מבחן במקצוע גרפיקה ממוחשבת

10 בפברואר 2021

תוכן העניינים

שאלה מספר 1 **2**
סעיף א 2
סעיף ב 3
סעיף ג 8

שאלה מספר 2 **10**
סעיף א 10
סעיף 1 10
סעיף 2 10
סעיף ב 10
סעיף 1 10
סעיף 2 10
סעיף ג 11
סעיף ד 11

שאלה מספר 3 **12**
סעיף א 12
סעיף ב 12
סעיף ג 13
סעיף ד 14
סעיף ה 15
סעיף 1 15
סעיף 2 16

שאלה מספר 4 **17**
סעיף א 17
סעיף ב 20
סעיף ג 20
סעיף 1 21
סעיף 2 22
סעיף 3 22

שאלה מספר 1

סעיף א

הקישר נמצא ב$x=5$ מקביל למישור $y-z$.

מקור האור מקביל למישור $y-z$ ולכן נחפש מט' שמחלצת את הקור' $y-z$ של האוביקט.כלומר על כל נקודה לקיים:

$$\forall p=(p_x,p_y,p_z)\in\mathbb{R}^3 : Ap=v=(5,p_y,p_z)$$

הנקודה p מיוצגת בקור' הומוגניות ולכן

$$\forall p=(p_x,p_y,p_z,1)\in\mathbb{R}^4 : Ap=v=(\tilde{p}_x,\tilde{p}_y,\tilde{p}_z,\tilde{p}_w)\cong(5,p_y,p_z)$$

$A\in\mathbb{R}^{4\times4}$.

כלומר

$$A\begin{pmatrix}p_x\\p_y\\p_z\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{p}_x\\\tilde{p}_y\\\tilde{p}_z\\\tilde{p}_w\end{pmatrix}$$

וגם

$$\frac{\tilde{p}_x}{\tilde{p}_w}=5,\frac{\tilde{p}_y}{\tilde{p}_w}=p_y,\frac{\tilde{p}_z}{\tilde{p}_w}=p_z$$

משלושת המשוואות האחרונות נובע כי

$$\tilde{p}_x=\tilde{p}_w5,\tilde{p}_y=\tilde{p}_wp_y,\tilde{p}_z=\tilde{p}_wp_z$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}\tilde{p}_x\\\tilde{p}_y\\\tilde{p}_z\\\tilde{p}_w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{p}_w5\\\tilde{p}_wp_y\\\tilde{p}_wp_z\\\tilde{p}_w\end{pmatrix}=\tilde{p}_w\begin{pmatrix}5\\p_y\\p_z\\1\end{pmatrix}$$

כלומר

$$A\begin{pmatrix}p_x\\p_y\\p_z\\1\end{pmatrix}=\tilde{p}_w\begin{pmatrix}5\\p_y\\p_z\\1\end{pmatrix}$$

מטריצה מתאימה אפשרית כזו היא:

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&5\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

נראה זאת:

$$\forall p \in \mathbb{R}^4 : A \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} \overbrace{\cong}^{\tilde{p}_w=1} \begin{pmatrix} 5 \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

כלומר.התשובה היא:

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

סעיף ב

שוב הקיר ב$x = 5$ ומקביל למישור $y - z$.
הפעם מקור האור הוא נקודתי וממוקם ב $(x = -2, y = 3, z = 1)$.
מניחים כי קור' x של הנקודה p היא בתחום $(-2, 5)$.
נפתור פרמטרית ולאחר מכן נציב.
הקיר ב$x = x_{\text{wall}}$ ומקביל למישור $y - z$.
הפעם מקור האור הוא נקודתי וממוקם ב $l = (l_x, l_y, l_z) = (x = x_{\text{light}}, y = y_{\text{light}}, z = z_{\text{light}})$ (מלשון $light$)
מניחים כי קור' x של הנקודה $p = (p_x, p_y, p_z)$ היא בתחום $p_x \in (x_{\text{light}}, x_{\text{wall}})$.
תחילה נבין היכן הקרן תפגע בקיר.
נסמן $h = (h_x, h_y, h_z)$ בתור הנקודה בה תפגע קרן האור בקיר (מלשון hit).

- אנו יודעים כי הקיר בx_{wall} ולכן אילוץ אחד שלנו יהיה $h_x = x_{\text{wall}}$.
- על מנת לחשב את h_y, h_z עלינו לבין את הווקטור של קרן האור.אנו יודעים כי ווקטור זה הוא:

$$d = p - l = (p_x - l_x, p_y - l_y, p_z - l_z)$$

- הווקטור הזה הוא הכיוון של האור.נרצה למצוא את הגודל המתאים שלו החל ממקור האור l עד לקיר.כלומר עלינו למצוא סקלר $\alpha \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים כי

$$l + \alpha d = h$$

- אנו לא יודעים את h אלא רק את האילוץ $h_x = x_{\text{wall}}$ ולכן מכאן נובע כי

$$l_x + \alpha d_x = h_x = x_{\text{wall}}$$

כלומר

$$l_x + \alpha d_x = x_{\text{wall}}$$

כלומר

$$\alpha = \frac{x_{\text{wall}} - l_x}{d_x}$$

כלומר

$$\alpha = \frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}$$

- כעת נוכל לחשב את h:

$$\begin{aligned}
h &= l + \alpha d \\
&= l + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) d \\
&= l + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right)(p - l) \\
&= \left(1 - \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right)\right) l + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) p \\
&= \left(\frac{p_x - l_x}{p_x - l_x} - \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right)\right) l + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) p \\
&= \left(\frac{p_x \cancel{- l_x} - x_{\text{wall}} \cancel{+ l_x}}{p_x - l_x}\right) l + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) p \\
&= \left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) p
\end{aligned}$$

- עכשיו כמשצאנו את h במפורש.נוכל למצוא את המט' המתאימה.
- נדרוש כי

$$Ap = h$$

כלומר

$$A \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_x \\ \tilde{p}_y \\ \tilde{p}_z \\ \tilde{p}_w \end{pmatrix} \cong h = \left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) p$$

כלומר המשוואות שנדרוש הם

$$\frac{\tilde{p}_x}{\tilde{p}_w} = h_x, \frac{\tilde{p}_y}{\tilde{p}_w} = h_y, \frac{\tilde{p}_z}{\tilde{p}_w} = h_z$$

כלומר המשוואות שנדרוש הם

$$\tilde{p}_x = \tilde{p}_w h_x, \tilde{p}_y = \tilde{p}_w h_y, \tilde{p}_z = \tilde{p}_w h_z$$

אנו יודעים כי $h_x = x_{\text{wall}}$.נציב ונקבל

$$\tilde{p}_x = \tilde{p}_w x_{\text{wall}}, \tilde{p}_y = \tilde{p}_w h_y, \tilde{p}_z = \tilde{p}_w h_z$$

אנו יודעים כי $h = \left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) p$ ולכן

$$h_y = \left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l_y + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) p_y$$
$$h_z = \left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l_z + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) p_z$$

ומכאן נובע המשוואות:

$$\tilde{p}_x = \tilde{p}_w x_{\text{wall}}, \tilde{p}_y = \tilde{p}_w \left(\left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l_y + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) p_y\right), \tilde{p}_z = \tilde{p}_w \left(\left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l_z + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) p_z\right)$$

- ולכן

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{p}_x \\ \tilde{p}_y \\ \tilde{p}_z \\ \tilde{p}_w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{p}_w x_{\text{wall}} \\ \tilde{p}_w \left(\left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l_y + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) p_y\right) \\ \tilde{p}_w \left(\left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l_z + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) p_z\right) \\ \tilde{p}_w \end{pmatrix} \\ &= \tilde{p}_w \begin{pmatrix} x_{\text{wall}} \\ \left(\left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l_y + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) p_y\right) \\ \left(\left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l_z + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) p_z\right) \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- נחפש מט' מתאימה שמקיימת

$$A \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{p}_w \begin{pmatrix} x_{\text{wall}} \\ \left(\left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l_y + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) p_y\right) \\ \left(\left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l_z + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) p_z\right) \\ 1 \end{pmatrix}$$

נתובנן במט'

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_{\text{wall}} \\ 0 & \left(\frac{x_{\text{wall}}-l_x}{p_x-l_x}\right) & 0 & \left(\frac{p_x-x_{\text{wall}}}{p_x-l_x}\right) l_y \\ 0 & 0 & \left(\frac{x_{\text{wall}}-l_x}{p_x-l_x}\right) & \left(\frac{p_x-x_{\text{wall}}}{p_x-l_x}\right) l_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וניווכח שהיא מקיימ את הדרוש עבור $\tilde{p}_w = 1$:

$$A\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_{\text{wall}} \\ 0 & \left(\frac{x_{\text{wall}}-l_x}{p_x-l_x}\right) & 0 & \left(\frac{p_x-x_{\text{wall}}}{p_x-l_x}\right) l_y \\ 0 & 0 & \left(\frac{x_{\text{wall}}-l_x}{p_x-l_x}\right) & \left(\frac{p_x-x_{\text{wall}}}{p_x-l_x}\right) l_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \overbrace{1}^{\tilde{p}_w}\begin{pmatrix} x_{\text{wall}} \\ \left(\left(\frac{p_x-x_{\text{wall}}}{p_x-l_x}\right) l_y + \left(\frac{x_{\text{wall}}-l_x}{p_x-l_x}\right) p_y\right) \\ \left(\left(\frac{p_x-x_{\text{wall}}}{p_x-l_x}\right) l_z + \left(\frac{x_{\text{wall}}-l_x}{p_x-l_x}\right) p_z\right) \\ 1 \end{pmatrix} \cong h$$

כלומר הפתרון הוא הפרמטרי הוא:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_{\text{wall}} \\ 0 & \left(\frac{x_{\text{wall}}-l_x}{p_x-l_x}\right) & 0 & \left(\frac{p_x-x_{\text{wall}}}{p_x-l_x}\right) l_y \\ 0 & 0 & \left(\frac{x_{\text{wall}}-l_x}{p_x-l_x}\right) & \left(\frac{p_x-x_{\text{wall}}}{p_x-l_x}\right) l_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ננצל את התכונות של קור הומוגניות על מנת להגיע למט' A שאינה תלויה בp (שזה הנעלם שאנו לא יודעים).

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_{\text{wall}} \\ 0 & \left(\frac{x_{\text{wall}}-l_x}{p_x-l_x}\right) & 0 & \left(\frac{p_x-x_{\text{wall}}}{p_x-l_x}\right) l_y \\ 0 & 0 & \left(\frac{x_{\text{wall}}-l_x}{p_x-l_x}\right) & \left(\frac{p_x-x_{\text{wall}}}{p_x-l_x}\right) l_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (p_x-x_{\text{wall}})\cdot x_{\text{wall}} \\ 0 & x_{\text{wall}}-l_x & 0 & (p_x-x_{\text{wall}})\, l_y \\ 0 & 0 & x_{\text{wall}}-l_x & (p_x-x_{\text{wall}})\, l_z \\ 0 & 0 & 0 & p_x-l_x \end{pmatrix} \\ &\cong \begin{pmatrix} x_{\text{wall}} & 0 & 0 & -(x_{\text{wall}})^2 \\ l_y & x_{\text{wall}}-l_x & 0 & -x_{\text{wall}}l_y \\ l_z & 0 & x_{\text{wall}}-l_x & -x_{\text{wall}}l_z \\ 1 & 0 & 0 & -l_x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כלומר

$$\boxed{A=\begin{pmatrix} x_{\text{wall}} & 0 & 0 & -(x_{\text{wall}})^2 \\ l_y & x_{\text{wall}}-l_x & 0 & -x_{\text{wall}}l_y \\ l_z & 0 & x_{\text{wall}}-l_x & -x_{\text{wall}}l_z \\ 1 & 0 & 0 & -l_x \end{pmatrix}}$$

ואז:

$$
\begin{aligned}
Ap &= \begin{pmatrix} x_{\text{wall}} & 0 & 0 & -\left(x_{\text{wall}}\right)^2 \\ l_y & x_{\text{wall}} - l_x & 0 & -x_{\text{wall}} l_y \\ l_z & 0 & x_{\text{wall}} - l_x & -x_{\text{wall}} l_z \\ 1 & 0 & 0 & -l_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p_x x_{\text{wall}} - \left(x_{\text{wall}}\right)^2 \\ p_x l_y + p_y \left(x_{\text{wall}} - l_x\right) - x_{\text{wall}} l_y \\ p_x l_z + p_z \left(x_{\text{wall}} - l_x\right) - x_{\text{wall}} l_z \\ p_x - l_x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_{\text{wall}} \left(p_x - x_{\text{wall}}\right) \\ p_y \left(x_{\text{wall}} - l_x\right) + p_x l_y - x_{\text{wall}} l_y \\ p_z \left(x_{\text{wall}} - l_x\right) + p_x l_z - x_{\text{wall}} l_z \\ p_x - l_x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_{\text{wall}} \left(p_x - x_{\text{wall}}\right) \\ p_y \left(x_{\text{wall}} - l_x\right) + \left(p_x - x_{\text{wall}}\right) l_y \\ p_z \left(x_{\text{wall}} - l_x\right) + \left(p_x - x_{\text{wall}}\right) l_z \\ p_x - l_x \end{pmatrix} \\
&\cong \begin{pmatrix} x_{\text{wall}} \left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) \\ p_y \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) + \left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l_y \\ p_z \frac{\left(x_{\text{wall}} - l_x\right)}{p_x - l_x} + \left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l_z \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_{\text{wall}} \\ \left(\left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l_y + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) p_y\right) \\ \left(\left(\frac{p_x - x_{\text{wall}}}{p_x - l_x}\right) l_z + \left(\frac{x_{\text{wall}} - l_x}{p_x - l_x}\right) p_z\right) \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= h
\end{aligned}
$$

נציב מספרים $x_{\text{wall}} = 5, l = (-2, 3, 1)$ ונקבל

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} x_{\text{wall}} & 0 & 0 & -\left(x_{\text{wall}}\right)^2 \\ l_y & x_{\text{wall}} - l_x & 0 & -x_{\text{wall}} l_y \\ l_z & 0 & x_{\text{wall}} - l_x & -x_{\text{wall}} l_z \\ 1 & 0 & 0 & -l_x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -25 \\ 3 & 7 & 0 & -15 \\ 1 & 0 & 7 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

כלומר

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}5&0&0&-25\\3&7&0&-15\\1&0&7&-5\\1&0&0&2\end{pmatrix}}$$

סעיף ג

הערה 1. שימו לב שאין מניעה שקווים יתלכדו בסעיף זה ובסעיף 1 .

שני קווים מקבלים נתונים על ידי

$$\begin{aligned}l_1(t)&=p+tv\\l_2(t)&=m+tv\end{aligned}$$

נסמן

$$p_1=(p_x,p_y,p_z)\,,p_2=(m_x,m_y,m_z)\,,v=(v_x,v_y,v_z)$$

לכן

$$\begin{aligned}l_1(t)&=p+tv=(p_x+tv_x,p_y+tv_y,p_z+tv_z)\\l_2(t)&=m+tv=(m_x+tv_x,m_y+tv_y,m_z+tv_z)\end{aligned}$$

עבור סעיף א': קווים שיהיו מקבילים לפני ההטלה יישארו מקבילים גם אחריה.

הטרנס A היא:

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&5\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

ולכן:

$$A\left[l_1(t)\right]=(5,p_y+tv_y,p_z+tv_z)$$

$$A\left[l_2(t)\right]=(5,m_y+tv_y,m_z+tv_z)$$

נסמן

$$\tilde{p}=(5,p_y,p_z)\,,\tilde{m}=(5,m_y,m_z)\,,\tilde{v}=(0,v_y,v_z)$$

ונקבל כי

$$\widetilde{l_1(t)}=A\left[l_1(t)\right]=\tilde{p}+t\tilde{v}$$

$$\widetilde{l_2(t)}=A\left[l_2(t)\right]=\tilde{m}+t\tilde{v}$$

ולכן מכאן נובע כי קווים שיהיו מקבילים לפני ההטלה יישארו מקבילים גם אחריה.

עבור סעיף ב':

קווים שיהיו מקבילים לפני ההטלה יישארו מקבילים גם אחריה.
הטרנס A היא:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -25\\ 3 & 7 & 0 & -15\\ 1 & 0 & 7 & -5\\ 1 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A\left[l_1(t)\right] &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -25\\ 3 & 7 & 0 & -15\\ 1 & 0 & 7 & -5\\ 1 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x+tv_x\\ p_y+tv_y\\ p_z+tv_z\\ 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -25\\ 3 & 7 & 0 & -15\\ 1 & 0 & 7 & -5\\ 1 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x+tv_x\\ p_y+tv_y\\ p_z+tv_z\\ 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 5\left(p_x+tv_x\right)-25\\ 3\left(p_x+tv_x\right)+7\left(p_y+tv_y\right)-15\\ \left(p_x+tv_x\right)+7\left(p_z+tv_z\right)-5\\ \left(p_x+tv_x\right)+2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 5\left(p_x+tv_x+2-2\right)-25\\ 3\left(p_x+tv_x+2-2\right)+7\left(p_y+tv_y\right)-15\\ \left(p_x+tv_x+2-2\right)+7\left(p_z+tv_z\right)-5\\ \left(p_x+tv_x\right)+2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 5\left(p_x+tv_x+2\right)-35\\ 3\left(p_x+tv_x+2\right)+7\left(p_y+tv_y\right)-21\\ \left(p_x+tv_x+2\right)+7\left(p_z+tv_z\right)-7\\ \left(p_x+tv_x\right)+2\end{pmatrix}\\
&\cong \begin{pmatrix} 5-\frac{35}{(p_x+tv_x+2)}\\ 3+7\left(p_y+tv_y\right)-\frac{21}{(p_x+tv_x+2)}\\ 1+7\left(p_z+tv_z\right)-\frac{7}{(p_x+tv_x+2)}\\ 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$A\left[l_2(t)\right]=\left(5,m_y+tv_y,m_z+tv_z\right)$$

פרסמתי שאלה בדיקורד על סעיף ב'

שאלה מספר 2

סעיף א

סעיף 1

נתאר את הפעולה עם התייחסות לכל אחד מהחלקים

מקורות תאורה:

יש מקום תאורה אחד בודד של אור כיווני שווקטור הכיוון שלו הוא $(0, 1, 0)$.

שיטת shading

כמו שניתן לראות ה$vshader$ מעביר את ה$fnormal$ - כלומר את הנורמל שרלוונטי לפאה.ולכן שיטת ה shading היא flat shading

illumination

נבחין כי ה **illumination** כאן נולד מ2 גורמים .

- הגורם הקבוע (ambient/emmision (כאן ההגדרות יכולות להתלכד)) שערכו $\overbrace{(1, 1, 0)}^{\text{color}} * (0.5, 0.5, 0.5)$
- הגורם של הdiffuse (דוט פרודקט בין הנורמל לבין כיוון התאורה) כפול הצבע של האור $((1, 1, 0))$.

סעיף 2

```
//code of vshader_new.glsl
in vec3 position;
in vec3 normal; #the user should provide here the face normal just as before
out vec4 fColor_in;

void main(){
  vec3 dir = vec3(0,1,0);
  vec3 color = vec3(1,1,0);
  fColor_in = vec4((.5+dot(normal,dir)*color),1.0);
  gl_Position = position;
}
```

סעיף ב

סעיף 1

מקורות תאורה:

יש מקום תאורה אחד בודד של אור נקודתי שממוקם בחלל במיקום $(1, 5, 3)$.

(ניתן להבין זאת מ הווקטור $lDir$ שתלוי במיקום האוביקט)

שיטת shading

כמו שניתן לראות ה$vshader$ מעביר את ה$fnormal$ - כלומר את הנורמל שרלוונטי לפאה.ולכן שיטת ה shading היא flat shading.

(משתמע משם המשתנה שבחרו לנורמל $fNormal$ שרומז לאופן השימוש והקלט לשיידרים)

illumination

כאן האילומניישן הוא מסוג specular מכיוון שאנו מעבירים את מיקום הצופה ב$vDir$.

השייינס (הברקה) היא $\alpha = 0.5$.

סעיף 2

לאניתן לכתוב shader vertex חדש כמובקש.

הסבר:

בין הvertex shader ל fragment shader מתבצעת אינטרפולציה לקווים לפי חישוב של קור' בריצנטריות.החישוב של הצבע הסופי בfragment shader שנתון לפנינו מושפע בין היתר מהגורמים $vdir, ldir$ שעוברים **אינטרפולציה** לפי הקור' הבריצנטריות בין הvertex shader ל fragment shader.

לכן את האינטרפוציה הזו לא נוכל להשתמש בvertex shader מכיוון שהוא מחושב רק **פר וורטקס.**

מכאן נובע כי לאניתן לכתוב vertex shader חדש כמובקש.

סעיף ג

המטרה של normal mapping היא לייצר אשליית עומק של טקסטורה מסויימת על ידי normal map.תמונה שמייצגת את הנורמלים שאמן מתכוון שיהיו עבור כל קור' טקסטורה .

יחד עם הtexture map אנו מקבלים גם normal map שהוא תמונה בשלושה ערוצי צבע R, G, B שכלערוץ כזה מייצג את הכיוון של הנורמל בכיוונים x, y, z בהתאמה (עד כדי מרכוז ונרמול לפי $(\text{out} = 2 \cdot (\text{in} - 0.5)$.בד"כ תמונות normal map הם בגוון כחול מכיוון שרוב הנורמלים בתמונה ממוצעת פונים החוצה מהדף ולכן הערוץ הכחול בהם ייתפוס בד"כ גודל משמעותי.

על מנת לממש normal mapping עלינו לדגום יחד עם הצבע של הט'סטורה את הנורמל שנובע מתוך התמונה של הנורמלים,לחשב את הtangent,tangent bit (שיחד שלושתם מהווים בסיס ל$\mathbb{R}^3$) ולנצל תוצאה זו על מנת למצוא נורמל שייאפשר את אשליית העומק שדיברנו עליה בעבר.

לשיטה זו יש עלות זכרון לא גבוהה ומכאן ייתרונה (סה"כ עוד תמונה יחד עם התמונה של הטקסטורה - פי 2 זכרון -לא משמעותי - אותו סדר גודל של צריכת זכרון).

סעיף ד

לא ניתן,על מנת לממש normal mapping

עלינו לדגום טקסטורה ולדגום את הנורמל מהnormal map בfragment shader (כך ניתן לבצע אינטרפולציה ולבחור את הטסטורה והנורמל המתאימים על כל נקודה שעל כל פאה במודל).

אבל בסעיף א' ה fshader_new ממומש כבר (באופן מנוון מאוד) ולכן לא נוכל לממשnormal mapping .

שאלה מספר 3

סעיף א

אם v הוא ציר הסיבוב של R אז v יהווה ו"ע של המט' R עם ע"ע 1.בכל מקרה אחר R יסובב את v.

כלומר

$$Rv = v \iff R \text{ axis the around matrix rotation is } v$$

הערה 2. אם $R = I$ (מט' היחידה) לדוגמא על ידי סיבוב ב $2\pi\text{rad}$,אז הנ"ל יתקיים עבור כל v.

סעיף ב

אכן ייתכן כי q_u מייצג סיבוב בתלת מימד.

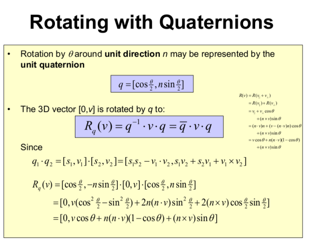
התנאי על u על מנת שזה יתקיים הוא שu יהיה ווקטור יחידה ב$\mathbb{R}^3$ (כלומר $\|u\| = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$ (מה שייגרום לq_u להיות קוונטריון יחידה).

במקרה הזה ציר הסיבוב הוא u וזווית הסיבוב היא $180\,\text{deg}$ (נזכור כי $180\,\text{deg}$ שקול ל$-180\,\text{deg}$ מטעמי סמטריה).

הערה 3. הערות להמחשה #1:

יהא $n \in \mathbb{R}^3$ כיוון יחידה כלשהוא אזי $q = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), n\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$ מאפשר לייצג סיבוב של p בציר n על ידי זווית θ.

על מנת לייתג את הסיבוב נזכר בשקף הבא מההרצאות:



כאשר החלק הממשי של הקוונטריון הוא אפס המשמעות היא ש$0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ כלומר מכאן נובע כי $\theta = \pm 180\,\text{deg}$.

הערה 4. המחשה מעניינת של זה:תהא p נקודה תלת מימדית בקור' תלת מימדיות$= p$ (p_x, p_y, p_z) כך ש $u/\|u\| \neq p/\|p\|$ (ע"מ שp יושפע מהסיבוב) אזי מט' הסיבוב על v תתשפיע על v כדלקמן:

$$
\begin{aligned}
R_q(v) &= \left[\cos\frac{\theta}{2}, -n\sin\frac{\theta}{2}\right]\cdot[0,v]\cdot\left[\cos\frac{\theta}{2}, n\sin\frac{\theta}{2}\right]\\
&= \left[0, v\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+2n(n\cdot v)\sin^2\frac{\theta}{2}+2(n\times v)\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right]\\
&= [0, v\cos\theta + n(n\cdot v)(1-\cos\theta)+(n\times v)\sin\theta]\\
&= \begin{cases}[0, v\cos 180 + n(n\cdot v)(1-\cos 180)+(n\times v)\sin 180] & \theta = 180\\ [0, v\cos(-180) + n(n\cdot v)(1-\cos(-180))+(n\times v)\sin(-180)] & \theta=-180\end{cases}\\
&= \begin{cases}[0, -v+2\cdot n(n\cdot v)] & \theta=180\\ [0,-v+2\cdot n(n\cdot v)] & \theta=-180\end{cases}\\
&= \begin{cases}[0, -v+2\cdot n(n\cdot v)] & \theta=180\\ [0,-v+2\cdot n(n\cdot v)] & \theta=-180\end{cases}\\
&= [0,-v+2\cdot n(n\cdot v)]\\
&= [0,-v+2\cdot n(n\cdot v)]
\end{aligned}
$$

דוגמה 5. נניח $v=(0,1,0)$ ו$u=(1,0,0)$ אזי $R_q(v)=(0,-1,0)$ (כלומר לעשה ביצענו סיבוב של הווקטור $v=(0,1,0)$ סביב $u=(1,0,0)$ ב180 מעלות והתוצאה היא $R_q(v)=(0,-1,0)$.

דוגמה 6. נניח $v=(0,1,0)$ ו$u=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ אזי $R_q(v)=(1,0,0)$ (כלומר לעשה ביצענו סיבוב של הווקטור $v=(0,1,0)$ סביב $u=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ ב180 מעלות.והתוצאה היא $R_q(v)=(1,0,0)$.

סעיף ג

משפט 7. משפט אוילר : כל הטיה של גוף יכולה להיות מושגת על ידי **מט' הזהה בודדת** סביב ציר מסויים ובזווית מסויימת.

מסקנה 8. כל הטיה של גוף יכולה להיות מתוארת על ידי זווית θ ווקטור יחידה $n=(n_x,n_y,n_z)$.

עלינו לבדוק האם קיימים w,θ_w כך ש $R_w=R(\theta_w,w)=R_uR_v=R_vR_u$

עובדה 9. אנו יודעים כי **סיבובים** תחת $\mathbb{R}^3$ **אינם קומוטטבים** כלומר באופן כללי **עבור** u,v **כלליים <u>לא בהכרח</u> מתקיים כי** $R_uR_v=R_vR_u$.

בעיה 10. צריך להוכיח האם קיימים w,θ_w כך ש $R_w=R(\theta_w,w)=R_uR_v=R_vR_u$ בפרט גם צריך להראות כי $R_uR_v=R_vR_u$ בתנאים מסויימים.

עובדה 11. סיבובים ב$\mathbb{R}^2$ הם כן קומוטטיבים ולכן עבור כל שני מט' סיבוב ב$\mathbb{R}^3$ שמסובבות על אותו ציר ניתן לבצע רדוקציה לבעיית סיבוב ב$\mathbb{R}^2$ ורק הקבוצה הזו היא קבוצת המט' שמאפשר את הקומוטטיביות.

מסקנה 12. לכן

$$\left\{R_uR_v = R_vR_u \mid R_u, R_v, R_uR_u^T = I, R_vR_v^T = I\right\} \iff u = v \vee u = -v$$

לכן התנאי על u,v כך שיתקיים הנ"ל (הקומוטטיביות) הוא $u = v$ או $u = -v$.
ומכאן נובע באופן אינטואיטיבי לסיבובים בדו מימד כי

$$w = u$$

$$\theta_w = \theta_u + \begin{cases} \theta_v & u = v \\ -\theta_v & u = -v \end{cases}$$

סעיף ד

הערה 13. אני פותר סעיף זה בפני עצמו ..הוא לא רלוונטי לסעיף ג'.(אחרת זה לא יהיה הגיוני כי הקוונטריון לא יהיה מנורמל אם $\theta_u \neq 180$ או $\theta_v \neq 180$)

הערה 14. נבחין כי q_uq_v שקול ל"תבצע סיבוב לפי q_v ואחר כך על התוצאה תבצע סיבוב נוסף לפי q_u".

נתונים הקוונטריונים

$$q_u = q\left(\theta_u, u\right)$$

$$q_v = q\left(\theta_v, v\right)$$

נחשב את הקוונטריון השקול:

משקף בהרצאה
אנו יודעים כי מכפלת קוונטריונים מתנהגת לפי:

$$q_1 \cdot q_2 = [s_1, v_1] \cdot [s_2, v_2] = [s_1s_2 - v_1 \cdot v_2, s_1v_2 + s_2v_1 + v_1 \times v_2]$$

מכיוון

ש

$$q_u = q\left(\theta_u, u\right) = \left(\cos\frac{\theta_u}{2}, \sin\frac{\theta_u}{2}u\right) = \left(\cos\frac{\theta_u}{2}, \sin\frac{\theta_u}{2}u_x, \sin\frac{\theta_u}{2}u_y, \sin\frac{\theta_u}{2}u_z\right)$$

$$q_v = q\left(\theta_v, v\right) = \left(\cos\frac{\theta_v}{2}, \sin\frac{\theta_v}{2}v_x, \sin\frac{\theta_v}{2}v_y, \sin\frac{\theta_v}{2}v_z\right)$$

לכן:

$$q_uq_v = \left[\left(\cos\frac{\theta_u}{2}\right) \cdot \left(\cos\frac{\theta_v}{2}\right) + u \cdot v, \left(\cos\left(\frac{\theta_u}{2}\right)\right)v + \left(\cos\left(\frac{\theta_v}{2}\right)\right)u + u \times v\right]$$

כלומר **ציר הסיבוב של הקוונטריון** נתון על ידי

$$\left(\cos\left(\frac{\theta_u}{2}\right)\right)v+\left(\cos\left(\frac{\theta_v}{2}\right)\right)u+u\times v$$

ואם רוצים את הגדול הזה מנורמל (רוצים את כיוון במונחים של ווקטור בוארך יחידה):

$$\frac{\left(\cos\left(\frac{\theta_u}{2}\right)\right)v+\left(\cos\left(\frac{\theta_v}{2}\right)\right)u+u\times v}{\left\|\left(\cos\left(\frac{\theta_u}{2}\right)\right)v+\left(\cos\left(\frac{\theta_v}{2}\right)\right)u+u\times v\right\|}$$

סעיף ה

סעיף 1

$$q_1(t)=(1-t)q_u+tq_v$$

ציון הבעיתיות:
לדוגמא:

$$q_u=\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right],q_v=\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right]$$

(כלומר q_u סיבוב סביב x 90 מעלות, q_v סיבוב סביב $x-$ ב $270-$ מעלות (עקרונית זה אותו קוונטריון כי יש double cover))
אזי עבור $t=0.5\in[0,1]$ מתקיים כי

$$\begin{aligned}q_1(0.5)&=(1-0.5)q_u+0.5q_v\\&=(1-0.5)[0,1,0,0]+0.5[0,-1,0,0]\\&=0.5\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right]+0.5\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right]\\&=0\end{aligned}$$

כלומר

$$q_1(0.5)=0$$

קוונטריון האפס שאינו נמצא על הספרה ה$\mathbb{R}^4$ מימדית. (שולח את כל הנקודות לראשית) כלומר אינו קוונטריון יחידה ולכן לא יכוללהוות קווטריון שמשמש לסיבוב.

סעיף 2

$$q_2(t) = \frac{q_1(t)}{|q_1(t)|} = \frac{(1-0.5)q_u + 0.5q_v}{|(1-0.5)q_u + 0.5q_v|}$$

ציון הבעיתיות:
עבור:

$$q_u = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right], q_v = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right]$$

אזי עבור $t = 0.5 \in [0,1]$ מתקיים כי

$$q_1(0.5) = 0$$

ולכן

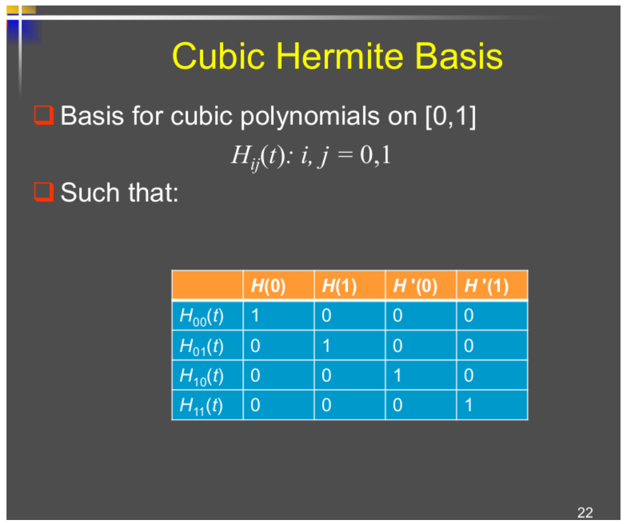
$$q_2(0.5) = \frac{q_1(0.5)}{|q_1(0.5)|} = \frac{0}{|0|}$$

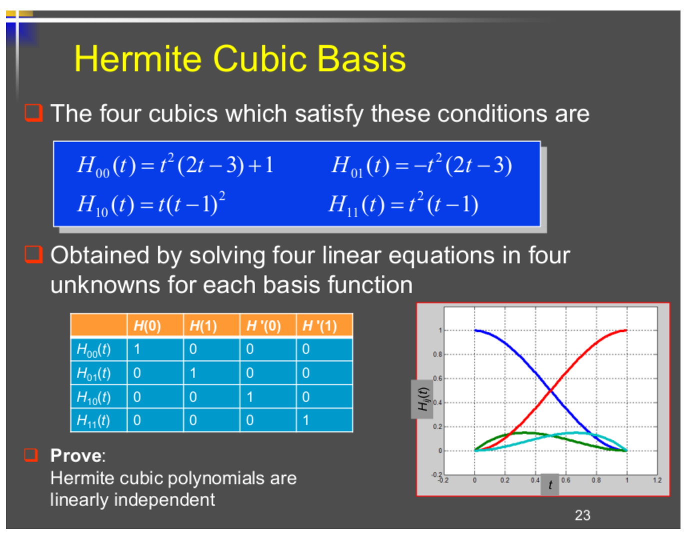
כלומר הבעיתיות היא חלוקה באפס.

שאלה מספר 4

סעיף א

נזכר בשקפים המתאימים מההרצאה:





כלומר

	$H(0)$	$H(1)$	$H'(0)$	$H'(1)$
$H_{00}(t)$	1	0	0	0
$H_{01}(t)$	0	1	0	0
$H_{10}(t)$	0	0	1	0
$H_{11}(t)$	0	0	0	1

הגרפים שיש לנו הם:

	$H(0)$	$H(1)$	$H'(0)$	$H'(1)$
A	0	0	1	0
B	0	0	1	1
C	0	1	0	0
D	1	1	0	1
E	2	0	0	0
F	1	1	0	0
G	1	0	0	0
H	0	0	0	1

נסמן על הגרפים שקיבלנו מי מהם פונ' בסיס ומי מהם לא ומדוע לא (באדום)

	$H(0)$	$H(1)$	$H'(0)$	$H'(1)$
A	0	0	1	0
B	0	0	1	1
C	0	1	0	0
D	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	0	$\boxed{1}$
E	$\boxed{2}$	0	0	0
F	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	0	0
G	1	0	0	0
H	0	0	0	1

גרף A ניתן לראות כי עבור עקום זה מקיים את התכונות ומהווה פונ' הבסיס השלישית $H_{10}(t)$.
התכונה גאומטרית של הפונ' בסיס הזו היא קביעה של הנגזרת בנקודה הראשונה.(נקודת ההתחלה)

גרף B לא מקיים את התכונות.התכונה שמונעת ממנו להיות כזו היא שגם $H'(0) = 1$ וגם $H'(1) = 1$ (במקום שרק אחד מהם יהיה אחד והשאר אפס)

גרף C ניתן לראות כי עבור עקום זה מקיים את התכונות ומהווה פונ' הבסיס השניה $H_{01}(t)$.
התכונה גאומטרית של הפונ' בסיס הזו היא קביעה של המיקום של נקודת הסיום.

גרף D לא מקיים את התכונות.התכונה שמונעת ממנו להיות כזו היא שגם $H(0) = 1$ וגם $H(1) = 1$ וגם $H'(1) = 1$ (במקום שבדיוק אחד מהם יהיה אחד והשאאר אפס)

גרף E לא מקיים את התכונות.כי $H(0) = 2$ וזה לא מתקיים באף פונ' בסיס.

גרף F לא מקיים את התכונות.התכונה שמונעת ממנו להיות כזו היא שגם $H(0)=1$ וגם $H(1)=1$ (במקום שרק אחד מהם יהיה אחד והשאר אפס)

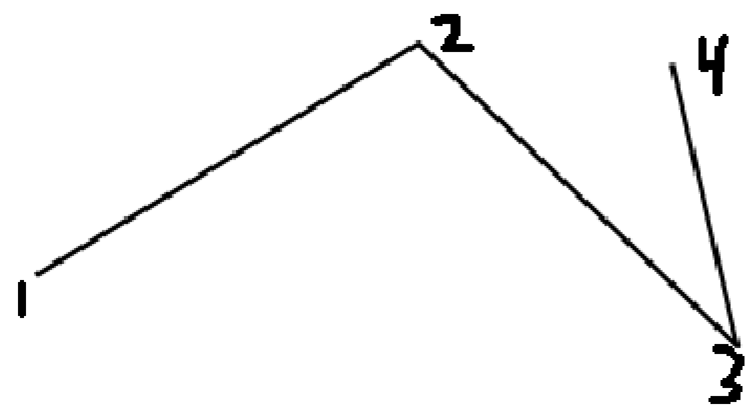
גרף G ניתן לראות כי עבור עקום זה מקיים את התכונות ומהווה פונ' הבסיס הראשונה $H_{00}(t)$.

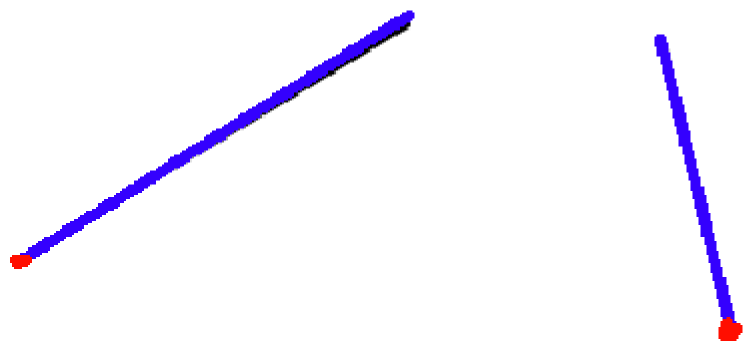
התכונה גאומטרית של הפונ' בסיס הזו היא קביעה של המיקום של נקודת ההתחלה.

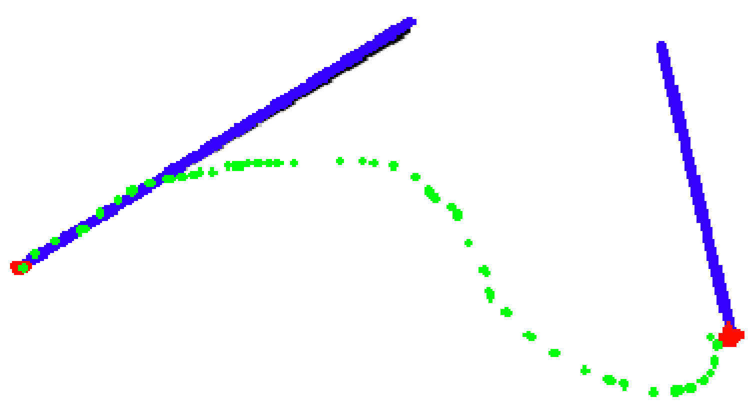
גרף H ניתן לראות כי עבור עקום זה מקיים את התכונות ומהווה פונ' הבסיס הרביעית $H_{11}(t)$.

התכונה גאומטרית של הפונ' בסיס הזו היא קביעה של הנגזרת בנקודה הסיום.

סעיף ב

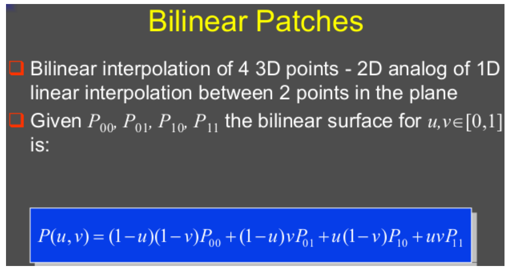


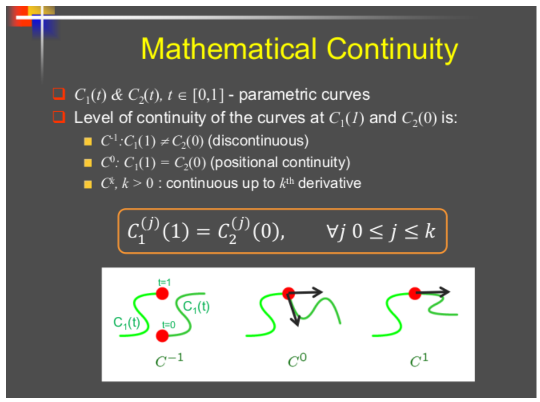


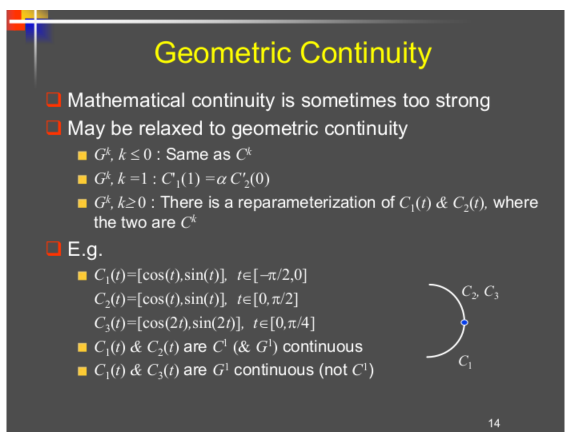


סעיף ג

נזכר בשקף הרלוונטי:







סעיף 1

מכיוון ש $P(u,v)$ ו $Q(u,v)$ שניהם עוברים דרך שתי הנקודות $P_{1,0},P_{1,1}$ מכאן נובע שיש רציפות במקום.כלומר מכיוון ש

$$P(1,1) = P_{1,1} = Q(0,1)$$

$$P(1,0) = P_{1,0} = Q(0,0)$$

נובע שיש C^0 בינהם.

(ולכן מהגדרת ריציפות גאומטרית יש גם G^0 בינהם).

באשר לנגזרת (לרציפויות גבוהות יותר),ניתן להשתכנע (זו הנחה,וזהלא נתון במפורש בשאלה) שהמישור שמכיל את $P(u,v)$ והמישור שמכיל את $Q(u,v)$ אינם מתלכדים לכדי אותו מישור ולכן לא מתקיים C^1 בינהם.בנוסף אם זה המצב אז גם הם לא G^1.

מסקנה 15. הרציפות בין $P(u,v)$ לבין $Q(u,v)$ היא C^1 (ולכן גם G^1)

סעיף 2

התנאי:

המישור שמכיל את $P(u,v)$ והמישור שמכיל את $Q(u,v)$ מתלכדים לכדי אותו מישור.
במקרה כזה הרציפות היא C^∞ (ולכן גם G^∞).

סעיף 3

לדוגמא :

$$P_{00}=(0,0,0)\,,P_{01}=(0,0,1)$$

$$P_{10}=(0,1,0)\,,P_{11}=(0,1,1)$$

$$P_{20}=(0,2,0)\,,P_{21}=(0,2,1)$$

כמו שניתן לראות כל הנקודות על מישור $Z=0$ ולכן מקיימותאת התנאי בסעיף 2 ולכן הם C^∞ (ולכן גם G^∞).