

מבחן במקצוע גרפיקה ממוחשבת

10 בפברואר 2021

תוכן העניינים

2	שאלה מספר 1
2	סעיף א
3	סעיף ב
8	סעיף ג - הערה : עוד לא מוכן
10	שאלה מספר 2
10	סעיף א
10	סעיף 1
10	סעיף 2
10	סעיף ב
10	סעיף 1
10	סעיף 2
11	סעיף ג
11	סעיף ד
12	שאלה מספר 3
12	סעיף א
12	סעיף ב
13	סעיף ג
14	סעיף ד
15	סעיף ה
15	סעיף 1
16	סעיף 2
17	שאלה מספר 4
17	סעיף א
20	סעיף ב
20	סעיף ג
21	סעיף 1
22	סעיף 2
22	סעיף 3

שאלה מספר 1

סעיף א

הקיסר נמצא ב- $x = 5$ מקביל למישור $y - z$.
מקור האור מקביל למישור $y - z$ ולכן נחפש מט' שמחלצת את הקור' $y - z$ של האוביקט. כלומר על כל נקודה לקיים:

$$\forall p = (p_x, p_y, p_z) \in \mathbb{R}^3 : Ap = v = (5, p_y, p_z)$$

הנקודה p מיוצגת בקור' הומוגניות ולכן

$$\forall p = (p_x, p_y, p_z, 1) \in \mathbb{R}^4 : Ap = v = (\tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \tilde{p}_z, \tilde{p}_w) \cong (5, p_y, p_z)$$

$$A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

כלומר

$$A \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_x \\ \tilde{p}_y \\ \tilde{p}_z \\ \tilde{p}_w \end{pmatrix}$$

וגם

$$\frac{\tilde{p}_x}{\tilde{p}_w} = 5, \frac{\tilde{p}_y}{\tilde{p}_w} = p_y, \frac{\tilde{p}_z}{\tilde{p}_w} = p_z$$

משלושת המשוואות האחרונות נובע כי

$$\tilde{p}_x = \tilde{p}_w 5, \tilde{p}_y = \tilde{p}_w p_y, \tilde{p}_z = \tilde{p}_w p_z$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{p}_x \\ \tilde{p}_y \\ \tilde{p}_z \\ \tilde{p}_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_w 5 \\ \tilde{p}_w p_y \\ \tilde{p}_w p_z \\ \tilde{p}_w \end{pmatrix} = \tilde{p}_w \begin{pmatrix} 5 \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

כלומר

$$A \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{p}_w \begin{pmatrix} 5 \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

מטריצה מתאימה אפשרית כזו היא:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נראה זאת:

$$\forall p \in \mathbb{R}^4 : A \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{\tilde{p}_w=1}{\cong} \begin{pmatrix} 5 \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

כלומר. התשובה היא:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

סעיף ב

שוב הקיר ב $x = 5$ ומקביל למישור $y - z$.

הפעם מקור האור הוא נקודתי וממוקם ב $(x = -2, y = 3, z = 1)$.

מניחים כי קור' x של הנקודה p היא בתחום $(-2, 5)$.

נפתור פרמטרית ולאחר מכן נציב.

הקיר ב $x = x_{\text{wall}}$ ומקביל למישור $y - z$.

הפעם מקור האור הוא נקודתי וממוקם ב $(x = x_{\text{light}}, y = y_{\text{light}}, z = z_{\text{light}})$ (מלשון *light*)

מניחים כי קור' x של הנקודה $p = (p_x, p_y, p_z)$ היא בתחום $(x_{\text{light}}, x_{\text{wall}})$.

תחילה נבין היכן הקרן תפגע בקיר.

נסמן $h = (h_x, h_y, h_z)$ בתור הנקודה בה תפגע קרן האור בקיר (מלשון *hit*).

• אנו יודעים כי הקיר ב x_{wall} ולכן אילוץ אחד שלנו יהיה $h_x = x_{\text{wall}}$.

• על מנת לחשב את h_y, h_z עלינו לבין את הווקטור של קרן האור. אנו יודעים כי ווקטור זה הוא:

$$d = p - l = (p_x - l_x, p_y - l_y, p_z - l_z)$$

• הווקטור הזה הוא הכיוון של האור. נרצה למצוא את הגודל המתאים שלו החל ממקור האור l עד לקיר. כלומר עלינו למצוא סקלר $\alpha \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים כי

$$l + \alpha d = h$$

- אנו לא יודעים את h אלא רק את האילוץ $h_x = x_{\text{wall}}$ ולכן מכאן נובע כי

$$l_x + \alpha d_x = h_x = x_{\text{wall}}$$

כלומר

$$l_x + \alpha d_x = x_{\text{wall}}$$

כלומר

$$\alpha = \frac{x_{\text{wall}} - l_x}{d_x}$$

כלומר

$$\alpha = \frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}$$

- כעת נוכל לחשב את h :

$$\begin{aligned} h &= l + \alpha d \\ &= l + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x} \right) d \\ &= l + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x} \right) (p - l) \\ &= \left(1 - \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x} \right) \right) l + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x} \right) p \\ &= \left(\frac{p_x - l_x}{p_x - l_x} - \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x} \right) \right) l + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x} \right) p \\ &= \left(\frac{\cancel{p_x} - \cancel{l_x} - x_{\text{wall}} + \cancel{l_x}}{p_x - l_x} \right) l + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x} \right) p \\ &= \left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x} \right) l + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x} \right) p \end{aligned}$$

- עכשיו כמשצאנו את h במפורש. נוכל למצוא את המט' המתאימה.

- נדרוש כי

$$Ap = h$$

כלומר

$$A \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_x \\ \tilde{p}_y \\ \tilde{p}_z \\ \tilde{p}_w \end{pmatrix} \cong h = \left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x} \right) l + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x} \right) p$$

כלומר המשוואות שנדרוש הם

$$\frac{\tilde{p}_x}{\tilde{p}_w} = h_x, \frac{\tilde{p}_y}{\tilde{p}_w} = h_y, \frac{\tilde{p}_z}{\tilde{p}_w} = h_z$$

כלומר המשוואות שנדרוש הם

$$\tilde{p}_x = \tilde{p}_w h_x, \tilde{p}_y = \tilde{p}_w h_y, \tilde{p}_z = \tilde{p}_w h_z$$

אנו יודעים כי $h_x = x_{\text{wall}}$ נציב ונקבל

$$\tilde{p}_x = \tilde{p}_w x_{\text{wall}}, \tilde{p}_y = \tilde{p}_w h_y, \tilde{p}_z = \tilde{p}_w h_z$$

אנו יודעים כי $h = \left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x} \right) l + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x} \right) p$ ולכן

$$h_y = \left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x} \right) l_y + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x} \right) p_y$$

$$h_z = \left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x} \right) l_z + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x} \right) p_z$$

ומכאן נובע המשוואות:

$$\tilde{p}_x = \tilde{p}_w x_{\text{wall}}, \tilde{p}_y = \tilde{p}_w \left(\left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x} \right) l_y + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x} \right) p_y \right), \tilde{p}_z = \tilde{p}_w \left(\left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x} \right) l_z + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x} \right) p_z \right)$$

• ולכן

$$A \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_x \\ \tilde{p}_y \\ \tilde{p}_z \\ \tilde{p}_w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{p}_w x_{\text{wall}} \\ \tilde{p}_w \left(\left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x} \right) l_y + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x} \right) p_y \right) \\ \tilde{p}_w \left(\left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x} \right) l_z + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x} \right) p_z \right) \\ \tilde{p}_w \end{pmatrix}$$

$$= \tilde{p}_w \begin{pmatrix} x_{\text{wall}} \\ \left(\left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x} \right) l_y + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x} \right) p_y \right) \\ \left(\left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x} \right) l_z + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x} \right) p_z \right) \\ 1 \end{pmatrix}$$

• נחפש מט' מתאימה שמקיימת

$$A \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{p}_w \begin{pmatrix} x_{\text{wall}} \\ \left(\left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x} \right) l_y + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x} \right) p_y \right) \\ \left(\left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x} \right) l_z + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x} \right) p_z \right) \\ 1 \end{pmatrix}$$

נתובנן במט'

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_{\text{wall}} \\ 0 & \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) & 0 & \left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l_y \\ 0 & 0 & \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) & \left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וניוכח שהיא מקיימ את הדרוש עבור $\tilde{p}_w = 1$:

$$A \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_{\text{wall}} \\ 0 & \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) & 0 & \left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l_y \\ 0 & 0 & \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) & \left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\tilde{p}_w}_1 \begin{pmatrix} \left(\left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l_y + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) p_y\right) \\ \left(\left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l_z + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) p_z\right) \\ 1 \end{pmatrix} \cong h$$

כלומר הפתרון הוא הפרמטרי הוא:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_{\text{wall}} \\ 0 & \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) & 0 & \left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l_y \\ 0 & 0 & \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) & \left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נצל את התכונות של קור הומוגניות על מנת להגיע למט' A שאינה תלויה ב p (שזה הנעלם שאנו לא יודעים).

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_{\text{wall}} \\ 0 & \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) & 0 & \left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l_y \\ 0 & 0 & \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) & \left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (p_x - l_x) \cdot x_{\text{wall}} \\ 0 & x_{\text{wall}} - l_x & 0 & (p_x - x_{\text{wall}}) l_y \\ 0 & 0 & x_{\text{wall}} - l_x & (p_x - x_{\text{wall}}) l_z \\ 0 & 0 & 0 & p_x - l_x \end{pmatrix} \\ &\cong \begin{pmatrix} x_{\text{wall}} & 0 & 0 & -l_x x_{\text{wall}} \\ l_y & x_{\text{wall}} - l_x & 0 & -x_{\text{wall}} l_y \\ l_z & 0 & x_{\text{wall}} - l_x & -x_{\text{wall}} l_z \\ 1 & 0 & 0 & -l_x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כלומר

$$A = \begin{pmatrix} x_{\text{wall}} & 0 & 0 & -l_x x_{\text{wall}} \\ l_y & x_{\text{wall}} - l_x & 0 & -x_{\text{wall}} l_y \\ l_z & 0 & x_{\text{wall}} - l_x & -x_{\text{wall}} l_z \\ 1 & 0 & 0 & -l_x \end{pmatrix}$$

נציב

$$\begin{aligned}
Ap &= \begin{pmatrix} x_{\text{wall}} & 0 & 0 & -l_x x_{\text{wall}} \\ l_y & x_{\text{wall}} - l_x & 0 & -x_{\text{wall}} l_y \\ l_z & 0 & x_{\text{wall}} - l_x & -x_{\text{wall}} l_z \\ 1 & 0 & 0 & -l_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p_x x_{\text{wall}} - l_x x_{\text{wall}} \\ p_x l_y + p_y (x_{\text{wall}} - l_x) - x_{\text{wall}} l_y \\ p_x l_z + p_z (x_{\text{wall}} - l_x) - x_{\text{wall}} l_z \\ p_x - l_x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_{\text{wall}} (p_x - l_x) \\ p_y (x_{\text{wall}} - l_x) + p_x l_y - x_{\text{wall}} l_y \\ p_z (x_{\text{wall}} - l_x) + p_x l_z - x_{\text{wall}} l_z \\ p_x - l_x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_{\text{wall}} (p_x - l_x) \\ p_y (x_{\text{wall}} - l_x) + (p_x - x_{\text{wall}}) l_y \\ p_z (x_{\text{wall}} - l_x) + (p_x - x_{\text{wall}}) l_z \\ p_x - l_x \end{pmatrix} \\
&\cong \begin{pmatrix} x_{\text{wall}} \\ p_y \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x} \right) + \left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x} \right) l_y \\ p_z \frac{(x_{\text{wall}} - l_x)}{p_x - l_x} + \left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x} \right) l_z \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_{\text{wall}} \\ \left(\left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x} \right) l_y + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x} \right) p_y \right) \\ \left(\left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x} \right) l_z + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x} \right) p_z \right) \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= h
\end{aligned}$$

נציב מספרים $x_{\text{wall}} = 5, l = (-2, 3, 1)$ ונקבל

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} x_{\text{wall}} & 0 & 0 & -l_x x_{\text{wall}} \\ l_y & x_{\text{wall}} - l_x & 0 & -x_{\text{wall}} l_y \\ l_z & 0 & x_{\text{wall}} - l_x & -x_{\text{wall}} l_z \\ 1 & 0 & 0 & -l_x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 10 \\ 3 & 7 & 0 & -15 \\ 1 & 0 & 7 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

כלומר

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 10 \\ 3 & 7 & 0 & -15 \\ 1 & 0 & 7 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

סעיף ג - הערה : עוד לא מוכן

הערה 1. שימו לב שאין מניעה שקווים יתלכדו בסעיף זה ובסעיף 1. שני קווים מקבילים נתונים על ידי

$$\begin{aligned} l_1(t) &= p + tv \\ l_2(t) &= m + tv \end{aligned}$$

נסמן

$$p_1 = (p_x, p_y, p_z), p_2 = (m_x, m_y, m_z), v = (v_x, v_y, v_z)$$

לכן

$$\begin{aligned} l_1(t) &= p + tv = (p_x + tv_x, p_y + tv_y, p_z + tv_z) \\ l_2(t) &= m + tv = (m_x + tv_x, m_y + tv_y, m_z + tv_z) \end{aligned}$$

עבור סעיף א': קווים שיהיו מקבילים לפני ההטלה יישארו מקבילים גם אחריה. הטנס A היא:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$A[l_1(t)] = (5, p_y + tv_y, p_z + tv_z)$$

$$A[l_2(t)] = (5, m_y + tv_y, m_z + tv_z)$$

נסמן

$$\tilde{p} = (5, p_y, p_z), \tilde{m} = (5, m_y, m_z), \tilde{v} = (0, v_y, v_z)$$

ונקבל כי

$$\widetilde{l_1(t)} = A[l_1(t)] = \tilde{p} + t\tilde{v}$$

$$\widetilde{l_2(t)} = A[l_2(t)] = \tilde{m} + t\tilde{v}$$

ולכן מכאן נובע כי קווים שיהיו מקבילים לפני ההטלה יישארו מקבילים גם אחריה.

עבור סעיף ב':

קווים שיהיו מקבילים לפני ההטלה יישארו מקבילים גם אחריה.
הטרנס A היא:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -25 \\ 3 & 7 & 0 & -15 \\ 1 & 0 & 7 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A[l_1(t)] &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -25 \\ 3 & 7 & 0 & -15 \\ 1 & 0 & 7 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x + tv_x \\ p_y + tv_y \\ p_z + tv_z \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -25 \\ 3 & 7 & 0 & -15 \\ 1 & 0 & 7 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x + tv_x \\ p_y + tv_y \\ p_z + tv_z \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5(p_x + tv_x) - 25 \\ 3(p_x + tv_x) + 7(p_y + tv_y) - 15 \\ (p_x + tv_x) + 7(p_z + tv_z) - 5 \\ (p_x + tv_x) + 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5(p_x + tv_x + 2 - 2) - 25 \\ 3(p_x + tv_x + 2 - 2) + 7(p_y + tv_y) - 15 \\ (p_x + tv_x + 2 - 2) + 7(p_z + tv_z) - 5 \\ (p_x + tv_x) + 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5(p_x + tv_x + 2) - 35 \\ 3(p_x + tv_x + 2) + 7(p_y + tv_y) - 21 \\ (p_x + tv_x + 2) + 7(p_z + tv_z) - 7 \\ (p_x + tv_x) + 2 \end{pmatrix} \\ &\cong \begin{pmatrix} 5 - \frac{35}{(p_x + tv_x + 2)} \\ 3 + 7(p_y + tv_y) - \frac{21}{(p_x + tv_x + 2)} \\ 1 + 7(p_z + tv_z) - \frac{7}{(p_x + tv_x + 2)} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A[l_2(t)] = (5, m_y + tv_y, m_z + tv_z)$$

פרסמתי שאלה בדיקורד על סעיף ב'

שאלה מספר 2

סעיף א

סעיף 1

נתאר את הפעולה עם התייחסות לכל אחד מהחלקים

מקורות תאורה:

יש מקום תאורה אחד בודד של אור כיווני שווקטור הכיוון שלו הוא $(0, 1, 0)$.

שיטת shading

כמו שניתן לראות ה-*vshader* מעביר את ה-*fnormal* - כלומר את הנורמל שרלוונטי לפאה. ולכן שיטת ה shading היא flat shading

illumination

נבחין כי ה illumination כאן נולד מ2 גורמים .

- הגורם הקבוע (ambient/emmission) (כאן ההגדרות יכולות להתלכד) שערכו $\underbrace{(1, 1, 0)}_{\text{color}}$ $(0.5, 0.5, 0.5)$

- הגורם של הdiffuse (דוט פרודקט בין הנורמל לבין כיוון התאורה) כפול הצבע של האור $(1, 1, 0)$.

סעיף 2

```
//code of vshader_new.glsl
in vec3 position;
in vec3 normal; #the user should provide here the face normal just as before
out vec4 fColor_in;

void main(){
    vec3 dir = vec3(0,1,0);
    vec3 color = vec3(1,1,0);
    fColor_in = vec4(.5*dot(normal,dir)*color,1.0);
    gl_Position = position;
}
```

סעיף ב

סעיף 1

מקורות תאורה:

יש מקום תאורה אחד בודד של אור נקודתי שממוקם בחלל במיקום $(1, 5, 3)$.
(ניתן להבין זאת מ הווקטור $lDir$ שתלוי במיקום האובייקט)

שיטת shading

כמו שניתן לראות ה-*vshader* מעביר את ה-*fnormal* - כלומר את הנורמל שרלוונטי לפאה. ולכן שיטת ה shading היא flat shading.

(משתמע משם המשתנה שבחרו לנורמל $fNormal$ שרומז לאופן השימוש והקלט לשיידרים)

illumination

כאן האילומיניישן הוא מסוג specular מכיוון שאנו מעבירים את מיקום הצופה ב- $vDir$.
השיינינס (הברקה) היא $\alpha = 0.5$.

סעיף 2

לאניתן לכתוב shader vertex חדש כמובקש.
הסבר:

בין ה-vertex shader ל-fragment shader מתבצעת אינטרפולציה לקווים לפי חישוב של קור' בריצנטריות. החישוב של הצבע הסופי ב-fragment shader שנתון לפנינו מושפע בין היתר מהגורמים $vdir, ldir$ שעוברים אינטרפולציה לפי הקור' הבריצנטריות בין ה-vertex shader ל-fragment shader.

לכן את האינטרפולציה הזו לא נוכל להשתמש ב-vertex shader מכיוון שהוא מחושב רק פר וורטקס.

מכאן נובע כי לא ניתן לכתוב vertex shader חדש כמובקש.

סעיף ג

המטרה של mapping normal היא לייצר אשליית עומק של טקסטורה מסוימת על ידי map normal. תמונה שמייצגת את הנורמלים שאמן מתכוון שיהיו עבור כל קור' טקסטורה.

יחד עם map texture אנו מקבלים גם map normal שהוא תמונה בשלושה ערוצי צבע R, G, B שכלערוץ כזה מייצג את הכיוון של הנורמל בכיוונים x, y, z בהתאמה (עד כדי מרכז ונרמול לפי $out = 2 \cdot (in - 0.5)$). בד"כ תמונות map normal הם בגוון כחול מכיוון שרוב הנורמלים בתמונה ממוצעת פונים החוצה מהדף ולכן הערוץ הכחול בהם ייתפוס בד"כ גודל משמעותי.

על מנת לממש mapping normal עלינו לדגום יחד עם הצבע של הט'סטורה את הנורמל שנובע מתוך התמונה של הנורמלים, לחשב את $tangent, tangent\ bit$ (שיחד שלושתם מהווים בסיס ל- \mathbb{R}^3) ולנצל תוצאה זו על מנת למצוא נורמל שייאפשר את אשליית העומק שדיברנו עליה בעבר.

לשיטה זו יש עלות זכרון לא גבוהה ומכאן ייתרונה (סה"כ עוד תמונה יחד עם התמונה של הטקסטורה - פי 2 זכרון - לא משמעותי - אותו סדר גודל של צריכת זכרון).

סעיף ד

לא ניתן, על מנת לממש mapping normal, לעינו לדגום טקסטורה ולדגום את הנורמל מה-map normal ב-fragment shader (כך ניתן לבצע אינטרפולציה ולבחור את הטקסטורה והנורמל המתאימים על כל נקודה שעל כל פאה במודל).

אבל בסעיף א' ה-fshader_new ממומש כבר (באופן מנוון מאוד) ולכן לא נוכל לממש mapping normal.

שאלה מספר 3

סעיף א

אם v הוא ציר הסיבוב של R אז v יהווה ו"ע של המט' R עם ע"ע 1. בכל מקרה אחר R יסובב את v . כלומר

$$Rv = v \iff R \text{ axis the around matrix rotation is } v$$

הערה 2. אם $R = I$ (מט' היחידה) לדוגמא על ידי סיבוב ב $2\pi \text{ rad}$, אז הנ"ל יתקיים עבור כל v .

סעיף ב

אכן ייתכן כי q_u מייצג סיבוב בתלת מימד.

התנאי על u על מנת שזה יתקיים הוא ש u יהיה ווקטור יחידה ב \mathbb{R}^3 (כלומר $\|u\| = 1$) $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$ (מה שייגרם ל q_u להיות קוונטריון יחידה). במקרה הזה ציר הסיבוב הוא u וזווית הסיבוב היא 180 deg (נזכור כי 180 deg שקול ל -180 deg מטעמי סמטריה).

הערה 3. הערות להמחשה #1:

הא $n \in \mathbb{R}^3$ כיוון יחידה כלשהוא אזי $q = [\cos(\frac{\theta}{2}), n \sin(\frac{\theta}{2})]$ מאפשר לייצג סיבוב של p בציר n על ידי זווית θ . על מנת ליייתג את הסיבוב נזכר בשקף הבא מההרצאות:

Rotating with Quaternions

• Rotation by θ around unit direction n may be represented by the unit quaternion

$$q = [\cos \frac{\theta}{2}, n \sin \frac{\theta}{2}]$$

• The 3D vector $[0, v]$ is rotated by q to:

$$R_q(v) = q^{-1} \cdot v \cdot q = \bar{q} \cdot v \cdot q$$

Since

$$q_1 \cdot q_2 = [s_1, v_1] \cdot [s_2, v_2] = [s_1 s_2 - v_1 \cdot v_2, s_1 v_2 + s_2 v_1 + v_1 \times v_2]$$

$$R_q(v) = [\cos \frac{\theta}{2}, -n \sin \frac{\theta}{2}] \cdot [0, v] \cdot [\cos \frac{\theta}{2}, n \sin \frac{\theta}{2}]$$

$$= [0, v(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}) + 2n(n \cdot v) \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2(n \times v) \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}]$$

$$= [0, v \cos \theta + n(n \cdot v)(1 - \cos \theta) + (n \times v) \sin \theta]$$

37

כאשר החלק הממשי של הקוונטריון הוא אפס המשמעות היא ש $\cos(\frac{\theta}{2}) = 0$ כלומר מכאן נובע כי $\theta = \pm 180 \text{ deg}$.

הערה 4. המחשה מעניינת של זה:תהא p נקודה תלת מימדית בקור' תלת מימדיות $p = (p_x, p_y, p_z)$ כך ש $u/\|u\| \neq p/\|p\|$ (ע"מ ש p יושפע מהסיבוב) אזי מט' הסיבוב על v תתשפיע על v כדלקמן:

$$\begin{aligned}
R_q(v) &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -n \sin \frac{\theta}{2} \\ 0 & v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & n \sin \frac{\theta}{2} \\ 0 & v \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0, v \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + 2n(n \cdot v) \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2(n \times v) \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ 0, v \cos \theta + n(n \cdot v)(1 - \cos \theta) + (n \times v) \sin \theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{cases} [0, v \cos 180 + n(n \cdot v)(1 - \cos 180) + (n \times v) \sin 180] & \theta = 180 \\ [0, v \cos(-180) + n(n \cdot v)(1 - \cos(-180)) + (n \times v) \sin(-180)] & \theta = -180 \end{cases} \\
&= \begin{cases} [0, -v + 2 \cdot n(n \cdot v)] & \theta = 180 \\ [0, -v + 2 \cdot n(n \cdot v)] & \theta = -180 \end{cases} \\
&= \begin{cases} [0, -v + 2 \cdot n(n \cdot v)] & \theta = 180 \\ [0, -v + 2 \cdot n(n \cdot v)] & \theta = -180 \end{cases} \\
&= [0, -v + 2 \cdot n(n \cdot v)] \\
&= [0, -v + 2 \cdot n(n \cdot v)]
\end{aligned}$$

דוגמה 5. נניח $v = (0, 1, 0)$ ו $u = (1, 0, 0)$ אזי $R_q(v) = (0, -1, 0)$ (כלומר לעשה ביצענו סיבוב של הווקטור $v = (0, 1, 0)$ סביב $u = (1, 0, 0)$ ב 180 מעלות והתוצאה היא $R_q(v) = (0, -1, 0)$).

דוגמה 6. נניח $v = (0, 1, 0)$ ו $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ אזי $R_q(v) = (1, 0, 0)$ (כלומר לעשה ביצענו סיבוב של הווקטור $v = (0, 1, 0)$ סביב $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ ב 180 מעלות. והתוצאה היא $R_q(v) = (1, 0, 0)$).

סעיף ג

משפט 7. משפט אוילר : כל הטיה של גוף יכולה להיות מושגת על ידי **מט' הזהה בודדת** סביב ציר מסויים ובזווית מסויימת.

מסקנה 8. כל הטיה של גוף יכולה להיות מתוארת על ידי זווית θ ווקטור יחידה $n = (n_x, n_y, n_z)$.

$$R_w = R(\theta_w, w) = R_u R_v = R_v R_u \text{ כך ש } w, \theta_w \text{ קיימים}$$

עובדה 9. אנו יודעים כי **סיבובים** תחת \mathbb{R}^3 **אינם קומוטטיבים** כלומר באופן כללי **עבור** u, v **כלליים לא בהכרח מתקיים כי** $R_u R_v = R_v R_u$.

בעיה 10. צריך להוכיח האם קיימים w, θ_w כך ש $R_w = R(\theta_w, w) = R_u R_v = R_v R_u$ בתנאים מסויימים. בפרט גם צריך להראות כי $R_u R_v = R_v R_u$.

עובדה 11. סיבובים ב \mathbb{R}^2 הם כן קומוטטיבים ולכן עבור כל שני מט' סיבוב ב \mathbb{R}^3 שמסובבות על אותו ציר ניתן לבצע רדוקציה לבעיית סיבוב ב \mathbb{R}^2 ורק הקבוצה הזו היא קבוצת המט' שמאפשר את הקומוטטיביות.

מסקנה 12. לכן

$$\{R_u R_v = R_v R_u \mid R_u, R_v, R_u R_u^T = I, R_v R_v^T = I\} \iff u = v \vee u = -v$$

לכן התנאי על u, v כך שיתקיים הנ"ל (הקומוטטיביות) הוא $u = v$ או $u = -v$.
ומכאן נובע באופן אינטואיטיבי לסיבובים בדו מימד כי

$$w = u$$

$$\theta_w = \theta_u + \begin{cases} \theta_v & u = v \\ -\theta_v & u = -v \end{cases}$$

סעיף ד

הערה 13. אני פותר סעיף זה בפני עצמו..הוא לא רלוונטי לסעיף ג'.(אחרת זה לא יהיה הגיוני כי הקוונטריון לא יהיה מנורמל אם $\theta_u \neq 180$ או $\theta_v \neq 180$)

הערה 14. נבחין כי $q_u q_v$ שקול ל"תבצע סיבוב לפי q_v ואחר כך על התוצאה תבצע סיבוב נוסף לפי q_u ".

נתונים הקוונטריונים

$$q_u = q(\theta_u, u)$$

$$q_v = q(\theta_v, v)$$

נחשב את הקוונטריון השקול:

מכיוון

משקף בהרצאה

אנו יודעים כי מכפלת קוונטריונים מתנהגת לפי:

$$q_1 \cdot q_2 = [s_1, v_1] \cdot [s_2, v_2] = [s_1 s_2 - v_1 \cdot v_2, s_1 v_2 + s_2 v_1 + v_1 \times v_2]$$

ש

$$q_u = q(\theta_u, u) = \left(\cos \frac{\theta_u}{2}, \sin \frac{\theta_u}{2} u \right) = \left(\cos \frac{\theta_u}{2}, \sin \frac{\theta_u}{2} u_x, \sin \frac{\theta_u}{2} u_y, \sin \frac{\theta_u}{2} u_z \right)$$

$$q_v = q(\theta_v, v) = \left(\cos \frac{\theta_v}{2}, \sin \frac{\theta_v}{2} v_x, \sin \frac{\theta_v}{2} v_y, \sin \frac{\theta_v}{2} v_z \right)$$

לכן:

$$q_u q_v = \left[\left(\cos \frac{\theta_u}{2} \right) \cdot \left(\cos \frac{\theta_v}{2} \right) + u \cdot v, \left(\cos \left(\frac{\theta_u}{2} \right) \right) v + \left(\cos \left(\frac{\theta_v}{2} \right) \right) u + u \times v \right]$$

כלומר ציר הסיבוב של הקוונטריון נתון על ידי

$$\left(\cos\left(\frac{\theta_u}{2}\right)\right)v + \left(\cos\left(\frac{\theta_v}{2}\right)\right)u + u \times v$$

ואם רוצים את הגדול הזה מנורמל (רוצים את כיוון במונחים של וקטור בוארך יחידה):

$$\frac{\left(\cos\left(\frac{\theta_u}{2}\right)\right)v + \left(\cos\left(\frac{\theta_v}{2}\right)\right)u + u \times v}{\left\|\left(\cos\left(\frac{\theta_u}{2}\right)\right)v + \left(\cos\left(\frac{\theta_v}{2}\right)\right)u + u \times v\right\|}$$

סעיף ה

סעיף 1

$$q_1(t) = (1-t)q_u + tq_v$$

ציון הבעיתיות:
לדוגמא:

$$q_u = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right], q_v = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right]$$

(כלומר q_u סיבוב סביב x 90 מעלות, q_v סיבוב סביב $-x$ ב 270 מעלות (עקרונית זה אותו קוונטריון כי יש cover double))
אזי עבור $t = 0.5 \in [0, 1]$ מתקיים כי

$$\begin{aligned} q_1(0.5) &= (1-0.5)q_u + 0.5q_v \\ &= (1-0.5)[0, 1, 0, 0] + 0.5[0, -1, 0, 0] \\ &= 0.5\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right] + 0.5\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

כלומר

$$q_1(0.5) = 0$$

קוונטריון האפס שאינו נמצא על הספרה \mathbb{R}^4 מימדית. (שולח את כל הנקודות לראשית)
כלומר אינו קוונטריון יחידה ולכן לא יכולהוות קוטריון שמשמש לסיבוב.

סעיף 2

$$q_2(t) = \frac{q_1(t)}{|q_1(t)|} = \frac{(1-0.5)q_u + 0.5q_v}{|(1-0.5)q_u + 0.5q_v|}$$

ציון הבעיתיות:

עבור:

$$q_u = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right], q_v = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right]$$

אזי עבור $t = 0.5 \in [0, 1]$ מתקיים כי

$$q_1(0.5) = 0$$

ולכן

$$q_2(0.5) = \frac{q_1(0.5)}{|q_1(0.5)|} = \frac{0}{|0|}$$

כלומר הבעיתיות היא חלוקה באפס.

שאלה מספר 4

סעיף א

נזכר בשקפים המתאימים מההרצאה:

Cubic Hermite Basis

- Basis for cubic polynomials on $[0,1]$
 $H_{ij}(t): i, j = 0,1$
- Such that:

	$H(0)$	$H(1)$	$H'(0)$	$H'(1)$
$H_{00}(t)$	1	0	0	0
$H_{01}(t)$	0	1	0	0
$H_{10}(t)$	0	0	1	0
$H_{11}(t)$	0	0	0	1

22

Hermite Cubic Basis

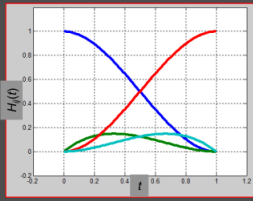
- The four cubics which satisfy these conditions are

$$\begin{aligned} H_{00}(t) &= t^2(2t-3)+1 & H_{01}(t) &= -t^2(2t-3) \\ H_{10}(t) &= t(t-1)^2 & H_{11}(t) &= t^2(t-1) \end{aligned}$$

- Obtained by solving four linear equations in four unknowns for each basis function

	$H(0)$	$H(1)$	$H'(0)$	$H'(1)$
$H_{00}(t)$	1	0	0	0
$H_{01}(t)$	0	1	0	0
$H_{10}(t)$	0	0	1	0
$H_{11}(t)$	0	0	0	1

- **Prove:**
Hermite cubic polynomials are linearly independent



23

כלומר

	$H(0)$	$H(1)$	$H'(0)$	$H'(1)$
$H_{00}(t)$	1	0	0	0
$H_{01}(t)$	0	1	0	0
$H_{10}(t)$	0	0	1	0
$H_{11}(t)$	0	0	0	1

הגרפים שיש לנו הם:

	$H(0)$	$H(1)$	$H'(0)$	$H'(1)$
A	0	0	1	0
B	0	0	1	1
C	0	1	0	0
D	1	1	0	1
E	2	0	0	0
F	1	1	0	0
G	1	0	0	0
H	0	0	0	1

נסמן על הגרפים שקיבלנו מי מהם פונ' בסיס ומי מהם לא ומדוע לא (באדום)

	$H(0)$	$H(1)$	$H'(0)$	$H'(1)$
A	0	0	1	0
B	0	0	1	1
C	0	1	0	0
D	1	1	0	1
E	2	0	0	0
F	1	1	0	0
G	1	0	0	0
H	0	0	0	1

גרף A ניתן לראות כי עבור עקום זה מקיים את התכונות ומהווה פונ' הבסיס השלישית $H_{10}(t)$.
התכונה גאומטרית של הפונ' בסיס זה היא קביעה של הנגזרת בנקודה הראשונה. (נקודת ההתחלה)

גרף B לא מקיים את התכונות. התכונה שמונעת ממנו להיות כזו היא שגם $H'(0) = 1$ וגם $H'(1) = 1$ (במקום שרק אחד מהם יהיה אחד והשאר אפס)

גרף C ניתן לראות כי עבור עקום זה מקיים את התכונות ומהווה פונ' הבסיס השנייה $H_{01}(t)$.
התכונה גאומטרית של הפונ' בסיס זה היא קביעה של המיקום של נקודת הסיום.

גרף D לא מקיים את התכונות. התכונה שמונעת ממנו להיות כזו היא שגם $H(0) = 1$ וגם $H(1) = 1$ וגם $H'(1) = 1$ (במקום שבדיוק אחד מהם יהיה אחד והשאר אפס)

גרף E לא מקיים את התכונות. כי $H(0) = 2$ וזה לא מתקיים באף פונ' בסיס.

גרף F לא מקיים את התכונות. התכונה שמונעת ממנו להיות כזו היא שגם $H(0) = 1$ וגם $H(1) = 1$ (במקום שרק אחד מהם יהיה אחד והשאר אפס)

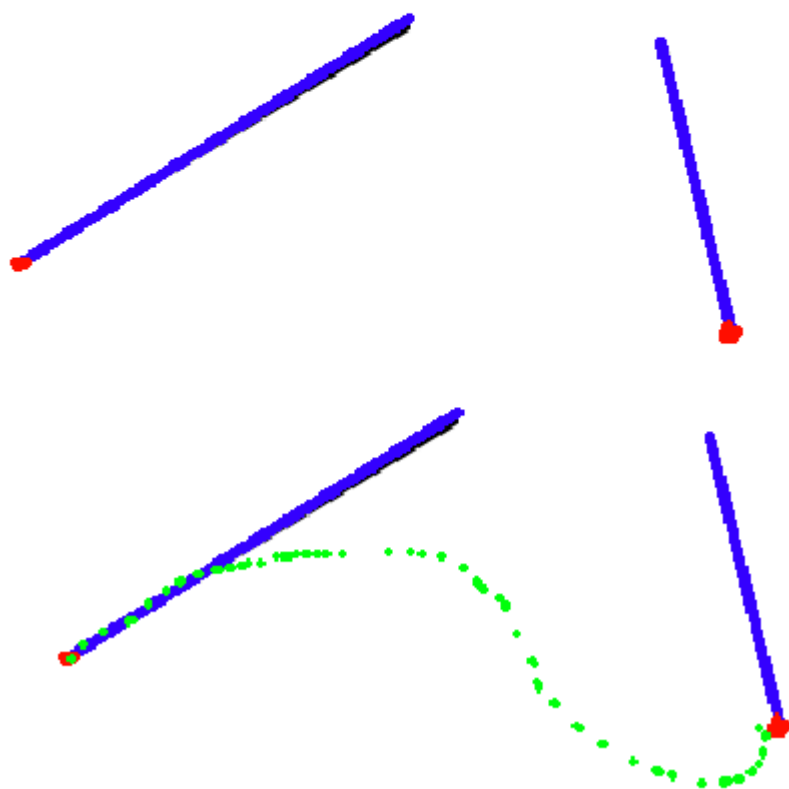
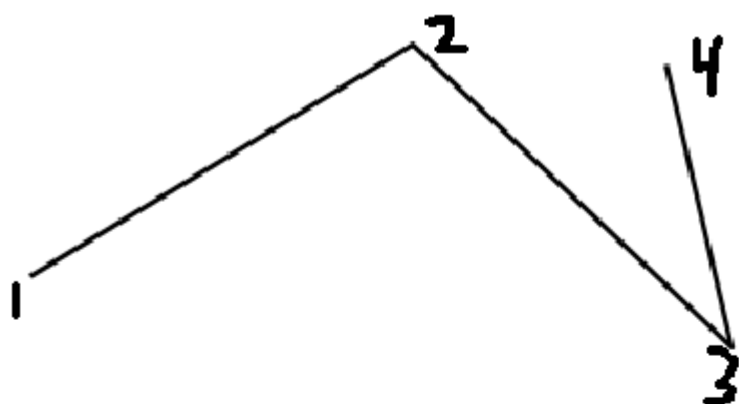
גרף G ניתן לראות כי עבור עקום זה מקיים את התכונות ומהווה פונ' הבסיס הראשונה $H_{00}(t)$.

התכונה גאומטרית של הפונ' בסיס זהו היא קביעה של המיקום של נקודת ההתחלה.

גרף H ניתן לראות כי עבור עקום זה מקיים את התכונות ומהווה פונ' הבסיס הרביעית $H_{11}(t)$.

התכונה גאומטרית של הפונ' בסיס זהו היא קביעה של הנגזרת בנקודה הסיום.

סעיף ב



סעיף ג

נזכר בשקף הרלוונטי:

Bilinear Patches

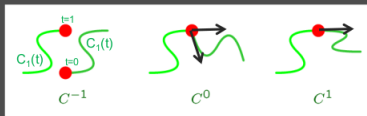
- Bilinear interpolation of 4 3D points - 2D analog of 1D linear interpolation between 2 points in the plane
- Given $P_{00}, P_{01}, P_{10}, P_{11}$ the bilinear surface for $u, v \in [0, 1]$ is:

$$P(u, v) = (1-u)(1-v)P_{00} + (1-u)vP_{01} + u(1-v)P_{10} + uvP_{11}$$

Mathematical Continuity

- $C_1(t)$ & $C_2(t)$, $t \in [0, 1]$ - parametric curves
- Level of continuity of the curves at $C_1(1)$ and $C_2(0)$ is:
 - C^1 : $C_1(1) \neq C_2(0)$ (discontinuous)
 - C^0 : $C_1(1) = C_2(0)$ (positional continuity)
 - C^k , $k > 0$: continuous up to k^{th} derivative

$$C_1^{(j)}(1) = C_2^{(j)}(0), \quad \forall j \text{ } 0 \leq j \leq k$$



Geometric Continuity

- Mathematical continuity is sometimes too strong
- May be relaxed to geometric continuity
 - G^k , $k \leq 0$: Same as C^k
 - G^k , $k = 1$: $C_1'(1) = \alpha C_2'(0)$
 - G^k , $k \geq 0$: There is a reparameterization of $C_1(t)$ & $C_2(t)$, where the two are C^k
- E.g.
 - $C_1(t) = [\cos(t), \sin(t)]$, $t \in [-\pi/2, 0]$
 - $C_2(t) = [\cos(t), \sin(t)]$, $t \in [0, \pi/2]$
 - $C_3(t) = [\cos(2t), \sin(2t)]$, $t \in [0, \pi/4]$
 - $C_1(t)$ & $C_2(t)$ are C^1 (& G^1) continuous
 - $C_1(t)$ & $C_3(t)$ are G^1 continuous (not C^1)



14

סעיף 1

מכיוון ש $P(u, v)$ ו $Q(u, v)$ שניהם עוברים דרך שתי הנקודות $P_{1,0}, P_{1,1}$ מכאן נובע שיש רציפות במקום. כלומר מכיוון ש

$$P(1, 1) = P_{1,1} = Q(0, 1)$$

$$P(1, 0) = P_{1,0} = Q(0, 0)$$

נובע שיש C^0 ביניהם.

(ולכן מהגדרת ריצופות גאומטרית יש גם G^0 ביניהם).
 באשר לנגזרת (לרציפויות גבוהות יותר), ניתן להשתכנע (זו הנחה, וזה לא נתון במפורש
 בשאלה) שהמישור שמכיל את $P(u, v)$ והמישור שמכיל את $Q(u, v)$ אינם מתלכדים לכדי
 אותו מישור ולכן לא מתקיים C^1 ביניהם. בנוסף אם זה המצב אז גם הם לא G^1 .

מסקנה 15. הרציפות ביו $P(u, v)$ לבין $Q(u, v)$ היא C^1 (ולכן גם G^1)

סעיף 2

התנאי:

המישור שמכיל את $P(u, v)$ והמישור שמכיל את $Q(u, v)$ מתלכדים לכדי אותו מישור.
 במקרה כזה הרציפות היא C^∞ (ולכן גם G^∞).

סעיף 3

לדוגמא :

$$P_{00} = (0, 0, 0), P_{01} = (0, 0, 1)$$

$$P_{10} = (0, 1, 0), P_{11} = (0, 1, 1)$$

$$P_{20} = (0, 2, 0), P_{21} = (0, 2, 1)$$

כמו שניתן לראות כל הנקודות על מישור $Z = 0$ ולכן מקיימות את התנאי בסעיף 2 ולכן הם
 C^∞ (ולכן גם G^∞).