Ανασκόπηση Παραγώγων

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Οκτώβριος 2022

1 Παράγωγοι

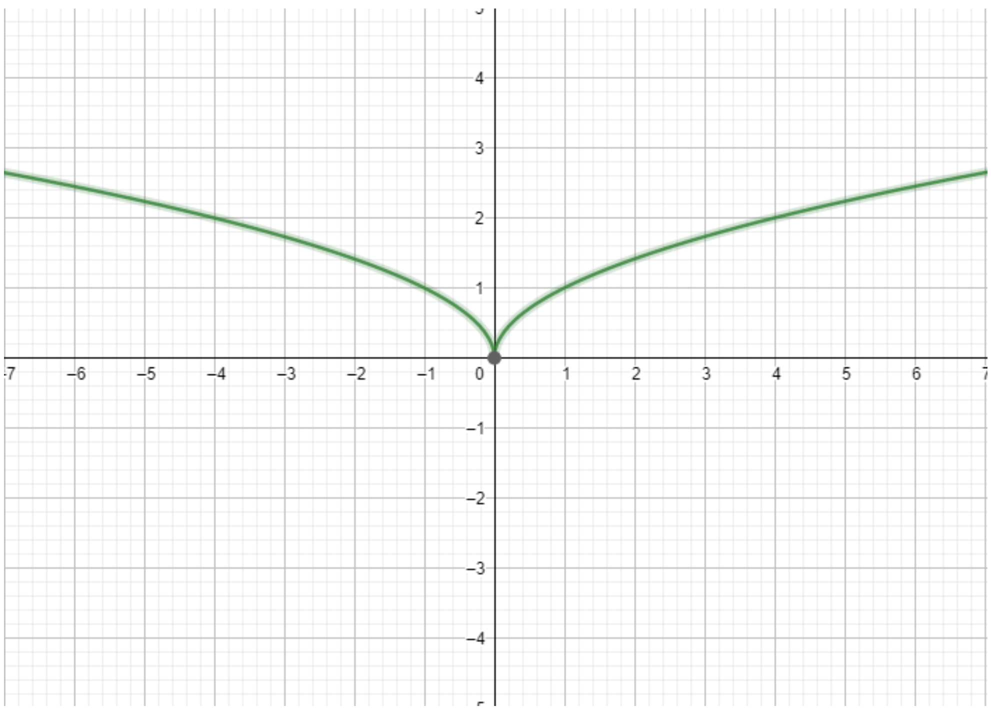
Η παράγωγος μίας συνάρτησης ορισμένης στο σημείο $x_0 \in (a,b)$ ορίζεται είτε ώς:

$$lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

είτε ως:

$$lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Οι δύο ορισμοί είναι ίδιοι μόνο που στη δεύτερη περίπτωση έχουμε αντικαταστήσει το x_0 με το x και το x με το $x+h$.
Παράδειγμα: Παράγωγος της $f(x) = x^2$. $lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0$
Κάθε συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη είναι και συνεχής. Ωστόσο, υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες είναι συνεχείς αλλά όχι παραγωγίσιμες.
Π.χ. $f(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$ στο $x_0 = 0$.
Για $x < 0$ $f(x) = \sqrt{-x} = (-x)^{\frac{1}{2}}$. $f^{'}(x) = -\frac{1}{2}(-x)^{-\frac{1}{2}}$. Συνεπώς η παράγωγος για $x < 0$ είναι αρνητική και συνεπώς η συνάρτηση f σε αυτό το διάστημα είναι φθίνουσα. $f^{''}(x) = -\frac{1}{4}(-x)^{-\frac{3}{2}}$. Συνεπώς η δεύτερη παράγωγος για $x < 0$ είναι αρνητική και συνεπώς η συνάρτηση f σε αυτό το διάστημα στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.
Για $x > 0$ $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. $f^{'}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$. Η πρώτη παράγωγος για $x > 0$ είναι θετική και συνεπώς η συνάρτηση f σε αυτό το διάστημα είναι αύξουσα. $f^{''}(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$. Συνεπώς η δεύτερη παράγωγος για $x > 0$ είναι αρνητική και συνεπώς η συνάρτηση f σε αυτό το διάστημα στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.
Το διάγραμμα της συνάρτησης φαίνεται στο Σχήμα 1.
Εξετάζουμε τώρα τις παραγώγους από αριστερά και από δεξιά στο $x_0 = 0$:
$lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{x} = lim_{x \to 0^-} - \frac{1}{\sqrt{-x}} = -\infty$.
$lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.
Η παράγωγος τείνει στο $-\infty$ από αριστερά και στο $+\infty$ από δεξιά. Συνεπώς, δεν υπάρχει (τόσο γιατί είναι διαφορετική από δεξιά και από αριστερά, αλλά ούτως ή



Σχήμα 1: Διάγραμμα της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|}$

άλλως γιατί απειρίζεται). Λέμε ότι η συνάρτηση έχει 'κατακόρυφη εφαπτομένη' στο $x = 0$.

1.1 Ιδιότητες παραγώγων

- $(f(x)g(x))^{'} = f^{'}(x)g(x) + f(x)g^{'}(x)$,
- $(\frac{f(x)}{g(x)})^{'} = \frac{f^{'}(x)g(x) - f(x)g^{'}(x)}{g^2(x)}$
- $(e^x)^{'} = e^x$
- $(ln(x))^{'} = \frac{1}{x}$
- $(ax^k + bx^{k-1} + \cdots + 1)^{'} = akx^{k-1} + b(k-1)x^{k-2} + \cdots + 0$
- $f(g(x))^{'} = f^{'}(u) \circ g^{'}(x)$, όπου $u = g(x)$
- $[f^{-1}]^{'}(x) = \frac{1}{f^{'}(f^{-1})(x)}$
- $\frac{d(tanx)}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{sinx}{cosx} = \frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}$
- $\frac{d(cotx)}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{cosx}{sinx} = \frac{-sin^2x - cos^2x}{sin^2x} = -\frac{1}{sin^2x}$

1.2 Άσκηση

Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και $f(x) = y$ τότε $(f^{-1}(y))^{'} = 1/f^{'}(x)$.
Αν $x \to x_0$ τότε $y = f(x) \implies f(x_0) = y_0$ από συνέχεια.
$(f^{-1})^{'}(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f^{'}(x_0)} = \frac{1}{f^{'}(f^{-1}(y_0))}$
Πιο απλά $f^{-1}(f(x)) = x$. Παραγωγίζοντας έχουμε $(f^{-1})^{'}(f(x))f^{'}(x) = 1 \iff (f^{-1})^{'}(f(x)) = \frac{1}{f^{'}(x)}$

1.3 Συνέχεια με ε-δ ορισμό

Μία συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $|x - x_0| < \delta \iff |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
Παράδειγμα: $f(x) = \alpha x + b$.
$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \iff |\alpha x + b - \alpha x_0 - b| < \epsilon \iff |\alpha||x - x_0| < \epsilon \iff |x - x_0| < \frac{\epsilon}{|\alpha|}$. Επιλέγω $\delta = \frac{\epsilon}{|\alpha|}$
Για την περίπτωση $\alpha = 0$ έχουμε $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \iff |b - b| < \epsilon \iff \epsilon > 0$ το οποίο ισχύει.

1.4 Άσκηση

Με βάση τον ορισμό της παραγώγου να βρείτε την παράγωγο της $f(x) = 2x^3$.
$f^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2x^3 - 2x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 2(x^2 + xx_0 + x_0^2) = 6x_0^2$

Μιγαδικοί Αριθμοί - Ολοκληρώματα

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Οκτώβριος 2022

1 Ασκήσεις στους Μιγαδικούς Αριθμούς

1.1 Τριγωνομετρική μορφή Μιγαδικών Αριθμών

α) Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τον αριθμό $z = 1 + \sqrt{3}i$.
$\theta = atan(\sqrt{3})$. $\theta = \frac{\pi}{3}$. $\rho = \sqrt{1+3} = 2$.
$z = 2(cos(\frac{\pi}{3}) + sin(\frac{\pi}{3})i)$
β) Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τον αριθμό $z = 1 - \sqrt{3}i$
$\theta = atan(-\sqrt{3})$. $\theta = \frac{5\pi}{3}$. $\rho = 2$.
$z = 2(cos(\frac{5\pi}{3}) + sin(\frac{5\pi}{3})i)$
γ) Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τον αριθμό $z = 4$.
$z = 4(cos(0) + sin(0)i)$
δ) Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τον αριθμό $z = -4$.
$z = 4(cos(\pi) + sin(\pi)i)$

1.2 Άλλες ασκήσεις

Αν $|z| = 1$ να δείξετε ότι $\bar{z} = \frac{1}{z}$.
$z \cdot \bar{z} = (x+yi)(x-yi) = (x^2+y^2) = |z|^2$. Όμως $|z| = 1$, συνεπώς $z \cdot \bar{z} = 1 \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$
Να βρείτε τη δύναμη $[2(cos(20°) + isin(20°))]^3$:
Λύση: $8(cos(60°) + isin(60°))$
Να υπολογίσετε την παράσταση $z = (\frac{1+i}{\sqrt{2}})^{-6}$
$\theta = \frac{\pi}{4}$, $R = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$.
Συνεπώς: $z = cos(\frac{-3\pi}{2}) + isin(\frac{-3\pi}{2})$
Αν $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ να υπολογίσετε τον z^{2000}.
$\theta = \frac{\pi}{3}$. $R = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$.
Συνεπώς $z^{2000} = cos(\frac{2000\pi}{3}) + isin(\frac{2000\pi}{3}) = cos(\frac{2\pi}{3}) + isin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2 Ασκήσεις στα ολοκληρώματα

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int (x^3 + sin(x) + cos(x))dx$
$\int (x^3 + sin(x) + cos(x))dx = \frac{x^4}{4} - cos(x) + sin(x) + C$
Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^2+x+1}{x}dx$
$\int \frac{x^2+x+1}{x}dx = \frac{x^2}{2} + x + ln(|x|) + C$
Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int 3x\sqrt{x}dx$
$\int 3x\sqrt{x}dx = \int 3x^{\frac{3}{2}}dx = 3\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$
Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^3+8}{x+2}dx$
$\frac{x^3+8}{x+2} = x^2 - 2x + 4$. Συνεπώς $\int \frac{x^3+8}{x+2}dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x + C$
Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int e^x - \frac{3}{x} + cos(2x)dx$
$\int e^x - \frac{3}{x} + cos(2x)dx = e^x - 3ln(|x|) + \frac{1}{2}sin(2x) + C$
Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{cos^2(x)} - \frac{1}{sin^2(x)}dx$
$\int \frac{1}{cos^2(x)} - \frac{1}{sin^2(x)}dx = tan(x) + cot(x) + C$
Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x+3}{x+2}dx$
$\int \frac{x+3}{x+2}dx = \int \frac{(x+2)+1}{x+2}dx = x + ln(|x+2|) + C$
Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f^{''}(x) = 3, f^{'}(1) = 6$ και $f(0) = 4$.
$f^{'}(x) = 3x + C_1$ $f^{'}(1) = 6$ συνεπώς $C_1 = 3$ και $f^{'}(x) = 3x + 3$
Άρα $f(x) = 3\frac{x^2}{2} + 3x + C_2$. Όμως $f(0) = 4$, άρα $C_2 = 4$ και $f(x) = 3\frac{x^2}{2} + 3x + 4$.

2.1 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int x^2e^{-x}dx$.
$\int x^2e^{-x}dx = -\int x^2(e^{-x})^{'}dx = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx =$
$-x^2e^{-x} - 2\int x(e^{-x})^{'}dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}dx =$
$-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$
Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int lnxdx$.
$\int lnxdx = \int (x)^{'}lnxdx = xlnx - \int x\frac{1}{x}dx = xlnx - x + C$

2.2 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx$
$\Delta = 9 - 8 = 1$ $r_{1,2} = \frac{3\pm1}{2}$, $r_1 = 2, r_2 = 1$ $\frac{2x-3}{x^2-3x+2} = \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)}$. $A + B = 2$. $-2A - B = -3 \iff 2A + B = 3$, $B = 2 - A$, $2A + 2 - A = 3 \iff A = 1$ και συνεπώς $B = 1$.
Συνεπώς $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}dx = ln(|x-1|) + ln(|x-2|) + C$

3^o Φροντιστηριακό Μάθημα Μαθηματική Ανάλυση

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Οκτώβριος 2022

1 1^η Άσκηση

Να κατατάξετε τις συναρτήσεις $f(x) = 2(x+2)^2$, $g(x) = ln(x)$, $h(x) = 1 - e^{-x}$ ως κοίλες ή κυρτές αφού υπολογίσετε τις δεύτερες παραγώγους τους.
$f^{'}(x) = 4(x+2)$, $f^{''}(x) = 4$ άρα f κυρτή.
$g^{'}(x) = \frac{1}{x}$, $g^{''}(x) = -\frac{1}{x^2}$ άρα g κοίλη.
$h^{'}(x) = e^{-x}$, $h^{''}(x) = -e^{-x}$ άρα h κοίλη.

2 2^η Άσκηση

Να υπολογίσετε την παράγωγο της $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-1}$ και της $g(x) = \sqrt{e^{2x} - x^2}$.
$f^{'}(x) = \frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+3)}{(x^2-1)^2} = -\frac{8x}{(x^2-1)^2}$
$g^{'}(x) = \frac{2e^{2x}-2x}{2\sqrt{e^{2x}-x^2}} = \frac{e^{2x}-x}{\sqrt{e^{2x}-x^2}}$

3 3^η Άσκηση

Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων $f(x) = \frac{10x^2+3x^4+5}{x^2-5x}$, $g(x) = e^{3x^2+5x+1}$, $h(x) = (3x^2+5x+1)^{50}$
$f^{'}(x) = \frac{(20x+12x^3)(x^2-5x)-((2x-5)(10x^2+3x^4+5)}{(x^2-5x)^2} =$
$\frac{20x^3-100x^2+12x^5-60x^4-(20x^3+6x^5+10x-50x^2-15x^4-25)}{(x^2-5x)^2} =$
$\frac{6x^5-45x^4-50x^2-10x+25}{(x^2-5x)^2}$
$g^{'}(x) = (6x+5)e^{3x^2+5x+1}$
$h^{'}(x) = 50(3x^2+5x+1)^{49}(6x+5)$

4 4^η Άσκηση

Για την ακολουθία $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 1$, $\alpha_0 = 0$ να δείξετε με επαγωγή ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Για $n = 0$ $\alpha_1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1 > \alpha_0$.
Για $n = k$ Έστω $\alpha_k > \alpha_{k-1} \iff 2\alpha_{k-1} + 1 > \alpha_{k-1} \iff \alpha_{k-1} > -1$.
Για $n = k+1$ Θ.δ.ό. $\alpha_{k+1} > \alpha_k \iff 2\alpha_k + 1 > \alpha_k \iff 2(2\alpha_{k-1} + 1) + 1 > 2\alpha_{k-1} + 1 \iff 4\alpha_{k-1} + 3 > 2\alpha_{k-1} + 1 \iff 2\alpha_{k-1} > -2 \iff \alpha_{k-1} > -1$, το οποίο ισχύει από την υπόθεση.

5 5^η Άσκηση

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$ είναι κοίλη, χωρίς να κάνετε χρήση των παραγώγων της.
$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \iff$
$\sqrt{tx_1 + (1-t)x_2} \geq t\sqrt{x_1} + (1-t)\sqrt{x_2} \iff$
$tx_1 + (1-t)x_2 \geq t^2x_1 + (1-t)^2x_2 + 2t(1-t)\sqrt{x_1x_2} \iff$
$t(1-t)x_1 + (1-t)(1-(1-t))x_2 - 2t(1-t)\sqrt{x_1x_2} \geq 0 \iff$
$t(1-t)x_1 + (1-t)tx_2 - 2t(1-t)\sqrt{x_1x_2} \geq 0 \iff$
$t(1-t)(x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1x_2}) \geq 0 \iff$
$t(1-t)(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$, το οποίο ισχύει.

6 6^η Άσκηση

Για την ακολουθία $\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_n + 1, \alpha_0 = 1$ να βρείτε το όριό της υποθέτωντας ότι συγκλίνει.
$lim\alpha_{n+1} = lim\frac{1}{2}\alpha_n + 1$. Θέτοντας $x = lim\alpha_{n+1} = lim\alpha_n$ έχουμε $x = \frac{1}{2}x + 1$ ή ισοδύναμα $x = 2$.

7 7^η Άσκηση

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες συγκλίνει η ακολουθία:
$\alpha_{n+1} = \frac{\lambda}{4}\alpha_n + 1, \alpha_0 = 1$.
Πρέπει $|\frac{\lambda}{4}| < 1 \iff |\lambda| < 4$.

8 8^η Άσκηση

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_{n+1} = \frac{3}{4}\alpha_n + 1, \alpha_0 = 1$ συγκλίνει.
Δείχνουμε με επαγωγή ότι η ακολουθία είναι αύξουσα:
Για $n = 0$, $\alpha_1 = \frac{7}{4} \geq \alpha_0 = 1$.
Για $n = k$, Έστω $\alpha_k \geq \alpha_{k-1}$.
Για $n = k+1$ Θ.δ.ό. $\alpha_{k+1} \geq \alpha_k \iff \frac{3}{4}\alpha_k + 1 \geq \alpha_k \iff$
$\frac{3}{4}\alpha_k + 1 \geq \frac{3}{4}\alpha_{k-1} + 1 \iff \alpha_k \geq \alpha_{k-1}$ που ισχύει από την υπόθεση.

Θα δείξουμε με επαγωγή ότι είναι άνω φραγμένη. Για να βρούμε ένα πιθανό άνω φράγμα, λύνουμε την εξίσωση $x = \frac{3}{4}x + 1 \iff x = 4$.

Για $n = 0$ $\alpha_0 = 1 \leq 4$.
Για $n = k$ Έστω $\alpha_k \leq 4$.
Για $n = k+1$ $\alpha_{k+1} \leq 4 \iff \frac{3}{4}\alpha_k + 1 \leq 4 \iff \frac{3}{4}\alpha_k \leq 3 \iff \alpha_k \leq \frac{12}{3} \iff \alpha_k \leq 4$, που ισχύει από την υπόθεση.
Συνεπώς η ακολουθία α_n συγκλίνει ως αύξουσα και άνω φραγμένη.

9 9^η Άσκηση

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε την προεικόνα του συνόλου $B = [4, 5]$ για τη συνάρτηση $f(x) = 4e^{2x}$.
$y = 4e^{2x} \iff \frac{y}{4} = e^{2x} \iff 2x = ln(\frac{y}{4}) \iff x = \frac{1}{2}ln(\frac{y}{4})$ ή $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}ln(\frac{x}{4})$.
Αντικαθιστούμε τις ακραίες τιμές για το σύνολο B και αφού η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε ότι η προεικόνα του συνόλου είναι η $A = [f^{-1}(4), f^{-1}(5)] = [0, \frac{1}{2}ln(\frac{5}{4})]$.

4^o φροντιστήριο Μαθηματική Ανάλυση

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Νοέμβριος 2022

1 Ασκήσεις πάνω στις σειρές

1.1 $1^η$ Άσκηση

Να βρεθεί που συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$:
$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = lim\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

1.2 $2^η$ Άσκηση

Να δειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ συγκλίνει:
Η συνάρτηση $f(x) = xe^{-x^2}$ είναι μεγαλύτερη του μηδενός για $x \in [1, +\infty]$.
Έχει παράγωγο $f^{'}(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(1-2x^2)$ και είναι φθίνουσα για $x \in [1, +\infty]$
$\int_{x=1}^{\infty} xe^{-x^2} = -\frac{1}{2}lim_{t\to+\infty}[e^{-x^2}]_1^t = \frac{1}{2e}$ Σύμφωνα με το κριτήριο ολοκληρώματος εφόσον το ολοκλήρωμα της $f(x)$ με $f(n) = ne^{-n^2}$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η αντίστοιχη σειρά.

1.3 $3^η$ Άσκηση

Για ποιες τιμές του λ συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}$:
$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{\lambda^{n+1}n!}{(n+1)!\lambda^n}| = |\frac{\lambda}{n+1}|.$
$lim|\frac{\lambda}{n+1}| = 0$, συνεπώς αφού το όριο είναι μικρότερο του 1 για όλες τις τιμές του λ, συγκλίνει για όλες τις τιμές του λ.

1.4 $4^η$ Άσκηση

Για ποιες τιμές του λ συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n 2^n}{n!}$:
$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{\lambda^{n+1}2^{n+1}n!}{(n+1)!\lambda^n 2^n}| = |\frac{2\lambda}{n+1}|.$
$lim|\frac{2\lambda}{n+1}| = 0$, συνεπώς συνεπώς αφού το όριο είναι μικρότερο του 1 για όλες τις τιμές του λ, συγκλίνει για όλες τις τιμές του λ.

1.5 5^{η} Άσκηση

Για ποιες τιμές του λ συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n}$:
$|\frac{\lambda^{2(n+1)}}{\lambda^{2n}}| = |\frac{\lambda^{2n+2}}{\lambda^{2n}}| = |\lambda^2| = \lambda^2$. Για να συγκλίνει η σειρά θα πρέπει αυτή η τιμή να είναι μικρότερη του 1 για $n \to \infty$. Συνεπώς συγκλίνει για $\lambda^2 < 1$.

1.6 6^{η} Άσκηση

Ποια η τέταρτης τάξης προσέγγιση με σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x) = xsin(x)$ γύρω από το σημείο $x_0 = 0$:

$f(x) = xsin(x)$,
$f^{'}(x) = sin(x) + xcos(x)$,
$f^{''}(x) = cos(x) - xsin(x) + cos(x) = 2cos(x) - xsin(x)$,
$f^{'''}(x) = -2sin(x) - sin(x) - xcos(x) = -3sin(x) - xcos(x)$,
$f^{(4)}(x) = -3cos(x) + xsin(x) - cos(x) = -4cos(x) + xsin(x)$.

Η προσέγγιση είναι: $P_4(x) = 0 + 0 + \frac{2cos(0)x^2}{2!} + 0 - \frac{4cos(0)x^4}{4!} = x^2 - \frac{x^4}{6}$.

1.7 7^{η} Άσκηση

Ποια η δεύτερης τάξης προσέγγιση με σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x) = e^x cos(x)$ γύρω από το σημείο $x_0 = 0$:

$f(x) = e^x cos(x)$,
$f^{'}(x) = e^x cos(x) - e^x sin(x)$,
$f^{''}(x) = e^x cos(x) - e^x sin(x) - e^x sin(x) - e^x cos(x) = -2e^x sin(x)$.

Η προσέγγιση είναι: $P_2(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + 0 = 1 + x$

1.8 8^{η} Άσκηση

Έστω ότι $P_3(x)$ είναι η τρίτης τάξης προσέγγιση με σειρά Taylor στο σημείο $x_0 = 0$ για τη συνάρτηση $f(x) = e^x$. Ποιο από είναι το άνω όριο για το σφάλμα αποκοπής στο σημείο $x = 1$ (δηλαδή η μέγιστη απόλυτη διαφορά που μπορεί να προκύψει μεταξύ της τιμής $P_3(1)$ και e^1):
$f^{(4)}(x) = e^x$. $|R_4(x)| \leq \frac{M|x|^4}{4!}$, όπου M ένα άνω φράγμα για την τιμή $|f^{(4)}(x)|$ στο διάστημα $[0,1]$.
Στο διάστημα $[0,1]$, $|x| \leq 1 \iff |x|^4 \leq 1$. $|f^{(4)}(x)| = e^x \leq e$ για $|x| \leq 1$.
Συνεπώς $|R_4(x)| \leq \frac{e}{24}$, για $x \in [0,1]$.

1.9 9^{η} Άσκηση

Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{5^n+4}$.
$5^n < 5^n + 4 \implies \frac{7}{5^n} > \frac{7}{5^n+4} \implies 7(\frac{1}{5})^n > \frac{7}{5^n+4}$.
Όμως $\sum_{n=1}^{\infty} 7(\frac{1}{5})^n = 7\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{5})^n$, η οποία σειρά συγκλίνει ως γεωμετρική με λόγο $\frac{1}{5} < 1$. Συνεπώς, συγκλίνει και η αρχική σειρά.

1.10 10^{η} Άσκηση

$a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Ισχύει $lim\frac{a_n}{b_n} = lim\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Εξετάζουμε ως προς τη σύγκλιση την $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
Η $\frac{1}{n}$ είναι θετική για $n \geq 1$
Η $f(x) = 1/x$ έχει παράγωγο $f^{'}(x) = -\frac{1}{x^2}$ η οποία είναι αρνητική και συνεπώς είναι φθίνουσα. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x}dx = lim_{t\to+\infty}[lnx]_1^t = +\infty$.
Συνεπώς η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο του ολοκληρώματος.
Άρα αποκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

1.11 11^{η} Άσκηση

Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$.
$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
$a_n > 0, \forall n \geq 1$.
$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \iff a_{n+1} \leq a_n$.
$lima_n = 0$.
Συνεπώς η εναλλάσσουσα σειρά συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο του Leibniz.
Η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει, καθώς σύμφωνα με το κριτήριο του ολοκληρώματος $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^{+\infty} x^{-1/2}dx = lim_{t\to+\infty}[\frac{x^{1/2}}{1/2}]_1^t = lim_{t\to+\infty}(2t^{1/2} - 2) = +\infty$

1.12 12^{η} Άσκηση

Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n}$.
Η δυναμοσειρά είναι γύρω από το $c = -1$.
$\frac{1}{r} = lim\frac{1/(n+1)}{1/n} = lim\frac{n}{n+1} = 1$.
Συνεπώς, η ακτίνα σύγκλισης είναι $r = 1$.
Η δυναμοσειρά συγκλίνει γύρω από τα $x = r + c = 1 - 1 = 0$ και $x = c - r = -1 - 1 = -2$.
Για $x = 0$ έχουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
Σύμφωνα με το κριτήριο ολοκληρώματος έχουμε $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = lim_{t\to+\infty}[lnx]_1^t = +\infty$. Συνεπώς στο $x = 0$ η σειρά αποκλίνει.
Για $x = -2$ έχουμε την εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
$a_n = \frac{1}{n} > 0$. Η a_n είναι φθίνουσα, καθώς $a_{n+1} < a_n$ και $lima_n = 0$. Συνεπώς, σύμφωνα με το κριτήριο Leibniz συγκλίνει.
Συνεπώς, το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-2, 0)$.

5^o φροντιστήριο Μαθηματική Ανάλυση

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Νοέμβριος 2022

1 Ασκήσεις πάνω στη βελτιστοποίηση μονομεταβλητής συνάρτησης σε διάστημα και στην εισαγωγή σε πολυμεταβλητές συναρτήσεις

1.1 $1^η$ Άσκηση

Να βρεθούν τα τοπικά μέγιστα και το ολικό μέγιστο της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$ στο διάστημα $[-1, 1]$.

Εξετάζουμε πρώτα για τυχόν τοπικά μέγιστα σε εσωτερικό σημείο του διαστήματος:

$$f^{'}(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = 1.$$

Άρα έχουμε δύο στάσιμα σημεία, τα οποία θα κατηγοριοποιήσουμε εξετάζοντας την τιμή της 2ης παραγώγου σε κάθε ένα από αυτά.

$$f''(x) = 12x - 6$$

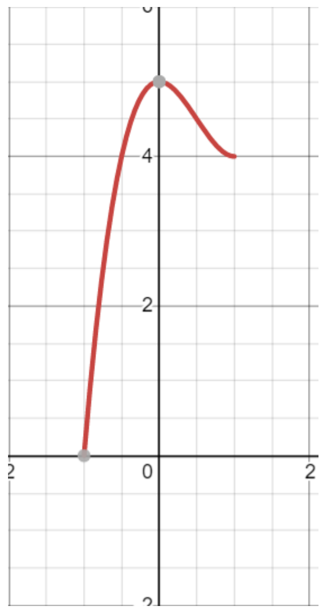
άρα $f''(0) = -6 < 0$ και $f''(1) = 6 > 0$. Συμπεραίνουμε ότι υπάρχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x = 0$. Στη συνέχεια ελέγχουμε για τυχόν τ. μέγιστο στις ακραίες τιμές που μπορεί να λάβει το x.

Στην ελάχιστη επιτρεπτή τιμή $x = -1$ έχουμε $f'(-1) = 12 > 0$ άρα η f είναι αύξουσα, οπότε δεν υπάρχει τοπικό μέγιστο εκεί.

Στη μέγιστη επιτρεπτή τιμή $x = 1$ έχουμε ήδη δεί ότι $f'(1) = 0$, $f''(1) > 0$, άρα πρόκειται για τ. ελάχιστο.

Επειδή βρέθηκε μόνο ένα τοπικό μέγιστο, στο $x = 0$, θα αποτελεί και το ολικό μέγιστο της f στο εν λόγω διάστημα. Σε περίπτωση που είχαμε εντοπίσει περισσότερα από 1 τ. μέγιστα, θα έπρεπε να συγκρίνουμε τις τιμές της f σε κάθε ένα από αυτά.

Το διάγραμμα της συνάρτησης φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Διάγραμμα της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$ στο $x \in [-1, 1]$

1.2 $2^η$ Άσκηση

Να βρεθεί σε ποιο σημείο ελαχιστοποιείται η συνάρτηση

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 1$$

στο διάστημα $[-1, 1]$.

Εχουμε:

$$f^{'}(x) = 6x^2 - 4x = 2x(3x - 2).$$

Τα στάσιμα σημεία ($f'(x) = 0$) είναι τα $x = 0$, $x = 2/3$. Εξετάζουμε το πρόσημο της 2ης παραγώγου σε αυτά. Είναι

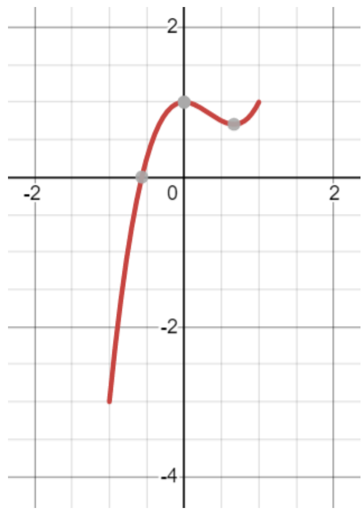
$$f''(x) = 12x - 4$$

άρα $f''(0) < 0$ και $f''(2/3) > 0$. Συνεπώς έχουμε τ.μέγιστο στο $x = 0$ και τ. ελάχιστο στο $x = 2/3$.

Τέλος, εξετάζουμε τη μονοτονία της συνάρτησης στα ακρία σημεία του διαστήματος $[-1, 1]$: Είναι $f'(-1) > 0$ άρα υπάρχει τ. ελάχιστο στο $x = -1$. Επίσης, $f'(1) > 0$ άρα υπάρχει τ. μέγιστο στο $x = 1$.

Συνοψίζοντας, έχουμε βρει τοπικά ελάχιστα στο $x = 2/3$ και $x = -1$, και

$$f(2/3) = \frac{16}{27} - \frac{8}{9} + 1 = \frac{16}{27} - \frac{24}{27} + 1 = \frac{-8}{27} + 1 = \frac{19}{27}$$



Σχήμα 2: Διάγραμμα της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 1$ στο $x \in [-1, 1]$

ενώ

$$f(-1) = -3.$$

Συνεπώς το ολικό ελάχιστο βρίσκεται στο σημείο $x = -1$.

Το διάγραμμα της συνάρτησης φαίνεται στο Σχήμα 2.

1.3 3^η Άσκηση

Να υπολογιστεί το διάνυσμα κλίσης για την $f(x) = x_1^4 x_2^6$.

Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους της f έχουμε:

$$\partial f/\partial x = \nabla f = \left[\begin{array}{c} 4x_1^3 x_2^6 \\ 6x_1^4 x_2^5 \end{array} \right]$$

1.4 4^η Άσκηση

Να υπολογιστεί η $\partial f/\partial x$ για την $f(x) = 2x_1x_2 + 4x_1 + 6x_2$.

Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους της f έχουμε:

$$\partial f/\partial x = \left[\begin{array}{c} 2x_2 + 4 \\ 2x_1 + 6 \end{array} \right]$$

1.5 5^η Άσκηση

Να βρεθεί η Εσσιανή μήτρα για την $f(x) = x_1^4 x_2^6$.

Η Εσσιανή μήτρα ($H = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$) αποτελείται από τις 2ες παραγώγους της f κατάλληλα τοποθετημένες σε $2x2$ πίνακα (εφ΄όσον η f εχει 2 μεταβλητές). Υπολογίζουμε:

$f_1(x) = 4x_1^3 x_2^6$.
$f_2(x) = 6x_1^4 x_2^5$.
$f_{11}(x) = 12x_1^2 x_2^6$.
$f_{12}(x) = 24x_1^3 x_2^5 = f_{21}(x)$.
$f_{22}(x) = 30x_1^4 x_2^4$.

Άρα $H = \begin{bmatrix} 12x_1^2 x_2^6 & 24x_1^3 x_2^5 \\ 24x_1^3 x_2^5 & 30x_1^4 x_2^4 \end{bmatrix}$

1.6 6^{η} Άσκηση

Να βρεθεί η Εσσιανή μήτρα για την $f(x) = 2x_1x_2 + 4x_1 + 6x_2$.

Οπως και στην προηγούμενη άσκηση, έχουμε: $f_1(x) = 2x_2 + 4$.
$f_2(x) = 2x_1 + 6$.
$f_{11}(x) = 0$.
$f_{12}(x) = 2 = f_{21}(x)$.
$f_{22}(x) = 0$.

Άρα $H = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

1.7 7^{η} Άσκηση

Να βρεθεί η Εσσιανή μήτρα για την $f(x) = 4x_1^2x_2^2 + 5x_1 + x_2$.

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους: $f_1(x) = 8x_1x_2^2 + 5$.
$f_2(x) = 8x_1^2x_2 + 1$.
$f_{11}(x) = 8x_2^2$.
$f_{12}(x) = 16x_1x_2 = f_{21}(x)$.
$f_{22}(x) = 8x_1^2$.

Άρα $H = \begin{bmatrix} 8x_2^2 & 16x_1x_2 \\ 16x_1x_2 & 8x_1^2 \end{bmatrix}$

1.8 8^{η} Άσκηση

Να βρεθεί η δεύτερης τάξης προσέγγιση με σειρά Taylor για τη συνάρτηση $f(x_1, x_2) = e^{-(x_1+x_2)}$ στο σημείο $(0, 1)$.

$$P_2(x_1, x_2) = f(0,1) + (\nabla f|_{(0,1)})^T [x_1 - 0, x_2 - 1]^T + \frac{1}{2}[x_1 - 0, x_2 - 1] \nabla^2 f|_{(0,1)} [x_1 - 0, x_2 - 1]^T$$

Υπολογίζουμε τις απαιτούμενες μερικές παραγώγους για να σχηματίσουμε τις ποσότητες ∇f και $\nabla^2 f$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = -e^{-(x_1+x_2)} \tag{1}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(x_1, x_2) = e^{-(x_1+x_2)} \tag{2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1} = e^{-(x_1+x_2)} \tag{3}$$

Συνεπώς:
$P_2(0,1) = e^{-1} + [-e^{-1}, -e^{-1}][x_1, x_2 - 1]^T + \frac{1}{2}[x_1, x_2 - 1] \begin{bmatrix} e^{-1} & e^{-1} \\ e^{-1} & e^{-1} \end{bmatrix} [x_1, x_2 - 1]^T =$
$e^{-1} - e^{-1}(x_1 + x_2 - 1) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 e^{-1} + (x_2 - 1)e^{-1}, & x_1 e^{-1} + (x_2 - 1)e^{-1} \end{bmatrix} [x_1, x_2 - 1]^T =$
$e^{-1} - e^{-1}(x_1 + x_2 - 1) + e^{-1}x_1^2 + e^{-1}x_1(x_2 - 1) + e^{-1}(x_2 - 1)^2.$
$= e^{-1}(1 - x_1 - x_2 + 1 + x_1^2 + x_1 x_2 - x_1 + (x_2 - 1)^2$
$= e^{-1}(2 - 2x_1 - x_2 + x_1^2 + x_1 x_2 + (x_2 - 1)^2).$

1.9 9^η Άσκηση

Να βρεθούν τα στάσιμα σημεία της $f(x) = 2x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2$.

Τα στάσιμα σημεία είναι αυτά στα οποία όλες οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης μηδενίζονται ταυτόχρονα. Συνεπώς θα πρέπει να ισχύουν τα παρακάτω:
$f_1(x) = 0 \iff 4x_1 - x_2 = 0 \iff x_2 = 4x_1$, και επίσης
$f_2(x) = 0 \iff -x_1 + 2x_2 = 0$.

Λύνοντας τις παραπάνω 2 εξισώσεις (αντικαθιστούμε για το x_2) έχουμε:
$7x_1 = 0 \iff x_1 = 0$.

Αντικαθιστούμε στην έκφραση για το x_2 και συμπεραίνουμε ότι το μοναδικό στάσιμο σημείο της συνάρτησης είναι το $[0,0]^T$.

1.10 10^η Άσκηση

Να βρεθούν τα στάσιμα σημεία της $f(x) = 4x_1^3 - 2x_1 x_2 + 2x_2^2$.

Ομοια με την προηγούμενη άσκηση, μηδενιζουμε τις μερικές παραγώγους της f και λύνουμε το σύστημα εξισώσεων που θα προκύψει. Αρχικά, υπολογίζουμε:
$f_1(x) = 12x_1^2 - 2x_2$.
$f_2(x) = -2x_1 + 4x_2$.

Άρα θα πρέπει:
$f_2(x) = 0 \iff -x_1 + 2x_2 = 0 \iff x_2 = x_1/2$.
$f_1(x) = 0 \iff 12x_1^2 - x_1 = 0$ (χρησιμοποιώντας τη σχέση $x_2 = x_1/2$).

Λύνοντας την $x_1(12x_1 - 1) = 0$, έχουμε ότι $x_1 = 0$ ή $x_1 = \frac{1}{12}$. Για αυτές τις τιμές του x_1 θα έχουμε αντίστοιχα ($x_2 = x_1/2$) ότι $x_2 = 0$ και $x_2 = \frac{1}{24}$.

Άρα, τα στάσιμα σημεία είναι το $[0,0]^T$ και το $[\frac{1}{12}, \frac{1}{24}]^T$.

6^o Φροντιστήριο Μαθηματική Ανάλυση

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Δεκέμβριος 2022

1 Ασκήσεις πάνω σε θετικά/αρνητικά ορισμένους/ημί-ορισμένους/μη ορισμένους πίνακες, βελτιστοποίηση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, παράγωγο πεπλεγμένης συνάρτησης

1.1 1^η Άσκηση

Να χαρακτηριστεί ο πίνακας A= $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ ως θετικά/αρνητικά ορισμένος/ημί-ορισμένος ή μη ορισμένος με δύο μεθόδους.
$|H_1| = f_{11} = 1 > 0$.
$|H_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 > 0$
$|H_3| = 10 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 30 > 0$
Συνεπώς ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος.
2^{oc} τρόπος: Εξετάζοντας τις ιδιοτιμές:
$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (10-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$
$(10-\lambda)((1-\lambda)(4-\lambda)-1) = (10-\lambda)(4-5\lambda+\lambda^2-1) = (10-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+3)$
Συνεπώς $|A - \lambda I| = 0 \iff \lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0$ ή $10 - \lambda = 0$
Η συνθήκη $10 - \lambda = 0$ δίνει $\lambda = 10 > 0$. Η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι $\Delta = 25 - 12 = 13$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $\rho_1 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$ και $\rho_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$ οι οποίες είναι και οι δύο θετικές. Συνεπώς αφού όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές, ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος.

1.2 2^η Άσκηση

Να χαρακτηριστεί ο πίνακας A= $\begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ως θετικά/αρνητικά ορισμένος/ημί-ορισμένος ή μη ορισμένος.
$|H_1| = f_{11} = -5 < 0$.
$|H_2| = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 19 > 0$
$|H_3| = -1 \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -19 < 0$
Συνεπώς ο πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος.

1.3 3^η Άσκηση

Να χαρακτηριστεί ο πίνακας A= $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ως θετικά/αρνητικά ορισμένος/ημί-ορισμένος ή μη ορισμένος.
$|H_1| = f_{11} = -1 < 0$.
$|H_2| = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 < 0$
Συνεπώς ο πίνακας είναι μη ορισμένος.

1.4 4^η Άσκηση

Να εξεταστεί ως προς τα τοπικά μέγιστα/ελάχιστα η συνάρτηση $y = -4x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - x_2 - x_3$.
Βρίσκουμε πρώτα τα στάσιμα σημεία:
$f_1 = 0 \iff -8x_1 = 0 \iff x_1 = 0$.
$f_2 = 0 \iff -4x_2 - 1 = 0 \iff x_2 = -\frac{1}{4}$.
$f_3 = 0 \iff -2x_3 - 1 = 0 \iff x_3 = -\frac{1}{2}$.
Συνεπώς το μοναδικό στάσιμο σημείο της συνάρτησης είναι το $x = (0, -1/4, -1/2)$.
Υπολογίζουμε τις παραγώγους δεύτερης τάξης:
$f_{11} = -8, f_{12} = 0, f_{13} = 0$.
$f_{21} = 0, f_{22} = -4, f_{23} = 0$.
$f_{31} = 0, f_{32} = 0, f_{33} = -2$.
Εξετάζουμε τις ορίζουσες των ηγετικών κύριων ελλασσόνων της Εσσιανής μήτρας:
$|H_1| = f_{11} = -8 < 0$.
$|H_2| = \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 32 > 0$.
$|H_3| = -2 \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -64 < 0$.
Οι ηγετικές κύριες ελλάσονες περιττής τάξης είναι αρνητικές και οι άρτιας τάξης θετικές. Συνεπώς έχουμε τοπικό μέγιστο στο $x = (0, -1/4, -1/2)$.

1.5 5^η Άσκηση

Να βρεθεί η κλίση της εφαπτομένης στην καμπύλη $F(x,y) = 4x^2 - 2y^2 + 4$ στο σημείο $(1,2)$.
$F_x(x,y) = 8x$.
$F_y(x,y) = -4y$.
Κλίση εφαπτομένης: $-\frac{F_x(1,2)}{F_y(1,2)} = 1$.

1.6 6^η Άσκηση

Να υπολογίσετε την κλίση των ισοσταθμικών καμπυλών της $f(x) = x_1 - 2x_1x_2 - x_2$.
$f_{x_1}(x) = 1 - 2x_2$
$f_{x_2}(x) = -2x_1 - 1$
Κλίση ισοσταθμικών καμπυλών: $-\frac{f_{x_1}(x)}{f_{x_2}(x)} = -\frac{2x_2-1}{2x_1+1}$.

7^o Φροντιστηριακό Μάθημα Μαθηματική Ανάλυση

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Δεκέμβριος 2022

1 Ασκήσεις σε βελτιστοποίηση πολυμεταβλητών συναρτήσεων σε περιοχές και βελτιστοποίηση με περιορισμούς ισότητας

1.1 1^η Άσκηση

Να λυθεί το πρόβλημα μεγιστοποίησης:
$max\ f(x) = 10x_1 - 2x_2$ για $-1 \leq x_1 \leq 1$ και $-1 \leq x_2 \leq 1$.

$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 10$, συνεπώς η συνάρτηση είναι αύξουσα ως προς x_1.

$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = -2$, συνεπώς η συνάρτηση είναι φθίνουσα ως προς x_2.

Άρα το μέγιστο βρίσκεται στο $(1, -1)$.
Το σημείο αυτό πληροί τις αναγκαίες συνθήκες για μέγιστο αφού:
$f_1 = 10 \geq 0$ και $(\beta_1 - x_1) \cdot 10 = (1 - 1) \cdot 10 = 0$
$f_2 = -2 \leq 0$ και $(x_2 - \alpha_2) \cdot (-2) = (-1 - (-1)) \cdot (-2) = 0$.

1.2 2^η Άσκηση

Να λυθεί το πρόβλημα μεγιστοποίησης:
$max\ f(x) = 2x_1 - x_2 - x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2 + 1$ για $-2 \leq x_1 \leq 2$ και $-2 \leq x_2 \leq 2$.

Στα στάσιμα σημεία:
$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - x_2 = 0 \iff x_2 = 2 - 2x_1.(1)$

$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = -1 - 2x_2 - x_1 = 0$ (2).
Αντικαθιστούμε την σχέση (1) στην (2) και έχουμε:
$-1 - 4 + 4x_1 - x_1 = 0 \iff x_1 = \frac{5}{3}$.

Συνεπώς $x_2 = -\frac{4}{3}$ (από τη σχέση (1)).

Υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης στο στάσιμο σημείο:
$f(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}) = \frac{10}{3} + \frac{4}{3} - \frac{25}{9} - \frac{16}{9} + \frac{20}{9} + 1 =$
$\frac{30}{9} + \frac{12}{9} - \frac{25}{9} - \frac{16}{9} + \frac{20}{9} + 1 = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}$.

Στα συνοριακά σημεία της περιοχής:

$f(-2,-2) = -4+2-4-4-4+1 = -13$
$f(2,2) = 4-2-4-4-4+1 = -9$.
$f(2,-2) = 4+2-4-4+4+1 = 3$
$f(-2,2) = -4-2-4-4+4+1 = -9$.

Συνεπώς το μέγιστο βρίσκεται στο σημείο $(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3})$. Το σημείο αυτό πληροί την αναγκαία συνθήκη για μέγιστο αφού οι πρώτες μερικές παράγωγοι σε αυτό το σημείο είναι ίσες με μηδέν.

1.3 3^η Άσκηση

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της:
$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 + 5$ υπό τη συνθήκη: $g(x) = 10 - x_1 - x_2 = 0$.

Η Λαγκρατζιανή $\mathcal{L}$ δίνεται από τον τύπο:
$\mathcal{L} = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 + 5 + \lambda(10 - x_1 - x_2)$.

Από τις συνθήκες πρώτης τάξης έχουμε:
$2x_1 - x_2 - \lambda = 0 \iff x_2 = 2x_1 - \lambda$.
$4x_2 - x_1 - \lambda = 0$
Αντικάθιστούμε την προηγούμενη εξίσωση και έχουμε $8x_1 - 4\lambda - x_1 - \lambda = 0 \iff 7x_1 - 5\lambda = 0$
$10 - x_1 - x_2 = 0 \iff x_1 = 10 - x_2$
Αντικαθιστούμε αυτήν την σχέση και την $\lambda = 2x_1 - x_2$ στην προηγούμενη και έχουμε
$70 - 7x_2 - 5(2(10 - x_2) - x_2) = 0 \iff 70 - 7x_2 - 5(20 - 3x_2) = 0 \iff -30 - 7x_2 + 15x_2 = 0 \iff -8x_2 = -30 \iff x_2 = \frac{15}{4}$. Συνεπώς $x_1 = \frac{25}{4}$.

Υπολογίζουμε την περιφραγμένη Εσσιανή μήτρα:
$f_1 = 2x_1 - x_2,\ f_2 = 4x_2 - x_1$.
$f_{11} = 2,\ f_{12} = f_{21} = -1,\ f_{22} = 4$.
$g_1 = -1,\ g_2 = -1,\ g_{11} = g_{12} = g_{21} = g_{22} = 0$.
$|H^*| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 3 = -8 < 0.$
Άρα έχουμε τοπικό ελάχιστο στο $(\frac{25}{4}, \frac{15}{4})$.
Το σχετικό διάγραμμα φαίνεται στο Σχήμα 1.

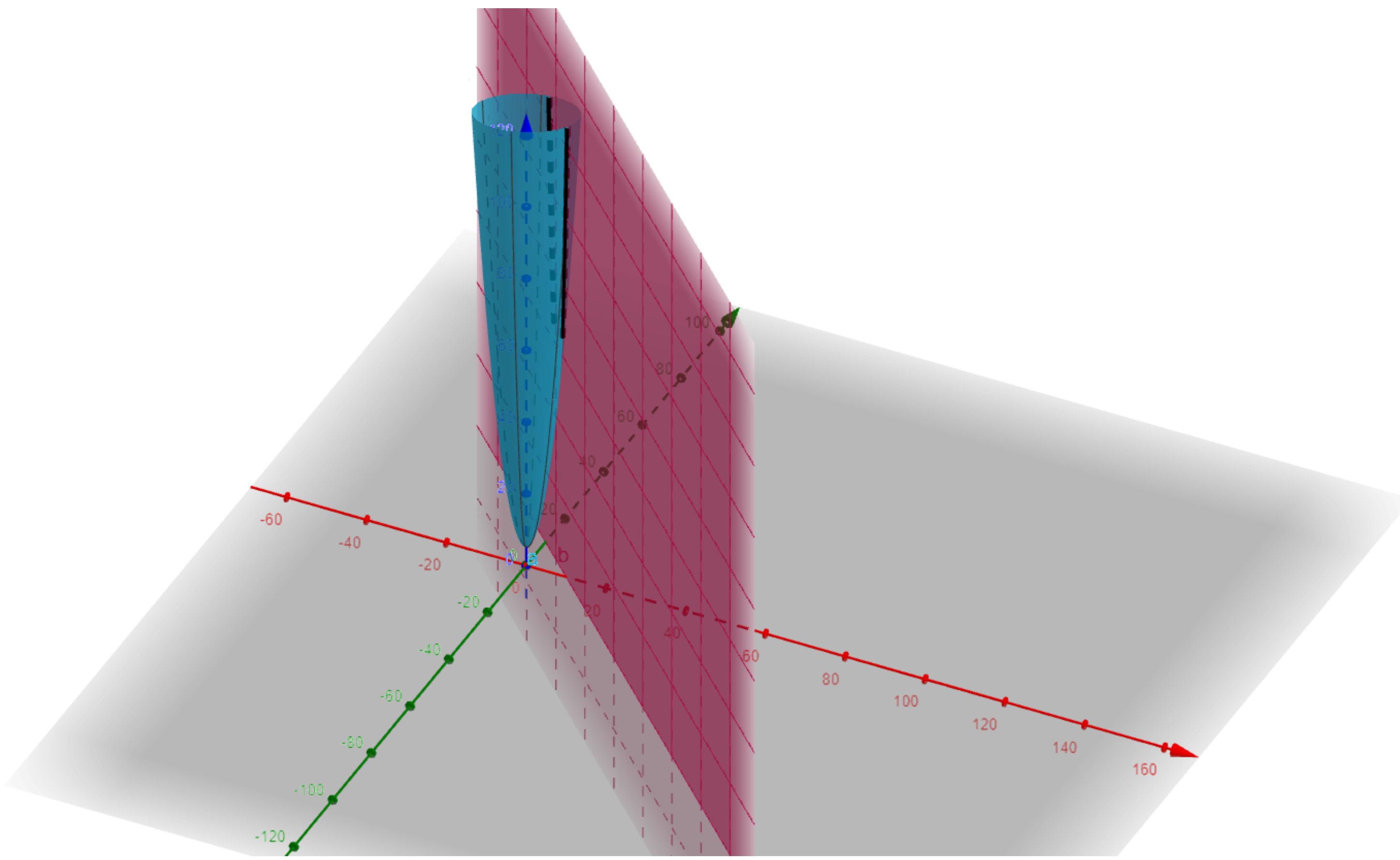
1.4 4^η Άσκηση

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της:
$f(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 + 5$ υπό τη συνθήκη: $g(x) = 10 - x_1 - x_2 = 0$.

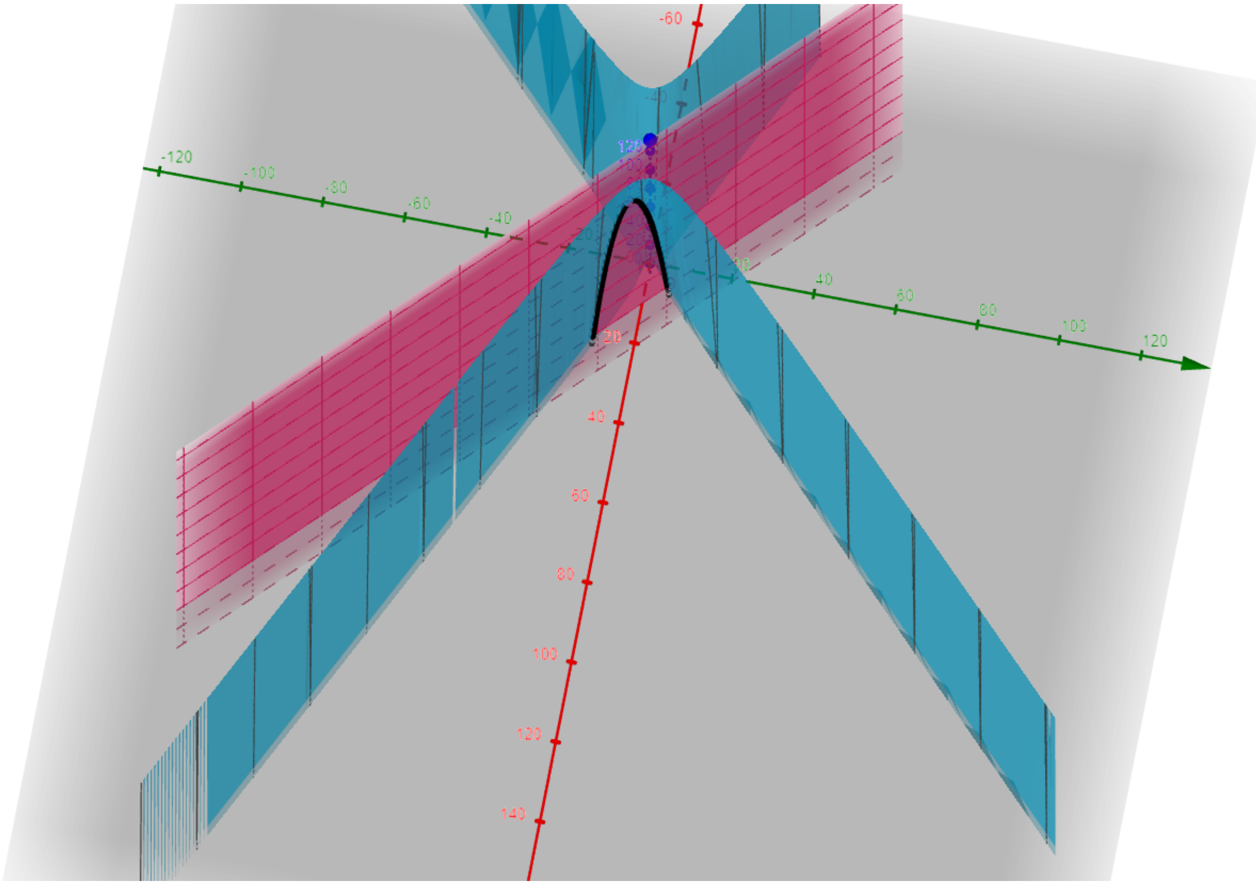
Η Λαγκρατζιανή $\mathcal{L}$ δίνεται από τον τύπο:
$\mathcal{L} = x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 + 5 + \lambda(10 - x_1 - x_2)$.

Από τις συνθήκες πρώτης τάξης έχουμε:
$2x_1 + x_2 - \lambda = 0.(1)$
$-4x_2 + x_1 - \lambda = 0.(2)$
$10 - x_1 - x_2 = 0.(3)$

Από την τελευταία σχέση έχουμε $x_1 = 10 - x_2.(4)$
Αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε $-4x_2 + 10 - x_2 - \lambda = 0 \iff \lambda = 10 - 5x_2$. (5).



Σχήμα 1: Το διάγραμμα για τη βελτιστοποίηση με περιορισμούς ισότητας της Άσκησης 3



Σχήμα 2: Το διάγραμμα για τη βελτιστοποίηση με περιορισμούς ισότητας της Άσκησης 4

Αντικαθιστώντας την (4) και την (5) στην (1) έχουμε:
$20 - 2x_2 + x_2 - 10 + 5x_2 = 0 \iff 10 + 4x_2 = 0 \iff x_2 = -\frac{5}{2}$ και από την (4) έχουμε $x_1 = \frac{25}{2}$.

Υπολογίζουμε την περιφραγμένη Εσσιανή μήτρα:
$f_1 = 2x_1 + x_2,\ f_2 = -4x_2 + x_1.$
$f_{11} = 2,\ f_{12} = f_{21} = 1,\ f_{22} = -4.$
$g_1 = -1,\ g_2 = -1,\ g_{11} = g_{12} = g_{21} = g_{22} = 0.$

$$|H^*| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 1 - 2 = 4 > 0.$$

Άρα έχουμε τοπικό μέγιστο στο $(-\frac{5}{2}, \frac{25}{2})$.
Το σχετικό διάγραμμα φαίνεται στο Σχήμα 2.

8^o φροντιστηριακό Μάθημα Μαθηματική Ανάλυση

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Δεκέμβριος 2022

1 Ασκήσεις σε εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης

1.1 1^η Άσκηση

Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας της εξίσωσης διαφορών

$$y_{t+1} = \frac{1}{4}y_t^2 - \frac{1}{2}$$

και να εξεταστούν ως προς την ευστάθεια.
Εξίσωση ισορροπίας:

$$\frac{1}{4}\bar{y}^2 - \bar{y} - \frac{1}{2} = 0$$

$\Delta = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Ρίζες: $\rho_1 = 2 + 2\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\rho_2 = 2 - 2\sqrt{\frac{3}{2}}$.
$f^{'}(\bar{y}) = \frac{1}{2}\bar{y}$.
$f^{'}(\rho_1) = 1+\sqrt{\frac{3}{2}} > 1$ συνεπώς είναι ασταθές. $f^{'}(\rho_2) = 1-\sqrt{\frac{3}{2}} > -1$ και αρνητικό, συνεπώς είναι ευσταθές.

1.2 2^η Άσκηση

Να βρεθεί η σταθερή κατάσταση της εξίσωσης διαφορών και να εξεταστεί ως προς την ευστάθεια:

$$y_{t+1} = \frac{1}{4}y_t + 10$$

$\bar{y} = \frac{1}{4}\bar{y} + 10 \iff \bar{y} = \frac{40}{3}$.
$\frac{1}{4}$ θετικό και μικρότερο της μονάδας, συνεπώς η εξίσωση διαφορών έχει ευστάθεια σε αυτό το σημείο.

1.3 3^η Άσκηση

Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης διαφορών: $y_{t+1} = -\frac{1}{2}y_t + 4$ αν $y_0 = 4$
$\bar{y} = -\frac{1}{2}\bar{y} + 4 \iff \bar{y} = \frac{8}{3}$

Συνεπώς: $y_t = C_1(-\frac{1}{2})^t + \frac{8}{3}$
$y_0 = 4 \iff 4 = C_1 + \frac{8}{3} \iff C_1 = \frac{4}{3}$.
Συνεπώς $y_t = \frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^t + \frac{8}{3}$

1.4 4^{η} Άσκηση

Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας της $y_{t+1} = y_t^{\frac{3}{4}}$ και να εξεταστούν ως προς την ευστάθεια.
Στο σημείο ισορροπίας

$$\bar{y} - \bar{y}^{\frac{3}{4}} = 0 \iff \bar{y}^{\frac{3}{4}}(\bar{y}^{\frac{1}{4}} - 1) = 0$$

Συνεπώς, τα σημεία ισορροπίας είναι το 0 και το 1.

$$f^{'}(\bar{y}) = \frac{3}{4}\bar{y}^{-\frac{1}{4}}$$

Στο $\bar{y} = 0$, απειρίζεται, άρα είναι ασταθές σημείο ισορροπίας.
Στο $\bar{y} = 1$, $f^{'}(\bar{y}) = \frac{3}{4}$, που είναι μικρότερο της μονάδας και μεγαλύτερο του μηδενός, συνεπώς είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας.

1.5 5^{η} Άσκηση

Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας της $y_{t+1} = y_t^2 - 1$ και να εξεταστούν ως προς την ευστάθεια.
Στο σημείο ισορροπίας $\bar{y}^2 - \bar{y} - 1 = 0$.
$\Delta = 5$, ρίζες $\rho_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\rho_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
$f^{'}(\bar{y}) = 2\bar{y}$. Στο ρ_1 η παράγωγος είναι $1 + \sqrt{5} > 1$ συνεπώς η εξίσωση διαφορών είναι τοπικά ασταθής σε αυτό το σημείο. Στο ρ_2 η παράγωγος είναι $1 - \sqrt{5} < -1$ συνεπώς η εξίσωση διαφορών είναι τοπικά ασταθής σε αυτό το σημείο.

1.6 6^{η} Άσκηση

Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης διαφορών: $y_{t+1} = y_t + 5$.
Η λύση είναι $y_t = C + 5t$.

9^o φροντιστήριο Μαθηματική Ανάλυση

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Δεκέμβριος 2022

1 Ασκήσεις σε εξισώσεις διαφορών δεύτερης τάξης

1.1 1^η Άσκηση

Να βρεθεί το σημείο ισορροπίας της $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 4y_t = 5$.
$\bar{y} = -5$.

1.2 2^η Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της $y_{t+2} - 5y_{t+1} + y_t = 0$.
$\Delta = 25 - 4 = 21$.
$\rho_1 = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$
$\rho_2 = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$
$y(t) = C_1(\frac{5-\sqrt{21}}{2})^t + C_2(\frac{5+\sqrt{21}}{2})^t$

1.3 3^η Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της $y_{t+2} - 7y_{t+1} + 5y_t = 0$.
$\Delta = 29$
$y(t) = C_1(\frac{7-\sqrt{29}}{2})^t + C_2(\frac{7+\sqrt{29}}{2})^t$

1.4 4^η Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της $y_{t+2} - 5y_{t+1} + y_t = 5$.
$\bar{y} - 5\bar{y} + \bar{y} = 5 \iff \bar{y} = -\frac{5}{3}$.
$y(t) = C_1(\frac{5-\sqrt{21}}{2})^t + C_2(\frac{5+\sqrt{21}}{2})^t - \frac{5}{3}$

1.5 5^η Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της $y_{t+2} - 7y_{t+1} + 5y_t = 10$
$\bar{y} = -10$
$y(t) = C_1(\frac{7-\sqrt{29}}{2})^t + C_2(\frac{7+\sqrt{29}}{2})^t - 10$

1.6 6^η Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 3y_t = 5$
$\bar{y} = \frac{5}{2}$.
$\Delta = 4 - 12 = -8$
$\rho_1 = \frac{2-2\sqrt{2}i}{2} = 1 - \sqrt{2}i$
$\rho_2 = \frac{2+2\sqrt{2}i}{2} = 1 + \sqrt{2}i$
$R = \sqrt{3}$, $h = 1$, $v = \sqrt{2}$
$cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $sin(\theta) = \sqrt{\frac{2}{3}}$
$y(t) = (\sqrt{3})^t (C_1 cos(0.955t) + C_2 sin(0.955t)) + \frac{5}{2}$.

1.7 7^η Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της $y_{t+2} - 5y_{t+1} + y_t = 4t$.
Βρίσκουμε την μερική λύση και ακόμη τη λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης.
Θέτουμε $y_t^* = A_0 + A_1 t$
Τότε: $A_0 + A_1(t+2) - 5(A_0 + A_1(t+1)) + A_0 + A_1 t = 4t$.
Συνεπώς: $-3A_0 - 3A_1 = 0 \iff A_0 = -A_1$.
Έχουμε $(A_1 - 5A_1 + A_1)t = 4t \iff -3A_1 t = 4t \iff A_1 = -\frac{4}{3}$
Συνεπώς $A_0 = \frac{4}{3}$
$y(t) = C_1 (\frac{5-\sqrt{21}}{2})^t + C_2 (\frac{5+\sqrt{21}}{2})^t - \frac{4t}{3} + \frac{4}{3}$.

1.8 8^η Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 3y_t = 5$.
Βρίσκουμε πρώτα τις λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης:
$\Delta = 16 - 12 = 4$
$\rho_1 = \frac{4+2}{2} = 3$
$\rho_2 = \frac{4-2}{2} = 1$.

Συνεπώς, η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι:
$y_h(t) = C_1 3^t + C_2$.

Θέλουμε να βρούμε μία μερική λύση, αλλά παρατηρούμε ότι $1 + a_1 + a_2 = 1 - 4 + 3 = 0$. Επομένως, θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των απροσδιορίστων συντελεστών.

Επειδή η b_t σε αυτήν την περίπτωση είναι μία σταθερά ($b_t = 5$), πρώτα θα δοκιμάσουμε μία λύση αυτής της μορφής, δηλαδή $y_p = A$.

Όμως, αυτή είναι όμοια με τον όρο C_2 της ομογενούς λύσης, γιαυτό και θα δοκιμάσουμε τη λύση $y_p = At$.

Η μερική λύση πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση διαφορών και αυτό το χρησιμοποιούμε για να επιλύσουμε ως προς A:

$$A(t+2) - 4A(t+1) + 3At = 5 \iff -2A = 5 \iff A = -\frac{5}{2}$$

.

Συνεπώς, η γενική λύση της πλήρους εξίσωσης είναι:

$$y_t = C_1 3^t + C_2 - \frac{5}{2}t$$

.

10^o φροντιστηριακό μάθημα Μαθηματική Ανάλυση

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Δεκέμβριος 2022

1 Ασκήσεις σε διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

1.1 1^η Άσκηση

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση: $\dot{y} - 4y = 0$.
$\dot{y} = 4y \iff \frac{\dot{y}}{y} = 4 \iff \int \frac{\dot{y}}{y} dt = 4t + c_1$
$\iff \int \frac{dy/dt}{y} dt = 4t + c_1 \iff \int \frac{1}{y} dy = 4t + c_1$
$\iff lny + c_2 = 4t + c_1$
$y = e^{4t+c_1-c_2} = Ce^{4t}$

1.2 2^η Άσκηση

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση $\dot{y} + 2y = 4$.
Η αντίστοιχη ομογενής διαφορική εξίσωση είναι η $\dot{y} + 2y = 0$ και η λύση της ομογενούς είναι $y_h(t) = Ce^{-2t}$.
Για το σημείο ισορροπίας ισχύει ότι $0 + 2\bar{y} = 4 \iff \bar{y} = 2$.
Συνεπώς η γενική λύση της συνολικής διαφορικής εξίσωσης είναι:
$y(t) = Ce^{-2t} + 2$.

1.3 3^η Άσκηση

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση: $\dot{y} = y - 4$, ώστε να ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = 2$.

Η λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι:
$y_h(t) = Ce^t$.
Το σημείο ισορροπίας είναι το $\bar{y} = 4$.
$y(0) = 2 \iff C + 4 = 2 \iff C = -2$.
Συνεπώς η γενική λύση της συνολικής διαφορικής εξίσωσης είναι:
$y(t) = -2e^t + 4$.

1.4 4^η Άσκηση

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση $\dot{y} = -y - 2$ ώστε να ικανοποιεί την $y(0) = 4$ και να εξεταστεί ως προς την ευστάθεια.
Η λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι η $y_h(t) = Ce^{-t}$.
Το σημείο ισορροπίας είναι το $\bar{y} = -2$.
Συνεπώς η λύση της συνολικής διαφορικής εξίσωσης μπορεί να εκφραστεί ως:
$y(t) = Ce^{-t} - 2$.
Η αρχική συνθήκη μας δίνει $y(0) = 4 \iff C - 2 = 4 \iff C = 6$
Συνεπώς: $y(t) = 6e^{-t} - 2$ η οποία συγκλίνει στην σταθερή κατάσταση $\bar{y} = -2$.

1.5 5^η Άσκηση

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση $\dot{y} = y + 4$ ώστε να ικανοποιεί την $y(0) = 8$ και να εξεταστεί ως προς την ευστάθεια.
Η λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι η $y_h(t) = Ce^t$.
Το σημείο ισορροπίας είναι το $\bar{y} = -4$.
Συνεπώς η λύση της συνολικής διαφορικής εξίσωσης μπορεί να εκφραστεί ως:
$y(t) = Ce^t - 4$.
Η αρχική συνθήκη μας δίνει $y(0) = 8 \iff C - 4 = 8 \iff C = 12$.
Συνεπώς $y(t) = 12e^t - 4$ η οποία αποκλίνει από την σταθερή κατάσταση $\bar{y} = -4$.

1.6 6^η Άσκηση

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:
$xy^{'} + xy = 2e^{-x}$, $x > 0$
Διαιρούμε με x και έχουμε $y^{'} + y = \frac{2e^{-x}}{x}$.
Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι ο $I = exp[\int dx] = e^x$.
Πολλαπλασιάζουμε με τον ολοκληρωτικό παράγοντα και έχουμε:
$e^x y^{'} + e^x y = \frac{2}{x}$ ή
$(e^x y)^{'} = \frac{2}{x}$

ισοδύναμα $e^x y = \int \frac{2}{x} dx$ ή $e^x y = 2lnx + C$
Διαιρούμε με e^x και η τελική λύση είναι $y = \frac{2lnx}{e^x} + \frac{C}{e^x}$.

1.7 7^η Άσκηση

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:
$xy^{'} + (1+x)y = 1$, $x > 0$
Διαιρούμε με x: $y^{'} + \frac{1+x}{x} y = \frac{1}{x}$.
Ο ολοκληρωτικής παράγοντας είναι $I = exp[\int \frac{1+x}{x} dx] = exp[\int \frac{1}{x} dx + \int dx] = exp[lnx + x] = xe^x$.
Πολλαπλασιάζουμε με τον ολοκληρωτικό παράγοντα και έχουμε:
$xe^x y^{'} + \frac{1+x}{x} xe^x y = e^x \iff (xe^x y)^{'} = e^x$.
Συνεπώς $xe^x y = e^x + C$. Άρα $y = \frac{1}{x} + \frac{C}{xe^x}$.

1.8 8^η Άσκηση

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:
$x\frac{dy}{dx} = 2y$: $x, y > 0$.
$x\frac{dy}{dx} = 2y \implies \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x} \implies ln(y) = Cln(x^2) \implies y = C_1 x^2$.

1.9 9^η Άσκηση

Η εξίσωση Bernoulli έχει τη μορφή:

$$y^{'} + P(x)y = R(x)y^a$$

Λύνεται κάνοντας την αντικατάσταση $v = y^{1-a}$.
Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε την παρακάτω εξίσωση: $y^{'} + \frac{1}{x} y = 3x^2 y^3$ (1)
Τότε $P(x) = \frac{1}{x}, R(x) = 3x^2, a = 3$
Κάνουμε την αντικατάσταση $v = y^{-2}$ ή $y = v^{-\frac{1}{2}}$
Τότε $y^{'}(x) = -\frac{1}{2} v^{-\frac{3}{2}} v^{'}$
Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (1) και έχουμε:

$$-\frac{1}{2} v^{-\frac{3}{2}} v^{'} + \frac{1}{x} v^{-\frac{1}{2}} = 3x^2 v^{-\frac{3}{2}}$$

Πολλαπλασιάζουμε με $-2v^{\frac{3}{2}}$ και έχουμε:

$$v^{'} - \frac{2}{x} v = -6x^2$$

Αυτή είναι γραμμική εξίσωση και ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι:

$$e^{\int -(2/x)dx} = e^{-2lnx} = e^{ln(x^{-2})} = x^{-2}$$

Πολλαπλασιάζουμε με τον ολοκληρωτικό παράγοντα και έχουμε:

$$x^{-2}v^{'} - 2x^{-3}v = -6 \iff (x^{-2}v)^{'} = -6 \iff x^{-2}v = -6x + c \iff v = -6x^3 + cx^2$$

Όμως: $y(x) = v^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{cx^2 - 6x^3}}$

1.10 10^{η} Άσκηση

Η εξίσωση Ricatti έχει τη μορφή:

$$y^{'} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

Αν μία λύση είναι η $S(x)$ κάνουμε τον μετασχηματισμό

$$y = S(x) + \frac{1}{z}$$

Για παράδειγμα, έστω η εξίσωση:

$$y^{'} = \frac{1}{x}y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{2}{x}$$

Έχει ως μία λύση την $S(x) = 1$, άρα κάνουμε τον μετασχηματισμό $y = 1 + \frac{1}{z}$.
Συνεπώς $y^{'} = -\frac{1}{z^2}z^{'}$. Άρα: $-\frac{1}{z^2}z^{'} = \frac{1}{x}(1 + \frac{1}{z})^2 + \frac{1}{x}(1 + \frac{1}{z}) - \frac{2}{x} \iff$
$-\frac{1}{z^2}z^{'} = \frac{1}{x}(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z}) + \frac{1}{x}(1 + \frac{1}{z}) - \frac{2}{x} \iff z^{'} = -\frac{z^2}{x} - \frac{1}{x} - 2z\frac{1}{x} - \frac{z^2}{x} - \frac{z}{x} + \frac{2z^2}{x} \iff$
$z^{'} = -\frac{3}{x}z - \frac{1}{x} \iff z^{'} + \frac{3}{x}z = -\frac{1}{x}$
Αυτή είναι μία γραμμική διαφορική εξίσωση. Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι:

$$e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3lnx} = e^{lnx^3} = x^3$$

Πολλαπλασιάζοντας με τον ολοκληρωτικό παράγοντα έχουμε:

$$x^3z^{'} + 3x^2z = -x^2 \iff (x^3z)^{'} = -x^2 \iff x^3z = -\frac{x^3}{3} + c \iff z = -\frac{1}{3} + \frac{c}{x^3}$$

Όμως $y = 1 + \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{-\frac{1}{3} + \frac{c}{x^3}} = 1 + \frac{3x^3}{-x^3 + 3c} = \frac{-x^3 + 3c + 3x^3}{3c - x^3} = \frac{3c + 2x^3}{3c - x^3}$
Θέτοντας $k = 3c$, έχουμε $y(x) = \frac{k + 2x^3}{k - x^3}$

11^o φροντιστήριο Μαθηματική Ανάλυση

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Ιανουάριος 2023

1 Ασκήσεις σε διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

1.1 1^η Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της $\ddot{y} + 2\dot{y} - y = 0$.
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 + 2r - 1 = 0$.
Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 4 + 4 = 8$ και συνεπώς οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι $r_{1,2} = \frac{-2\pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$.
Συνεπώς, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:
$y(t) = C_1 e^{(-1+\sqrt{2})t} + C_2 e^{(-1-\sqrt{2})t}$.

1.2 2^η Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της $\ddot{y} + 2\dot{y} + 4y = 0$.
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 + 2r + 4 = 0$.
Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 4 - 16 = -12$.
Συνεπώς, οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι:
$r_{1,2} = \frac{-2\pm 2\sqrt{3}i}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$
$h = -1$, $v = \sqrt{3}$.
Άρα: $y(t) = A_1 e^{-t} cos(\sqrt{3}t) + A_2 e^{-t} sin(\sqrt{3}t)$.

1.3 3^η Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της $\ddot{y} + 4\dot{y} - y = 4$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 + 4r - 1 = 0$.
Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 16 + 4 = 20$.
Συνεπώς, οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι:
$r_{1,2} = \frac{-4\pm 2\sqrt{5}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$.
Το σημείο ισορροπίας είναι $\bar{y} = -4$.
Συνεπώς $y(t) = C_1 e^{(-2+\sqrt{5})t} + C_2 e^{(-2-\sqrt{5})t} - 4$ και η συνάρτηση αποκλίνει από το σταθερό σημείο $\bar{y} = -4$.

1.4 4^η Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 20$.
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 - 2r + 1 = 0$.
Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 4 - 4 = 0$, συνεπώς έχουμε διπλή ρίζα την $r_{1,2} = 1$.
Το σημείο ισορροπίας είναι το $\bar{y} = 20$.
Συνεπώς $y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + 20$ και το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές.

1.5 5^η Άσκηση

Να βρεθεί η λύση της $\ddot{y} - 4\dot{y} + \frac{7}{4}y = 20$ όταν $y(0) = 10$ και $\dot{y}(0) = 4$
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 - 4r + \frac{7}{4} = 0$.
Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 16 - 7 = 9$.
Άρα $r_{1,2} = \frac{4\pm3}{2}$ και συνεπώς $r_1 = \frac{7}{2}$ και $r_2 = \frac{1}{2}$.
Το σημείο ισορροπίας είναι το $\bar{y} = \frac{80}{7}$.
Άρα $y(t) = C_1 e^{\frac{7}{2}t} + C_2 e^{\frac{1}{2}t} + \frac{80}{7}$
και $\dot{y}(t) = \frac{7}{2}C_1 e^{\frac{7}{2}t} + \frac{1}{2}C_2 e^{\frac{1}{2}t}$.
$y(0) = 10 \iff C_1 + C_2 + \frac{80}{7} = 10 \iff C_1 = -C_2 - \frac{10}{7}$.
$\dot{y}(0) = 4 \iff -\frac{7}{2}C_2 - 5 + \frac{1}{2}C_2 = 4 \iff -3C_2 = 9 \iff C_2 = -3$.
Συνεπώς $C_1 = 3 - \frac{10}{7} = \frac{11}{7}$ και
$y(t) = \frac{11}{7}e^{\frac{7}{2}t} - 3e^{\frac{1}{2}t} + \frac{80}{7}$

1.6 6^η Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = t$.
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $r^2 - 2r + 1 = 0$.
Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 4 - 4 = 0$.
Άρα έχουμε διπλή ρίζα την $r_{1,2} = 1$.
Η μερική λύση θα είναι της μορφής $y_p = A_0 + A_1 t$.
$\frac{dy_p}{dt} = A_1$ και $\frac{d^2y_p}{dt} = 0$.
Συνεπώς $-2A_1 + A_0 + A_1 t = t$ και άρα $A_1 = 1$ και $-2A_1 + A_0 = 0 \iff A_0 = 2A_1$ και συνεπώς $A_0 = 2$.
Άρα η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής:
$y(t) = C_1 te^t + C_2 e^t + t + 2$.

1.7 7^η Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\ddot{y} + 3\dot{y} - 4y = 10$.
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $r^2 + 3r - 4 = 0$.
Η διακρίνουσα είναι ίση με $\Delta = 9 + 16 = 25$ και οι ρίζες:
$r_{1,2} = \frac{-3\pm5}{2}$. Συνεπώς $r_1 = -4$ και $r_2 = 1$.
Για το σημείο ισορροπίας ισχύει $-4\bar{y} = 10 \iff \bar{y} = -\frac{5}{2}$. Άρα η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής:
$y(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^t - \frac{5}{2}$.

1.8 8^η Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\ddot{y} - \dot{y} + 2y = 5$.
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $r^2 - r + 2 = 0$.
Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 1 - 8 = -7$ και οι ρίζες:
$r_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$.
Για το σημείο ισορροπίας ισχύει $2\bar{y} = 5 \iff \bar{y} = \frac{5}{2}$.
$h = \frac{1}{2}$ και $v = \frac{\sqrt{7}}{2}$.
Συνεπώς η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής:
$y(t) = C_1 e^{\frac{t}{2}} cos(\frac{\sqrt{7}}{2}t) + C_2 e^{\frac{t}{2}} sin(\frac{\sqrt{7}}{2}t) + \frac{5}{2}$

Τελευταίο φροντιστήριο Μαθηματική Ανάλυση

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Ιανουάριος 2023

1 Ασκήσεις σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων $1^{\eta\varsigma}$ τάξης

1.1 1^{η} Άσκηση

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} y$$

$|rI - A| = \begin{vmatrix} r-2 & -4 \\ -1 & r-2 \end{vmatrix} = (r-2)^2 - 4 = r^2 - 4r$

Ρίζες $r_1 = 0$ και $r_2 = 4$.

Για την πρώτη ρίζα έχουμε:
$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = 0 \implies -2k_1 - 4k_2 - k_1 - 2k_2 = 0 \iff 6k_2 = -3k_1 \iff k_2 = -\frac{k_1}{2}$.
Θέτουμε $k_1 = 1$ και συνεπώς $k_2 = -\frac{1}{2}$.
Άρα το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην πρώτη ρίζα είναι:
$y_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Για την $r_2 = 4$ έχουμε:
$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = 0 \implies 2k_1 - 4k_2 - k_1 + 2k_2 = 0 \iff k_2 = \frac{1}{2}k_1$.
Θέτοντας $k_1 = 1$ έχουμε:
$k_1 = 1$ και $k_2 = \frac{1}{2}$.
Άρα το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη δεύτερη ρίζα είναι:
$y_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Συνεπώς:
$y(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{4t}$

1.2 2^η Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση στο παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} y$$

Βρίσκουμε πρώτα τις ιδιοτιμές:

$|rI - A| = \begin{vmatrix} r-2 & 1 \\ -8 & r+2 \end{vmatrix} = r^2 - 4 + 8 = r^2 + 4$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι: $r_{1,2} = \pm 2i$.

Για την πρώτη ιδιοτιμή $r_1 = 2i$ (στην περίπτωση των μιγαδικών ιδιοτιμών μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε απο τις δύο) έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 2i-2 & 1 \\ -8 & 2i+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = 0 \implies$$

$$(2i-2)k_1 + k_2 - 8k_1 + (2i+2)k_2 = 0 \iff$$

$$(2i-10)k_1 + (2i+3)k_2 = 0 \iff$$

$$k_2 = \frac{10-2i}{2i+3}k_1 = \frac{(10-2i)(3-2i)}{13}k_1 = \frac{30-26i+4i^2}{13}k_1 = \frac{26-26i}{13}k_1 = (2-2i)k_1.$$

Επιλέγουμε $k_1 = 1$ για ευκολία, οπότε έχουμε $k_2 = 2-2i$, και άρα το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην $r = 2i$ είναι το

$$k = \begin{bmatrix} 1 \\ 2-2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2i \end{bmatrix}$$

Η μιγαδική λύση που προκύπτει είναι:

$$y(t) = e^{2it} \cdot k = (cos(2t) + isin(2t)) \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

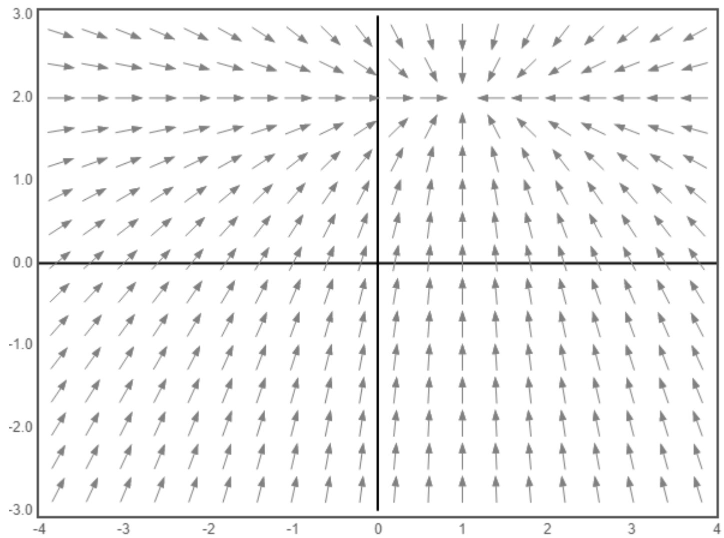
Χωρίζουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος και έχουμε τις δύο βασικές λύσεις του συστήματος:

$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} cos(2t) - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} sin(2t) = \begin{bmatrix} cos(2t) \\ 2cos(2t) + 2sin(2t) \end{bmatrix}$

$y^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} cos(2t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} sin(2t) = \begin{bmatrix} sin(2t) \\ -2cos(2t) + 2sin(2t) \end{bmatrix}$

Τελικά, η γενική λύση του συστήματος είναι:

$$y(t) = C_1 y^{(1)} + C_2 y^{(2)} = C_1 \begin{bmatrix} cos(2t) \\ 2cos(2t) + 2sin(2t) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} sin(2t) \\ -2cos(2t) + 2sin(2t) \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 1: Διάγραμμα φάσης για το πρώτο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που δίνεται στην 3^η άσκηση.

1.3 3^η Άσκηση

Να γίνει το διάγραμμα φάσης για το σύστημα εξισώσεων:
$\dot{y}_1 = -y_1 + 1$
$\dot{y}_2 = -2y_2 + 4$
Οι διαφορικές εξισώσεις είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη και οι λύσεις είναι:

$$y_1(t) = C_1 e^{-t} + 1$$

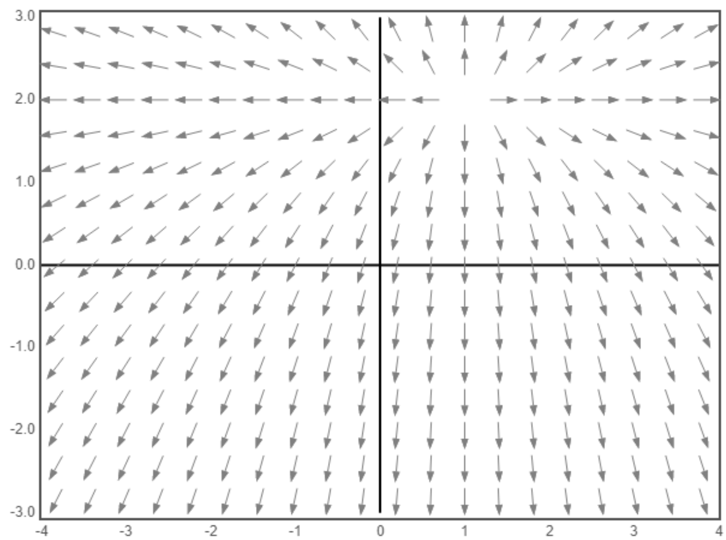
$$y_2(t) = C_2 e^{-2t} + 2$$

1.4 4^η Άσκηση

Να γίνει το διάγραμμα φάσης για το σύστημα εξισώσεων:
$\dot{y}_1 = y_1 - 1$
$\dot{y}_2 = 2y_2 - 4$
Οι διαφορικές εξισώσεις είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη και οι λύσεις είναι:

$$y_1(t) = C_1 e^{t} + 1$$

$$y_2(t) = C_1 e^{2t} + 2$$



Σχήμα 2: Διάγραμμα φάσης για το δεύτερο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που δίνεται στην 4^{η} άσκηση.

1.5 5^{η} Άσκηση

Να γίνει το διάγραμμα φάσης για το σύστημα εξισώσεων:
$\dot{y}_1 = 2y_2 - 2$
$\dot{y}_2 = y_1 - 1$
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} 0 - r & 2 \\ 1 & 0 - r \end{vmatrix}$$

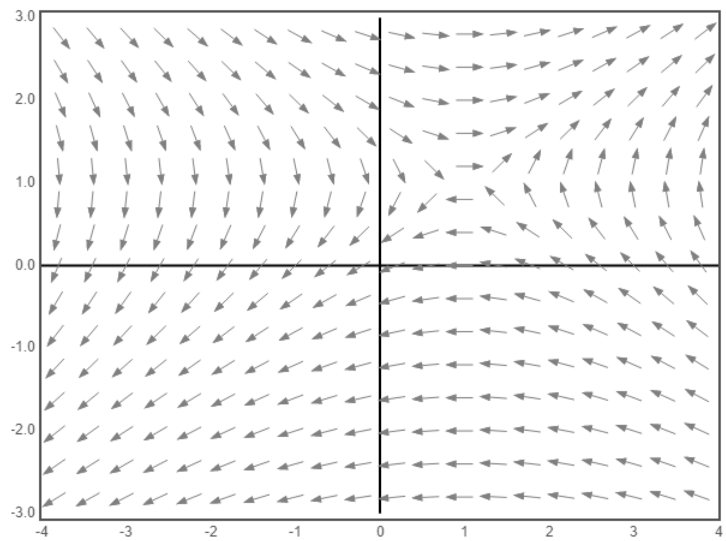
Με ρίζες $r_1 = \sqrt{2}$ και $r_2 = -\sqrt{2}$. Δεδομένου ότι οι ρίζες έχουν αντίθετο πρόσημο, η λύση σταθερής κατάστασης είναι μία ισορροπία σαγματικού σημείου. Οι λύσεις σταθερής κατάστασης είναι $\bar{y}_1 = 1$ και $\bar{y}_2 = 1$.

1.6 6^{η} Άσκηση

Να γίνει το διάγραμμα φάσης για το σύστημα εξισώσεων:
$\dot{y}_1 = -y_2 + 2$
$\dot{y}_2 = y_1 - y_2 + 1$
Τότε

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} 0 - r & -1 \\ 1 & -1 - r \end{vmatrix}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 + r + 1 = 0$, $\Delta = 1 - 4 = -3$.
Οι ρίζες είναι $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Οι λύσεις σταθερής κατάστασης είναι $\bar{y}_1 = 1$ και



Σχήμα 3: Διάγραμμα φάσης για το τρίτο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που δίνεται στην 5^η άσκηση.

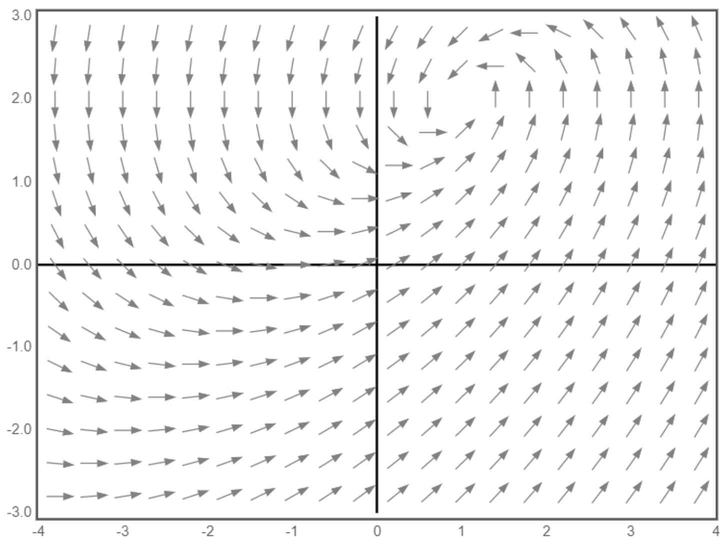
$\bar{y}_2 = 2$

1.7 7^η Άσκηση

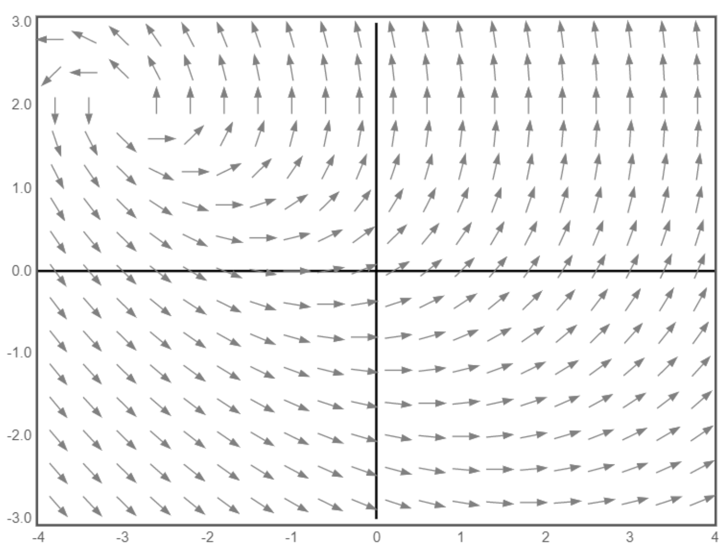
Να γίνει το διάγραμμα φάσης για το σύστημα εξισώσεων:
$\dot{y}_1 = -y_2 + 2$
$\dot{y}_2 = y_1 + y_2 + 1$
Τότε

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} 0 - r & -1 \\ 1 & 1 - r \end{vmatrix}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 - r + 1$, $\Delta = 1 - 4 = -3$.
Οι ρίζες είναι $r_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.
Οι λύσεις σταθερής κατάστασης είναι $\bar{y}_1 = -3$ και $\bar{y}_2 = 2$



Σχήμα 4: Διάγραμμα φάσης για το τέταρτο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που δίνεται στην 6^{η} άσκηση.



Σχήμα 5: Διάγραμμα φάσης για το πέμπτο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που δίνεται στην 7^{η} άσκηση.