הטכניון – הפקולטה למדעי המחשב **חורף תשע״ב**
גרפיקה ממוחשבת – 234325 **10/2/2012**

מרצה: פרופ׳ חיים גוטסמן
מתרגל: רועי פורן

מבחן סיום

שם: ____________________________

מס׳ סטודנט: ______________________

הנחיות:

1. בבחינה שלפניכם 7 דפים כולל דף זה. בדקו זאת.
2. **עליכם לענות על כל 4 השאלות.**
3. כתבו בקצרה. כל המאריך גורע!
4. משך הבחינה: **180 דקות**
5. יש לכתוב את כל התשובות בטופס הבחינה.
6. יש להגיש את טופס הבחינה.
7. כל חומר עזר (לא אלקטרוני) מותר.

בהצלחה

שאלה	נקודות	
1	25	
2	25	
3	25	
4	25	
סה״כ	100	

שאלה 1 (25 נק')

ניתן להגדיר פונקציה מעריכית של קווטרניונים (quaternion) בצורה הבאה:

$$q = (s, v)$$

$$\exp(q) = \exp(s)\left(\cos\|v\|, \frac{v}{\|v\|}\sin\|v\|\right) \qquad (*)$$

א. (8 נק.) הוכח ש-$(*)$ מתלכד עם ההגדרות המקובלות עבור המקרים הפרטיים ש-q הוא מספר ממשי או מספר מרוכב. תוכל להעזר בנוסחת אוילר עבור מספר מרוכבים:

$$\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

ב. (9 נק.) הוכח: אם נגדיר את הוקטור התלת-מימדי n והסקלר θ כך ש-

$$s = \|q\|\cos\theta \quad \text{וגם} \quad v = n\|v\| = v\|q\|\sin\theta$$

אזי מתקיים

$$q = \|q\|\exp(n\theta)$$

ג. (8 נק.) הוכח שאם q הוא וקטור תלת-מימדי v שאורכו $\theta/2$, אזי $\exp q$ הוא אופרטור הסיבוב סביב v בזוית θ. הראה כמסקנה שאופרטור הסיבוב בזוית 0 סביב כיוון כשלהוא הוא אופרטור הזהות.

פתרון:

א.

$$\exp(c) = \exp(c)[\cos 0, (0,0,0)] = \exp(c)$$

$$\exp(z) = \exp(\alpha + i\beta) = \exp(\alpha)\exp(i\beta) = \exp(\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$$
$$= \exp(\alpha)[\cos\beta, (\sin\beta, 0, 0)] = \exp(\alpha)[\cos|\beta|, (\text{sgn}(\beta)\sin|\beta|, 0, 0)]$$
$$= \exp(\alpha)[\cos|\beta|, (\frac{\beta}{|\beta|}\sin|\beta|, 0, 0)]$$

ב.

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} \to \|\boldsymbol{n}\| = 1, \|\boldsymbol{n}\theta\| = \theta$$
$$\|\boldsymbol{q}\|\exp(\boldsymbol{n}\theta) = \|\boldsymbol{q}\|\exp(0)[\cos\|\boldsymbol{n}\theta\|, \boldsymbol{n}\sin\|\boldsymbol{n}\theta\|] = \|\boldsymbol{q}\|[\cos\theta, \boldsymbol{n}\sin\theta] = (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{q}$$

ג. כאשר q הוא וקטור v שאורכו θ/2, אם נסמן ב-n וקטור יחידה בכיוון v:

$$\exp(\boldsymbol{q}) = \exp([0, \boldsymbol{v}]) = \exp(0)[\cos\tfrac{\theta}{2}, \boldsymbol{n}\sin\tfrac{\theta}{2}]$$

ולכן exp(q) הוא אטפרטור הסיבוב בזוית θ סביב הציר דרך v.

שאלה 2 (25 נק')

נתונה סדרת נקודות $p_i = (x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ במישור, וסדרה מתאימה של וקטורי נגזרת t_i עבור נקודות אלו. כפי שנלמד בקורס, הספליין של הרמיט (Hermite) שמתאים לקלט זה הוא עקום פרמטרי פולינומיאלי קובי למקוטעין (cubic piecewise polynomial) שעובר דרך כל הנקודות p_i וכך שנגזרתו ב-p_i הוא t_i.

להלן ההגדרה של ספליין קטמול-רום (Catmull-Rom) עבור סדרת נקודות p_i במישור: עבור p_i פנימי (דהיינו $i = 2, \dots, n-1$) נגדיר $t_i = (p_{i+1} - p_{i-1})/2$. כעת נשתמש בבנייה של הספליין של הרמיט עבור הסדרות p_i ו-t_i ע"מ לקבל עקומה בין הנקודות p_2 ו-p_{n-1}

הכללה של ספליין קטמול-רום היא ספליין קרדינלי (cardinal). בבנייה זו נגדיר $t_i = c(p_{i+1} - p_{i-1})/2$ עבור קבוע c בתחום $[0,1]$.

א. (12 נק.) מדוע הבחירה עבור t_i של ספליין קטמול-רום היא טבעית? מהם היתרונות והחסרונות של השימוש בספליין קטמול-רום לבניית אינטרפולנט דרך סדרת נקודות במישור לעומת השימוש בבנייה של ספליין קובי טבעי (שגם היא נלמדה בקורס)?

ב. (13 נק.) מה האפקט של שינוי הפרמטר c בהגדרת הספליין הקרדינלי? בפרט, כיצד תראה התוצאה עבור ערך c מאוד קרוב ל-0? רמז: כיצד יראה ספליין הרמיט עבור שתי נקודות p_1 ו-p_2 כאשר $\|t_1\|, \|t_2\| \to 0$?

פתרון:

א. הבחירה טבעית כי הנגזרת בנקודה תהיה השיפוע שבין שני הנקודות הסמוכות לה.
יתרונות: ספליין ק-ר הוא מקומי וספלין קובי טבעי הוא גלובלי.
חסרון: ספליין ק-ר הוא בעל רציפות C1 בלבד לעומת רציפות C2 של ספליין קובי טבעי.

ב. האפקט של הקטנת c ל-0 הוא ל"מתוח" את הספליין בין הנקודות, עד שהוא הופך לקו שבור (polyline).
ההוכחה היא שניתן לראות בנוסחאות של ספליין הרמיט בין שתי נקודות שאם $\|t_1\|, \|t_2\| \to 0$ אזי התוצאה היא אינטרפולנט ליניארי בין שתי הנקודות (משקולות r ו- 1-r).

שאלה 3 (25 נק')

א. (9 נק.) יהיו T_1 ו-T_2 שני משולשים לא מנוונים ב-$\mathbb{R}^3$, אשר קודקודיהם הם (p_1, p_2, p_3) ו-(q_1, q_2, q_3). הראו כי קיימת טרנספומציה אפינית A המעבירה את T_1 ל-T_2. (כלומר המקיימת $Ap_i = q_i$). האם הטרנפורמציה יחידה? נמק. <u>שימו לב:</u> אין צורך לכתוב את A באופן מפורש.

ב. (8 נק.) מיקמו בסצינה שלושה כדורים זהים בייצוג פוליגונלי, אשר מרכזיהם בקודקודי T_1. כעת, הפעילו על הכדורים את הטרנפורמציה A. תארו מה התרחש בסצינה. האם תשובתך תשתנה אם נוסיף את ההנחה שהמשולשים חופפים?

ג. (8 נק.) תהי p נקודה במישור המשולש T_1 אשר הקואורדינטות הבאריצנטריות שלה ביחס ל-T_1 הן (α,β,γ). הראו כי הנקודה Ap תהיה על מישור המשולש T_2 והקואורדינטות הבאריצנטריות שלה ביחס ל-T_2 יהיו (α,β,γ).

פתרון:

א. טענה: אפשר להראות שניתן להעביר כל משולש למשולש קנוני שקודקודיו $(0,0,0),(0,1,0),(1,0,0)$. נראה זאת על המשולש T_1. ראשית, בלי הגבלת הכלליות, נזיז את המשולש כך ש-p_1 יעבור ל-$(0,0,0)$. לאחר מכן נסובב את המשולש כך שיעבור למישור xy, ובנוסף, נסובב אותו ביחס לציר z כך ש-p_2 תהיה על ציר x. נבצע טרנספורמצית shear כך p_1,p_2 יישארו במקום ו-p_3 תעבור להיות על ציר y. כל מה שנותר לעשות הוא scale בציר x ובציר y כך ש-p_2 תעבור ל-$(1,0,0)$ ו-p_3 תעבור ל-$(0,1,0)$. את כל הפעולות שעשינו ניתן לרשום בעזרת מטריצות אפיניות <u>הפיכות</u>, ומכפלתן תעביר את T_1 למשולש הקנוני.
יהיו A_1,A_2 הטרנספורמציות שמעבירות את T_1,T_2 למשולש הקנוני. אז $T_2^{-1}T_1$ מעבירה את T_1 ל-T_2. המטריצה היא לא יחידה כי יש עוד דרגות חופש במרחב שלא מכיל את מישור המשולש.

ב. מרכזי הכדורים יעברו לקודקודי T_2, אבל הכדורים לא ישארו בהכרח כדורים וזה נכון גם אם המשולשים חופפים.

ג.

$$\mathrm{Ap} = \mathrm{A}(\alpha \mathrm{p}_1 + \beta \mathrm{p}_2 + \gamma \mathrm{p}_3) = \alpha \mathrm{Ap}_1 + \beta \mathrm{Ap}_2 + \gamma \mathrm{Ap}_3 = \alpha \mathrm{q}_1 + \beta \mathrm{q}_2 + \gamma \mathrm{q}_3$$

שאלה 4 (25 נק')

נתונה הסצינה הבאה:

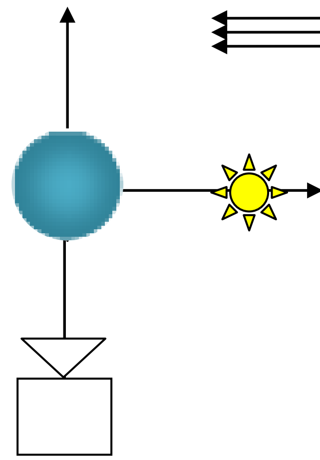
1. מקור אור נקודתי הנמצא בנקודה $(2,0,0)$.
2. מקור אור מקבילי המכוון בכיוון $(-1,0,0)$
3. כדור בעל רדיוס 1 הנמצא בראשית הצירים.
4. מצלמה הנמצאת על ציר בנקודה $(0,0,2)$ ומכוונת בכיוון $-z$.

הצבעים של מקורות האור והכדור זהים. אין עוד אף תאורה נוספת בסצינה, והרקע הוא שחור.

א. (5 נק.) צייר סקיצה של הסצינה.
ב. (7 נק.) בהנחה שהכדור דיפוסיבי לחלוטין, היכן על הכדור נמצאת הנקודה המוארת ביותר ביחס לכל אחד ממקורות האור? כיצד מיקום המצלמה משפיע על תשובתך?
ג. (7 נק.) עבור איזה מקור אור יתקבל בתמונה מהמצלמה יותר פיקסלים שחורים? נמק!
ד. (6 נק.) ענה על השאלה מסעיף ב' בהנחה שהכדור ספקולרי לחלוטין. התייחס גם למקרה בו המצלמה אורתוגרפית וגם למקרה בו היא פרספקטיבית.
ה. צבעי התמונה לאחר רינדור, נראים שונה כאשר היא מוצגת על גבי שני מסכים שונים. הסבר מדוע.

פתרון:

א.



ב. בשני המקרים הנקודה $(1,0,0)$ היא בעלת עוצמת ההארה הגדולה ביותר, מכיוון שבה משטח הכדור מאונך לכיוון האור.

ג. מקור האור המקבילי יאיר בדיוק חצי מהכדור, והמקור הנקודתי יאיר פחות מכך. לכן עבור המקור הנקודתי נקבל יותר פיקסלים שחורים ברינדור.

ד. ההארה תהיה מקסימלית כאשר קרן ממקור האור תוחזר ישירות למצלמה.

1. מצלמה אורתוגרפית, מקור מקבילי: משיקולי סימטריה הנקודה היא $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.
2. מצלמה אורתוגרפית, מקור נקודתי: משיקולי סימטריה, ה-y של הנקודה צריך להיות 0. נסמן את הנקודה על הכדור ב-$(x,z) = (\cos\theta, \sin\theta)$. נקבל (לפי הסימונים של משוואת התאורה)

$$\Rightarrow \mathrm{R} = 2\left(\hat{\mathrm{L}}\cdot\hat{\mathrm{N}}\right)\hat{\mathrm{N}} - \hat{\mathrm{L}} = \frac{1}{\|\mathrm{L}\|}(2(\mathrm{L}\cdot\mathrm{N})\mathrm{N} - \mathrm{L})$$

$$\begin{aligned}
2(\mathrm{L}\cdot\mathrm{N})\mathrm{N} - \mathrm{L} &= 2\big((\cos\theta,\sin\theta-2)\cdot(\cos\theta,\sin\theta)\big)(\cos\theta,\sin\theta) - (\cos\theta,\sin\theta-2)\\
&= 2(\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin\theta)(\cos\theta,\sin\theta)-(\cos\theta,\sin\theta-2)\\
&= 2(1-2\sin\theta)(\cos\theta,\sin\theta)-(\cos\theta,\sin\theta-2)\\
&= (2(1-2\sin\theta)\cos\theta-\cos\theta, 2(1-2\sin\theta)\sin\theta-\sin\theta+2)\\
&= \big((1-4\sin\theta)\cos\theta, (1-4\sin\theta)\sin\theta+2\big)
\end{aligned}$$

תאורה מקסימלית תתקבל כאשר R יהיה בכיוון z בלבד, כלומר כאשר

$$(1-4\sin\theta)\cos\theta = 0 \Rightarrow 1-4\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

מצלמה פרספקטיבית מקור מקבילי: זהה למקרה הקודם

מצלמה פרספקטיבית, מקור נקודתי: זהה למקרה הראשון.