به نام خدا

درس سیگنال ها و سیستم ها

گزارش تمرین متلب 2

امید شرفی

96101838

استاد

دکتر حمید کربلایی آقاجان

بهار 1398

قسمت اول

سوال 1

```
  5
-----
s + 5

    5
--------
       2
(s + 5)

  1         4 s
----- + ---------
s + 2      2      2
         (s   + 4)

   10
--------
       3
(s + 5)
```

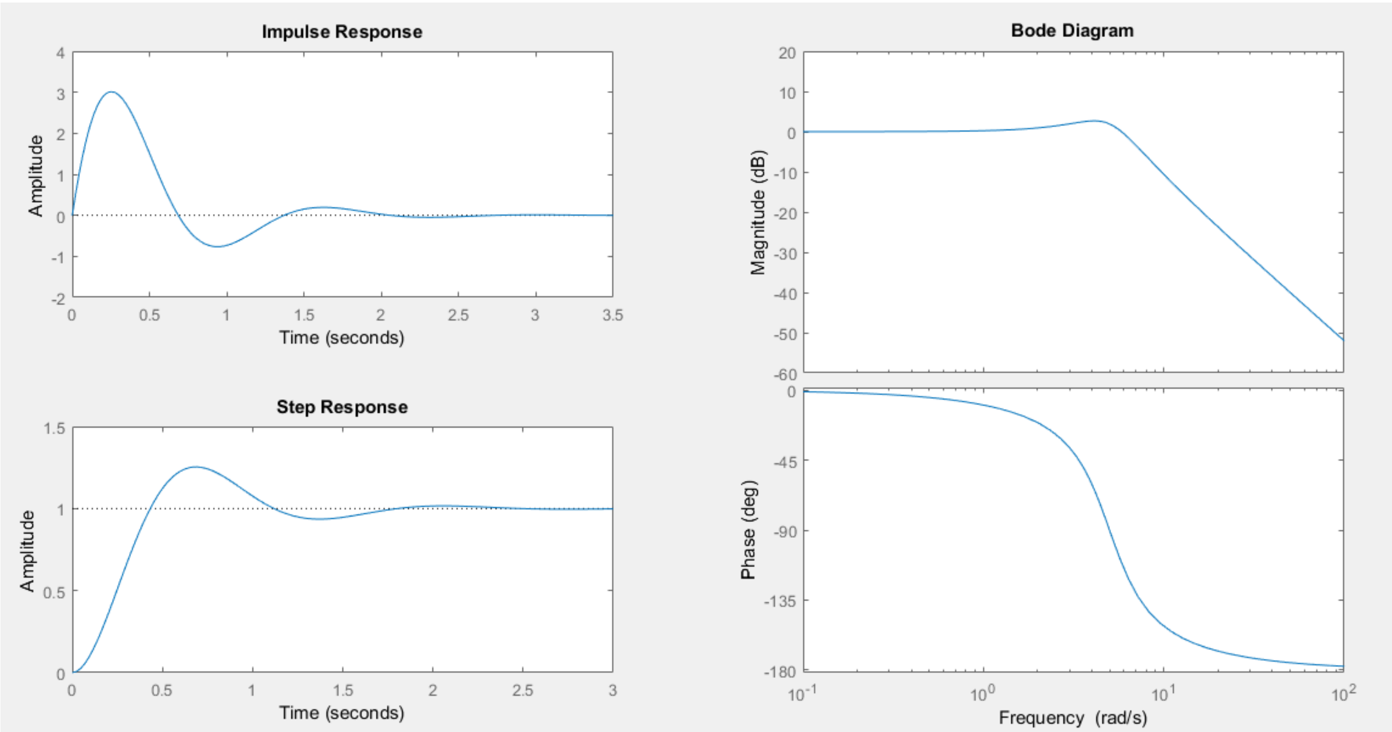
برای تابع اول که به وضوح صحیح است. تابع 2 هم که منفی مشتق اول تبدیل تابع اول است (ضابطه تابع در t ضرب شده است). تبدیل تابع 4 هم دوباره منفی مشتق تبدیل لاپلاس تابع 2 است که باز هم صحیح است. تابع 3 هم دو ترم دارد که ترم اولش واضح است. ترم دوم هم منفی مشتق تبدیل لاپلاس sin2t هست.

سوال 2

```
7   exp(-8 t) 7
- - -----------
2         2

exp(-2 t) 5    t exp(-2 t) 7    5
----------- + ------------- - -
     4              2          4

exp(-3 t) 5    5 exp(-t)
----------- - --------- + 5 t exp(-t)
     2             2

       /   t \
1 - exp| - - |
       \   2 /

   /                              / sqrt(7) t \   \
   |                  sqrt(7) sin| --------- | 3 |
   |    / sqrt(7) t \             \     2     /   |
   | cos| --------- | - -------------------------- |
   \    \     2     /              7              /
```

خروجی های بالا با دستور ilaplace محاسبه شده اند که با فرض علی بودن محاسبه شده اند و در حقیقت یک u(t) هم در دل توابع بالا نهفته است.

سوال 3



برای سیستم معادله مرتبه 2 داریم:

$$H(s) = k0\frac{wn^2}{s^2 + 2\xi wns + wn^2}\ , H(w) = \frac{1}{1 - \left(\frac{w}{wn}\right)^2 + j2\xi\left(\frac{w}{wn}\right)}$$

در مورد Bode Plot هم داریم داریم:

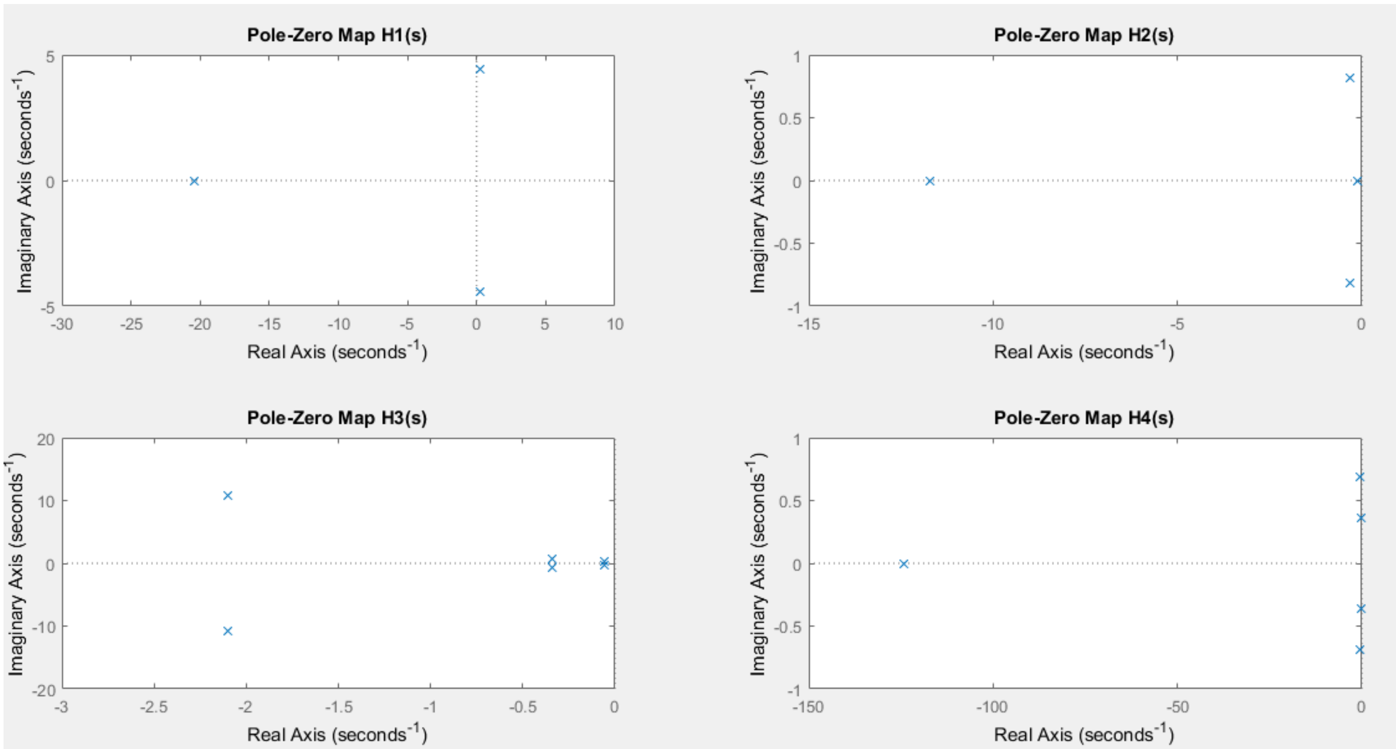
20log|H(jw)| = 0 (w << wn), -40logw + 40logwn (w >> wn)

$$\measuredangle H(jw) = 0(\ w \le 0.1wn\ )\ , \frac{-\pi}{2}\left[\log\left(\frac{w}{wn}\right) + 1\right](0.1wn \le w \le 10wn), -\pi\ (\ w \ge 10wn\ )$$

از طرفی با استفاده از فشردگی و فرکانس نوسان پاسخ ضربه wn به دست می آید و با توجه به میرایی سیستم اگر سیستم میرای ضعیف باشد $0 < \xi < 1$ ، اگر سیستم میرای بحرانی باشد $\xi = 1$ ، نهایتا اگر سیستم میرای شدید باشد $\xi > 1$ است.

قسمت دوم

سوال 1




```
Properties Of H1

        Pole                 Damping        Frequency       Time Constant
                                           (rad/seconds)      (seconds)

  2.33e-01 + 4.41e+00i     -5.27e-02       4.42e+00        -4.29e+00
  2.33e-01 - 4.41e+00i     -5.27e-02       4.42e+00        -4.29e+00
 -2.05e+01                  1.00e+00       2.05e+01         4.89e-02

Properties Of H2

        Pole                 Damping        Frequency       Time Constant
                                           (rad/seconds)      (seconds)

 -1.11e-01                  1.00e+00       1.11e-01         9.05e+00
 -3.35e-01 + 8.12e-01i      3.82e-01       8.79e-01         2.98e+00
 -3.35e-01 - 8.12e-01i      3.82e-01       8.79e-01         2.98e+00
 -1.17e+01                  1.00e+00       1.17e+01         8.53e-02
```

Properties Of H3

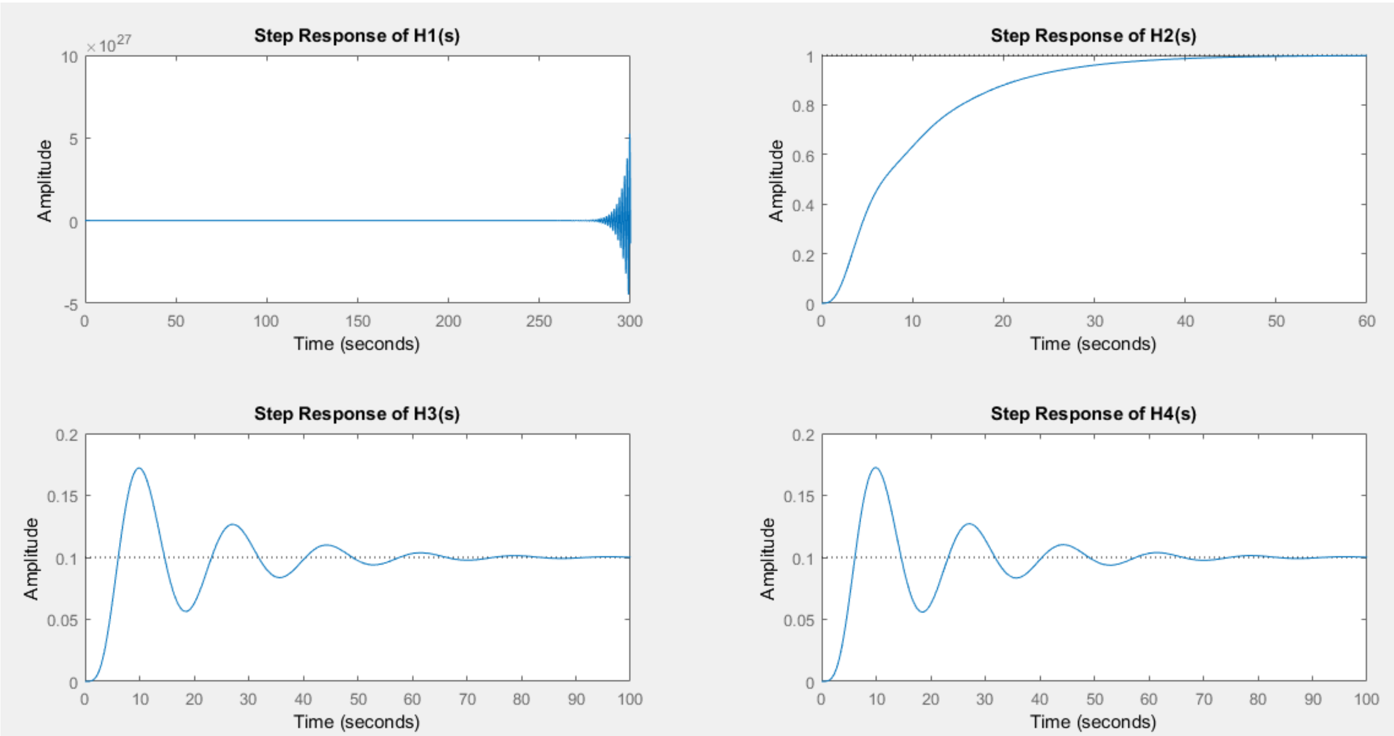
Pole	Damping	Frequency (rad/seconds)	Time Constant (seconds)
-5.72e-02 + 3.65e-01i	1.55e-01	3.69e-01	1.75e+01
-5.72e-02 - 3.65e-01i	1.55e-01	3.69e-01	1.75e+01
-3.42e-01 + 7.00e-01i	4.39e-01	7.79e-01	2.93e+00
-3.42e-01 - 7.00e-01i	4.39e-01	7.79e-01	2.93e+00
-2.10e+00 + 1.08e+01i	1.91e-01	1.10e+01	4.76e-01
-2.10e+00 - 1.08e+01i	1.91e-01	1.10e+01	4.76e-01

Properties Of H4

Pole	Damping	Frequency (rad/seconds)	Time Constant (seconds)
-5.66e-02 + 3.65e-01i	1.53e-01	3.70e-01	1.77e+01
-5.66e-02 - 3.65e-01i	1.53e-01	3.70e-01	1.77e+01
-3.43e-01 + 6.87e-01i	4.46e-01	7.68e-01	2.92e+00
-3.43e-01 - 6.87e-01i	4.46e-01	7.68e-01	2.92e+00
-1.24e+02	1.00e+00	1.24e+02	8.05e-03

با توجه به مقادیر بالا برای قطب ها و با توجه به این که سیستم ها علی هستند و در نتیجه برای پایداری باید قطب ها همگی سمت چپ محور موهومی باشند و در نتیجه سیستم اول ناپایدار و بقیه پایدار می باشند.

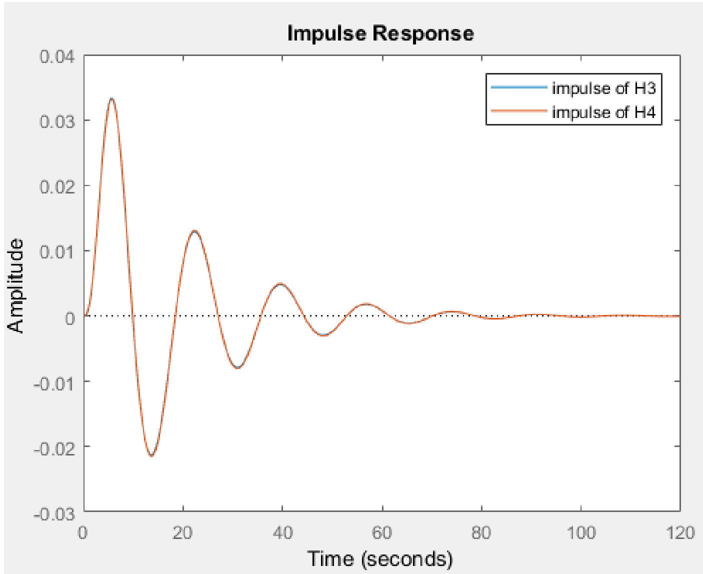
سوال 2



وقتی سیستم پایدار باشد، پاسخ ضربه ی آن باید به سمت صفر همگرا باشد و در نتیجه یعنی سیستم از زمانی به بعد در پاسخ پله باید همگرا شود چون از جایی تاثیر قسمت های اولیه پله به خاطر همگرایی پاسخ ضربه، از بین رفته و در نتیجه پاسخ پله باید همگرا شو البته لزومی ندارد که به صفر همگرا شود و در نتیجه همان طور که از بخش قبل هم انتظار داشتیم و در پاسخ پله بالا هم مشاهده می کنیم، سیستم اول واگرا و سه سیستم دیگر همگرا می باشند.

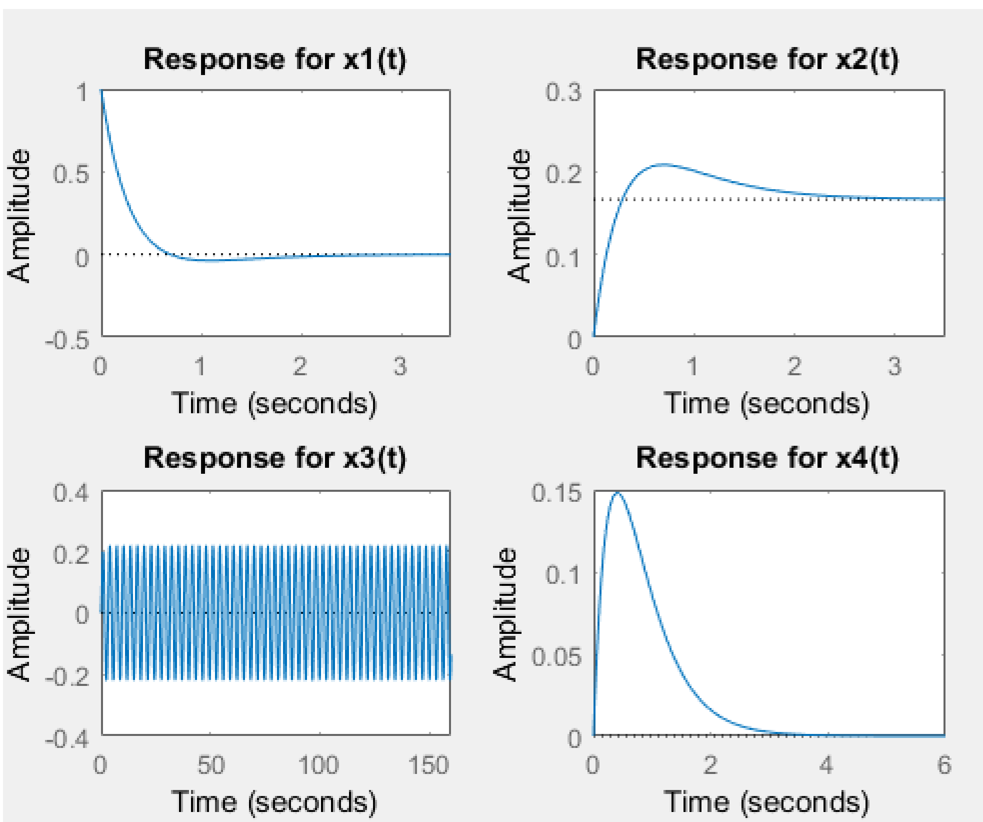
سوال 3

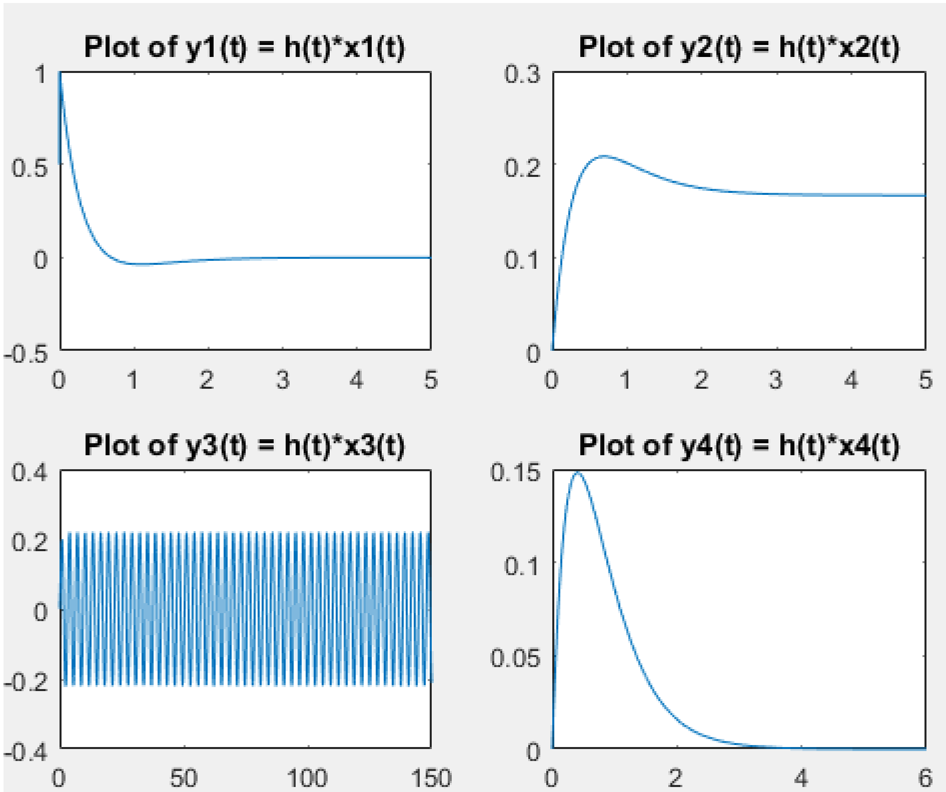
اگر به قطب های این دو تابع تبدیل دقت کنید، دو قطب از H3 و یک قطب از H4 بخش حقیقی منفی نسبتا بزرگی داشته و در نتیجه در پاسخ ضربه سریع به سمت صفر رفته و 4 قطب دیگر هم بسیار به هم نزدیک بوده و در نتیجه پاسخ ضربه و در طبع آن پاسخ پله تقریبا مشابه ای خواهند داشت که در زیر تشابه پاسخ ضربه هم قابل مشاهده است.



سوال 4

برای حل این سوال به عنوان یک کار اضافه از دو روش مختلف استفاده شد که خروجی های هر دو در زیر آورده شده است.





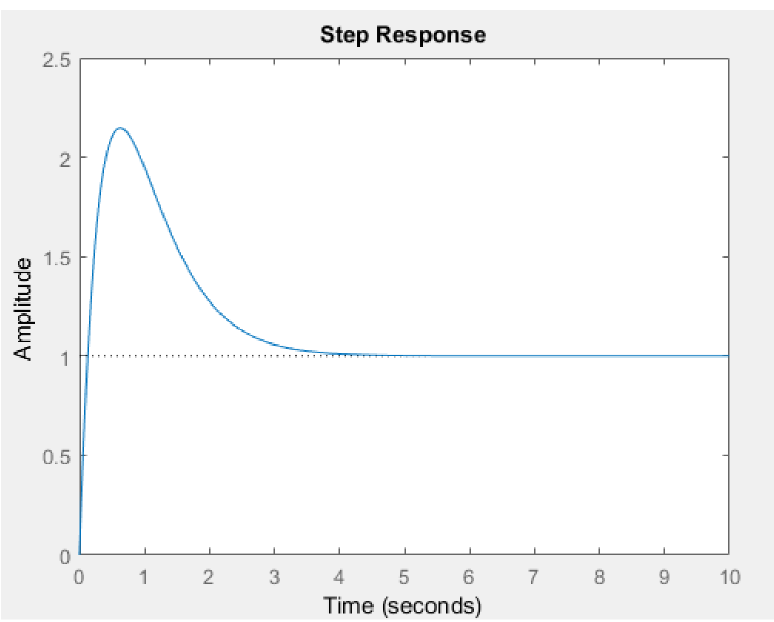

```
g(t) =

2*exp(-3*t) - exp(-2*t)


y1(t) =

-(exp(-3*t)*(exp(t) - 2)*(sign(t) + 1))/2


y2(t) =

(sign(t)/2 + 1/2)*(exp(-2*t)/2 - (2*exp(-3*t))/3 + 1/6)


y3(t) =

-(sign(t)/2 + 1/2)*((3*cos(2*t))/52 + exp(-2*t)/4 - (4*exp(-3*t))/13 - (11*sin(2*t))/52)


y4(t) =

-2*exp(-(5*t)/2)*(exp(-t/2)/2 - exp(t/2)/2)*(sign(t)/2 + 1/2)
```

```
X1 =

1


X2 =

1/s


X3 =

2/(s^2 + 4)


X4 =

1/(s + 1)
```

ابتدا توجه شود که در رسم توابع خروجی y1 تا y4 در روش دوم مشخصات نمودارها به گونه ای انتخاب شده است که یکسانی خروجی در دو روش محاسبه به صورت چشمی قابل رویت باشد.در روش اول ابتدا تبدیل لاپلاس ورودی را محاسبه کرده و سپس در تابع تبدیل سیستم ضرب می کنیم و پاسخ ضربه خروجی را رسم کرده که در حقیقت خروجی ما خواهد بود. در روش دوم این بار تصمیم گرفتم تابع پاسخ ضربه سیستم را به دست آورده و سپس کانولوشن این تابع را در تابع ورودی محاسبه کرده تا تابع خروجی به دست آمده و نهایتا آن را رسم کردیم. در حقیقت کاری که کردم، در روش اول ما در حوزه ی لاپلاس کار کردیم و در روش دوم محاسبات در حوزه ی زمان انجام شده است.

سوال 5

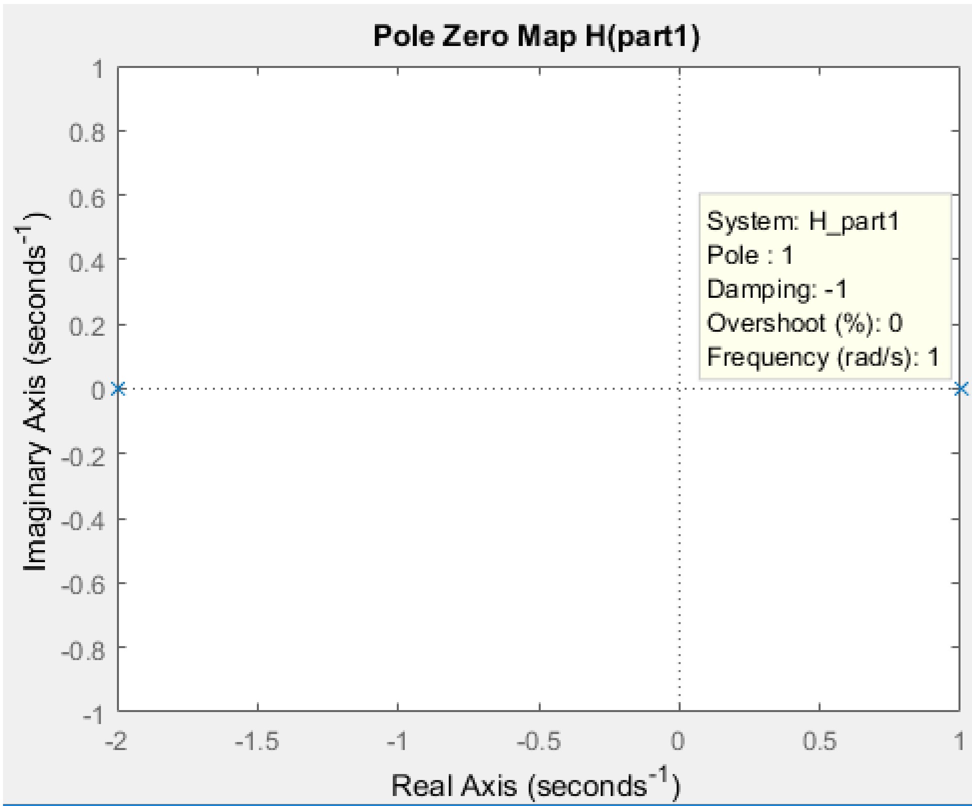
پاسخ پله رسم و مقادیر خواسته شده با دقت 0.01 ثانیه محاسبه شد که نکته خاصی نداشت.




```
final_value =

    1.0000

max_value =

    2.1460

t_max_value =

    0.6251

t_first_time_further_half_of_final_value =

    0.0554
```

قسمت سوم

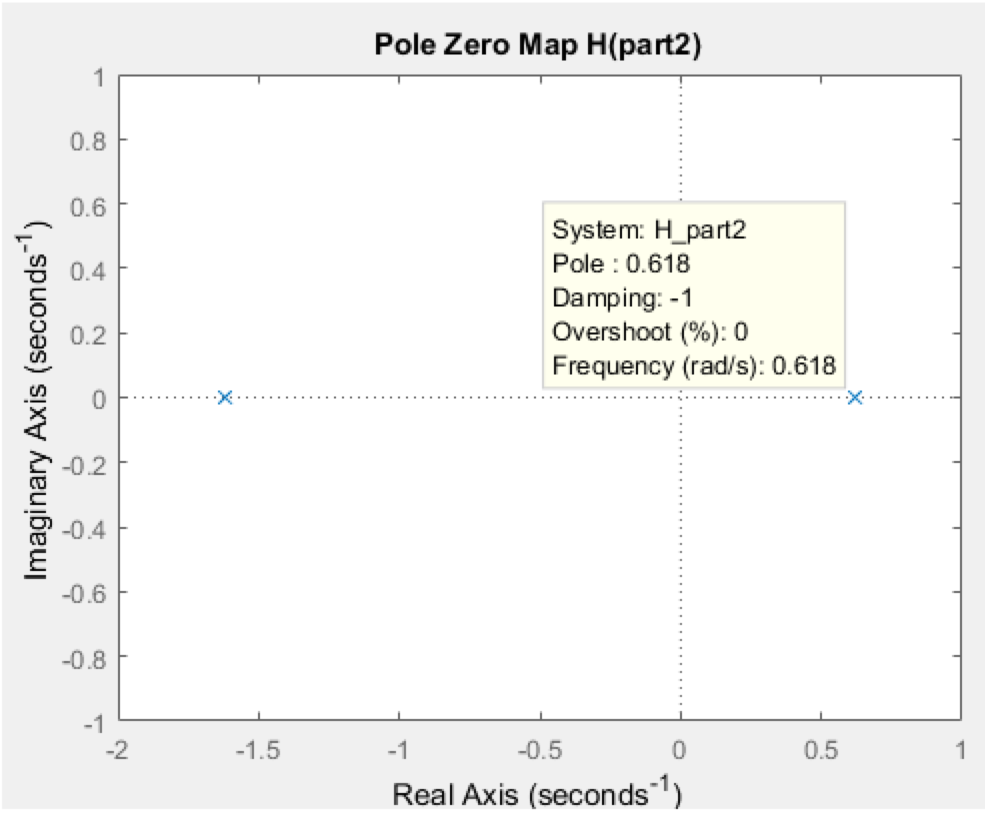
سوال 1




```
Properties Of H_part1

   Pole          Damping         Frequency       Time Constant
                               (rad/seconds)       (seconds)

  1.00e+00      -1.00e+00        1.00e+00         -1.00e+00
 -2.00e+00       1.00e+00        2.00e+00          5.00e-01
```

با توجه به فرض علی بودن سیستم چون تمام قطب ها در سمت چپ نیستند، سیستم پایدار نیست.

سوال 2



Properties Of H_part2

Pole	Damping	Frequency (rad/seconds)	Time Constant (seconds)
6.18e-01	-1.00e+00	6.18e-01	-1.62e+00
-1.62e+00	1.00e+00	1.62e+00	6.18e-01

فیدبک سیستم با دستور feedback شبیه سازی شد که باز هم مانند بخش قبل این سیتم هم پایدار نیست.

$$H'(s) = \frac{H(s)}{1+H(s)} = \frac{\frac{1}{s^2+s-2}}{1+\frac{1}{s^2+s-2}} = \frac{1}{s^2+s-1} => pole = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$
$$= -1.62\,,+0.62\ \blacksquare$$

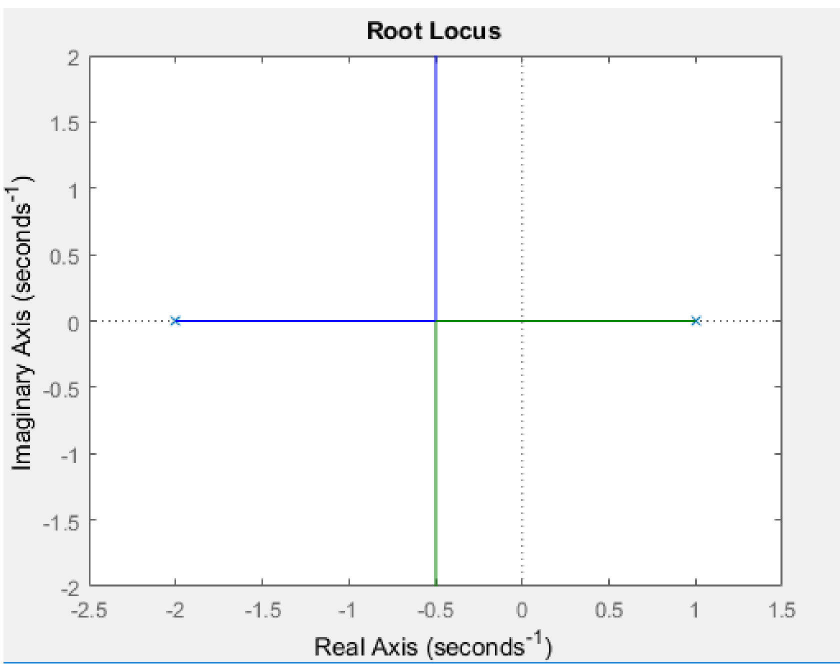
سوال 3,5

با اجرای برنامه، k از 10− تا 10 با پله های دوتایی افزایش یافته و قطب ها به صورت انیمیشن وار در صفحه مختلط جابجا می شوند و صحت پاسخ بخش 4 هم قابل مشاهده است. در این پله های دو تایی اولین جایی که سیستم پایدار شده و قطب ها همگی در سمت چپ محور مختلط قرار می گیرند در 2 است یعنی در حقیقت k باید از 2 بزرگ تر باشد تا سیستم پایدار شود. به صورت تئوری در زیر محاسبه شده است.

$$H'(s) = \frac{kH(s)}{1+kH(s)} = \frac{\frac{k}{s^2+s-2}}{1+\frac{k}{s^2+s-2}} = \frac{k}{s^2+s+(k-2)} => poles$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(k-2)}}{2}$$

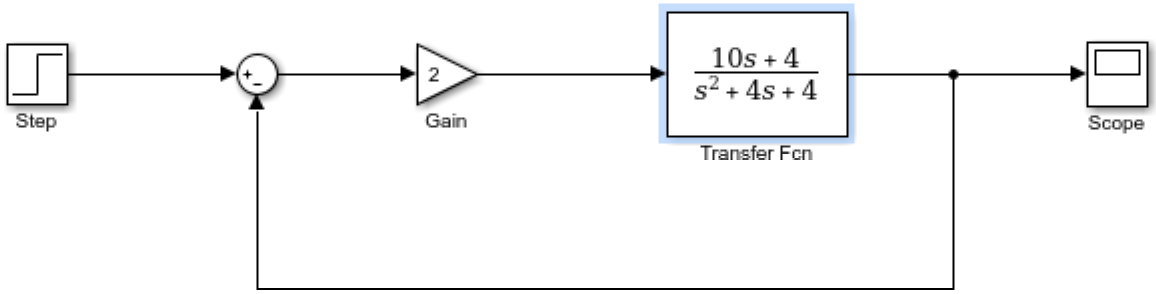
با توجه به نتیجه ی بالا برای پایداری باید بخش حقیقی قطب ها همگی منفی باشند که در نتیجه k>2 از طرفی اگر k=0 هم باشد تابع تبدیل 0 شده و پایدار می باشد که در انیمیشن هم قابل مشاهده است که قطبی ندارد.

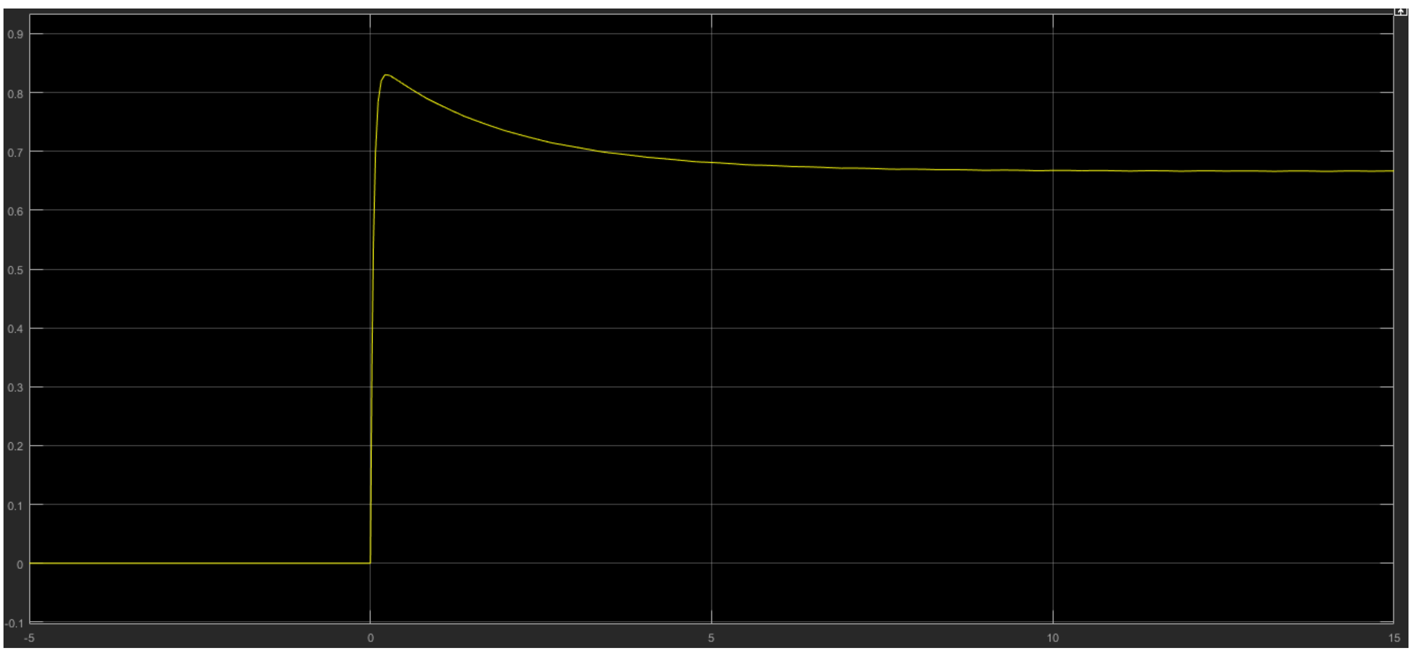
سوال 4



قسمت چهارم

سوال 1





$$H(s) = \frac{\frac{2(10s+4)}{s^2+4s+4}}{1+\frac{2(10s+4)}{s^2+4s+4}} = \frac{20s+8}{s^2+24s+12} => poles = \frac{-24 \pm \sqrt{528}}{2} < 0$$

که سیستم پایدار و پاسخ پله سیستم همان طور که انتظار داشتیم همگرا شده است مقدار نهایی هم با توجه به قضیه مقدار نهایی $8/12$ است که پاسخ بالا که به 0.66 همگرا است همخوانی دارد.

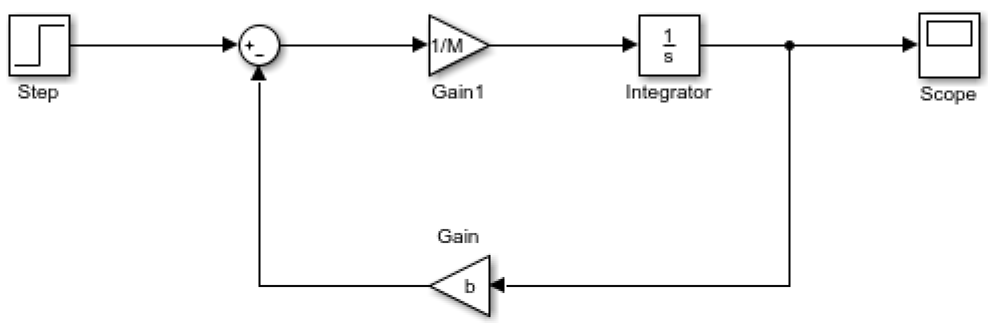
سوال 2

.1

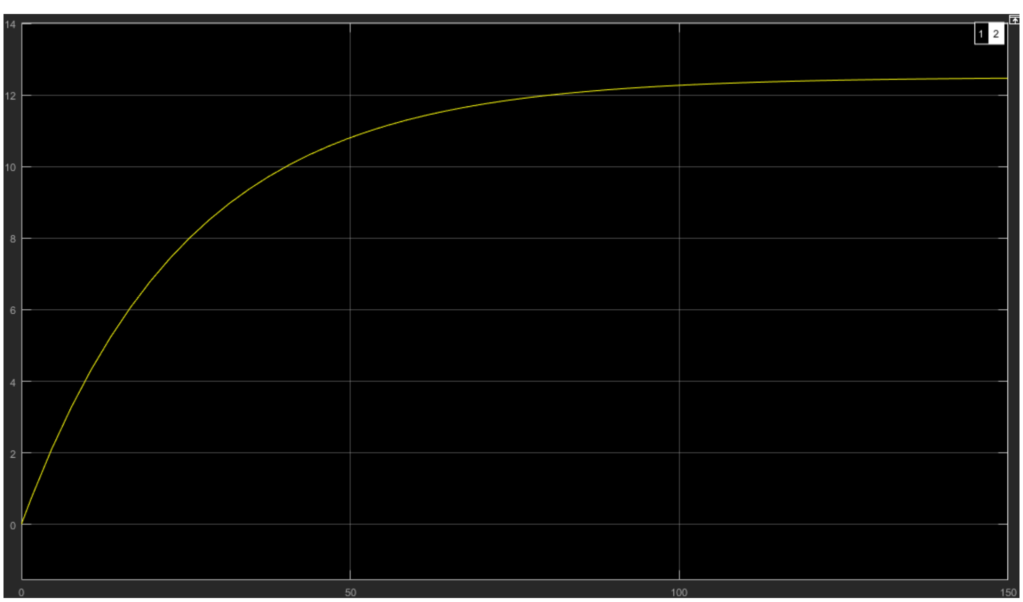
$$\frac{dv}{dt} = \frac{F - bv}{M} => MsY(s) = X(s) - bY(s) => H(s) = \frac{1}{b + Ms}$$

از طرفی از روی دیاگرام داریم:

$$H(s) = \frac{\frac{k1}{s}}{1 + \frac{k1k2}{s}} = \frac{k1}{s + k1k2} = \frac{1}{k2 + \frac{s}{k1}} => k2 = b\,, k1 = 1/M$$



.2



3. به صورت تئوری داریم:

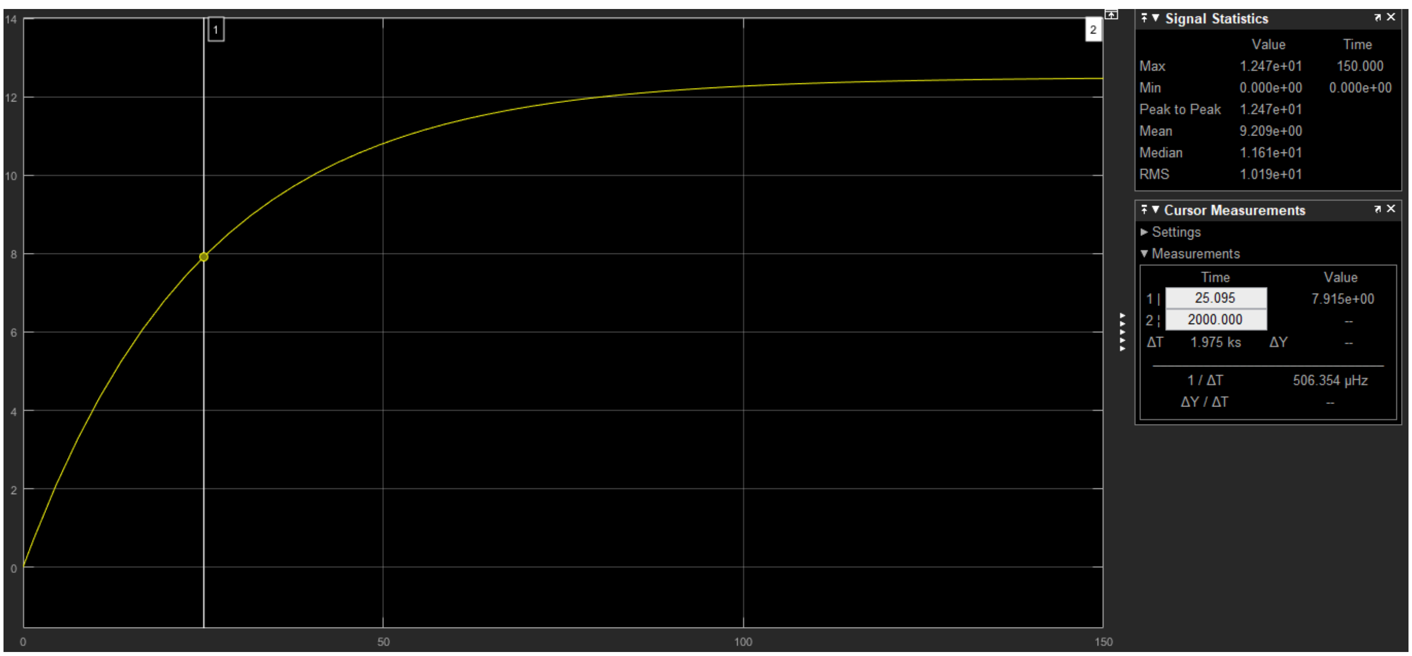
$$x(t) = 500u(t) => X(s) = \frac{500}{s} => Y(s) = \frac{500}{s} * \frac{1}{40 + 1000s}$$

$$H(s) = \frac{\frac{1}{40}}{1 + \frac{100}{4}s} => \tau = 25\,, L = 1/40$$

برای مقدار نهایی داریم :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F - bv}{M} => 0 = 500 - bv(final) => v(final) = \frac{500}{b}$$

حال از روی نمودار داریم :



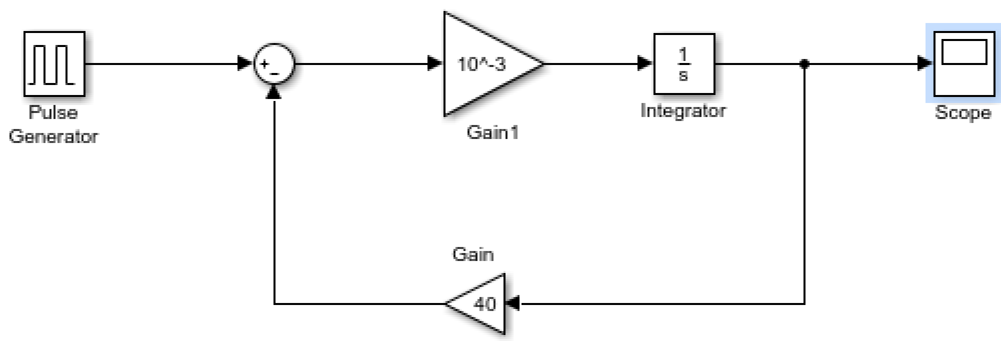
با توجه به شکل بالا مقدار نهایی 12.5 و ثابت زمانی حدودا برابر 25 به دست می آید. ($\tau \approx 25$ ■)

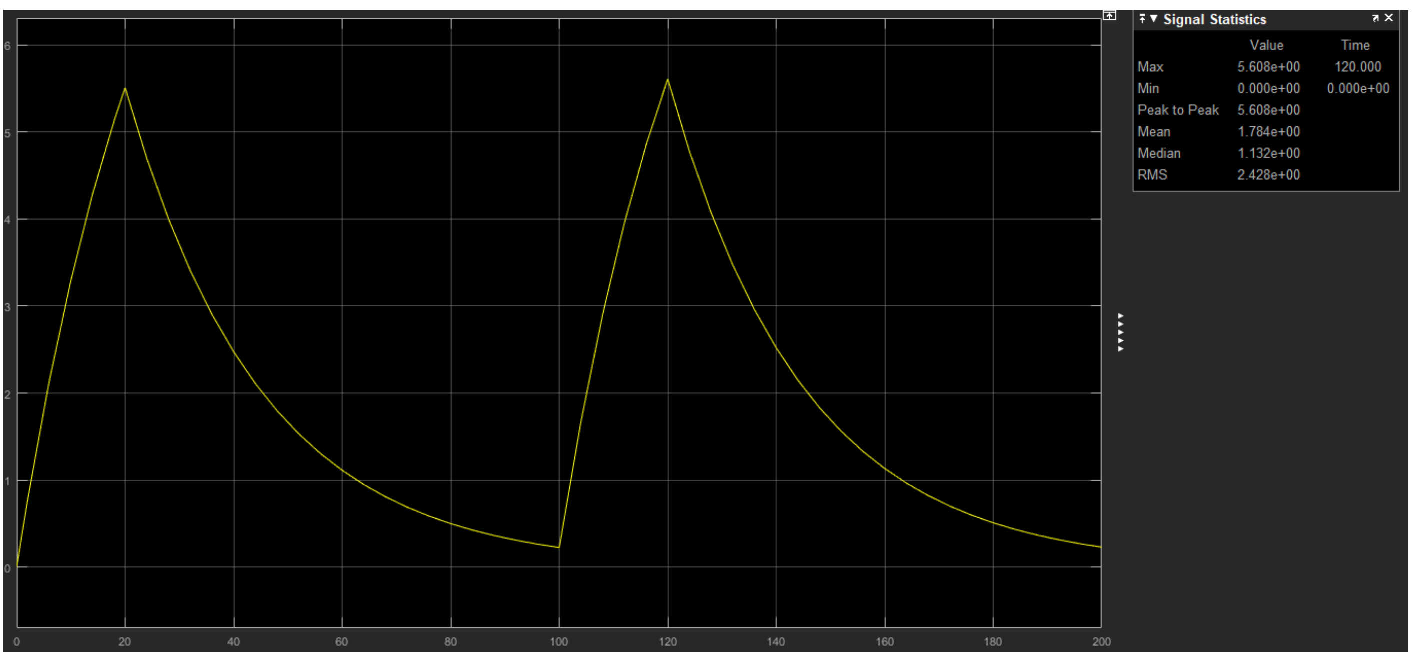
$$Y(s) = \frac{500}{s} * \frac{L}{1 + \tau s} => y(\infty) = \lim_{s \to 0} Y(S) = 500L = 12.5 => L = \frac{1}{40} \blacksquare$$

$$Y(s) = \frac{500L}{s} + \frac{-500L\tau}{1 + \tau s} => y(t) = \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right) 500Lu(t) => y(\tau) = 12.5 * 0.63 = 7.90$$

خطای آنچنایی که مشاهده نشد ولیکن از عوامل خطا گسسته حل کردن سیمیولینک است که هم باعث خطا در دقت اعداد حاصله دارد و هم موقع قرار دادن کروزر ممکنه دقیقا نقطه مورد نطر جز نقاط حل شده نباشد و سیستم در رسم نمودار از تقریب تکه ای خطی استفاده میکند،همچنین حتی ما موقع محاسبه ی 1-e^-1 هم خطا داریم.

.4





همان طور که مشاهده می شود، در 20 ثانیه اول که ورودی روشن است خروجی رشد کرده و سپس که خاموش می شود افت می کند و به همین ترتیب در هر سیکل پالس ورودی به کار خود ادامه می دهد.

.5

فرض کنیم که پالس ورودی در T ثانیه اول روشن و در 100-T ثانیه بعدی آن خاموش باشد. ابتدا باید تبدیل لاپلاس این ورودی را محاسبه کنیم که برای آن داریم :

$$x(t) = 400[\,u(t) - u(t-T) + u(t-100) - u(t-100-T) + \cdots]$$

$$= 400\sum_{n=0}^{\infty} u(t-100n) - u(t-100n-T)$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}ds = 400\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{s}e^{-100sn} - \frac{e^{-sT}}{s}e^{-100sn} = \frac{\frac{1}{s}(1-e^{-sT})}{1-e^{-100s}}$$

$$Y(s) = T(s)X(s) = \frac{1}{40+1000s} * \frac{\frac{1}{s}(1-e^{-sT})}{1-e^{-100s}}$$

حال همین موضوع رو از دید مدار RC نگاه کنیم، ثابت زمانی که 0.04 است. حال وقتی که پالس روشن می شود با این ثابت زمانی بالا رفته و وقتی خاموش می شود، دوباره به سمت 0 دشارژ می شود. مساله ای که مطرح است، وقتی که پالس روشن شود،اگر تا ابد هم منبع را خاموش کنیم، دیگر هرگز به صفر مطلق نمی رسد و در حقیقت بهتر بود یک باند برای صفری که صورت سوال مدنظر داشت، ارائه می داد. به هر حال اگر فرض کنیم سیستم در 5 برار ثابت زمانی خود به صفر برسد.

T تا روشن => $v(\infty)(1-e^{-\frac{T}{\tau}})$

Tc تا خاموش => $v(T)e^{\frac{t-T}{\tau}}$

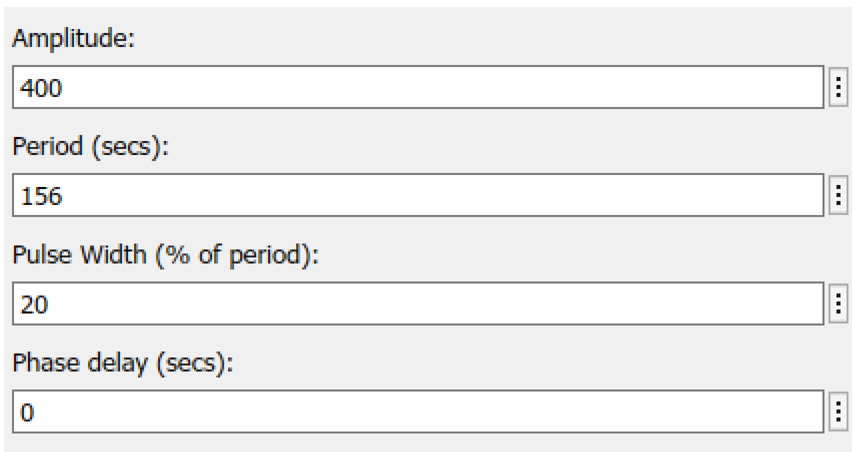
$\Rightarrow \frac{v(\infty)(1-e^{-\frac{Tc-T}{\tau}})}{v(\infty)} \leq$ درصد باند صفر (0.993 فرض کنیم) => $\frac{Tc-5\tau}{Tc} \geq \frac{T}{Tc}$ ($Dutycycle$)

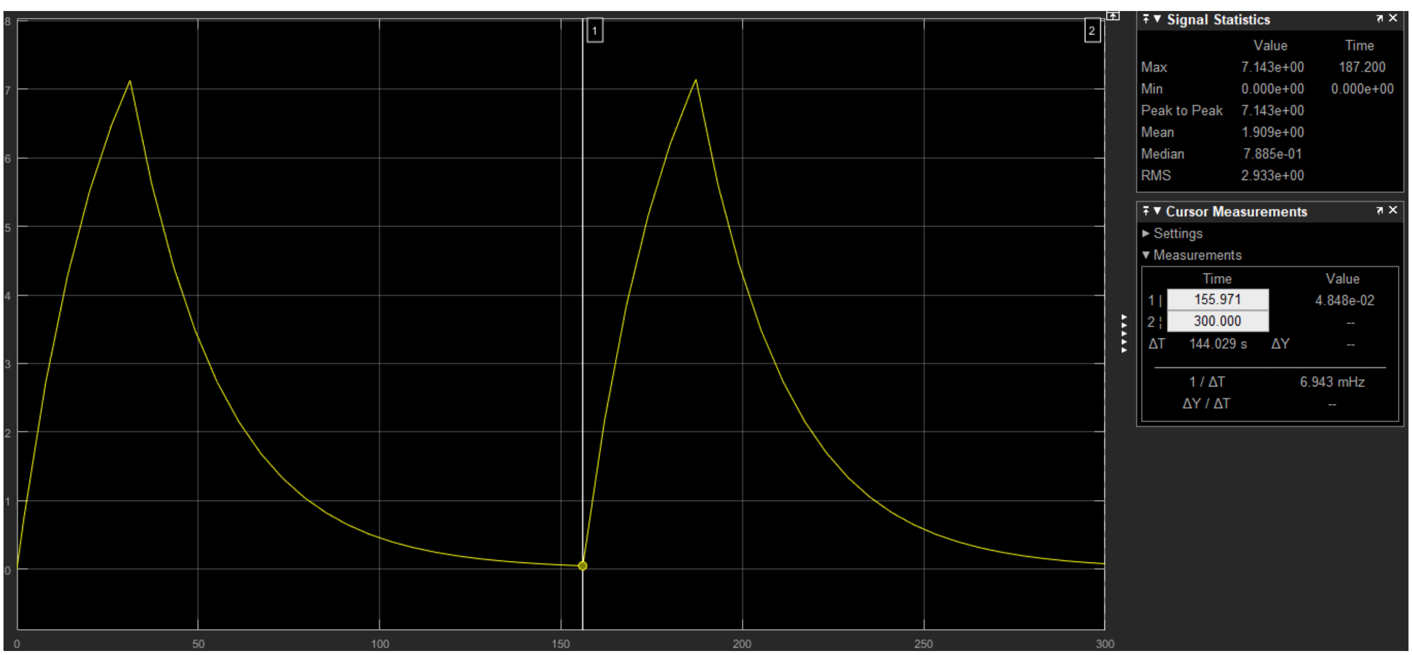
طبیعتا برای این سیستم که ثابت زمانی 25 هست، امکان ندارد با دوره تناوب 100 همچین کاری را انجام دهیم (با باند 7 درصد به صفر نزدیک شویم) و حداقل باید 125 ثانیه باشد، از طرفی اگر فرض کنیم Dutycycle

ثابت و 20 درصد باقی بماند و ثابت زمانی سیستم هم 25 است پس داریم :

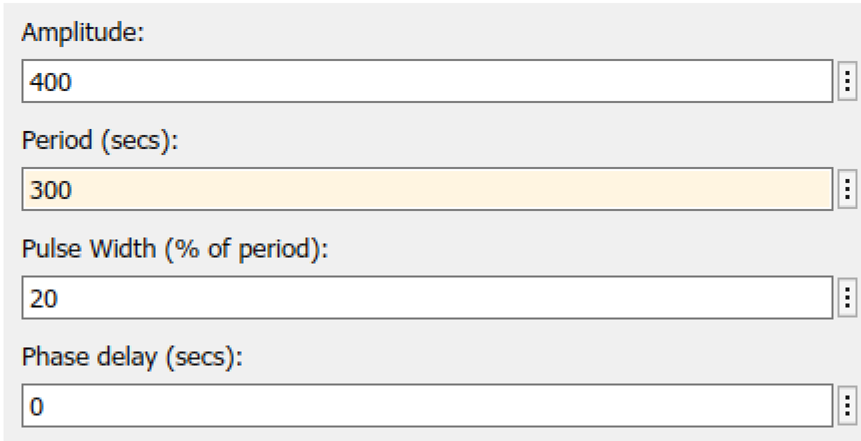
$$Tc - 5\tau \geq 0.2Tc => Tc \geq \frac{5\tau}{0.8} = \frac{125}{0.8} = 156.25$$

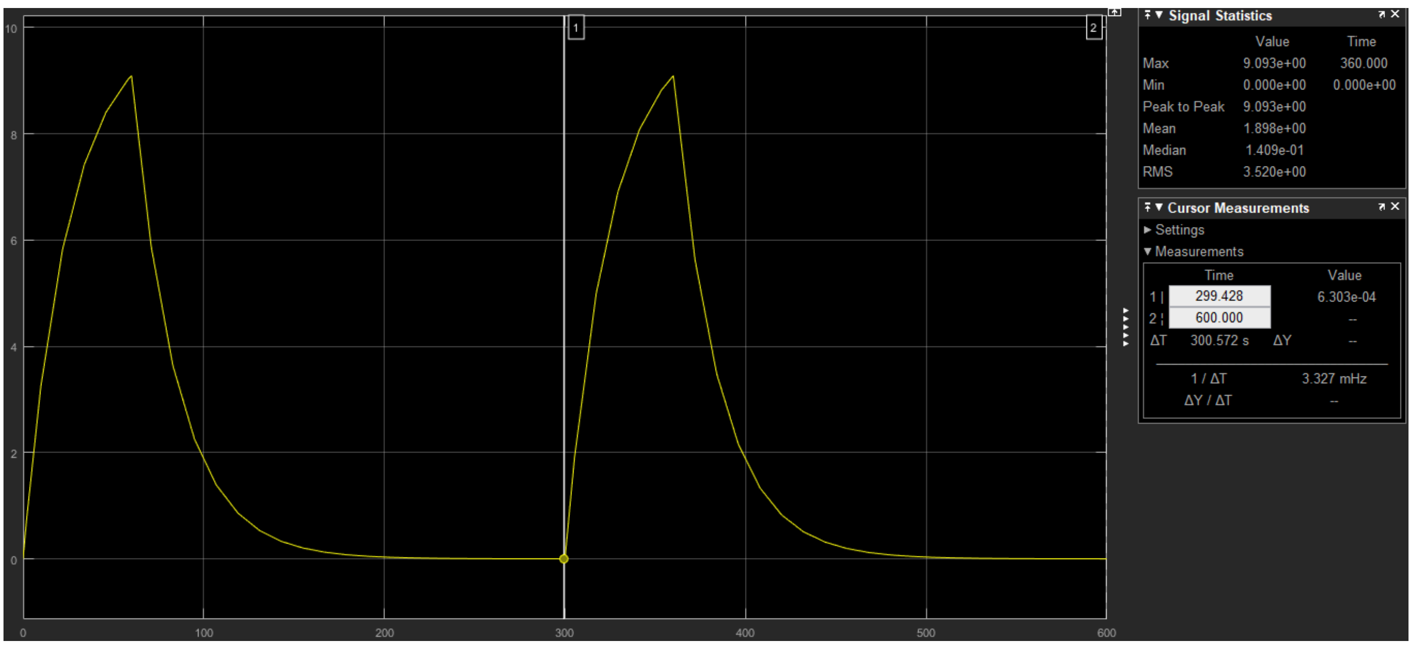
که خروجی به صورت زیر است. طبیعتا هر چقدر Tc زیاد تر شود در حقیقت با این که Dutycycle ثابت است اما اختلاف زمان خاموشی و روشنی سیکل زیاد شده و در حقیقت پسماند سیگنال در هر سیکل به صفر نزدیک تر میشود.





$$\frac{4.84 * 10^{-2}}{7.143} = 6.7\%$$





$$\frac{6.30 * 10^{-4}}{9.093} = 0.007\% \;!!!$$