מבחן במקצוע גרפיקה ממוחשבת

11 בפברואר 2021

תוכן העניינים

שאלה מספר 1

סעיף א

flat shading

קלט: mesh model מורכב מפוליגונים (בקורס עסקנו במש משולשים).הקלט צריך לציין כל הצמתים שמשתתפים בכל פאה בסדר אחיד מוסכם מראש* (לדוג' - נגד כיוון השעון) כיוון שההנחה היא שהצופה מתבונן על האוביקט מבחוץ.

בהצללה זו אופן חישוב הפיקסל לכל צבע בכל פוליגון נעשה אופן הבא:

לכל פאה אנו תחילה מחשבים במהלך קבלת הקלט את הnormal face שלה.(לדוגמא עבור מש משולשים לכל פאה נבצע מכפלה וקטורית בין הצמתים שבאותה הפאה לפי הסדר * וננרמל את התוצאה כך שתוצאת המכפלה תהיה ווקטור מנורמל שמאונך לפאה.נעשה זאת לכל פאה.

עבור כל פיקסל שנרצה לצבוע,על מנת לבצע את הצביעה שלו עלינו לבחור את הנורמל המתאים:

1. נמצא את הפאה שאליה שייך הפיקסל.
2. ניקח את הnormal face המתאים שחישבנו בקלט.(לאחר שעבר את הטרנס' המתאימות ונורמל חזרה) עם הנורמל הנ"ל נבצע את חישובי התאורה כרגיל.

הערה 1. שימוש בשיטה זו ייצבע את כל הפאה בצבע אחיד

כ

gouraud shading

קלט:

- mesh model מורכב מפוליגונים (בקורס עסקנו במש משולשים).
- לכל פאה:
  - לכל צומת שמשתתפת בפאה:
    - מקבלים normal vertex מתאים לו
      - (אם זה לא נתון בקלט קיימות דרכים לחשב נורמל זה ידנית)

הערה 2. normals vertex הם לא חד ערכיים עבור צומת נתון.אם הצומת מתתפת בכמה פאות אז יהיה לה כמות normals vertex כמספר הפאות.(מניח בתיאור כאן כי יש n קודקודים בכל פאה,בתרגיל בית שלנו $n = 3$ - מש משולשי)

בהצללה זו אופן חישוב הפיקסל לכל צבע בכל פוליגון נעשה אופן הבא:
עבור כל פיקסל שנרצה לצבוע,על מנת לבצע את הצביעה שלו עלינו:

1. נמצא את הפאה שאליה שייך הפיקסל.(ונמצא את הקור' הבריצנטריות המתאימות $(\{\alpha_i\}_{i=1}^n)$
2. נמצא את כל הקודקודים המתאימים לפאה זו.$v_1, \ldots, v_n$
3. עבור כל קודקוד כזה נחשב את התאורה בקוקוד על ידי שימוש בnormals vertex המתאים לו (כפי שהתקבל בקלט ולאחר שעבר טרנס' מתאימה) לקבלת $c_1, \ldots, c_n$.n) צבעים)

4. נצבע את הפיקסל על ידי אינטרפולציה על **הצבע שחושב מהשלב הקודם** הקור' הבריצנטריות המתאימות ל$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i$.

phong shading

- mesh model מורכב מפוליגונים (בקורס עסקנו במש משולשים).
- לכל פאה:
  - לכל צומת שמשתתפת בפאה:
    * מקבלים normal vertex מתאים לו
      - (אם זה לא נתון בקלט קיימות דרכים לחשב נורמל זה ידנית)

בהצללה זו אופן חישוב הפיקסל לכל צבע בכל פוליגון נעשה אופן הבא:
עבור כל פיקסל שנרצה לצבוע,על מנת לבצע את הצביעה שלו עלינו:

1. נמצא את הפאה שאליה שייך הפיקסל.(ונמצא את הקור' הבריצנטריות המתאימות $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$)
2. נמצא את כל הקודקודים המתאימים לפאה זו.$v_1, \ldots, v_n$
3. עבור כל קודקוד כזה נסמן את הnormals vertex המתאים לו על ידי $n_1, \ldots, n_n$ (נורמלים אלו לאחר הטנרנס' המתאימה)
4. נחשב את **הנורמל המתאים לפיקסל** שאנו רוצים לצבוע על ידי אינטרפולציה של הקור' הבריצנטריות המתאימות ל$n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i n_i$.
5. נצבע את חישוב התאורה על הפיקסל על ידי הנורמל n.

הערה 3. בכל השיטות ,במידה ובשלב כלשהו ערוץ צבע בצבע שהתקבל חרג מהגבולות המתאימים , נבצע clipping מתאים.
(לדוגמא אם ערוץ אדום בצבע זה יצא 4 והגבול הוא 1אז הצבע הסופי יהיה בערוץ האדום 1).

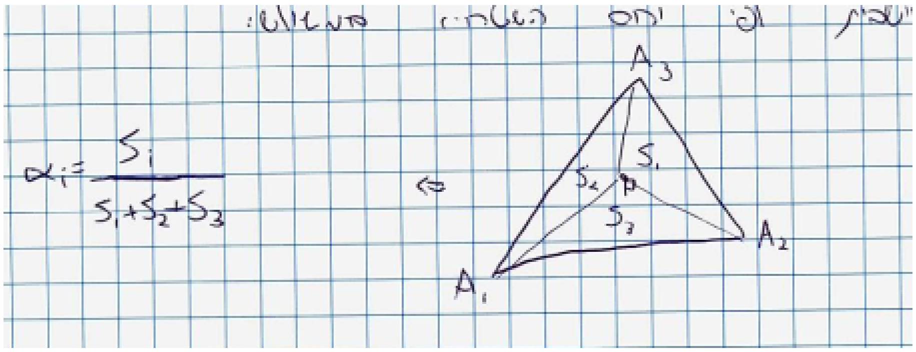
אחד ההבדלים בין השיטות:

- הבדלים ברינדור של garude או של phong אנו יכולים להשיג על ידי normals vertex שונים.

קשה לי להבין למה בדיוק התכוון הכותב של השאלה אז ניסיתי לסכם את הנושא בצורה מסודרת..מוזמנים להסתכל בסריקה המסודרת שבתקייה.

סעיף ב

ראינו בכיתה כי הקור' הבריצנטריות יכולות להיות מחושבות וגם לפי האינטפרולציה שמתוארת בסעיף ב'.שהם למעשה מקיימותאת יחס השטחים



(מתוך הסריקה של ה99)

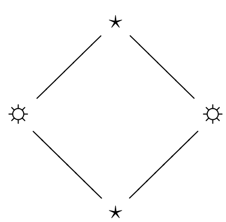
יחס השטחים הנ"ל אינו משתנה בסיבוב .ומכיוון שהוא שקול לדרך החישוב שבסעיף ב' נובע כי צבע המשולש יישאר זהה.

סעיף ג

התשובה יא שלא.

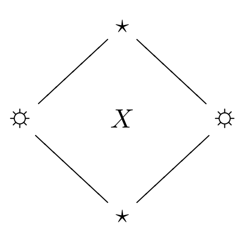
דוגמא נגדית.

יהא המלבן:



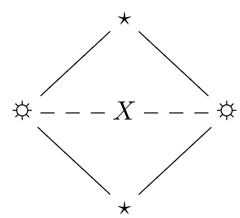
נניח ש ⋆ זה צבע שחור ו ☼ זה צבע לבן.

נסמן את הנקודה X במרכז

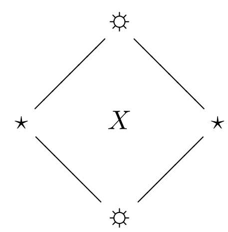


אזי לפי השיטה הנ"ל X ייצבע בלבן ☼ כי הscanline אופקי ושני הקצוות הם באותו

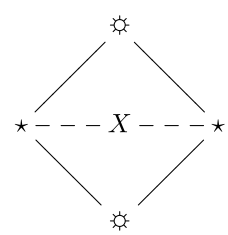
הצבע:



נסובב את המצולע ב90מעלות לקבלת



אזי לפי השיטה הנ"ל X ייצבע בשחור $\star$ כי הscanline אופקי ושני הקצוות הם באותו הצבע:



ולכן X לא יישאר באותו הצבע עבור מקרה זה.

שאלה מספר 2

סעיף א

תזכורת

תזכורת:

נזכר בזהויות טריגו של מכפלה

$$\begin{aligned}
\sin A\cos B &= \tfrac{1}{2}(\sin(A+B)+\sin(A-B))\\
\cos A\sin B &= \tfrac{1}{2}(\sin(A+B)-\sin(A-B))\\
\cos A\cos B &= \tfrac{1}{2}(\cos(A+B)+\cos(A-B))\\
\sin A\sin B &= \tfrac{1}{2}(\cos(A-B)-\cos(A+B))
\end{aligned}$$

ושל סכום

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$
$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

$$\star:\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\star\star:\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

כלומר

$$\sin\gamma\cos\alpha+\cos\gamma\sin\alpha\overbrace{=}^{\star}\sin\left(\gamma+\alpha\right)$$

בנוסף

$$\cos\gamma\cos\alpha-\sin\gamma\sin\alpha\overbrace{=}^{\star\star}\cos\left(\gamma+\alpha\right)$$

הערה 4. במקרים של גימבל לוק אנו מבינים כי יש אינסוף מט' שונות לייצוג אותה אוריינטציאה של האובייקטוזה אכן מה שקורה.

הערה 5. מניח שכאן השליטה y נמצא באמצע (בין x לz)

לפי ההרצאה המט' שמתארת את פעולת הגימבל נתונה על ידי

$$R(\alpha,\beta,\gamma)=R_z\cdot R_y\cdot R_x=$$
$$\begin{bmatrix}
\cos\gamma\cos\beta & \sin\gamma\cos\alpha+\cos\gamma\sin\beta\sin\alpha & \sin\gamma\sin\alpha-\cos\gamma\sin\beta\cos\alpha & 0\\
-\sin\gamma\cos\beta & \cos\gamma\cos\alpha-\sin\gamma\sin\beta\sin\alpha & \cos\gamma\sin\alpha+\sin\gamma\sin\beta\cos\alpha & 0\\
\sin\beta & -\cos\beta\sin\alpha & \cos\beta\cos\alpha & 0\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

נתון כי

$$\beta_x=\frac{\pi}{3},\beta_y=\frac{\pi}{2},\beta_z=\frac{\pi}{6}$$

או בסימונים מעלה באופן שקול

$$\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{2},\gamma=\frac{\pi}{6}$$

עבור $\beta=\frac{\pi}{2}$ אנו רואים כי מתקיים

$$R(\alpha,\tfrac{1}{2}\pi,\gamma)=R_z\cdot R_y\cdot R_x=$$

$$\begin{bmatrix} \cos\gamma\cos\frac{1}{2}\pi & \sin\gamma\cos\alpha+\cos\gamma\sin\frac{1}{2}\pi\sin\alpha & \sin\gamma\sin\alpha-\cos\gamma\sin\frac{1}{2}\pi\cos\alpha & 0\\ -\sin\gamma\cos\frac{1}{2}\pi & \cos\gamma\cos\alpha-\sin\gamma\sin\frac{1}{2}\pi\sin\alpha & \cos\gamma\sin\alpha+\sin\gamma\sin\frac{1}{2}\pi\cos\alpha & 0\\ \sin\frac{1}{2}\pi & -\cos\frac{1}{2}\pi\sin\alpha & \cos\frac{1}{2}\pi\cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \sin\gamma\cos\alpha+\cos\gamma\sin\alpha & \sin\gamma\sin\alpha-\cos\gamma\cos\alpha & 0\\ 0 & \cos\gamma\cos\alpha-\sin\gamma\sin\alpha & \cos\gamma\sin\alpha+\sin\gamma\cos\alpha & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$\overbrace{=}^{\star}\begin{bmatrix} 0 & \sin(\gamma+\alpha) & \sin\gamma\sin\alpha-\cos\gamma\cos\alpha & 0\\ 0 & \cos\gamma\cos\alpha-\sin\gamma\sin\alpha & \sin(\gamma+\alpha) & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overbrace{=}^{\star\star}\begin{bmatrix} 0 & \sin(\gamma+\alpha) & -\cos(\gamma+\alpha) & 0\\ 0 & \cos(\gamma+\alpha) & \sin(\gamma+\alpha) & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

כלומר הטרנס' הנ"ל של זוויות אוילר ממושפעת **רק מהסכום של** γ,α **כלומר עבור**

$$\beta_x=\frac{\pi}{3},\beta_y=\frac{\pi}{2},\beta_z=\frac{\pi}{6}$$

נקבל את אותה האוריינטאציה כמו עבור

$$\forall\epsilon\in\mathbb{R}:\beta_x=\frac{\pi}{3}-\epsilon,\beta_y=\frac{\pi}{2},\beta_z=\frac{\pi}{6}+\epsilon$$

לדוגמא

$$\boxed{\beta_x=0,\beta_y=\frac{\pi}{2},\beta_z=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}}$$

ייתן את אותה האויינטריציה.
וזו הדוגמא נגדית אפשרית.

סעיף ב

הטרנספורמציה המתאימה תיקח את מרכז הריבוע לנק' $(5,5)$.

$$\boxed{\forall t\in[0,1]:T(t)=\begin{bmatrix}1&0&5t\\0&1&5t\\0&0&1\end{bmatrix}}$$

סעיף ג

הטרנספורמציה המתאימה תיקח את מרכז הריבוע לנק' $(5,5)$.
בנוסף היא תסובב אותו בזווית של $\frac{\pi}{4}$.
נזכר כי מט' סיבוב בזווית θ נתונה על ידי:

$$R^{\theta}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

ולכן אנמציה של סיבוב בזווית $\frac{\pi}{4}$ באופן חלק נתונה על ידי

$$\forall t\in[0,1]:R^{t\cdot\frac{\pi}{4}}(t)=\begin{pmatrix}\cos\left(t\cdot\frac{\pi}{4}\right)&-\sin\left(t\cdot\frac{\pi}{4}\right)\\\sin\left(t\cdot\frac{\pi}{4}\right)&\cos\left(t\cdot\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}$$

מכאן נובע כי הרכבה של שני האנמציות הנ"ל תניב את האנמציה הרצויה:

$$\begin{aligned}\forall t\in[0,1]:A(t)&=R^{t\cdot\frac{\pi}{4}}(t)\,T(t)\\&=\begin{bmatrix}\cos\left(t\cdot\frac{\pi}{4}\right)&-\sin\left(t\cdot\frac{\pi}{4}\right)&5t\\\sin\left(t\cdot\frac{\pi}{4}\right)&\cos\left(t\cdot\frac{\pi}{4}\right)&5t\\0&0&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

קיבלנו כי

$$\boxed{\forall t\in[0,1]:A(t)=\begin{bmatrix}\cos\left(t\cdot\frac{\pi}{4}\right)&-\sin\left(t\cdot\frac{\pi}{4}\right)&5t\\\sin\left(t\cdot\frac{\pi}{4}\right)&\cos\left(t\cdot\frac{\pi}{4}\right)&5t\\0&0&1\end{bmatrix}}$$

סעיף ד

התשובה תשתנה.מכיוון ש

$$\forall t\in[0,1]:T(t)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&5t\\0&1&5t\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5t\\5t\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5t\\5t\end{bmatrix}=t\cdot\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

על מנת שזה יקרה נשנה את T באופן הבא:
נרצה למצוא מעבר חלק יותר של T בשלוש נקודות $(0,0),(2,3),(5,5)$.לצורך זה נחפש פולינום מדרגה 2 שעובר בכל שלושת הנקודות .

$$bt^2+ct+d$$

ואז המעבר שלנו יהיה חלק C^∞ כי כל פולינוסהוא פונ' אלמנטרית.
כך שמתקיים

$$\begin{cases} \left[bt^2+ct+d\right]_{t=0}=0 \\ \left[bt^2+ct+d\right]_{t=2}=3 \\ \left[bt^2+ct+d\right]_{t=5}=5 \end{cases}$$

$$\left[bt^2+ct+d\right]_{t=0}=0 \iff \boxed{d=0}$$

$$\left[bt^2+ct+d\right]_{t=5}=5 \iff \left[bt^2+ct\right]_{t=5}=5 \iff 25b+5c=5 \iff 5b+c=1 \iff c=1-5b$$

$$\left[bt^2+ct+d\right]_{t=2}=3 \iff \left[bt^2+ct\right]_{t=2}=3 \iff 4b+2c=3 \iff 4b+2\left(1-5b\right)=3 \iff 4b+2-10b=$$

$$c=1-5b \Rightarrow c=1-5\left(-\frac{1}{6}\right) \Rightarrow c=1+5\left(\frac{1}{6}\right) \Rightarrow \boxed{c=\frac{11}{6}}$$

לכן הפולינום הוא

$$-\frac{1}{6}t^2+\frac{11}{6}t$$

בדיקת שפיות

$$\left[-\frac{1}{6}t^2+\frac{11}{6}t\right]_{t=0}=0$$

$$\left[-\frac{1}{6}t^2+\frac{11}{6}t\right]_{t=2}=-\frac{1}{6}\cdot 4+\frac{11}{6}\cdot 2=-\frac{4}{6}+\frac{22}{6}=\frac{18}{6}=3$$

$$\left[-\frac{1}{6}t^2+\frac{11}{6}t\right]_{t=5}=-\frac{1}{6}\cdot 25+\frac{55}{6}=\frac{30}{6}=5$$

כמבוקש.

ע"מ שב $t=1$ נגיע ל5 (נקודת הסיום) נציב $t_{\text{new}} \leftarrow 5t$
ולכן הטרנס' של האנמציה יהיה

$$T\left(t\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5t \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6}\left(5t\right)^2+\frac{11}{6}\left(5t\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל לבסוף:

$$\boxed{\forall t\in[0,1]:A\left(t\right)=\left[\begin{array}{ccc}\cos\left(t\cdot\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(t\cdot\frac{\pi}{4}\right) & 5t\\ \sin\left(t\cdot\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(t\cdot\frac{\pi}{4}\right) & -\frac{1}{6}\left(5t\right)^{2}+\frac{11}{6}\left(5t\right)\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right]}$$

שאלה מספר 3 -הגרסא שאינה מוגדרת היטב

הערה 6. (למעשה כל השאלה הזו מוגדרת קצת אחרת בשני גרסאות של אותו המבחן ואני פתרתי את ההיא שלא מוגדרת היטב).

סעיף א

רמציה של הנקודות: כלומר צריך להוכיח $\left(\frac{x_4-x_3}{x_2-x_1}=\frac{T(x_4)-T(x_3)}{T(X_2)-T(x_1)}\right)$

הסעיף הזה לא מוגדר היטב בתכלס כי לא מוגדרת חלוקה של שני אלמנטים ב$\mathbb{R}^3$.

$$
\begin{aligned}
& \alpha=\frac{T\left(x_4\right)-T\left(x_3\right)}{T\left(X_2\right)-T\left(x_1\right)} \\
\Longleftrightarrow\ & \left(T\left(X_2\right)-T\left(x_1\right)\right) \alpha=\left(T\left(x_4\right)-T\left(x_3\right)\right) \\
\Longleftrightarrow\ & \left(A x_2+b-\left(A x_1+b\right)\right) \alpha=\left(A x_4+b-\left(A x_3+b\right)\right) \\
\Longleftrightarrow\ & \left(A x_2-A x_1\right) \alpha=\left(A x_4-A x_3\right) \\
\Longleftrightarrow\ & A\left(x_2-x_1\right) \alpha=A\left(x_4-x_3\right) \\
\Longleftrightarrow\ & A\left(x_2-x_1\right) \alpha=A\left(x_4-x_3\right) \\
& \Uparrow \\
\Longleftrightarrow\ & \left(x_2-x_1\right) \alpha=\left(x_4-x_3\right) \\
\Longleftrightarrow\ & \alpha=\frac{\left(x_4-x_3\right)}{\left(x_2-x_1\right)} \\
& \text{True}
\end{aligned}
$$

הראנו כי $\alpha=\frac{T(x_4)-T(x_3)}{T(X_2)-T(x_1)}$ נתון כי $\alpha=\frac{(x_4-x_3)}{(x_2-x_1)}$ ולכן הוכחנו כי

$$\frac{\left(x_4-x_3\right)}{\left(x_2-x_1\right)}=\frac{T\left(x_4\right)-T\left(x_3\right)}{T\left(X_2\right)-T\left(x_1\right)}$$

סעיף ב

לא בהכרח משמר זוויות.לראייה
נזכר בשקף המהמם הבא:

Quiz

Which transformation preserves which geometric form ?

	lines	parallel lines	distance	angles	normals	convexity	conics
scaling	◆	◆		◆	◆	◆	◆
rotation	◆	◆	◆	◆	◆	◆	◆
translation	◆	◆	◆	◆	◆	◆	◆
shear	◆	◆				◆	◆
perspective	◆					◆	◆

70

ניתן להיווכח כי טרנס' מסוג shear אינה משמרת זוויות.

לודגמא המט' $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ מבצעת shear היא טרנס' אפינית חוקית (כי היא מתוארת על ידי מט').נראה כי אינה משמרת זוויות.

באופן כללי

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ z \end{pmatrix}$$

עבור הווקטור $(1,0,0)$ מתקיים כי

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

עבור הווקטור $(0,1,0)$ מתקיים כי

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לפני ההטלה הזווית בין $(1,0,0)$ לבין $(0,1,0)$היתה 90 מעלות.

כעט **לאחר ההטלה** הזווית בין ההטלה של $(1,0,0)$ לבין ההטלה של $(0,1,0)$ היא הזווית שבין $(1,1,0)$ ו $(0,1,0)$ שהיא למעשה 45 מעלות.

מסקנה 7. הטרנס' אינה בהכרח משמרת זוויות.

סעיף ג

עבור טרנס' האפס $\forall q \in \mathbb{R}^3 : T(q) \equiv 0 \in \mathbb{R}^3$ הטרנספורמציה לא הפיכה.

באופן כללי T יכולה להיות מתוארת על ידי מט' מדרגה שאינה מלאה ובכל מקרה כזה הטרנספ' יהיה אינו הפיך.

סעיף ד

שוב נזכר בשקף המהמם הבא:

Quiz

Which transformation preserves which geometric form ?

	lines	parallel lines	distance	angles	normals	convexity	conics
scaling	◆	◆		◆	◆	◆	◆
rotation	◆	◆	◆	◆	◆	◆	◆
translation	◆	◆	◆	◆	◆	◆	◆
shear	◆	◆				◆	◆
perspective	◆					◆	◆

70

אנו יודעים כי מט' פרספקטיבית **אינה מוגדרת** על כל המרחב (אלא רק על חצי מישור) ולכן $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ לא יכולה להיות הטרנס' של הפרספקטיבה.
לכן T חייבת לשמר קווים מקבילים.
הוכחה:
יהיו $p_1,p_2\in\mathbb{R}^3$ נקודות ב$\mathbb{R}^3$ ויהי $v\in\mathbb{R}^3$ ווקטור ב$\mathbb{R}^3$.
נבחין כי A טרנס' לינאירית ולכן קיימת מט' $B\in\mathbb{R}^{3\times3}$ כך שלכל $q\in\mathbb{R}^3 : Aq=Bq$
יהיו שני הקווים המקבילים הבאים:

$$\forall t\in\mathbb{R}: l_1(t): p_1+tv$$

$$\forall t\in\mathbb{R}: l_2(t): p_2+tv$$

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R}:\widetilde{l_1(t)} &= T(l_1(t))\\ &= T(p_1+tv)\\ &= A(p_1+tv)+b\\ &= Ap_1+tAv+b\\ &= (Ap_1+b)+tAv\\ &= (Bp_1+b)+t(Bv)\end{aligned}$$

באופן דומה

$$\forall t\in\mathbb{R}:\widetilde{l_2(t)}=(Bp_2+b)+t(Bv)$$

כלומר הראנו כי הקווים לאחר הטרנס' הם

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R}:\widetilde{l_1(t)}&=(Bp_1+b)+t(Bv)\\ \forall t\in\mathbb{R}:\widetilde{l_2(t)}&=(Bp_2+b)+t(Bv)\end{aligned}$$

ניתן להיווכח שווקטור הכיוון (Bv) זהה עבור שני הקווים לאחר הטרנס' ולכן הקווים יישארו מקבילים גם לאחר הטנרס'.

הערה 8. אני לא מחשיב מקרים שבהם $(Bv)=0$ כלומר שהקווים קורסים לנקודה.במקרה זה שני הקווים ייקרסו לכדי נקודות ואין משמעות/הגדרה מוסכמת לגבי הקבלה של שני נקודות.ולכן זה אינו המקרה שאליו התכוונו אני מניח בעת כתיבת השאלה.

שאלה מספר 3 (גרסא הנורמלית)

ה 3 – טרנספורמציות (25 נק')

$T: \mathbb{R}^3 \to$ טרנספורמציה אפינית כלשהי, כלומר טרנספורמציה מהצורה $x \mapsto Ax + b$, כאשר
רנספורמציה לינארית ו- b הוא וקטור. זכרו כי בהינתן זוג נקודות p, q, ניתן לייצג את הישר
את שתיהן באמצעות הביטוי $(1-t)p + tq, t \in \mathbb{R}$.

נק') הראו ש- T משמרת יחסי מרחקים לאורך קו ישר, כלומר בהינתן נקודות x_1, x_2, x_3, x_4
מצאות על אותו ישר, הראו כי $\frac{\|T(x_4)-T(x_3)\|}{\|T(x_2)-T(x_1)\|} = \frac{\|x_4 - x_3\|}{\|x_2 - x_1\|}$.

נק') האם T משמרת זויות? אם כן הוכיחו, אחרת, תנו דוגמא נגדית.

נק') באילו מקרים T הפיכה? נמקו ורשמו ביטוי להופכי T^{-1}.

נק') האם T משמרת קוים מקבילים? אם כן הוכיחו, אחרת תנו דוגמא נגדית.

סעיף א

x_1, x_2, x_3, x_4 על ישר ולכן

$$\star : \exists v \in \mathbb{R}^3, \forall i \in \{2,3,4\}, \exists t_i \in \mathbb{R} : x_i = x_1 + v t_i$$

$$\begin{aligned}
\frac{\|T(x_4)-T(x_3)\|}{\|T(x_2)-T(x_1)\|} &= \frac{\|Ax_4+b-(Ax_3+b)\|}{\|Ax_2+b-(Ax_1+b)\|} \\
&= \frac{\|Ax_4-Ax_3\|}{\|Ax_2-Ax_1\|} \\
&= \frac{\|A(x_4-x_3)\|}{\|A(x_2-x_1)\|} \\
&\overbrace{=}^{\star} \frac{\|A((x_1+vt_4)-(x_1+vt_3))\|}{\|A((x_1+vt_2)-x_1)\|} \\
&= \frac{\|A(vt_4-vt_3)\|}{\|A(vt_2)\|} \\
&= \frac{\|Av\|\,\|t_4-t_3\|}{\|Av\|\,\|t_2\|} \\
&= \frac{\|t_4-t_3\|}{\|t_2\|} \\
&= ☺
\end{aligned}$$

$$\frac{\|(x_4-x_3)\|}{\|(x_2-x_1)\|} = \frac{\|((x_1+vt_4)-(x_1+vt_3))\|}{\|(x_1+vt_2-x_1)\|} = \frac{\|(vt_4-vt_3)\|}{\|(vt_2)\|} = \frac{\|(v)\|\,\|(t_4-t_3)\|}{\|(v)\|\,\|(t_2)\|} = \frac{\|t_4-t_3\|}{\|t_2\|} = ☺$$

ולכן

$$\frac{\|(x_4-x_3)\|}{\|(x_2-x_1)\|} = \frac{\|T(x_4)-T(x_3)\|}{\|T(x_2)-T(x_1)\|}$$

סעיף ב

כמו התשובה למעלה.(התשובה היא לא)

סעיף ג

T הפיכה $\Longleftrightarrow$ A הפיכה.
(אם A אינה הפיכה אז T אינה הפיכה.)
נכתוב את T^{-1}:

$$T^{-1}(x) = A^{-1}(x-b)$$

נראה כי אכן מדובר בפונ' הופכיות

$$T\left(T^{-1}(x)\right) = T\left(A^{-1}(x-b)\right) = AA^{-1}(x-b)+b = I(x-b)+b = x-b+b = x$$

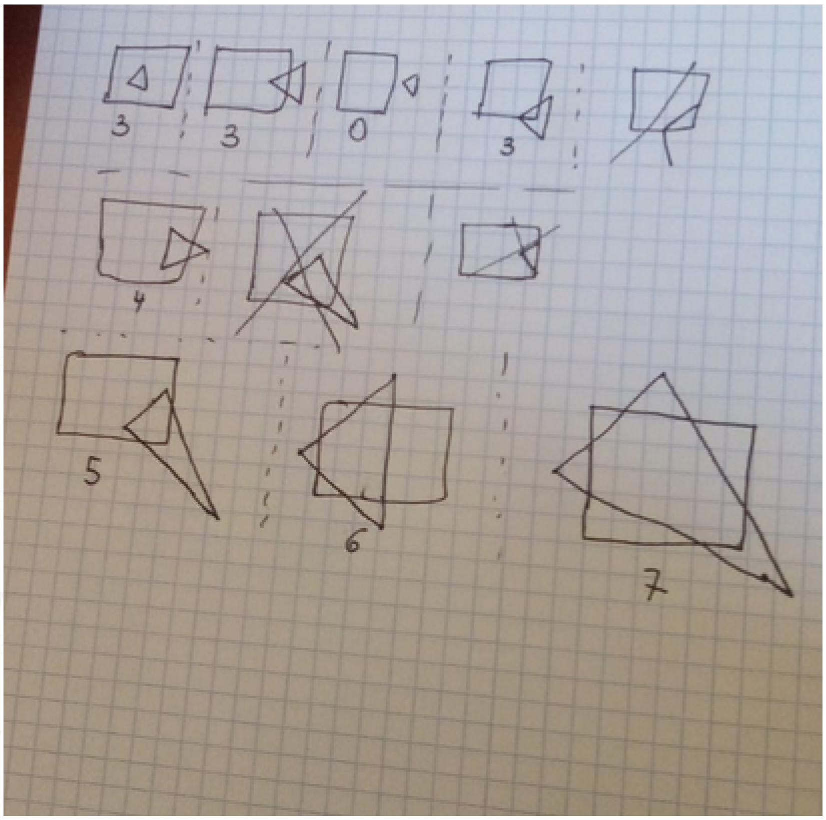
$$T^{-1}(T(x)) = T^{-1}(Ax+b) = A^{-1}(Ax+b-b) = AA^{-1}x = Ix = x$$

סעיף ד

התשובה היא כן (כמו למעלה)

שאלה מספר 4

סעיף א



כמו שאני משתכנע התשובה היא 7.

סעיף ב

הערה 9. אני הולך להוכיח משפטים הרבה יותר חזקים על מנת לפתור את הסעיף הזה.הולך להיות פה overkill מטורף.

נזכר קודם בהגדרה של צורה קמורה.

$$C\text{convex is} \iff \forall a,b\in C:\forall t\in[0,1]:ta+(1-t)\,b\in C$$

טענה 10. ריבוע $\square$ הוא קבוצה קמורה.

הוכחה:

יהא $k\in\mathbb{R}^{++}$ כלשהו.נסמן את אורך צלע הריבוע k.אזי הקבוצה ריבוע $C=\square$ יכולה להיות מתוארת באופן הבא

$$C=\left\{(x,y)\mid -\frac{k}{2}\leq x\leq\frac{k}{2},-\frac{k}{2}\leq y\leq\frac{k}{2}\right\}$$

יהיו 2 נקודות $\overbrace{(a_1,a_2)}^{\equiv a},\overbrace{(b_1,b_2)}^{\equiv b}\in C$ כלשהם. אזי:

$$a\in C\Rightarrow -\frac{k}{2}\le a_1\le\frac{k}{2},-\frac{k}{2}\le a_2\le\frac{k}{2}$$

$$b\in C\Rightarrow -\frac{k}{2}\le b_1\le\frac{k}{2},-\frac{k}{2}\le b_2\le\frac{k}{2}$$

יהא $t\in[0,1]$ כשלהוא אזי

$$\begin{aligned}\star\star\star: ta+(1-t)\,b &= t\,(a_1,a_2)+(1-t)\,(b_1,b_2)\\ &=(ta_1+(1-t)\,b_1,ta_2+(1-t)\,b_2)\end{aligned}$$

$$a\in C\Rightarrow -\frac{k}{2}\le a_1\le\frac{k}{2}\Rightarrow\boxed{-\frac{k}{2}t\le a_1t\le\frac{k}{2}t}$$

$$b\in C\Rightarrow -\frac{k}{2}\le b_1\le\frac{k}{2}\Rightarrow\boxed{-\frac{k}{2}\,(1-t)\le b_1\,(1-t)\le\frac{k}{2}\,(1-t)}$$

מכאן נובע כי

$$-\frac{k}{2}t-\frac{k}{2}\,(1-t)\le ta_1+(1-t)\,b_1\le\frac{k}{2}t+\frac{k}{2}\,(1-t)$$

$$\star\star:\boxed{-\frac{k}{2}\le ta_1+(1-t)\,b_1\le\frac{k}{2}}$$

באופן זהה

$$\star:\boxed{-\frac{k}{2}\le ta_2+(1-t)\,b_2\le\frac{k}{2}}$$

הראנוכי $\star,\star\star$ ולכן נובע כי

$$(ta_1+(1-t)\,b_1,ta_2+(1-t)\,b_2)\in C$$

לפי הגדרת C.מ$\star\star\star$נובע כי $ta+(1-t)\,b\in C$.

כלומר הראנו כי $\forall a,b\in C:\forall t\in[0,1]:ta+(1-t)\,b\in C$ ולכן $\square$ $C=$ קבוצה קמורה.

הגדרה 11. תהא $C\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה כלשהיא אזי לכל $q\in\mathbb{R}^n$ נגדיר $q+C=\{x+q\mid x\in C\}$.

טענה 12. לכל $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ תהא $C\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה קמורה כלשהיא אזי לכל $q\in\mathbb{R}^n$ מתקיים כי $q+C$ קמורה גם היא.

הוכחה:

יהיו $a,b\in(q+C)$ אזי מהגדרת $q+C$ נובע כי $\exists c_1,c_2\in C: a=c_1+q, b=c_2+q$.

מכיוון ש$c_1,c_2\in C$ נובע כי לכל $j\in[0,1]$ נובע כי $tc_1+(1-t)c_2\in C$ (נסמן ✡).

יהא $t\in[0,1]$ כלשהו.

אזי מתקיים

$$\begin{aligned} at+b(1-t) &= (c_1+q)t+(c_2+q)(1-t) \\ &= (c_1t+qt)+c_2(1-t)+q(1-t) \\ &= (c_1t+\cancel{qt})+c_2(1-t)+q\left(1-\cancel{t}\right) \\ &= \overbrace{tc_1+c_2(1-t)}^{\in C\left(\text{ from✡}\right)}+q \\ &\in q+C \end{aligned}$$

ולכן הוכחנו כי

$$\forall a,b\in q+C, \forall t\in[0,1]: at+b(1-t)\in q+C$$

ולכן הראנו כי $q+C$ קמורה.

הערה 13. ניתן היה גם להוכיח עבור סיבובים זה אבל אובר קיל מוגזם.

טענה 14. יהא C_1,C_2 קבוצות קמורות אזי $C_1\cap C_2$היא קבוצה קמורה.

הוכחה:

אם $C_1\cap C_2=\emptyset$ הגדרת הקמירות מתקיימת באופן ריק וסיימנו.אחרת $C_1\cap C_2\neq\emptyset$.

$$C_1\text{convex is } \Rightarrow \forall a,b\in C_1: \forall t\in[0,1]: ta+(1-t)b\in C_1$$

$$C_2\text{convex is } \Rightarrow \forall x,y\in C_2: \forall t\in[0,1]: tx+(1-t)y\in C_2$$

יהיו $m,n\in C_1\cap C_2$.יהיא $t\in[0,1]$.אזי

- $m,n\in C_1\cap C_2$ ובפרט $m,n\in C_1$ מהגדרת החיתוך. ומכאן מהגדרת קמירות C_1 נובע כי $m+(1-t)n\in C_1$.
- $m,n\in C_1\cap C_2$ ובפרט $m,n\in C_2$ מהגדרת החיתוך. ומכאן מהגדרת קמירות C_2 נובע כי $m+(1-t)n\in C_2$.
- הראנו כי $m+(1-t)n\in C_1$ וגם כי $m+(1-t)n\in C_2$ ולכן מהגדרת החיתוך נובע כי $m+(1-t)n\in C_1\cap C_2$

הראנו כי $\forall m,n\in C_1\cap C_2, \forall t\in[0,1]$ מתקיים כי$m+(1-t)n\in C_1\cap C_2$ ולכן $C_1\cap C_2$ צורה קמורה.

נוכיח את המשפט

טענה 15. כל ריבוע הוא צורה קמורה.

הוכחה:

יהא A ריבוע.

A נסמן את האורך הצלע של A להיות a נסמן את מרכזו להיות (x,y).

נסמן C להיות קבוצה של הריבוע בעל אורך צלע a שממרוכז סביב הראשית.

לפי 10 נובע כי C קמור.אזי $A=C+(x,y)$ צורה קמורה לפי 12.

טענה 16. (הטענה הסופית שאנו רוצים להוכיח) חיתוך של הריבוע ושל צורה קמורה הוא צורה קמורה בעצמו.

הוחכה:

יהא הריבוע ,לפי 15 נובע כי הוא צורה קמורה.לכן לפי 14 נובע שהחיתוך של הריבוע והצורה הקמורה הינו קמור.

■

סעיף ג

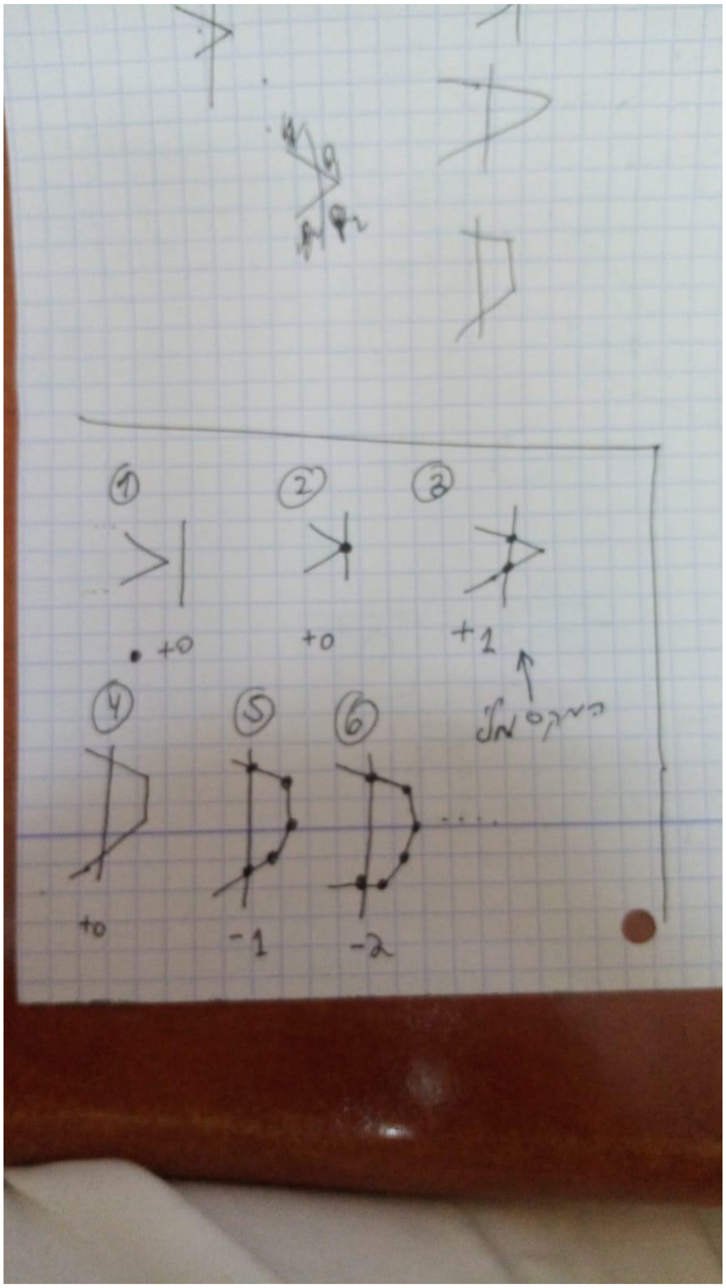
אנו מחפשים פונ' $T : \mathbb{N} \backslash \{0, 1, 2\} \to \mathbb{N}$.

חסם תחתון טרוואלי על הפונק הזו הוא כמובן n (במקרה שהפולינום מוכל ממש בריבוע).

בנוסף מסעיף א' אנו יודעים כי $T(3) = 7$.

חשוב לשים לב שעבור פוליגון קמור וחצי מישור נתון לא ייתכן כי שלושה צלועות או יותר של הפוליגון יחצו את חצי המישור (אם כך הדבר הפוליגון אינו קמור)

אבחנה: מחיתוך של חצי מישור של פוליגון בעל n קודקודים נוכל לקבל לכל היותר פוליגון עם $n + 1$ קודקודים.



חיתוך עם ריבוע שקול לחיתוך של 4 חצאי מישורים כאלו.נוכל לקבל סה"כ פוליגון עם $n+4$ צלעות.

הערה 17. זה דיי הוכחה בחווה..לא מתמטית/ריגורוזית.