מבחן במקצוע גרפיקה ממוחשבת

13 בפברואר 2021

תוכן העניינים

שאלה מספר 1

סעיף א

הפרכה.

מבנה כללי של מט' סיבוב נתון על ידי

$$R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

תהא A מט' הסיבוב המתאימה ל$\theta=90$ מעלות: $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

תהא B מט' הסיבוב המתאימה ל$\theta=-90$ מעלות: $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

אזי עבור $\alpha=0.5$ מתקיים כי

$$C=\alpha A+(1-\alpha)B=\frac{1}{2}(A+B)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)=0_{2\times2}$$

כלומר C אינה מט' סיבוב.(כי אינה מדרגה מלאה ולכן אינה אוניטרית ולכן אינה מט' סיבוב).

סעיף ב

לא יעבוד.

נראה דוגמא שבה החישוב הנ"ל של הנורמלים יהיה שגוי.

תהא הטרנס' האפינית הבאה:

$$T=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

זו טרנס' לינארית (מתוארת על ידי מט') ולכן גם טרנס' אפינית.

הטרנס' הנ"ל מותחת את ציר x פי 2.

תהא הפאה שמורכבת מ4 קודקודים $\{(1,1,-1),(1,-1,-1),(-1,1,1),(-1,-1,1)\}$

(זה ריבוע באורך 2 ממורכז סביב הראשית מוטה ב45מעלות).הנורמל לפאה זו הוא $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

חישוב:

$$\begin{aligned}(1,1,-1)\times(1,-1,-1) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= i\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= i\left(-1-1\right) - j\left(-1-(-1)\right) + k\left(-1-1\right) \\ &= -2i-2k \\ &= \left(-2,0,-2\right)\end{aligned}$$

לאחר נרמול

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

..אני בסדר

לאחר הטרנס' 4 הנקודות יהיו : (הפאה תימתח פי 2 בציר x)

$$\left\{\left(2,1,0\right),\left(-2,-1,0\right),\left(-2,1,0\right),\left(2,-1,0\right)\right\}$$

לאחר הטרנס' של הנורמל הוא יהיה $\bar{n}=\left(-\sqrt{\frac{1}{5}},0,-\sqrt{\frac{4}{5}}\right)$:

חישוב הנורמל ייראה:

$$\begin{aligned}(2,1,-1)\times(2,-1,-1) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= i\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= i\left(-1-1\right) - j\left(-2-(-2)\right) + k\left(-2-2\right) \\ &= -2i-4k \\ &= (-2,0,-4)\end{aligned}$$

נרמול

$$\frac{(-2,0,-4)}{\sqrt{4+16}} = \frac{(-2,0,-4)}{\sqrt{20}} = -\frac{\left(\sqrt{4},0,\sqrt{16}\right)}{\sqrt{20}} = -\left(\sqrt{\frac{1}{5}},0,\sqrt{\frac{4}{5}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{1}{5}},0,-\sqrt{\frac{4}{5}}\right)$$

לאחר נרמול

$$\left(-\sqrt{\frac{1}{5}},0,-\sqrt{\frac{4}{5}}\right)$$

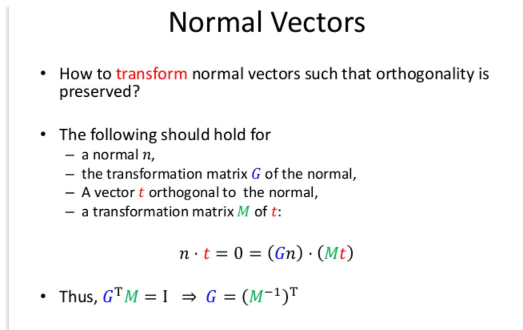
החישוב של הנורמל לפי השיטה שבסעיף ב':

$$n' = \frac{T\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| T\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\begin{pmatrix} -2\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -2\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{4}{5}} \\ 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{5}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{4}{5}} \\ 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{5}} \end{pmatrix}$$

נבחין כי $\left(-\sqrt{\frac{1}{5}},0,-\sqrt{\frac{4}{5}}\right)^T \neq \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{4}{5}} \\ 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{5}} \end{pmatrix}$ ולכן $n' \neq \bar{n}$ ולכן החישוב הנ"ל שגוי.

סעיף ג

נזכר בשקף החביב הבא:



מהתרגול

אזי:

בהנתן 2 נקודות לנורמל במישור p_1, p_2 הנורמל n אליהם מקיים

$$\star : n^T\left(p_1 - p_2\right) = 0$$

לאחר הטרנס נסמן $\forall i \in \{1,2\} : \tilde{p}_i = T\left(p+i\right) = Ap_i + b$ ונסמן $\tilde{n}$ כהנומל שלאחר הטרס.

נדרוש שייתקיים

$$\tilde{n}^T\left(\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2\right) = 0$$

נציב את $\forall i \in \{1,2\} : \tilde{p}_i$ ונקבל

$$\tilde{n}^T\left(Ap_1 + b - \left(Ap_2 + b\right)\right) = 0$$

כלומר מתקיים

$$\tilde{n}^T\left(\left(Ap_1 - Ap_2\right)\right) = 0$$

נסמן את הטרנס שצריך לעבור הנורמל B כלומר $\tilde{n} = Bn$ המטרה שלנו למצוא את B.

הנחה: A היא הפיכה.

אזי

עם שייתיקים $\tilde{n}^T\left(\left(Ap_1 - Ap_2\right)\right) = 0$ נדרוש כי

$$\left(Bn\right)^T\left(\left(Ap_1 - Ap_2\right)\right) = 0$$

כלומר

$$nB^T\left(\left(Ap_1 - Ap_2\right)\right) = 0$$

כלומר

$$n\left(B^TAp_1 - B^TAp_2\right) = 0$$

אם נדרוש כי $\boxed{B^T = A^{-1}}$ נקבל כי מתקיים

$$n\left(\overbrace{B^TA}^{I}p_1 - \overbrace{B^TA}^{I}Ap_2\right) = 0$$

כלומר $n\left(p_1-p_2\right)=0$ וזה נכון לפטי $\star$.

לכן בהנתן שA הפיכה (תנאי שקול לכך במונחי השאלה : בהנתן שטרנס' T הפיכה) נדרוש כי $B^T=A^{-1}$ כלומר ש $B=\left(A^{-1}\right)^T$ כלומר נדרוש להכפיל את המט' של הנורמל בB על מנת שהנ"ל מתקיים.

$$\tilde{n}=Bn$$

כלומר הרטנס היא

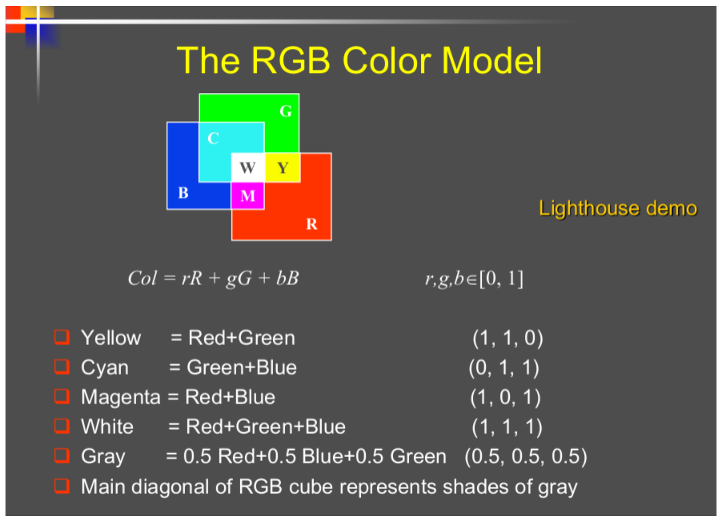
$$\tilde{n}=Bn$$

כאשר $B=\left(A^{-1}\right)^T$

שאלה מספר 2

סעיף א

הפער נולמד מתוך הבדלי תאורה בין הבית לבין החנות.
נזכר בשכף המעלף הבא:



בבית פלוני ראה את הוגמית המקורית (נסמן A) בצבע אדום red ואת הדוגמית של הבד שקנה (נסמן B) בצבע סגול magenta.
כלומר בתאורה של הבית

תאורה	A	B
בית	$(1,0,0) =$ RED	$(1,0,1) =$ RED+BLUE
חנות	SAME	SAME

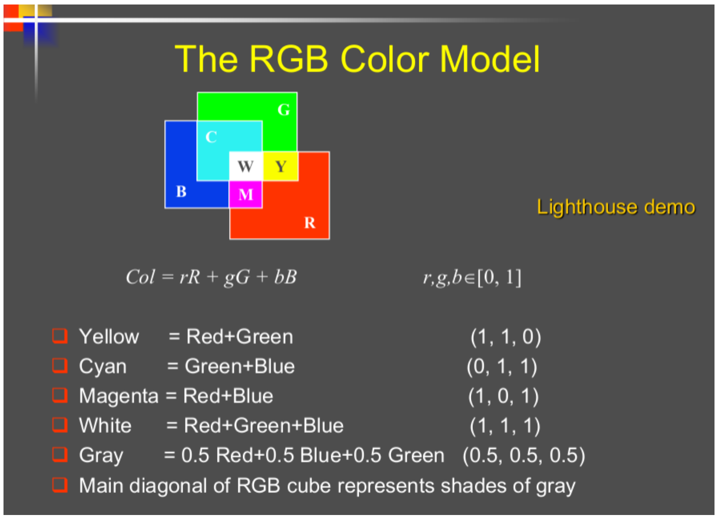
מכאן נובע כי תנאי התאורה בחנות לא הכילו כלל גוון כחול והכילו את אותה העוצמה של גוון אדום.(זאת מכיוון שלפי המודל תאורה שלמנו מכפילים כל ערוץ תאורה בנפרד וזה הצבע המתקבל).
ניתן להניח כי האור בבית של פלוני הוא לבן $\text{White} = (1,1,1)$ והאור של החנות הוא צהוב $\text{White} - \text{Blue} = (1,1,1) - (0,0,1) = (1,1,1) - (1,1,0) = \text{Yellow}$ ואז אכן במקרה כזה:

תאורה	A	B
בית light $\text{White} = (1,1,1)$	$(1,0,0) =$ RED	$(1,0,1) =$ RED+BLUE
חנות light $\text{Yellow} = (1,1,0)$	$(1,0,0) =$ RED	$(1,0,0) =$ RED Same

וזה מסביר את הפער

סעיף ב

במדפסת במקום חיבור צבעים אנחנו עובדים עם חיסור צבעים.כלומר יש דף לבן ואנחנו חוסמים גלי אור מסויימים ובכך צובעים את הדף.
כלומר לפי אותו שקף:



- כשהמדפסת רוצה להדפיס צבע מתכלת $CYAN$ היא מחסרת מהדף הלבן (לפי במודל התאורה שלנו) את הצבע $(1,0,0)$.
- כשהמדפסת רוצה להדפיס צבע מג'נטה $MAGENTA$ היא מחסרת מהדף הלבן (לפי במודל התאורה שלנו) את הצבע $(0,1,0)$.
- כשהמדפסת רוצה להדפיס צבע צהוב $YELLOW$ היא מחסרת מהדף הלבן (לפי במודל התאורה שלנו) את הצבע $(0,0,1)$.

צבע אדום במדפסת רגילה על מנתלהפיק צבע אדום עלינו להחסיר את הצבעים $MAGENTA$ $(0,1,0)$ ו $YELLOW$ $(0,0,1)$. ובכך לקבל אדום:

$$\overbrace{(1,0,0)}^{\text{color Red}} = \overbrace{(1,1,1)}^{\text{paper White}} - \left(\overbrace{(0,1,0)}^{\text{ink Magenta}} + \overbrace{(0,0,1)}^{\text{ink Yellow}}\right)$$

כעת במדפסת הנוכחית הוחלפו מיכלי הדיו של MAGENTA ו CYAN ולכן נקבל כי יודפס :

$$\overbrace{(1,1,1)}^{\text{paper White}} - \left(\cancel{\overbrace{(0,1,0)}^{\text{ink Magenta}}} + \overbrace{(1,0,0)}^{\text{ink cyan}} + \overbrace{(0,0,1)}^{\text{ink Yellow}}\right) = (0,1,0) = \text{color Green}$$

יודפס צבע ירוק.

צבע סגול

- כשהמדפסת רוצה להדפיס צבע מג'נטה $MAGENTA$ היא מחסרת מהדף הלבן (לפי במודל התאורה שלנו) את הצבע $(0,1,0)$.

$$\overbrace{(1,1,1)}^{\text{paper White}} - \left(\overbrace{(0,1,0)}^{\text{ink Magenta}}\right) = (1,0,1) = Magenta$$

כעת במדפסת הנוכחית הוחלפו מיכלי הדיו של MAGENTA ו CYAN ולכן נזריק את הדיו של ה$CYAN$ ונקבל

$$\overbrace{(1,1,1)}^{\textbf{paper White}} - \left(\cancel{\overbrace{(0,1,0)}^{\textbf{ink Magenta}}} + \overbrace{(1,0,0)}^{\textbf{ink cyan}}\right) = (0,1,1) = \textbf{color Cyan}$$

כלורמ הצבע שיוצג הוא תכלת $CYAN$

צבע שחור כשמהפדסת רוצה להדפיס שחור היא תזריק את כל הצבעים יחד (תחסר את כולם) ולכן אין משמעות להחלפה כי גם ככה המדפסת משתמשת בכל הצבעים .ולכן הצבע שייתקבל הוא שחור.

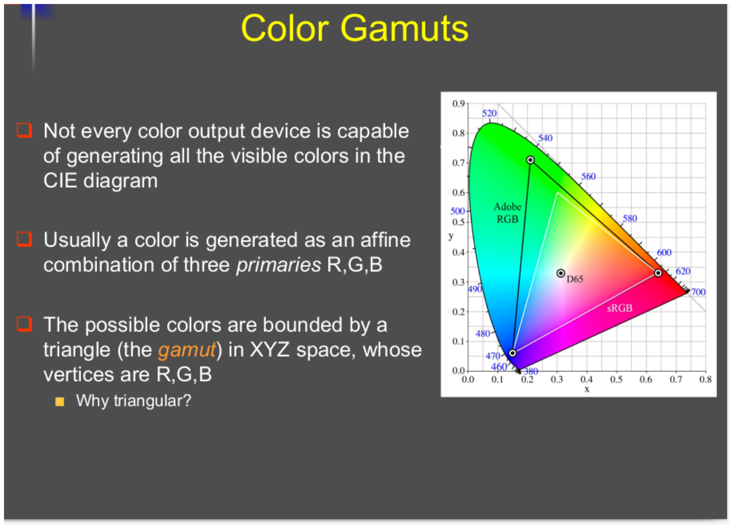
סעיף ג

כל מסך מאופיין בין היתר על ידי תכונה שנקראת גמוט המשמעות של זה היא טווח הצבעים הדינימי שהפיקסלים של המסך יכולים להפיק.(גובולות המשולש של הגמוט שונים ממסך למסך)

מסכים שונים יש מגבלות שונות כלומר קיימים טווחים של תדרים (-אורכי גל) שמסכים מסויימים מסויימים ומסכים אחרים לא.

כשמסך רוצה לבחור באיזה צבע לצבוע פיקסל מסויים הוא קורא את הקור' R,G,B שהתוכנה מבקשת לצייר ואז מבצע אינטרפולציה בין הגבולות של המשולש גמוט שלו לפי קור' בריצנטריות על מנת לצבוע את הצבע הנ"ל.(נראלי)

למסכים שונים יש משולשים אחרים (-קודקודים אחרים) ולכן תוצאת הקור' הברצנטריות תצא שונה עבור כל מסך שונה שכזה ולכן צבע הפיקסל בכל מסך יהיה שונה (בתקווה שבמעט).

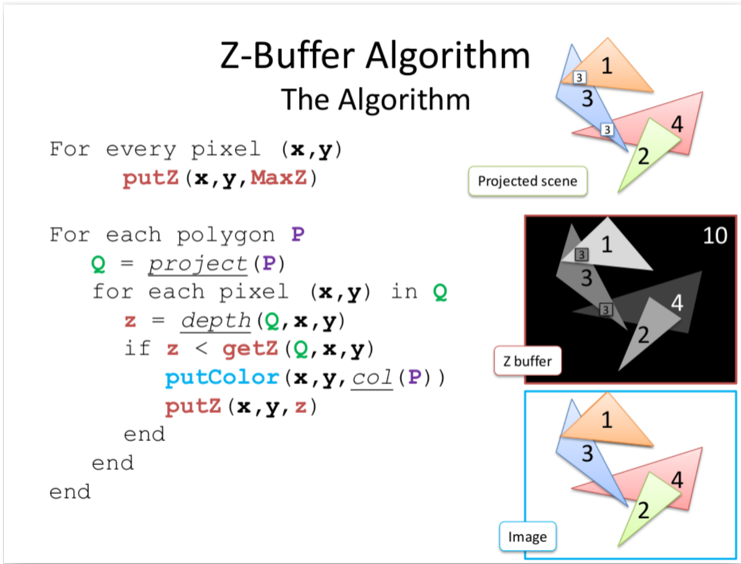


סעיף ד

- השתקפות Reflection. (חפץ אחד משתקף מתוך חפץ אחר)
- שבירה. (לדוגמא:קש בכוס מים שנשבר - חוק סנל. שבירה של אור כתוצאה משנוי בטווח.)

שאלה מספר 3

סתם לכיף נזכר באלג' $z-buffer$ המקורי מההרצאה



סעיף א

השיטה

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$$

במקרה זה אין צורך להשתמש באלג' z-buffer לפתרון הבעיה.(בחישוב המודל אין שימוש במרחק מעין הצופה)
נציג דרך חישוב יעילה.

אלגוריתם 1 סעיף א'

- השחר את המערך הדו מימדי של המסך (כלומר לכל פיקסל : $\text{pixel} \leftarrow (0,0,0)$).
- **לכל** פוליגון M_i:
  - $Q = \text{project}(M_i)$.
  - **לכל** פיקסל $\overbrace{(x,y)}^{\text{pixel}} \in Q$:

$$\text{pixel} += \text{col}\left(\overbrace{\overbrace{(x,y,\text{depth}(M_i,x,y))}^{\text{coordinates}}, \overbrace{M_i}^{\text{polyhon}}}^{\equiv I_i}\right) *$$

- הדפס את הצבע שהתקבל על המסך.

סעיף ב

השיטה

$$I = I_1 + (1/d_1)\, I_2 + (1/d_2)\, I_3 + \ldots + (1/d_{n-1})\, I_n$$

יש צורך להשתמש באלג' $z - buffer$ עם שינויים קלים.
השנויים יהיו כדלכמן

אלגוריתם 2 סעיף ב'

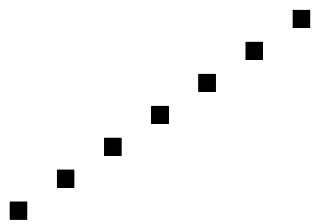
- השחר את המערך הדו מימדי של המסך (כלומר לכל פיקסל : screen-pixel $\leftarrow$ $(0,0,0)$).
- תחל את הz-bufferלאיסנוף (כלומר לכל פיקסל במערך ה$z-buffer$ z-buffer-pixel $\leftarrow$ ∞)
- **לכל** פוליגון M_i:
  - $Q_i = \text{project}\,(M_i)$.
- **לכל** פיקסל $\overbrace{(x,y)}^{\text{pixel}} \in$ Screen:
  - מצא את A קבוצת הפולינומים אשר מכילה את (x,y). $A = \{Q_i \mid (x,y) \in Q_i\}$.
  - אם $A = \emptyset$ המשך לפיקסל הבא.continue.
  - אחרת:
  - מיין את A בסדר עולה לפי $z = \text{depth}\,(Q,x,y)$.יהא $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \ldots, \tilde{Q}_{|A|}$ המיון המתקבל.(המיון מבוצע כך ש $\tilde{Q}_1$ הוא הפוליגון הכי קרוב לצופה ו $\tilde{Q}_{|A|}$ הכי רחוק ממנו.
    * יהא $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \ldots, \tilde{z}_{|A|}$המרחקים המתאימים להם מהצופה בהתאמה.ו$I_1, \ldots, I_{|A|}$ הצבע ששיך לכל פוליגון.
  - קבע $\text{pixel}\,(x,y) = I_1 + \sum_{i=2}^{|A|} \underbrace{\frac{1}{\tilde{z}_i - \tilde{z}_{i-1}}}_{d_i} I_i$
- הדפס את הצבע שהתקבל על המסך.

שאלה מספר 4

סעיף א

הקו יראה בהיר יותר מעצם הבניה שלו של הפיקסלים:

קו אלכסוני



קו ישר

האלכסוני יראה בהיר יותר כי העין האנושים מבצעת מיצוע על פני אזורים חסרים כלומר השחור בקצוות כל פיקסלים יתמזג עם הלבן לכדי צבע בהיר יותר.

סעיף ב

חסרון ראשון: חוסר אחידות של ציור העקום.

דוגמא:עבור העקום $C_1\left(t\right)=\left(\cos\left(t\cdot 2\pi\right),\sin\left(t\cdot 2\pi\right)\right)$ נקבל תוצאה של נקודות ממרחק זהה מהראשית ומרחק זהה אחד מהשני עבור Δt מסויים.

אבל עבור העקום $C_2\left(t\right)=\left(\cos\left(t^{100}\cdot 2\pi\right),\sin\left(t^{100}\cdot 2\pi\right)\right)$(שלמעשה זה אותו עקום ,רק שהוא מצייר את המעגל ב"מהירות שונה שאינה אחידה") נקבל הרבה נקודות ברביע הראשון יחסית ונקודות יילכו וייטמעטו ככל שנלך קדימה עם הריביעים (ברביע4 יהיה מעל נקודות)

כלומר ראינו דוגמא ששימוש בשיטה זו תוביל לחוסר אחידות בעקום.

חסרון שני: התחזות aliasing

דוגמא:עבור העקום $C_1\left(t\right)=\left(\cos\left(t\cdot 2\pi\right),\sin\left(t\cdot 2\pi\right)\right)$ נקבל תוצאה של נקודות ממרחק זהה מהראשית ומרחק זהה אחד מהשני עבור Δt מסויים.

דוגמא:עבור דגימה במקצב Δt העקום $C_2\left(t\right)=\left(\cos\left(t\cdot\frac{1}{\Delta t}\cdot 2\pi\right),\sin\left(t\cdot\frac{1}{\Delta t}\cdot 2\pi\right)\right)$ (שלמעשה זה אותו עקום ,רק שהוא מצייר את המעגל כמה פעמים (אם $\Delta t<1$)במקרה כזה אנחנו נדגום את העקום רק בנקודות $\overbrace{n}^{\text{Const}}\cdot\Delta t, n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ולכן הנקודות שנצייר הם מהצורה

$$\forall n:\left[\left(\cos\left(t\cdot\frac{1}{\Delta t}\cdot 2\pi\right),\sin\left(t\cdot\frac{1}{\Delta t}\cdot 2\pi\right)\right)\right]_{n\cdot\Delta t}=\left[\left(\cos\left(n\cdot 2\pi\right),\sin\left(n\cdot 2\pi\right)\right)\right]_{n\cdot\Delta t}=(1,0)$$

כלומר נדגום בכל פעם רק נקודה אחת.(ולא את העיגול עצמו) כלומראת אותה הנקודה.
תופעה זו נגרמת מכיוון שאנו דוגמים את העקום בקצב שהוא כפולה שלמה של ה"תדר של הדגימה".
תופעה זו יכולה להעלם אם נדגום לפי כלל נייקויסט.

סעיף ג

עקומה ריבועית ממעלה 2 היא מהצורה

$$at^2 + bt + c$$

נוסחאת ההפרשים הבאה היא:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\text{polynom 2 deg}}(t) &= f(t+\Delta t) - f(t) \\
&= a(t+\Delta t)^2 + b(t+\Delta t) + c - \left(at^2+bt+c\right) \\
&= a(t+\Delta t)^2 + b(t+\Delta t) - \left(at^2+bt\right) \\
&= a(t+\Delta t)^2 + b(\Delta t) - \left(at^2\right) \\
&= a\left[t^2 + 2t(\Delta t) + (\Delta t)^2\right] + b(\Delta t) - \left(at^2\right) \\
&= a\left[2t(\Delta t) + (\Delta t)^2\right] + b(\Delta t) \\
&= 2at(\Delta t) + a(\Delta t)^2 + b(\Delta t) \\
&= t(2a(\Delta t)) + a(\Delta t)^2 + b(\Delta t)
\end{aligned}$$

נוסחאת ההפרשים מניבה פולינום מדרגה 1.
לפי המבוא לשאלה תוצאת שמתוארת בתחילת השאלה

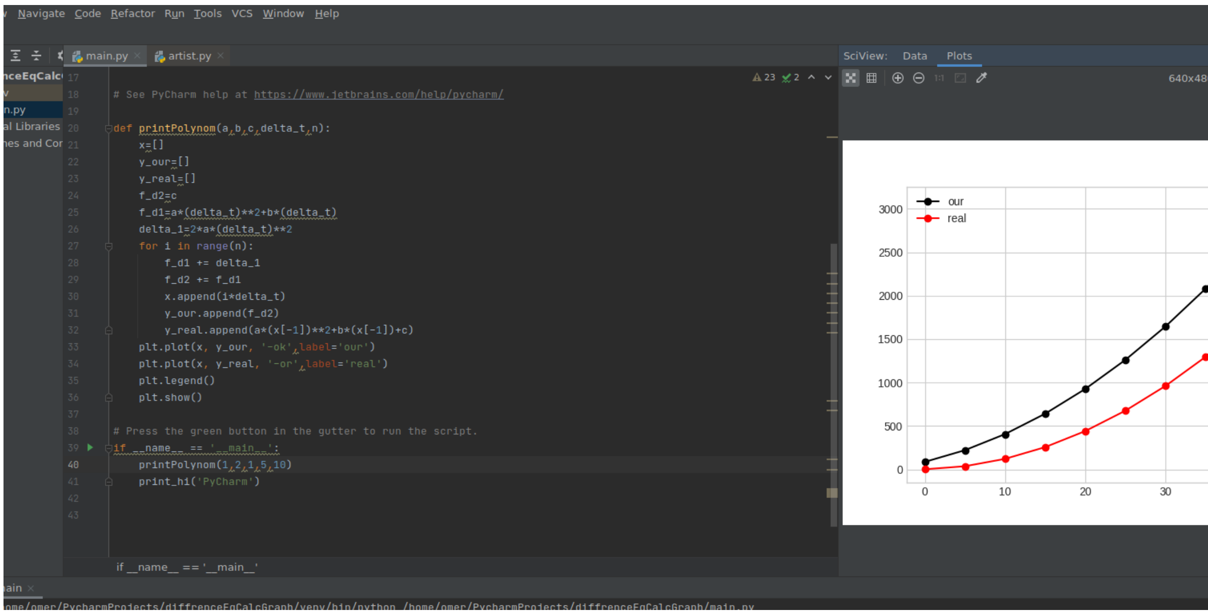
$$\nabla \equiv \Delta_{\triangle_{\text{polynom 2 deg}}\ \text{of}} = 2a(\Delta t)(\Delta t) = 2a(\Delta t)^2$$

ולכן נוכל להשתמש בנוסחא שמתוארת בתחילת השאלה בנוסף על מנת לחשב אותו.
לכן האלג' ייראה באופן הבא:
קלט : Δt **ועקום** $at^2 + bt + c$**.**
פלט: ציור העקום בשיטה המתוארת בשאלה.
אלג':

- קבע $c \leftarrow f_{\text{d2}}$.
- קבע $a(\Delta t)^2 + b(\Delta t) \leftarrow f_{\text{d1}}$.
- $2a(\Delta t)^2 \leftarrow \Delta_1$(כלומר קבע $\nabla \leftarrow \Delta_1$)
- לכל $i = 1$ עד n בצע:

- קבע $.f_{d1} \leftarrow f_{d1} + \Delta_1$
- קבע $.f_{d2} \leftarrow f_{d2} + f_{d1}$
- הדפס $.f_{d2}$

חשוב לשים לב שאלג' זה צובר שגיאה במהלך ההתקדמות שלו



(קוד מצורף)

הערה 1. בתשובות הם הפעילו את האלג' פעמיים , פעם על ציר הx של העקום ופעם על ציר הy ולאחר מכן ציירו את העקום.