الله

پاسخ به سری چهارم تمرین‌های درس نظریه‌ی اطلاعات

۱- بردار تصادفی $\boldsymbol{X}$ را در نظر بگیرید که بر الفبای $\{0,1\}^n$ توزیع یکنواخت دارد (n عددی طبیعی و زوج است). فرض کنید بردار تصادفی $\boldsymbol{Y}$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\boldsymbol{Y} = \left[X_1, \dots, X_{\frac{n}{2}}\right]^T,$$

که در آن $X_1, \dots, X_{\frac{n}{2}}$، عنصر اول تا $\frac{n}{2}$ام بردار تصادفی $\boldsymbol{X}$ است. فرض کنید با مشاهده‌ی تحقق‌های $\boldsymbol{Y}$ و با کمک تابع $\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y})$ می‌خواهیم بردار $\boldsymbol{X}$ را تخمین بزنیم. مقدار کمینه‌ی $\Pr[\widehat{\boldsymbol{X}} \neq \boldsymbol{X}]$ را بیابید و با کران پایین خطای به دست آمده از نامساوی فانو[1] مقایسه کنید.

پاسخ:

با توجه به اینکه در صورت سؤال در مورد وابستگی بین عناصر $\boldsymbol{X}$ صحبت نشده است، برای حل مسأله فرض می‌کنیم که عناصر بردار یاد شده به صورت مستقل از یکدیگر تولید شده است. همچنین، با توجه به اینکه در صورت سؤال گفته شده است که عناصر $\boldsymbol{X}$ از توزیع یکنواخت بر $\{0,1\}$ ایجاد شده است، نمی‌توان با مشاهده‌ی نیمه‌ی اول بردار $\boldsymbol{X}$ درباره‌ی نیمه‌ی دوم آن حدس هوشمندانه ای زد. بنا بر این، حدس $\widehat{\boldsymbol{X}}$ از $\boldsymbol{X}$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد

$$\widehat{\boldsymbol{X}} \coloneqq [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{A}]^T,$$

که $\boldsymbol{A} \in \{0,1\}^{\frac{n}{2}}$ هر انتخاب تصادفی یا یقینی دلخواهی می‌تواند باشد، و هیچ انتخابی بر دیگری برتری ندارد.

$$\mathbb{P}\left[\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}\right] = (0.5)^{\frac{n}{2}},$$

$$P_{\mathrm{e,min}} \coloneqq \mathbb{P}\left[\widehat{\boldsymbol{X}} \neq \boldsymbol{X}\right] = 1 - (0.5)^{\frac{n}{2}},$$

که $P_{\mathrm{e,min}}$ مقدار کمینه‌ی خطای قابل دستیابی برای این مسأله است. حال، این کمینه‌ی خطا را با نامساوی فانو مقایسه می‌کنیم.

نامساوی فانو:

$$X \to Y \to \hat{X}$$

$$P_e \coloneqq \mathbb{P}\left[\hat{X} \neq X\right]$$

$$H(P_e) + P_e \log_2|\chi| \geq H\left(X \middle| \hat{X}\right) \geq H(X|Y) \qquad (1)$$

نسخه‌ی ضعیف شده‌ی نامساوی فانو:

$$1 + P_e \log_2|\chi| \geq H(X|Y)$$

$$P_e \geq \frac{H(X|Y) - 1}{\log_2|\chi|} \qquad (2)$$

---

[1] Fano

از آنجا که

$$\chi \coloneqq \{0,1\}^n$$

نتیجه می‌شود

$$|\chi| = 2^n$$

همچنین

$$H(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}) = H\left(\boldsymbol{X}\middle|X_1, \dots, X_{\frac{n}{2}}\right) = H\left(X_{\frac{n}{2}+1}, \dots, X_n\right) = \frac{n}{2}H(X) = \frac{n}{2}$$

که مساوی اول و دوم از تعریف $\boldsymbol{X}$ و $\boldsymbol{Y}$ نتیجه شده است و دو مساوی آخر از استقلال عناصر $\boldsymbol{X}$ و توزیع یکنواخت بر الفبای دودویی به دست آمده است. با جایگذاری محاسبه‌های بالا در نسخه‌ی ضعیف شده‌ی نامساوی فانو داریم:

$$P_e \geq \frac{\frac{n}{2} - 1}{\log_2 2^n} = \frac{\frac{n}{2} - 1}{n}$$

اجازه دهید

$$P_{\mathrm{e,L}} \coloneqq \frac{\frac{n}{2} - 1}{n}$$

آنگاه برای $n \to \infty$

$$P_{\mathrm{e,L}} \to \frac{1}{2}$$

در حالی که

$$P_{\mathrm{e,min}} \to 1$$

بنابراین، برای n های بزرگ

$$P_{\mathrm{e,min}} > P_{\mathrm{e,L}}.$$

۲- متغیرهای تصادفی X و Y دارای توزیع توأم زیر است

X \ Y	a	b
0	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

فرض کنید $\hat{X}(Y)$ تخمین‌گری از X باشد. فرض کنید $P_e = \Pr\left[\hat{X}(Y) \neq X\right]$. کمینه‌ی خطای P_e و تخمین‌گری که به مقدار کمینه‌ی خطا می‌رسد را به دست بیاورید. همچنین، مقدار کمینه‌ی خطا را با مقدار کران پایین خطای به دست آمده از نامساوی فانو مقایسه کنید.

پاسخ)

با توجه به اطلاعات جدول،

$$\mathbb{P}[X=0|Y=a]=\frac{3}{4},$$

$$\mathbb{P}[X=1|Y=a]=\frac{1}{4},$$

$$\mathbb{P}[X=0|Y=b]=\frac{1}{4},$$

$$\mathbb{P}[X=1|Y=b]=\frac{3}{4}.$$

پس بهترین تابع تخمین‌گر به صورت زیر است

Y	$\hat{X}(Y)$
a	0
b	1

می‌توان نوشت:

$$P_{e,min}=\mathbb{P}\left[\hat{X}(Y)\neq X\right]$$

$$=\mathbb{P}\left[\hat{X}(Y)=0,X=1\right]+\mathbb{P}\left[\hat{X}(Y)=1,X=0\right]$$

$$=\mathbb{P}[Y=a,X=1]+\mathbb{P}[Y=b,X=0]$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

نسخه‌ی ضعیف‌شده‌ی نامساوی فانو:

$$P_e\geq\frac{H(X|Y)-1}{\log_2|\chi|} \qquad (3)$$

$$\log_2|\chi|=\log_2|\{0,1\}|=1$$

$$H(X|Y)=\mathbb{P}[Y=a]H(X|Y=a)+\mathbb{P}[Y=b]H(X|Y=b)$$

$$H(X|Y)=\frac{1}{2}H\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}\log_2 4+\frac{3}{4}\log_2\frac{4}{3}\simeq 0.8113\ bit$$

با جایگذاری محاسبه‌های بالا در (۳)

$$P_e\geq -0.1887$$

که بدیهی است.

۳- فرض کنید متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 به ترتیب، دارای توزیع جرم احتمال p_1 و p_2 بر الفبای χ باشند. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع $\lambda p_1+(1-\lambda)p_2$ باشد که λ عددی حقیقی و ثابت در بازه‌ی $[0,1]$ است. اثبات کنید:

$H(X) \geq \lambda H(X_1) + (1-\lambda) H(X_2)$.

پاسخ:

$$H(X) = -\sum_{x\in\chi} p_X(x)\log_2 p_X(x)$$

$$= -\sum_{x\in\chi}\left(\lambda p_{X_1}(X) + (1-\lambda)p_{X_2}(X)\right)\log_2\left(\lambda p_{X_1}(X) + (1-\lambda)p_{X_2}(X)\right) \qquad (4)$$

می‌توان نشان داد تابع $g(x) \coloneqq -x\log_2 x$ تابعی مقعر است. با استفاده از نامساوی ینسن رابطه‌ی زیر برقرار است

$$g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda g(x_1) + (1-\lambda) g(x_2) \qquad (5)$$

با اعمال (۵) در (۴) به دست می‌آید

$$H(X) = -\sum_{x\in\chi}\left(\lambda p_{X_1}(X) + (1-\lambda)p_{X_2}(X)\right)\log_2\left(\lambda p_{X_1}(X) + (1-\lambda)p_{X_2}(X)\right)$$

$$\geq -\lambda\left(\sum_{x\in\chi} p_{X_1}(X)\log_2\left(p_{X_1}(X)\right)\right) - (1-\lambda)\left(\sum_{x\in\chi} p_{X_2}(X)\log_2\left(p_{X_2}(X)\right)\right)$$

$$= \lambda H(X_1) + (1-\lambda)H(X_2).$$

۴- فرض کنید $A_\epsilon^{(n)}$ مجموعه‌ی نوعی از دنباله‌های تصادفی n بعدی $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ باشد که عنصرهای این دنباله، مستقل از یکدیگر، از توزیع $p(x)$ ایجاد شده اند. فرض کنید $B_\delta^{(n)}$ مجموعه‌ای از دنباله‌های تصادفی n بعدی $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ باشد که خاصیت

$$\Pr\left[B_\delta^{(n)}\right] \geq 1-\delta$$

را به ازای هر $0 < \delta < \frac{1}{2}$ برآورده می‌کند. اثبات کنید برای به اندازه‌ی کافی بزرگ n $\Pr\left[A_\epsilon^{(n)} \cap B_\delta^{(n)}\right] \geq 1-\epsilon-\delta$.

پاسخ:

$$\Pr\left[A_\epsilon^{(n)} \cap B_\delta^{(n)}\right] = 1 - \Pr\left[\overline{A_\epsilon^{(n)}} \cup \overline{B_\delta^{(n)}}\right]$$

$$\geq 1 - \Pr\left[\overline{A_\epsilon^{(n)}}\right] - \Pr\left[\overline{B_\delta^{(n)}}\right] \qquad (6)$$

که نامساوی آخر از $P(A\cup B) \leq P(A) + P(B)$ به دست آمده است.

طبق مورد دوم از قضیه‌ی *3.1.2* کتاب، برای n به اندازه‌ی کافی بزرگ رابطه‌ی زیر برقرار است

$$\Pr\left[A_\epsilon^{(n)}\right] > 1-\epsilon \qquad (7)$$

$$\Pr\left[\overline{A_\epsilon^{(n)}}\right] < \epsilon \qquad (8)$$

طبق صورت سؤال

$$\Pr\left[\overline{B_\delta^{(n)}}\right] \le \delta \qquad (9)$$

با اعمال (۸) و (۹) به (۶) به دست می‌آید

$$\Pr\left[A_\epsilon^{(n)} \cap B_\delta^{(n)}\right] \ge 1 - \epsilon - \delta.$$

موفق و مؤید باشید.