0+3(1-t)^2tP_1+3(1-t)t^2P_2+t^3P_3\right] \\
&= -3(1-t)^2P_0+3\frac{\partial}{\partial t}\left[(1-t)^2t\right]P_1+3\frac{\partial}{\partial t}\left[(1-t)t^2\right]P_2+3t^2P_3 \\
&= -3(1-t)^2P_0+3\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(1-2t+t^2\right)t\right]P_1+3\frac{\partial}{\partial t}\left[(t^2-t^3)\right]P_2+3t^2P_3 \\
&= -3(1-t)^2P_0+3\frac{\partial}{\partial t}\left[t-2t^2+t^3\right]P_1+3\frac{\partial}{\partial t}\left[(t^2-t^3)\right]P_2+3t^2P_3 \\
&= -3(1-t)^2P_0+3\left[1-4t+3t^2\right]P_1+3\left(2t-3t^2\right)P_2+3t^2P_3
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{C}_0(t) = -3(1-t)^2P_0+3\left[1-4t+3t^2\right]P_1+3\left(2t-3t^2\right)P_2+3t^2P_3$$

נבחר את הנקודות

$$P_0=(0,0)\,,P_1=(1,1)\,,P_2=(0,1)\,,P_2=(1,0)$$



(e)

נציב בנוסחא לנגזרת העקום

$$\mathbf{C}_0(t) = (1-t)^3P_0+3(1-t)^2tP_1+3(1-t)t^2P_2+t^3P_3$$

מסמנטריה הנקודה הבעייתית היא ב$t=0.5$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{C}_0(t=0.5) &= -3(1-0.5)^2P_0+3\left[1-4\cdot 0.5+3\cdot 0.25\right]P_1+3\left(2\cdot 0.5-3\cdot 0.25\right)P_2+3\cdot 0.25\cdot P_3 \\
&\overbrace{=}^{P_0=(0,0)} 3\left[1-4\cdot 0.5+3\cdot 0.25\right]P_1+3\left(2\cdot 0.5-3\cdot 0.25\right)P_2+3\cdot 0.25\cdot P_3 \\
&= -0.75\cdot P_1+0.75P_2+0.75\cdot P_3 \\
&= -0.75\cdot(1,1)+0.75\,(0,1)+0.75\cdot(1,0) \\
&= (0,0)
\end{aligned}
$$

כלומר הנגזרת שווה אפס ולכן בנקודה הנ"ל אינה בעייתית.(וכל העקום הוא C^∞)

סעיף ב

תשובה מהאינטואציה: עקום בייזיר עובר בוודאות בקודת ההתחלה שלו ובנקודת הסיום שלו.

ולכן על מנת לקבל רציפות C^0 עלינו לדרוש כי $P_2 = Q_0$ כלומר נקודת הסיום של העקום הראשון תהווה את נקודת ההתחלה של העקום השני.

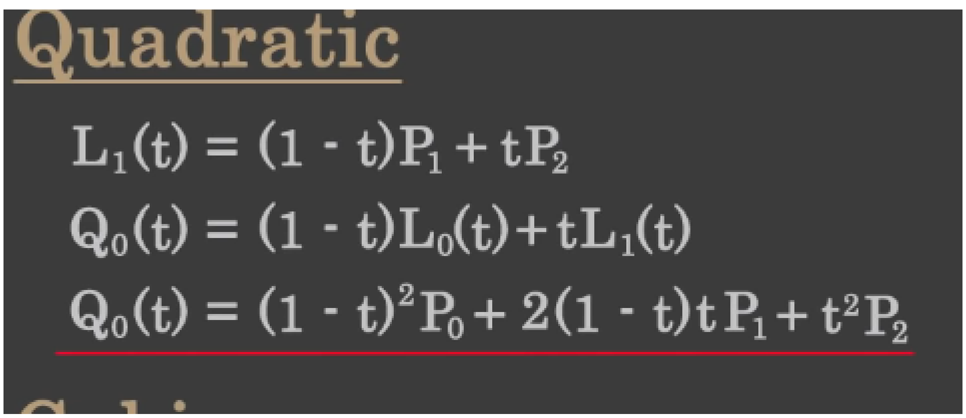
על מנת לדרוש רציפות C^1 עלינו לוודא ש:

- ש$P_2 = Q_0$.
- שמתקיים $P_2 = \frac{P_1+Q_1}{2}$. (כלומר במילים של בני אדם- P_2נמצאת בדיוק באמצע הדרך בין P_1 ל Q_1).

ואז תהיה רציפות C^1 בין שני העקומים.

חישוב מפורש.

הזה הנחמד הסרטון לפי נובע כי



כלומר

$$P(t) = (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2 P_2$$

$$Q(t) = (1-t)^2 Q_0 + 2(1-t)tQ_1 + t^2 Q_2$$

על מנת לדרוש C^0 נדרוש

$$P(1) = Q(0)$$

כלומר

$$P(1) = \cancel{(1-1)^2 P_0 + 2(1-1)\cdot 1 \cdot P_1} + 1^2 P_2 = P_2$$

$$Q(0) = (1-0)^2 Q_0 + \cancel{2(1-0)\cdot 0 \cdot Q_1} + \cancel{0^2 Q_2} = Q_0$$

כלומר

$$Q_0 = P_2$$

(בדיוק כמו שהסברנו קודם).

על מנת לדרוש C^1 נדרוש

$$P(1) = Q(0)$$

וגם

$$P'(1) = Q'(0)$$

מהדרישה $P(1) = Q(0)$ נובע כי $Q_0 = P_2$.
נגזור על מנת למצוא את הדרישה השניה:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}P(t) &= \frac{d}{dt}\left[(1-t)^2 P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2 P_2\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left[\left[1-2t+t^2\right]P_0 + 2\left[t-t^2\right]P_1 + t^2 P_2\right] \\
&= [0-2+2t]P_0 + 2[1-2t]P_1 + 2tP_2 \\
&= 2(t-1)P_0 + 2(1-2t)P_1 + 2tP_2
\end{aligned}$$

באופן דומה:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}Q(t) &= \dots \\
&= 2(t-1)Q_0 + 2(1-2t)Q_1 + 2tQ_2
\end{aligned}$$

נדרוש

$$\left[\frac{d}{dt}P(t)\right]_{t=1} = \left[\frac{d}{dt}Q(t)\right]_{t=0}$$

הנ"ל מתקיים אמ"מ:

$$
\begin{aligned}
& \left[\frac{d}{dt}P\left(t\right)\right]_{t=1} = \left[\frac{d}{dt}Q\left(t\right)\right]_{t=0} \\
\iff & \left[2\left(t-1\right)P_0 + 2\left(1-2t\right)P_1 + 2tP_2\right]_{t=1} = \left[2\left(t-1\right)Q_0 + 2\left(1-2t\right)Q_1 + 2tQ_2\right]_{t=0} \\
\iff & \left[\left(t-1\right)P_0 + \left(1-2t\right)P_1 + tP_2\right]_{t=1} = \left[\left(t-1\right)Q_0 + \left(1-2t\right)Q_1 + tQ_2\right]_{t=0} \\
\iff & -P_1 + P_2 = -Q_0 + Q_1 \\
\iff & P_2 + Q_0 = Q_1 + P_1
\end{aligned}
$$

$$
\overbrace{\iff}^{\substack{\text{already know we} \\ Q_0 = P_2}} \qquad 2P_2 = Q_1 + P_1
$$

$$
\boxed{P_2 = \frac{Q_1 + P_1}{2}}
$$

כלומר התנאים הם:

C^0	$Q_0 = P_2$
C^1	$Q_0 = P_2 \quad \text{and} \quad P_2 = \frac{Q_1+P_1}{2}$

סעיף ג

אז אחרי שראיתי את הסרטון ממקודם יותר קל לגשת לשאל הזו.
צריך לבטא את העקום במונחים של e הנתונה.

- $e\left(P_0, P_1, t\right)$ אינטרפולציה של הקו שמחבר בין P_0 ל P_1.
- $e\left(P_1, P_2, t\right)$ אינטרפולציה של הקו שמחבר בין P_1 ל P_2.
- עקום ביזייה $P\left(t\right)$ הוא למעשה אינטרפולציה בין שני הקווים הללו: כלומר

$$
\boxed{\forall t \in [0,1] : P\left(t\right) = e\left(e\left(P_0, P_1, t\right), e\left(P_1, P_2, t\right), t\right)}
$$

בדיקת שפיות לתשובה של על הסעיף הזה. אנו יודעים הרי כי

$$
\forall x, y \in \mathbb{R}^n : e\left(x, y, t\right) = tx + \left(1-t\right)y
$$

ולכן

$$
e\left(P_0, P_1, t\right) = tP_0 + \left(1-t\right)P_1
$$

$$
e\left(P_1, P_2, t\right) = tP_1 + \left(1-t\right)P_2
$$

$$
\begin{aligned}
\forall t \in [0,1] : P(t) &= e\left(e\left(P_0, P_1, t\right), e\left(P_1, P_2, t\right), t\right) \\
&= te\left(P_0, P_1, t\right) + (1-t)\, e\left(P_1, P_2, t\right) \\
&= t\left(tP_0 + (1-t)\, P_1\right) + (1-t)\left(P_1 + (1-t)\, P_2\right) \\
&= t^2 P_0 + t\,(1-t)\, P_1 + (1-t)\, P_1 + (1-t)^2\, P_2 \\
&= t^2 P_0 + 2\,(1-t)\, P_1 + (1-t)^2\, P_2
\end{aligned}
$$

וזה אכן זהה לנוסחא מהסרטון (עד כדי שנוי שם ל P_2, P_1) :