שאלה 4

סעיף א

קווטרניון הסיבוב סביב v בזוית θ הוא

$$q=\left(\cos\frac{\theta}{2},\sin\frac{\theta}{2}\frac{v}{\|v\|}\right)=\left(\cos\frac{\|v\|}{2},\sin\frac{\|v\|}{2}\frac{v}{\|v\|}\right)$$

כזכור היטב מחדו"א 1מ, פיתוח טיילור לפונקציות הטריגונומטריות הוא

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\cdots,\qquad \cos x=1-\frac{x^2}{2}+\cdots$$

לכן קירוב מסדר ראשון ל-q נותן

$$q\approx\left(1,\frac{\|v\|}{2}\frac{v}{\|v\|}\right)=\left(1,\frac{v}{2}\right)$$

לכן, עבור ווקטור w

$$\begin{aligned}R(w)=\bar{q}\cdot(0,w)\cdot q&=\left(1,-\frac{v}{2}\right)(0,w)\left(1,\frac{v}{2}\right)=\left(\frac{v\cdot w}{2},w+\frac{v\times w}{2}\right)\left(1,\frac{v}{2}\right)\\&=\left(\frac{v\cdot w}{2}-(w+v\times w)\cdot\frac{v}{2},\frac{v\cdot w}{4}v+w+\frac{v\times w}{2}+(w+v\times w)\times\frac{v}{2}\right)\end{aligned}$$

נזניח את כל האיברים שהם מסדר $\|v\|^2$ (כלומא אלה שמכילים מכפלה של v בעצמו ונקבל,

$$R(w)=\left(\frac{v\cdot w}{2}-\frac{v\cdot w}{2},w+\frac{v\times w}{2}+\frac{v\times w}{2}\right)=(0,w+v\times w)$$

סעיף ב

צריך להראות ש-

$$w+v\times w=(I+M)w$$

כאשר I ו-M נתונות. ברור ש-$w=Iw$ לכן נותר להראות ש-$v\times w=Mw$. נכתוב זאת בצורה מפורשת:

$$v\times w=\begin{pmatrix}v_yw_z-v_zw_y\\v_zw_x-v_xw_z\\v_xw_y-v_yw_x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-v_z&v_y\\v_z&0&-v_x\\-v_y&v_x&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_x\\w_y\\w_z\end{pmatrix}=Mw$$