מבחן במקצוע גרפיקה ממוחשבת

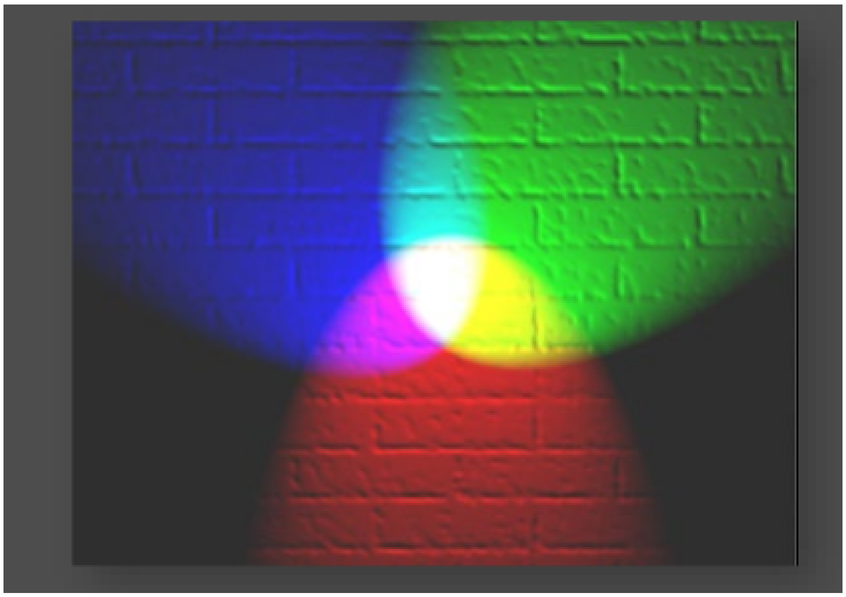
12 בפברואר 2021

תוכן העניינים

שאלה מספר 1

סעיף 1

עובדה 1. חיבור צבע אדום וכחול נותן צבע מג'נטה.



העין האנושית מבצעת מיצוע "LP-filter" כשהיא מתבוננת על הפיקסלים של המסך ומכאן נובעת דרך פעולותו.

המשתמש יכול להדליק את הפיקסל בכמה צבעים שונים : $\boxed{R \mid G \mid B}$ העין תבצע את המיצוע של הצבעים השונים (למעשה זה מה שאנו קוראים לו "חיבור צבעים") ובכך ייתקבל הגוון הרצוי לפיקסל/ים.

הסטודנט הדליק את R, B וכיבה את G ולכן שורת הפיקסלים נראתה כך:

$$\cdots\boxed{R \mid G \mid B}\boxed{R \mid G \mid B}\boxed{R \mid G \mid B}\boxed{R \mid G \mid B}\boxed{R \mid G \mid B}\boxed{R \mid G \mid B}\boxed{R \mid G \mid B}\cdots$$

הG מכובה ולכן אפשר להתייחס לזה כ$K - black$:

$$\cdots\boxed{R \mid K \mid B}\boxed{R \mid K \mid B}\boxed{R \mid K \mid B}\boxed{R \mid K \mid B}\boxed{R \mid K \mid B}\boxed{R \mid K \mid B}\boxed{R \mid K \mid B}\cdots$$

העין האנושית מבצעת את המיצוע ולפי 1 ולכן במקום לראות שני פיקסלים סמוכים כאדום וכחול נראה שני פיקסלים בצבע מג'נטה:

$$\cdots\boxed{M \mid K \mid M}\boxed{M \mid K \mid M}\boxed{M \mid K \mid M}\boxed{M \mid K \mid M}\boxed{M \mid K \mid M}\boxed{M \mid K \mid M}\cdots$$

וזה מסביר את התופעה הנ"ל.

סעיף 2

נניח והסטוטדנט רצה לצייר קו אנכי ברזולוציה של $\frac{1}{3}$ ובצע במערב 2 צבעים או פחות מתוך R,G,Bהוא יכול לנצל את התופעה על מנת לצייר אותם.

לדוגמא,נניח והסטודנט רצה לצייר קו אנכי בצבע מג'נטה M על המסך,הוא יכול לעשות כך באופן הבא:לבחור שני טורי פיקסלים צמודים ובטור הימני להדליק רק את הנורה האדומה ובטור השמאלי להדליק רק את הנורה הירוקה:

⋮

⋯	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	⋯
⋯	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	⋯
⋯	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	⋯
⋯	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	⋯

⋮

מהתופעה שתיארנו קודם, אנחנו נראה את הקו הזה באופן הבא:

⋮

⋯	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ M	M ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	⋯
⋯	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ M	M ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	⋯
⋯	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ M	M ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	⋯
⋯	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ M	M ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	⋯

⋮

כלומר ציירנו את הקו בעובי $\frac{2}{3}$ פיקסל, שזה עובי קטן יותר מהרזולוציה של המסך.

הערה 2. הדרך הנאיביתלצייר את אותו הקו היא על ידי שימוש בפיקסל אחד:

⋮

⋯	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	⋯
⋯	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	⋯
⋯	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	⋯
⋯	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	⋯

⋮

ואז לעיין האנושית זה ייראה

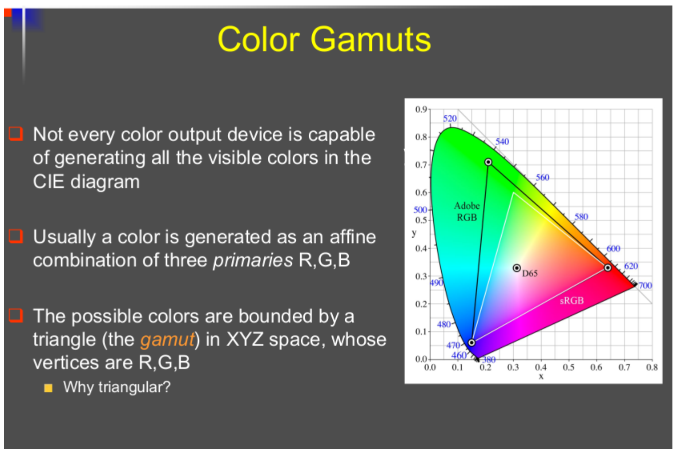
⋮

⋯	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	M ∣ M ∣ M	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	⋯
⋯	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	M ∣ M ∣ M	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	⋯
⋯	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	M ∣ M ∣ M	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	⋯
⋯	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	M ∣ M ∣ M	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	R ∣ G ∣ B	⋯

⋮

סעיף 3

נזכר בשקף הבא:



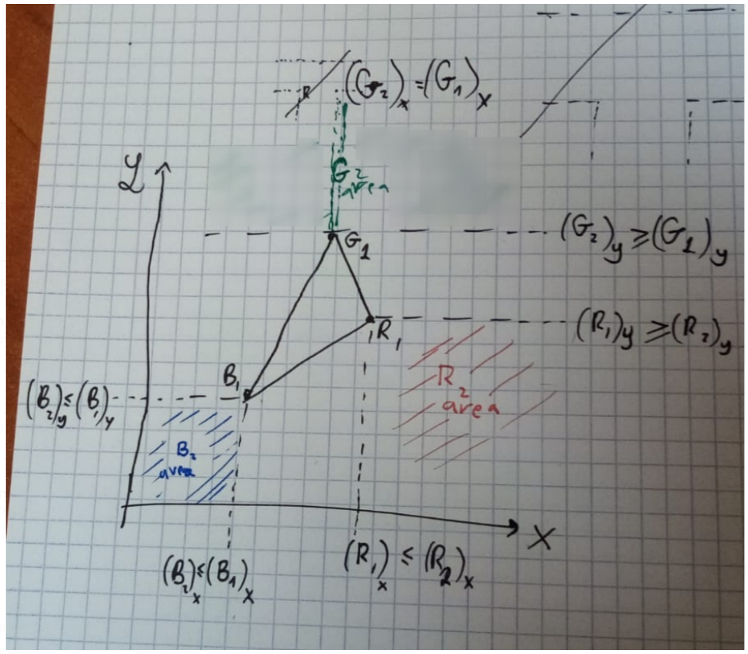
- מסך 1 עם גמוט (R_1, G_1, B_1)
- מסך 2 עם גמוט (R_2, G_2, B_2)

התנאי על (R_2, G_2, B_2) על מנת שמסך 2 יוכל להציג את התמונה כפי שהיא היתה באופן זהה למסך 1 עלינו לדרוש שהמשולש (הגמוט) שנוצר על ידי גמוט 2 (מסך 2) יכיל בתוכו את המשולש (הגמוט) של מסך 1.

במילים אחרות

$$\begin{array}{c|c|c} (R_2)_x \geq (R_1)_x & (G_2)_x = (G_1)_x & (B_2)_x \leq (B_1)_x \\ (R_2)_y \leq (R_1)_y & (G_2)_y \geq (G_1)_y & (B_2)_y \leq (B_1)_y \end{array}$$

תיאור ויזואלי של הנ"ל:



נדגיש כי כל התנאים צריכים להתקיים גם יחד.

הערה 3. נבחין כי אילו מסך 1 ו 2 זהים אז המסכים עומדים בתנאים הנ"ל (אי השוויון הוא חלש).

סעיף 4 - חימום (נסיון לגשת לשאלה)

נניח ואנו עומדים בתנאים הנ"ל,נמצא את הטרנס' המתאימה.

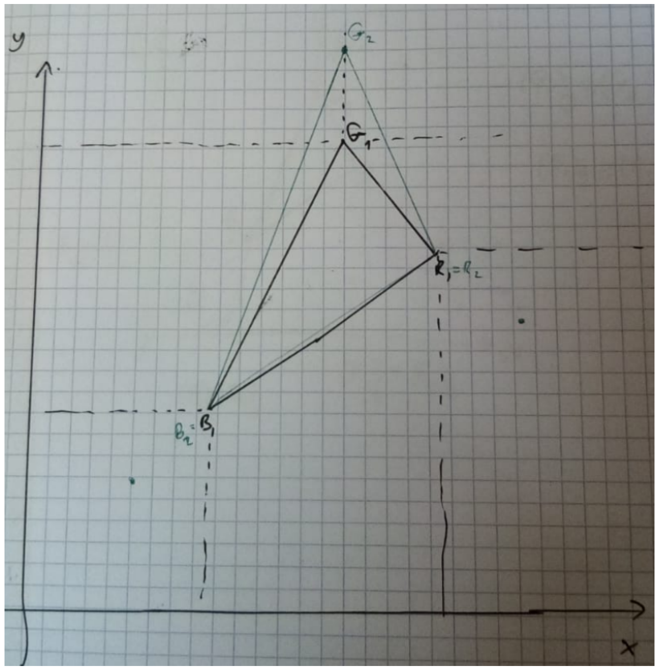
כלומר בהנתן נקודה על המשולש (גמוט) של מסך 1 עלינו למצוא את הנקודה המתאימה לה במשולש(גמוט) 2.

ננסה להתחיל להבין לאט לאט איך זה הולך להראות.

עם שני המסכים זהים , אז הטרנס' תהיה טרנס' הזהות.

אם שני המסכים זהים בR, B ורק שונים בG אזי מהתנאים נובע כי $(G_2)_y > (G_1)_y$.וגם נובע כי $B_2 = B_1 \equiv B, R_2 = R_1 \equiv R$.

איור:



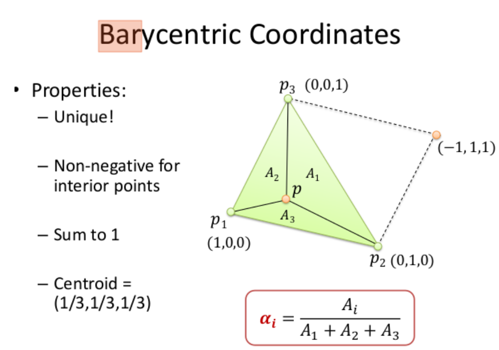
נסמן את הטרנס T.
אנו יודעים כי

$$B_2 = B_1 \equiv B, R_2 = R_1 \equiv R \Rightarrow T\left((0,0,1)\right) = (0,0,1)\,, T\left((1,0,0)\right) = (1,0,0)$$

וגם ידוע כי אמור להתקיים

$T\left((0,1,0)\right) =$ of coordinates brycentric$G_1\triangle$ gammot (bigger) 2'nd the inside

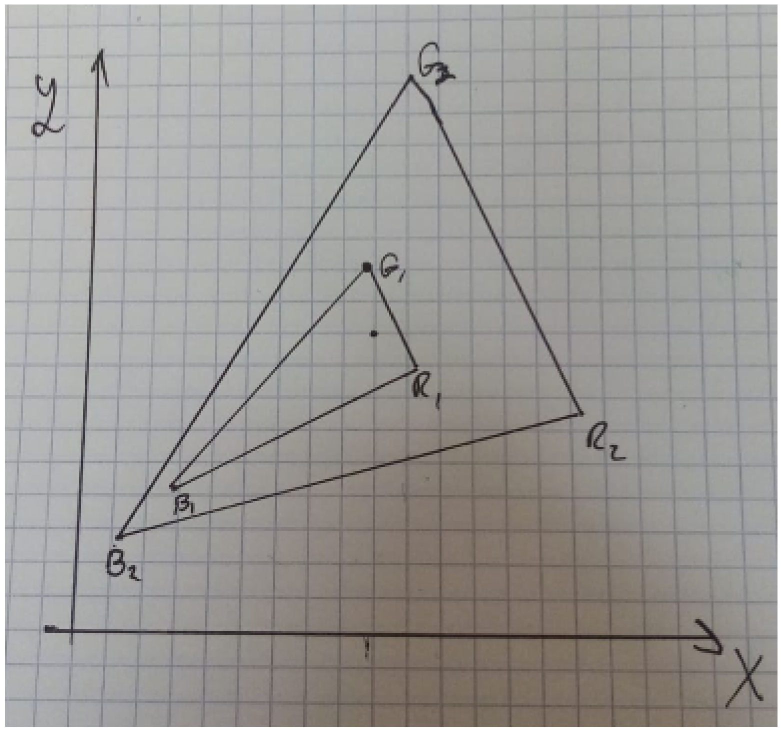
נזכר בשקף הנחמד הבא:



אהההה יש לי רעיון!

סעיף 4 - תשובה

באופן כללי אנו יודעים כי מתקיים



לפי התנאים של סעיף 1 הגמוט של מסך 1 מוכל בגמוט של מסך2 ובפרט הקודקודים של גמוט אחד R_1, G_1, B_1 מוכלים בגמוט של מסך 2.
נסמן $\triangle_{\text{area}}^{a,b,c}$ שטח המשולש הנוצר על ידי הקודקודים a, b, c.

- נמצא את הקור' הבריצנטריות של R_1 לפי גמוט 2.כלומר

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{\triangle_{\text{area}}^{R_1,G_2,B_2} + \triangle_{\text{area}}^{R_1,R_2,B_2} \triangle_{\text{area}}^{R_1,R_2,G_2}} \left(\triangle_{\text{area}}^{R_1,G_2,B_2}, \triangle_{\text{area}}^{R_1,R_2,B_2}, \triangle_{\text{area}}^{R_1,R_2,G_2}\right) \\ &= \frac{1}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} \left(\triangle_{\text{area}}^{R_1,G_2,B_2}, \triangle_{\text{area}}^{R_1,R_2,B_2}, \triangle_{\text{area}}^{R_1,R_2,G_2}\right) \\ &= \left(\frac{\triangle_{\text{area}}^{R_1,G_2,B_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}}, \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_1,R_2,B_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}}, \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_1,R_2,G_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}}\right) \end{aligned}$$

- באופן דומה עבור B_1:

$$\begin{aligned} B_1 &= \dots \\ &= \left(\frac{\triangle_{\text{area}}^{B_1,B_2,G_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}}, \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_1,G_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}}, \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_2,G_2,B_1}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}}\right) \end{aligned}$$

- באופן דומה עבור G_1:

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \ldots \\
&= \left(\frac{\triangle_{\text{area}}^{G_1,G_2,B_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}}, \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_2,G_1,B_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}}, \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_2,G_2,G_1}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}}\right)
\end{aligned}
$$

כלומר מצאנו תחילה כי

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_1,G_2,B_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} R_2 + \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_1,R_2,B_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} G_2 + \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_1,R_2,G_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} B_2 \equiv T_r \\
B_1 &= \frac{\triangle_{\text{area}}^{B_1,B_2,G_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} R_2 + \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_1,G_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} G_2 + \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_2,G_2,B_1}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} B_2 \equiv T_b \\
G_1 &= \frac{\triangle_{\text{area}}^{G_1,G_2,B_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} R_2 + \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_2,G_1,B_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} G_2 + \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_2,G_2,G_1}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} B_2 \equiv T_g
\end{aligned}
$$

ולכן בהנתן נקודה $\left(\tilde{R},\tilde{G},\tilde{B}\right) \in \mathbb{R}^3$ ביחס לגמוט 1, נבצע את הטרנס' הבאה:

$$
\begin{aligned}
T\left(\left(\tilde{R},\tilde{G},\tilde{B}\right)\right) = {} & \overbrace{\left(\frac{\triangle_{\text{area}}^{R_1,G_2,B_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} \overbrace{(1,0,0)}^{R_2\text{terms}\triangle_2\text{ on}} + \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_1,R_2,B_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} \overbrace{(0,1,0)}^{G_2\text{terms}\triangle_2\text{ on}} + \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_1,R_2,G_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} \overbrace{(0,0,1)}^{B_2\text{terms}\triangle_2\text{ on}}\right)}^{=R_1\text{terms}\triangle_2\text{ on}} \tilde{R} \\
& \overbrace{\left(\frac{\triangle_{\text{area}}^{G_1,G_2,B_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} \overbrace{(1,0,0)}^{R_2\text{terms}\triangle_2\text{ on}} + \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_2,G_1,B_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} \overbrace{(0,1,0)}^{G_2\text{terms}\triangle_2\text{ on}} + \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_2,G_2,G_1}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} \overbrace{(0,0,1)}^{B_2\text{terms}\triangle_2\text{ on}}\right)}^{=G_1\text{terms}\triangle_2\text{ on}} \tilde{G} + \\
& \overbrace{\left(\frac{\triangle_{\text{area}}^{B_1,B_2,G_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} \overbrace{(1,0,0)}^{R_2\text{terms}\triangle_2\text{ on}} + \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_1,G_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} \overbrace{(0,1,0)}^{G_2\text{terms}\triangle_2\text{ on}} + \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_2,G_2,B_1}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} \overbrace{(0,0,1)}^{B_2\text{terms}\triangle_2\text{ on}}\right)}^{=B_1\text{terms}\triangle_2\text{ on}} \tilde{B} \\
& = (R_{\text{out}}, G_{\text{out}}, B_{\text{out}})
\end{aligned}
$$

וזו הטרנס המתקבלת.
בניסוח אחר הטרנס' המתקבלת היא:

$$
\boxed{\begin{pmatrix}
\frac{\triangle_{\text{area}}^{R_1,G_2,B_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} & \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_1,R_2,B_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} & \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_1,R_2,G_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} \\
\frac{\triangle_{\text{area}}^{G_1,G_2,B_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} & \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_2,G_1,B_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} & \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_2,G_2,G_1}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} \\
\frac{\triangle_{\text{area}}^{B_1,B_2,G_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} & \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_1,G_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} & \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_2,G_2,B_1}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} R_{\text{in}} \\ G_{\text{in}} \\ B_{\text{in}} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} R_{\text{out}} \\ G_{\text{out}} \\ B_{\text{out}} \end{pmatrix}}
$$

הערה 4. בשום שלב לא מחלקים באפס כי השטח $\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2} \geq 0$ כי $\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2} \overbrace{\geq}^{\triangle_2 \supseteq \triangle_1} \triangle_{\text{area}}^{R_1,B_1,G_1} > 0$..(ואם $\triangle_{\text{area}}^{R_1,B_1,G_1} = 0$ אז אין משמעות למסך 1 הוא לא יכול לשדר אף צבע מלבד צבע בודד..וזו כנראה לא כוונת השאלה.)

הערה 5. סעיף מסובך זה היה..מקווה שזה הכוונה שלהם ושלא פספסתי ..ישמצב סביר שטעיתי כאן /הלכתי רחוק מדי אבל כשאין סריקה ממש אי אפשר לדעת.☹.

סעיף 5

במידה והתנאי מסעיף c לא מתקיים ואנו נפעיל את הטרס' הנ"ל אז לא נוכל להציג במדויק על מסך 2 את התמונה ממסך 1.

אנחנו נציג במדויק רק את כל הנקדוות שנמצאות בחיתוך בין שני המשולשים $\triangle_1 \cap \triangle_2$.

עבור כל הפיקסלים שמקיימים $\{p \mid p \in \triangle_1 \wedge p \notin \triangle_2\}$ לא נוכל לשחזר אותם במדויק (במקרה כזה אחת או יותר מהקור' הבריצנטריות באלג' $\left\{\begin{matrix} \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_1,G_2,B_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}}, & \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_1,R_2,B_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}}, & \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_1,R_2,G_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} \\ \frac{\triangle_{\text{area}}^{G_1,G_2,B_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}}, & \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_2,G_1,B_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}}, & \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_2,G_2,G_1}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} \\ \frac{\triangle_{\text{area}}^{B_1,B_2,G_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}}, & \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_1,G_2}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}}, & \frac{\triangle_{\text{area}}^{R_2,G_2,B_1}}{\triangle_{\text{area}}^{R_2,B_2,G_2}} \end{matrix}\right\}$ יחרגו מהתחום $[0,1]$ ואנחנו נאלץ לבצע clipping מתאים במקרה הזה ונייצג את הצבע הנ"ל על ידי בחירת צבע מאחת השפות של גמוט 2.

שאלה מספר 2

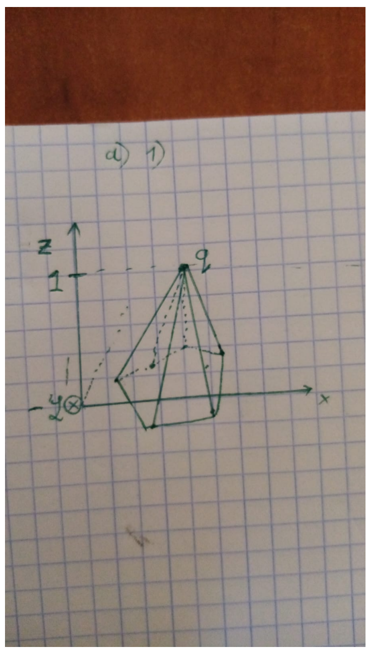
הערה 6. מאופי השאלה משתמע שקודם מזיזים צמתי קיימות ורק אז מחשבים את הצמתים החדשות.

הערה 7. יש חוסר בהירות מסויים לגבי מה נעשה קודם (יצרת צמתים חדשות או הזזת קיימות).

סעיף 1

תוכן

תת סעיף a



תת סעיף b

$$q^{\text{coordinates new}} = \frac{w_n \cdot q + \sum_{i=1}^{n} p_i}{w_n + n}$$

that simplicity for assu,e we

$$\left[q^{\text{coordinates new}}\right]_z = \left[\frac{w_n \cdot q + \sum_{i=1}^{n} p_i}{w_n + n}\right]_z = \frac{w_n \cdot 1 + \sum_{i=1}^{n} 0}{w_n + n} = \frac{w_n}{w_n + n} \overbrace{=}^{w_n = n} \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}$$

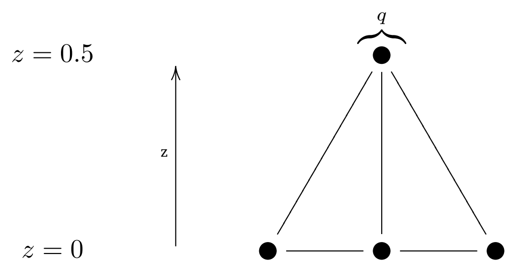
לכן התשובה היא

$$\left[q^{\text{coordinates new}}\right]_z = 0.5$$

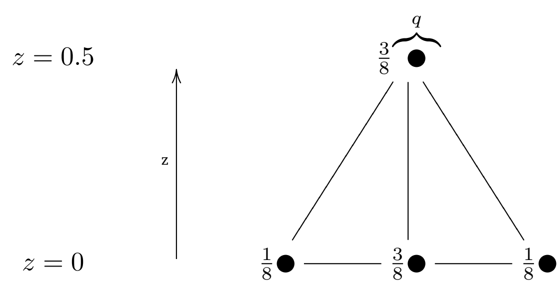
כלומר קור' z החדשה של q היא $z = 0.5$.

תת סעיף c

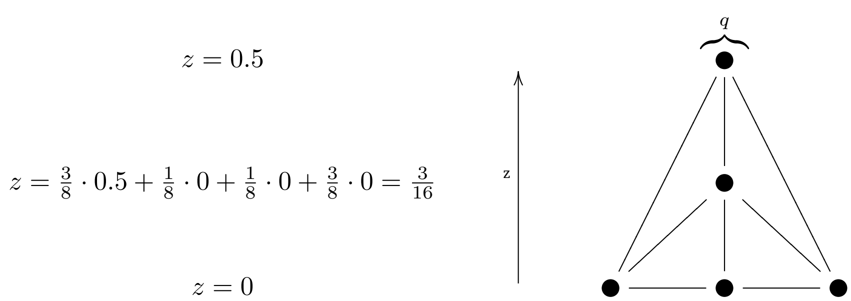
נתובן על פריסה דו מידתית של המבנה של שכן חדש שיהיה לq לאחר ייצור הצמתים החדשים.
להלן הפריסה לפני הספת הצומת:



נתבונן במשקלים לקראת הוספת הצומת



ונוספית את הצומת:



כלומר הגובה של הצומת החדשה הוא $z = \frac{3}{16}$.

תת סעיף d

נבחין כי תכונה זו לא תשתנה כי החישוב לא היה תלוי בn אל רק במשקלים המוגדרים מראש של המשולשים.(וזאת מכיוון שבתחילת השאלה אנו הנחנו כי $w_n = n$ וזה ביטל לנו את התלות בn) .

סעיף 2

תהא טרנס' אפינית $T_v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ מוגדרת באופן הבא: $\exists A \in \mathbb{R}^{3\times3}, b \in \mathbb{R}^3 : \forall v \in \mathbb{R}^3$.$T_v(v) = Av + b$

הערה 8. נרחיב את ההגדרה של T ל $T : \{\mathbb{R}^3\}_{i=1}^m \to \{\mathbb{R}^3\}_{i=1}^m$ (שזה למעשה להפעיל את T איבר איבר על כל איבר בMSESH כאשר m הוא מספר הצמתים בmesh.)

הגדרה 9. נסמן את single subdevision step על ידי S.

הערה 10. S הוא השלב בו מזיזים את הצמתים הקיימים.נסמן $S : \{\mathbb{R}^3\}_{i=1}^m \to \{\mathbb{R}^3\}_{i=1}^m$ כאשר m הוא מספר הצמתים בmesh.

טענה 11. T מתחלפת עם S

הוכחה:

יהא $M = \{v_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathbb{R}^3$ mesh משולשי.

תהא צומת $v \in M$ (כלומר שייכת למש) ויהיו $p_1, \ldots, p_n \in M$ השכנים שלה.אזי

$$S(v) = \frac{w_n v + \sum_{i=1}^n p_i}{w_n + n}$$

בנוסף

$$T(S(v)) = T\left(\frac{w_n v + \sum_{i=1}^n p_i}{w_n + n}\right) = A\left(\frac{w_n v + \sum_{i=1}^n p_i}{w_n + n}\right) + b = \frac{w_n A v + \sum_{i=1}^n A p_i}{w_n + n} + b$$

מצד שני מתקיים (לא נוצרו לאחד T שכנים חדשים או נעלמו שכנים קיימים)

$$S(T(v)) = S\left(Ax + b, \text{neighboors with } \{Ap_i + b\}_{i=1}^n\right) = \frac{w_n(Ax + b) + \sum_{i=1}^n (Ap_i + b)}{w_n + n}$$

$$= \frac{w_n Ax + w_n b + \sum_{i=1}^n Ap_i + \sum_{i=1}^n (b)}{w_n + n} = \frac{w_n Ax + \sum_{i=1}^n Ap_i + (w_n + n) b}{w_n + n} = \frac{w_n Av + \sum_{i=1}^n Ap_i}{w_n + n} + b$$

מסקנה

$$T(S(v)) = S(T(v))$$

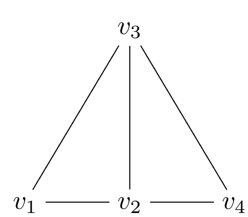
כלומר T וS מתחלפים.$\star$

הגדרה 12. נסמן את שלב הוספת הצמתים החדשות על ידי N.

טענה 13. T מתחלפת עם S.

הוחכה:

יהיו $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ שני משולשים בעלי צלע משותפת, כלשהם:



אזי שלב יצירת הצתים החשים יכול להיותמתואר לע ידי

$$N\left(\{v_1,v_2,v_3,v_4\}\right)=\left\{v_1,v_2,v_3,v_4,\frac{1}{8}v_1+\frac{3}{8}v_2+\frac{3}{8}v_3+\frac{1}{8}v_4\right\}$$

אזי

$$\begin{aligned}T\left(N\left(\{v_1,v_2,v_3,v_4\}\right)\right)&=T\left(\left\{v_1,v_2,v_3,v_4,\frac{1}{8}v_1+\frac{3}{8}v_2+\frac{3}{8}v_3+\frac{1}{8}v_4\right\}\right)\\&=\left\{Av_1+b,Av_2+b,Av_3+b,Av_4+b,A\left(\frac{1}{8}v_1+\frac{3}{8}v_2+\frac{3}{8}v_3+\frac{1}{8}v_4\right)+b\right\}\\&=\left\{Av_1+b,Av_2+b,Av_3+b,Av_4+b,A\left(\frac{1}{8}v_1+\frac{3}{8}v_2+\frac{3}{8}v_3+\frac{1}{8}v_4\right)+b\right\}\\&=\left\{Av_1+b,Av_2+b,Av_3+b,Av_4+b,\frac{1}{8}Av_1+\frac{3}{8}Av_2+\frac{3}{8}Av_3+\frac{1}{8}Av_4+b\right\}\\&=☺\end{aligned}$$

מצד שני

$$\begin{aligned}N\left(T\left(\{v_1,v_2,v_3,v_4\}\right)\right)&=N\left(\{Av_1+b,Av_2+b,Av_3+b,Av_4+b\}\right)\\&=\left\{Av_1+b,Av_2+b,Av_3+b,Av_4+b,\left(\frac{1}{8}\left(Av_1+b\right)+\frac{3}{8}\left(Av_2+b\right)+\frac{3}{8}\left(Av_3+b\right)+\frac{1}{8}\left(Av_4+b\right)\right)\right\}\\&=\left\{Av_1+b,Av_2+b,Av_3+b,Av_4+b,\left(\frac{1}{8}Av_1+\frac{3}{8}Av_2+\frac{3}{8}Av_3+\frac{1}{8}Av_4+\frac{1}{8}b+\frac{3}{8}b+\frac{3}{8}b+\frac{1}{8}b\right)\right\}\\&=\left\{Av_1+b,Av_2+b,Av_3+b,Av_4+b,\left(\frac{1}{8}Av_1+\frac{3}{8}Av_2+\frac{3}{8}Av_3+\frac{1}{8}Av_4+b\right)\right\}\\&=☺\end{aligned}$$

ולכן

$$N\left(T\left(\{v_1,v_2,v_3,v_4\}\right)\right)=T\left(N\left(\{v_1,v_2,v_3,v_4\}\right)\right)$$

לכן הראנו כי T וN מתחלפים.$\star\star$

להוכחה המלאה: הפעלת השלבים S ואחריו T מהווים איטרציה בודדת של האלג'.כלומר הפעלת איטרציה של האלג' על מש מסומנת ומוגדרת $I\left(M\right)=N\left(S\left(M\right)\right)$.

צ"ל : הפעלת איטרציה של האלג' על מש ולאחר מכן הפעלת טרנס' אפינית מניבה את אותה תוצאה כמו הפעלת הטרנס' ולאחריה האיטרציה של האלג'.

כלומר **צל** שלכל מש M מתקיים $T\left(I\left(M\right)\right)=I\left(T\left(M\right)\right)$.

הוכחה:

יהא M מש כלשהו.

$$T\left(I\left(M\right)\right)\overbrace{=}^{I(M)=N(S(M))}T\left(N\left(S\left(M\right)\right)\right)\overbrace{=}^{\star\star}N\left(T\left(S\left(M\right)\right)\right)\overbrace{=}^{\star}N\left(S\left(T\left(M\right)\right)\right)\overbrace{=}^{I(M)=N(S(M))}I\left(T\left(M\right)\right)$$

כלומר הוכנחו כי

$$T\left(I\left(M\right)\right)=I\left(T\left(M\right)\right)$$

כמבוקש.

סעיף 3

הערה 14. כאן לצורך העניין אני מתייחסל step subdivision כאל שני השלבים S ואחריו T יחד.

מספר הצמתים השכנים של הvertex old לאחר step subdivision**:**

הגודל הזה אינו משתנה מהסיבה שעל כל וורטקס חדש שנוצר הוא נוצר על הצלע שחיברה שני **vertex old-ים יחד** ולכן לvertex old **מתווסף שכן (החדש) ונעלם שכן (השכן הישן שלו שהיה על אותה הצלע) ולכן לאחר** step subdivision**מספר הצמתים השכנים של כל vertex old אינו משתנה.**

(והצמתים החדשות מתחברות רק לעצמם ולא לצמתים ישנות פרט ל2 שנמצאות על הצלע המקורית שעליה שמנו את הצומת החדשה שהם כן מתחברות אליה (אבל היחידות))

מספר הצמתים השכנים של הvertex new לאחר step subdivision**:**

הערה 15. אני מניח שהצורה סגורה ואין לה שפות (לא למדנו מה האלג' עושה במקרים של שפות).

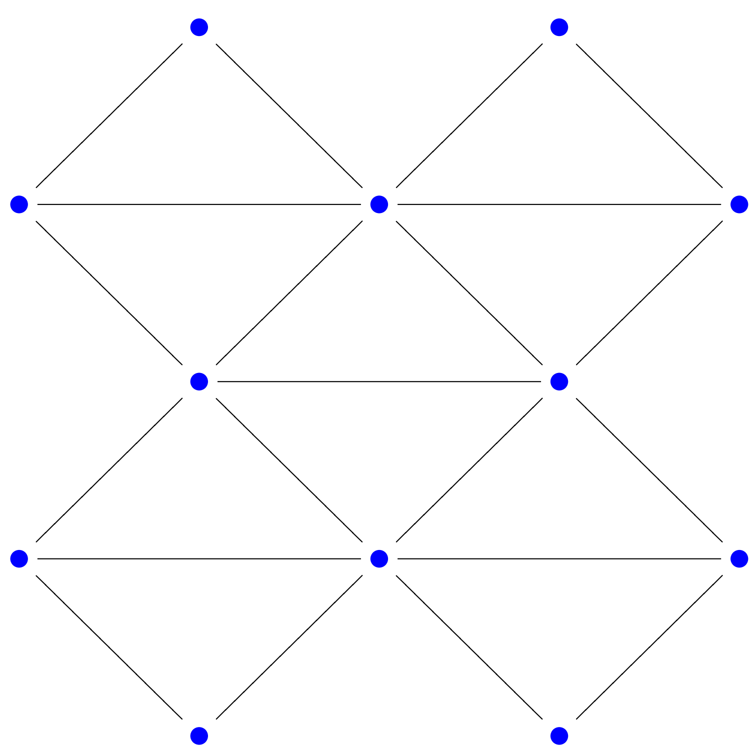
תחילה חשוב להבין כי vertex new נולד על צלע של שני **vertex old-ים** ולכן לאחר היצירה שלו יש לו 2 שכנים.

בנוסף לאחר שיוצרים את כל הvertex new מחברים בין כל הvertex new הסמוכים.

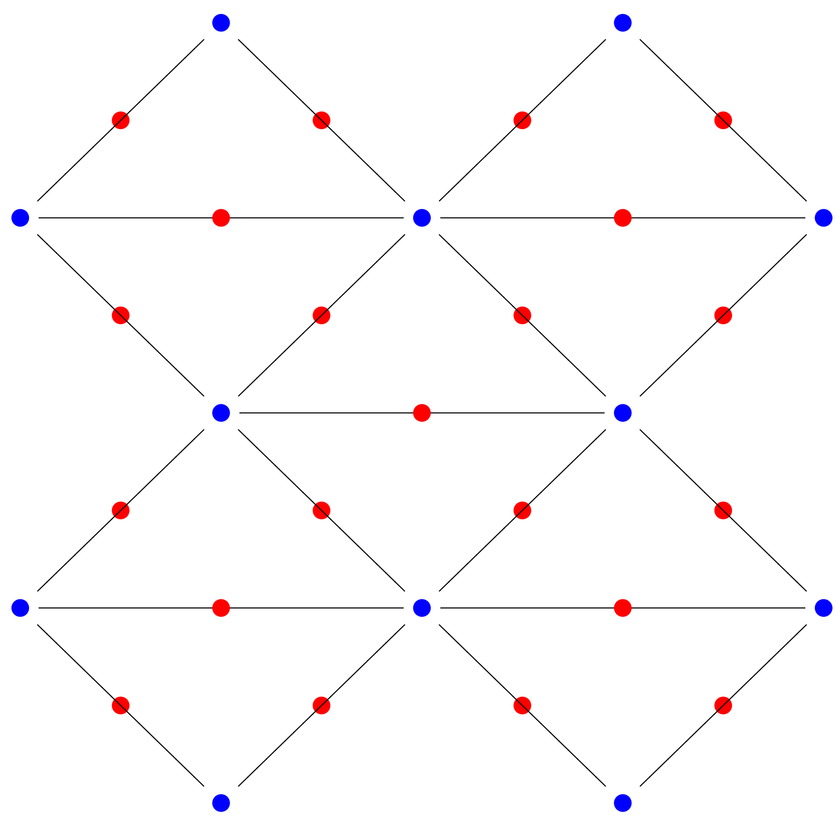
על מנת לחשב מספר השכנים החדשים נצייר את האלג'.

- מסמן צומת חדשה.
- מסמן צומת ישנה.

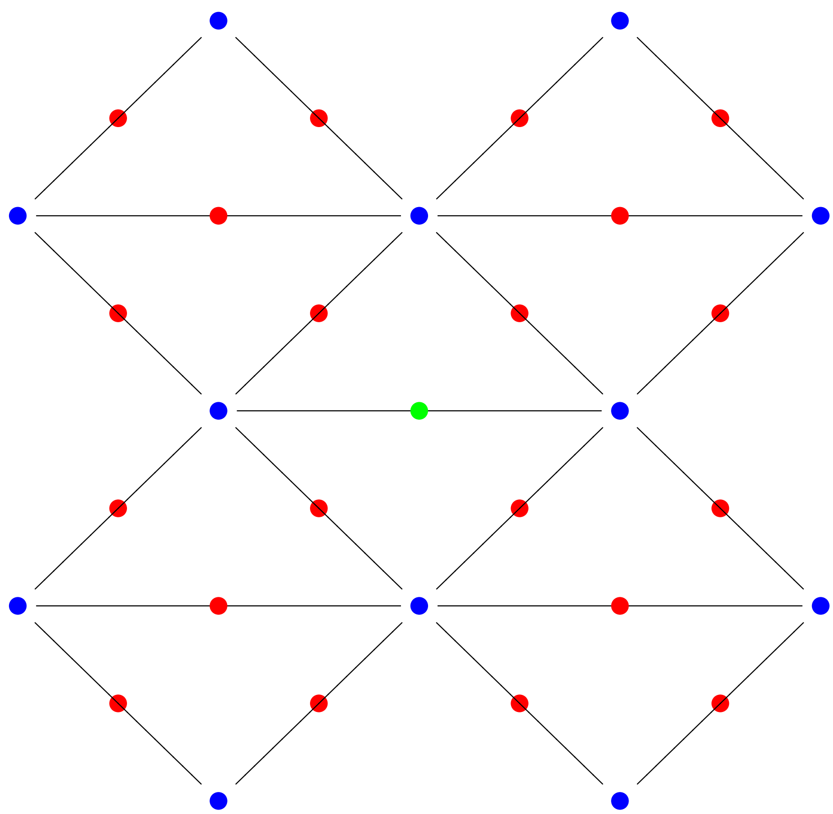
אזי לפני הפעלת האלג' נתובנן בחתיכה מהמש:



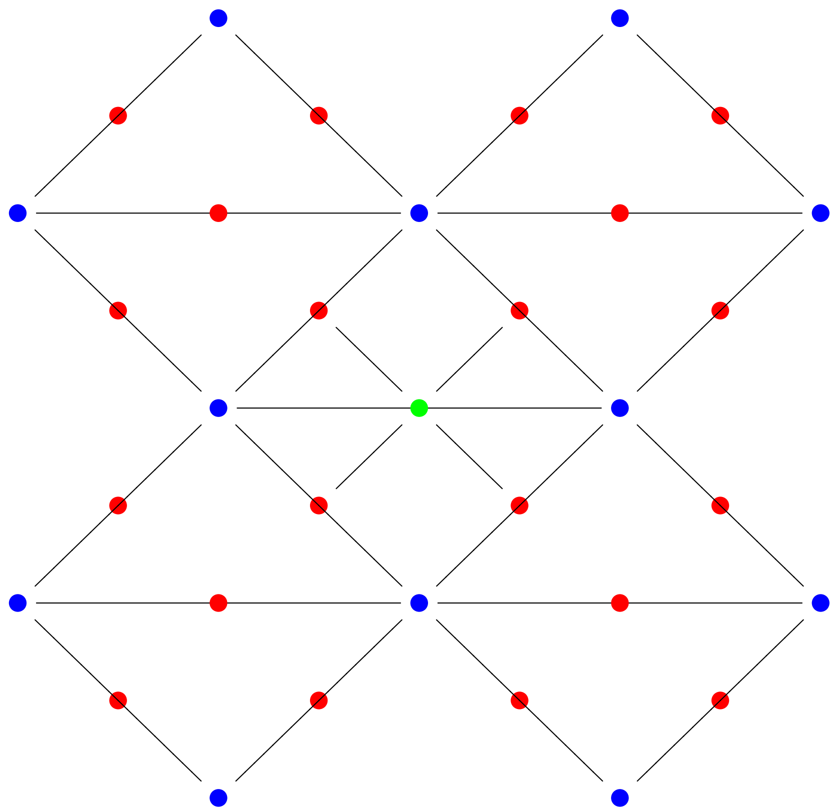
נוסיף את הצמתים החדשות:



נתמקד ב● המרכזי (נסמן אותו בירוק למען הנוחות) ●



נמתח ממנו קו לכל השכנים החדשים



סה"כ לנקודה החדשה שלנו יש 6 שכנים (2 חדשים ו 4 ישנים).
(וזה אכן המצב הרצוי שעליו דיברו איתנו בתרגול.)
ולכן התשובה הסופית היא:

	כמות שכנים
צומתחדש	6
צומת ישן	לא משתנה

שאלה מספר 3

הערה 16. איפה P_2?...לא חשוב.

סעיף 1

$$C(t)=\sum_{i=0}^{3}P_iB_i^3(t)$$

$$P_0=(0,2)\,,P_1=(0,1)\,,P_3=(1,0)\,,P_4=(2,0)$$

חשוב להבחין כי העקום עובר דרך $P_0=(0,2)$ ודרך $P_4=(2,0)$.
נחשב את העקום:

$$C(t)=(1-t)^3P_0+3t(1-t)^2P_1+3t^2(1-t)P_2+t^3P_3$$

$$C(t)=(1-t)^3(0,2)+3t(1-t)^2(0,1)+3t^2(1-t)(1,0)+t^3(2,0)$$

$$C(t)=\left(0,2(1-t)^3+3t(1-t)^2\right)+\left(3t^2(1-t)+2t^3,0\right)$$

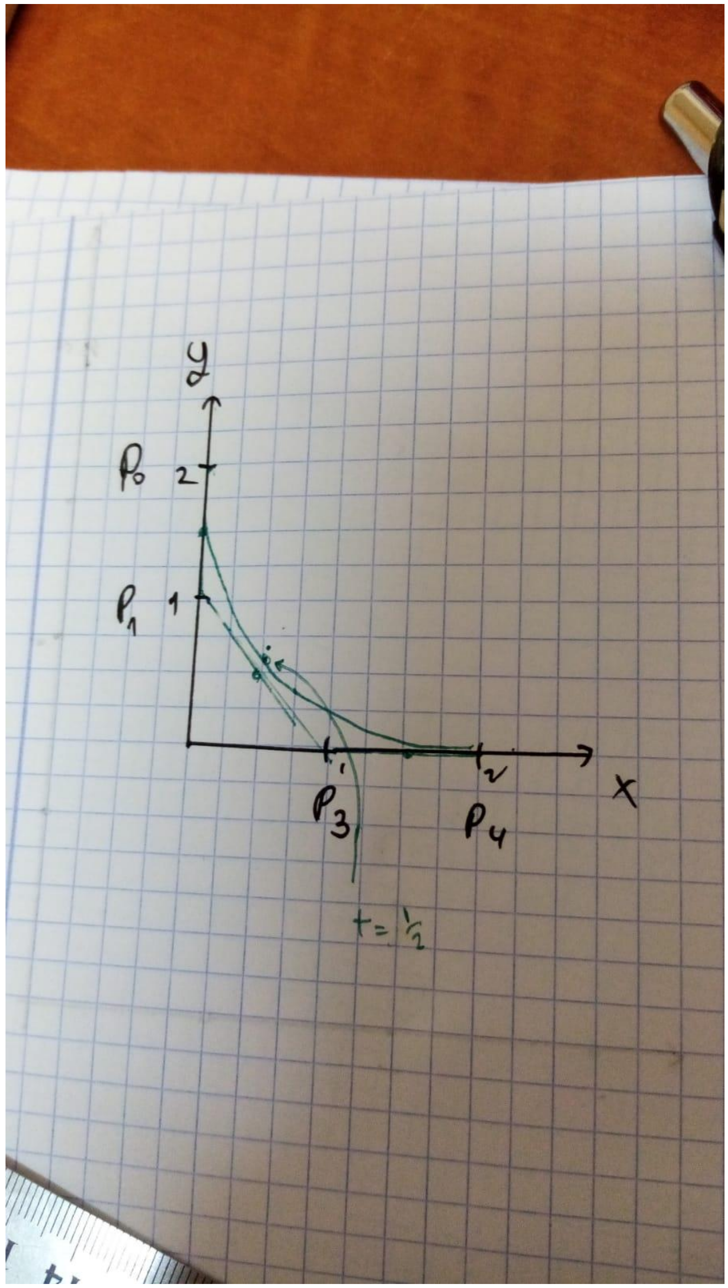
$$C(t)=\left(3t^2(1-t)+2t^3,2(1-t)^3+3t(1-t)^2\right)$$

$$\begin{aligned}C(0.5)&=\left(3\cdot(0.5)^3+2\cdot(0.5)^3,2\cdot(0.5)^3+3\cdot(0.5)^3\right)\\&=\left(5\cdot(0.5)^3,5\cdot(0.5)^3\right)\end{aligned}$$

כלומר ב$t=0.5$ התוצאה היא

$$C(0.5)=\left(5\cdot(0.5)^3,5\cdot(0.5)^3\right)$$

ציור של העקום
נחשב את הנקודה של העקום



סעיף 2

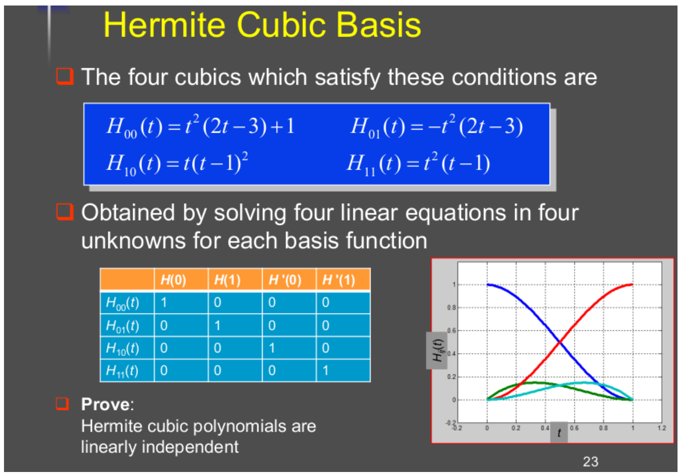
העקום המתקבל מסעיף 1:

$$C^{\text{biezier}}\left(t\right)=\left(3t^{2}\left(1-t\right)+2t^{3},2\left(1-t\right)^{3}+3t\left(1-t\right)^{2}\right)$$

עקום הרמיט קובי נתון עלידי

$$C^{\text{hermite}}(t) = \tilde{P}_0 H_{00}(t) + \tilde{P}_1 H_{01}(t) + \tilde{T}_0 H_{10}(t) + \tilde{T}_1 H_{11}(t)$$

נזכור כי נזכר בשקף הנחמד הבא:



לכן

$$C^{\text{hermite}}(t) = \tilde{P}_0\left(t^2(2t-3)+1\right) + \tilde{P}_1\left(-t^2(2t-3)\right) + \tilde{T}_0\left(t(t-1)^2\right) + \tilde{T}_1\left(t^2(t-1)\right)$$

אנו יודעים שעקום הרמיט קובי עובר בנק' $\tilde{P}_0, \tilde{P}_1$ ולכן נבחר $\tilde{P}_1 = P_4, P_0 = \tilde{P}_0$.כלומר
מכייוונש
נחשב את הנגזרת של העקום biezier .
חישוב עזר:

$$\frac{\partial}{\partial t} t^2(1-t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t^2 - t^3\right) = 2t - 3t^2 = t(2-3t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} t(1-t)^2 = \frac{\partial}{\partial t}\left(t\left(1-2t+t^2\right)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t - 2t^2 + t^3\right) = \left(1 - 4t + 3t^2\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left((1-t)^3\right) = -3(1-t)^2$$

חישוב מלא

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}C^{\text{biezier}}(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(3t^2(1-t)+2t^3, 2(1-t)^3+3t(1-t)^2\right)\\
&= \left(3t(2-3t)+6t^2, -6(1-t)^2+3\left(1-4t+3t^2\right)\right)\\
&= \left(6t-9t^2+6t^2, -6(1-t)^2+3\left(1-4t+3t^2\right)\right)\\
&= \left(6t-3t^2, -6\left(1-2t+t^2\right)+3\left(1-4t+3t^2\right)\right)\\
&= \left(-3t(t-2), -6+12t-6t^2+3-12t+9t^2\right)\\
&= \left(-3t(t-2), -3+3t^2\right)\\
&= \left(-3t(t-2), 3\left(t^2-1\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial t}C^{\text{biezier}}(t)\right]_{t=0} &= \left[\left(-3t(t-2), 3\left(t^2-1\right)\right)\right]_{t=0}\\
&= (0,-3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial t}C^{\text{biezier}}(t)\right]_{t=0} &= \left[\left(-3t(t-2), 3\left(t^2-1\right)\right)\right]_{t=1}\\
&= (3,0)
\end{aligned}
$$

ידוע שעקום קובי הרמיטי הנגזרות שלו ב$t=0$ הם $\tilde{T}_0$ ולכן $\tilde{T}_0=(0,-3)$.

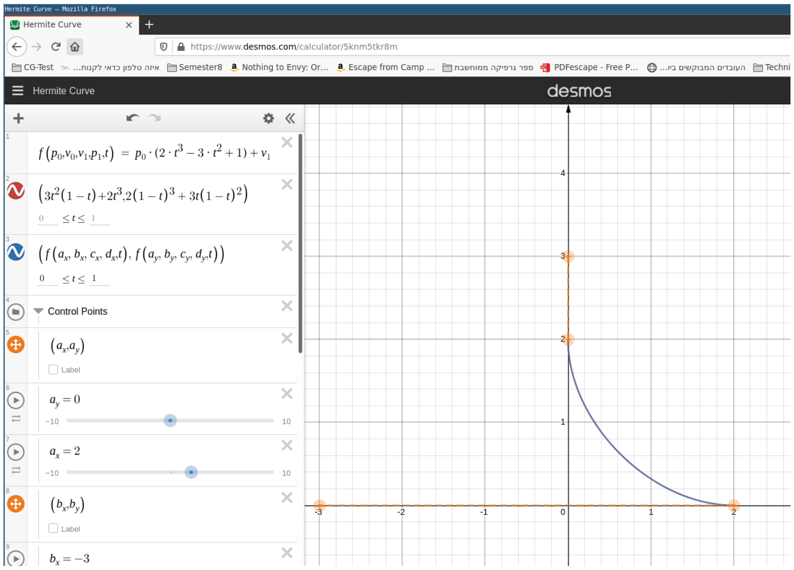
ידוע שעקום קובי הרמיטי הנגזרות שלו ב$t=1$ הם $\tilde{T}_1$ ולכן $\tilde{T}_1=(3,0)$.

ולכן הפרמרטים של ההרמיטי הם:

$$\tilde{P}_1=(2,0), \tilde{P}_0=(0,2)$$

$$\tilde{T}_0=(0,-3), \tilde{T}_1=(3,0)$$

בדיקת שפיות:הקווים מתכדים בדסמוס



סעיף 3

נזכור כי cubic bezier curves נתונות על ידי:

$$C(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3$$

תת סעיף 1 אפשרי.ניתן להשיג זאת אם כל הcontrol points נמצאים בנקודה שרוצים לייצג.

תהא נקודה $P \in \mathbb{R}^2$ נבחר $P \equiv P_0 \equiv P_1 \equiv P_2 \equiv P_3$ ואז:

$$
\begin{aligned}
\forall t\in[0,1]:C\left(t\right) &= \left(1-t\right)^{3}P_{0}+3t\left(1-t\right)^{2}P_{1}+3t^{2}\left(1-t\right)P_{2}+t^{3}P_{3}\\
&= \left(1-t\right)^{3}P+3t\left(1-t\right)^{2}P+3t^{2}\left(1-t\right)P+t^{3}P\\
&= \Big(\left(1-t\right)^{3}+3t\left(1-t\right)^{2}+3t^{2}\left(1-t\right)+t^{3}\Big)P\\
&= \Big(\left(1-t+3t\right)\left(1-t\right)^{2}+t^{2}\left(3\left(1-t\right)+t\right)\Big)P\\
&= \Big(\left(1+2t\right)\left(1-t\right)^{2}+t^{2}\left(3-2t\right)\Big)P\\
&= \left(\left(1+2t\right)\left(1-2t+t^{2}\right)+t^{2}\left(3-2t\right)\right)P\\
&= \left(\left(\left(1+2t\right)-2t\left(1+2t\right)+t^{2}\left(1+2t\right)\right)+t^{2}3-2t^{3}\right)P\\
&= \Big(\Big(1+\cancel{2t}\cancel{-2t}\cancel{-4t^{2}}+\cancel{t^{2}}+\cancel{2t^{3}}\Big)+\cancel{t^{2}3}-\cancel{2t^{3}}\Big)P\\
&= P
\end{aligned}
$$

כלומר עור מקרה זה

$$
\forall t\in[0,1]:C\left(t\right)=P
$$

תת סעיף 2 נראלי שאפשר.

עבור A נקודת התחלה של הקו ו B נקודת הסיום של הקו נבחר

$$
A=P_{0}=P_{1}=P_{2}
$$

$$
B=P_{3}
$$

ואז

$$
\begin{aligned}
\forall t\in[0,1]:C\left(t\right) &= \left(1-t\right)^{3}P_{0}+3t\left(1-t\right)^{2}P_{1}+3t^{2}\left(1-t\right)P_{2}+t^{3}P_{3}\\
&= \left(1-t\right)^{3}A+3t\left(1-t\right)^{2}A+3t^{2}\left(1-t\right)A+t^{3}B\\
&= A\Big[\left(1-t\right)^{3}+3t\left(1-t\right)^{2}+3t^{2}\left(1-t\right)\Big]+t^{3}B\\
&= A\Big[\Big(\left(1-t\right)^{2}+3t\left(1-t\right)+3t^{2}\Big)\left(1-t\right)\Big]+t^{3}B\\
&= A\left[\left(\left(1-2t+t^{2}\right)+3\left(t-t^{2}\right)+3t^{2}\right)\left(1-t\right)\right]+t^{3}B\\
&= A\left[\left(\left(1-2t+t^{2}\right)+3t-\cancel{3t^{2}+3t^{2}}\right)\left(1-t\right)\right]+t^{3}B\\
&= A\left[\left(1-2t+t^{2}+3t\right)\left(1-t\right)\right]+t^{3}B\\
&= A\left[\left(1+t+t^{2}\right)\left(1-t\right)\right]+t^{3}B\\
&= A\left[\left(1+t+t^{2}\right)-\left(t+t^{2}+t^{3}\right)\right]+t^{3}B\\
&= A\left(1-t^{3}\right)+t^{3}B
\end{aligned}
$$

כלומר במקרה הזה

$$\forall t\in[0,1]:C(t)=A\left(1-t^{3}\right)+t^{3}B$$

כלומר הבכל נקודה אנו נהיה על הקו המחבר בין A,Bולכן ציירנו קו.

תת סעיף 3

הערה 17. semi-circle = חצי מעגל.

לא נוכל לצייר חצי מעגל על ידי עקום בזייה קובי.

מקור להשראה.

נניח בשלילה כי ניתן לצייר חצי מעגל על ידי עקום בזיה קובי.נסמן את העקום בזיה הקובי באופן הבא:$C(t)=\sum_{i=0}^{3}P_{i}B_{i}^{3}(t)$.מהגדרות עקום בזייה עקום זה מורכב משני עקומים פולינומייאלים נסמנם P_{x},P_{y}אזי ניתן לבטא $C(t)$ על ידי

$$C(t)=\left(P_{x}(t),P_{y}(t)\right)$$

P_{x},P_{y}פולינומים מתוך עקום בזייה קובי ולכן דרגתם היא לכל היותר 3.ולכן נוכל לסמן

$$\forall t\in[0,1]:P_{x}(t)=at^{3}+bt^{2}+ct+d$$

$$\forall t\in[0,1]:P_{y}(t)=lt^{3}+mt^{2}+nt+p$$

כאשר

$$a,b,c,d,m,n,j,k\in\mathbb{R}$$

אנו יודעים כי $C(t)$ נמצא על חצי מעגל $\forall t\in[0,1]$.ולכן בפרט הוא על מעגל ולכן מתקיים

$$\forall t\in[0,1]:\left(P_{x}(t)\right)^{2}+\left(P_{y}(t)\right)^{2}=1$$

אזי

$$\forall t\in[0,1]:\left(at^{3}+bt^{2}+ct+d\right)^{2}+\left(mt^{3}+nt^{2}+jt+k\right)^{2}=1$$

נבחין כי

$$\left(at^{3}+bt^{2}+ct+d\right)^{2}=a^{2}t^{6}+2abt^{5}+2act^{4}+2adt^{3}+b^{2}t^{4}+2bct^{3}+2bdt^{2}+c^{2}t^{2}+2cdt+d^{2}$$

$$\left(mt^{3}+nt^{2}+jt+k\right)^{2}=l^{2}t^{6}+2lmt^{5}+2lnt^{4}+2lpt^{3}+m^{2}t^{4}+2mnt^{3}+2mpt^{2}+n^{2}t^{2}+2npt+p^{2}$$

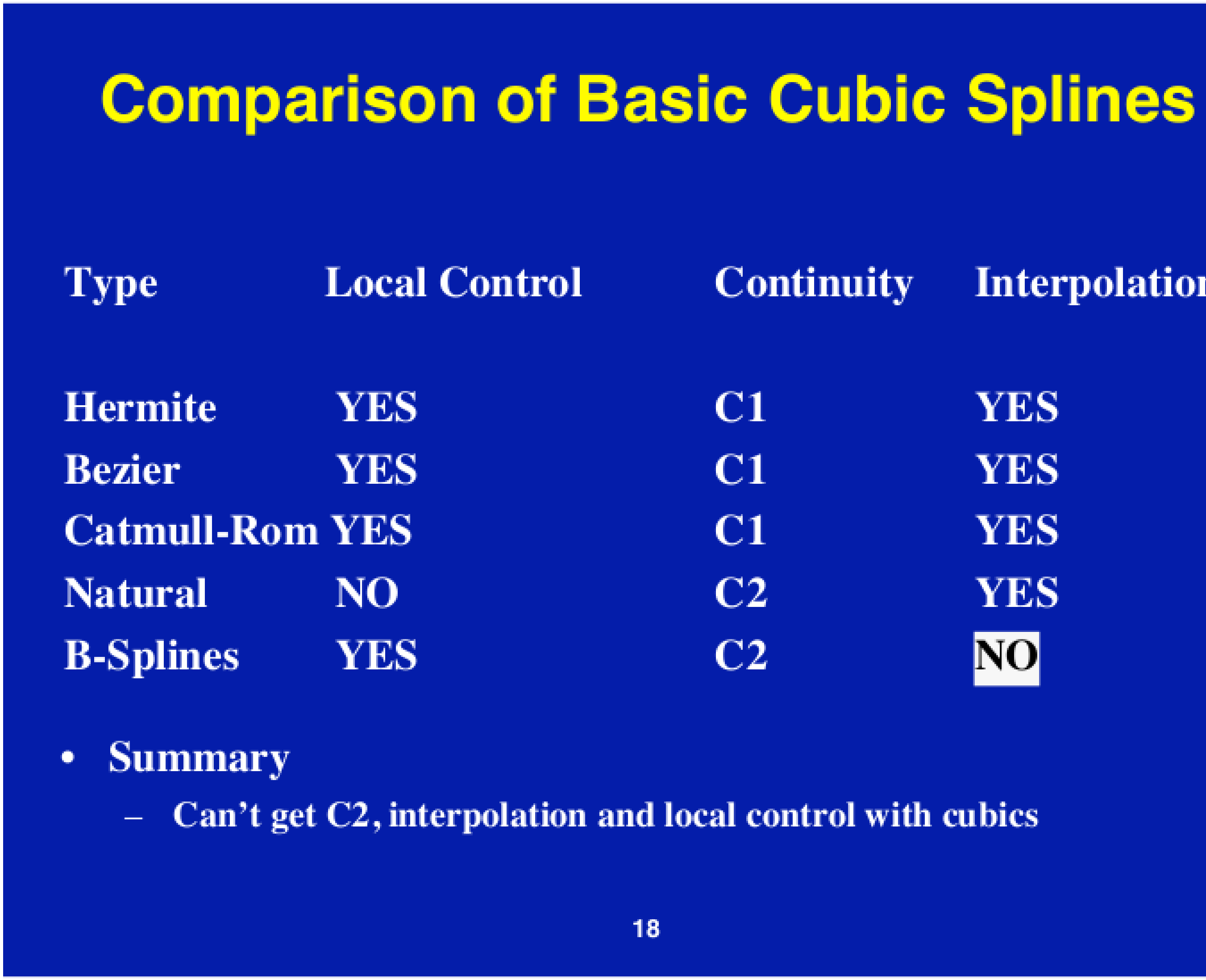
כלומר מקבלים כי יש לנו סה"כ מערכת של 8 נעלמים ו∞ משוואות (לכל t) לכן ניתן לראות האם יש/אין פתרון לעסק הזה.

$$\forall t\in[0,1]:\quad\begin{array}{c}a^{2}t^{6}+2abt^{5}+2act^{4}+2adt^{3}+b^{2}t^{4}+2bct^{3}+2bdt^{2}+c^{2}t^{2}+2cdt+d^{2}\\ l^{2}t^{6}+2lmt^{5}+2lnt^{4}+2lpt^{3}+m^{2}t^{4}+2mnt^{3}+2mpt^{2}+n^{2}t^{2}+2npt+p^{2}\end{array}\quad=1$$

פרסמתי שאלה בדיסקורד איך /אם אנחנו
אמורים לפתור את זה מעבר לתשובה סופית
ואם כן צריך לנמק אז מה הנימוק הרצוי

סעיף 4

לפפי השקף



נובע כי $B-spline$ הם האופציה הכי טובה.מהסיבה שיש להם את הקציפות הכי גבוהה C^2 ובנוסף הם מאפשרות local control (הזזה של נקודה לא תשפיע על כל העקום אלא רק על השכנים המיידים של ה$B-spline$ (בניגו לבזייר לדוגמא)) כמו כן דרגת הפולינום לא תלויה בכמות הcontrol points.

הערה 18. אולי יש טעות בשקף כי כתוב כאן שלבזייר יש לוקל קונטרול ולדעתי יש לו רק גלובל קונטרול.

הערה 19. צריך למצוא טבלה שמסכמת את כל ההבדלים בצורה טובה יותר..אם מצאתם בבקשה תפנו אלי ☺.

שאלה מספר 4

סעיף 1

תוכן

תהא R^{θ} מט' הסיבבו הבאה:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

עבור

$$R(90) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(-90) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

נתובנן באינטרפולציה בין $R(90)$ ל $R(-90)$:

$$\begin{aligned}\forall t \in [0,1] : A(t) &= tR(90) + (1-t)R(-90) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} + (1-t)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (1-t) \\ -(1-t) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (1-t) \\ t-1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1-2t \\ 2t-1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

נבחין כי עבור $t = 0.5$ מתקיים כי

$$A(0.5) = \begin{pmatrix} 0 & 1-1 \\ 1-1 & 0 \end{pmatrix} = 0_{2\times 2}$$

נבחין כי כמובן $0_{2\times 2}$ אינה מט' סיבוב (אינה מדרגה מלאה ולכן אינה אוניטרית ולכן אינה מט' סיבוב) .

מכיוון שהיינו רוצים שבאינטרפולציה בין מט' סיבוב נקבל בכל מהלך האינטרפולציה $\forall t \in [0,1]$ מט' סביבוב וכרגע הדגמנו דוגמה שבא אנו לאורך הדרך מקבלים מט' שאינה כזו - ישנה בעייתיות ולכן לא ניתן להשיגא אינטרפולציה בין זוויות באופן כזה.(כי המט' לאורך הדרך לא יהיו בהכרך מט' סיבוב וזה מצב לא רצוי).

סעיף 2

נזכר בשקף

Gimbal Lock

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_z \cdot R_y \cdot R_x =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\gamma\cos\beta & \sin\gamma\cos\alpha + \cos\gamma\sin\beta\sin\alpha & \sin\gamma\sin\alpha - \cos\gamma\sin\beta\cos\alpha & 0 \\ -\sin\gamma\cos\beta & \cos\gamma\cos\alpha - \sin\gamma\sin\beta\sin\alpha & \cos\gamma\sin\alpha + \sin\gamma\sin\beta\cos\alpha & 0 \\ \sin\beta & -\cos\beta\sin\alpha & \cos\beta\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

When $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ this is:

$$\begin{bmatrix} 0 & \sin\gamma\cos\alpha + \cos\gamma\sin\alpha & \sin\gamma\sin\alpha - \cos\gamma\cos\alpha & 0 \\ 0 & \cos\gamma\cos\alpha - \sin\gamma\sin\alpha & \cos\gamma\sin\alpha + \sin\gamma\cos\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

where $\theta = \alpha + \gamma$, so one degree of freedom is lost.

לכן התשובה היא לא.

בזוויות אוילר ייתכן מצב שקרוי gimbel lock שבעצם בו המשתמש מאבד דרגת חופש במסגרת מצב זה קיימות ∞ דרכים לייצג את האורינטציה של הגוף.

באופן כללי

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R, \cdot R_v \cdot R_v =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\gamma\cos\beta & \sin\gamma\cos\alpha + \cos\gamma\sin\beta\sin\alpha & \sin\gamma\sin\alpha - \cos\gamma\sin\beta\cos\alpha & 0 \\ -\sin\gamma\cos\beta & \cos\gamma\cos\alpha - \sin\gamma\sin\beta\sin\alpha & \cos\gamma\sin\alpha + \sin\gamma\sin\beta\cos\alpha & 0 \\ \sin\beta & -\cos\beta\sin\alpha & \cos\beta\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

כאשר $\beta = 0.5\pi$ אנו בגימבל לוק ומקבלים (ע"י שימוש בזהויות טריגו) כי

$$R(\alpha,\frac{\pi}{2},\gamma) = \begin{bmatrix} 0 & \sin\gamma\cos\alpha + \cos\gamma\sin\alpha & \sin\gamma\sin\alpha - \cos\gamma\cos\alpha & 0 \\ 0 & \cos\gamma\cos\alpha - \sin\gamma\sin\alpha & \cos\gamma\sin\alpha + \sin\gamma\cos\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overbrace{=}^{\theta=\alpha+\gamma} \begin{bmatrix} 0 & \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

כלומר $R(\alpha, \frac{\pi}{2}, \gamma)$ תלוי רק ב $\alpha+\gamma$ ולכן בהנתן R שחושב כאשר $\beta = 0.5\pi$ לא נוכל לדעת מי מה הזוויות α, γ.

סעיף 3 תזכורת

כפל קוונטריונים מתנהג באופן הבא:

$$\begin{gathered}
(q_0+q_1i+q_2j+q_3k)(p_0+p_1i+p_2j+p_3k) \\
=\left(q_0p_0+q_1p_1i^2+q_2p_2j^2+q_3p_3k^2\right)+ \\
(q_0p_1i+q_1p_0i+q_2p_3jk+q_3p_2kj)+ \\
(q_0p_2j+q_2p_0j+q_1p_3ik+q_3p_1ki)+ \\
(q_0p_3k+q_3p_0k+q_1p_2ij+q_2p_1ji) \\
=(q_0p_0-q_1p_1-q_2p_2-q_3p_3)+ \\
(q_0p_1+q_1p_0+q_2p_3-q_3p_2)\,i+ \\
(q_0p_2+q_2p_0-q_1p_3+q_3p_1)\,j+ \\
(q_0p_3+q_3p_0+q_1p_2-q_2p_1)\,k
\end{gathered}$$

כלומר

$$\star: \boxed{\begin{gathered}
(q_0+q_1i+q_2j+q_3k)(p_0+p_1i+p_2j+p_3k) \\
=(q_0p_0-q_1p_1-q_2p_2-q_3p_3)+ \\
(q_0p_1+q_1p_0+q_2p_3-q_3p_2)\,i+ \\
(q_0p_2+q_2p_0-q_1p_3+q_3p_1)\,j+ \\
(q_0p_3+q_3p_0+q_1p_2-q_2p_1)\,k
\end{gathered}}$$

סעיף 3

נסמן $\mathbb{G} = \{a+bi+cj+ek \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ להיות קבוצת כל הקוונטריונים.

תהא $K \subseteq \mathbb{G}$ תת קבוצה של קוונטריונים כלשהיא.

טענה 20. $a_1, a_2 \in K \Rightarrow a_1 \cdot a_2 \in K$.

נסמן $a_1 = (q_0+q_1i+q_2j+q_3k), a_2 = (p_0+p_1i+p_2j+p_3k)$ ונבדוק האם הטענה נכונה עבור כל K בכל סעיף.

סעיף 1 $K = [c, (0,0,0)]$ **הטענה נכונה**

מ$\star$ נובע כי

$$\begin{aligned}
a_1 \cdot a_2 &= (q_0+q_1i+q_2j+q_3k)(p_0+p_1i+p_2j+p_3k) \\
&= \left(q_0p_0 \cancel{-q_1p_1-q_2p_2-q_3p_3}\right)+ \\
&\left(\cancel{q_0p_1+q_1p_0+q_2p_3-q_3p_2}\right) i+ \\
&\left(\cancel{q_0p_2+q_2p_0-q_1p_3+q_3p_1}\right) j+ \\
&\left(\cancel{q_0p_3+q_3p_0+q_1p_2-q_2p_1}\right) k \\
&= (q_0p_0, 0, 0, 0) \in K = [c, (0,0,0)]
\end{aligned}$$

כלומר הטענה נכונה.

סעיף 2 $K=[x,(y,0,0)]$ **הטענה נכונה**
מ$\star$ נובע כי

$$\begin{aligned}
a_1\cdot a_2 &= (q_0+q_1i+q_2j+q_3k)(p_0+p_1i+p_2j+p_3k)\\
&= (q_0+q_1i)(p_0+p_1i)\\
&= (q_0+q_1i)p_0+(q_0+q_1i)p_1i\\
&= q_0p_0+q_1p_0i+q_0p_1i+q_1ip_1i\\
&= q_0p_0-q_1p_1+q_1p_0i+q_0p_1i\\
&= \overbrace{(q_0p_0-q_1p_1)}^{\in\mathbb{R}}+\overbrace{(q_1p_0+q_0p_1)}^{\in\mathbb{R}}i\\
&= [q_0p_0-q_1p_1,(q_1p_0+q_0p_1,0,0)]\in K=[x,(y,0,0)]
\end{aligned}$$

סעיף 3 $K=[0,(x,y,z)]$ **הטענה לא נכונה.**דוגמא נגדית

$$a_1=(0,1,0,0)\,,a_2=(0,1,0,0)$$

ואז

$$a_1a_2=i\cdot i=-1\notin K=(0,1,0,0)$$

סעיף 4

התשובה היא לא (כי לאורך הדרך אנו לא נקבל קוונטריות יחידה).נדגים זו.

ע"מ לייצג סיבוב q_1,q_2 חייבים להיות בכל זמן נתון על ספרת היחידה ב$\mathbb{R}^4$כלומר $\|q\|=1$ $\|a+bi+cj+dk\|=a^2+b^2+c^2+d^2=1$. (נסמן $\star$)

נניח נבחר $q_1=\left(\frac{1}{\sqrt{4}},\frac{1}{\sqrt{4}},\frac{1}{\sqrt{4}},\frac{1}{\sqrt{4}}\right)$ ו $q_2=-\left(\frac{1}{\sqrt{4}},\frac{1}{\sqrt{4}},\frac{1}{\sqrt{4}},\frac{1}{\sqrt{4}}\right)$.

אנו יודעים כי מתקיים $q_1=-q_2$ אזי מהעובדה שקוונטריונים עושים cover doube לספרה נובע כי q_1,q_2 מייצגים את אותו אופרטור סיבוב ב$\mathbb{R}^3$.

לכן היינו רוצים שאנימציה בין q_1,q_2 תניב מודל באורינציה קבועה (סטטית) שאינה משתנה.

אבל אם נשתמש באינטרפולציה המוצעת$\forall t\in[0,1]:q(t)=(1-t)q_1+tq_2$ אזי לדוגמא עבור $t=\frac{1}{2}$נקבל כי

$$q\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}q_1+\frac{1}{2}q_2=(0,(0,0,0))$$

נבחין כי הקווטנרטיון $(0,(0,0,0))$הוא קוונטריון האפס ואינו מקיים את $\star$ולכן אינו לייצג אופרטור סיבוב.

כלומר במהלך/באמצע האינטרפולציה קיבלנו קוונטריון שאינו נצמא על ספרת היחידה ולכן אינו מבצע פעולת סיבוב(וחמור מכך - הוא שולח את כל הנק' לראשית). ולכן יש פריימים במהלך האנמציה שישנו את המבנה הגאומטרי של המודל באופן שאינו מתאים למט' סיבוב.

ולכן לא ניתן להשתמש באינטרפולציה מהסוג הנ"ל.

הערה 21. הדרך הנכונה לעשות אינטרפולציה בקוונטריונים היא כדלקמן:

Spherical **L**inear Int**erp**olation (**SLERP**)

$$q(u) = \frac{\sin(1-u)\varphi}{\sin\varphi} q_0 + \frac{\sin(u\varphi)}{\sin\varphi} q_1 \quad u \in [0,1]$$

Equivalent to: $$q(u) = q_0 (q_0^{-1} q_1)^u$$

הערה 22. לא הצלחתנו לבצע אינטרפולציה לינארית מהסיבה שלעשות אינטרפולציה לינארית בין 2 נקודות על ספרה 4 מימדית לא יניב לנו לנקודות על הספרה.(אלא נקודות ש"נכנסות") לספרה ולכן לא ייצגו מט' סיבוב.