

מחברת זו הינה רכוש הטכניון  
והוא מיועדת לצרכי בחינה בלבד

הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל



## מחברת בחינה



2014

### \* מס' תעודת הזהות

ציונים לשימוש הבוחן

ציון	שאלה מס'
30	שאלה מס' 1
16	שאלה מס' 2
28	שאלה מס' 3
10	שאלה מס' 4
	שאלה מס' 5
	שאלה מס' 6
	שאלה מס' 7
	שאלה מס' 8
	שאלה מס' 9
84	סה"כ



שם מקצוע \_\_\_\_\_

מספר מקצוע \_\_\_\_\_

חדר מבחן \_\_\_\_\_

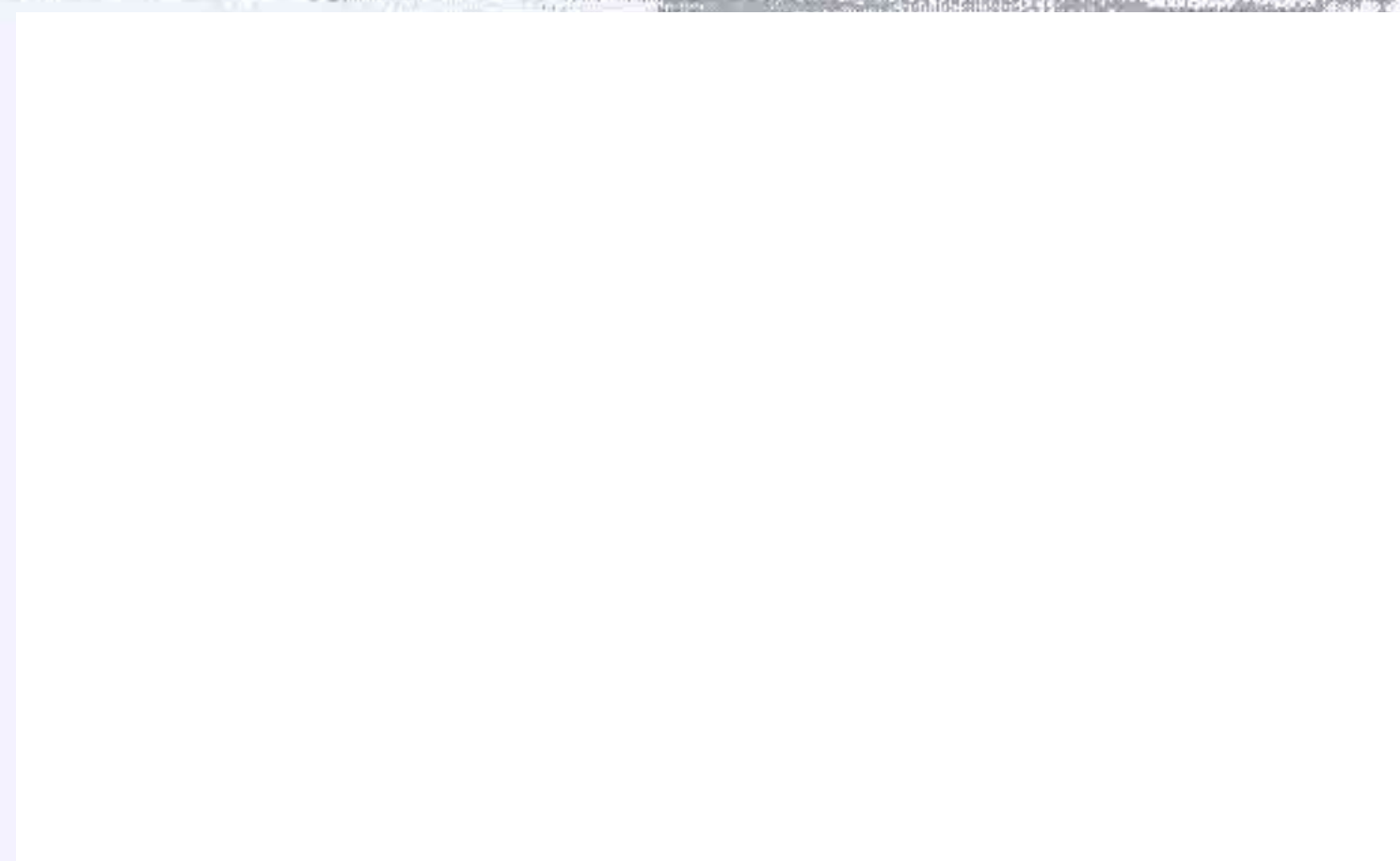
פקולטה \_\_\_\_\_

סמסטר \_\_\_\_\_

תאריך \_\_\_\_\_

מחברת \_\_\_\_\_ מערך \_\_\_\_\_ מחברות \_\_\_\_\_

\* יש למלא X בתוך המשבצות בטבלה שלהלן עבה כל סוגיה  
על תעודת הזהות, כולל סידור הביקורת וסדר ג' א' עמודים  
כאשר כל עמודה מיוצגת בסדר תעודת הזהות



### לתשומת לבך !!!

1. אין לשדך סיכות ניספות, לסיכה הקיימת, למחברת הבחינה.
2. אין לתלוש דפים ממחברת הבחינה.
3. אין לחסוך דפים למחברת הבחינה שלא אישור על ידי המנהל או מרצה הסדר.
4. יש לכתוב במחברת הבחינה בעט בלבד, ולא בעפרון.
5. הקפד למלא בטבלת המשבצות של תעודת הזהות את ה' X בתוך המשבצות.
6. במידה וטעית בביקור ה' X בטבלת המשבצות, השחר את הריבוע לחלוטין.





חורף תשע"ט  
12/2/2019

הטכניון – הפקולטה למדעי המחשב  
גרפיקה ממוחשבת – 234325

מרצה: פרופ' גרשון אלבר  
מתרגל: בן עזר

## מבחן – מועד א

הנחיות:

1. בבחינה שלפניכם 10 דפים כולל דף זה. בדקו זאת.
2. עליכם לענות על כל 4 השאלות.
3. כתבו בקצרה. כל המאריך גורע!
4. משך הבחינה: 180 דקות
5. יש לכתוב את כל התשובות בטופס המבחן.
6. יש להגיש את טופס הבחינה.
7. כל חומר מודפס\כתוב מותר.

בהצלחה

מבחן		
	נקודות	שאלה
	30	1
	30	2
	30	3
	10	4
	100	סה"כ





1. (30 נק.)

א. (5 נק.) איזו טרנספורמציה מבצעת המטריצה ההומוגנית הבאה במרחב  $(x, y, z, w)$  ההומוגני:

$$(x, y, z, w) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

מחלק:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

✓ 5/5

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

ולכן הטרנספורמציה מבצעת: שיקוף ב'חם' לאורך  $YZ$ ,  
הסטה של מישור  $YZ$ , סיבוב סביב ציר  $x$  בזווית  
 $\theta = -90^\circ$ , וסיבוב (scale) ב'  $2$  (מקדם כולל)  
מהמרחב  $w$  (הזז)

ב. (5 נק.) טענה: כל מטריצה שהדטרמיננטה שלה הוא אחד היא מטריצת סיבוב (כולל בזווית אפס) או כפל של מטריצות סיבוב. הוכיחו או הפריכו.

לא נכון. המטריצה הבאה היא מטריצת סיבוב  
(scale):

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

✓ 5/5

ובמקרה מטריצת אפס, הדטרמיננטה שלה היא:

$$5 \cdot 2 \cdot 0.1 = 1$$

(סיבוב ה'חם' הטרנספורמציה של קטע, בעזרת סיבוב לא,  
לכן סיבוב אינו יכול להיות כמכפלה סבובים)







ג. (10 נק.) נתונים שני קוים שונים במישור  $XY$   $L1$  ו  $L2$  הנחתכים בנקודה  $P$ . הציעו טרנספורמציה הומוגנית במישור  $XY$  אשר תביא את  $L1$  לציר  $X$  ואת  $L2$  לציר  $Y$  אם אפשר או נמקו אם הדבר אינו אפשרי. אם ישנה התניה הנדרשת לקיום המיפוי ציינו אותה. הסבר מילולי לסדרת הטרנספורמציות הנדרשות (למשל סובב סביב  $L1$  ב  $\alpha$  מעלות) יתקבל.

נדרש שהקווים יחזיקו במקווי בוקצות, כלומר  $L_1 \neq L_2$ .

$P = (x_0, y_0)$  / NOJ

הנקודה  $(-x_0, -y_0)$  היא נקודה על המישור.

האימון והסדר שבא לידי

2.  $(2, 3) \rightarrow (1, 2)$   $(1, 2) \rightarrow (2, 3)$   $(1, 2) \rightarrow (1, 2)$   $(2, 3) \rightarrow (2, 3)$

$$L_1 \rightarrow k \quad \text{and} \quad \delta \rightarrow \delta [-\cos \theta \hat{L}_1 \cdot \hat{x}] \quad \text{de} \rightarrow \text{de}$$

$(x \text{ זכר } L_1 \text{ פנימי } \cos^{-1}(L_1 \cdot x)) \cdot x \text{ זכר}$

L2-1 PLYNA 76e" L7 -e 70 shear 8321 .3

$y = 2.385511$

h 7620 88

$\rho_{12}$  mass,  $\frac{m^2}{h}$   $\delta_{12}$   $\sim 1/5$   $\sim 31^\circ$  shear

$$h = \tan(-\hat{L}_2 \cdot \hat{y}) \quad \text{and} \quad \text{for } -\hat{L}_2 \cdot \hat{y} \quad \text{and}$$

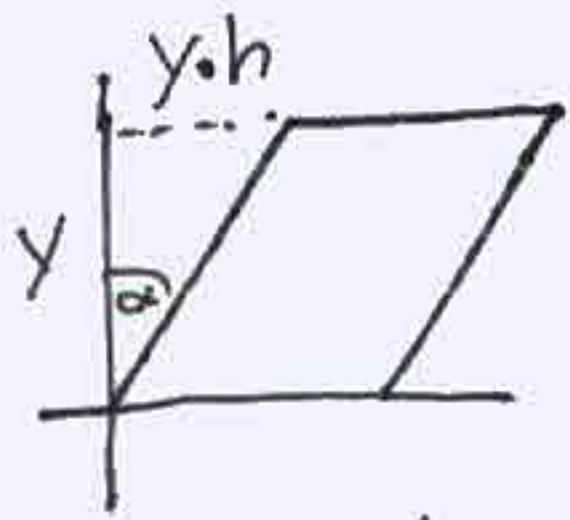
$\tan^{-1}(-L_2 \cdot \frac{1}{y})$

12th Nov

זה אמר חז"ל

 ~~$\tan^{-1}(\cos^{-1}(1/2)) = \pi/4$~~ 
$$= \cos^{-1}(\hat{L}_2 \cdot \hat{y})$$

1081

$$-L_2^1 \cdot \dot{y}$$


$$\tan \alpha = \frac{y \cdot h}{y} = h$$

$$\begin{cases} x' = x + y \cdot h \\ y' = y \end{cases}$$







ד. (10 נק.) נתונים שלושה קוים שונים  $L1, L2, L3$  הנחתכים בנקודה  $P$  במרחב. הציעו טרנספורמציה הומוגנית במרחב אשר תביא את  $L1$  לציר  $X$ , את  $L2$  לציר  $Y$  ואת  $L3$  לציר  $Z$  אם אפשר או נמקו מדוע הדבר אינו אפשרי. אם ישנה התניה הנדרשת לקיום המיפוי ציינו אותה. ניתן להניח בשאלה זו שיש לנו פונקציה  $Rot(V1, V2)$  המסובבת  $V1$  ל  $V2$  במרחב סביב  $V1 \times V2$ . הסבר מילולי לסדרת הטרנספורמציות הנדרשות (למשל סובב סביב  $L1$  ב  $\alpha$  מעלות) יתקבל.

ההתניה הנדרשת היא שהקווים יהיו בלתי תלויים  
ליניאריים.

$$P = (x_0, y_0, z_0)$$

1. נבצע הזזה ב-  $(-x_0, -y_0, -z_0)$  על מנת שנקודת החיתוך  
החדשה תהיה בראשית.

2. נבצע את שלבים  $2+3$  על מנת להביא את  
 $L1$  לציר  $X$  ואת  $L2$  לציר  $Y$ .

3. באופן זה יהיה  $L3$  בסדר  $z$ , ניתן לבצע shear  
כדי להביא את  $L3$  לציר  $Z$ , מבלי להזיז את  
 $L1, L2$ .

✓  
ל  
ש





(א) (8 נק.) כיצד ניתן לקרב את חישוב הנפח תוך שימוש Z-buffer בתוכנה? במקרה זה ניתן לשמור כל אינפורמציה נוספת נדרשת עבור כל פיקסל ולהשתמש בכל ווריאציה שהוצגה בכיתה של Z-buffer ואף לבצע בהן שינויים תוך תיאור ברור של השינויים הללו.

$$V \approx \sum_{i=x_{\min}}^{x_{\max}} \sum_{j=y_{\min}}^{y_{\max}} \text{len}(\text{Z-buffer}[i,j])$$
$$\begin{array}{r} 3 \\ 8 \end{array}$$

3- ~~האם~~ האם, לכן, LEN ? להם, המעבר, המעבר

2- להם, א' 8'0, > 10'0 !

בין, מספיק לשמור רק את  $z$  ו-  $z$  הקטן  
בין וזאת  $z$  הזמן ביותר. כלומר,  $k=2$ .  
כיוון שהמחיר סגורים וקטורים, מובטח שלא יהיו  
שהמחירים

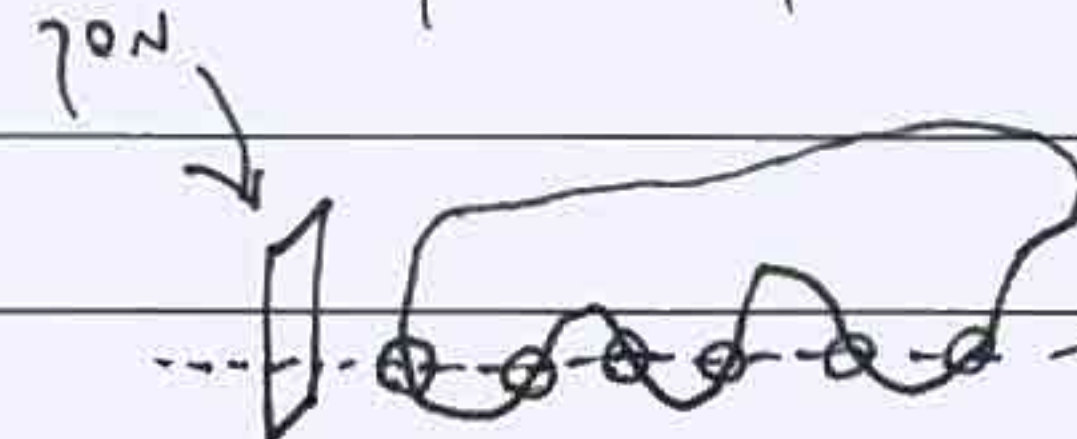
$|Z_{\max} - Z_{\min}|$





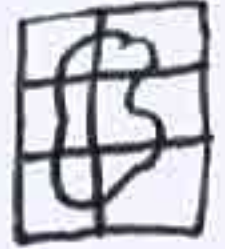
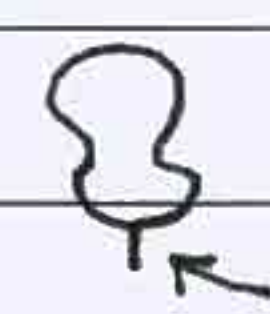


(ג) (8 נק.) כאמור במערכת חומרה גרפית יש מספר סופי של חוצצי Z-Buffer - k וניתן להשתמש בחוצצי Z-Buffer אלו בלבד. האם את(ה) רואה דרך להתאים את האלגוריתם מסעיפים א) וב) למודלים פוליגוניים סגורים כלליים? מהו k כעת?

כן, צריך  $k$  -  $k$  יהיה שווה (לפחות)  
 למספר החיתוכים המקסימלי האפשרי של המישור  
 עם "קו" שאלו כו' אלו זיך המסך.  
  
 למסך:

נצטרך למדוד  $k$  חיתוכים (3 בודא), כאשר  
 כל צד מעזיר לנו שבו יש "חומר" של המישור.  
 במקום למדוד  $len(...)$  נמדוד את הגודל הכולל.  
 $\sum_{i=1}^k |Z_{2i} - Z_{2i-1}|$

(ד) (7 נק.) אלו גורמים באלגוריתמים א) - ג) יכולים לתרום לשגיאות בחישוב הנפח (ביחס לחישוב בדיוק מכונה (double) מעל קודקודי הפוליגונים). תנו לפחות שתי סיבות.

 Aliasing - פיקסלים שלמים "סגור" למחצה של המישור  
 לא בהכרח כיסה את כל הפיקסלים:  
 סינאטריא - מודל מבוזר,  זיך בהחלט  
 ה'נו בעל שטח  $S$ , אך "יסר בכל באר. יכול  
 להיות בע"ה למשל במודל עם שיסר.

סקיפול - אם ה-Z-buffer מוגדל מנקודות קטנות,  
 נקבע נפה שזו (למשל מודל שקוף למחצה)  
 "חצב" בעל שטח  $S$



3 ✓

→  
הפונקציה באופן כללי קובית, ולכן:

$$C_1(t) = a_1 t^3 + b_1 t^2 + c_1 t + d_1$$

נציב:

$$C_1'(t) = 3a_1 t^2 + 2b_1 t + c_1$$

$$C_1''(t) = 6a_1 t + 2b_1$$

נקודת:  $C_1''(0) = C_1''(1)$  מ

$$6a_1 \cdot 1 + 2b_1 = 2b_1 + 6a_1 \cdot 0$$

$$6a_1 = 0$$

$$a_1 = 0$$

$$C_1(t) = b_1 t^2 + c_1 t + d_1$$

ולכן

quadratic  
~~quadratic~~

פונקציה

quadratic  $C_n$  - פונקציה נ"ח - פונקציה



3. (30 נק.). גשועה בקל הקוקס בחלק העליון  
 10. (10 נק.) אחד מתנאי הקצה של Cubic spline interpolation הוא של

Quadratic end conditions. הוכח (הראה שהפולינומים בקצה הם quadratic) בהינתן  
 אילוף הקצה  $C_1''(0) = C_1''(1)$  וכנ"ל לגבי  $C_n$ .

~~על מנת להוכיח את זה נניח ש-~~  
 ~~$C_n = a_n t^2 + b_n t + d_n$~~   
 ~~$C_n = a_n t^2 + b_n t + d_n$~~   
~~נניח ש-~~  
~~(במקרה "המיוחד")~~  
~~ונקבל~~  
 ~~$C_n''(t) = 2a_n$~~   
 ~~$C_n''(t) = 2a_n$~~   
~~במקרה "המיוחד"~~  
 ~~$C_n''(0) = C_n''(1)$~~   
~~זה הוכיח את הטענה~~

~~$C_1 = a_1 t^2 + b_1 t + c_1$~~  נוסח  
~~נניח ש-~~  
 ~~$C_1(0) = c_1 = p_0$~~ ,  ~~$C_1(1) = a_1 + b_1 + c_1 = p_1$~~   
 ~~$C_1''(t) = 2a_1$~~   
 ~~$C_1''(0) = 2a_1$~~   
 ~~$C_1''(1) = 2a_1$~~   
 ~~$C_1(0) = c_1 = p_0$~~   
 ~~$C_1'(0) = b_1 = C_2(0)$~~   
 ~~$C_1''(0) = C_2''(0)$~~   
 ~~$C_1''(1) = 2a_1 = C_2''(0)$~~  ←  
 האם יש צורך להוכיח את זה?  
 כן, כי  $C_2$  חייב להיות ריבועי.

ב. (5 נק.) אחד מתנאי הקצה של Cubic spline interpolation הוא של Periodic end conditions. מהי הרציפות הפרמטרית של העקום כולו במקרה זה (מהו  $k$  ב  $C^k$ )?

התנאי של periodic end  
 $C^2$  בקווי החיבור. ע"י  $4n-2$  הנקודות  
 הרציפים אורכים רציפים  $C^2$  הם העקום.  
 מכאן הרציפים הכוללים הוא  $C^2$ .  $k=2$ .

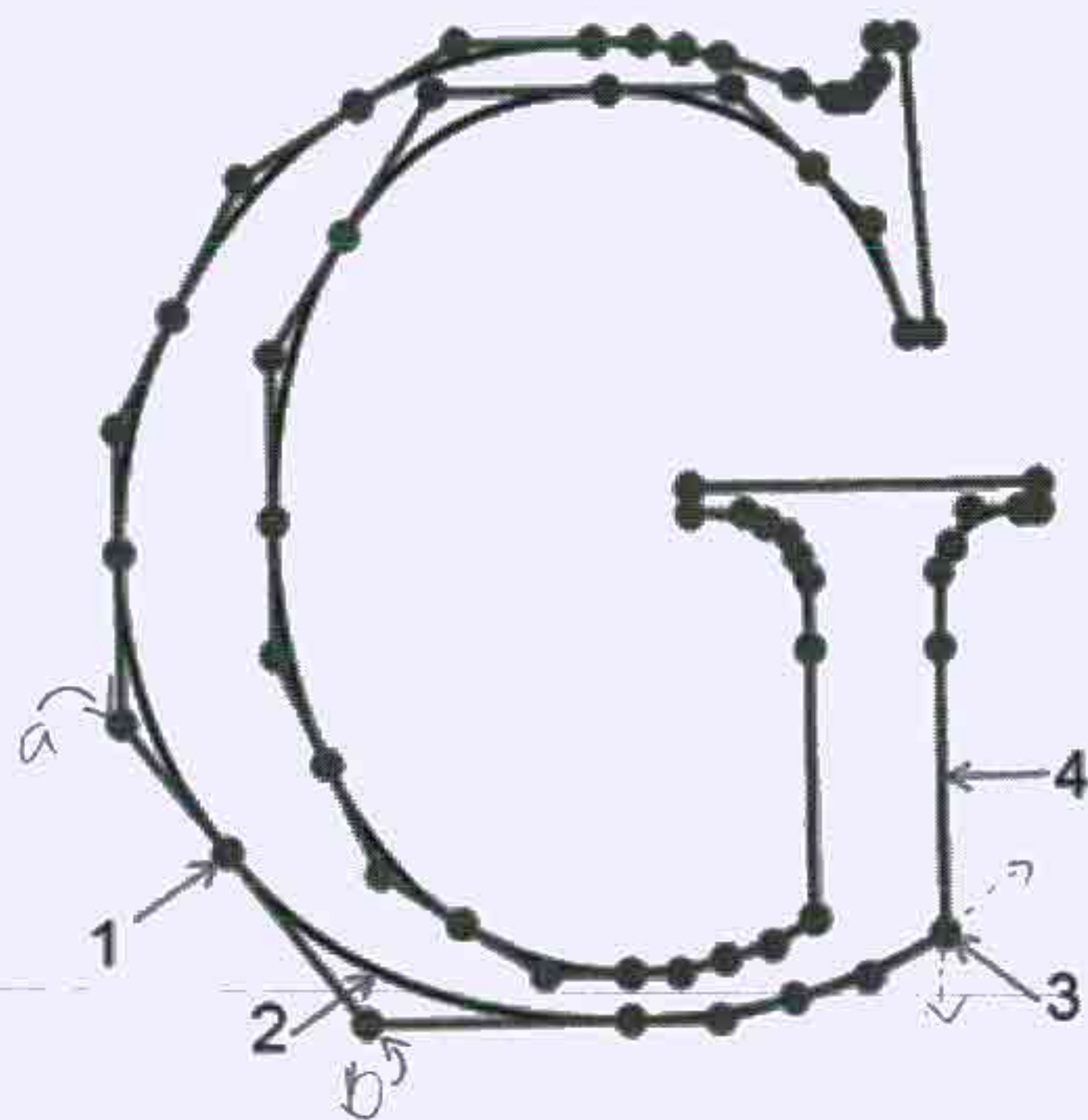






ג. (5 נק.) נתונה האות G בציור משמאל המורכבת מעקומי Bezier לינאריים וקוודרטיים (דרגה 1 ו 2) כמו שראינו בכתה (פוליגוני הבקרה מצוירים אף הם באפור ונקודות הבקרה בעיגולים). מה הרציפות הגיאומטרית (מהו  $k$  ב  $G^k$ ?) של העקום בארבע הנקודות המסומנות? נקודות 1 ו 3 הינן נקודות חיבור של עקומות שונות (בנקודה 1 החיבור בקווים מקבילים). אם יש הנחות כלשהן בפתרונכם ציינו זאת

5/5



כיוון שנקודה 2 ו 1-4 הינן נקודות

בסליטות (ולא חיבור) הריציות שלהן

היא  $C^\infty$ .

ניתן לראות בבירור שנקודה 3 הינה

בציטות  $C^\infty$  (הנצרות בקוויים שונים)

בהנחה של שנקודה 1 נמצאת על הישר המחבר בין

a-b (סומן בצויר) הריציות שלה היא  $C^\infty$

ד. (10 נק.) נתונים שני עקומים פולינומיים פרמטריים  $a(t)$  ו  $b(t)$ . האם ניתן להציג את המשטח המסורגל (ruled surface)  $S(u,t) = u a(t) + (1-u) b(t)$  כמשטח Bezier? נמקו את תשובתכם.

9/10

כן. משטח בפייה (Bezier) הוא עקום של עקומים.

פולינומיים Bezier מהווים בסיס של פולינומיים

ואכן ניתן לייצג בסדרה כל עקום בפרט

זה הסקומים הארכיבים משטח מסורגל.

ה'נ'  $u$  ו  $(1-u)$  הם

פולינומיים ואכן נהנים

ה'נ'  $u$  ו  $(1-u)$  הם







4. (10 נק.).

א. (5 נק.) למדנו כי אחת הדרכים המקובלות ליצירה של גאומטריה היא בעזרת עצי CSG (constructive solid geometry). האם סדר החישוב משנה בעצי CSG אילו? במילים אחרות האם  $A*B+C$  יצור את אותו הגוף כמו  $(A+C)*B$ ?  $+$  מציין איחוד,  $*$  חיתוך ו-  $-$  חיסור.

כן,  $(\square + \emptyset) - \emptyset \neq \square + (\emptyset - \emptyset)$

( $\emptyset$  - כזר  
 $\square$  - קובייה)

$$\square + \emptyset = \square \Rightarrow (\square + \emptyset) - \emptyset = \square - \emptyset = \square$$

$$\emptyset - \emptyset = \emptyset \Rightarrow \square + (\emptyset - \emptyset) = \square$$

ב. (5 נק.) האם תשובתכם תשתנה אם בביטוי ה CSG יהיו אופרטורים מסוג אחד בלבד.

ציינו את תשובתכם לכל אחד משלושת האופרטורים  $+$  (איחוד),  $*$  (חיתוך), ו-  $-$  (חיסור).

איחוד - הסדר לא משנה

חיתוך - הסדר לא משנה

חיסור - הסדר משנה,  $\text{דוגמה}$

$$(\square - \emptyset) - \emptyset = \square - \emptyset = \square$$

$$\square - (\emptyset - \emptyset) = \square - \emptyset = \square$$



192  
1934