Μαθηματική Ανάλυση
Διάλεξη 1

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Σπύρος Χαλκίδης
Ε.ΔΙ.Π.

Οκτώβριος 2022

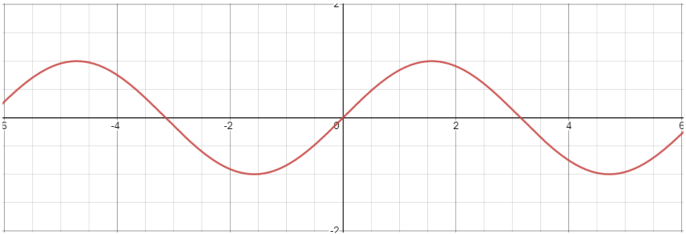
Θέματα 1ης διάλεξης

- Βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- Μιγαδικοί αριθμοί
- Αόριστα ολοκληρώματα
- Ορισμένα ολοκληρώματα

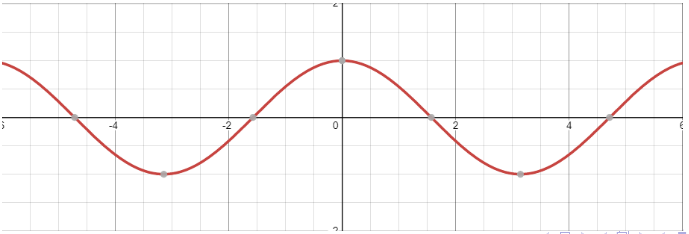
Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

- Ημίτονο ($\sin x$) $\sin(x+T) = \sin(x)$



- Συνημίτονο ($\cos x$)

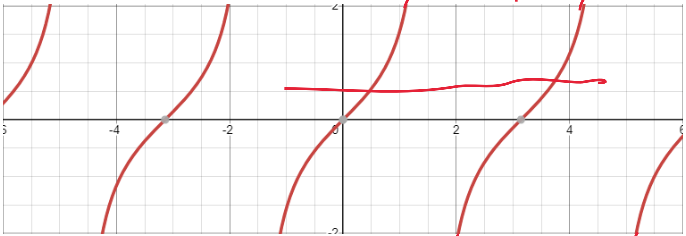


Τριγωνομετρικές συναρτήσεις tangent

- Εφαπτομένη $\left(\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}\right)$

$\tan'(x)$

$\tan : \mathbb{R} - \{x : \kappa\pi + \frac{\pi}{2}\}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

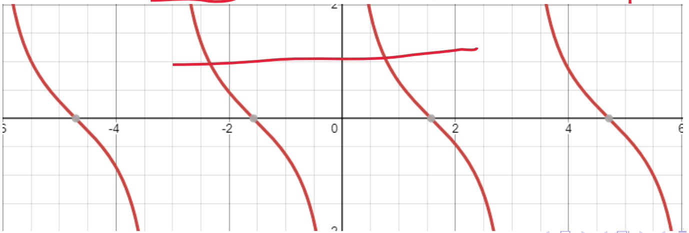


$T = \pi$

- Συνεφαπτομένη $\left(\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}\right)$

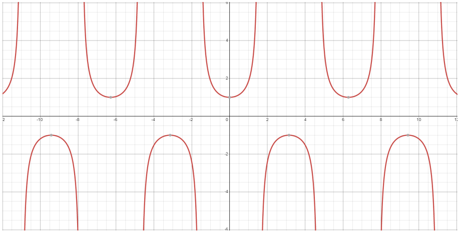
$\cot'(x)$

$\cot : \mathbb{R} - \{x : \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}\}$

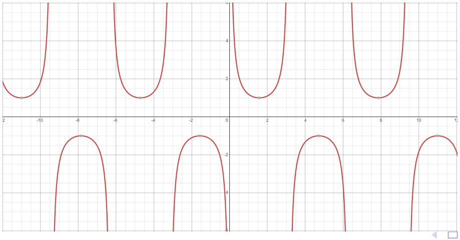


Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- Τέμνουσα $\left(\sec x = \dfrac{1}{\cos x}\right)$



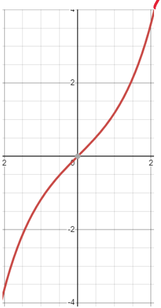
- Συντέμνουσα $\left(\csc x = \dfrac{1}{\sin x}\right)$



Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

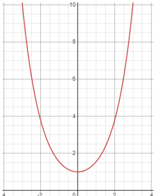
- Τόξο ημιτόνου (arcsin x) $\sin^{-1}(x)$ $\eta\mu^{-1}(x)$

$\arcsin x : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



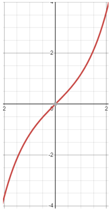
- Τόξο συνημιτόνου (arccos x) $= \cos^{-1}(x) = \sigma\upsilon\nu^{-1}(x)$

$\arccos x : [-1,1] \to [0,\pi]$



Υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- Υπερβολικό ημίτονο ($\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$)



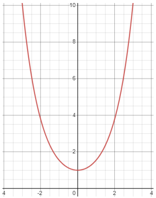
$\sinh + \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} =$

$= \frac{2e^x}{2} = e^x$

π

e

- Υπερβολικό συνημίτονο ($\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$)



Ορισμός μιγαδικών αριθμών

Ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να ορισθεί ως ένα διατεταγμένο ζεύγος:

$$z = (\overset{\text{Re}}{x}, \overset{\text{Im}}{y}), \text{ όπου } x, y \in \mathbb{R}$$

με τις πράξεις της πρόσθεσης:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

και πολλαπλασιασμού:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Οι πραγματικοί αριθμοί στην έκφραση $z = (x, y)$ είναι γνωστοί ως το *πραγματικό* και *φανταστικό* μέρος του z, και συμβολίζονται ως:

$$\mathrm{Re}(z) = x, \ \mathrm{Im}(z) = y$$

Συμβολισμός μιγαδικών αριθμών

Εάν συμβολίσουμε έναν πραγματικό άριθμό x ως $(x, 0)$ και τον φανταστικό αριθμό $(0, 1)$ με i, τότε ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως:

$(0,1) \to i$

$(0,y) = (0,1\cdot y) = iy$

$$(x, y) = x + iy = x + y\,i$$

Επιπλέον, βάσει των ορισμών, ισχύει:

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = \underbrace{-1}_{Re} + \underbrace{i0}_{Im}$$

δηλαδή

$$i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

Βάσει αυτού του συμβολισμού, η πρόσθεση και πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών διαμορφώνονται ως:

$$\underbrace{(x_1 + iy_1)}_{z_1} + \underbrace{(x_2 + iy_2)}_{z_2} = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot iy_2 + iy_1 x_2 + iy_1 \cdot iy_2 = x_1 \cdot x_2 - y_1 y_2 \quad iy_1 y_2 + iy_1 x_2$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = \underbrace{(x_1x_2 - y_1y_2)}_{Re} + \underbrace{i(x_1y_2 + y_1x_2)}_{Im}$$

$iy_1 \cdot iy_2 = i\,i\,y_1 y_2 =$

$= i^2 y_1 y_2 = -1 y_1 y_2$

Παράδειγμα - Δευτεροβάθμια εξίσωση

Για την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $x^2 - x + 1 = 0$, παρατηρούμε ότι η διακρίνουσα είναι αρνητική:

$$\Delta = 1 - 4 = -3$$

Δεν υπάρχει λύση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, αλλά στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών υπάρχουν οι λύσεις:

$= \sqrt{3(-1)} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{3} \cdot i$

$$\rho_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3} i}{2}$$

Αλγεβρικές ιδιότητες

- Αντιμεταθετική
$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, z_1 z_2 = z_2 z_1$$
- Προσεταιριστική
$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$$
- Επιμεριστική
$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$
- Προσθετικό ταυτοτικό στοιχείο $0 = (0, 0)$ και πολλαπλασιαστική μονάδα $1 = (1, 0)$
$$z + 0 = z, z \cdot 1 = z$$
- Προσθετικό αντίστροφο στοιχείο $-z = (-x, -y)$
$$z + (-z) = 0$$
- Πολλαπλασιαστικό αντίστροφο στοιχείο $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ για $z = x + iy \neq 0$
$$zz^{-1} = 1$$

Άσκηση

Εάν $z = x + iy \neq 0$, αποδείξτε ότι το πολλαπλασιαστικό αντίστροφο στοιχείο του z είναι το $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

Λύση

Για να βρούμε το πολλαπλασιαστικό αντίστροφο στοιχείο του $z = x + iy$, θα πρέπει να αναζητήσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς, έστω u και v έτσι ώστε:

$z \cdot z^{-1} = 1 = 1 + 0i$

$$(x + iy)(\underline{u + iv}) = 1 + i0$$

Αναλύοντας το αριστερό μέλος της εξίσωσης, έχουμε:

$$(x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu) = 1 + i0$$

Για να είναι οι δύο μιγαδικοί αριθμοί ίσοι, θα πρέπει τα πραγματικά και φανταστικά τους μέρη να είναι ίσα. Επομένως:

$$xu - yv = 1 \text{ και } xv + yu = 0$$

Εάν επιλύσουμε το γραμμικό αυτό σύστημα (άγνωστοι τα u, v) τότε παίρνουμε:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

Διαίρεση μιγαδικών αριθμών

Η διαίρεση με έναν μη-μηδενικό μιγαδικό αριθμό ορίζεται ως:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}, z_2 \neq 0$$

ή (εάν $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$):

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) + i \left(\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

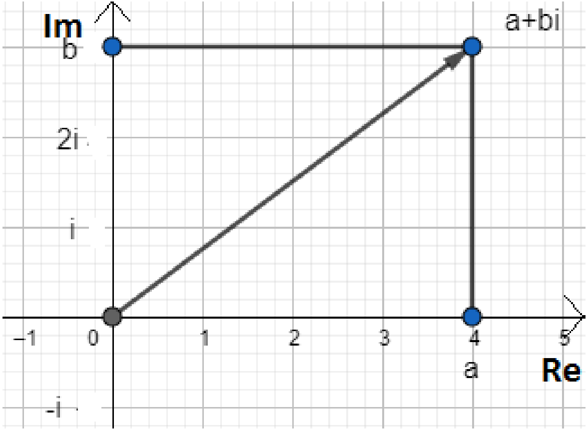
Άλλες ιδιότητες της διαίρεσης που μπορούν εύκολα να προκύψουν:

- $(z_1 z_2)(z_1^{-1} z_2^{-1}) = (z_1 z_1^{-1})(z_2 z_2^{-1}) = 1$, για $z_1, z_2 \neq 0$
- $\frac{1}{z_1 z_2} = \left(\frac{1}{z_1}\right)\left(\frac{1}{z_2}\right)$, για $z_1, z_2 \neq 0$
- $\frac{z_1 + z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}$, $\frac{z_1 z_2}{z_3 z_4} = \left(\frac{z_1}{z_3}\right)\left(\frac{z_2}{z_4}\right)$, για $z_3, z_4 \neq 0$

Ισομορφισμός με το $\mathbb{R}^2$

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{C}$.

Το $\mathbb{C}$ είναι ισόμορφο με το $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{I}$). Έτσι μπορούμε να κατάλαβουμε διαισθητικά καλύτερα το νοήμά του:



Σχήμα: Ισομορφισμός του $\mathbb{C}$ με το $\mathbb{R}^2$

Μέτρο μιγαδικού αριθμού

Ως μέτρο ή απόλυτη τιμή ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ ορίζεται η ποσότητα:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Γεωμετρικά, το μέτρο εκφράζει την απόσταση του σημείου (x, y) από την αρχή των αξόνων. Εάν $y = 0$, τότε το μέτρο συμπίπτει με τη συνήθη απόλυτη τιμή των πραγματικών αριθμών.

Τριγωνική ανισότητα:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Πολική μορφή μιγαδικού αριθμού

Με βάση τον ισομορφισμό του $\mathbb{C}$ με το $\mathbb{R}^2$, μπορούμε να γράψουμε έναν μιγαδικό αριθμό με συντεταγμένες (a, b) σε "πολική" μορφή με συντεταγμένες (ρ, θ).

$$\underline{\theta = \arctan\left(b/a\right)}$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

όπου

$$a = \rho\cos(\theta)$$

και

$$b = \rho\sin(\theta)$$

και η πολική μορφή του μιγαδικού αριθμού z είναι:

$$z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Συζυγείς Μιγαδικοί Αριθμοί

Αν έχουμε έναν μιγαδικό αριθμό z, ο αντίστοιχος μιγαδικός αριθμός ο οποίος έχει το ίδιο πραγματικό μέρος και αντίθετο φανταστικό μέρος ονομάζεται **συζυγής** του z και συμβολίζεται $\bar{z}$. Δηλαδή, αν $z = a + bi$ τότε $\bar{z} = a - bi$.

Ιδιότητες:

$z + \bar{z} = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$.

$z - \bar{z} = 2bi = 2\mathrm{Im}(z)i$.

$z\bar{z} = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$.

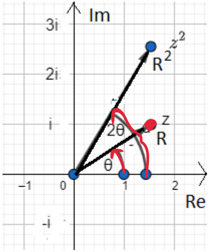
$$\frac{2}{1+2i} = \frac{2(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2-4i}{1^2+2^2} = \frac{2-4i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$$

Τύπος του Euler

Ο τύπος του Euler μας δίνει ότι:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Αυτός ο τύπος μας δίνει τη δυνατότητα να υψώσουμε εύκολα έναν μιγαδικό αριθμό σε μία δύναμη.
Για παράδειγμα, αντί να υπολογίσουμε το $(a+bi)^n$ μετατρέπουμε τον αριθμό $a+bi$ σε πολική μορφή και υπολογίζουμε το $(Re^{i\theta})^n = R^n e^{in\theta} = R^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$.

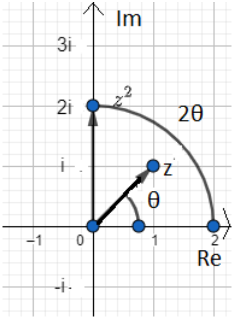


Σχήμα: Ο τύπος του Euler διαγραμματικά

Παράδειγμα για τον τύπο του Euler

$\tan^{-1}(1)$

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = 1 + i$. Μετατρέπουμε τον αριθμό σε πολική μορφή $R = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ και $\theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Τότε, υψώνοντας στο τετράγωνο, υψώνουμε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού στο τετράγωνο και διπλασιάζεται η γωνία. Δηλαδή, έχουμε $z^2 = 2(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))$.



Σχήμα: Ο τύπος του Euler για το δεδομένο παράδειγμα

Αόριστο ολοκλήρωμα

Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα ή αντιπαράγωγος της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Θεώρημα: Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ τότε:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής
  $G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$
  είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή:
  $G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$ $\quad G'(x) = (F(x)+c)' = F'(x) + c' = F'(x) = f(x)$

Αόριστο ολοκλήρωμα

Αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x)$ ονομάζεται το σύνολο των παραγουσών συναρτήσεων της:

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Για παράδειγμα:

$$\int x^2 dx = \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' dx = \frac{x^3}{3} + c \text{, } c \in \mathbb{R}$$

διότι ισχύει:

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$$

ενώ $\int e^{2x} dx = \int \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' dx = \frac{e^{2x}}{2} + c$, διότι: $\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' = \frac{2e^{2x}}{2} = e^{2x}$

Βασικό τυπολόγιο αόριστων ολοκληρωμάτων

1. $\int 1 dx = x + c$
2. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, n \in \mathbb{N}^*$
3. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
6. $\int \cos x dx = \sin x + c$
7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
8. $\int e^x dx = e^x + c$
9. $\int \alpha^x dx = \frac{1}{\ln \alpha} \alpha^x + c, \quad 0 < \alpha \neq 1$
10. $\int \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}x = \mathrm{arctan} x + c, \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \mathrm{arcsin} x + c, \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \mathrm{arccos} x + c$
11. $\int \sinh x dx = \cosh x + c, \int \cosh x dx = \sinh x + c$

Γραμμικότητα ολοκληρώματος

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\int \left(c_1 f(x) + c_2 g(x)\right) dx = c_1 \int f(x) dx + c_2 \int g(x) dx$$

Παραδείγματα

$\sqrt{3}\,\frac{x^{3/2}}{3/2} + \sqrt{3}c$ θέτω $k=\sqrt{3}c\in\mathbb{R}$

$= \int \sqrt{3}\cdot\sqrt{x}\,dx$

- $\int \sqrt{3x}dx = \sqrt{3}\int \sqrt{x}dx = \sqrt{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \sqrt{3}\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \sqrt{3}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^3} + c$ k

- $\int \sqrt[4]{\frac{2}{x^3}}dx = \int \frac{\sqrt[4]{2}}{x^{\frac{3}{4}}}dx = \sqrt[4]{2}\int x^{-\frac{3}{4}}dx = \sqrt[4]{2}\frac{x^{-\frac{3}{4}+1}}{-\frac{3}{4}+1} + c = \sqrt[4]{2}\frac{x^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + c = 4\sqrt[4]{2x} + c$

- $\int \frac{2x^2-x+5}{x^2}dx = \int \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}\right)dx = \int 2dx - \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{5}{x^2}dx =$
  $2x - \ln|x| - 5x^{-1} + c = 2x - \ln|x| - \frac{5}{x} + c$

- $\int \frac{1-\sin^2(x)}{\cos(x)}dx = \int \frac{\cos^2(x)}{\cos(x)}dx = \int \cos(x)dx = \sin(x) + c$

Άσκηση

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{4}{\sin^2(2x)} dx$$

Λύση

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

έχουμε:

$$\int \frac{4}{\sin^2(2x)}dx = \int \frac{4}{(2\sin(x)\cos(x))^2}dx = \int \frac{\cancel{4}\cdot 1}{\cancel{4}\sin^2(x)\cos^2(x)}dx =$$

$$= \int \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)} = \int \frac{\cancel{\sin^2(x)}}{\cancel{\sin^2(x)}\cos^2(x)}dx + \int \frac{\cancel{\cos^2(x)}}{\sin^2(x)\cancel{\cos^2(x)}}dx =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2(x)}dx + \int \frac{1}{\sin^2(x)}dx = \tan(x) - \cot(x) + c$$

Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

$$\int f(x)g^{'}(x)dx = f(x)g(x) - \int f^{'}(x)g(x)dx$$

Παραδείγματα:

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int x^2 e^x dx$:
  $\int \overset{f}{x^2}\,\overset{g}{e^x} dx = \int \overset{f\cdot g'}{x^2 (e^x)^{'}} dx \overset{=}{=} \overset{f\cdot g\,-\int f'\cdot g}{x^2 e^x - \int 2xe^x dx} = x^2 e^x - 2\int x(e^x)^{'} dx =$
  $x^2 e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$
- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int x\cos(ax)dx$:
  $\int x\cos(ax)dx = \int x\left(\frac{\sin(ax)}{a}\right)^{'} dx = \frac{x\sin(ax)}{a} - \frac{1}{a}\int x^{\prime}\sin(ax)dx =$
  $\frac{x\sin(ax)}{a} - \frac{1}{a}\int \sin(ax)dx = \frac{x\sin(ax)}{a} + \frac{\cos(ax)}{a^2} + c$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

$\frac{du}{dx} = \frac{dg}{dx} = g'(x)$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

όπου $u = g(x)$ και $du = g'(x)dx$

$g'(x) = \frac{dg}{dx}$

Παραδείγματα:

$F(g(x))$ $\quad F(x)=\sqrt{x}$ $\quad g(x) = x^2+1$ $\quad u = x^2+1$

$\frac{du}{dx} = (x^2+1)' = 2x$ $\quad dx = \frac{du}{2x}$

- $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$. Θέτουμε $u = x^2+1$ οπότε $du = (x^2+1)'dx = 2xdx$.
  Συνεπώς $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx = \int \sqrt{u}du = \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c =$
  $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + c$
- $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$. Θέτουμε $u = x^3$ οπότε $du = (x^3)' = 3x^2dx$.
  Συνεπώς $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{(x^3)'}{\sqrt{1-(x^3)^2}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{u(x)'}{\sqrt{1-(u(x))^2}}dx =$
  $\frac{1}{3}\arcsin(u(x)) + c = \frac{1}{3}\arcsin(x^3) + c$

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

$$\int \frac{p(x)}{(q(x))^k}dx$$

Όπου $p(x)$, $q(x)$ είναι πολυώνυμα για τα οποία ισχύει $p(x) = q'(x)$ και $k \in \mathbb{N}$.
Η αντικατάσταση που κάνουμε είναι $u = q(x)$.

Παράδειγμα: $\int \frac{6x-1}{(3x^2-x-12)^2}dx$. Θέτουμε
$u = 3x^2 - x - 12 \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = 6x - 1 \Leftrightarrow du = (6x-1)dx$. Επομένως
$\int \frac{6x-1}{(3x^2-x-12)^2}dx = \int \frac{du}{u^2} = \frac{u^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{3x^2-x-12} + c$

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$$

Ρητή συνάρτηση με αριθμητή ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού και παρονομαστή ένα πολυώνυμο 2ου βαθμού το οποίο δεν έχει πραγματικές ρίζες, οπότε δεν παραγοντοποιείται.

$$\int \frac{8x+4}{x^2-2x+5}dx = \int \frac{8x+4}{x^2-2x+1+4}dx = \int \frac{8x+4}{(x-1)^2+4}dx \underset{\substack{u=x-1\\ du=dx}}{=} \int \frac{8(u+1)+4}{u^2+4}du =$$

$$\int \frac{8u}{u^2+4}du + \int \frac{12}{u^2+2^2}du = 4\int \frac{2u}{u^2+4}du + 6\int \frac{2}{u^2+2^2}du \underset{\substack{v=u^2+4\\ dv=2udu}}{=} 4\int \frac{dv}{v} + 6\int \frac{2}{u^2+2^2}du =$$

$$4\ln|v| + 6\arctan(\tfrac{u}{2}) + c = 4\ln|u^2+4| + 6\arctan\left(\tfrac{x-1}{2}\right) + c =$$
$$4\ln(x^2-2x+5) + 6\arctan\left(\tfrac{x-1}{2}\right) + c$$

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Περίπτωση που ο αριθμητής έχει βαθμό μικρότερο από τον παρονομαστή και αυτός έχει απλές ρίζες:
$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)} = \frac{n(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a_n)}$

Παράδειγμα: $\int \frac{x+2}{x^2+2x-8}$. Αναλύουμε σε παράγοντες:
$\frac{x+2}{x^2+2x-8} = \frac{x+2}{(x+4)(x-2)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+4)}{(x+4)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A+4B}{(x+4)(x-2)}$
Η ισότητα των αριθμητών μας οδηγεί στο σύστημα $\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+4B=2 \end{cases}$ το οποίο έχει μοναδική λύση $A=1/3$ και $B=2/3$. Επομένως:
$\int \frac{x+2}{x^2+2x-8}dx = \int \left(\frac{1}{3(x+4)} + \frac{2}{3(x-2)}\right) dx = \frac{1}{3}\ln|x+4| + \frac{2}{3}\ln|x-2| + c$

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Περιπτώσεις που ο αριθμητής έχει βαθμό μικρότερο από τον παρονομαστή και αυτός έχει πολλαπλές ρίζες:

$$f(x)=\frac{p(x)}{(x+a_1)^k(x+a_2)^m\cdots(x+a_\ell)^n}=\frac{A_1}{x+a_1}+\frac{A_2}{(x+a_1)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x+a_1)^k}+\frac{B_1}{x+a_2}+\frac{B_2}{(x+a_2)^2}+\cdots+\frac{B_m}{(x+a_2)^m}+\cdots+\frac{C_1}{x+a_\ell}+\frac{C_2}{(x+a_\ell)^2}+\cdots\frac{C_k}{(x+a_\ell)^n}$$

ή

$$f(x)=\frac{p(x)}{(x+a)^k(x^2+bx+c)^n}=\frac{A_1}{x+a}+\frac{A_2}{(x+a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x+a)^k}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}$$

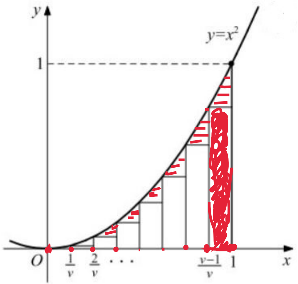
Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Περιπτώσεις που ο αριθμητής έχει βαθμό μεγαλύτερο από τον παρονομαστή
$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = A(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)}$ (διαίρεση πολυωνύμων), τότε:
$\int A(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)} dx = \int A(x)dx + \frac{p_1(x)}{q(x)} dx$, με $\deg p_1(x) < \deg q(x)$

deg = βαθμός

Παράδειγμα:
$\int \frac{x^4 - x^3 + 2x - 3}{x^2 - 1} dx = \int (x^2 - x + 1) + \frac{x-2}{x^2-1} dx = \int (x^2 - x + 1) dx + \int \frac{x-2}{x^2-1} dx$

Εμβαδόν παραβολικού χωρίου



$\nu \cdot f\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)$

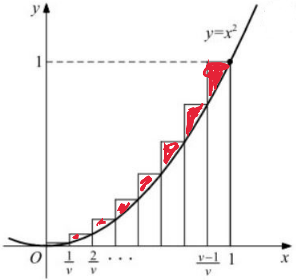
Σχήμα: Προσέγγιση εμβαδού της $f(x) = x^2$ ‘από κάτω’

$\lim_{\nu \to \infty} \epsilon_\nu = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$$\epsilon_\nu = f(0)\frac{1}{\nu} + f(\tfrac{1}{\nu})\frac{1}{\nu} + f(\tfrac{2}{\nu})\frac{1}{\nu} + \cdots f(\tfrac{\nu-1}{\nu})\frac{1}{\nu} =$$
$$\frac{1}{\nu}(0^2 + (\tfrac{1}{\nu})^2 + (\tfrac{2}{\nu})^2 + \cdots + (\tfrac{\nu-1}{\nu})^2) = \frac{1}{\nu^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + (\nu-1)^2) =$$
$$\frac{1}{\nu^3}\frac{(\nu-1)\nu(2\nu-1)}{6} = \frac{2\nu^2-3\nu+1}{6\nu^2}$$

(χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$)

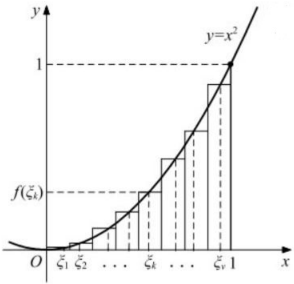
Εμβαδόν παραβολικού χωρίου



Σχήμα: Προσέγγιση εμβαδού της $f(x) = x^2$ 'από πάνω'

$E_\nu = f(\frac{1}{\nu})\frac{1}{\nu} + f(\frac{2}{\nu})\frac{1}{\nu} + \cdots + f(\frac{\nu}{\nu})\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu}((\frac{1}{\nu})^2 + (\frac{2}{\nu})^2 + \cdots + (\frac{\nu}{\nu})^2) =$
$\frac{1}{\nu^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + \nu^2) = \frac{1}{\nu^3}\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} = \frac{2\nu^2+3\nu+1}{6\nu^2}$ $\lim_{\nu\to\infty} E_\nu = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
Όμως για το εμβαδό E ισχύει $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \epsilon_\nu \leq E \leq \lim\limits_{\nu\to+\infty} E_\nu$. Συνεπώς $E = \frac{1}{3}$.

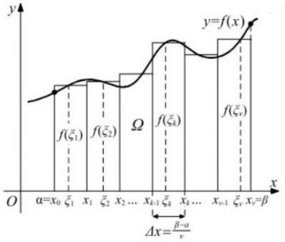
Εμβαδόν παραβολικού χωρίου



Σχήμα: Προσέγγιση εμβαδού της $f(x) = x^2$ 'με ενδιάμεσα σημεία'

$S_\nu = \frac{1}{\nu}f(\xi_1) + \frac{1}{\nu}f(\xi_2) + \cdots + \frac{1}{\nu}f(\xi_\nu)$. Επειδή $f(x_{k-1}) \leq f(\xi_k) \leq f(x_k)$, $k = 1, \cdots, \nu$ θα είναι: $\frac{1}{\nu}f(x_{k-1}) \leq \frac{1}{\nu}f(\xi_k) \leq \frac{1}{\nu}f(x_k)$. Συνεπώς $\epsilon_\nu \leq S_\nu \leq E_\nu$. Συνεπώς $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \epsilon_\nu = \lim\limits_{\nu\to+\infty} E_\nu = S_\nu$ και $S_\nu = \frac{1}{3}$.

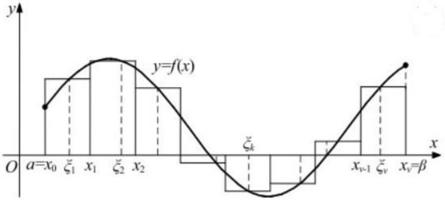
Ορισμός εμβαδού



Σχήμα: Γενικός ορισμός εμβαδού

Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε ν ισομήκη διαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$ με
$\alpha = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_\nu = \beta$
Σε κάθε υποδιάστημα επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_k και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα ξ_k
$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x = \Delta x(f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_\nu))$.
Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{\nu \to +\infty} S_\nu$.

Ορισμένο ολοκλήρωμα



Σχήμα: Ορισμένο Ολοκλήρωμα

$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x = \Delta x(f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots f(\xi_\nu)) = \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\Delta x.$$

Το όριο του παραπάνω αθροίσματος όταν $\nu \to +\infty$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ξ_k.

Γράφεται $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται ως ολοκλήρωμα της f από το α στο β.

Ορισμένο ολοκλήρωμα

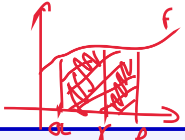
Ισχύει ότι:

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Αν $f(x) \geq 0$, τότε $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ για $a < b$

Θεώρημα 1^o: Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν:

- $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$

Ορισμένο Ολοκλήρωμα



Θεώρημα 2^o: Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

Θεώρημα 3^o: Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, b]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό τότε

$$\int_{a}^{b} f(x)dx > 0$$

Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

Θεώρημα: Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,\ x \in \Delta$$

είναι μία παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

Θεώρημα: (Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)
Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, b]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[a, b]$, τότε

$$\int_a^b \overset{f(x)dx}{f(t)dt} = \overset{F}{G}(b) - \overset{F}{G}(a) = [\overset{F}{G}(x)]_a^b$$

Οι τύποι της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες και για ορισμένα ολοκληρώματα

Ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για το ορισμένο ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$.

Για παράδειγμα:

$\int_0^{\pi/2} xcosxdx = \int_0^{\pi/2} x(sinx)' dx = [xsinx]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} sinxdx =$
$[xsinx]_0^{\pi/2} + [cosx]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi-2}{2}$

Ο τύπος της ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής για ορισμένα ολοκληρώματα

Ο τύπος της ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής για το ορισμένο ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$$

όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(a)$, $u_2 = g(b)$.

Για παράδειγμα $I = \int_1^e \frac{lnx}{x} dx = \int_1^e lnx(lnx)' dx$. Θέτουμε $u = lnx$, οπότε $du = (lnx)' dx$, $u_1 = ln1 = 0$, $u_2 = lne = 1$. Συνεπώς

$$I = \int_0^1 udu = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

.

Εφαρμογές ολοκληρωμάτων - Υπολογισμός εμβαδών

Το εμβαδόν μεταξύ δύο συναρτήσεων για τις οποίες ισχύει $f_1(x) \geq f_2(x)$ για $a \leq x \leq b$ ισούται με

$$E = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\, dx$$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί το εμβαδόν του κλειστού χωρίου που ορίζουν οι συναρτήσεις $f_1(x) = \sqrt{x}$ και $f_2(x) = x^2$.
Αρχικά βρίσκουμε τα σημεία τομής των δύο καμπυλών: $\sqrt{x} = x^2 \Leftrightarrow x = x^4 \Leftrightarrow x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$.
Παρατηρούμε ότι στο διάστημα $(0, 1)$ η συνάρτηση $\sqrt{x} - x^2$ παίρνει θετικές τιμές, οπότε το εμβαδόν είναι:

$$E = \int_0^1 \left|\sqrt{x} - x^2\right| dx = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{2}{3}1^{\frac{3}{2}} - \frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}0^{\frac{3}{2}} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Εφαρμογές ολοκληρωμάτων - Υπολογισμός μήκους τμήματος καμπύλης

Το μήκος τμήματος καμπύλης μιας συνάρτησης $y = f(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, b]$ ισούται με:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το μήκος τμήματος καμπύλης της $y = x^{\frac{3}{2}}$ που ορίζεται ανάμεσα στις ευθείες $x = 0$ και $x = 4$.

Για τη συγκεκριμένη συνάρτηση έχουμε $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, επομένως το μήκος είναι:

$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{4 + 9x} dx$. Εάν κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $u = \sqrt{4 + 9x}$, τότε εύκολα μπορούμε να καταλήξουμε στο αποτέλεσμα $L = \frac{8}{27}\left(10^{\frac{3}{2}} - 1\right)$

Γενικευμένα ολοκληρώματα (α′ είδους)

Εάν σε ένα ολοκλήρωμα ένα τουλάχιστον από τα δύο άκρα ολοκλήρωσης είναι $\pm\infty$, τότε αυτό ονομάζεται γενικευμένο ολοκλήρωμα α′ είδους.

Μπορούμε να διαχωρίσουμε τις εξής τρεις περιπτώσεις σε σχέση με το διάστημα ολοκλήρωσης:

- διάστημα $[a, \infty)$, τότε

$\lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

- διάστημα $(-\infty, a]$, τότε

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)dx$$

- διάστημα $(-\infty, +\infty)$, τότε

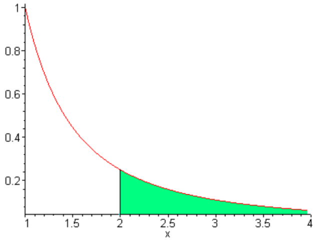
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$$

Άν το όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει, διαφορετικά αποκλίνει.

Παραδείγματα

- $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty$
- $\int_0^\infty \cos(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \cos(x)dx = \lim_{b\to\infty} [\sin(x)]_0^b = \lim_{b\to\infty} (\sin(b) - sin(0))$.
  Το όριο όμως $\lim_{b\to\infty} \sin(b)$ δεν υπάρχει (γιατί;), επομένως το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.
- $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_2^b = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_2^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

$$\| \quad \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x^2} dx$$



Μαθηματική Ανάλυση
Διάλεξη 2

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Σπύρος Χαλκίδης
Ε.ΔΙ.Π.

Οκτώβριος 2022

Θέματα 2ης διάλεξης

- Συναρτήσεις, εικόνα συνάρτησης και αντίστροφη συνάρτηση
- Κυρτότητα συναρτήσεων
- ϵ-περιοχές
- Παράγωγος συνάρτησης
- Διαφορικό

Εικόνα συνόλου μέσω συνάρτησης f

Ορισμός: Όταν έχουμε δύο σύνολα X και Y, η **συνάρτηση** (function) από το X στο Y είναι ένας κανόνας που συνδέει με κάθε στοιχείο του X, ένα και μόνο στοιχείο του Y.

- Το σύνολο X ονομάζεται σύνολο αφετηρίας ή **πεδίο ορισμού** (domain) της συνάρτησης, το Y ονομάζεται **σύνολο άφιξης** (codomain) και το σύνολο των στοιχείων του Y (που μπορεί να είναι ή και να μην είναι ολόκληρο το σύνολο Y) τα οποία συνδέονται με τα στοιχεία του X μέσω της συνάρτησης ονομάζεται **πεδίο τιμών** (range) της συνάρτησης.
- Χρησιμοποιώντας το σύμβολο f για τον κανόνα με τον οποίο συνδέονται τα στοιχεία των δύο συνόλων, μπορούμε να γράψουμε τη συνάρτηση ως εξής:

$$f : X \to Y, \text{ με } y = f(x), x \in X$$

όπου το y συχνά ονομάζεται **εικόνα** (image) του x ή **τιμή** (value) της συνάρτησης f στο σημείο x.

Εικόνα συνόλου μέσω συνάρτησης f

- Το **πεδίο τιμών** ή **εικόνα** του X μίας συνάρτησης μπορεί να εμφανιστεί ως το **σύνολο των εικόνων** (image set):

$$f(X) = \{y \in Y : y = f(x), x \in X\}$$

- Αν $f(X) = Y$, λέμε ότι η f απεικονίζει το X επί του Y ή ότι η συνάρτηση f είναι **επί**.
- Μπορεί κάθε x να έχει ως εικόνα του ένα διαφορετικό στοιχείο του Y, οπότε η απεικόνιση λέμε ότι είναι *ένα προς ένα*. Για να αποδείξουμε εάν μια συνάρτηση είναι *ένα προς ένα* αρκεί να δείξουμε ότι:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

ή ισοδύναμα

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Αντιστροφή συναρτήσεων

- Συχνά μπορεί να θέλουμε να αντιστρέψουμε τη συνάρτηση $y = f(x)$ και να εμφανίσουμε το x ως συνάρτηση του y, δηλαδή $x = f^{-1}(y)$. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο όταν η f **είναι ένα προς ένα**.

- Αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $x = f^{-1}(y)$ ή ισοδύναμα η f είναι ένα προς ένα, για ένα σύνολο $B \subset Y$ ορίζεται η **προεικόνα** του $A = f^{-1}(B)$.

Παράδειγμα προεικόνας συνόλου

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε την προεικόνα του συνόλου $B = [1, 2]$ για τη συνάρτηση $f(x) = 5e^x$.

$f^{-1}(B)$

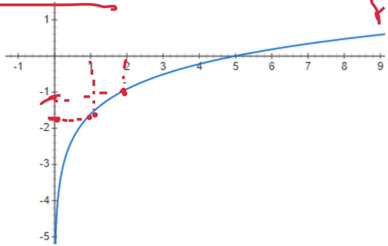
Αρχικά θα βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση της f:

$y = 5e^x \iff \frac{y}{5} = e^x \iff x = \ln(\frac{y}{5})$ ή $f^{-1}(x) = \ln(\frac{x}{5})$.

Εάν αντικαταστήσουμε τις ακραίες τιμές για το σύνολο B, αφού η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε ότι η προεικόνα του συνόλου είναι η

$A = \left[f^{-1}(1), f^{-1}(2)\right] = \left[\ln(\frac{1}{5}), \ln(\frac{2}{5})\right]$.

$f^{-1} = \ln \frac{x}{5}$



Σχήμα: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\ln\left(\frac{x}{5}\right)$

Κυρτές συναρτήσεις

Η συνάρτηση f είναι **κυρτή** (convex) αν για δύο οποιαδήποτε σημεία του πεδίου ορισμού της x_1 και x_2 ισχύει ότι:

$$f(\bar{x}) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

όπου $\bar{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ και $\lambda \in [0,1]$. Είναι αυστηρά κυρτή αν:

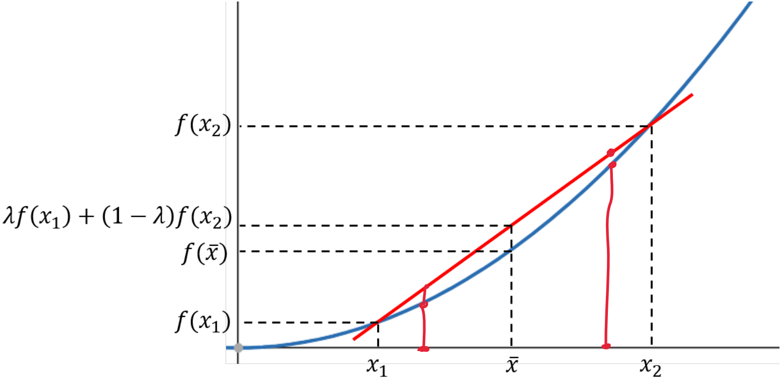
$$f(\bar{x}) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

όταν $\lambda \in (0,1)$.

Αν η συνάρτηση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε είναι κυρτή αν $f''(x) \geq 0$ και αυστηρά κυρτή αν $f''(x) > 0$ στην περιοχή που την εξετάζουμε.

Παράδειγμα κυρτής συνάρτησης

$$f(\bar{x}) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \; \bar{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, \; \lambda \in [0,1]$$



Σχήμα: Παράδειγμα κυρτής συνάρτησης

Κοίλες συναρτήσεις

Η συνάρτηση f είναι **κοίλη** (concave) αν για δύο οποιαδήποτε σημεία του πεδίου ορισμού της x_1 και x_2 ισχύει ότι:

$$f(\bar{x}) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

όπου $\bar{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ και $\lambda \in [0,1]$. Είναι αυστηρά κοίλη αν:

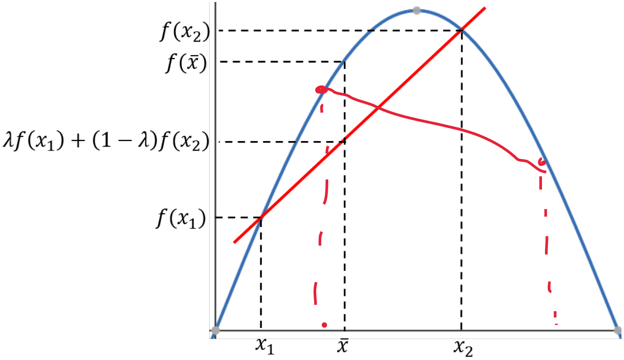
$$f(\bar{x}) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

όταν $\lambda \in (0,1)$.

Αν η συνάρτηση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε είναι κοίλη αν $f''(x) \leq 0$ και αυστηρά κοίλη αν $f''(x) < 0$ στην περιοχή που την εξετάζουμε.

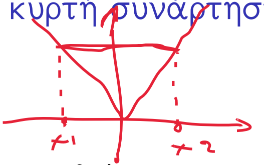
Παράδειγμα κοίλης συνάρτησης

$$f(\bar{x}) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \ \bar{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, \ \lambda \in [0,1]$$



Σχήμα: Παράδειγμα κοίλης συνάρτησης

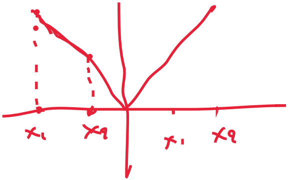
Παράδειγμα: Απόδειξη ότι η απόλυτη τιμή είναι κυρτή συνάρτηση



$f(x) = |x|$

- Σημειώνουμε ότι δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου γιατί η συνάρτηση της απόλυτης τιμής δεν είναι παραγωγίσιμη.

  Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ όπου $\alpha + \beta = 1$. $(\alpha = \lambda, \beta = 1 - \lambda, \lambda \in [0, 1])$.
  Τότε:
  $f(\alpha x_1 + \beta x_2) = |\alpha x_1 + \beta x_2|$
  $\leq |\alpha x_1| + |\beta x_2|$ (από την τριγωνική ανισότητα για πραγματικούς αριθμούς)
  $= |\alpha||x_1| + |\beta||x_2| = \alpha|x_1| + \beta|x_2| = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$

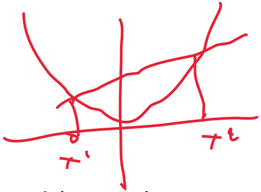


$(-\infty, 0]$

Άσκηση

Να δειχθεί με δύο τρόπους ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι κυρτή.

Λύση

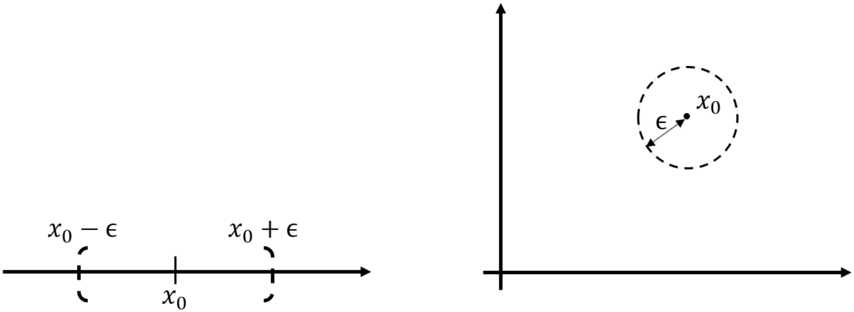


1ος τρόπος: Η συνάρτηση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 2 > 0$ συνεπώς είναι κυρτή.

2ος τρόπος: $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \Leftrightarrow$
$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2 \le \lambda {x_1}^2 + (1-\lambda){x_2}^2 \Leftrightarrow$
$\lambda^2 {x_1}^2 + 2x_1x_2\lambda(1-\lambda) + (1-\lambda)^2 {x_2}^2 \le \lambda {x_1}^2 + (1-\lambda){x_2}^2 \Leftrightarrow$
$(\lambda - \lambda^2){x_1}^2 - 2x_1x_2\lambda(1-\lambda) + (1-\lambda-1+2\lambda-\lambda^2){x_2}^2 \ge 0 \Leftrightarrow$
$(\lambda - \lambda^2){x_1}^2 - 2x_1x_2\lambda(1-\lambda) + (\lambda-\lambda^2){x_2}^2 \ge 0 \Leftrightarrow \lambda(1-\lambda)(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) \ge 0 \Leftrightarrow$
$\lambda(1-\lambda)(x_1 - x_2)^2 \ge 0$ που ισχύει.

Περιοχή-ϵ

Η περιοχή-ϵ (ϵ-neighborhood) ενός σημείου $x_0 \in \mathbb{R}^n$ δίνεται από το σύνολο $N_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x_0, x) < \epsilon\}$. Πιο απλά το $N_\epsilon(x_0)$ είναι το σύνολο των σημείων που βρίσκονται σε απόσταση ϵ από το x_0.



Σχήμα: Περιοχές-ϵ στο $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^2$

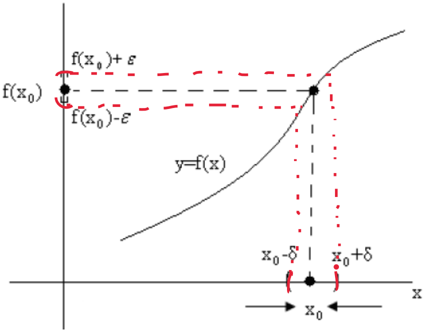
Ανοιχτό σύνολο

Ένα σύνολο $X \subset \mathbb{R}^n$ είναι **ανοιχτό** (open) αν, για κάθε $x \in X$ υπάρχει ένα ϵ έτσι ώστε $N_\epsilon(x) \subset X$.

Συνεχής συνάρτηση

Μία συνάρτηση $f(x)$ που ορίζεται σε ένα ανοιχτό διάστημα στο οποίο ανήκει το σημείο $x = x_0$ είναι συνεχής σε αυτό το σημείο, αν για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ έτσι ώστε να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, όποτε $|x - x_0| < \delta$.

$\delta(\varepsilon) > 0$



Σχήμα: Συνέχεια συνάρτησης

Θεώρημα

Έστω η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ με $A \subset \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του A αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό $V \subset \mathbb{R}$, η προεικόνα $f^{-1}(V)$ του V είναι ανοικτό σύνολο.

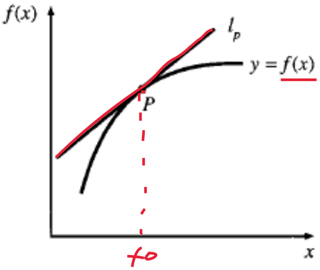
Απόδειξη:
1) "$\Rightarrow$" Έστω f συνεχής στο A και $V \subset \mathbb{R}$ ανοικτό. Θα δείξουμε ότι $f^{-1}(V)$ ανοικτό.
Για κάθε σημείο $c \in f^{-1}(V)$ έχουμε (εξ' ορισμού) ότι $f(c) \in V$.
Επειδή το V είναι ανοικτό, υπάρχει $\epsilon > 0$ έτσι ώστε $N_\epsilon(f(c)) \subset V$. Επειδή η f είναι συνεχής στο c υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$.
Δηλαδή, αν $x \in N_\delta(c)$ τότε $f(x) \in N_\epsilon(f(c)) \subset V$.
Όμως το ότι όλα τα σημεία του $N_\delta(c)$ αντιστοιχίζονται από την f εντός του V σημαίνει ότι όλο το $N_\delta(c)$ περιέχεται στην προ-εικόνα $f^{-1}(V)$ του V. Άρα για κάθε σημείο c του $f^{-1}(V)$, βρήκαμε μία περιοχή-δ η οποία "περιέχεται" στο $f^{-1}(V)$ που σημαίνει ότι το $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό.

Απόδειξη Θεωρήματος

2) "$\Leftarrow$" Υποθέτουμε τώρα ότι $f^{-1}(V)$ ανοικτό για κάθε V ανοικτό στο πεδιο τιμών, και θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε $c \in A$.
Για $c \in A$ και $\epsilon > 0$ ξέρουμε ότι η περιοχή-ϵ $N_\epsilon(f(c))$ είναι ανοικτό σύνολο στο πεδίο τιμών. Άρα (σύμφωνα με την υπόθεσή μας) και η προ-εικόνα του $f^{-1}(N_\epsilon(f(c))$ είναι ανοικτό σύνολο το οποίο φυσικά περιέχει το c.
Επειδή $c \in f^{-1}(N_\epsilon(f(c))$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $N_\delta(c) \subset f^{-1}(N_\epsilon(f(c))$ γιατί η προ-εικόνα είναι ανοικτό σύνολο σύμφωνα με την αρχική υπόθεσή μας.
Η τελευταία πρόταση μπορεί να γραφτεί και ως $|x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \epsilon$ το οποίο ισοδυναμεί με την πρόταση ότι η f είναι συνεχής στο c.

Εφαπτομένη καμπύλης

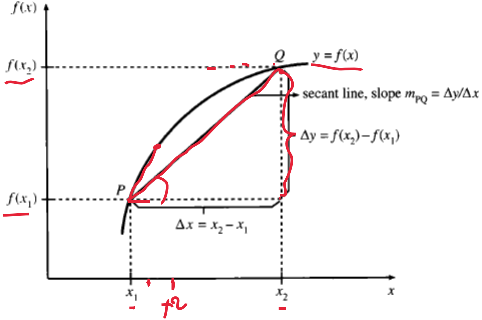
Η **εφαπτομένη** (tangent) μίας καμπύλης είναι μία ευθεία γραμμή η οποία εφάπτεται ακριβώς στην καμπύλη σε ένα δεδομένο σημείο.



$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Σχήμα: Η εφαπτομένη μίας καμπύλης στο σημείο P

Τέμνουσα καμπύλης



Σχήμα: Η τέμνουσα μίας καμπύλης

$m_{PQ} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$\lim_{x_2 \to x_1} (x_2 - x_1) = 0$

Η διαδικασία καθορισμού του ρυθμού μεταβολής $\Delta y / \Delta x$ γίνεται λαμβάνοντας διαδοχικά όλο και μικρότερες τιμές του Δx. Ο λόγος $\Delta y / \Delta x$ καθώς $\Delta x \to 0$ είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης. Όταν λαμβάνουμε αυτό το όριο η τέμνουσα ουσιαστικά ταυτίζεται με την εφαπτομένη. Η κλίση της τέμνουσας ανάμεσα στα σημεία P και Q συμβολίζεται ως m_{PQ}.

Ορισμός της παραγώγου

Η **παράγωγος** (derivative) μίας συνάρτησης $y = f(x)$ στο σημείο $P = (x_1, f(x_1))$ είναι η κλίση της εφαπτομένης σε αυτό το σημείο:

$$f^{'}(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} m_{PQ} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

όπου $\Delta x = x_2 - x_1$. Επίσης μπορούμε να γράψουμε:

$$f^{'}(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} m_{PQ} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Η παράγωγος μίας συνάρτησης $f(x)$ γράφεται και ώς $\frac{dy}{dx}$. Διαισθητικά το dy και το dx αντικατοπρίζουν την έννοια των μεταβολών του y και του x, όπως το Δy και το Δx αντίστοιχα. Η έκφρασή $dy = f^{'}(x)dx$ είναι γνωστή ως το διαφορικό της συνάρτησης $f(x)$.

Ολικό διαφορικό σε σημείο

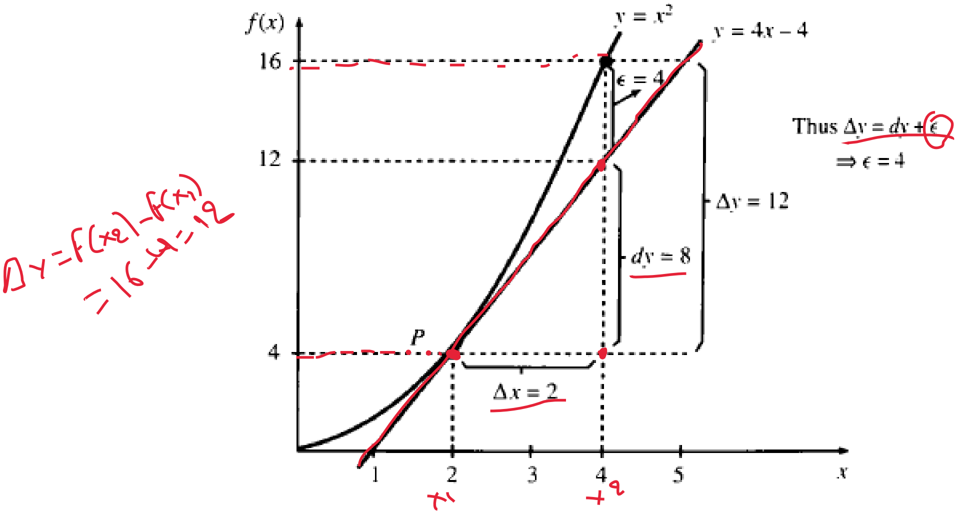
Αν $f^{'}(x_0)$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης $y = f(x)$ στο σημείο x_0, τότε το **ολικό διαφορικό** στο σημείο είναι:

$$dy = df\cancel{(x_0, dx)} = f^{'}(x_0)dx$$

Επομένως το διαφορικό είναι συνάρτηση του x και του dx.

Το διαφορικό μας εξασφαλίζει μία μέθοδο εκτίμησης της επίπτωσης που έχει στο y μία μεταβολή του x ίση με Δx. Το Δy είναι η ακριβής μεταβολή του y ενώ το dy είναι η *κατά προσέγγιση* μεταβολή. Με βάση τον ορισμό της παραγώγου, αυτό ισοδυναμεί με το να χρησιμοποιήσουμε την εφαπτομένη μίας συνάρτησης για να εκτιμήσουμε την επίπτωση μίας μεταβολής του x επί του y.

Προσέγγιση με το ολικό διαφορικό



Σχήμα: Η $dy = f^{'}(x)dx$ ως προσέγγιση μίας μεταβολής στο y

Κανόνες παραγώγισης

1ος κανόνας: Παράγωγος μίας σταθερής συνάρτησης

Αν $f(x) = c$, όπου c είναι μία σταθερά, τότε $f^{'}(x) = 0$.

2ος κανόνας: Παράγωγος μίας γραμμικής συνάρτησης

Αν $f(x) = mx + b$, όπου m και b είναι σταθερές, τότε $f^{'}(x) = m$.

3ος κανόνας: Παράγωγος μίας δυναμοσυνάρτησης

Αν $f(x) = x^n$, τότε $f^{'}(x) = nx^{n-1}$.

Κανόνες παραγώγισης

4ος κανόνας: Παράγωγος γινομένου σταθεράς επί συνάρτηση

Αν $g(x) = cf(x)$, με c μία σταθερά, τότε $g^{'}(x) = cf^{'}(x)$.

5ος κανόνας: Παράγωγος του αθροίσματος ή της διαφοράς δύο συναρτήσεων

Αν $h(x) = g(x) + f(x)$ τότε $h^{'}(x) = g^{'}(x) + f^{'}(x)$. αν $h(x) = g(x) - f(x)$ τότε $h^{'}(x) = g^{'}(x) - f^{'}(x)$.

6ος κανόνας: Παράγωγος αθροίσματος πεπερασμένου πλήθους συναρτήσεων

Αν $h(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)$ τότε $h^{'}(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i^{'}(x)$.

Κανόνες παραγώγισης

7ος κανόνας: Παράγωγος του γινομένου δύο συναρτήσεων

Αν $h(x) = f(x)g(x)$, τότε $h^{'}(x) = f^{'}(x)g(x) + f(x)g^{'}(x)$.

8ος κανόνας: Παράγωγος πηλίκου δύο συναρτήσεων

Αν $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$, τότε $h^{'}(x) = \frac{f^{'}(x)g(x) - f(x)g^{'}(x)}{[g(x)]^2}$.

9ος κανόνας: Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης - αλυσωτός κανόνας

Αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, δηλαδή $y = f(g(x)) = h(x)$, τότε $h^{'}(x) = f^{'}(u)g^{'}(x)$
ή

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Κανόνες παραγώγισης

10ος κανόνας: Παράγωγος της αντίστροφης μίας συνάρτησης

Αν η $y = f(x)$ έχει ως αντίστροφη συνάρτηση την $x = g(y)$, δηλαδή αν $g(y) = f^{-1}(y)$ και $f^{'} \neq 0$ τότε:
$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$ ή $g^{'}(y) = \frac{1}{f'(x)}$ όπου $y = f(x)$.

11ος κανόνας: Παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης

Αν $y = e^x$, τότε $dy/dx = e^x$.

12ος κανόνας: Παράγωγος της λογαριθμικής συνάρτησης

Αν $y = \ln x$, τότε $dy/dx = 1/x$.

Παραδείγματα

- $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2-2x+1}{x^2-5x+6}\right] = \frac{(x^2-5x+6)\frac{d}{dx}(x^2-2x+1)-(x^2-2x+1)\frac{d}{dx}(x^2-5x+6)}{(x^2-5x+6)^2} = \frac{(x^2-5x+6)(2x-2)-(x^2-2x+1)(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2}$

- $\frac{d}{dx}\left[(3x+1)^2\right] = [2(3x+1)]\frac{d}{dx}[3x+1] = 2(3x+1)3 = 6(3x+1)$

Λογαριθμική παραγώγιση

Λογαριθμική παραγώγιση ονομάζεται η τεχνική κατά την οποία ο υπολογισμός της παραγώγου μίας συνάρτησης $f'(x)$ γίνεται μέσω της παραγώγου του $\ln(f(x))$, εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την πρώτη παράγωγο της

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3(x)\cos^2(x)$$

τότε έχουμε ισοδύναμα:
$y = \sqrt[3]{x^2}\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3(x)\cos^2(x) \Leftrightarrow \ln(y) = \ln\left(\sqrt[3]{x^2}\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3(x)\cos^2(x)\right) \Leftrightarrow$
$\ln(y) = \ln\left(\sqrt[3]{x^2}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right) + \ln(\sin^3(x)) + \ln(\cos^2(x))$

Λογαριθμική παραγώγιση (συνέχεια)

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης έχουμε ισοδύναμα:

$$(\ln(y))' = \left(\ln\left(\sqrt[3]{x^2}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right) + \ln(\sin^3(x)) + \ln(\cos^2(x))\right)' \Leftrightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{3}\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}(1-x)' - \frac{1}{1+x^2}(1+x^2)' + 3\frac{1}{\sin(x)}(\sin(x))' + 2\frac{1}{\cos(x)}(\cos(x))' \Leftrightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - 2\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Leftrightarrow$$

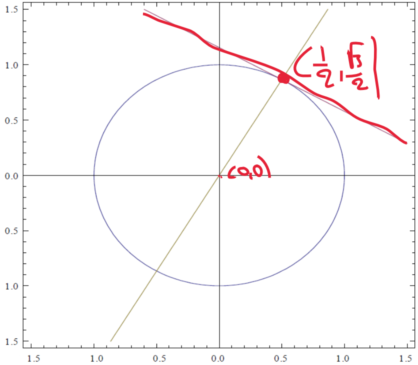
$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3\cot(x) - 2\tan(x) \Leftrightarrow$$

$$y' = y\left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3\cot(x) - 2\tan(x)\right) \Leftrightarrow$$

$$y' = \sqrt[3]{x^2}\,\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3(x)\cos^2(x)\left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3\cot(x) - 2\tan(x)\right)$$

Άσκηση

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα 1, στο σημείο $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ καθώς και την εξίσωση της κάθετης της εφαπτομένης στο σημείο αυτό.



$x^2 + y^2 = 1$

$y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow$

$y = \pm\sqrt{1-x^2}$

$y = \sqrt{1-x^2}$

Λύση

Η εξίσωση του κύκλου περιγράφεται από την $x^2 + y^2 = 1$. Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη ως προς x έχουμε:
$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(1) \Leftrightarrow 2x\frac{d}{dx}(x) + 2y\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(1) \Leftrightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$
Επομένως, ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο σημείο $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ είναι

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1/2,\sqrt{3}/2)} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$
Η εξίσωση της κάθετης της εφαπτομένης που διέρχεται από το σημείο $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, έχει κλίση $\lambda = \frac{-1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$.

Επομένως, η εξίσωσή της είναι: $y = \sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}x$

Μαθηματική Ανάλυση
Διάλεξη 3

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Σπύρος Χαλκίδης
Ε.ΔΙ.Π.

Οκτώβριος 2022

Θέματα 3ης διάλεξης

- Μέθοδος της Μαθηματικής Επαγωγής
- Ακολουθίες
- Φραγμένες ακολουθίες και μονοτονία
- Σύγκλιση ακολουθιών

Μαθηματική επαγωγή

Η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής χρησιμοποιείται για να αποδείξουμε προτάσεις οι οποίες εξαρτώνται, στην απλούστερη περίπτωση, από μία ακέραια μεταβλητή $n \in \mathbb{N}$. Συμβολίζουμε $P(n)$ την πρόταση αυτή.
Στη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής ακολουθούμε τα εξής τρία βήματα:

- **Βασικό βήμα**: Δείχνουμε αρχικά την πρόταση για κάποιο $n = n_0$ για το οποίο αποδεικνύουμε ότι ισχύει. Δηλαδή, δείχνουμε ότι το $P(n_0)$ είναι μια αληθής πρόταση.
- **Επαγωγική Υπόθεση**: Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για κάποιο $n = k$ με $k > n_0$. Υποθέτουμε δηλαδή ότι το $P(k)$ είναι μια αληθής πρόταση.
- **Επαγωγικό βήμα**: Αποδεικνύουμε, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη υπόθεση, ότι το $P(k+1)$ είναι αληθής πρόταση.

Αν ισχύει η συνεπαγωγή στο τελευταίο βήμα, τότε ισχύει και η πρόταση για όλα τα $k \geq n_0$.

Παράδειγμα επαγωγής 1

Να δειχθεί ότι για $n \geq 1$:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Για $n = 1$ έχουμε $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ το οποίο ισχύει.
- Έστω ότι η σχέση ισχύει για $n = k$, δηλαδή:
  $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.
- Θ.δ.ο. $(1 + 2 + \cdots + k) + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.
  Από την υπόθεση έχουμε ότι η παραπάνω πρόταση είναι ισοδύναμη με την
  $\frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \Leftrightarrow \frac{k^2+k}{2} + k + 1 = \frac{k^2+3k+2}{2} \Leftrightarrow \frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{k^2+3k+2}{2}$.
  Έτσι δείξαμε με επαγωγή ότι η σχέση ισχύει για κάθε $n \geq 1$.

Παράδειγμα επαγωγής 2

$\alpha > \beta$

$\alpha > \gamma \quad \beta > \gamma$

> Να δειχθεί ότι $2^n \geq n^3$, για $n \geq 10$.

- Για $n = 10$, $2^n = 1024 \geq 1000 = 10^3$ συνεπώς η αρχική υπόθεση ισχύει.
- Έστω ότι ισχύει για $n = k > 10$, δηλαδή $2^k \geq k^3$. $\Rightarrow 2 \cdot 2^k \geq 2 \cdot k^3 \Rightarrow 2^{k+1} \geq 2 \cdot k^3 \geq (k+1)^3$
- Θ.δ.ο. $2^{k+1} \geq (k+1)^3$. Πολλαπλασιάζοντας την επαγωγική υπόθεση με 2 έχουμε ότι $2^{k+1} \geq 2k^3 \overset{?}{\geq} (k+1)^3$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι
  $2k^3 \geq (k+1)^3 \Leftrightarrow (2^{\frac{1}{3}}k)^3 \geq (k+1)^3$
  $\Leftrightarrow 2^{\frac{1}{3}}k \geq k+1 \Leftrightarrow k \geq \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}-1} \approx 3.85$ το οποίο ισχύει αφού $k \geq 10$.

Έτσι δείξαμε ότι η σχέση $2^n \geq n^3$ ισχύει για $n \geq 10$.

Παράδειγμα επαγωγής 3

παραγοντικό

$x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (x-1) \cdot x$

Να δειχθεί ότι η n-οστή παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{1-x}$ είναι $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} n! (x-1)^{-(n+1)}$.

- Για $n = 1$ έχουμε: $f'(x) = (-1)^0 1! (x-1)^{-(1+1)} = (x-1)^{-2}$ που ισχύει αφού $f'(x) = \frac{1(1-x)-x(1-x)'}{(x-1)^2} = \frac{1-x-x(-1)}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}$
- Έστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} k! (x-1)^{-(k+1)}$.
- Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n = k+1$. Έτσι έχουμε $f^{(k+1)}(x) = \left[f^{(k)}(x)\right]' = \left[(-1)^{k-1} k! (x-1)^{-(k+1)}\right]' = (-1)^{k-1} k! (-(k+1))(x-1)^{-(k+1)-1} = (-1)^k (k+1)! (x-1)^{-(k+2)}$

Έτσι δείξαμε ότι $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} n! (x-1)^{-(n+1)}, n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός της ακολουθίας

Μία σημαντική οικογένεια συναρτήσεων είναι αυτή που αποτελείται από συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{0, 1, \cdots\}$ (ή το $\mathbb{N}_\rho = \{\rho, \rho+1, \rho+2, \cdots\}$ για κάποιον θετικό ακέραιο ρ). Τέτοιες συναρτήσεις ονομάζονται ακολουθίες.

Κάθε συνάρτηση
$\alpha : \mathbb{N} \to E \subseteq \mathbb{R}, n \mapsto \alpha(n) \in E$ (ή $\alpha : \mathbb{N}_\rho \to E, n \mapsto \alpha(n) \in E$)
με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ (ή το $\mathbb{N}_\rho$) και τιμές σε ένα σύνολο E, λέγεται *ακολουθία στοιχείων του συνόλου E* στο $\mathbb{N}$ (ή στο $\mathbb{N}_\rho$). Ειδικότερα, αν $E \subseteq \mathbb{R}$ η ακολουθία λέγεται ακολουθία πραγματικών αριθμών.

Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

$f(x)$

$a(n)$

Θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση ακολουθιών πραγματικών αριθμών.

Στην παραπάνω αντιστοιχία οι τιμές της ακολουθίας $\alpha : \mathbb{N} \ni n \to \alpha(n) \in \mathbb{R}$, λέγονται *όροι* της ακολουθίας και ο φυσικός αριθμός n λέγεται *δείκτης* ή *τάξη* του όρου $\alpha(n)$ ο οποίος λέγεται και *n-οστός* ή *γενικός όρος* της ακολουθίας.

Χάριν συντομίας και απλότητας, την ακολουθία θα τη συμβολίζουμε με $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ή (α_n) και τον $\alpha(n)$ με α_n.

Μορφές αναπαράστασης ακολουθιών πραγματικών αριθμών

Τις ακολουθίες πραγματικών αριθμών μπορούμε να τις αναπαραστήσουμε είτε δίνοντας το γενικό όρο:

π.χ. $\alpha_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots$

$$\alpha_n = \begin{cases} 0, & n = 2\rho + 1, \rho \in \mathbb{N} \\ 1, & n = 2\rho, \rho \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ή δίνοντας την αναδρομική σχέση της ακολουθίας και την αρχική τιμή της:

π.χ. $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 5, \alpha_1 = 1.$

$a_1 = 1$

$a_2 = 2a_1 + 5 = 7$

$a_3 = 2a_2 + 5$

$\vdots$

Γενική μορφή αναγωγικού τύπου (αναδρομικής σχέσης)

Όταν δίνουμε την αναδρομική σχέση (αναγωγικό τύπο) μίας ακολουθίας πρέπει να δίνονται οι απαραίτητοι πρώτοι όροι και η αναδρομική σχέση να επιτρέπει να βρίσκουμε τον επόμενο όρο α_{n+1} κάθε όρου α_n από τον προηγούμενό του, ή γενικότερα από ορισμένους από τους προηγούμενούς του. Έτσι έχουμε ακολουθίες της μορφής:

$$\alpha_1 = \alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}) \text{ και } \underline{\alpha_{n+1} = f(\alpha_n)}$$

ή γενικότερα της μορφής:

$$\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = b \ (\alpha, b \in \mathbb{R}) \text{ και } \underline{\alpha_{n+1} = f(\alpha_n, \alpha_{n-1})}$$

fibonacci

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$a_0 = 0$

$a_1 = 1$

Φραγμένες ακολουθίες

Μία ακολουθία (α_n) λέμε ότι είναι *κάτω φραγμένη* αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός ϕ_κ τέτοιος, ώστε να είναι $\alpha_n \geq \phi_\kappa$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Συμβολικά:
(α_n) κάτω φραγμένη $\Leftrightarrow \exists \phi_\kappa \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \geq \phi_\kappa$.

Ο αριθμός ϕ_κ (καθώς και κάθε άλλος πραγματικός αριθμός $s < \phi_\kappa$) λέμε ότι είναι ένα κάτω φράγμα της ακολουθίας.

$a_n = \sin(n) \geq -1 = \varphi_\kappa, \forall n \in \mathbb{N}$

Φραγμένες ακολουθίες

Μία ακολουθία (α_n) λέμε ότι είναι *άνω φραγμένη* αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός ϕ_α τέτοιος, ώστε να είναι $\alpha_n \leq \phi_\alpha$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Συμβολικά:
(α_n) άνω φραγμένη $\Leftrightarrow \exists \phi_\alpha \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \leq \phi_\alpha$.

Ο αριθμός ϕ_α (καθώς και κάθε άλλος πραγματικός αριθμός $s > \phi_\alpha$) λέμε ότι είναι ένα άνω φράγμα της ακολουθίας.

$a_n = \sin(n) \leq 1 = \varphi_a, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Φραγμένες ακολουθίες

Μία ακολουθία (α_n) λέμε ότι είναι *φραγμένη* αν και μόνο αν είναι άνω και κάτω φραγμένη, δηλαδή αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\phi_\kappa, \phi_\alpha (\phi_\kappa \leq \phi_\alpha)$ τέτοιοι, ώστε να είναι $\phi_\kappa \leq \alpha_n \leq \phi_\alpha$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Συμβολικά:

(α_n) φραγμένη $\Leftrightarrow \exists \phi_\kappa, \phi_\alpha \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, \phi_\kappa \leq \alpha_n \leq \phi_\alpha$.

$a_n = 1$, $a_n = \frac{1}{n}$

$0 < \frac{1}{n} \leq 1$

$-1 \leq \sin(n) \leq 1$

φ_κ φ_α

Μία ακολουθία (α_n) λέμε ότι είναι *απολύτως φραγμένη* αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός ϕ, τέτοιος ώστε να ισχύει $|\alpha_n| \leq \phi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Συμβολικά:

(α_n) απολύτως φραγμένη $\Leftrightarrow \exists \phi \in \mathbb{R}_+^* : \forall n \in \mathbb{N}, |\alpha_n| \leq \phi$.
Ο αριθμός ϕ (καθώς και κάθε άλλος πραγματικός αριθμός $s > \phi$), λέμε ότι είναι ένα απόλυτο φράγμα της ακολουθίας. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι:
(α_n) φραγμένη $\Leftrightarrow$ απολύτως φραγμένη (αρκεί να θεωρήσουμε $\phi = max\{|\phi_\kappa|, |\phi_\alpha|\}$).

Φραγμένες ακολουθίες

Το ελάχιστο άνω φράγμα μιας άνω φραγμένης ακολουθίας (α_n) ονομάζεται supremum της (α_n) και συμβολίζεται με $\sup \alpha_n$.

Το μέγιστο κάτω φράγμα μιας κάτω φραγμένης ακολουθίας (α_n) ονομάζεται infimum της (α_n) και συμβολίζεται με $\inf \alpha_n$.

Εάν μια ακολουθία (α_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε θεωρούμε ότι $\sup \alpha_n = +\infty$. Ομοίως, εάν μια ακολουθία (α_n) δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε θεωρούμε ότι $\inf \alpha_n = -\infty$.

Άσκηση στο σπίτι

Παράδειγμα φραγμένης ακολουθίας

$1+a+a^2+a^3+\dots+a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

γεωμετρική πρόοδος με λόγο α

Αποδείξτε ότι η ακολουθία $\alpha_n = 1 + (-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})^2 + \cdots + (-\frac{1}{2})^{n-1}$ είναι φραγμένη.

$a = -\frac{1}{2}$

$a_n = f(n)$

Έχουμε:

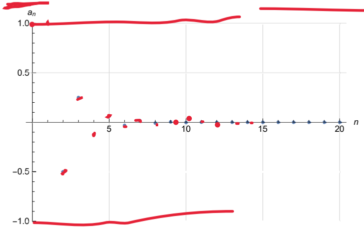
$a = -\frac{1}{2}$

$$\alpha_n = 1 + (-\tfrac{1}{2}) + (-\tfrac{1}{2})^2 + \cdots + (-\tfrac{1}{2})^{n-1} = \frac{1-(-\frac{1}{2})^n}{1-(-\frac{1}{2})} = \boxed{\tfrac{2}{3}(1-(-\tfrac{1}{2})^n).}$$

οπότε

τριγ. ανισ.

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\alpha_n| = \tfrac{2}{3}|1-(-\tfrac{1}{2})^n| \le \tfrac{2}{3}(1+|(-\tfrac{1}{2})^n|) = \tfrac{2}{3}(1+\tfrac{1}{2^n}) \le \tfrac{2}{3}(1+\tfrac{1}{2}) = 1.$$



$\frac{1}{2^n} \le \frac{1}{2^1}$

Παράδειγμα φραγμένης ακολουθίας

Αποδείξτε ότι οι ακολουθίες $\alpha_n = \frac{3n^2-1}{2n^2+1}$ και $b_n = \frac{3n^2+1}{2n^2-1}$ είναι φραγμένες.

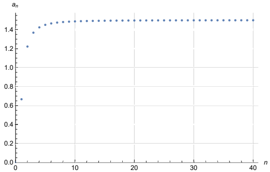
Και οι δύο ακολουθίες είναι θετικές, άρα κάτω φραγμένες από το 0.
Για την α_n έχουμε:

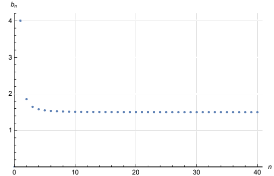
$$\alpha_n = \frac{3n^2 \cancel{-1}}{2n^2 \cancel{+1}} \le \frac{3n^2}{2n^2} = \frac{3}{2},$$

άρα είναι άνω φραγμένη από το $\frac{3}{2}$.
Για την b_n έχουμε:

$$b_n = \frac{3n^2+1}{2n^2-1} \le \frac{3n^2+n^2}{2n^2-n^2} = 4,$$

άρα είναι άνω φραγμένη από το 4.





Μονότονες ακολουθίες

Μία ακολουθία (α_n) λέμε ότι είναι *αύξουσα* αν και μόνο αν ισχύει $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συμβολικά:
(α_n) αύξουσα $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \leq \alpha_{n+1}$.

Μία ακολουθία (α_n) λέμε ότι είναι *γνησίως αύξουσα* αν και μόνο αν ισχύει $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συμβολικά:
(α_n) γνησίως αύξουσα $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n < \alpha_{n+1}$.

Μονότονες ακολουθίες

Μία ακολουθία (α_n) λέμε ότι είναι *φθίνουσα* αν και μόνο αν ισχύει $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συμβολικά:
(α_n) φθίνουσα $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \geq \alpha_{n+1}$.

Μία ακολουθία (α_n) λέμε ότι είναι *γνησίως φθίνουσα* αν και μόνο αν ισχύει $\alpha_n > \alpha_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συμβολικά:
(α_n) γνησίως φθίνουσα $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n > \alpha_{n+1}$.

Μονότονες ακολουθίες

Μία ακολουθία (γνησίως) αύξουσα ή φθίνουσα λέγεται *(γνησίως) μονότονη* ακολουθία.

Για να εξετάσουμε ως προς τη μονοτονία μία ακολουθία συνήθως εργαζόμαστε με μία από τις ακόλουθες μεθόδους:

1) Εξετάζουμε το πρόσημο της διαφοράς (των διαδοχικών όρων) $\alpha_{n+1} - \alpha_n \geq 0 \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$

2) Συγκρίνουμε το λόγο (των διαδοχικών όρων) $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \geq 1$ (όταν οι όροι της ακολουθίας διατηρούν πρόσημο). $\Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$

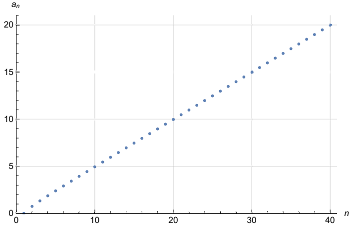
3) Έχοντας μία ένδειξη της μονοτονίας από την ανισοτική σχέση μεταξύ των πρώτων όρων της ακολουθίας, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής προκειμένου να δείξουμε ότι αυτή ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Μονότονες ακολουθίες

Ελέγξτε ως προς τη μονοτονία την ακολουθία $\alpha_n = \frac{n^2-1}{2n}$.

Έχουμε ότι $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{(n+1)^2-1}{2(n+1)} - \frac{n^2-1}{2n} = \frac{n^2+n+1}{2n(n+1)} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα η α_n είναι γνησίως αύξουσα.

Εναλλακτικά, έχουμε: $\alpha_n = \frac{n^2-1}{2n} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2n} < \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} = a_{n+1}$.



Υπακολουθίες

$a_n = \frac{1}{n}$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{8} \ldots$

a_{2n} $\quad s_n = 2n$, a_{s_n}

Έστω η ακολουθία πραγματικών αριθμών (α_n) και μία γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών (s_n). Μπορούμε τότε να ορίσουμε την ακολουθία (b_n) με $b_n = \alpha_{s_n}, n \in \mathbb{N}$. Πρόκειται για την ακολουθία με όρους:

$$\alpha_{s_1}, \alpha_{s_2}, \cdots, \alpha_{s_n}, \cdots$$

και η οποία λέγεται υπακολουθία της (α_n).

Παράδειγμα: Αν θεωρήσουμε την ακολουθία (α_n) με $\alpha_n = \frac{(-1)^n}{n}$, τότε η υπακολουθία η οποία προκύπτει αν $s_n = 2n$ είναι η $b_n = \alpha_{2n} = \frac{1}{2n}$.

Η έννοια του ορίου

Λέμε ότι η ακολουθία (α_n) συγκλίνει στο $\alpha \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n_0 = n_0(\epsilon)$ τέτοιος, ώστε να είναι $|\alpha_n - \alpha| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Συμβολικά:

$$\lim \alpha_n = \alpha \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : |\alpha_n - \alpha| < \epsilon, \forall n \geq n_0$$

Η έννοια του ορίου ακολουθίας γεωμετρικά σημαίνει ότι, αν μία ακολουθία συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό α τότε, οποιαδήποτε ϵ-περιοχή του α και αν επιλέξουμε, μετά από κάποιον όρο της ακολουθίας όλοι οι επόμενοι θα βρίσκονται στην περιοχή αυτή, οσοδήποτε μικρή και αν είναι αυτή.

Παράδειγμα απόδειξης ορίου

Η ακολουθία (α_n) με $(\alpha_n) = \frac{1}{n^2}$ έχει όριο το 0 (είναι μηδενική). Με βάση τον ορισμό του ορίου έχουμε:

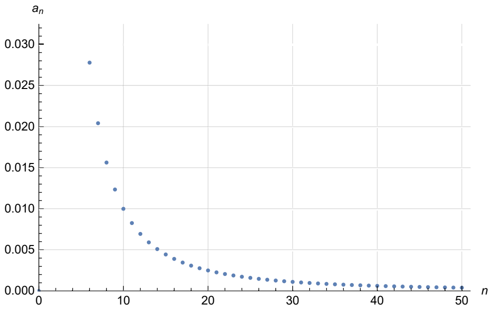
$|\alpha_n - 0| = \boxed{\frac{1}{n^2} < \epsilon} \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \Leftrightarrow$

$n \geq n_0, n_0 := \boxed{\left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \right\rfloor} + 1$

Άρα $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \right\rfloor + 1 : \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \epsilon, \forall n \geq n_0$

$\lfloor 1,2 \rfloor = 1$

$\lceil 5.2 \rceil = 6$



Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Παρατηρούμε ότι η άλγεβρα των ορίων συγκλινουσών ακολουθιών ταυτίζεται με τις ιδιότητες της άλγεβρας πραγματικών αριθμών. Δηλαδή αν (α_n) και (β_n) είναι συγκλίνουσες ακολουθίες με όρια α και β αντίστοιχα τότε:

(α) $\lim_{n\to\infty} c\alpha_n = c\alpha$

(β) $\lim (\alpha_n \pm \beta_n) = \alpha \pm \beta$

(γ) $\lim (\alpha_n)(\beta_n) = \alpha\beta$

(δ) $\lim (\alpha_n/\beta_n) = \alpha/\beta$ υπό την προϋπόθεση ότι $\beta \neq 0$

Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Το όριο συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μοναδικό

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_n \to \alpha \\ \alpha_n \to \beta\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta$$

Μία οποιαδήποτε υπακολουθία συγκλίνουσας ακολουθίας έχει το ίδιο όριο με την ακολουθία. Συνοπτικά:

$\frac{1}{n} \to 0$ $\frac{1}{2n} \to 0$

$$\alpha_n \to \alpha \Rightarrow \alpha_{s_n} \to \alpha$$

Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Αν $k \in \mathbb{N}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha_n \to \alpha \Leftrightarrow \alpha_{n+k} \to \alpha$$

Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. Συνοπτικά:

$$\alpha_n \to \alpha \cancel{\Leftrightarrow} (\alpha_n) \text{ φραγμένη.}$$

sin(n)

Το γινόμενο μηδενικής ακολουθίας επί φραγμένη ακολουθία είναι μηδενική ακολουθία. Συνοπτικά:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_n \to 0 \\ (\beta_n) \text{ φραγμένη} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_n\beta_n \to 0$$

$$\frac{1}{n}\sin(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Αν η (β_n) είναι μηδενική ακολουθία και η (α_n) ακολουθία τέτοια ώστε για κάθε $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ να είναι $|\alpha_n| \leq s|\beta_n|, s > 0$, τότε η ακολουθία (α_n) είναι μηδενική.
Συνοπτικά:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n \leq s|\beta_n|, \forall n \geq n_0, s > 0 \\ (\beta_n) \to 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_n \to 0$$

Ιδιότητα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών (κριτήριο παρεμβολής):

$$\left.\begin{aligned} \beta_n \leq \alpha_n \leq c_n, \forall n \geq n_0 \\ \lim\ \beta_n = \lim\ c_n = \alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_n \to \alpha$$

Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Αν οι ακολουθίες (α_n) και (β_n) είναι συγκλίνουσες και ισχύει $\alpha_n < \beta_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε θα είναι $lim\ \alpha_n \leq lim\ \beta_n$. Συνοπτικά:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_n \to \alpha, \beta_n \to \beta \\ \alpha_n < \beta_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \leq \beta$$

Για κάθε ακολουθία (α_n) ισχύει

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_{2n} \to \alpha \\ \alpha_{2n-1} \to \alpha \end{array}\right\} \Leftrightarrow \alpha_n \to \alpha$$

Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Κριτήριο σύγκλισης του Cauchy

Μία ακολουθία (α_n) συγκλίνει, αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n_0 = n_0(\epsilon)$ τέτοιος, ώστε να είναι $|\alpha_p - \alpha_q| < \epsilon$ για κάθε $p, q \geq n_0$.
Συμβολικά:
$lim\ \alpha_n = \alpha \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n = n_0(\epsilon) : |\alpha_p - \alpha_q| < \epsilon, \forall p, q \geq n_0$.

Παρατήρηση: με βάση αυτό το κριτήριο, δε χρειάζεται να γνωρίζουμε το όριο α προκειμένου να δείξουμε ότι η ακολουθία (α_n) συγκλίνει.

Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα. Ειδικότερα,

$$\left.\begin{array}{r}(\alpha_n) \text{ αύξουσα} \\ \alpha_n \leq \phi_\alpha, \forall n \in \mathbb{N}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\ \alpha_n = \alpha \leq \phi_\alpha$$

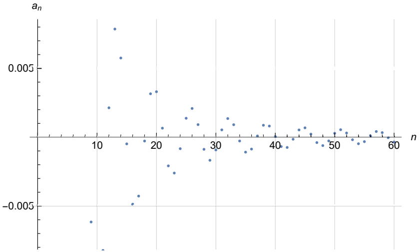
$$\left.\begin{array}{r}(\alpha_n) \text{ φθίνουσα} \\ \alpha_n \geq \phi_\kappa, \forall n \in \mathbb{N}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\ \alpha_n = \alpha \geq \phi_\kappa$$

Σε αυτές τις περιπτώσεις οι ακολουθίες συγκλίνουν στο $\sup a_n$ και $\inf a_n$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\alpha_n = \frac{\sin(n)+\cos(n)}{n^2}$.

Ισχύει ότι $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ και $-1 \leq \cos(n) \leq 1$.
Συνεπώς $-2 \leq \sin(n) + \cos(n) \leq 2$ και $-\frac{2}{n^2} \leq \frac{(\sin(n)+\cos(n))}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}$.
Όμως $\lim -\frac{2}{n^2} = 0$ και $\lim \frac{2}{n^2} = 0$. Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim \frac{(\sin(n)+\cos(n))}{n^2} = 0$.



Απειριζόμενες ακολουθίες

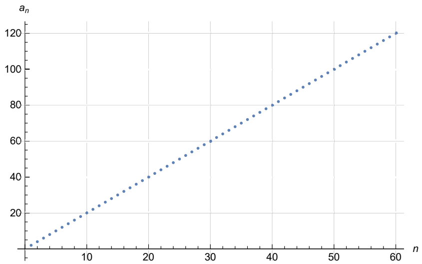
Λέμε ότι η ακολουθία (α_n) *απειρίζεται θετικά* ή ότι το όριο της (α_n) είναι το $+\infty$, αν και μόνο αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n_0 = n_0(M)$ (δηλ. που εξαρτάται από το M) τέτοιος ώστε να είναι $\alpha_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Συμβολικά,
$\lim\ \alpha_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 = n_0(M) : \alpha_n > M, \forall n \geq n_0$

Λέμε ότι η ακολουθία (α_n) *απειρίζεται αρνητικά* ή ότι το όριο της (α_n) είναι το $-\infty$, αν και μόνο αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n_0 = n_0(M)$ (δηλ. που εξαρτάται από το M) τέτοιος ώστε να είναι $\alpha_n < -M$ για κάθε $n \geq n_0$. Συμβολικά,
$\lim\ \alpha_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 = n_0(M) : \alpha_n < -M, \forall n \geq n_0$

Παράδειγμα

Δείξτε ότι η ακολουθία $\alpha_n = 2n$ απειρίζεται θετικά.

Πρέπει να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε τιμή του $M > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(M)$ τέτοιος ώστε $\alpha_n > M, \forall n > n_0$, ισοδύναμα $2n > M, \forall n > n_0$. Επιλέγουμε το $n_0 = \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + 1$.



Θεώρημα

Υποθέτουμε ότι η (α_n) είναι μία συγκλίνουσα ακολουθία με όριο α, ότι η (β_n) απειρίζεται θετικά και ότι η α είναι μία σταθερά. Ισχύει ότι:

(α) $\lim\ \alpha\beta_n = +\infty$ για $\alpha > 0$ και $-\infty$ για $\alpha < 0$.

(β) $\lim\ (\alpha_n + \beta_n) = +\infty$

(γ) $\lim\ (\alpha_n - \beta_n) = -\infty$

(δ) $\lim\ (\alpha_n)(\beta_n) = +\infty$ ~~για $\alpha > 0$ και $-\infty$ για $\alpha < 0$~~

(ε) $\lim\ (\alpha_n/\beta_n) = 0$

Σχέση ορίων συναρτήσεων με όρια ακολουθιών

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ και $f(n) = \alpha_n$ όπου $n \in \mathbb{N}$, τότε $\lim \alpha_n = L$ ($L \in \mathbb{R}$ ή $\pm\infty$).

Αν $\lim \alpha_n = \alpha$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x = \alpha$, τότε

$$\lim f(\alpha_n) = f(\alpha)$$

Άσκηση

Δείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} = 0$.

Λύση

Υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} \overset{L'Hospital\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(\ln(x)))'}{(\ln(x))'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln(x)}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0$$

Εφαρμογή

Να δειχθεί ότι η ακολουθία $\alpha_{n+1} = \frac{2}{5}\alpha_n + 5, \alpha_0 = 0$ είναι συγκλίνουσα.

Θ.δ.ο. είναι αύξουσα.
Για $n = 0$ ισχύει ότι $\alpha_0 = 0$ και $\alpha_1 = 5 > \alpha_0$.
Προχωράμε με την επαγωγή προσπαθώντας να δείξουμε ότι είναι αύξουσα:
Για $n = k$ υποθέτουμε ότι $\alpha_{k+1} \geq \alpha_k \Leftrightarrow \frac{2}{5}\alpha_k + 5 \geq \alpha_k \Leftrightarrow \frac{3}{5}\alpha_k \leq 5 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_k \leq \frac{25}{3}}$.
Για $n = k+1$ Θ.δ.ό. $\alpha_{k+2} \geq \alpha_{k+1}$. Όμως, $\alpha_{k+2} \geq \alpha_{k+1} \Leftrightarrow \frac{2}{5}\alpha_{k+1} + 5 \geq \alpha_{k+1} \Leftrightarrow$ $\frac{2}{5}(\frac{2}{5}\alpha_k + 5) + 5 \geq \frac{2}{5}\alpha_k + 5 \Leftrightarrow \frac{4}{25}\alpha_k + 7 \geq \frac{2}{5}\alpha_k + 5 \Leftrightarrow 2 \geq \frac{6}{25}\alpha_k \Leftrightarrow \alpha_k \leq \frac{25}{3}$ που ισχύει από την επαγωγική υπόθεση.

Εφαρμογή

Θ.δ.ό. είναι άνω φραγμένη.
Έστω σ ένα άνω φράγμα της α_n. Τότε
$\alpha_n < \sigma \Leftrightarrow \frac{2}{5}\alpha_n < \frac{2}{5}\sigma \Leftrightarrow \frac{2}{5}\alpha_n + 5 < \frac{2}{5}\sigma + 5 \Leftrightarrow \alpha_{n+1} < \frac{2}{5}\sigma + 5$. <6 Εάν επιλέξουμε $\sigma \geq \frac{2}{5}\sigma + 5 \Leftrightarrow \frac{3}{5}\sigma \geq 5 \Leftrightarrow \sigma \geq \frac{25}{3}$ (Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε απευθείας να λύσουμε την εξίσωση $x = \frac{2}{5}x + 5 \Leftrightarrow \frac{3}{5}x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{25}{3}$).
Δείχνουμε το ζητούμενο με επαγωγή:

- Για $n = 0$, $\alpha_0 = 0 < \frac{25}{3}$.
- Για $n = k$, έστω $\alpha_k \leq \frac{25}{3}$.
- Για $n = k + 1$, Θ.δ.ό. $\alpha_{k+1} \leq \frac{25}{3}$.
  Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε
  $\alpha_k \leq \frac{25}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{5}\alpha_k \leq \frac{2}{5}\frac{25}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{5}\alpha_k + 5 \leq \frac{10}{3} + 5 \Leftrightarrow \alpha_{k+1} \leq \frac{25}{3}$.

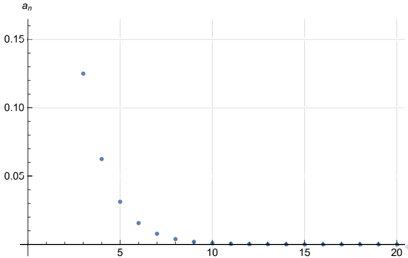
Άρα η ακολουθία είναι συγκλίνουσα ως αύξουσα και άνω φραγμένη.

Παράδειγμα

Δείξτε ότι η ακολουθία $\alpha_n = \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, 3, \cdots$ είναι συγκλίνουσα.

Η ακολουθία $\alpha_n = \frac{1}{2^n}$ είναι φθίνουσα. Για να το διαπιστώσουμε αυτό, λαμβάνουμε υπόψη ότι:

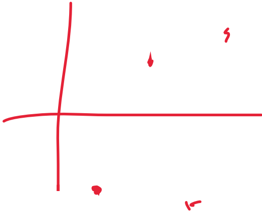
$\alpha_{n+1} = \frac{1}{\boxed{2^{n+1}}} = \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{a_n}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\alpha_n$ και συνεπώς $\alpha_{n+1} < \alpha_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Επίσης η ακολουθία αυτή είναι κάτω φραγμένη αφού: $0 < \frac{1}{2^n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Επομένως η ακολουθία είναι συγκλίνουσα.



Χρήσιμα γνωστά όρια

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0$
- $$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & |a| < 1 \\ 1 & a = 1 \\ +\infty & a > 1 \\ \text{δεν υπάρχει} & a \leq -1 \end{cases}$$

$1^n = 1$



$n: 1, 2, \ldots$

$a = -1$

$(-1)^n \quad (-2)^n \quad (-3.5)^n$

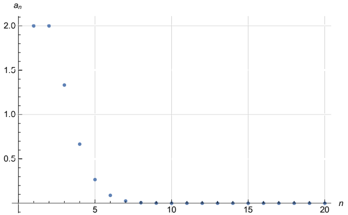
Κριτήριο λόγου

Όταν $\lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} = b$, με $\alpha_n \neq 0$ και $0 \leq b < 1$ τότε $\alpha_n \to 0$.
Εάν $b > 1$ τότε $\alpha_n \to \infty$, ενώ εάν $b = 1$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Παράδειγμα:
Έστω $\alpha_n = \frac{2^n}{n!}$. Τότε βάσει του κριτηρίου του λόγου έχουμε:

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

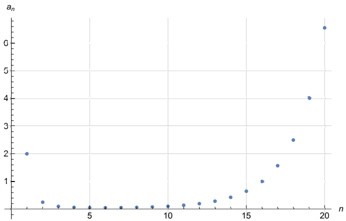
Επομένως η ακολουθία συγκλίνει στο 0.



Κριτήριο ρίζας

Όταν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = b$, με $\alpha_n \geq 0$ και $0 \leq b < 1$ τότε $\alpha_n \to 0$.
Εάν $b > 1$ τότε $\alpha_n \to \infty$, ενώ εάν $b = 1$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Παράδειγμα:
Έστω $\alpha_n = \frac{2^n}{n^4}$. Τότε βάσει του κριτηρίου της ρίζας έχουμε:
$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^4}} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^4} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{1^4} = 2 > 1$$
Επομένως η ακολουθία αποκλίνει στο $+\infty$.



Παραδείγματα

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^4+x^3+1}=\lim\frac{x^2}{x^4}=\lim\frac{1}{x^2}=0$$

$$=\lim\frac{1}{x^2+x+1}$$

Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία: $\alpha_n = \frac{n^2}{n^4+n^3+1}$

Παρατηρούμε ότι $\overset{\to 0}{0} \leq \frac{n^2}{n^4+n^3+1} \leq \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $\alpha_n \to 0$.

Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία: $\alpha_n = \frac{4\cdot 10^n - 3\cdot 10^{2n}}{3\cdot 10^{n-1} - 2\cdot 10^{2n-1}}$

Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με 10^{2n-1} και έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}\frac{4\,\overset{\to 0}{\frac{1}{10^{n-1}}} - 3\cdot 10}{3\cdot \overset{\to 0}{\frac{1}{10^n}} - 2} = \frac{4\cdot 0 - 3\cdot 10}{3\cdot 0 - 2} = 15$$

Παραδείγματα

Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία: $\alpha_n = \frac{n^2 2^n + 3^n - 1}{4^n + n}$

Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με 4^n και έχουμε:
$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{2^n} + \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{1}{4^n}}{1 + \frac{n}{4^n}}$. Θα υπολογίσουμε πρώτα το όριο $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}$ με χρήση του κριτηρίου λόγου: $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2} = \frac{1}{2} < 1$
άρα $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$. Κατά όμοιο τρόπο υπολογίζουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{4^n} = 0$. Τέλος, γνωρίζουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} = 0$, οπότε τελικά: $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{0+0-0}{1+0} = 0$.

Παραδείγματα

Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία: $\alpha_n = \frac{1+3^n}{1+\lambda^n+3^n}$ όπου $\lambda \geq 0$.

Διαιρούμε με 3^n και έχουμε: $a_n = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{\lambda}{3}\right)^n+1}$. Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις:

- $0 \leq \lambda < 3$ όπου ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda/3)^n = 0$, οπότε

  $$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1/3)^n+1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1/3)^n+\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda/3)^n+1} = 1.$$

- $\lambda = 3$ όπου ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty} (3/3)^n = 1$, οπότε $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1/3)^n+1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1/3)^n+\lim\limits_{n\to\infty}(3/3)^n+1} = \frac{1}{2}$.
- $\lambda > 3$ όπου ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda/3)^n = +\infty$, οπότε

  $$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1/3)^n+1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1/3)^n+\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda/3)^n+1} = \frac{0+1}{1+\infty+1} = 0.$$

Παραδείγματα

Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία $\alpha_n = \sqrt{2+\alpha_{n-1}}$ με $\alpha_1 = \sqrt{2}$.

Θα δείξουμε πρώτα ότι είναι φραγμένη. Έστω $\sigma > 0$ ένα άνω φράγμα της α_n, τότε θα έχουμε ισοδύναμα $\alpha_{n-1} < \sigma \Leftrightarrow 2+\alpha_{n-1} < 2+\sigma \Leftrightarrow \alpha_n = \sqrt{2+\alpha_{n-1}} < \sqrt{2+\sigma}$.
Αρκεί να επιλέξουμε το σ έτσι ώστε
$\sigma \geq \sqrt{2+\sigma} \Leftrightarrow \sigma^2 \geq 2+\sigma \Leftrightarrow \sigma^2 - \sigma - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (\sigma+1)(\sigma-2) \geq 0$. Επειδή $\sigma > 0$ τότε αρκεί $\sigma \geq 2$, οπότε επιλέγουμε $\sigma = 2$.
Συνεχίζοντας με επαγωγή:

- Για $n = 1$ έχουμε $\alpha_1 = \sqrt{2} < 2$.
- Έστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή $\alpha_k < 2$.
- Τότε $\alpha_k < 2 \Leftrightarrow \alpha_k + 2 < 2+2 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha_k+2} < \sqrt{4} \Leftrightarrow \alpha_{k+1} < 2$, επομένως ισχύει.

Θα δείξουμε ότι είναι αύξουσα. Έχουμε:
$\alpha_n^2 - \alpha_{n-1}^2 = 2+\alpha_{n-1} - \alpha_{n-1}^2 = -(\alpha_{n-1}^2 - \alpha_{n-1} - 2) = (2-\alpha_{n-1})(\alpha_{n-1}+1) > 0$ επειδή ισχύει $0 < \alpha_{n-1} < 2$. Επομένως $\alpha_n^2 > \alpha_{n-1}^2 \Leftrightarrow \alpha_n > \alpha_{n-1}$ (αφού οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί). Επομένως η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.

Άσκηση

Σε ποιόν αριθμό συγκλίνει η $\alpha_n = \sqrt{2 + \alpha_{n-1}}$ με $\alpha_1 = \sqrt{2}$;

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_{n-1}} = \sqrt{2 + \lim_{n\to\infty} a_{n-1}} = \sqrt{2+x}$$

Λύση

Έστω $x = \lim_{x\to\infty} \alpha_n \geq 0$. Τότε, $x = \lim_{x\to\infty} \sqrt{2+\alpha_{n-1}} = \sqrt{2 + \lim_{x\to\infty} a_{n-1}} = \sqrt{2+x}$.
Υψώνουμε τα 2 μέλη στο τετράγωνο: $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (αφού $x \geq 0$).

Μαθηματική Ανάλυση
Διάλεξη 4

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Σπύρος Χαλκίδης
Ε.ΔΙ.Π.

Οκτώβριος 2022

Θέματα 4ης διάλεξης

- Σειρές
- Σύγκλιση σειρών
- Δυναμοσειρές
- Ανάπτυγμα Taylor

Σειρές

Η έννοια της σειράς αναφέρεται στο “άθροισμα” των, άπειρου πλήθους, όρων μιας ακολουθίας πραγματικών αριθμών a_n:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Ορίζουμε την ακολουθία μερικών αθροισμάτων της a_n ως:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Έστω η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n^2}$. Η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της a_n είναι:

$$S_1 = \frac{1}{1}$$

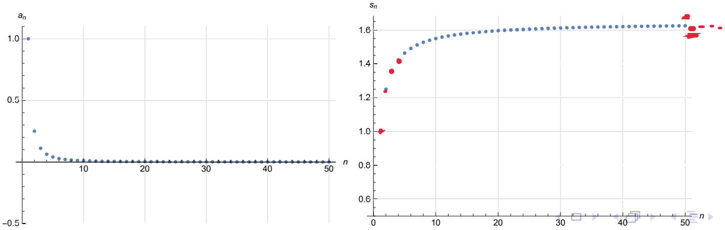
$$S_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2^2}$$

$$S_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$$

$$S_4 = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$$



Σειρές

Το διατεταγμένο ζεύγος $((a_n), S_n)$ ονομάζεται σειρά πραγματικών αριθμών, και συμβολίζεται με

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \text{ ή } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Ο αριθμός a_n λέγεται γενικός ή n-οστός όρος της σειράς και το άθροισμα S_n n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς.

Θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει σε ένα αριθμό $s \in \mathbb{R}$ εάν και μόνο εάν η ακολουθία μερικών αθροισμάτων S_n συγκλίνει στον αριθμό s. Τότε γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \text{ ή } \lim_{n\to\infty} S_n = s$$

Ο αριθμός s λέγεται άθροισμα της σειράς.

Αν η ακολουθία S_n δεν συγκλίνει στο $\mathbb{R}$, τότε λέμε ότι η σειρά αποκλίνει $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty \text{ ή } \lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty\right)$.

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$

Παραδείγματα μερικών αθροισμάτων

$\boxed{1+2+3+\dots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}}$

$\omega + 2\omega + 3\omega + \dots + (n-1)\omega =$
$= \omega(\underbrace{1+2+3+\dots+(n-1)})$

- Άθροισμα n πρώτων όρων αριθμητικής προόδου:
  $a_1 = a,\ a_2 = a+\omega,\ a_3 = a+2\omega,\ \dots,\ a_n = a+(n-1)\omega$
  Εάν υπολογίσουμε το S_n έχουμε:
  $S_n = a + a + \omega + a + 2\omega + \dots + a + (n-1)\omega = \left(\frac{a_1+a_n}{2}\right) n = na + \frac{n(n-1)}{2}\omega$
  Άν $\omega > 0$ τότε $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, άρα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$
- Άθροισμα n πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου:
  $a_1 = a,\ a_2 = a\lambda,\ a_3 = a\lambda^2,\ \dots\ a_n = a\lambda^{n-1}$
  Εάν υπολογίσουμε το S_n έχουμε:
  $S_n = a + a\lambda + a\lambda^2 + \dots + a\lambda^{n-1} = \frac{a(\lambda^n-1)}{\lambda-1},\ \lambda \neq 1$
  Άν $|\lambda| < 1$ τότε $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-\lambda}$, άρα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-\lambda}$

$a(\underbrace{1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\dots+\lambda^{n-1}})$

$\boxed{1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\dots+\lambda^n = \frac{\lambda^{n+1}-1}{\lambda-1}}$

$\lim_{n\to\infty} \lambda^n$

1^n

$\lambda = 1$

$\lambda > 1 \quad \lambda < -1$

Κριτήριο μη σύγκλισης

Εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(Ισοδύναμη πρόταση): Εάν $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Προσοχή: Εάν $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ δεν συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Παραδείγματα

- Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ δεν συγκλίνει διότι $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.
- Η **αρμονική** σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει, παρόλο που $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (αποδεικνύεται με το κριτήριο σύγκλισης *Cauchy* για την S_n - Διάλεξη 3 $|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \cdots \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$).
- Η **αρμονική σειρά ρ-τάξης** ή **σειρά Dirichlet**: $\zeta(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\rho}$, συγκλίνει εάν $\rho > 1$ ενώ αποκλίνει εάν $\rho \leq 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Κριτήριο Σύγκρισης

$\forall n$

Έστω $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ και $a_n \leq b_n$. Τότε:

- Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
- Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, τότε αποκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Υπολογίστε εάν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n+1}$.

Έχουμε $3^n < 3^n + 1 \Rightarrow \frac{5}{3^n} > \frac{5}{3^n+1} \Rightarrow \overset{b_n}{5\left(\frac{1}{3}\right)^n} > \overset{a_n}{\frac{5}{3^n+1}}$ Όμως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{1}{3}\right)^n = 5\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ συγκλίνει ως γεωμετρική με λόγο $\frac{1}{3} < 1$, άρα συγκλίνει και η αρχική.

$\Sigma \lambda^n$

Πόρισμα

Έστω $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$. Τότε:

1. Αν $0 < k < +\infty$ τότε η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.
2. Αν $k = 0$ τότε
   - Αν η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε θα συγκλίνει και η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$
   - Αν η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, τότε θα αποκλίνει και η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$
3. Αν $k = \infty$ τότε
   - Αν η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε θα συγκλίνει και η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$
   - Αν η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει, τότε θα αποκλίνει και η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Παράδειγμα

Να εξεταστεί η σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2n^3-1}$.

Θεωρούμε τη συγκλίνουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Υπολογίζουμε $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \ln n}{2n^3-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\ln n}{2-\frac{1}{n^3}} = 0$ (γιατί;)

Από το παραπάνω πόρισμα (2), προκύπτει ότι η σειρά συγκλίνει.

Κριτήριο Λόγου (D' Alembert)

Αν $\cancel{a_n > 0}$, τότε:

- Αν $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1$, $\forall n > n_0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.
- Αν $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, $\forall n > n_0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$, τότε η σειρά συγκλίνει για $r < 1$ και αποκλίνει για $r > 1$. Για $r = 1$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Παραδείγματα

a_n

Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Παρατηρούμε ότι
$\displaystyle\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\,\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n!(n+1))^2}{(2n)!(2n+1)(2n+2)}\,\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4} < 1$. Άρα η σειρά συγκλίνει.

Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$.

Παρατηρούμε ότι $\displaystyle\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2^{n+1}n^2}{2^n(n+1)^2} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 > 1$ άρα η σειρά δεν συγκλίνει.

Κριτήριο Ρίζας (Cauchy)

Αν $a_n > 0$, τότε:

- Αν $\sqrt[n]{a_n} \leq r < 1$, $\forall n > n_0$, τότε η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.
- Αν $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, $\forall n > n_0$, τότε η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r$, τότε η σειρά συγκλίνει για $r < 1$ και αποκλίνει για $r > 1$. Για $r = 1$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Παραδείγματα

Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Παρατηρούμε ότι $\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \sqrt[n]{\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\right]^{n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e} < 1$. Άρα η σειρά συγκλίνει.

Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$.

Παρατηρούμε ότι $\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{1\cdot 1} = 2 > 1$ άρα η σειρά αποκλίνει.

Απόλυτη σύγκλιση

Εάν η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Βάσει αυτού του θεωρήματος, μπορούμε να αντιπαρέρχουμε την απαίτηση $a_n > 0$ στο κριτήριο Λόγου και Ρίζας (χρησιμοποιώντας απόλυτη τιμή).

Προσοχή, εάν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε **δεν** συνεπάγεται ότι συγκλίνει και απόλυτα.

Κριτήριο Ολοκληρώματος

Ας υποθέσουμε ότι η $f(x)$ είναι μία συνεχής, θετική και φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα $[k, \infty)$ και $f(n) = \alpha_n$. Τότε:

1 2 3

(1) Αν το ολοκλήρωμα $\int_k^\infty f(x)dx$ συγκλίνει τότε το ίδιο ισχύει και για το $\sum_{n=k}^\infty \alpha_n$.

(2) Αν το ολοκλήρωμα $\int_k^\infty f(x)dx$ αποκλίνει τότε το ίδιο ισχύει και για το $\sum_{n=k}^\infty \alpha_n$.

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ συγκλίνει.

$[1, \infty)$

Η συνάρτηση $f(x) = xe^{-x^2}$ έχει παράγωγο
$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2) < 0$ για $x \geq 1$. Συνεπώς η $f(x)$ είναι φθίνουσα στο $[1, +\infty]$.
$\int_1^{\infty} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2} \lim_{t \to +\infty} [e^{-x^2}]_1^t = \frac{1}{2e}$.
Έτσι, σύμφωνα με το κριτήριο ολοκληρώματος εφόσον το ολοκλήρωμα της $f(x)$ με $f(n) = ne^{-n^2}$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η αντίστοιχη σειρά.

Εναλλάσσουσες σειρές

Εναλλάσσουσα σειρά ονομάζεται αυτής της οποίας οι όροι εναλλάσσουν το πρόσημό τους συνεχώς, δηλαδή είναι της μορφής:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

Κριτήριο του Leibniz

Μία εναλλάσσουσα σειρά συγκλίνει όταν ισχύουν τα παρακάτω:

- $a_n > 0$
- είναι φθίνουσα ($a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$)
- $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Παραδείγματα

Εξετάστε εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ συγκλίνει.

- $a_n = \frac{1}{2n-1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
- a_n φθίνουσα αφού $a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2n-1} = a_n$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$

Εξετάστε εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\rho}}$, με $\rho > 0$ συγκλίνει.

- $a_n = \frac{1}{n^{\rho}} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
- a_n φθίνουσα αφού $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{\rho}} \leq \frac{1}{n^{\rho}} = a_n$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\rho}} = 0$

Τηλεσκοπικές σειρές

Μια σειρά, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ονομάζεται τηλεσκοπική εάν μπορεί να γραφεί ως $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$, όπου a_n και b_n ακολουθίες. Μια τηλεσκοπική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει εάν και μόνο εάν η ακολουθία b_n συγκλίνει, στην οποία περίπτωση ισχύει και ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \boxed{b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n.}$

Ο έλεγχος της σύγκλισης σε μια τηλεσκοπική σειρά πραγματοποιείται ως εξής:
$s_n = a_1 + a_2 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n =$
$(b_1 - \cancel{b_2}) + (\cancel{b_2} - \cancel{b_3}) + (\cancel{b_3} - \cancel{b_4}) + \cdots + (\cancel{b_{n-1}} - b_n) + (b_n - b_{n+1}) = \boxed{b_1 - b_{n+1}}$, άρα η σειρά θα συγκλίνει εάν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} b_{n+1}$ και το άθροισμά της θα είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Παράδειγμα

Εξετάστε εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ συγκλίνει.

$a_n = b_n - b_{n+1}$

Η σειρά είναι τηλεσκοπική αφού $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$. Έτσι έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Εξετάστε εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ συγκλίνει.

Η σειρά είναι τηλεσκοπική αφού $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1}$. Έτσι έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Δυναμοσειρές

$x=c$

$(x-c)^n$

$(x-a)^n$

Μια δυναμοσειρά, είναι μια σειρά της μορφής:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots$$

όπου $c \in \mathbb{R}$ σταθερά.

Το x μεταβάλλεται γύρω από το c, και για αυτό το λόγο λέμε ότι η σειρά έχει κέντρο c ή ότι είναι δυναμοσειρά γύρω από το σημείο c.

Δυναμοσειρές

Η πολυωνυμική συνάρτηση:

$$S_n(x) = a_0 + a_1 (x - c) + a_2 (x - c)^2 + \cdots + a_n (x - c)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ονομάζεται μερικό άθροισμα της δυναμοσειράς και οι συναρτήσεις:

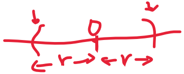
$$a_0, a_1 (x - c), a_2 (x - c)^2, \ldots, a_n (x - c)^n, \ldots$$

ονομάζονται όροι της δυναμοσειράς:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$$

Σύγκλιση δυναμοσειρών

$f(x)$
dx



- Μια δυναμοσειρά, παρόλο που ορίζεται στο $\mathbb{R}$, το σύνολο σύγκλισής της δεν είναι γενικά όλο το $\mathbb{R}$.
- Κάθε δυναμοσειρά συγκλίνει στο κέντρο της, αφού για $x = c$ έχει άθροισμα το a_0.
- Εάν το c δεν είναι το μόνο σημείο που συγκλίνει η δυναμοσειρά, θα υπάρχει ένας αριθμός r με $0 < r \leq \infty$, τέτοιος ώστε η δυναμοσειρά να συγκλίνει όταν $\boxed{|x - c| < r}$ και να αποκλίνει όταν $|x - c| > r$. Ο αριθμός r καλείται **ακτίνα σύγκλισης** της δυναμοσειράς.

Κριτήριο Λόγου για δυναμοσειρές

Έστω $a_n \neq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και r η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$. Τότε

$$r = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 \\ 0, & \text{αν } \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty \\ 1/\ell, & \text{αν } \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

$r = \frac{1}{\ell}$

και η δυναμοσειρά αντίστοιχα:

- συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- αποκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{c\}$
- συγκλίνει με διάστημα σύγκλισης $(c-r, c+r)$. Σε αυτή την περίπτωση, θα πρέπει να ελέγξουμε τη σύγκλιση στα άκρα του διαστήματος (αντικαθιστώντας $x = c + r$ και $x = c - r$, και ελέγχοντας ως προς τη σύγκλιση τις σειρές που προκύπτουν).

Κριτήριο Ρίζας για δυναμοσειρές

Έστω $a_n \neq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και r η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$. Τότε

$$r = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \\ 0, & \text{αν } \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \\ 1/\ell, & \text{αν } \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

και η δυναμοσειρά αντίστοιχα:

- συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- αποκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{c\}$
- συγκλίνει με διάστημα σύγκλισης $(c-r, c+r)$. Σε αυτή την περίπτωση, θα πρέπει να ελέγξουμε τη σύγκλιση στα άκρα του διαστήματος (αντικαθιστώντας $x = c+r$ και $x = c-r$, και ελέγχοντας ως προς τη σύγκλιση τις σειρές που προκύπτουν).

Παράδειγμα

$c=1$

Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$.

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Έχουμε $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}} = 1$ (εναλλακτικά $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = \sqrt{1} = 1$)

Επομένως η ακτίνα σύγκλισης είναι $r = \frac{1}{1} = 1$ και το διάστημα σύγκλισης το $(c-r, c+r) = (1-1, 1+1) = (0,2)$. Θα πρέπει να ελέγξουμε τα δύο άκρα του διαστήματος:

- Για $x=0$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ η οποία συγκλίνει (γιατί;)
- Για $x=2$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ η οποία αποκλίνει (γιατί;)

Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $[0,2)$.

Παράδειγμα

Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 3^n}(x+2)^n$.

Έχουμε $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2 3^{n+1}}}{\frac{(-1)^n}{n^2 3^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3(n+1)^2} = \frac{1}{3}$.

Επομένως η ακτίνα σύγκλισης είναι $r = \frac{1}{1/3} = 3$ και το διάστημα σύγκλισης το $(c-r, c+r) = (-2-3, -2+3) = (-5, 1)$. Θα πρέπει να ελέγξουμε τα δύο άκρα του διαστήματος:

- Για $x = -5$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 3^n}(-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ η οποία συγκλίνει (γιατί;)
- Για $x = 1$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 3^n} 3^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ η οποία συγκλίνει (γιατί;)

Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-5, 1]$.

Γεωμετρική ερμηνία σύγκλισης δυναμοσειράς

Αποδείξαμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 3^n}(x+2)^n$ συγκλίνει στο διάστημα [-5,1].

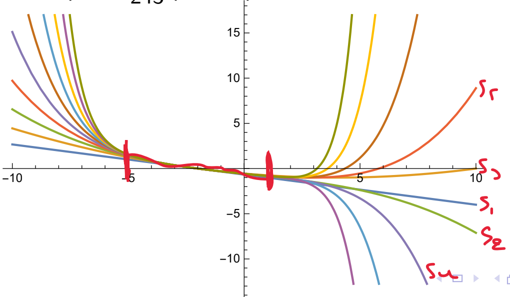
Εάν υπολογίσουμε τα μερικά αθροίσματα της δυναμοσειράς, θα έχουμε:

$S_1 = -\frac{1}{3}(x+2)$

$S_2 = -\frac{1}{3}(x+2) + \frac{1}{36}(2+x)^2$

$S_3 = -\frac{1}{3}(x+2) + \frac{1}{36}(2+x)^2 - \frac{1}{243}(2+x)^3$

$\vdots$



Ανάπτυγμα Taylor

Αν μια συνάρτηση f είναι απείρως παραγωγίσιμη, με συνεχείς παραγώγους στην περιοχή ενός πραγματικού αριθμού x_0, τότε η συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως άπειρη σειρά:

$x_0 = 4$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

η οποία ονομάζεται σειρά **Taylor** της συνάρτησης με κέντρο x_0.

Άν $x_0 = 0$, τότε το ανάπτυγμα ονομάζεται ανάπτυγμα σε σειρά Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η σειρά Maclaurin για τη συνάρτηση $f(x) = e^x$.

Ισχύει ότι $f^{(n)}(x) = e^x$ για $n = 1, 2, 3, \cdots$.
Συνεπώς $f^{(n)}(0) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Άρα το ανάπτυγμα της σειράς Maclaurin για τη συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι:
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} e^0 = \underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί η σειρά Maclaurin για τη συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{-x} \text{ και } f(0) = 1\\
f'(x) &= -e^{-x} \text{ και } f'(0) = -1\\
f''(x) &= e^{-x} \text{ και } f''(0) = 1\\
f'''(x) &= -e^{-x} \text{ και } f'''(0) = -1\\
&\vdots\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n e^{-x} \text{ και } f^{(n)}(0) = (-1)^n
\end{aligned}$$

Συνεπώς:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί η σειρά Taylor για τη συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$ γύρω από το $x = -4$.

$f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$, $f^{(n)}(-4) = (-1)^n e^4$
Συνεπώς η σειρά Taylor είναι:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^4}{n!}(x+4)^n$$

Παράδειγμα 4

Να βρεθεί η σειρά Maclaurin για τη συνάρτηση $f(x) = cos(x)$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= cos(x) \text{ και } f(0) = 1\\
f'(x) &= -sin(x) \text{ και } f'(0) = 0\\
f''(x) &= -cos(x) \text{ και } f''(0) = -1\\
f'''(x) &= sin(x) \text{ και } f'''(0) = 0\\
f^{(4)}(x) &= cos(x) \text{ και } f^{(4)}(0) = 1\\
f^{(5)}(x) &= -sin(x) \text{ και } f^{(5)}(0) = 0\\
f^{(6)}(x) &= -cos(x) \text{ και } f^{(6)}(0) = -1
\end{aligned}
$$

Συνεπώς:

$$cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

ή

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Θεώρημα Taylor

Αν μια συνάρτηση f είναι $n+1$ φορές παραγωγίσιμη, με συνεχείς παραγώγους σε ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει έναν πραγματικό αριθμό x_0, τότε η συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως σειρά (δυναμοσειρά):
$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ για κάποιο $\xi \in (x_0, x)$.

Τότε, μπορούμε να προσεγγίσουμε την f ως:
$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$
με υπόλοιπο (σφάλμα) της πολυωνυμικής αυτής προσέγγισης n βαθμού:
$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

Παράδειγμα για σειρά Taylor

Άσκηση Βρείτε την 2ης τάξης προσέγγιση με σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x) = e^x$ γύρω από το σημείο $x_0 = 0$. Χρησιμοποιήστε την προσέγγιση που βρήκατε για να εκτιμήσετε την $f(0.1)$, και δώστε ένα άνω φράγμα για το σφάλμα που προκύπτει σε αυτήν την προσέγγιση.

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$$

$e^{0.1}$

Γύρω από το $x_0 = 0$, $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} = \boxed{1 + x + x^2/2.}$
Συνεπώς η προσέγγιση του $f(0.1)$ είναι $f(0.1) = 1.105$. Η πραγματική τιμή είναι $f(0.1) = 1.10517$ με διαφορά $\boxed{0.00017}$.

Παράδειγμα για σειρά Taylor

Όσον αφορά στην εκτίμηση του σφάλματος αποκοπής έχουμε $R_2(x) = \frac{M|x|^3}{3!}$ όπου το M είναι ένα άνω φράγμα για την $f'''(x)$ στο $x \in [0, 0.1]$. Στο διάστημα το οποίο μας δίνεται έχουμε $|x| \leq 0.1 \iff |x|^3 \leq 0.001$.

Επίσης, $f'''(x) = e^x \leq e^{0.1}$ στο διάστημα που μας μας δίνεται. Συνεπώς $R_2(x) = \frac{0.001e^{0.1}}{6} = 0.000184$.

Συνεπώς, η εκτίμηση του σφάλματος μέσω του υπολοίπου Taylor είναι ελαφρώς μεγαλύτερη από την πραγματική διαφορά.

Παράδειγμα για σειρά Taylor 2

Βρείτε την 2ης τάξης προσέγγιση με σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x) = cos(x)$ γύρω από το σημείο $x_0 = 0$. Χρησιμοποιήστε την προσέγγιση που βρήκατε για να εκτιμήσετε την $f(0.6)$, και δώστε ένα άνω φράγμα για το σφάλμα που προκύπτει σε αυτήν την προσέγγιση.

$$
\begin{gathered}
f(0) = 1 \\
f^{'}(x) = -sin(x) \text{ και } f^{'}(0) = 0 \\
f^{''}(x) = -cos(x) \text{ και } f^{''}(0) = -1 \\
f^{'''}(x) = sin(x)
\end{gathered}
$$

Γύρω από το $x_0 = 0$, $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$
Συνεπώς η προσέγγιση του $f(0.6)$ είναι $f(0.6) = 0.82$. Η πραγματική τιμή είναι $f(0.6) = 0.8253$ με διαφορά 0.0053.

Παράδειγμα για σειρά Taylor 2

Όσον αφορά στην εκτίμηση του σφάλματος αποκοπής έχουμε $R_2(x) = \frac{M|x|^3}{3!}$ όπου το M είναι ένα άνω φράγμα για την $f'''(x)$ στο $x \in [0, 0.6]$. Στο διάστημα το οποίο μας δίνεται έχουμε $|x| \leq 0.6 \iff |x|^3 \leq 0.216$.

Επίσης, $f'''(x) = sin(x)$ με $|sin(x)| \leq 1$. Συνεπώς $|R_2(x)| \leq \frac{0.216}{6} = 0.036$.

Συνεπώς, η εκτίμηση του σφάλματος μέσω του υπολοίπου Taylor είναι μεγαλύτερη από την πραγματική διαφορά.

Εφαρμογή στην προσέγγιση με σειρά Taylor

Πολλές από τις σημαντικές χρήσεις του τύπου του Taylor μπορούν να υλοποιηθούν με τη χρήση δύο μόνο όρων ($n = 2$). Σε αυτή την περίπτωση παίρνουμε:

$$f(x_1) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f^{''}(\xi)(x_1 - x_0)^2}{2}$$

για ξ ανάμεσα σε x_0 και x_1.

Αν μεταφέρουμε το $f(x_0)$ στο αριστερό μέλος της σχέσης και χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις $dx = (x_1 - x_0)$, $dy = f^{'}(x)dx$ και $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$ καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση:

$$\Delta y = dy + \frac{f^{''}(\xi)(x_1 - x_0)^2}{2}$$

για ξ ανάμεσα σε x_0 και x_1.

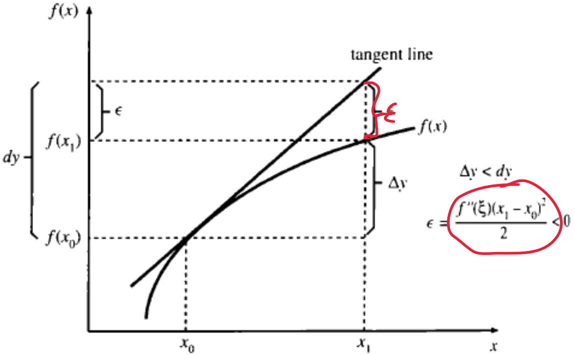
Εφαρμογή στην προσέγγιση με σειρά Taylor

Το σφάλμα είναι στην ουσία το υπόλοιπο στον τύπο της σειράς Taylor, δηλαδή $\epsilon = \Delta y - dy = \frac{f''(\xi)(x_1-x_0)^2}{2}$ ή διαφορετικά $\Delta y = dy + \frac{f''(\xi)(x_1-x_0)^2}{2}$.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι η $f(x)$ είναι μία αυστηρά κοίλη συνάρτηση (παντού) έτσι ώστε $f''(x) < 0$ επειδή $(x_1 - x_0)^2$ είναι θετικό για οποιαδήποτε τιμή $x_1 \neq x_0$, το υπόλοιπο θα είναι αρνητικό και το dy θα είναι μία υπερεκτίμηση του Δy.

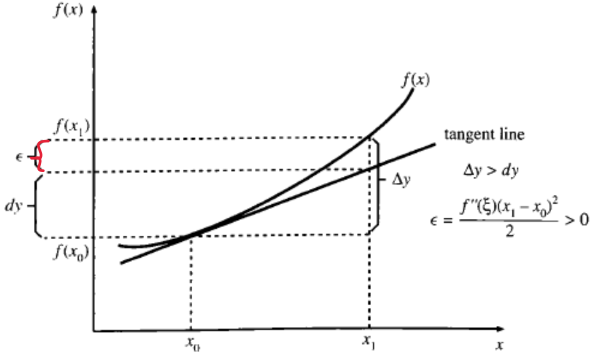
Αν υποθέσουμε ότι $f(x)$ είναι μία αυστηρά κυρτή συνάρτηση (παντού) έτσι ώστε $f''(x) > 0$, τότε το υπόλοιπο θα είναι θετικό και το ολικό διαφορικό dy θα είναι μία υποεκτίμηση του Δy.

Εφαρμογή στην προσέγγιση με σειρά Taylor



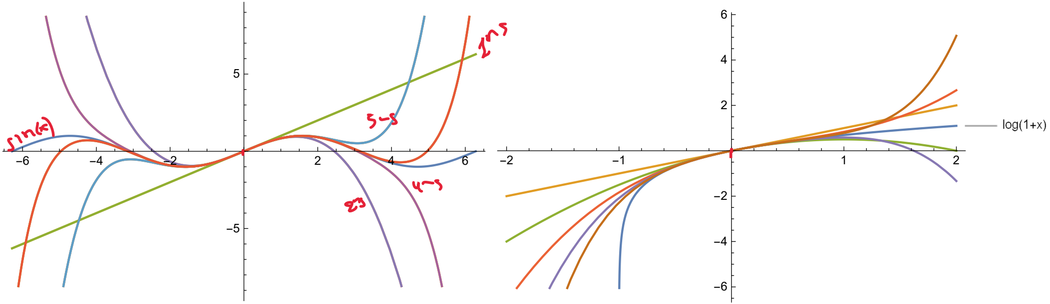
Σχήμα: Το ολικό διαφορικό υπερεκτιμά τη μεταβολή της τιμής μίας κοίλης συνάρτησης

Γεωμετρική ερμηνία προσέγγισης με σειρά Taylor



Σχήμα: Το ολικό διαφορικό υποεκτιμά τη μεταβολή της τιμής μίας κυρτής συνάρτησης

Γραφική απεικόνιση προσέγγισης με πολυώνυμα Taylor



Σχήμα: Πολυώνυμα Taylor για τις συναρτήσεις $\sin(x)$ και $\log(1+x)$ στο σημείο $x = 0$

Μαθηματική Ανάλυση
Διάλεξη 5

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Σπύρος Χαλκίδης
Ε.ΔΙ.Π.

Νοέμβριος 2022

Θέματα 5ης διάλεξης

- Μονοτονία συναρτήσεων, στάσιμα και κρίσιμα σημεία
- Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών
- Μερικές παράγωγοι πρώτης και δεύτερης τάξης
- Εσσιανή μήτρα
- Σειρές Taylor πολυμεταβλητών συναρτήσεων

Μονοτονία συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση $f(x)$. Αυτή καλείται:

Γνησίως αύξουσα εάν για οποιαδήποτε x_1, x_2 στο πεδίο ορισμού της ισχύει: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Γνησίως φθίνουσα εάν για οποιαδήποτε x_1, x_2 στο πεδίο ορισμού της ισχύει: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Αύξουσα εάν για οποιαδήποτε x_1, x_2 στο πεδίο ορισμού της ισχύει: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Φθίνουσα εάν για οποιαδήποτε x_1, x_2 στο πεδίο ορισμού της ισχύει: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Μονοτονία συνάρτησης

Εάν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής, τότε:

- Στα διαστήματα του πεδίου ορισμού όπου $f'(x) > 0$, η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα
- Στα διαστήματα του πεδίου ορισμού όπου $f'(x) < 0$, η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα

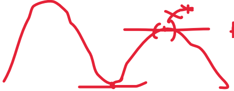
Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

Η συνάρτηση είναι συνεχής (γιατί;) οπότε υπολογίζουμε την πρώτη της παράγωγο:

$f'(x) = 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x - 12 = 6x^2 + 6x - 12 = \overset{>0}{6}(x \underset{-2}{\overset{>0}{+2}})(x \underset{+1}{\overset{<0}{-1}})$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Μέγιστο συνάρτησης



$f(x^*) \geq f(x)$

Σε ένα σημείο $\hat{x}$ ολικού μεγίστου ισχύει:

$$f(\hat{x}) \geq f(x) \text{ για όλα τα } x \text{ στο πεδίο ορισμού της,}$$

ενώ σε ένα σημείο x^* τοπικού μεγίστου, ισχύει:

$$f(x^*) \geq f(x), x^* - \epsilon \leq x \leq x^* + \epsilon, \epsilon > 0$$

για τα x που βρίσκονται σε ένα διάστημα, ενδεχομένως πολύ μικρό, γύρω από το x^*.

Αν η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο x^* τότε για f παραγωγίσιμη, θα πρέπει η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης να μηδενίζεται στο $x = x^*$, δηλαδή

$$f'(x^*) = 0$$

Συνθήκη πρώτης τάξης

Τη συνθήκη αυτή την ονομάζουμε συνθήκη πρώτης τάξης. Για να καταλάβουμε γιατί πρέπει να ισχύει, βρίσκουμε το διαφορικό της $y = f(x)$ στο x^*:

$$\overset{>0}{dy} = \overset{>0}{f^{'}(x^*)}\overset{>0}{dx}$$

Αν η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x^* πρέπει να είναι αδύνατο να αυξηθεί η τιμή της με μικρές μεταβολές dx προς τη μία ή την άλλη κατεύθυνση του x^*. Αυτό δε θα μπορούσε να αληθεύει αν $f^{'}(x^*) \neq 0$. Γιατί αν $f^{'}(x^*) > 0$, τότε επιλέγοντας $dx > 0$, παίρνουμε $dy > 0$ και αυξάνεται η τιμή της συνάρτησης. Αν $f^{'}(x^*) < 0$, τότε αν επιλέξουμε $dx < 0$ πάλι παίρνουμε $dy > 0$ και αυξάνεται η τιμή της συνάρτησης. Μόνο αν $f^{'}(x^*) = 0$, ένα οποιοδήποτε $dx \neq 0$ δίνει $dy = 0$, ώστε η συνάρτηση να μην μπορεί να αυξηθεί.

Αναγκαία συνθήκη

Θεώρημα Fermat

Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση f παίρνει μία ακρότατη τιμή σε ένα σημείο x^*, τότε $f^{'}(x^*) = 0$.

Η συνθήκη πρώτης τάξης $f^{'}(x^*) = 0$ είναι μία **αναγκαία συνθήκη** για να δώσει το x^* μία ακρότατη τιμή στη συνάρτηση. Η συνθήκη αυτή δεν είναι ικανή για μία ακρότατη τιμή, καθότι υπάρχει μία άλλη ομάδα σημείων, τα λεγόμενα **σημεία καμπής**, όπου η παράγωγος είναι δυνατόν να μηδενίζεται, δηλαδή $f^{'}(x^*) = 0$.
Για παράδειγμα για τη συνάρτηση

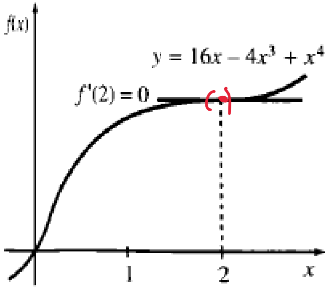
$$y = 16x - 4x^3 + x^4$$

Έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = 16 - 12x^2 + 4x^3 = f^{'}(x)$$

και για $x = 2$ παίρνουμε $f^{'}(2) = 0$.

Γραφική παράσταση



Σχήμα: Συνάρτηση με σημείο καμπής

Το $x = 2$ δεν οδηγεί σε μία ακρότατη τιμή της συνάρτησης. Συμβαίνει η εφαπτομένη της συνάρτησης σε αυτό το σημείο να είναι οριζόντια ($y = 16$).

Στάσιμα και κρίσιμα σημεία

Για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f, το σημείο x^* όπου $f'(x^*) = 0$, χαρακτηρίζεται ως **στάσιμη τιμή** της συνάρτησης. Σε τέτοιες στάσιμες τιμές η συνάρτηση μπορεί να παρουσιάζει ακρότατες τιμές ή σημεία καμπής. Κάθε ακρότατη τιμή μίας συνάρτησης παρουσιάζεται σε μία στάσιμη τιμή, αλλά δεν έχουμε υποχρεωτικά ακρότατη τιμή σε κάθε στάσιμη τιμή.

Κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης ονομάζονται τα στάσιμα σημεία της συνάρτησης μαζί με τα σημεία για τα οποία δεν ορίζεται η παράγωγός τους.

Συνθήκες Δεύτερης Τάξης

Αν η $f(x)$ είναι αυστηρά κοίλη στην περιοχή του x^* και δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε η καμπυλότητα της συνάρτησης είναι αρνητική ή διαφορετικά $f^{''}(x^*) < 0$ καθώς στρέφει τα κοίλα κάτω.

> Αν $f^{'}(x^*) = 0$ και $f^{''}(x^*) < 0$, τότε η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο στο x^*.

Αν η $f(x)$ είναι αυστηρά κυρτή στην περιοχή του x^* και δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε η καμπυλότητα της συνάρτησης είναι θετική ή διαφορετικά $f^{''}(x^*) > 0$ καθώς στρέφει τα κοίλα άνω.

> Αν $f^{'}(x^*) = 0$ και $f^{''}(x^*) > 0$, τότε η f παρουσιάζει ένα τοπικό ελάχιστο στο x^*.

Στην περίπτωση ενός σημείου καμπής η καμπυλότα της συνάρτησης αλλάζει από κοίλη σε κυρτή ή αντίστροφα. Σε αυτήν την περίπτωση $f^{''}(x^*) = 0$.

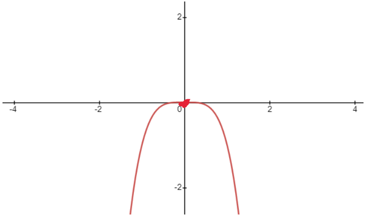
Συνθήκες Δεύτερης Τάξης

Οι συνθήκες δεύτερης τάξης είναι ικανές για να δώσουν ένα τοπικό ακρότατο αλλά όχι αναγκαίες. Δηλαδή, μπορεί να έχουμε ένα τοπικό ακρότατο και παρόλα αυτά να ισχύει $f''(x^*) = 0$.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = -x^4$ παρουσιάζει ένα μέγιστο στο $x^* = 0$, αλλά

$$f''(0) = -12(0)^2 = 0$$

.

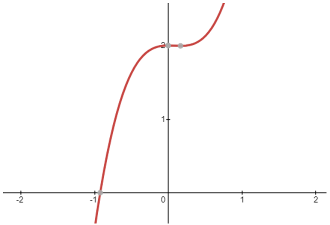


Παράδειγμα

Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση:

$$f(x) = y = 2x^3 - 0.5x^2 + 2$$

Έχουμε $\frac{dy}{dx} = 6x^2 - x$, συνεπώς τα στάσιμα σημεία είναι το $x = 0$ και το $x = 1/6$.
$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x - 1$.
Στο $x = 0$, $f''(x) = -1 < 0$, συνεπώς έχουμε ένα τοπικό μέγιστο της συνάρτησης.
Στο $x = 1/6$, $f''(x) = 1 > 0$ συνεπώς έχουμε ένα τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης.



Άσκηση

$f(-x) = f(x)$

Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^4 - 2x^2$, βρίσκοντας τα διαστήματα μονοτονίας, κυρτότητας, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της.

Λύση

Αρχικά βρίσκουμε που τέμνει η συνάρτηση τον άξονα των x:
$f(x)=0 \Rightarrow x^4-2x^2=0 \Rightarrow x^2(x^2-2)=0 \Rightarrow x=0, x=\sqrt{2}, x=-\sqrt{2}$.
Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση είναι άρτια, δηλαδή ισχύει $f(-x)=f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι το γράφημά της είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα των y.
Υπολογίζουμε τις ρίζες της πρώτης παραγώγου:
$f'(x)=4x^3-4x=0 \Rightarrow 4x(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0, x=1, x=-1$. Για τα διαστήματα μονοτονίας κατασκευάζουμε τον πίνακα:

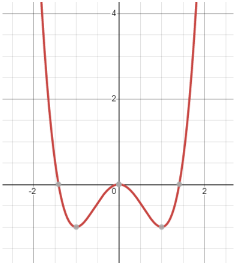
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x=0$ (με $f(0)=0$), και τοπικά ελάχιστα στα σημεία $x=-1$ και $x=1$ (με $f(1)=f(-1)=-1$).

Λύση

Βρίσκουμε που μηδενίζεται η δεύτερη παράγωγος:
$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ και $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
Τα σημεία αυτά είναι σημεία καμπής, επομένως επεκτείνουμε τον πίνακα μονοτονίας:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$													



Συνθήκες δεύτερης τάξης και ανάπτυγμα της σειράς Taylor

- Όταν $f^{'}(x^*) = 0$ μία χρήσιμη μέθοδος για να μελετήσουμε τι συμβαίνει για να διατυπώσουμε τις συνθήκες δεύτερης τάξης είναι να πάρουμε το ανάπτυγμα της σειρας Taylor.
- Έστω ότι $\hat{x}$ είναι ένα οποιοδήποτε x που ανήκει σε ένα μικρό διάστημα γύρω από το x^*. Τότε το ανάπτυγμα της σειράς Taylor με μορφή υπολοίπου μας δίνει:

  0

  >0 $\quad$ >0

  $$f(\hat{x}) = f(x^*) + \frac{f^{'}(x^*)(\hat{x}-x^*)}{1!} + \frac{f^{''}(\zeta)(\hat{x}-x^*)^2}{2!}$$

  >0

  για κάποιο σημείο ζ που βρίσκεται ανάμεσα στο x^* και το $\hat{x}$.
- Επειδή $f^{'}(x^*) = 0$ αν $f^{''}(\zeta) < 0$ τότε $f(\hat{x}) - f(x^*) < 0$ ή $\boxed{f(x^*) > f(\hat{x})}$ και συνεπώς το x^* δίνει ένα τοπικό μέγιστο.
- Αν $f^{''}(\zeta) > 0$ τότε $f(\hat{x}) - f(x^*) > 0$ ή $f(x^*) < f(\hat{x})$ και συνεπώς το x^* δίνει ένα τοπικό ελάχιστο.

Συνθήκες δεύτερης τάξης και ανάπτυγμα της σειράς Taylor

- Αν $f^{''}(\zeta) = 0$ ο επόμενος όρος της σειράς της ακολουθίας είναι ο $f^{'''}(x^*)(\hat{x} - x^*)^3/3!$ και αυτό δεν μπορεί να μας οδηγήσει σε συμπέρασμα αφού το πρόσημο του $(\hat{x} - x^*)^3$ μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό.
- Αν υποθέσουμε ότι $f^{'''}(x^*) = 0$ και αυτό ισχύει για όλες τις παραγώγους μέχρι την παράγωγο $(n-1)$-οστής τάξης που συμβολίζουμε με $f^{(n-1)}(x)$ τότε: $f(\hat{x}) = f(x^*) + \frac{f^{(n)}(\zeta)(\hat{x}-x^*)^n}{n!}$
- Αν ο n είναι άρτιος τότε $(\hat{x} - x^*)^n > 0$. Συνεπώς, αν $f^{(n)}(\zeta) < 0$ τότε $f(x^*) > f(\hat{x})$ και συνεπώς το x^* δίνει ένα τοπικό μέγιστο. Αν $f^{(n)}(\zeta) > 0$ τότε $f(x^*) < f(\hat{x})$ και συνεπώς το x^* δίνει ένα τοπικό ελάχιστο. Αυτό ονομάζεται **Κριτήριο *n*-οστής παραγώγου**.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 10 - x^4$. Έχουμε:

$$f^{'}(x) = -4x^3$$

$$f^{''}(x) = -12x^2$$

$$f^{'''}(x) = -24x$$

$$f^{(4)}(x) = -24$$

Όλες οι πάραγωγοι μέχρι την τρίτη παράγωγο μηδενίζονται στο $x^* = 0$. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την τέταρτη παράγωγο ως τελευταίο όρο στο ανάπτυγμα της σειράς Taylor για να διερευνήσουμε το χαρακτήρα της συνάρτησης γύρω από το $x^* = 0$:

$$f(\hat{x}) = f(0) + \frac{f^{(4)}(\zeta)(\hat{x})^4}{24}$$

Παράδειγμα

Δεδομένου ότι $f^{(4)}(x) = -24$ για όλα τα x, αυτό μπορούμε να το διατυπώσουμε ως εξής:
$f(\hat{x}) = f(0) - \hat{x}^4$ ή $f(\hat{x}) - f(0) < -\hat{x}^4$
Για οποιαδήποτε τιμή του $\hat{x} \neq 0$ έχουμε $-\hat{x}^4 < 0$ και επομένως $f(\hat{x}) - f(0) < 0$ ή $f(0) > f(\hat{x})$. Δηλαδή το σημείο $x^* = 0$ δίνει ένα τοπικό μέγιστο αυτής της συνάρτησης.

- Γενικά αν όλες οι παράγωγοι σε ένα σημείο μέχρι και μία παράγωγο περιττής τάξης είναι μηδέν, ενώ η επόμενη παράγωγος άρτιας τάξης είναι αρνητική, τότε έχουμε ένα τοπικό μέγιστο σε αυτό το σημείο, ενώ αν είναι θετική τότε έχουμε ένα τοπικό ελάχιστο σε αυτό το σημείο.

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3$. Έχουμε:

$$f^{'}(x) = 3x^2$$

$$f^{''}(x) = 6x$$

$$f^{'''}(x) = 6$$

Με την $f^{'''}(x)$ να είναι η πρώτη από τις παραγώγους ανώτερης τάξης που δε μηδενίζεται στο x^* πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την τρίτη παράγωγο ως τον τελευταίο όρο του αναπτύγματος της σειράς Taylor για να διερευνήσουμε το χαρακτήρα της συνάρτησης γύρω από το $x^* = 0$. Δηλαδή,

$$f(\hat{x}) = f(0) + \frac{f^{'''}(\zeta)(\hat{x})^3}{6}$$

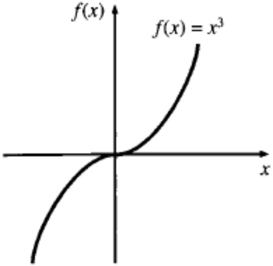
για ζ ανάμεσα στο x^* και το $\hat{x}$.

Παράδειγμα 2

Επειδή $f'''(x) = 6$ για όλα τα x μπορούμε να γράψουμε αυτήν την εξίσωση ως:

$$f(\hat{x}) = f(0) + \hat{x}^3$$

Για $\hat{x} > 0$ παίρνουμε $f(\hat{x}) > f(0)$ ενώ για $\hat{x} < 0$ παίρνουμε $f(\hat{x}) < f(0)$. Επομένως το $x^* = 0$ δε δίνει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο. Πρόκειται για ένα σημείο καμπής, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα.



Σχήμα: Γραφική παράσταση της $f(x) = x^3$

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Συνάρτηση (βαθμωτή) n μεταβλητών ονομάζεται μια αντιστοιχία που απεικονίζει κάθε n-άδα $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ του $\mathbb{R}^n$ (ή κάθε σημείο του n-διάστατου χώρου) σε έναν πραγματικό αριθμό. Το πεδίο ορισμού μιας τέτοιας συνάρτησης είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f : X \to \mathbb{R} \quad \text{όπου } X \subseteq \mathbb{R}^n$$

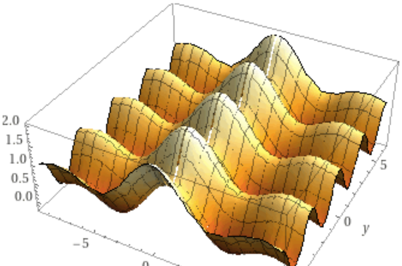
$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \frac{\sin(x)}{x} + \cos^2(y)$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to z$

$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$g(x, y, z) = x + y^2 + z^3$



Ισοσταθμικά σύνολα

Ισοσταθμικό σύνολο (level set) της συνάρτησης $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ είναι το σύνολο

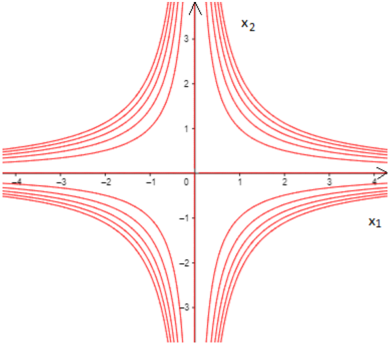
$$L = \{(x_1, \cdots, x_n)\} \in \mathbb{R}^n : f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c\}$$

για ένα δεδομένο αριθμό $c \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα Ισοσταθμικών συνόλων

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε τα ισοσταθμικά σύνολα της συνάρτησης $y = f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$.

Θέτουμε $x_1^2 x_2^2 = c \iff x_2 = \pm\sqrt{\frac{c}{x_1^2}}$. Τα ισοσταθμικά σύνολα της συνάρτησης απεικονίζονται στο παρακάτω διάγραμμα:



Σχήμα: Ισοσταθμικά σύνολα της συνάρτησης $y = x_1^2 x_2^2$

Εφαρμογές Ισοσταθμικών Καμπυλών

Στα Οικονομικά τα ισοσταθμικά σύνολα τα συναντάμε:

- στη θεωρία καταναλωτή (εκεί όπου αναφέρονται ως **καμπύλες αδιαφορίας**), όπου οποιοδήποτε σημείο πάνω στην ίδια καμπύλη έχει την ίδια χρησιμότητα.
- στη θεωρία παραγωγού (εκεί όπου αναφέρονται ως **καμπύλες ισοπαραγωγής**), όπου οποιοδήποτε σημείο πάνω στην ίδια καμπύλη αντιστοιχεί στο ίδιο επίπεδο παραγωγής.

Η **μερική παράγωγος** μίας συνάρτησης $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ (μπορεί να γραφεί και ως $y = f(x)$ όπου $x \in \mathbb{R}^n$) ως προς τη μεταβλητή x_i είναι: $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \cdots, x_i + \Delta x_i, \cdots x_n) - f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)}{\Delta x_i}$$

Χρησιμοποιούνται εναλλακτικά οι συμβολισμοί $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ή $f_i(\mathbf{x})$ ή απλά f_i.

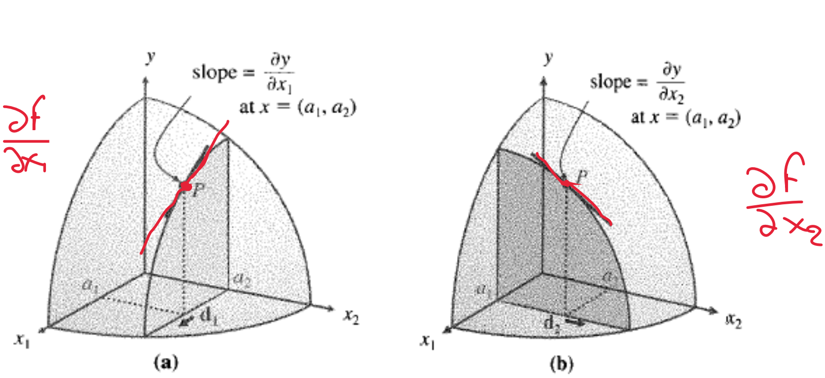
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Για μία συνάρτηση $z = f(x, y)$, οι μερικές παράγωγοι ως προς x και y είναι:
$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y+\Delta x) - f(x,y)}{\Delta x}$

Γεωμετρική ερμηνία

Η μερική παράγωγος εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης ως προς μία μεταβλητή, όταν όλες οι υπόλοιπες μεταβλητές παραμένουν σταθερές.

$f(x_1, x_2)$



Σχήμα: Μερικές Παράγωγοι

Παραγώγιση πολυμεταβλητών συναρτήσεων

Αντί να υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους με βάση τις αρχές που εισάγει ο ορισμός τους, μπορούμε να τις βρούμε χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγώγισης, όπως κάναμε για τις μονομεταβλητές συναρτήσεις. Επειδή όταν υπολογίζουμε την $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ κρατούμε σταθερές όλες τις μεταβλητές εκτός από την x_i μπορούμε να θεωρήσουμε όλους τους όρους της συνάρτησης $f(\mathbf{x})$ που δεν εξαρτώνται από το x_i ως μία σταθερά c και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε τους κανόνες παραγώγισης για συναρτήσεις μίας μεταβλητής.

Ιδιότητες

Εάν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι ως προς τη μεταβλητή x των συναρτήσεων f, g, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- $\frac{\partial(f \pm g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \pm \frac{\partial g}{\partial x}$
- $\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \ \lambda \in \mathbb{R}$
- $\frac{\partial(fg)}{\partial x} = g\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial g}{\partial x}$
- $\frac{\partial(f/g)}{\partial x} = \frac{g\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}$

Παράδειγμα

Έστω $y = f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$. Η μεταβλητή x_2 κρατιέται σταθερή όταν υπολογίζουμε την $\frac{\partial f}{\partial x_1}$. Αν θέσουμε $x_2 = c$, όπου c μία σταθερά, τότε η συνάρτηση παίρνει τη μορφή:

$x_2 = c$

$$g(x_1) = y = cx_1^2$$

$\frac{dg}{dx_1}$

και επομένως:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{d[cx_1^2]}{dx_1} = 2cx_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^2$$

Αντικαθιστούμε το c με x_2 και έχουμε

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 2x_1 x_2$$

Άσκηση

Εάν $f(x, y, z) = 3x^2y^3 - 2xy^2 + 4y^4 + z^2$, υπολογίστε τις μερικές παραγώγους της f ως προς x, y και z.

Λύση

Αφού $f(x, y, z) = 3x^2y^3 - 2xy^2 + 4y^4 + z^2$, τότε έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^3 - 2y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 9x^2y^2 - 4xy + 16y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης

f(x, y)

Κάθε μία παράγωγος δεύτερης τάξης μίας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συμβολίζεται ως:

$$f_{ij} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, \cdots, n$$

όπου η f_{ij} βρίσκεται παραγωγίζοντας πρώτα τη συνάρτηση $f(\mathbf{x})$ ως προς την μεταβλητή x_i και κατόπιν παραγωγίζοντας το αποτέλεσμα $f_i(\mathbf{x})$ ως προς τη μεταβλητή x_j.

Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης

Για μία συνάρτηση $f(x, y)$, οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι οι ακόλουθες:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = f_{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = f_{y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Οι δύο τελευταίες ονομάζονται μεικτές ή σταυροειδείς παράγωγοι.

Παράδειγμα

Έστω $f(x,y) = x^2y^3 + x^4y + xe^y$. Τότε οι μερικές παράγωγοι 2ης τάξης είναι:

1. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^3 + 4x^3y + e^y) = 2y^3 + 12x^2y$
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 + x^4 + xe^y) = 6x^2y + xe^y$
3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 + x^4 + xe^y) = 6xy^2 + 4x^3 + e^y$
4. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3 + 4x^3y + e^y) = 6xy^2 + 4x^3 + e^y$

Μεικτές παράγωγοι

Δύο μεικτές παράγωγοι τάξης $k \geq 2$ μίας συνάρτησης $f(x, y)$ με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό σύνολο είναι ίσες εάν:

- Όλες οι μερικές παράγωγοι μέχρι τάξης k είναι συνεχείς
- Εάν ο συνολικός αριθμός παραγωγίσεων ως προς κάθε μεταβλητή είναι ο ίδιος και στις δύο μεικτές παραγώγους

Άσκηση (για το σπίτι): Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{για } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{για } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Υπολογίστε και συγκρίνετε τις $f_{yx}(0,0)$ και $f_{xy}(0,0)$.

Διάνυσμα κλίσης

Τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης είναι συνηθισμένη τακτική να τις τοποθετούμε μαζί σε ένα διάνυσμα-στήλη ή ένα διάνυσμα-γραμμή που το ονομάζουμε **διάνυσμα κλίσης** χρησιμοποιώντας τα παρακάτω σύμβολα:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \text{ ή } \nabla f^T = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{bmatrix}$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Παράδειγμα

$x \in \mathbb{R}$

Βρείτε το διάνυσμα κλίσης για τη συνάρτηση $f(\vec{x}) = 5 - 2x_1 + 3x_2$.

Οι πρώτες μερικές παράγωγοι της συνάρτησης είναι $f_1 = -2$ και $f_2 = 3$. Συνεπώς το διάνυσμα κλίσης είναι:

ανάδελτα

$$\boxed{\nabla f} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^n$

3, 4, …, n

Εσσιανή μήτρα

Για να παρακολουθούμε καλύτερα τις παραγώγους δεύτερης τάξης είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε μία μήτρα. Για μία συνάρτηση δύο μεταβλητών $y = f(x_1, x_2)$ υπάρχουν 4 μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης:
$f_{11} \equiv \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, $f_{12} \equiv \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}$, $f_{21} \equiv \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, $f_{22} \equiv \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2}$
Αυτές μπορούμε να τις παρουσιάσουμε με τη μορφή μήτρας ως εξής:

$$\begin{array}{c} 1,1 \quad\quad 1,2 \\ \nabla_2 F \equiv \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \\ 2,1 \quad\quad 2,2 \end{array}$$

Μία συνάρτηση τριών μεταβλητών $y = f(x_1, x_2, x_3)$ έχει 9 παραγώγους δεύτερης τάξης και ούτω καθεξής. Αυτές μπορούμε να τις παρουσιάσουμε με τη μορφή μήτρας ως εξής:

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\nabla_2 F \equiv \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ 2,3 \\ \\ \end{array}$$

Εσσιανή μήτρα

$$\nabla_2 F \equiv \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

γενικά για συναρτήσεις n μεταβλητών.
Για την περίπτωση με τις n μεταβλητές μπορούμε πιο απλά να γράψουμε τη μήτρα με τις μερικές παραγώγους δεύτερης ταξής ως εξής:

$$\nabla_2 F \equiv [f_{ij}]$$

με το στοιχείο τάξης i, j της μήτρας $\nabla_2 F$ να αντιπροσωπεύει το αποτέλεσμα της παραγώγισης της συνάρτησης $f(\mathbf{x})$ πρώτα ως προς τη μεταβλητή x_i και κατόπιν ως προς τη μεταβλητή x_j.
Η μήτρα με τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της συνάρτησης f ονομάζεται **Εσσιανή μήτρα**.

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι πρώτης και δεύτερης τάξης της συνάρτησης $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$ και να παρουσιαστούν υπό μορφή διανύσματος/μήτρας αντίστοιχα.

Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης είναι:

$$f_1 = 2x_1x_2,\ f_2 = x_1^2$$

Ενώ οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι:

$$f_{11} = 2x_2,\ f_{12} = 2x_1,\ f_{21} = 2x_1,\ f_{22} = 0$$

Τοποθετώντας τις παραγώγους αυτές σε διάνυσμα και μήτρα αντίστοιχα έχουμε:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix} \text{ και } \nabla_2 F = \begin{bmatrix} 2x_2 & 2x_1 \\ 2x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Σειρά Taylor πολυμεταβλητής συνάρτησης

Για τη σειρά Taylor μεταξύ των σημείων $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}$ και $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$ για

συνάρτηση δύο μεταβλητών έχουμε:

i

$$\mathbf{dx} = \hat{x} - x^{(0)} = \begin{bmatrix} (\hat{x}_1 - x_1^{(0)}) \\ (\hat{x}_2 - x_2^{(0)}) \end{bmatrix}$$

και συνεπώς για το ολικό διαφορικό πρώτης τάξης παίρνουμε:

$dy = f' dx$

∇

$$dy(\mathbf{x}^{(0)}) = \left[f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}), f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \right] \begin{bmatrix} (\hat{x}_1 - x_1^{(0)}) \\ (\hat{x}_2 - x_2^{(0)}) \end{bmatrix}$$

Για το ολικό διαφορικό δεύτερης τάξης παίρνουμε με τη χρήση του συμβολισμού $H \equiv \nabla_2 F$

$$d^2y(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{dx}^T H \mathbf{dx} =$$

$$\left[(\hat{x}_1 - x_1^{(0)}), (\hat{x}_2 - x_2^{(0)}) \right] \begin{bmatrix} f_{11}(\xi_1, \xi_2) & f_{12}(\xi_1, \xi_2) \\ f_{21}(\xi_1, \xi_2) & f_{22}(\xi_1, \xi_2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (\hat{x}_1 - x_1^{(0)}) \\ (\hat{x}_2 - x_2^{(0)}) \end{bmatrix}$$

Σειρά Taylor πολυμεταβλητής συνάρτησης

Ο **τύπος του υπολοίπου** για το ανάπτυγμα της σειράς Taylor μίας συνάρτησης $y = f(\mathbf{x})$ που ορίζεται στο $\mathbb{R}^n$, ο οποίος αναπτύσσεται γύρω από το σημείο $\mathbf{x}^{(0)}$ και περιλαμβάνει δύο όρους είναι:

$$f(\hat{\mathbf{x}}) = f(\mathbf{x}^{(0)}) + dy(\mathbf{x}^{(0)}) + \frac{1}{2}d^2y(\xi)$$

όπου το ξ βρίσκεται μεταξύ του $\mathbf{x}^{(\mathbf{0})}$ και του $\hat{\mathbf{x}}$.

Αναγκαίες και Ικανές συνθήκες για βέλτιστο πολυμεταβλητής συνάρτησης

Ικανή συνθήκη για να δώσει το $\mathbf{x}^*$ ένα τοπικό βέλτιστο της δύο φορές παραγωγίσιμης συνάρτησης $y = f(\mathbf{x})$ είναι:

$$f_i(\mathbf{x}^*) = 0, \; i = 1, \cdots, n \text{ (αναγκαίες)}$$

και

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^n, \delta \neq 0, \delta^T H \delta > 0 \text{ για τοπικό ελάχιστο ή } < 0 \text{ για τοπικό μέγιστο}$$

Δηλαδή η Εσσιανή μήτρα H είναι θετικά ορισμένη για τοπικό ελάχιστο ή αρνητικά ορισμένη για τοπικό μέγιστο.

Μαθηματική Ανάλυση
Διάλεξη 6

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Σπύρος Χαλκίδης
Ε.ΔΙ.Π.

Νοέμβριος 2022

Θέματα 6ης διάλεξης

- Θεώρημα Young
- Μέγιστα, Ελάχιστα και Σαγματικά Σημεία
- Κύριες Ελάσσονες
- Πεπλεγμένες συναρτήσεις

Διαφορίσιμες συναρτήσεις και κλάσεις

Μία συνάρτηση η οποία έχει k παραγώγους ονομάζεται k φορές παραγωγίσιμη. Εάν η k-οστή παράγωγός της είναι και συνεχής, τότε λέμε ότι η f είναι κλάσης C^k. $\notin \mathbb{C}$ $f \in C^k$

C^0 είναι η κλάση των συνεχών συναρτήσεων.

Θεώρημα του Young

Για μία συνάρτηση $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης, η σειρά της παραγώγισης κατά τον υπολογισμό των σταυροειδών μερικών παραγώγων είναι χωρίς σημασία.
Δηλαδή $f_{ij} = f_{ji}$ για οποιοδήποτε ζεύγος i, j με $i, j = 1, 2, \cdots, n$ και $i \neq j$ (προφανώς η ισότητα ισχύει και στην οριακή περίπτωση που $i = j$).

Παράδειγμα 1

Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = x^2y^3 + x^4y + xe^y$.

Τότε

$$f_1 = 2xy^3 + 4x^3y + e^y$$
$$f_2 = 3x^2y^2 + x^4 + xe^y$$

και

$$f_{12} = 6xy^2 + 4x^3 + e^y$$
$$f_{21} = 6xy^2 + 4x^3 + e^y$$

Συνεπώς $f_{12} = f_{21}$.

Παράδειγμα 2

Έστω η συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2x_3$.

Τότε
$f_1 = 2x_1 + x_2x_3$
$f_2 = 2x_2 + x_1x_3$
$f_3 = 2x_3 + x_1x_2$
και
$f_{12} = x_3$
$f_{21} = x_3$
$f_{13} = x_2$
$f_{31} = x_2$
$f_{23} = x_1$
$f_{32} = x_1$.
Συνεπώς $f_{12} = f_{21}$, $f_{13} = f_{31}$ και $f_{23} = f_{32}$.

Βελτιστοποίηση Συναρτήσεων n μεταβλητών

Μία στάσιμη τιμή συνάρτησης f ορισμένης στο $\mathbb{R}^n$ παρουσιάζεται σε ένα σημείο $(x_1^*, \cdots x_n^*)$ όπου αληθεύουν ταυτόχρονα οι ισότητες:

$$\begin{cases} f_1(x_1^*, \cdots, x_n^*) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1^*, \cdots, x_n^*) = 0 \end{cases}$$

ή

$$\nabla f(x_1^*, \cdots, x_n^*) = 0$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

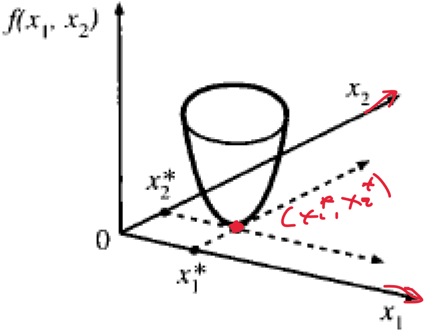
Βελτιστοποίηση Συναρτήσεων n μεταβλητών

Όπως και στην περίπτωση των συναρτήσεων με μία μεταβλητή, δεν είναι απαραίτητο όλα τα στάσιμα σημεία να δίνουν ακρότατες τιμές, καθότι ενδέχεται να πρόκειται για σημεία καμπής.

Στην περίπτωση συναρτήσεων με n μεταβλητές, υπάρχει επιπλέον το ενδεχόμενο μία στάσιμη τιμή να είναι ένα **σαγματικό σημείο** (saddle point), όπου η συνάρτηση παίρνει τη μέγιστη τιμή της σε σχέση με τις μεταβολές των τιμών σε μερικά από τα $x_1, \cdots, x_n$ και την ελάχιστη τιμή της σε σχέση με άλλα.

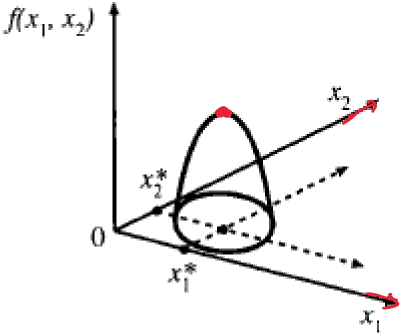
> Κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών ονομάζονται τα στάσιμα σημεία της καθώς και τα σημεία που δεν υπάρχει τουλάχιστον μία από τις μερικές της παραγώγους.

Μέγιστα, Ελάχιστα και Σαγματικά Σημεία



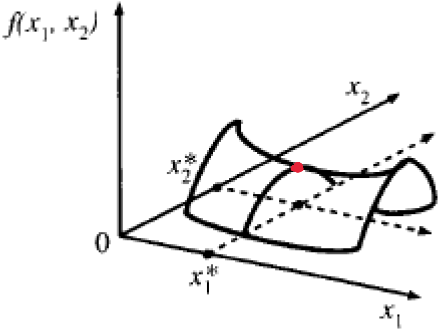
Σχήμα: Ελάχιστο στη x_1 διεύθυνση, ελάχιστο στη x_2 διεύθυνση

Μέγιστα, Ελάχιστα και Σαγματικά Σημεία



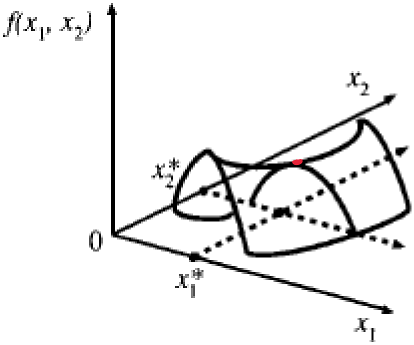
Σχήμα: Μέγιστο στη x_1 διεύθυνση, μέγιστο στη x_2 διεύθυνση

Μέγιστα, Ελάχιστα και Σαγματικά Σημεία



Σχήμα: Ελάχιστο στη x_1 διεύθυνση, μέγιστο στη x_2 διεύθυνση

Μέγιστα, Ελάχιστα και Σαγματικά Σημεία



Σχήμα: Μέγιστο στη x_1 διεύθυνση, ελάχιστο στη x_2 διεύθυνση

Παράδειγμα

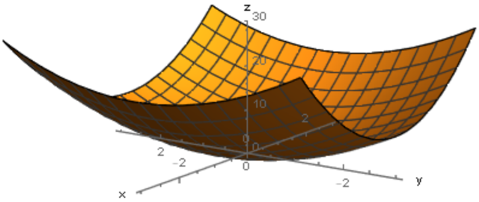
Βρείτε τα στάσιμα σημεία της συνάρτησης:

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$f_x = 4x = 0, \; f_y = 2y = 0$$

Αυτές ικανοποιούνται μόνο όταν $x = y = 0$. Επομένως το $(0, 0)$ είναι ένα στάσιμο σημείο.



Παράδειγμα

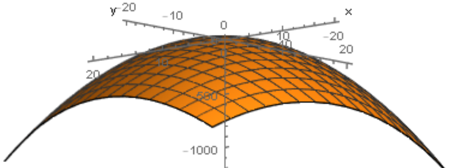
Βρείτε τα στάσιμα σημεία της συνάρτησης:

$$f(x,y) = 4x + 2y - x^2 - y^2 + xy$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$f_x = 4 - 2x + y = 0$$
$$f_y = 2 - 2y + x = 0$$

Από τη δεύτερη εξίσωση έχουμε $x = 2y - 2$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη έχουμε $4 - 4y + 4 + y = 0$ ή ισοδύναμα $y = \frac{8}{3}$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση έχουμε $x = \frac{10}{3}$.



Παράδειγμα

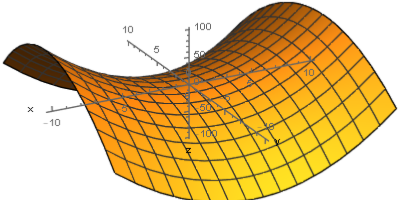
Βρείτε τα στάσιμα σημεία της συνάρτησης:

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$f_x = 2x = 0$$
$$f_y = -2y = 0$$

Αυτές ικανοποιούνται μόνο όταν $x = y = 0$. Επομένως το $(0, 0)$ είναι ένα στάσιμο σημείο.



Συνθήκες Δεύτερης Τάξης

Ικανή συνθήκη για να δώσει το $\mathbf{x}^*$ ένα τοπικό μέγιστο της C^2 συνάρτησης $f(\mathbf{x})$ είναι:

$$f_i(\mathbf{x}^*) = 0,\ i = 1, \cdots, n$$

και η τετραγωνική μορφή

$$d^2y(\mathbf{x}^*) = \sum_i \sum_j f_{ij} dx_i dx_j < 0$$

Δηλαδή το d^2y είναι αρνητικά ορισμένο, ή η Εσσιανή μήτρα H είναι αρνητικά ορισμένη καθότι $d^2y = dx^T H dx$. <0 $\forall x \in \mathbb{R}^n$

Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

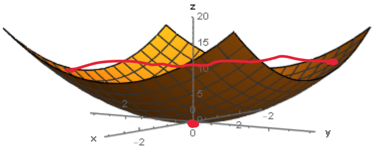
Η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή (convex) αν για δύο οποιαδήποτε σημεία του πεδίου ορισμού της $u = (u_1, \ldots, u_n)$ και $v = (v_1, \ldots, v_n)$ ισχύει ότι:

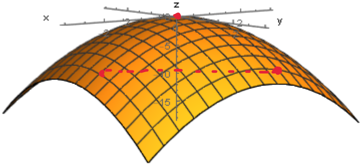
$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v),$$

ενώ είναι κοίλη (concave) όταν:

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \geq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v),$$

όπου $\lambda \in [0,1]$.





Ολικά ακρότατα

Υποθέτουμε ότι η $y = f(\mathbf{x})$ είναι μία αυστηρά κοίλη συνάρτηση που ορίζεται για $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Αν στο $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ όλες οι πρώτες παράγωγοι μηδενίζονται, δηλ. $f_i(\mathbf{x}^*) = 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, τότε το $\mathbf{x}^*$ δίνει ένα μοναδικό ολικό μέγιστο.

Υποθέτουμε ότι η $y = f(\mathbf{x})$ είναι μία αυστηρά κυρτή συνάρτηση που ορίζεται για $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Αν στο $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ όλες οι πρώτες παράγωγοι μηδενίζονται, δηλ. $f_i(\mathbf{x}^*) = 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, τότε το $\mathbf{x}^*$ δίνει ένα μοναδικό ολικό ελάχιστο.

Ηγετικές κύριες ελάσσονες

C^2

Για μία συνάρτηση $y = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ η οποία είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη με Εσσιανή μήτρα H, οι ηγετικές κύριες ελάσσονες είναι:

$$|H_1| = f_{11},$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix},$$

$|H_{n-2}|$

$\vdots$

$|H_{n-1}| =$

$$|H_n| = |H| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

Θετικά/Αρνητικά ορισμένη μήτρα

Έστω H η Εσσιανή μήτρα που σχετίζεται με μία συνάρτηση $y = f(\mathbf{x})$, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη όπου $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Ισχύει ότι:

1. Η μήτρα H είναι θετικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν οι ηγετικές κύριες ελάσσονές της είναι θετικές. Δηλαδή $|H_1| > 0, |H_2| > 0, \cdots, |H_n| = |H| > 0$ για $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Σε αυτή την περίπτωση η f είναι αυστηρά κυρτή.
2. Η μήτρα H είναι αρνητικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν οι ηγετικές κύριες ελάσσονές της έχουν εναλλασσόμενο πρόσημο αρχής γενομένης με αρνητικό για $k = 1$. Δηλαδή:
$$|H_1| < 0, |H_2| > 0, \cdots, |H_n| = |H| = \begin{cases} > 0 & \text{αν } n \text{ είναι άρτιος} \\ < 0 & \text{αν } n \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$
Σε αυτήν την περίπτωση η f είναι αυστηρά κοίλη.

Θετικά/Αρνητικά ορισμένη μήτρα

Έστω H η Εσσιανή μήτρα που σχετίζεται με μία συνάρτηση $y = f(\mathbf{x})$, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη όπου $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Ισχύει ότι:

1. Η H είναι θετικά ορισμένη αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές της είναι θετικές. Σε αυτήν την περίπτωση η f είναι αυστηρά κυρτή.
2. Η H είναι αρνητικά ορισμένη αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές της είναι αρνητικές. Σε αυτήν την περίπτωση η f είναι αυστηρά κοίλη.

Θετικά/Αρνητικά ορισμένη μήτρα: Παράδειγμα

$H_1 = [2] \Rightarrow |H_1| = 2 > 0$

$H_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$

Έστω η μήτρα $H = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Τότε οι ηγετικές κύριες ελάσσονες της είναι:

$|H_1| = 2 > 0$, $|H_2| = |H| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$. Συνεπώς ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος.

$|H - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda) - 1 =$

Με χρήση των ιδιοτιμών:

$$|\lambda I - H| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 - 1 = \lambda^2 + 4 - 4\lambda - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$|\lambda I - H| = 0 \iff \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4, \lambda_1 = \frac{4+2}{2} = 3 > 0, \lambda_2 = \frac{4-2}{2} = 1 > 0.$$

Αφού και οι δύο ιδιοτιμές είναι θετικές ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος.

Παράδειγμα

Βρείτε και χαρακτηρίστε τα στάσιμα της συνάρτησης:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2$$

$$f_1 = 4x_1, \; f_2 = 2x_2$$

$$f_{11} = 4, \; f_{12} = 0, \; f_{21} = 0, \; f_{22} = 2 \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$|H_1| = f_{11} = 4 > 0 \quad |H_2| = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0 \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Συμπεραίνουμε ότι το στάσιμο σημείο $(0, 0)$ είναι το μοναδικό ολικό ελάχιστο της συνάρτησης.

Παράδειγμα 2

Βρείτε και χαρακτηρίστε τα στάσιμα της συνάρτησης:

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2$$

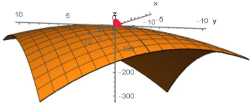
Έχουμε βρει προηγουμένως το στάσιμο σημείο $(10/3, 8/3)$.

$$f_1 = 4 - 2x_1 + x_2,\ f_2 = 2 - 2x_2 + x_1$$

$$f_{11} = -2,\ f_{12} = 1,\ f_{21} = 1,\ f_{22} = -2 \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$|H_1| = -2 < 0,\ |H_2| = |H| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0 \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Οι ηγετικές κύριες ελάσσονες αλλάζουν πρόσημο ξεκινώντας από το αρνητικό ($|H_1| = -2$, $|H_2| = 3$), άρα η Εσσιανή μήτρα είναι αρνητικά ορισμένη και συνεπώς η συνάρτηση είναι αυστηρά κοίλη και το στάσιμο σημείο είναι ένα ολικό μέγιστο.



Παράδειγμα 3

Βρείτε και χαρακτηρίστε τα στάσιμα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Τα στάσιμα σημεία της f υπολογίζονται θέτοντας:

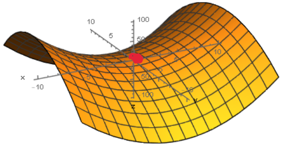
$$\nabla f(x, y) = (2x, -2y) = (0, 0).$$

Άρα το μοναδικό στάσιμο σημείο είναι το $(0, 0)$.

Η Εσσιανή μήτρα της f είναι $\nabla_2 f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Οι ηγετικές κύριες ελάσσονες της είναι: $|H_1| = 2 > 0$, $|H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$.

Άρα η Εσσιανή μήτρα δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένη. Το σημείο $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.



Κύριες ελάσσονες

Οι ορίζουσες για όλες τις κύριες ελάσσονες (όχι μόνο οι ηγετικές) για $n = 3$ δίνονται παρακάτω:

$$|H_1^*| = f_{11}, f_{22}, f_{33}$$

$$|H_2^*| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} f_{11} & f_{13} \\ f_{31} & f_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} f_{22} & f_{23} \\ f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$$

$$|H_3^*| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$$

Θετικά/Αρνητικά ημί-ορισμένη μήτρα

Η Εσσιανή μήτρα H είναι θετικά ημί-ορισμένη στο $\mathbb{R}^n$ εάν και μόνο αν όλες οι κύριες ελάσσονές της είναι θετικές ή μηδέν. Δηλαδή:
$|H_1^*| \geq 0, |H_2^*| \geq 0, |H_3^*| \geq 0, \cdots |H_n^*| = |H| \geq 0$ για $x \in \mathbb{R}^n$.

Η Εσσιανή μήτρα H είναι αρνητικά ημί-ορισμένη στο $\mathbb{R}^n$ εάν και μόνο αν όλες οι κύριες ελάσσονες της εναλλάσσονται στο πρόσημο ή μηδενίζονται αρχής γενομένης από αρνητική ή μηδενική τιμή για $k = 1$. Δηλαδή:
$|H_1^*| \leq 0,$
$|H_2^*| \geq 0,$
$\vdots$

$$|H_n^*| = |H| = \begin{cases} \geq 0, \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος} \\ \leq 0, \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

Ολικό Διαφορικό Πρώτης Τάξης για Συνάρτηση Δύο Μεταβλητών

Το **ολικό διαφορικό πρώτης τάξης** για τη συνάρτηση $y = f(x_1, x_2)$ είναι:

$$dy = f_1(x_1, x_2)dx_1 + f_2(x_1, x_2)dx_2$$

Παραγώγιση Πεπλεγμένης Συνάρτησης

Πεπλεγμένη συνάρτηση είναι μια συνάρτηση της μορφής $F(x, y) = 0$.

$3y = 12 - 9x \Rightarrow y = \frac{12-9x}{3} = 4 - 3x$

Ένα απλό παράδειγμα είναι το $3y + 9x - 12 = 0$. Με λίγες μαθηματικές πράξεις μπορούμε να ορίσουμε αναλυτικά το y ως συνάρτηση του x με την $y = -3x + 4$ και βλέπουμε ότι η παράγωγος είναι $dy/dx = -3$.

$\frac{dy}{dx} = -3$

Όμως η εξεύρεση μίας αναλυτικής λύσης για το y από μία εξίσωση που εμπλέκει και το x και το y δεν είναι πάντα τόσο εύκολη. Συνεπώς είναι χρήσιμη μία διαδικασία για την εξεύρεση του dy/dx όταν το y ορίζεται έμμεσα.

Για παράδειγμα στην $e^{x^2+y} - 7 = 0$ μία δεδομένη τιμή του x συνεπάγεται κάποιο συγκεκριμένο y ώστε να ικανοποιείται η ισότητα.

$\frac{dy}{dx}$

Παραγώγιση Πεπλεγμένης Συνάρτησης

Αντί να επιλύσουμε αναλυτικά ως προς y, η εξεύρεση του dy/dx μπορεί να γίνει μέσω της διαδικασίας της **πεπλεγμένης παραγώγισης**. Καταρχήν υποθέτουμε προς στιγμήν ότι η πιο πάνω εξίσωση σημαίνει πως το y μπορούμε να το διατυπώσουμε ως εξής:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$F(x,y)=0 \Rightarrow \quad e^{x^2+f(x)} - 7 = 0$$

$$f(x) = e^x$$
$$g(x) = x^2+f(x)$$

Με παραγώγιση ως προς τη μεταβλητή x (χρησιμοποιώντας τον αλυσωτό κανόνα) έχουμε:

$$\left(\frac{d}{dx}\left[x^2+f(x)\right]\right) e^{x^2+f(x)} = \left[2x+f'(x)\right] \underbrace{e^{x^2+f(x)}}_{} = 0 \qquad 2x+f'(x)=0 \Rightarrow$$

$$>0 \qquad f'(x) = -2x$$

και μετά διαιρώντας με $e^{x^2+f(x)}$ που δεν μπορεί να είναι μηδέν, έχουμε ότι $2x + f'(x) = 0 \implies f'(x) = -2x$ που μας δίνει το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Παραγώγιση Πεπλεγμένης Συνάρτησης

Αποδεικνύεται ότι σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα αρκετά εύκολα με το να επιλύσουμε πρώτα απευθείας ως προς y, θεωρώντας το ως συνάρτηση του x. Αν πάρουμε τον φυσικό λογάριθμο και των δύο μελών της εξίσωσης $e^{x^2+y} = 7$ καταλήγουμε σε:

$\ln(e^{x^2+y}) = \ln 7$

$$\Rightarrow \quad (x^2 + y)\ln \overset{1}{\cancel{e}} = \ln 7$$

Όμως $\ln e = 1$, άρα:

$$y = \ln 7 - x^2$$

και επομένως $dy/dx = -2x$.

Παραγώγιση Πεπλεγμένης Συνάρτησης

Όμως, ακολουθώντας τα πιο πάνω βήματα για να παραγωγίσουμε πεπλεγμένα μία συνάρτηση είναι μία διαδικασία πολλές φορές επίπονη. Μία πιο βολική μέθοδος είναι να διατυπώσουμε πρώτα της σχέση ανάμεσα στο x και το y με την πεπλεγμένη συνάρτηση $F(x, y) = 0$ και στη συνέχεια παίρνοντας το ολικό διαφορικό της έκφρασης αυτής να καταλήξουμε στη σχέση:

$$\underline{F_x dx + F_y dy = 0} \Rightarrow F_y dy = -F_x dx \Rightarrow$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους της καταλήγουμε στο:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$F_y \neq 0$$

Παραγώγιση Πεπλεγμένης Συνάρτησης

Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης (για δύο μεταβλητές): Έστω ότι η $F(x, y) = 0$ είναι μία πεπλεγμένη συνάρτηση με συνεχείς πρώτες παραγώγους, η οποία ικανοποιείται σε κάποιο σημείο (x_0, y_0) και ορίζεται σε μία περιοχή αυτού του σημείου. Αν $F_y \neq 0$ σε αυτό το σημείο, τότε υπάρχει μία συνάρτηση $y = f(x)$ ορισμένη σε μία περιοχή του $x = x_0$ και η οποία αντιστοιχεί στη σχέση που ορίζεται από την $F(x, y) = 0$, έτσι ώστε:
(1) $y_0 = f(x_0)$, και
(2) $f'(x_0) = -F_x/F_y$

Το θεώρημα αυτό καθορίζει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες είναι δυνατό να συμπεράνουμε ότι η πεπλεγμένη συνάρτηση $F(x, y) = 0$ συνεπάγεται την ύπαρξη μίας σαφούς συναρτησιακής σχέσης $y = f(x)$ καθώς και ο τρόπος υπολογισμού της παραγώγου της. Το κεντρικό σημείο είναι ότι $F_y \neq 0$.

Παράδειγμα

Να ερμηνευτεί το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης χρησιμοποιώντας την

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0.$$

Αυτή είναι η εξίσωση ενός κύκλου στο $\mathbb{R}^2$ με κέντρο την αρχή των αξόνων $(0, 0)$ και ακτίνα 5. Επειδή μπορούμε να γράψουμε αυτήν την εξίσωση είτε ως:

$$y^2 = 25 - x^2$$

είτε ως:

$$x^2 = 25 - y^2$$

έπεται ότι $-5 \leq x \leq 5$ και $-5 \leq y \leq 5$ γιατί τα αριστερά μέλη ως τετράγωνα είναι θετικοί αριθμοί.

Παράδειγμα

$F(x,y) = x^2+y^2-25$

$\frac{dy}{dx}$

$F_y = 2y$

$F_y(-4) = -8 \neq 0$

$3^2+4^2 = 9+16 = 25$

Επιλέγουμε $x_0 = 3, y_0 = 4$, ένα συγκεκριμένο σημείο που ικανοποιεί την $F(x,y) = 0$. Επειδή $F_y(x,y) = 2y$, συνεπάγεται ότι στο $y_0 = 4$ ισχύει $F_y \neq 0$ και συνεπώς ικανοποιείται η βασική συνθήκη. Επομένως στην περιοχή του $(3,4)$ μπορούμε να σκεφτούμε ένα y ως συνάρτηση του x, και έχουμε:

$F_x = 2x$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Τώρα, στο σημείο $(3,4)$ έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

Παράδειγμα

$F(x, y) = 0$

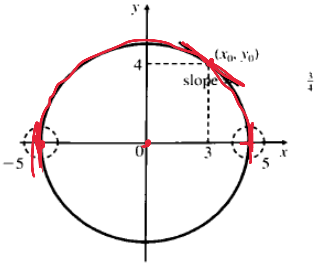
$\frac{dy}{dx}$

Για το παράδειγμα αυτό είναι εύκολο να λύσουμε άμεσα ως προς $y = f(x)$ στην περιοχή του σημείου $(3, 4)$ με $y = \sqrt{25 - x^2}$ και να ελέγξουμε την τιμή της παραγώγου με τα ακόλουθα βήματα:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(25 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) \iff \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

και στο $x_0 = 3$ παίρνουμε $dy/dx = -3/4$.

Διάγραμμα



$F_y \neq 0$

Σχήμα: Παράδειγμα πεπλεγμένης συνάρτησης

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο παραπάνω σχήμα. Παρατηρούμε σε αυτό το σχήμα ότι στα σημεία $(5, 0)$ και $(-5, 0)$ δεν είναι δυνατό να δούμε τη σχέση ανάμεσα στο x και το y ως μία συνάρτηση $y = f(x)$. Το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης εντοπίζει αυτή τη δυσκολία δεδομένου ότι $F_y = 2y = 0$ στις τιμές $x = 5$ ή $x = -5$ (αφού $y = 0$ σε κάθε τέτοια περίπτωση).

Γενίκευση

Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης: Έστω ότι η $F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = 0$ είναι μία πεπλεγμένη συνάρτηση με συνεχείς πρώτες παραγώγους, η οποία ικανοποιείται σε κάποιο σημείο $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, y^0)$ και ορίζεται σε κάποια περιοχή αυτού του σημείου. Αν $F_y \neq 0$ σε αυτό το σημείο, τότε υπάρχει μία συνάρτηση $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ορισμένη σε μία περιοχή του $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ έτσι ώστε:

1. $y^0 = f(\mathbf{x}^0)$, και
2. $f_i(\mathbf{x}^0) = -F_{x_i}/F_y$

Παράδειγμα

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}$$

Να χρησιμοποιήσετε την πεπλεγμένη παραγώγιση και να βρείτε τις παραγώγους $\partial y/\partial x_1$ και $\partial y/\partial x_2$ της συνάρτησης που προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$F(x_1, x_2, y) = 5x_1x_2 + 2x_2y^2 + x_1^2x_2^2y - 5 = 0$$

$F_{x_1} = 5x_2 + 2x_1x_2^2y$, $F_{x_2} = 5x_1 + 2y^2 + 2x_1^2x_2y$ και $F_y = 4x_2y + x_1^2x_2^2$

Συνεπώς:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -\frac{F_{x_1}}{F_y} = -\frac{5x_2+2x_1x_2^2y}{4x_2y+x_1^2x_2^2} \text{ και } \frac{\partial y}{\partial x_2} = -\frac{F_{x_2}}{F_y} = -\frac{5x_1+2y^2+2x_1^2x_2y}{4x_2y+x_1^2x_2^2}$$

Μαθηματική Ανάλυση
Διάλεξη 7

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Σπύρος Χαλκίδης
Ε.ΔΙ.Π.

Νοέμβριος 2022

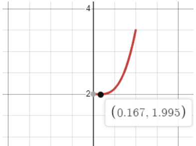
Θέματα 7ης διάλεξης

- Βελτιστοποίηση συναρτήσεων μίας μεταβλητής με περιορισμούς διαστήματος
- Βελτιστοποίηση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών με περιορισμούς διαστήματος
- Τεχνική πολλαπλασιαστή Lagrange

Βελτιστοποίηση σε ένα διάστημα - Παράδειγμα 1

Να λυθεί το πρόβλημα $\min y = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2$ υπό τον περιορισμό $0 \leq x \leq 1$.

Η πρώτη παράγωγος είναι: $y' = 6x^2 - x$.
Τα στάσιμα σημεία είναι $x = 0$ και $x = 1/6$ τα οποία ανήκουν στο διάστημα που μας δίνεται.
Η δεύτερη παράγωγος είναι: $y'' = 12x - 1$
Στο $x = 0$, όπου $y'' = -1$ έχουμε τοπικό μέγιστο.
Στο $x = 1/6$, όπου $y'' = 1$ έχουμε τοπικό ελάχιστο.
Οι τιμές της y στα στάσιμα σημεία είναι $(0, 2)$ και $(\frac{1}{6}, 1.995)$.
Ελέγχουμε και το άκρο του διαστήματος για $x = 1$, δηλαδή το σημείο $(1, 7/2)$.
Συνεπώς έχουμε ολικό ελάχιστο στο $x = 1/6$.



Βελτιστοποίηση σε ένα διάστημα - Παράδειγμα 2

Να λυθεί το πρόβλημα $\max(y) = x^4 - 2x^2$ υπό τον περιορισμό $-1 \leq x \leq 1$.

Η πρώτη παράγωγος είναι: $y' = 4x^3 - 4x$ $\quad y' = 0 \Rightarrow 4x(x^2-1) = 0$

Τα στάσιμα σημεία είναι $x = 0$, $x = -1$ και $x = 1$ τα οποία ανήκουν στο διάστημα που μας δίνεται.

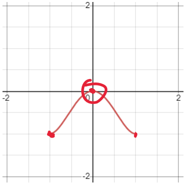
Η δεύτερη παράγωγος είναι: $y'' = 12x^2 - 4$

Στο $x = 0$, όπου $y'' = -4$ έχουμε τοπικό μέγιστο.

Στο $x = -1$, όπου $y'' = 8$ έχουμε τοπικό ελάχιστο.

Στο $x = 1$, όπου $y'' = 8$ έχουμε τοπικό ελάχιστο.

Συνεπώς έχουμε ολικό μέγιστο στο $x = 0$ όπου $f(0) = 0$.



Άμεσοι Περιορισμοί στις Μεταβλητές

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$a_1 \leq x_1 \leq b_1$
$a_2 \leq x_2 \leq b_2$
$\vdots$
$a_n \leq x_n \leq b_n$

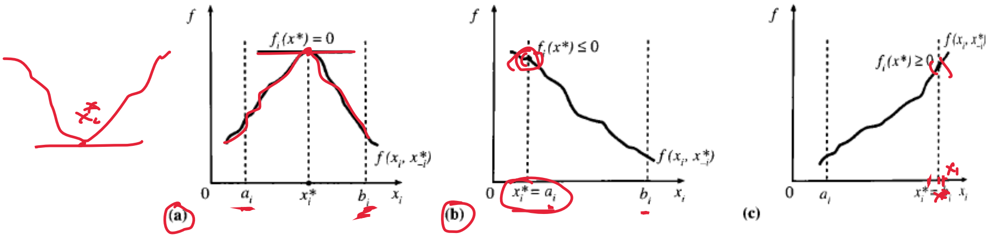
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία συνάρτηση με n μεταβλητές και ας υποθέσουμε ότι κάθε μεταβλητή περιορίζεται σε ένα διάστημα $\alpha_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \cdots, n$.

Για μερικά i μπορεί το x_i να μην φράσσεται από πάνω ή κάτω, αλλά υποθέτουμε ότι για μερικά τουλάχιστον i, τα α_i και/ή τα b_i είναι πεπερασμένα.

Άμεσοι Περιορισμοί στις Μεταβλητές

max/min $f(x)$ $\quad a_i \le x_i \le b_i$

Ας υποθέσουμε ότι το σημείο $\mathbf{x}^*$ δίνει ένα μέγιστο της συνάρτησης με τον περιορισμό ότι κάθε τιμή x_i βρίσκεται μέσα σε δεδομένο διάστημα.
Για κάθε x_i επομένως πρέπει να έχουμε μία από τρεις πιθανές περιπτώσεις οι οποίες παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα, όπου με $\mathbf{x}^*_{-i}$ συμβολίζουμε το διάνυσμα των σταθερών τιμών $(x_1^*, \cdots, x_{i-1}^*, x_{i+1}^*, \cdots, x_n^*)$.



Σχήμα: Πιθανές λύσεις όταν κάποιο x_i πρέπει να βρίσκεται μέσα σε ένα διάστημα

Άμεσοι Περιορισμοί στις Μεταβλητές

Περίπτωση 1^{η}: $\alpha_i < x_i^* < b_i$.
Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να ισχύει $f_i(\mathbf{x}^*) = 0$. Για να το διαπιστώσουμε αυτό παίρνουμε τη συνιστώσα $f_i(\mathbf{x}^*)dx_i$ του ολικού διαφορικού df η οποία αντιστοιχεί στην x_i:

$$dy(\mathbf{x}^*) = f_1(x^*)dx_1 + \ldots + \underset{<0\ \ <0}{\overset{>0\ \ >0}{f_i(x^*)dx_i}} + \ldots + f_n(x^*)dx_n$$

Αν $f_i(\mathbf{x}^*) \neq 0$ τότε μπορούμε να βρούμε ένα κατάλληλα μικρό dx_i με το κατάλληλο πρόσημο, έτσι ώστε $f_i(\mathbf{x}^*)dx_i > 0$. Με αυτόν τον τρόπο θα αυξηθεί η τιμή της συνάρτησης, απορρίπτοντας την αρχική υπόθεση ότι βρίσκεται σε μέγιστο. Επομένως, πρέπει να ισχύει $f_i(\mathbf{x}^*) = 0$.

Άμεσοι Περιορισμοί στις Μεταβλητές

Περίπτωση 2^{η}: $\alpha_i = x_i^*$.
Σε αυτήν την περίπτωση πρέπει να ισχύει $\boxed{f_i(\mathbf{x}^*) \leq 0}$. Για να το διαπιστώσουμε αυτό, υποθέτουμε ότι $f_i(\mathbf{x}^*) > 0$. Μπορούμε να επιλέξουμε κάποιο $dx_i > 0$, αφού έτσι το x_i διατηρείται μέσα στο εφικτό διάστημα, και έχουμε τότε $f_i(\mathbf{x}^*)dx_i > 0$ γεγονός που αντιβαίνει στην αρχική υπόθεση ότι η συνάρτηση βρίσκεται σε μέγιστο. Επομένως μπορούμε να αποκλείσουμε το ενδεχόμενο να ισχύει $f_i(\mathbf{x}^*) > 0$.

Αν $f_i(\mathbf{x}^*)dx_i > 0$ μόνο κάποιο $dx_i < 0$ θα μπορούσε να αυξήσει την τιμή της συνάρτησης, αλλά αυτό παραβιάζει τον περιορισμό και συνεπώς η τιμή της συνάρτησης δεν μπορεί να αυξηθεί. Όπως επίσης, αν $f_i(\mathbf{x}^*) = 0$ η τιμή της συνάρτησης δεν μπορεί να αυξηθεί με μικρές διακυμάνσεις στο x_i.

Άμεσοι Περιορισμοί στις Μεταβλητές

Περίπτωση 3^η: $x_i^* = b_i$.
Σε αυτήν την περίπτωση πρέπει να ισχύει $f_i(\mathbf{x}^*) \geq 0$. Για να το διαπιστώσουμε αυτό ας υποθέσουμε ότι $f_i(\mathbf{x}^*) < 0$. Μπορούμε να επιλέξουμε $dx_i < 0$ έτσι ώστε $f_i(\mathbf{x}^*)dx_i > 0$ και συνεπώς, χωρίς να παραβιαστεί ο περιορισμός, η τιμή της συνάρτησης μπορεί να αυξηθεί. Άρα πρέπει να αποκλείσουμε αυτήν την περίπτωση.

<0 <0

Αν $f_i(\mathbf{x}^*)dx_i > 0$ μόνο κάποιο $dx_i > 0$ θα μπορούσε να αυξήσει την τιμή της συνάρτησης, αλλά αυτό παραβιάζει τον περιορισμό και συνεπώς η τιμή της συνάρτησης δεν μπορεί να αυξηθεί. Όπως επίσης, αν $f_i(\mathbf{x}^*) = 0$ η τιμή της συνάρτησης δεν μπορεί να αυξηθεί με μικρές διακυμάνσεις στο x_i.

Άμεσοι Περιορισμοί στις Μεταβλητές

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Θεώρημα: Αν $\mathbf{x}^*$ είναι μία λύση στο πρόβλημα της μεγιστοποίησης της $f(\mathbf{x})$, δηλαδή

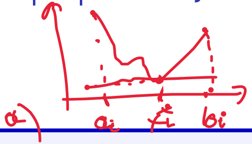
$\max f(\mathbf{x})$ υπό τον περιορισμό $\alpha_i \leq x_i \leq b_i$ με $i = 1, \cdots, n$,

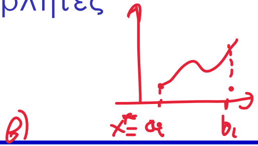
τότε πρέπει να ισχύει μία ή και οι δύο από τις ακόλουθες συνθήκες:

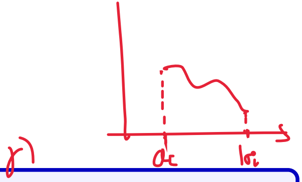
1. $f_i(\mathbf{x}^*) \leq 0$ και $(x_i^* - \alpha_i) f_i(\mathbf{x}^*) = 0$
2. $f_i(\mathbf{x}^*) \geq 0$ και $(b_i - x_i^*) f_i(\mathbf{x}^*) = 0$

για όλα τα $i = 1, \cdots, n$.

Άμεσοι Περιορισμοί στις Μεταβλητές







Θεώρημα: Αν $\mathbf{x}^*$ είναι μία λύση στο πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της $f(\mathbf{x})$ δηλαδή

$\min\ f(\mathbf{x})$ υπό τον περιορισμό $\alpha_i \leq x_i \leq b_i$ με $i = 1, \cdots, n$,

τότε πρέπει να ισχύει μία ή και οι δύο από τις ακόλουθες συνθήκες:

1. $f_i(\mathbf{x}^*) \geq 0$ και $(x_i^* - \alpha_i) f_i(\mathbf{x}^*) = 0$
2. $f_i(\mathbf{x}^*) \leq 0$ και $(b_i - x_i^*) f_i(\mathbf{x}^*) = 0$

για όλα τα $i = 1, \cdots, n$.

Παράδειγμα 1

$y = (a)x + b$

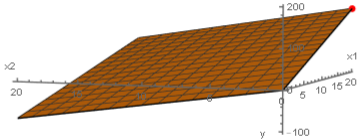
$[0, 20]$

Να λυθεί το πρόβλημα: $\max f(\mathbf{x}) = y = 10x_1 - 5x_2$
υποκείμενη στους περιορισμούς $0 \leq x_1 \leq 20$, $0 \leq x_2 \leq 20$.

Η συνάρτηση αυτή είναι γραμμική και αύξουσα ως προς x_1 και γραμμική και φθίνουσα ως προς x_2. Όταν δεν υπάρχει διάστημα περιορισμών δεν υπάρχει καμία λύση (γιατί;). Μπορούμε να αντιληφθούμε ότι η λύση βρίσκεται στο άνω όριο της x_1 και στο κάτω όριο της x_2: $x_1^* = 20, x_2^* = 0$
Το σημείο αυτό πληροί τις αναγκαίες συνθήκες για μέγιστο αφού:

$$f_1 = 10 \geq 0,\ (20 - x_1^*)10 = 0$$
$$f_2 = -5 \leq 0,\ (x_2^* - 0)(-5) = 0$$

στο $(20, 0)$.



Παράδειγμα 2

$\mathbb{R}^2$

Να λυθεί το πρόβλημα: $\max f(\mathbf{x}) = y = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$ υποκείμενη στους περιορισμούς $0 \le x_1 \le 10$, $0 \le x_2 \le 10$.

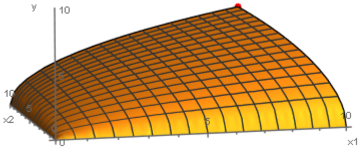
$f_1(x_1, x_2) = \underline{\frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}} > 0$ στο δεδομένο διάστημα, συνεπώς είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό ως προς x_1.

$f_2(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} x_2^{-\frac{1}{2}} > 0$ στο δεδομένο διάστημα, συνεπώς είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό ως προς x_2.

Άρα μπορούμε να αντιληφθούμε ότι η λύση βρίσκεται στα άνω όρια των διαστημάτων: $x_1^* = \underline{10}$, $x_2^* = \underline{10}$.

Το σημείο αυτό πληρεί την αναγκαία συνθήκη του θεωρήματος για μέγιστο, αφού:

$$\begin{cases} f_1(10, 10) = \frac{1}{2} 10^{-\frac{1}{2}} 10^{\frac{1}{2}} \ge 0, \ (10 - 10) f_1 = 0 \\ f_2(10, 10) = \frac{1}{2} 10^{\frac{1}{2}} 10^{-\frac{1}{2}} \ge 0, \ (10 - 10) f_2 = 0 \end{cases}$$



Παράδειγμα 3

Να λυθεί το πρόβλημα: $\max f(\mathbf{x}) = y = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2$ υποκείμενη στους περιορισμούς $0 \leq x_1 \leq 10$, $0 \leq x_2 \leq 10$.

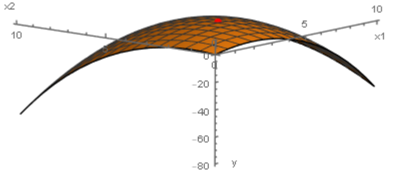
Έχουμε $f_1 = 4 - 2x_1 + x_2$, $f_2 = 2 - 2x_2 + x_1$ $\quad f_1 = f_2 = 0$

Από τις συνθήκες πρώτης τάξης και τη δεύτερη εξίσωση έχουμε ότι $x_1 = 2x_2 - 2$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση έχουμε $4 - 4x_2 + 4 + x_2 = 0 \iff 8 - 3x_2 = 0 \iff x_2 = \frac{8}{3}$. Αντικαθιστώντας έχουμε $x_1 = \frac{10}{3}$. Το σημείο είναι εσωτερικό και στα δύο διαστήματα και έχουμε στο σημείο $(\frac{10}{3}, \frac{8}{3})$.

$f_1 = 0$, $(\frac{10}{3} - 0)f_1 = (10 - \frac{10}{3})f_1 = 0$

$f_2 = 0$, $(\frac{8}{3} - 0)f_2 = (10 - \frac{8}{3})f_2 = 0$

Άρα ικανοποιούνται οι συνθήκες για μέγιστο.



Παράδειγμα 4

Να λυθεί το πρόβλημα: $\max f(\mathbf{x}) = y = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2$ υποκείμενη στους περιορισμούς $0 \le x_1 \le 1$, $0 \le x_2 \le \frac{8}{3}$

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε την ίδια συνάρτηση όπως και πριν, αλλά διαφέρουν τα διαστήματα.

Για το x_1, το δεδομένο διάστημα αποκλειεί την προηγούμενη βέλτιστη λύση.

Για το x_2 η προηγούμενη βέλτιστη λύση είναι το άνω όριο του διαστήματος και συνεχίζει να είναι διαθέσιμη.

Όμως χρειάζεται προσοχή γιατί ακόμη και αν συνεχίζει να είναι εφικτή, η τιμή αυτή του x_2 δεν είναι κατ΄ ανάγκη βέλτιστη για το νέο (λόγω αλλαγής περιορισμών) πρόβλημα.

Παράδειγμα 4

Μπορούμε να δοκιμάσουμε τα άνω όρια των δύο διαστημάτων, το σημείο $(1, \frac{8}{3})$. Οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης είναι:

$x_1 \in [0,1]$

$$f_1 = 4 - 2x_1 + x_2, \; f_2 = 2 - 2x_2 + x_1$$

Επομένως στο $(1, \frac{8}{3})$ έχουμε:

$$f_1(1, \tfrac{8}{3}) = \tfrac{14}{3} > 0, \; f_2(1, \tfrac{8}{3}) = -\tfrac{7}{3} < 0$$

Συμπεραίνουμε ότι αυτό το σημείο δεν μπορεί να είναι μέγιστο σύμφωνα με το θεώρημα, γιατί χρειαζόμαστε $f_2 \geq 0$, όταν το x_2 είναι στο άνω όριο του διαστήματός του.

Παράδειγμα 4

Μπορούμε να βρούμε την πιθανή λύση επισημαίνοντας πρώτα ότι για όλα τα x_1 μέσα στο διάστημα $[0, 1]$ και για όλα τα x_2 στο $\left[0, \frac{8}{3}\right]$ ισχύει $f_1 > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση είναι *αύξουσα* ως προς x_1. Επομένως, έχει νόημα να θέσουμε την x_1 στο άνω όριό της $x_1 = 1$. Όπως είδαμε πριν λίγο στο $\left(1, \frac{8}{3}\right)$ η μερική παράγωγος $f_2 < 0$ γεγονός που σημαίνει ότι μπορούμε να αυξήσουμε την τιμή της συνάρτησης μειώνοντας την x_2. Όμως μέχρι πού; Μπορούμε να βρούμε την απάντηση αν θέσουμε $x_1 = 1$ στη συνάρτηση y και την μεγιστοποιήσουμε ως προς τη x_2 στο διάστημα $\left[0, \frac{8}{3}\right]$. Δηλαδή, το πρόβλημά μας είναι:

$$\max y = \underline{3 + 3x_2 - x_2^2} \text{ υπό τον περιορισμό } \underline{0 \leq x_2 \leq \tfrac{8}{3}}$$

Από τη συνθήκη πρώτης τάξης έχουμε:

$$3 - 2x_2 = 0$$

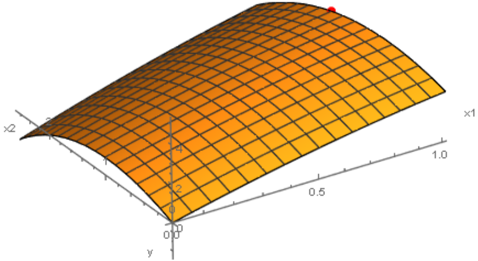
που σημαίνει ότι $x_2^* = \underline{1.5}$

Παράδειγμα 4

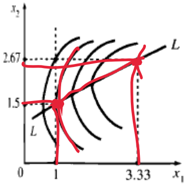
Για να ελέγξουμε αν το σημείο $(1, 1.5)$ ικανοποιεί τις αναγκαίες συνθήκες για μέγιστο έχουμε:

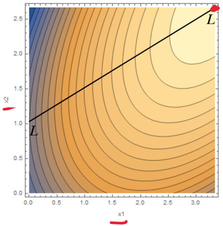
$$\begin{cases} f_1 = 4 - 2(1) + 1.5 = 3.5 > 0, \ f_1(1 - x_1^*) = 0 \\ f_2 = 2 - 2(1.5) + 1 = 0, \ f_2(\frac{8}{3} - 1.5) = 0 \end{cases}$$

και επομένως οι συνθήκες ισχύουν.



Σχηματική αναπαράσταση του προβλήματος





Σχήμα: Διάστημα περιορισμού που μεταβάλλει τις βέλτιστες τιμές και των δύο μεταβλητών

Η κορυφή του γραφήματος βρίσκεται στο (3.33, 2.67), αλλά στο υπό περιορισμούς πρόβλημα περιοριζόμαστε στο $[0, 1]$ για το x_1. Το σημείο (1, 2.67) δεν βρίσκεται στην υψηλότερη ισοϋψή καμπύλη που μπορούμε να πετύχουμε. Την υψηλότερη δυνατή ισοϋψή καμπύλη την πετυχαίνουμε μετακινούμενοι στο (1, 1.50). Παρατηρούμε ότι αυτό είναι ένα σημείο επαφής (point of tangency) ανάμεσα στην κάθετη γραμμή περιορισμού και την υψηλότερη κατά το δυνατόν ισοϋψη καμπύλη.

Σχηματική αναπαράσταση του προβλήματος

Το πρώτο στάδιο αυτής της διαδικασίας ισοδυναμεί με την εύρεση του γεωμετρικού τόπου των ισοϋψών καμπυλών αυτής της συνάρτησης με τις κάθετες ευθείες που αντιστοιχούν στις διάφορες τιμές της x_1.

Αυτός ο γεωμετρικός τόπος σημειώνεται με LL στο σχήμα. Επομένως η τομή αυτού του γεωμετρικού τόπου με την κάθετη ευθεία στο $x_1 = 1$ δίνει τη συνολική λύση.

Τεχνική του Πολλαπλασιαστή Lagrange

Ορισμός: Η **Μέθοδος Lagrange** για την εύρεση μίας λύσης (x_1^*, x_2^*) στο πρόβλημα
max $f(x_1, x_2)$ υπό τον περιορισμό $g(x_1, x_2) = 0$
συνίσταται στη δημιουργία των ακόλουθων συνθηκών πρώτης τάξης για την εύρεση του ή των στάσιμων σημείων της συνάρτησης Lagrange.
$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$ που είναι:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = f_1(x_1^*, x_2^*) + \lambda^* g_1(x_1^*, x_2^*) = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = f_2(x_1^*, x_2^*) + \lambda^* g_2(x_1^*, x_2^*) = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = g(x_1^*, x_2^*) = 0$$

Παράδειγμα

Να λυθεί το πρόβλημα δεσμευμένης μεγιστοποίησης $-x_1-2x_2=-100$

max $y = x_1^2 x_2$ υπό τον περιορισμό $100 - x_1 - 2x_2 = 0$

$g(x_1,x_2)=0$

$f(x_1,x_2)+\lambda g(x_1,x_2)$

$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 x_2 + \lambda(100 - x_1 - 2x_2) = 0$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2x_1 x_2 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = x_1^2 - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 100 - x_1 - 2x_2 = 0$$

λ

Έχουμε $x_1 = 100 - 2x_2$ και $\lambda = 2x_1x_2 = 2(100 - 2x_2)x_2$ και
$x_1^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow (100 - 2x_2)^2 - 4(100 - 2x_2)x_2 = 0 \Leftrightarrow (100 - 2x_2)(100 - 2x_2 - 4x_2) = 0$
$\Leftrightarrow (100 - 2x_2)(100 - 6x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 = 50$ ή $x_2 = \frac{50}{3}$

Συνεπώς τα στάσιμα σημεία είναι τα $(0, 50)$ και το $(\frac{200}{3}, \frac{50}{3})$.

Παράδειγμα 2

Να λυθεί το ακόλουθο πρόβλημα δεσμευμένης ελαχιστοποίησης:

$f(x_1,x_2)$ $\qquad\qquad$ $g(x_1,x_2)=0$

$$\min\ y = x_1 + x_2 \text{ υπό τον περιορισμό } 1 - x_1^{1/2} - x_2 = 0$$

Η συνάρτηση Lagrange είναι

$$\mathcal{L} = x_1 + x_2 + \lambda(1 - x_1^{1/2} - x_2)$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 1 - (\frac{\lambda}{2})x_1^{-1/2} = 0$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 1 - \lambda = 0$,
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 1 - x_1^{1/2} - x_2 = 0$
Έχουμε $\lambda = 1$ από τη δεύτερη εξίσωση και αντικαθιστώντας στην πρώτη
$\frac{1}{2}x_1^{-1/2} = 1 \iff x_1^{1/2} = \frac{1}{2} \iff x_1 = \frac{1}{4}$. Συνεπώς $x_1 = \frac{1}{4}$. Αντικαθιστώντας στην τρίτη εξίσωση έχουμε $x_2 = \frac{1}{2}$.

Ικανές συνθήκες για βέλτιστα

Η περιφραγμένη εσσιανή μήτρα της συνάρτησης Lagrange είναι:

$f_{12}=f_{21}$

$g_{12}=g_{21}$

$$H^* = \begin{bmatrix} f_{11}+\lambda^* g_{11} & f_{12}+\lambda^* g_{12} & g_1 \\ f_{21}+\lambda^* g_{21} & f_{22}+\lambda^* g_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & g_1 \\ L_{21} & L_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Θεώρημα: Αν το $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$ δίνει μία στάσιμη τιμή της συνάρτησης Lagrange $\mathcal{L} = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$, τότε το σημείο

- δίνει ένα μέγιστο αν η ορίζουσα της περιφραγμένης εσσιανής $|H^*| > 0$, και
- δίνει ένα ελάχιστο αν η ορίζουσα της περιφραγμένης εσσιανής $|H^*| < 0$

Έλεγχος για το 1ο παράδειγμα

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2, \quad g(x_1, x_2) = 100 - x_1 - 2x_2 = 0$$

$f_1 = 2x_1x_2 - \lambda,\ f_{11} = 2x_2,\ f_{12} = 2x_1$
$f_2 = x_1^2 - 2\lambda,\ f_{21} = 2x_1,\ f_{22} = 0$
$g_1 = -1,\ g_2 = -2,\ g_{11} = 0,\ g_{12} = 0,\ g_{21} = 0,\ g_{22} = 0$

Η περιφραγμένη Εσσιανή είναι:

$$|H^*| = \begin{vmatrix} 2x_2 & 2x_1 & -1 \\ 2x_1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2x_1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2x_2 & -1 \\ 2x_1 & -2 \end{vmatrix} = 4x_1^* + 2(-4x_2^* + 2x_1^*) =$$
$$\boxed{8x_1^* - 8x_2^*}.$$

Για το $(\frac{200}{3}, \frac{50}{3})$, $|H^*| = 400 > 0$ άρα έχουμε τοπικό μέγιστο και για το $(0, 50)$ $|H^*| = -400 < 0$ άρα έχουμε τοπικό ελάχιστο.

Έλεγχος για το 2ο παράδειγμα

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad g(x_1, x_2) = 1 - x_1^{1/2} - x_2 = 0$$

$f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_{11} = 0,\ f_{12} = 0,\ f_{21} = 0,\ f_{22} = 0$
$g_1 = -\frac{1}{2}x_1^{-1/2},\ g_2 = -1,\ g_{11} = \frac{1}{4}x_1^{-3/2},\ g_{12} = 0,\ g_{21} = 0,\ g_{22} = 0$

$$|H^*| = \begin{vmatrix} \frac{1}{4}x_1^{-3/2} & 0 & -\frac{1}{2}x_1^{-1/2} \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2}x_1^{-1/2} & -1 & 0 \end{vmatrix} = \underline{-\frac{1}{4}x_1^{-3/2}}$$

το οποίο στο $x_1^* = \frac{1}{4}$ δίνει $|H^*| = -\frac{1}{4}\frac{1}{4}^{-3/2} = -\frac{1}{4}^{-1/2} = \underline{-2} < 0.$

Συνεπώς έχουμε όντως ένα τοπικό ελάχιστο στο $x_1^* = \frac{1}{4},\ x_2^* = \frac{1}{2}.$

Παράδειγμα 3

Βρείτε τις διαστάσεις ενός κλειστού κυλινδρικού μεταλλικού κουτιού αναψυκτικού έτσι ώστε να μεγιστοποιείται ο όγκος του και η συνολική του επιφάνεια να είναι ίση με 24π.

Έστω ότι συμβολίζουμε με x_1 την ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου, και με x_2 το ύψος του. Τότε ο όγκος του ισούται με $\pi x_1^2 x_2$ ενώ το εμβαδόν της επιφάνειάς του ίσο με $2\pi x_1 x_2 + 2\pi x_1^2$. Το πρόβλημα ανάγεται στο:

$f(x_1,x_2)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $g(x_1,x_2)=0$

$$\max\ y = \pi x_1^2 x_2 \text{ υπό τον περιορισμό } 2\pi x_1 x_2 + 2\pi x_1^2 = 24\pi$$

Η συνάρτηση Lagrange είναι $f(x_1,x_2) + \lambda g(x_1,x_2)$

$$\mathcal{L} = \pi x_1^2 x_2 + \lambda(2\pi x_1 x_2 + 2\pi x_1^2 - 24\pi)$$

Παράδειγμα 3

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2\pi x_1 x_2 + 2\lambda\pi x_2 + 4\lambda\pi x_1 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \pi x_1^2 + 2\lambda\pi x_1 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 2\pi x_1 x_2 + 2\pi x_1^2 - 24\pi = 0 \end{cases}$$

Από τη πρώτη συνθήκη έχουμε: $\lambda = -\frac{x_1 x_2}{2x_1 + x_2}$, ενώ από τη δεύτερη: $\pi x_1(x_1 + 2\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{x_1}{2}$ (δεν μπορούμε να έχουμε $x_1 = 0$ αφού είναι φυσική ποσότητα), επομένως $-\frac{x_1}{2} = -\frac{x_1 x_2}{2x_1 + x_2} \Rightarrow 2x_2 = 2x_1 + x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{x_2}{2}$. Από την τρίτη συνθήκη αντικαθιστώντας το x_1 παίρνουμε: $2\pi \frac{x_2}{2} x_2 + 2\pi \left(\frac{x_2}{2}\right)^2 - 24\pi = 0 \Rightarrow x_2 = 4$. Αντικαθιστώντας στις υπόλοιπες συνθήκες, παίρνουμε το στάσιμο σημείο:

$$x_1^* = 2, \quad x_2^* = 4 \quad \lambda^* = -1$$

Παράδειγμα 3

Ελέγχουμε εάν το σημείο που βρήκαμε αποτελεί μέγιστο της f.
$f_1 = 2\pi x_1 x_2$, $f_2 = \pi x_1^2$, $f_{11} = 2\pi x_2$, $f_{12} = 2\pi x_1$, $f_{21} = 2\pi x_1$, $f_{22} = 0$
$g_1 = 2\pi x_2 + 4\pi x_1$, $g_2 = 2\pi x_1$, $g_{11} = 4\pi$, $g_{12} = 2\pi$, $g_{21} = 2\pi$, $g_{22} = 0$

$$|H^*| = \begin{vmatrix} 2\pi x_2^* + \lambda^* 4\pi & 2\pi x_1^* + \lambda^* 2\pi & 2\pi x_2^* + 4\pi x_1^* \\ 2\pi x_1^* + \lambda^* 2\pi & 0 & 2\pi x_1^* \\ 2\pi x_2^* + 4\pi x_1^* & 2\pi x_1^* & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4\pi & 2\pi & 16\pi \\ 2\pi & 0 & 4\pi \\ 16\pi & 4\pi & 0 \end{vmatrix} = 192\pi^3 > 0.$$

Συνεπώς έχουμε ένα τοπικό μέγιστο στο $x_1^* = 2$, $x_2^* = 4$, με μέγιστο όγκο $f(x_1^*, x_2^*) = 16\pi$.

Για πολλές διαστάσεις

Θεώρημα: Αν η συνάρτηση Lagrange $f(x_1, \cdots, x_n) + \lambda g(x_1, \cdots, x_n)$ έχει μία στάσιμη τιμή στο $(x_1^*, \cdots, x_n^*, \lambda^*)$, τότε το σημείο $(x_1^*, \cdots, x_n^*)$ αποτελεί λύση του ακόλουθου προβλήματος:

1. Να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση $f(x_1, \cdots, x_n)$ υπό τον περιορισμό $g(x_1, \cdots, x_n) = 0$ αν οι ακόλουθες διαδοχικές κύριες ελάσσονες της ορίζουσας $|H^*|$ έχουν εναλλασσόμενο πρόσημο ως εξής:

$$\begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} & g_2 \\ \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix} < 0, \cdots$$

L_{14}, L_{24}, L_{34}, $\vdots$

με την $|H^*|$ (ολόκληρη) να παίρνει το πρόσημο του $(-1)^n$

2. Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση $f(x_1, \cdots, x_n)$ υποκείμενη στον περιορισμό $g(x_1, \cdots, x_n) = 0$ αν οι παραπάνω ηγετικές κύριες ελάσσονες της $|H^*|$ είναι αυστηρά αρνητικές.

$=0$

Παράδειγμα

> Βρείτε τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές της $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 + 2x_2^2 + 3x_3^2$ υπό τον περιορισμό $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

Η συνάρτηση Lagrange είναι

$$\mathcal{L} = x_1^2 + x_1 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2x_1 + 1 + 2\lambda x_1 = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 4x_2 + 2\lambda x_2 = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} = 6x_3 + 2\lambda x_3 = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$$

Παράδειγμα

Από τη 2η εξίσωση έχουμε $4x_2 + 2\lambda x_2 = 0 \Rightarrow 2x_2(2+\lambda) = 0$ οπότε $x_2 = 0$ ή $\lambda = -2$.
Από την 3η εξίσωση έχουμε $6x_3 + 2\lambda x_3 = 0 \Rightarrow 2x_3(3+\lambda)x_3 = 0$ οπότε $x_3 = 0$ ή $\lambda = -3$.
Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:
α) $x_2 = x_3 = 0$ τότε από την 4η εξίσωση έχουμε $x_1^2 + 0 + 0 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \pm 1$ και $\lambda = -\frac{3}{2}$, $\lambda = -\frac{1}{2}$ αντίστοιχα (για $x_1 = 1$ και $x_1 = -1$)
β) $x_2 = 0,\ \lambda = -3$ τότε από την 1η εξίσωση έχουμε $2x_1 + 1 + 2(-3)x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$, και από την 4η εξίσωση: $\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 0 + x_3^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_3 = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$
γ) $\lambda = -2,\ x_3 = 0$ τότε από τη 1η εξίσωση $2x_1 + 1 + 2(-2)x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$ και από την 4η εξίσωση: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + x_2^2 + 0 - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
Επομένως έχουμε συνολικά τα στάσιμα σημεία $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \lambda^*)$: $(1, 0, 0, -\frac{3}{2})$, $(-1, 0, 0, -\frac{1}{2})$, $\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{\sqrt{15}}{4}, -3\right)$, $\left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{\sqrt{15}}{4}, -3\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -2\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -2\right)$.

Παράδειγμα

Θα ελέγξουμε εάν τα στάσιμα σημεία που βρήκαμε αποτελούν μέγιστα ή ελάχιστα της f.
$\mathcal{L}_1 = 2x_1 + 1 + 2\lambda x_1$, $\mathcal{L}_2 = 4x_2 + 2\lambda x_2$, $\mathcal{L}_3 = 6x_3 + 2\lambda x_3$, $\mathcal{L}_{11} = 2 + 2\lambda$, $\mathcal{L}_{12} = 0$, $\mathcal{L}_{13} = 0$, $\mathcal{L}_{21} = 0$, $\mathcal{L}_{22} = 4 + 2\lambda$, $\mathcal{L}_{23} = 0$, $\mathcal{L}_{31} = 0$, $\mathcal{L}_{32} = 0$, $\mathcal{L}_{33} = 6 + 2\lambda$, $g_1 = 2x_1$, $g_2 = 2x_2$, $g_3 = 2x_3$.
Υπολογίζουμε τις διαδοχικές κύριες ελάσσονες της ορίζουσας $|H^*|$:

$$\begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+2\lambda & 0 & 2x_1 \\ 0 & 4+2\lambda & 2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{vmatrix} = \underline{-4x_1^2(2\lambda+4) - 4x_2^2(2\lambda+2)}, \text{ και}$$

$$\begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} & g_2 \\ \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+2\lambda & 0 & 0 & 2x_1 \\ 0 & 4+2\lambda & 0 & 2x_2 \\ 0 & 0 & 6+2\lambda & 2x_3 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-16\left(\underline{x_3^2(\lambda+2)(\lambda+1) + (\lambda+3)\left(x_1^2(\lambda+2) + x_2^2}(\lambda+1)\right)\right)$$

Παράδειγμα

Για κάθε σημείο ξεχωριστά έχουμε για τις διαδοχικές κύριες ελάσσονες της ορίζουσας $|H^*|$:

$$\left(1,0,0,-\tfrac{3}{2}\right):\ \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0,\ \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} & g_2 \\ \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix} = -12 < 0$$

$$\left(-1,0,0,-\tfrac{1}{2}\right):\ \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} = -12 < 0,\ \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} & g_2 \\ \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix} = -60 < 0$$

Παράδειγμα

Για κάθε στάσιμο σημείο ξεχωριστά έχουμε για τις διαδοχικές κύριες ελάσσονες της ορίζουσας $|H^*|$:

$$\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{\sqrt{15}}{4}, -3\right): \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} > 0, \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} & g_2 \\ \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix} = -30 < 0$$

$$\left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{\sqrt{15}}{4}, -3\right): \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} > 0, \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} & g_2 \\ \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix} = -30 < 0$$

Παράδειγμα

Για κάθε σημείο ξεχωριστά έχουμε για τις διαδοχικές κύριες ελάσσονες της ορίζουσας $|H^*|$:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -2\right): \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} = 6 > 0, \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} & g_2 \\ \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -2\right): \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} = 6 > 0, \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} & g_2 \\ \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

Άρα τα σημεία $(1, 0, 0, -\frac{3}{2})$ και $(-1, 0, 0, -\frac{1}{2})$ είναι τοπικά ελάχιστα, ενώ τα $\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{\sqrt{15}}{4}, -3\right)$ και $\left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{\sqrt{15}}{4}, -3\right)$ τοπικά μέγιστα.

Μαθηματική Ανάλυση
Διάλεξη 8

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Σπύρος Χαλκίδης
Ε.ΔΙ.Π.

Νοέμβριος 2022

Θέματα 8ης διάλεξης

- Ορισμός εξισώσεων διαφορών
- Ταξινόμηση εξισώσεων διαφορών
- Εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης
- Μη γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης
- Διάγραμμα φάσης

Εξισώσεις διαφορών

Μία **εξίσωση διαφορών** είναι μία εξίσωση που αφορά τη μεταβολή μίας μεταβλητής.

Έστω $y(t)$ μια πραγματική (ή μιγαδική) συνάρτηση της μεταβλητής t. Η *διαφορά* ή *μεταβολή* Δ ορίζεται ως:

$$\Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$$

ή

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

$y(t)$
$y(t+1)$

$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Ταξινόμηση των εξισώσεων διαφορών

- **Τάξη**: Η τάξη μίας εξίσωσης διαφορών καθορίζεται από την ανώτερη τάξη της διαφοράς που υπάρχει στην εξίσωση.

  Για παράδειγμα, μία εξίσωση διαφορών **πρώτης τάξης** περιέχει μόνο την πρώτη διαφορά μίας μεταβλητής, δηλαδή τη διαφορά της μεταβλητής σε δύο διαδοχικές περιόδους $(y_{t+1} - y_t)$. $t+1-t=1$ $\quad Y_{t+1} = 5Y_t + 2$

  Μία εξίσωση διαφορών **δεύτερης τάξης** περιέχει επίσης τη δεύτερη διαφορά μίας μεταβλητής, δηλαδή τη διαφορά της μεταβλητής που παρατηρείται όταν θεωρήσουμε κάθε δεύτερη από τις διαδοχικές περιόδους $(y_{t+2} - y_t)$.

  $Y_{t+2} = 2Y_{t+1} + 3Y_t$ $\quad t+2-t=2$

Ταξινόμηση των εξισώσεων διαφορών

- Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι μία εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης περιέχει μεταβλητές που απέχουν μόνο μία περίοδο όπως $y_{t+1} = 5y_t + 1$, ενώ μία εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης περιέχει μεταβλητές που απέχουν το πολύ δύο περιόδους, όπως $y_{t+2} = 5y_{t+1} + 4y_t + 1$ ή ισοδύναμα $y_t = 5y_{t-1} + 4y_{t-2} + 1$

  $t-(t-2)=2$

- Επομένως μία εξίσωση διαφορών n-οστής τάξης περιέχει μεταβλητές που απέχουν μεταξύ τους το πολύ n περιόδους. Θα ασχοληθούμε μόνο με εξισώσεις διαφορών πρώτης και δεύτερης τάξης

Ταξινόμηση των εξισώσεων διαφορών

- **Αυτόνομη**: Μία εξίσωση διαφορών λέμε ότι είναι αυτόνομη αν δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο (t). Η εξίσωση ονομάζεται μη αυτόνομη όταν η μεταβλητή t εμφανίζεται απευθείας ως ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ αυτόνομη όταν η μεταβλητή t υπεισέρχεται στην εξίσωση μόνο μέσω της y.

  1ης τάξης

  Για παράδειγμα, η $y_{t+1} = 4y_t + 5t$ είναι μη αυτόνομη επειδή εξαρτάται ρητά από τη μεταβλητή t, ενώ η $y_{t+1} = 4y_t + 5$ είναι αυτόνομη, επειδή δεν εξαρτάται ρητά από τη μεταβλητή t.

  1ης τάξης

Ταξινόμηση των εξισώσεων διαφορών

- **Γραμμική** ή **μη γραμμική**. Μία εξίσωση διαφορών είναι μη γραμμική αν περιέχει κάποιους μη γραμμικούς όρους ως προς κάποιους από τους y_t, y_{t+1}, y_{t+2} κ.λ.π., ενώ γραμμική διαφορετικά.

  1ης, αυτόνομη

  Για παράδειγμα η $\boxed{y_{t+1} = 4y_t^2 + 1}$ και η $y_{t+1} = 4ln(y_t) + 1$ είναι μη γραμμικές αυτόνομες εξισώσεις πρώτης τάξης, ενώ η $y_{t+1} = 4y_t + t^2$ είναι μία γραμμική, μη αυτόνομη εξίσωση διαφορών.

  μη αυτόνομη

Γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης

Η γενική μορφή της **γραμμικής, αυτόνομης εξίσωσης διαφορών πρώτης τάξης** δίνεται από την:

$$y_{t+1} = ay_t + b, t = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

- Επίλυση μίας εξίσωσης διαφορών σημαίνει να βρούμε τη σχετική *συνάρτηση* του χρόνου y_t από την οποία και δημιουργείται.
- Αν η y_0 είναι γνωστή, τότε όταν $t = 0$ η εξίσωση (1) συνεπάγεται ότι $y_1 = ay_0 + b$ όπου a και b είναι γνωστές σταθερές.
  Για $t = 1$: $y_2 = ay_1 + b = a(ay_0 + b) + b = a^2y_0 + b(a + 1)$.
  Για $t = 2$: $y_3 = ay_2 + b = a(a^2y_0 + b(a + 1)) + b = a^3y_0 + b(a^2 + a + 1)$
- Κάνουμε την εικασία ότι $y_t = a^ty_0 + b(a^{t-1} + a^{t-2} + \cdots + a + 1)$

Γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης

$\overbrace{1+1+1+\ldots+1}^{t}$

- Γνωρίζουμε ότι $1 + a + a^2 + \cdots + a^{t-1} = \begin{cases} \frac{1-a^t}{1-a}, & \text{αν } a \neq 1 \\ t, & \text{αν } a = 1 \end{cases}$
- Επομένως, η λύση που υποθέσαμε για την εξίσωση διαφορών μπορεί να εκφραστεί ως:

$$y_t = \begin{cases} a^t y_0 + b\left(\frac{1-a^t}{1-a}\right), & \text{αν } a \neq 1 \\ y_0 + bt, & \text{αν } a = 1 \end{cases} \qquad t = 0, 1, 2 \cdots$$

$y_{t+1} = a y_t + b$

Γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης

Θεώρημα: Η συνάρτηση y_t που δίνεται από την εξίσωση

$$y_t = \begin{cases} a^t y_0 + b\left(\frac{1-a^t}{1-a}\right), & \text{αν } a \neq 1 \\ y_0 + bt, & \text{αν } a = 1 \end{cases} \quad t = 0, 1, 2\cdots$$

είναι η μοναδική λύση της γραμμικής, αυτόνομης εξίσωσης διαφορών πρώτης τάξης $y_{t+1} = ay_t + b$, όπου y_0 είναι η δεδομένη αρχική συνθήκη.

Απόδειξη:

$y_t = y_0 + bt \overset{t=0}{\Rightarrow} y_0 = y_0 + b \cdot 0 = y_0$

1. Για $a = 1$, έχουμε με τη μέθοδο της μαθηματική επαγωγής:
   - Για $t = 0$: $y_0 + b \cdot 0 = y_0 + 0 = y_0$.
   - Έστω ότι ισχύει για $t = k$: $y_k = y_0 + bk$.
   - Θα δείξουμε ότι ισχύει για $t = k + 1$: Θ.δ.ο. $y_{k+1} = y_0 + b(k + 1)$. Ξεκινώντας από τη σχέση $y_{t+1} = y_t + b$ έχουμε $y_{k+1} = y_k + b$. Αντικαθιστούμε το y_k από την υπόθεση και έχουμε $y_{k+1} = y_0 + bk + b = y_0 + b(k + 1)$.

Γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης

2. Για $a \neq 1$, θ.δ.ο. $y_t = a^t y_0 + b(\frac{1-a^t}{1-a})$. Έχουμε με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής:

   - Για $t = 0$: $a^0 y_0 + b(\frac{1-a^0}{1-a}) = 1 \cdot y_0 + b(\frac{0}{1-a}) = y_0$ που ισχύει.
   - Έστω ότι ισχύει για $t = k$: $y_k = a^k y_0 + b(\frac{1-a^k}{1-a})$.
   - Για $t = k+1$: Θ.δ.ο. $y_{k+1} = a^{k+1} y_0 + b(\frac{1-a^{k+1}}{1-a})$. Προσθέτουμε και αφαιρούμε τον όρο $ab(1-a^k)/(1-a)$ στο δεξιό μέλος και παίρνουμε:
     $y_{k+1} = a^{k+1} y_0 + \frac{ab(1-a^k)}{1-a} - \frac{ab(1-a^k)}{1-a} + b(\frac{1-a^{k+1}}{1-a}) =$
     $a(a^k y_0 + b(\frac{1-a^k}{1-a})) + \frac{b}{1-a}(-a + a^{k+1} + 1 - a^{k+1}))$.
     Αντικαθιστούμε το y_k από την υπόθεση και έχουμε:
     $y_{k+1} = a y_k + \frac{b}{1-a}(1-a) = a y_k + b$ που ισχύει.

Γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης

Θεώρημα: Υπάρχει μία σταθερά C τέτοια ώστε κάθε λύση της γραμμικής, αυτόνομης εξίσωσης διαφορών πρώτης τάξης μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$y_t = \begin{cases} Ca^t + b\left(\frac{1-a^t}{1-a}\right), & \text{αν } a \neq 1 \\ C + bt, & \text{αν } a = 1 \end{cases} \quad t = 0, 1, 2 \cdots$$

Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση διαφορών $y_{t+1} = \overset{a}{1/2}\, y_t + \overset{b}{10}$, με $y_0 = 1$.

Με βάση το θεώρημα έχουμε:

$$y_t = \overset{y_0}{C}\underset{a}{(1/2)^t} + \underset{b}{10}\left(\frac{1-(\overset{a}{1/2})^t}{1-\underset{a}{1/2}}\right)$$

Αν $y_0 = 1$ τότε για $t = 0$ έχουμε $1 = C + 10 \cdot 0 \Leftrightarrow C = 1$.
Άρα για να ικανοποιείται η δεδομένη αρχική συνθήκη, η λύση έχει την εξής μορφή:

$$y_t = (1/2)^t + 10\left(\frac{1-(1/2)^t}{1-1/2}\right)$$

Y_S

Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση διαφορών $y_{t+1} = \overset{a}{5} y_t - \overset{b}{3}$, με $y_0 = 0$.

Με βάση το θεώρημα έχουμε:

$$y_t = \underset{a}{C5^t} - \underset{b}{3}\left(\frac{1-5^t}{1-5}\right)$$

Αν $y_0 = 0$ τότε για $t = 0$ έχουμε $0 = C - 3 \cdot 0 \Leftrightarrow C = 0$.
Άρα για να ικανοποιείται η δεδομένη αρχική συνθήκη, η λύση έχει την εξής μορφή:

$$y_t = 0 \cdot 5^t - 3\left(\frac{1-5^t}{1-5}\right) = -3\left(\frac{1-5^t}{1-5}\right)$$

Σταθερή κατάσταση εξίσωσης διαφορών

Ορισμός: Η σταθερή κατάσταση ή στάσιμη τιμή σε μία γραμμική, αυτόνομη εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης ορίζεται ως η τιμή της y στην οποία το σύστημα παύει να μεταβάλλεται, δηλαδή ισχύει ότι $y_{t+1} = y_t$.

Για να βρούμε τη στάσιμη τιμή του y, την οποία θα ονομάσουμε $\bar{y}$, θέτουμε $y_{t+1} = y_t \equiv \bar{y}$ στην εξίσωση διαφορών. Αυτό μας οδηγεί στη σχέση:

$y_{t+1} = a y_t + b$

$$\bar{y} = a\bar{y} + b.$$

Λύνοντας ως προς $\bar{y}$ παίρνουμε: $\bar{y} - a\bar{y} = b \Rightarrow \bar{y}(1-a) = b \Rightarrow$

$$\boxed{\bar{y} = \frac{b}{1-a}, \; a \neq 1.}$$

Αν $a = 1$, δεν υπάρχει λύση σταθερής κατάστασης (γιατί;). $y_{t+1} = y_t + b$ $\quad b \in \mathbb{R}$

Σταθερή κατάσταση εξίσωσης διαφορών

Αν το y εξισωθεί κάποια στιγμή με τη στάσιμη τιμή του, θα παραμείνει σε αυτήν την τιμή για όλες τις διαδοχικές χρονικές περιόδους. Όμως το σημαντικό ερώτημα είναι: Αν το y ξεκινήσει από μία αυθαίρετη τιμή, θα συγκλίνει πάντοτε προς την τιμή της σταθερής κατάστασης;

Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα, αναδιατάσσουμε τη λύση που διατυπώνεται με την εξίσωση:

$$y_t = \begin{cases} a^t y_0 + b\left(\frac{1-a^t}{1-a}\right), & \text{αν } a \neq 1 \\ y_0 + bt, & \text{αν } a = 1 \end{cases} \qquad t = 0, 1, 2 \cdots$$

για να πάρουμε:

$$y_t = a^t \left(y_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}, \text{ αν } a \neq 1, \ t = 0, 1, 2, \cdots$$

$|a|<1$

Σταθερή κατάσταση εξίσωσης διαφορών

Εξετάζοντας την έκφραση αυτή, βλέπουμε ότι το θέμα της **σύγκλισης** ή της **απόκλισης** καθορίζεται αποκλειστικά από τον όρο a^t, δεδομένου ότι αυτός είναι ο μόνος που περιέχει το t.

Αν ο όρος αυτός συγκλίνει προς το μηδέν καθώς το t τείνει προς το άπειρο, τότε το y_t συγκλίνει προς το $\frac{b}{1-a}$. Αντίθετα, αν ο όρος αυτός αποκλίνει προς το άπειρο καθώς το t τείνει προς το άπειρο, τότε θα αποκλίνει και το y_t.

Μπορούμε να θεωρήσουμε τον όρο a^t με $t = 0, 1, 2, \cdots$ ως ακολουθία αριθμών:

$$\left\{a^t\right\} = 1, a, a^2, a^3, \cdots, a^t, \cdots$$

Τότε γνωρίζουμε ότι μία ακολουθία σαν αυτή συγκλίνει προς το μηδέν καθώς $t \to \infty$ αν $|a| < 1$ και αποκλίνει αν $|a| \geq 1$.

Θεώρημα: Στην περίπτωση μίας γραμμικής, αυτόνομης εξίσωσης διαφορών πρώτης τάξης, η y_t συγκλίνει προς την τιμή της σταθερής κατάστασης $b/(1-a)$ αν και μόνο αν $|a| < 1$.

$-1 < a < 1$

Σταθερή κατάσταση εξίσωσης διαφορών

Όταν $|a| < 1$, ενώ η σύγκλιση είναι βέβαιη η *διαδρομή* που ακολουθεί διαχρονικά η y_t είναι πολύ διαφορετική ανάλογα με το πρόσημο του a.
Αν $\underline{0 < a < 1}$, τότε η y_t θα συγκλίνει μονότονα προς το $b/(1-a)$. Αυτό γιατί κάθε όρος της ακολουθίας $\{a^t\}$ είναι μικρότερος από τον προηγούμενο. Για παράδειγμα αν $a = 1/2$ η ακολουθία είναι

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^t\right\} = 1, \underline{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}}, \cdots$$

Όμως αν $\boxed{-1 < a < 0}$ η y_t θα συγκλίνει προς το $b/(1-a)$ διαγράφοντας μία **ταλαντούμενη διαδρομή**. Αυτό το γνωρίζουμε γιατί κάθε όρος της ακολουθίας $\{a^t\}$ θα έχει πρόσημο αντίθετο από τον προηγούμενο όρο. Για παράδειγμα, αν $a = -1/2$ η ακολουθία είναι:

$$\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^t\right\} = +1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, +\frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \cdots$$

$a = -\frac{1}{2}$

Σταθερή κατάσταση εξίσωσης διαφορών

Υπάρχουν τρεις ακόμη περιπτώσεις που πρέπει να εξεταστούν χωριστά:
(α) Αν $a = 0$, βλέπουμε από την εξίσωση

$$y_t = a^t(y_0 - \frac{b}{1-a}) + \frac{b}{1-a}, \quad a \neq 1, \quad t = 0, 1, 2, \cdots$$

ότι η y_t είναι διαχρονικά σταθερή και ίση με b.
(β) Αν $a = 1$, βλέπουμε από την εξίσωση

$$y_t = y_0 + bt, \quad t = 0, 1, 2 \cdots$$

ότι η y_t συγκλίνει στο $+\infty$ αν $b > 0$ και στο $-\infty$ αν $b < 0$.
(γ) Αν $a = -1$ βλέπουμε από την εξίσωση

$$y_t = a^t(y_0 - \frac{b}{1-a}) + \frac{b}{1-a}, \quad t = 0, 1, 2, \cdots$$

ότι η y_t εναλλάσσεται μεταξύ των τιμών y_0 και $b - y_0$ ($y_t = (-1)^t(y_0 - b/2) + b/2$).

Παράδειγμα

Έστω ότι η y_t συμβολίζει το πλήθος των ψαριών σε έναν πληθυσμό ψαριών. Έστω ότι η δυναμική συμπεριφορά του πληθυσμού των ψαριών διέπεται από την εξίσωση διαφορών:

$$y_{t+1} = ay_t + 10.$$

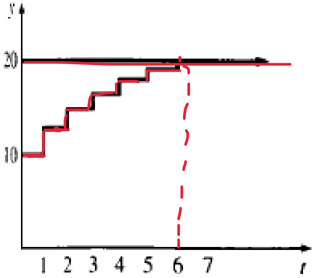
Να βρεθεί το πλήθος των ψαριών σε σταθερή κατάσταση και να κατασκευαστεί η γραφική απεικόνιση της y_t, αρχικά για την περίπτωση $a = 0.5$ και μετά για την περίπτωση $a = -0.5$.

Η στάσιμη τιμή της y βρίσκεται θέτοντας $y_{t+1} = y_t = \bar{y}$. Αυτό μας δίνει $\bar{y} = \frac{10}{1-a}$. Η λύση της εξίσωσης διαφορών μπορεί να εκφραστεί ως:

$$y_t = a^t\left(y_0 - \frac{10}{1-a}\right) + \frac{10}{1-a}$$

Παράδειγμα

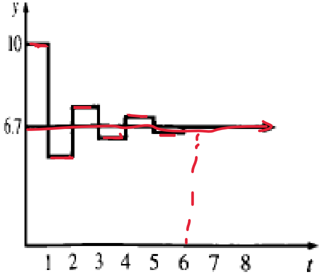
Αν $|a| < 1$, τότε η y_t συγκλίνει προς το $10/(1-a)$ καθώς το t τείνει προς το άπειρο. Συνεπώς αν $a = 0.5$, τότε η y_t προσεγγίζει την στάσιμη τιμή $\bar{y} = 20$ μονότονα.



Σχήμα: Διαδρομή προσέγγισης για $a = 0.5$

Παράδειγμα

Αν $a = -0.5$, τότε η y_t προσεγγίζει τη στάσιμη τιμή $\bar{y} = 10/1.5$ με ταλαντώσεις.



Σχήμα: Διαδρομή προσέγγισης για $a = -0.5$

Συνοπτική Παρουσίαση της Ανάλυσης για τη Σύγκλιση

Για την εξίσωση διαφορών

$$y_{t+1} = ay_t + b$$

η λύση είναι $y_t = \begin{cases} a^t(y_0 - \bar{y}) + \bar{y}, & \text{αν } a \neq 1 \\ y_0 + bt, & \text{αν } a = 1 \end{cases} \quad t = 0, 1, 2 \cdots$

όπου

$$\bar{y} = \frac{b}{1-a} \text{ αν } a \neq 1$$

είναι η σταθερή κατάσταση ισορροπίας που υπάρχει όταν $a \neq 1$.
Η σταθερή κατάσταση ισορροπίας είναι ευσταθής (δηλαδή το y_t συγκλίνει προς το $\bar{y}$), αν και μόνο αν:

$$-1 < a < 1.$$

Η διαδρομή του y_t καθώς προσεγγίζει το $\bar{y}$ ονομάζεται **διαδρομή προσέγγισης** και είναι

- *Μονότονη*, αν το a είναι θετικό (και μικρότερο του 1)
- *Ταλαντούμενη*, αν το a είναι αρνητικό (και μεγαλύτερο του -1)

Συνοπτική Παρουσίαση της Ανάλυσης για τη Σύγκλιση

Επιπλέον, αν $a \geq 1$, τότε το y_t αποκλίνει από το $\bar{y}$ μονότονα.

Αν $a < -1$, τότε το y_t αποκλίνει από το $\bar{y}$ με ταλαντώσεις που διαρκώς αυξάνονται.

Αν $a = -1$, τότε το y_t δεν προσεγγίζει ποτέ το $\bar{y}$, αλλά η τιμή του εναλλάσσεται ανάμεσα στο y_0 και το $b - y_0$.

Αν $a = 0$, τότε το y_t είναι σταθερό και ίσο με το b.

$y_{t+1} = 0 \cdot y_t + b = b$

$y_{t+1} = -y_t + b$

y_0

$y_1 = -y_0 + b$

$y_2 = -y_1 + b = -(-y_0 + b) + b = y_0$

$y_3 = -y_0 + b$

$\vdots$

Μη γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης

$$Y_{t+1} = 5(Y_t)^2 + 3$$

- Είδαμε ότι οι γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης μπορούν να έχουν αναλυτική λύση.
- Το ίδιο ισχύει όπως θα δούμε και για τις γραμμικές εξισώσεις διαφορών δεύτερης τάξης.
- Αντίθετα, οι *μη γραμμικές* εξισώσεις διαφορών κατά κανόνα δεν μπορούν να έχουν αναλυτική λύση.
- Ωστόσο, είναι δυνατόν να αντλήσουμε πληροφορίες ποιοτικού χαρακτήρα σχετικά με τη λύση, αναλύοντας μία μη γραμμική εξίσωση διαφορών με τη βοήθεια ενός *διαγράμματος φάσης*.

Μη γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης

Η γενική μορφή της μη γραμμικής εξίσωσης διαφορών πρώτης τάξης είναι η εξής:

$$y_t = g(y_t, t), \; t = 0, 1, 2, \cdots$$

Όμως, θα μελετήσουμε μόνο αυτόνομες, μη γραμμικές εξισώσεις διαφορών, δηλαδή εξισώσεις διαφορών οι οποίες δεν εξαρτώνται άμεσα από το χρόνο.

Μη γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης

Ορισμός: Η **μη γραμμική, αυτόνομη εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης** έχει την εξής μορφή:

$$y_{t+1} = f(y_t),\ t = 0, 1, 2, \cdots$$

Αν υπάρχει **ευσταθής ισορροπία** (ή ισορροπίες στην περίπτωση που υπάρχουν περισσότερες από μία), βρίσκεται συνήθως θέτοντας $y_{t+1} = y_t = \bar{y}$, όπου $\bar{y}$ είναι μία σταθερή τιμή της y. Γενικότερα, αυτό μας οδηγεί στην εξής σχέση:

$$\bar{y} = f(\bar{y})$$

Μη γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης

Το κύριο μέλημά μας όταν κάνουμε ποιοτική ανάλυση μίας μη γραμμικής εξίσωσης διαφορών είναι να εξακριβώσουμε αν η y_t συγκλίνει ή όχι προς μία ευσταθή ισορροπία.

- Αν όντως συγκλίνει, τότε ανεξάρτητα από την τιμή εκκίνησης y_0, η πορεία της y_t τελικά θα οδηγήσει στην τιμή $\bar{y}$. Τότε, ακόμη και όταν δεν μπορούμε να επιλύσουμε αναλυτικά την y_t ως συνάρτηση του t, μπορούμε να δούμε που οδηγεί πάντα η διαδρομή της.
- Αν όμως δε συγκλίνει, τότε μπορούμε να εξακριβώσουμε αν η y_t αποκλίνει στο άπειρο ή αν παλινδρομεί κυκλικά μπρος-πίσω μεταξύ συγκεκριμένων τιμών ή αν εκδηλώνει μία χαοτική συμπεριφορά.

Παράδειγμα

Έστω η ακόλουθη μη γραμμική εξίσωση διαφορών:

$$y_{t+1} = y_t^{\alpha}, \alpha > 0, t = 0, 1, 2, \cdots$$

Οι τιμές της σταθερής κατάστασης (οι στάσιμες τιμές) της y βρίσκονται θέτοντας $y_{t+1} = y_t = \bar{y}$. Με αυτόν τον τρόπο και με αναδιάταξη των όρων οδηγούμαστε στη σχέση:

$\bar{y} = \bar{y}^{a} \Rightarrow$

$$\bar{y}(\bar{y}^{\alpha-1} - 1) = 0.$$

$\left.\begin{matrix} \bar{y} = 0 \\ \bar{y} = 1 \end{matrix}\right\} \leftarrow y_0$

Συνεπώς $\bar{y} = 0$ και $\bar{y} = 1$ είναι οι στάσιμες τιμές. Αν λοιπόν η y_t εξισωθεί κάποια στιγμή με το 0 ή το 1, θα παραμείνει για πάντα σε αυτήν την τιμή.

Διάγραμμα φάσης

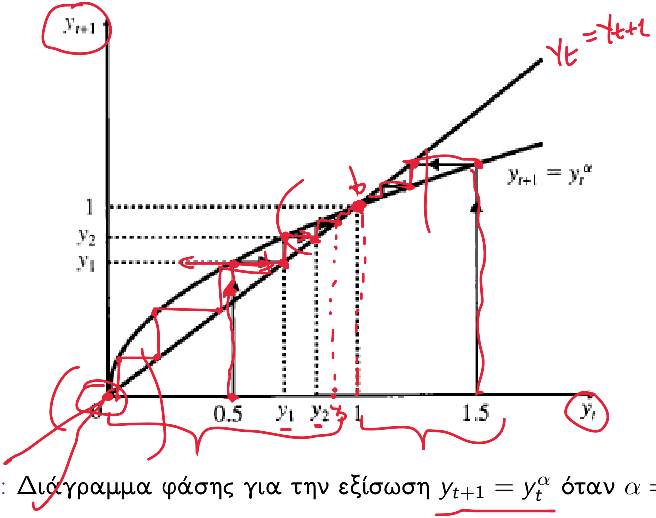
Είναι χρήσιμο να κατασκευάσουμε ένα διάγραμμα φάσης για να δούμε αν η y_t τείνει να κινηθεί προς σταθερές τιμές ή μακριά από αυτές.

Το **διάγραμμα φάσης** για μία εξίσωση διαφορών είναι ένα διάγραμμα που απεικονίζει την y_{t+1} ως προς την y_t.

Τα στάσιμα σημεία θα εντοπιστούν εκεί όπου τέμνεται η $f(y_t)$ με τη γραμμή των 45° επειδή κατά μήκος της γραμμής αυτής ισχύει η σχέση $y_{t+1} = y_t$.

Διάγραμμα φάσης

$\bar{Y}$



$y_0 = 0.5$

$t = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$y_0 = 1$

$y_1 = y_0^{1/2} = 1$

$y_2 = y_1^{1/2} = 1$

$\vdots$

Σχήμα: Διάγραμμα φάσης για την εξίσωση $y_{t+1} = y_t^{\alpha}$ όταν $\alpha = 1/2$

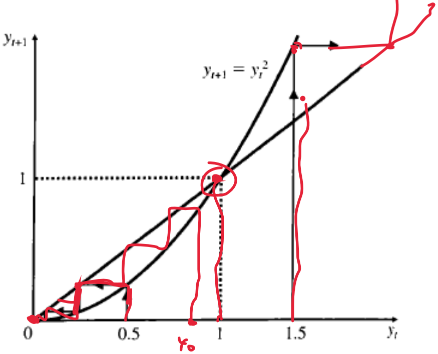
Διάγραμμα φάσης

Από οποιοδήποτε σημείο εκκίνησης $y_0 > 0$ η πορεία της y_t φαίνεται να συγκλίνει προς το $\bar{y} = 1$ αναδεικνύοντας το $\bar{y} = 1$ σε σημείο ευσταθούς ισορροπίας.

Αντίθετα, το σημείο $\bar{y} = 0$ είναι σημείο ασταθούς ισορροπίας, επειδή για $y > 0$ η y_t αποκλίνει από το 0.

Διάγραμμα φάσης - Παράδειγμα

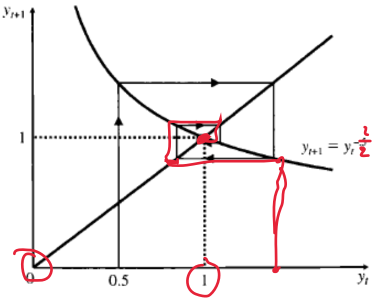
Να κατασκευαστεί το διάγραμμα φάσης και να γίνει ποιοτική ανάλυση της εξίσωσης διαφορών $y_{t+1} = y_t^2$.



Στο σημείο $\bar{y} = 1$ εμφανίζεται μία **ασταθής ισορροπία** ενώ στο $\bar{y} = 0$ εμφανίζεται μία **τοπικά ευσταθής ισορροπία**.

Διάγραμμα φάσης - Παράδειγμα 2

Να κατασκευαστούν τα διαγράμματα φάσης και να γίνει μία ποιοτική ανάλυση της εξίσωσης διαφορών $y_{t+1} = y_t^{\alpha}$ όταν $\alpha = -1/2$ και $\alpha = -2$.



$\bar{y} = 1$

$f' = a y_t^{a-1}$

$f'(1) = a = -1/2$

$|f'(1)| = 1/2$

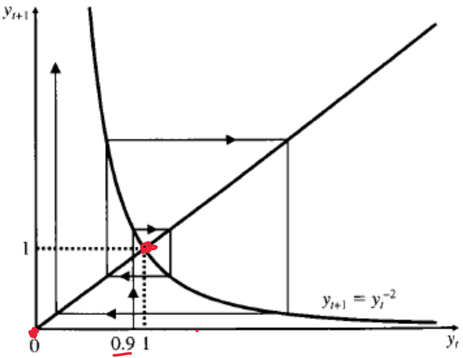
Σχήμα: Διάγραμμα φάσης όταν $\alpha = -1/2$

Στο $\bar{y} = 1$ φαίνεται να έχουμε ευσταθή ισορροπία.

Διάγραμμα φάσης - Παράδειγμα 2

lim G^t

y_0



Σχήμα: Διάγραμμα φάσης όταν $\alpha = -2$

Στο $\bar{y} = 1$ φαίνεται να έχουμε ασταθή ισορροπία.

Θεώρημα

Θεώρημα: Μία σταθερή κατάσταση ισορροπίας σε ένα στάσιμο σημείο μίας οποιασδήποτε αυτόνομης, μη γραμμικής εξίσωσης διαφορών πρώτης τάξης, είναι τοπικά ευσταθής αν η απόλυτη τιμή της παραγώγου $f'(\bar{y})$ είναι μικρότερη από 1.

$f(\bar{y})$

Είναι ασταθής, αν η απόλυτη τιμή της παραγώγου είναι μεγαλύτερη από 1 σε αυτό το σημείο.

Παράδειγμα

Να χρησιμοποιηθεί το προηγούμενο θεώρημα για να βρεθούν οι ιδιότητες της τοπικής ευστάθειας της:

$$y_{t+1} = y_t^{\alpha},$$

για τις διάφορες τιμές του α.

Έχουμε:

$$f'(y_t) = \alpha y_t^{\alpha-1}.$$

$\bar{y} = 1$

$f'(\bar{y}) = a \cdot 1^{a-1} = a$

Στο στάσιμο σημείο $\bar{y} = 1$ έχουμε:

$$f'(1) = \alpha.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα στο σημείο $\bar{y} = 1$ έχουμε τοπικά ευσταθή ισορροπία μόνο όταν $-1 < f'(\bar{y}) < 1 \Rightarrow -1 < \alpha < 1$. Για όλες τις άλλες τιμές, η ισορροπία στο $\bar{y} = 1$ είναι ασταθής.

Παράδειγμα

Για $\alpha > 0$, βρήκαμε ένα άλλο σημείο ισορροπίας, το $\bar{y} = 0$. Η παράγωγος στο σημείο αυτό είναι:

$$f'(0) = 0 \text{ αν } \alpha > 1$$
$$f'(0) \text{ δεν ορίζεται αν } 0 < \alpha < 1 \text{ (διαίρεση με το μηδέν)}$$

Αν $\alpha > 1$ η ισορροπία στο σημείο $\bar{y} = 0$ είναι τοπικά ευσταθής (διότι $f'(0) < 1$). Δεν είναι ολικά ευσταθής γιατί δεν συγκλίνει στο 0 για οποιοδήποτε $y_t \geq 1$. Όταν $0 < \alpha < 1$ το $\bar{y} = 0$ είναι σημείο ασταθούς ισορροπίας επειδή η παράγωγος γίνεται απείρως μεγάλη (το α διαιρείται με το 0).

Θεώρημα

Μία εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης θα οδηγήσει σε ταλαντώσεις της y_t αν η παράγωγος $f^{'}$ είναι αρνητική για όλα τα $y_t > 0$, αλλά η y_t θα κινηθεί μονότονα αν η παράγωγος είναι θετική για όλα τα $y_t > 0$.

Μαθηματική Ανάλυση
Διάλεξη 9

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Σπύρος Χαλκίδης
Ε.ΔΙ.Π.

Δεκέμβριος 2022

Θέματα 9ης διάλεξης

- Γραμμικές εξισώσεις διαφορών δεύτερης τάξης
- Ομογενής μορφή
- Γενική λύση εξίσωσης διαφορών δεύτερης τάξης
- Σταθερή κατάσταση και σύγκλιση
- Γραμμικές εξισώσεις διαφορών δεύτερης τάξης με μεταβλητό όρο

Γραμμικές εξισώσεις διαφορών δεύτερης τάξης

Ορισμός: Η γενική μορφή της **γραμμικής**, **αυτόνομης εξίσωσης διαφορών δεύτερης τάξης** είναι:

t

$$\rightarrow \quad y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = b, \; t = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\frac{5}{5} y_{t+2} + \frac{3}{5} y_{t+1} + \frac{2}{5} y_t = \frac{8}{5}$$

Η εξίσωση αυτή είναι:

- Γραμμική επειδή οι όροι y_t, y_{t+1} και y_{t+2} είναι υψωμένοι στην πρώτη δύναμη.
- Δεύτερης τάξης επειδή η μεγαλύτερη διαφορά που εμφανίζεται στην εξίσωση είναι διαφορά δύο περιόδων.
- Αυτόνομη επειδή έχει σταθερούς συντελεστές, a_1 και a_2 και έναν σταθερό όρο, τον b.

Αν οι συντελεστές ή ο όρος b μεταβαλλόταν μαζί με το t τότε η εξίσωση θα ήταν μη αυτόνομη.

Ορισμοί

Ορισμός: Η **ομογενής μορφή** της γραμμικής, αυτόνομης εξίσωσης διαφορών δεύτερης τάξης είναι:

$$1\,y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = 0, \; t = 0, 1, 2, \cdots$$

Ορισμός: Η **χαρακτηριστική εξίσωση** της γραμμικής εξίσωσης διαφορών δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι:

$$1\,r^2 + a_1 r + a_2 r^0 = 0$$

Οι τιμές του r που επαληθεύουν τη χαρακτηριστική εξίσωση ονομάζονται **ρίζες** ή **ιδιοτιμές** ή **χαρακτηριστικές ρίζες** της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Θεώρημα

Για μια γραμμική, αυτόνομη εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης της μορφής

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = b,$$

εάν η y_p είναι μία **μερική λύση** (όπως η λύση της σταθερής κατάστασης) και y_h είναι η γενική λύση της **ομογενούς μορφής** της εξίσωσης, τότε η **γενική λύση** της πλήρους εξίσωσης διαφορών δίνεται από την:

$$y_t = y_h + y_p,$$

όπου χάριν ευκολίας έχουμε παραλείψει τους δείκτες t στα y_p και y_h.

Θεώρημα

Θεώρημα: Η γενική λύση της ομογενούς μορφής της γραμμικής, αυτόνομης εξίσωσης διαφορών δεύτερης τάξης δίνεται από τη λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ ως εξής (όπου $\Delta = a_1^2 - 4a_2$):

- Αν $\Delta > 0$ (**άνισες πραγματικές ρίζες**) τότε: r_1, r_2

$$y_h = C_1 r_1^t + C_2 r_2^t$$

- Αν $\Delta = 0$ (**ίσες πραγματικές ρίζες**) τότε: r

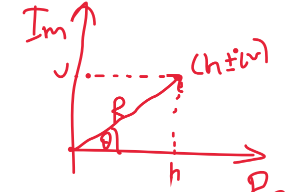
$$y_h = C_1 r^t + C_2 t r^t$$

όπου C_1 και C_2 είναι σταθερές (οι τιμές των οποίων θα προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες αν δοθούν) και r_1 και r_2 δίνονται από την $r_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, ενώ στη περίπτωση που $\Delta = 0$ έχουμε $r = \frac{-a_1}{2}$.

Θεώρημα (Συνέχεια)

- Αν $\Delta < 0$ (**μιγαδικές ρίζες**), τότε

$$y_h = a_2^{\frac{t}{2}}(C_1 \cos(\theta t) + C_2 \sin(\theta t))$$



$R^2 = h^2 + v^2 \Rightarrow R = \pm\sqrt{h^2+v^2}$

τα C_1 και C_2 είναι σταθερές (οι τιμές των οποίων θα προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες αν δοθούν) και το θ μπορεί να προσδιοριστεί από τις σχέσεις:

$$\cos\theta = \frac{-a_1}{2\sqrt{a_2}}, \text{ ή } \sin\theta = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2\sqrt{a_2}}.$$

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{h}{R} \\ \sin\theta = \frac{v}{R} \end{array}\right\} \Rightarrow$

Θεώρημα: Εάν η μιγαδική ρίζα είναι της μορφής $\underset{Re}{h} \pm i\underset{Im}{v}$, τότε το μέτρο των ριζών είναι $R = \sqrt{h^2 + v^2}$ ενώ το θ μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια των δύο ακόλουθων σχέσεων:

$$\cos(\theta) = \frac{h}{R}, \sin(\theta) = \frac{v}{R}$$

$\theta = \overset{\cos^{-1}}{\arccos} \frac{h}{R}$

$\theta = \overset{\sin^{-1}}{\arcsin} \frac{v}{R}$

Απόδειξη

$y_{t+1} = Ar^{t+1}$ $y_{t+2} = Ar^{t+2}$

Δοκιμάζουμε τη μορφή $\boxed{y_t = Ar^t}$ όπου A είναι μία σταθερά. Τότε έχουμε $y_{t+1} = Ar^{t+1}$ και $y_{t+2} = Ar^{t+2}$. Αντικαθιστώντας στην ομογενή μορφή της εξίσωσης έχουμε:

$$Ar^{t+2} + a_1 Ar^{t+1} + a_2 Ar^t = 0$$

Παραγοντοποιώντας παίρνουμε:

$$(r^2 + a_1 r + a_2) Ar^t = 0 \qquad t \neq 0$$

Η προτεινόμενη λύση θα επαληθεύει την εξίσωση αν επιλέξουμε τιμές για το r που ικανοποιούν τη δευτεροβάθμια εξίσωση $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ (αφού αποκλέισουμε τις μηδενικές λύσεις $r = 0$ και $A = 0$). Αυτή είναι η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών.

Απόδειξη

r_1, r_2

Περίπτωση $\Delta > 0$: Υποθέτουμε ότι οι δύο ρίζες που επαληθεύουν τη χαρακτηριστική εξίσωση είναι διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί. Τότε στην ουσία έχουμε βρει δύο λύσεις που ικανοποιούν την ομογενή εξίσωση. Αυτές είναι:

$t \to t+2$

$$\boxed{y_t^{(1)} = A_1 r_1^t} \text{ και } y_t^{(2)} = A_2 r_2^t$$

Ας επιβεβαιώσουμε ότι η $y_t^{(1)}$ είναι μία λύση της ομογενούς εξίσωσης (όμοια για την $y_t^{(2)}$). Με δεδομένη την $y_t^{(1)}$ προκύπτει:

$$y_{t+1}^{(1)} = A_1 r_1^{t+1} \text{ και } y_{t+2}^{(1)} = A_1 r_1^{t+2}$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στην ομογενή εξίσωση προκύπτει

$$y_{t+2}^{(1)} + a_1 y_{t+1}^{(1)} + a_2 y_t^{(1)} =$$

$$A_1 r_1^{t+2} + a_1 A_1 r_1^{t+1} + a_2 A_1 r_1^t =$$

$\neq 0$ $\quad = 0$

$$A_1 r_1^t (r_1^2 + a_1 r_1 + a_2) = 0$$

Απόδειξη

Η τελευταία ισότητα προκύπτει επειδή γνωρίζουμε ότι η r_1 ικανοποιεί τη χαρακτηριστική εξίσωση. Επομένως η $y_t^{(1)}$ ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση και είναι μία λύση.

Περίπτωση $\Delta = 0$: Αν $r_1 = r_2 = r$ οι δύο διαφορετικές λύσεις είναι:

$$y_t^{(1)} = A_1 r^t \text{ και } y_t^{(2)} = A_2 t r^t$$

Είναι δυνατόν να επαληθεύσουμε ότι και οι δύο αυτές είναι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης με αντικατάσταση όπως κάναμε νωρίτερα. Θα το κάνουμε για τη δεύτερη λύση. Λόγω του ότι $y_t^{(2)} = A_2 t r^t$, έχουμε

$$y_{t+1}^{(2)} = A_2(t+1)r^{t+1} \text{ και } y_{t+2}^{(2)} = A_2(t+2)r^{t+2}$$

Απόδειξη

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην ομογενή εξίσωση έχουμε:

$$y_{t+2}^{(2)} + a_1 y_{t+1}^{(2)} + a_2 y_t^{(2)} =$$

$$A_2(t+2)r^{t+2} + a_1 A_2(t+1)r^{t+1} + a_2 A_2 t r^t =$$

$$A_2 r^t((t+2)r^2 + a_1(t+1)r + a_2 t) =$$

$$A_2 r^t(\underbrace{t(r^2 + a_1 r + a_2)}_{0} + r\underbrace{(2r + a_1)}_{0})$$

$\Delta = 0$

$r = \frac{-b}{2a} = \frac{-a_1}{2 \cdot 1} = \frac{-a_1}{2}$

Επειδή το r επαληθεύει τη χαρακτηριστική εξίσωση έχουμε $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$, ενώ επειδή στην περίπτωση όπου $\Delta = 0 \Rightarrow r = -a_1/2$ προκύπτει ότι:

$$A_2 r^t(t(r^2 + a_1 r + a_2) + r(2r + a_1)) =$$

$$A_2 r^t(0 + 0) = 0$$

Συνεπώς, η παραπάνω εξίσωση δίνει μηδέν.

Απόδειξη

Περίπτωση $\Delta < 0$: Αν η διακρίνουσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι αρνητική ($a_1^2 - 4a_2 < 0$) τότε πάλι μπορούμε να βρούμε μία λύση. Η λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης θα έχει τη μορφή:

$\sqrt{-i} = i$

$\sqrt{a_1^2 - 4a_2}$

$$r_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{(-1)(4a_2 - a_1^2)}}{2} = \frac{-a_1 \pm i\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}.$$

h

Χρησιμοποιώντας την έννοια της φανταστικής μονάδας, οι ρίζες μπορούν να γραφούν ως συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί:

$$r_{1,2} = h \pm vi$$

όπου $h = \frac{-a_1}{2}$, $v = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}$. Η λύση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών παίρνει τη μορφή:

$$y_h = c_1(h + vi)^t + c_2(h - vi)^t$$

Απόδειξη

Για να μπορούμε να ερμηνεύσουμε πιο εύκολα την εξίσωση $y_h = c_1(h+vi)^t + c_2(h-vi)^t$ χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να εκφραστεί με πολική ή τριγωνομετρική μορφή ως:

$$(h \pm vi)^t = R(\cos(\theta) \pm i\sin(\theta))$$

όπου $R = \sqrt{h^2 + v^2}$ είναι το *μέτρο* ή η *απόλυτη τιμή* των μιγαδικών ριζών και $\cos(\theta) = h/R$ και $\sin(\theta) = v/R$. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το *θεώρημα de Moivre* για να φέρουμε την εξίσωση σε μία έκφραση που ερμηνεύεται πιο εύκολα. Σύμφωνα με αυτό το θεώρημα:

$$\rightarrow \quad (R(\cos(\theta) + i\sin(\theta)))^n = R^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Απόδειξη

Επομένως η εξίσωση γράφεται

$$y_h = c_1 R^t(\cos(\theta t) + i\sin(\theta t)) + c_2 R^t(\cos(\theta t) - i\sin(\theta t))$$

Αυτό μπορεί να απλοποιηθεί ακόμη περισσότερο αν λάβουμε υπόψη ότι

$$R = (h^2 + v^2)^{1/2} = \left(\frac{a_1^2}{4} + \frac{4a_2 - a_1^2}{4}\right)^{1/2} = a_2{}^{1/2}$$

Με αναγωγή όμοιων όρων και ορίζοντας καινούριες σταθερές C_1, C_2 που αντικαθιστούν τις c_1, c_2 της παραπάνω εξίσωσης, βρίσκουμε τη λύση για την ομογενή μορφή της γραμμικής εξίσωσης διαφορών πρώτης τάξης στην περίπτωση μιγαδικών ριζών:

$$y_h = a_2^{t/2}(C_1\cos(\theta t) + C_2\sin(\theta t))$$

Παράδειγμα 1

Να λυθεί η ακόλουθη εξίσωση διαφορών.

b

$$1 \quad y_{t+2} - 6y_{t+1} + 8y_t = 0, \ t = 0, 1, 2, \cdots$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 - 6r + 8 = 0$. Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 36 - 32 = 4 > 0$ και οι ρίζες 4 και 2.
Σύμφωνα με το θεώρημα η γενική λύση είναι:

$$\rightarrow \quad y_t = C_1 2^t + C_2 4^t$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση έχουμε:

$$\left\{\begin{aligned}
&y_{t+2} - 6y_{t+1} + 8y_t = \\
&C_1(2^{t+2} - 6(2^{t+1}) + 8(2^t)) + C_2(4^{t+2} - 6(4^{t+1}) + 8(4^t)) = \\
&C_1 2^t(2^2 - 6(2) + 8) + C_2 4^t(4^2 - 6(4) + 8) = 0.
\end{aligned}\right.$$

Επομένως η εξίσωση που βρήκαμε είναι μία λύση της εξίσωσης.

Παράδειγμα 2

Να λυθεί η εξίσωση διαφορών

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 - 4r + 4 = 0$ με $\Delta = 16 - 16 = 0$.
Άρα η χαρακτηριστική ρίζα είναι $r = \frac{4}{2} = 2$.
Σύμφωνα με το θεώρημα η γενική λύση είναι:

$$y_t = C_1 2^t + C_2 t 2^t$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση έχουμε:

$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t =$
$C_1 2^{t+2} + C_2(t+2)2^{t+2} - 4\left(C_1 2^{t+1} + C_2(t+1)2^{t+1}\right) + 4(C_1 2^t + C_2 t 2^t) =$
$2^t\left(4C_1 + 4tC_2 + 8C_2 - 8C_1 - 8tC_2 - 8C_2 + 4C_1 + 4tC_2\right) = 0$

Επομένως η εξίσωση που βρήκαμε είναι μία λύση της εξίσωσης.

Παράδειγμα 3

Να λυθεί η εξίσωση διαφορών

$$y_{t+2} - \overset{\alpha_1}{2}y_{t+1} + \overset{\alpha_2}{2}y_t = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 - 2r + 2 = 0$ με $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$.
Άρα οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι $r_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \boxed{1 \pm i}$. $= z$
Το μέτρο των ριζών είναι $R = \sqrt{2}$ και η γωνία $\boxed{cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$. Συνεπώς:

$$y_t = 2^{t/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right)$$

$R = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Η πλήρης λύση

$y_t = y_h + y_p$

Η πλήρης λύση προκύπτει αν προσθέσουμε στη γενική λύση της *ομογενούς* μορφής και μία *μερική* λύση της εξίσωσης διαφορών.
Για τις αυτόνομες εξισώσεις διαφορών η μερική λύση που αναζητούμε είναι η τιμή της σταθερής κατάστασης της y. Αυτή προκύπτει όταν η y_t γίνει στάσιμη, πράγμα που σημαίνει ότι $y_{t+2} = y_{t+1} = y_t$, την οποία όπως και πριν συμβολίζουμε $\bar{y}$.
Θέτοντας $y_{t+2} = y_{t+1} = y_t = \bar{y}$ έχουμε:

$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = b$

$$\rightarrow \quad \bar{y} + a_1\bar{y} + a_2\bar{y} = b$$

Επιλύοντας έχουμε:

$\bar{y}(1 + a_1 + a_2) = b$

$$\rightarrow \quad \bar{y} = \frac{b}{1 + a_1 + a_2}, \quad a_1 + a_2 \neq -1$$

Αν $a_1 + a_2 = -1$ τέτοια τιμή δεν υπάρχει. Σε αυτήν την περίπτωση θα πρέπει να βρούμε μία εναλλακτική μερική λύση και να βρούμε τη γενική λύση. Η λύση που θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτήν την περίπτωση είναι η $y_p = At$, όπου A είναι μία σταθερά χρησιμοποιώντας μία μέθοδο που θα προσδιορίσουμε παρακάτω.

Η γενική λύση της πλήρους εξίσωσης διαφορών

Η γενική λύση της πλήρους εξίσωσης διαφορών

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = b,$$

όταν $\boxed{a_1 + a_2 \neq -1}$, είναι η εξής:

- Αν $\Delta > 0$ (πραγματικές και διακεκριμένες ρίζες):
  $y_t = \underbrace{C_1 r_1^t + C_2 r_2^t}_{y_h} + \underbrace{\frac{b}{1+a_1+a_2}}_{y_p}$
- Αν $\Delta = 0$ (πραγματικές και ίσες ρίζες):
  $y_t = C_1 r^t + C_2 t r^t + \frac{b}{1+a_1+a_2}$
- Αν $\Delta < 0$ (μιγαδικές ρίζες):
  $y_t = R^t (C_1 \cos(\theta t) + C_2 \sin(\theta t)) + \frac{b}{1+a_1+a_2}$

όπου C_1 και C_2 είναι αυθαίρετες σταθερές, τα r_1, r_2 οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης και τα R, θ το μέτρο και η γωνία του μιγαδικού αριθμού που προκύπτει στην περίπτωση μιγαδικών ριζών.

Παράδειγμα 1

Να λυθεί η εξίσωση διαφορών:

$$2y_{t+2} + 8y_{t+1} + 6y_t = 32.$$

$t=0$ $t=1$

με αρχικές τιμές $y_0 = 1$ και $y_1 = 2$.

Διατυπώνουμε την εξίσωση διαφορών στη συνήθη μορφή της

$$\to \quad y_{t+2} + 4y_{t+1} + 3y_t = 16$$

$Y_t = Y_h + Y_p$

Η ομογενής μορφή αυτής της εξίσωσης διαφορών είναι η

$$\to \quad y_{t+2} + 4y_{t+1} + 3y_t = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$r^2 + 4r + 3 = 0$$

με διακρίνουσα $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$ και ρίζες $r_{1,2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$ άρα $r_1 = -1$ και $r_2 = -3$.

Παράδειγμα 1

Η μερική λύση ισορροπίας προκύπτει λύνοντας την:

$$\bar{y} + 4\bar{y} + 3\bar{y} = 16$$

που δίνει $\bar{y} = 2$.
Συνεπώς, η γενική λύση της εξίσωσης είναι:

$$1 = y_0 \qquad y_t = \overbrace{C_1\underset{r_1}{(-1)}^{t} + C_2\underset{r_2}{(-3)}^{t}}^{y_h} + \overset{y_p}{2}$$

$y_0 = 1$ $\qquad$ $y_1 = 2$

Για $t = 0$ η λύση γίνεται $y_0 = C_1 + C_2 + 2 = 1 \Rightarrow \boxed{C_1 + C_2 = -1}$ ενώ για $t = 1$ έχουμε $y_1 = -C_1 - 3C_2 + 2 = 2 \Rightarrow \boxed{-C_1 - 3C_2 = 0}$. Επιλύοντας αυτό το γραμμικό σύστημα παίρνουμε $C_1 = -\frac{3}{2}$ και $C_2 = \frac{1}{2}$, επομένως η λύση της εξίσωσης διαφορών είναι:

$$y_t = -\frac{3}{2}(-1)^t + \frac{1}{2}(-3)^t + 2$$

Παράδειγμα 2

Να λυθεί η εξίσωση διαφορών:

$$y_{t+2} \overset{a_1}{-2} y_{t+1} + \overset{a_2}{2} y_t = \overset{b}{10} \qquad Y_t = \underline{Y_h} + \underline{Y_p}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης διαφορών είναι η:

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

$\Delta = 4 - 8 = -4$ και $r_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \underline{1 \pm i}$
Υπολογίζουμε $R = \sqrt{2}$ και $\theta = \frac{\pi}{4}$. Η λύση ισορροπίας προκύπτει λύνοντας την:

$$\bar{y} - 2\bar{y} + 2\bar{y} = 10$$

που δίνει $\underline{\bar{y} = 10}$. Συνεπώς, η γενική λύση της πλήρους εξίσωσης είναι η:

$$\rightarrow \quad y_t = \underline{2^{t/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right)} + \underline{10}$$

Παράδειγμα 2

Στην προηγούμενη εξίσωση να προσδιοριστούν οι σταθερές ώστε οι λύσεις να ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες $y_0 \overset{t=0}{=} 1$ και $y_1 \overset{t=1}{=} 2$.

- Για $t = 0$ έχουμε $1 = C_1 + 10$ από όπου προκύπτει $C_1 = -9$.
- Για $t = 1$ έχουμε $2 = \sqrt{2}(C_1 \cos(\frac{\pi}{4}) + C_2 \sin(\frac{\pi}{4})) + 10 \Rightarrow$ $2 = \sqrt{2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{\sqrt{2}}\right) + 10 \Rightarrow -8 = -9 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1$.

Συνεπώς, η λύση παίρνει τη μορφή:

$$y_t = 2^{t/2}\left(-9\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) + 10$$

Σταθερή κατάσταση και σύγκλιση

Θεώρημα: Η διαδρομή της y_t σε μία γραμμική, αυτόνομη εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης συγκλίνει προς την τιμή σταθερής κατάστασης $\bar{y}$ από οποιαδήποτε αρχική τιμή, όπου

$$\bar{y} = \frac{b}{1 + a_1 + a_2}$$

αν $a_1 + a_2 \neq -1$ όταν και μόνο όταν οι απόλυτες τιμές και των δύο ριζών είναι μικρότερες από τη μονάδα.

$|r_1| < 1$

$|r_2| < 1$

$|r| < 1$

$|h \pm iv| \le 1$

Απόδειξη θεωρήματος για σταθερή κατάσταση και σύγκλιση

$\lim_{t \to +\infty} a^t$ $t = 0, 1, 2, \ldots$

$|a| < 1$

Εξετάζουμε τρεις περιπτώσεις:

$\Delta > 0$ **Πραγματικές και άνισες ρίζες**: Τότε η λύση είναι:

$$\lim_{t \to +\infty} y_t = C_1 r_1^t + C_2 r_2^t + \bar{y}$$

Σε αυτήν την περίπτωση επειδή και η r_1 και η r_2 υψώνονται στην t, καθώς $t \to +\infty$ η λύση συγκλίνει στην σταθερή κατάσταση $\bar{y}$ αν και μόνο αν οι απόλυτες τιμές και των δύο ριζών είναι μικρότερες της μονάδας. Σε αυτήν την περίπτωση οι όροι r_1^t και r_2^t συγκλίνουν στο μηδέν. Σε αντίθετη περίπτωση, καθώς $t \to +\infty$ η y_t απειρίζεται.

Απόδειξη θεωρήματος για σταθερή κατάσταση και σύγκλιση

Πραγματικές και ίσες ρίζες: Τότε η λύση είναι: $\infty \cdot 0$

$\Delta = 0$

$|r|<1$

$$\lim_{t\to\infty} \quad y_t = C_1 r^t + C_2 t r^t + \bar{y} \qquad \frac{t}{r^{-t}}$$

Αν η ρίζα r είναι κατά απόλυτη τιμή μεγαλύτερη του 1 είναι σαφές ότι η ρίζα αποκλίνει. Αν η ρίζα r είναι κατά απόλυτη τιμή μικρότερη του 1 τότε ο όρος $C_1 r^t$ συγκλίνει στο μηδέν. Για να υπολογίσουμε το όριο του tr^t μετατρέπουμε τον όρο σε $\frac{t}{r^{-t}}$ και έτσι έχουμε τη μορφή (∞/∞) όταν $|r| < 1$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της παραγώγισης $\frac{da^x}{dx} = a^x \ln(a)$ και εφαρμόζοντας τον κανόνα L' Hospital παίρνουμε $\boxed{\frac{1}{-r^{-t}\ln(r)}}$ που συγκλίνει στο μηδέν.

Απόδειξη θεωρήματος για σταθερή κατάσταση και σύγκλιση

Μιγαδικές ρίζες: Η λύση σε αυτήν την περίπτωση είναι:

$\Delta<0$

$|R|<1$ $\qquad \to 0$

$$\to \lim_{t\to\infty} y_t = R^t(C_1\cos(\theta t) + C_2\sin(\theta t)) + \bar{y}$$

Σε αυτήν τη περίπτωση οι συναρτήσεις $C_1\cos(\theta t)$ και $C_2\sin(\theta t)$ είναι φραγμένες κατά απόλυτη τιμή από τα C_1 και C_2 αντίστοιχα. Συνεπώς η σύγκλιση εξαρτάται αποκλειστικά από τον όρο R^t. Αν για το μέτρο των δύο μιγαδικών ριζών ισχύει $|R|<1$, τότε η y_t συγκλίνει στο $\bar{y}$, διαφορετικά αποκλίνει.

Ικανές και αναγκαίες συνθήκες για σύγκλιση

Θεώρημα: Η απόλυτη τιμή των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης (για τη γραμμική, αυτόνομη εξίσωση διαφορών 2ης τάξης) είναι μικρότερη από 1, αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι τρεις συνθήκες:

i) $1 + a_1 + a_2 > 0$

ii) $1 - a_1 + a_2 > 0$ $\Longleftrightarrow$ $|r_1| < 1$, $|r_2| < 1$

iii) $a_2 < 1$

Παράδειγμα: Για την εξίσωση $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 2y_t = 10$ έχουμε

i) $1 + a_1 + a_2 = 1 - 2 + 2 = 1 > 0$

ii) $1 - a_1 + a_2 = 1 + 2 + 2 = 5 > 0$

iii) $a_2 = 2 > 1$

επομένως η απόλυτη τιμή των ριζών δεν είναι μικρότερη από 1 ($|1 \pm i| = \sqrt{2} > 1$).

Η γραμμική εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης με μεταβλητό όρο

μη αυτόνομες

Όταν ο όρος b δεν είναι σταθερός και είναι συνάρτηση του t (θα τον συμβολίζουμε με b_t), τότε η γραμμική εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης είναι μη αυτόνομη.
Ακόμη και όταν το b είναι σταθερό, δεν υπάρχει λύση σταθερής κατάστασης αν $\boxed{1 + a_1 + a_2 = 0.}$

$\bar{y} = \frac{b}{1+a_1+a_2}$

Υπάρχει μία εναλλακτική τεχνική για την εύρεση σταθερής λύσης. Όταν ο όρος b_t δεν είναι σταθερά, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των **απροσδιόριστών συντελεστών**. Αυτή η μέθοδος βασίζεται στην ικανότητα κάποιου να 'υποθέσει' τη μορφή της μερικής λύσης.

Η γραμμική εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης με μεταβλητό όρο

Περίπτωση 1: Αν η b_t είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n ως προς t, τότε υποθέτουμε ότι η μερική λύση είναι και αυτή πολυώνυμο. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι:

$$y_p = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots + A_n t^n$$

όπου τα A_i είναι σταθερές που προσδιορίζουμε.
Περίπτωση 2: Αν η b_t είναι της μορφής k^t όπου k είναι μία σταθερά, τότε υποθέτουμε ότι:

$5k^t$

$$y_p = Ak^t$$

όπου A μία σταθερά την οποία προσδιορίζουμε.
Περίπτωση 3: Αν η b_t είναι της μορφής $k^t p_n(t)$, τότε υποθέτουμε ότι:

$$y_p = Ak^t(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots + A_n t^n)$$

Η γραμμική εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης με μεταβλητό όρο

Υπάρχει μία σημαντική εξαίρεση σε αυτές τις κατευθυντήριες γραμμές για τις υποθέσεις σχετικά με τη μορφή των λύσεων.

Αν ένας οποιοσδήποτε όρος της εικαζόμενης μερικής λύσης είναι ταυτόχρονα και όρος της ομογενούς λύσης (αδιαφορώντας για τις σταθερές με τις οποίες είναι πολλαπλασιασμένος) τότε η εικαζόμενη λύση πρέπει να τροποποιηθεί ως εξής: Πολλαπλασιάζουμε την υποτιθέμενη λύση με t^k, όπου k είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος, έτσι ώστε να μην έχουμε κοινούς όρους.

Παράδειγμα 1

Να επιλυθεί η εξίσωση

$$y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 10$$

b_t

$Y_t = Y_h + Y_p$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 - 3r + 2 = 0$ και έχει ρίζες το 1 και το 2. Συνεπώς, η λύση για την ομογενή μορφή είναι:

$$y_h = C_1 2^t + C_2 1^t$$

$1 + a_1 + a_2 = 0$

$\bar{y} - 3\bar{y} + 2\bar{y} = 10 \Rightarrow$

$0 = 10$

Θέλουμε να βρούμε μία μερική λύση, αλλά παρατηρούμε ότι $1 + a_1 + a_2 = 1 - 3 + 2 = 0$. Επομένως θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των απροσδιορίστων συντελεστών.

Επειδή η b_t σε αυτήν την περίπτωση είναι μία σταθερά ($b_t = 10$), πρώτα θα δοκιμάσουμε μια μερική λύση αυτής της μορφής, δηλαδή $\boxed{y_p = A}$ Όμως, αυτή είναι όμοια με τον όρο C_2 της ομογενούς λύσης, γιαυτό και θα δοκιμάσουμε τη λύση $y_p = At$

Παράδειγμα 1

$y_t = A \cdot t$

$y_{t+1} = A(t+1)$

$y_{t+2} = A(t+2)$

$y_p = At$

Η μερική λύση πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση διαφορών και αυτό το χρησιμοποιούμε για να λύσουμε ως προς A.

$$A(t+2) - 3A(t+1) + 2At = 10$$

Επιλύοντας παίρνουμε $A(t+2-3t-3+2t) = 10 \Leftrightarrow \underline{A = -10}$
Συνεπώς η γενική λύση της πλήρους εξίσωσης είναι

$$y_t = \underbrace{C_1 2^t + C_2}_{y_h} \underbrace{- 10t}_{y_p}$$

Παράδειγμα 2

Να επιλυθεί η εξίσωση

$Y_t = Y_h + Y_p$

$$y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = \overset{b_t}{1 + t}$$

Η ομογενής λύση είναι η ίδια με του προηγούμενου παραδείγματος ($y_h = C_1 2^t + C_2$). Η αρχική μας υπόθεση για τη μερική λύση είναι:

$$y_p = A_0 + A_1 t$$

Όμως η εικαζόμενη λύση έχει έναν όρο κοινής μορφής με την ομογενή λύση. Συνεπώς, πολλαπλασιάζουμε την πρώτη δοκιμαστική λύση με t για να πάρουμε:

$$y_p = A_0 t + A_1 t^2$$

Παράδειγμα 2

Αυτή η δοκιμαστική λύση δεν έχει κοινούς όρους με τη λύση της ομογενούς και συνεπώς μπορούμε να την αντικαταστήσουμε στην πλήρη εξίσωση διαφορών:

$$(A_0(t+2) + A_1(t+2)^2) - 3(A_0(t+1) + A_1(t+1)^2) + 2(A_0 t + A_1 t^2) = 1 + t$$

$\Leftrightarrow (A_0 t + 2A_0 + A_1 t^2 + 4A_1 + 4A_1 t) - 3(A_0 t + A_0 + A_1 t^2 + A_1 + 2A_1 t) + 2(A_0 t + A_1 t^2) = 1 + t$
$\Leftrightarrow (2A_0 + 4A_1 - 3A_0 - 3A_1) + t(A_0 + 4A_1 - 3A_0 - 6A_1 + 2A_0) + (A_1 - 3A_1 + 2A_1)t^2 = 1 + t$
$\Leftrightarrow (A_1 - A_0) + t(-2A_1) + (0)t^2 = 1 + t$. Συνεπώς $A_1 = -\frac{1}{2}$ και $A_0 = -\frac{3}{2}$.
Επομένως η πλήρης λύση της εξίσωσης διαφορών είναι:

$$y_t = \underbrace{C_1 2^t + C_2}_{y_h} \underbrace{- \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}t^2}_{y_p}$$

Παράδειγμα 3

Να επιλυθεί η εξίσωση

$y_t = y_h + y_p$

b_t

$$y_{t+2} - \frac{5}{2}y_{t+1} + y_t = 3^t.$$

Βρίσκουμε την ομογενή λύση: $\Delta = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4} > 0$, άρα οι ρίζες είναι η 2 και $1/2$. Η ομογενής λύση είναι

$$y_h = C_1 2^t + C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

Η αρχική μας υπόθεση για τη μερική λύση είναι:

$$y_p = A3^t$$

Παράδειγμα 3

$y_t = y_h + y_p$

k^t

Αυτή η δοκιμαστική λύση δεν έχει κοινούς όρους με τη λύση της ομογενούς και συνεπώς μπορούμε να την αντικαταστήσουμε στην πλήρη εξίσωση διαφορών:
$A3^{t+2} - \frac{5}{2}A3^{t+1} + A3^t = 3^t \Leftrightarrow A3^2 - \frac{15}{2}A + A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{2}{5}$

Άρα η πλήρης λύση είναι η:

$$y_t = C_1 2^t + C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^t + \frac{2}{5}3^t$$

Μαθηματική Ανάλυση
Διάλεξη 10

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Σπύρος Χαλκίδης
Ε.ΔΙ.Π.

Δεκέμβριος 2022

Θέματα 10ης διάλεξης

- Διαφορικές εξισώσεις
- Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων
- Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης
- Μέθοδος χωριζόμενων μεταβλητών
- Μη αυτόνομες διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης
- Διαφορικές εξισώσεις Bernoulli και Riccati

Βασικές έννοιες

Μια εξίσωση που περιέχει τις παραγώγους μίας ή περισσοτέρων εξαρτημένων μεταβλητών, σε σχέση με μία ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές, ονομάζεται **Διαφορική Εξίσωση** (Δ.Ε.).

Παραδείγματα:

- $\frac{dy}{dx} = y$ $\Rightarrow y = e^x$
- $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = x$
- $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + y = \cos(x)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$
- $\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)^2 + 3\sqrt{\frac{\partial y}{\partial x}} + y^2 = 0$

$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \nabla^2 u = 0 \Rightarrow$

$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$

Συμβολισμοί

- Συμβολισμός με χρήση τόνων

$$y' + 5y = e^{-x}$$

- Συμβολισμός Leibniz

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 10x = 0$$

- Συμβολισμός Newton

$$\ddot{x} = -3$$

$\dot{x}$

- Συμβολισμός με χρήση υποδεικτών

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων (ως προς τον τύπο)

Οι διαφορικές εξισώσεις διακρίνονται σε:

- Αν η διαφορική εξίσωση περιέχει μόνο παραγώγους μίας ή περισσοτέρων συναρτήσεων ως προς μία μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή ονομάζεται **Συνήθης Διαφορική Εξίσωση** (Σ.Δ.Ε.). Παραδείγματα:
  - $\frac{dy}{dx} + 6y = e^{-x}$
  - $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 12y = 0$
  - $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 3x + 2y$
- Μια εξίσωση που περιλαμβάνει μόνο μερικές παραγώγους μίας ή περισσοτέρων συναρτήσεων δύο ή περισσοτέρων ανεξάρτητων μεταβλητών ονομάζεται **Μερική Διαφορική Εξίσωση** (Μ.Δ.Ε.). Παραδείγματα:
  - $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
  - $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων (ως προς την τάξη)

Ορισμός: Η τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης (Σ.Δ.Ε. ή Μ.Δ.Ε.) είναι η τάξη της ανώτερης παραγώγου στην εξίσωση.

Παραδείγματα:

- Δεύτερης τάξης: $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - y = e^x$
- Τρίτης τάξης: $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$
- Τέταρτης τάξης: $2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων (ως προς τη γραμμικότητα)

Μ.Δ.Ε.

Μια Σ.Δ.Ε. n τάξης ονομάζεται **γραμμική** ως προς τη μεταβλητή y, εάν είναι της μορφής

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

όπου g, a_0, a_1, ..., a_n συνεχείς συναρτήσεις.

Δύο σημαντικές ειδικές περιπτώσεις γραμμικών εξισώσεων, είναι ή γραμμική Σ.Δ.Ε. πρώτης τάξης ($n = 1$):

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

και η γραμμική Σ.Δ.Ε. δεύτερης τάξης ($n = 2$):

$$a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

Ορισμός: Η γενική μορφή της **γραμμικής, αυτόνομης διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης** με σταθερούς συντελεστές είναι

$$\dot{y} + \alpha y = b$$

όπου α και b είναι γνωστές σταθερές, ενώ εάν $y = y(t)$ τότε $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$.

Αν με y_h συμβολίσουμε τη γενική λύση της *ομογενούς μορφής* (που λαμβάνεται θέτοντας $b = 0$) και με y_p συμβολίσουμε τη **μερική λύση**, τότε μπορούμε να έχουμε το αποτέλεσμα

$$y = y_h + y_p$$

Δηλαδή η **γενική λύση** y της πλήρους εξίσωσης είναι το άθροισμα της γενικής λύσης της ομογενούς μορφής και μίας μερικής λύσης της πλήρους εξίσωσης, όπως η λύση της σταθερής κατάστασης ισορροπίας.

Η ομογενής λύση

$\ln(-1) = z$

Ορισμός: Η **ομογενής** μορφή της γραμμικής αυτόνομης διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης είναι:

$y(t) = 0$

$0 + a \cdot 0 = 0$

$$\dot{y} + \alpha y = 0, \; \alpha \neq 0$$

$a = 0$

$\dot{y} = 0 \Rightarrow y(t) = C \in \mathbb{R}$

Αν $\alpha = 0$, η λύση είναι εύκολο να βρεθεί με άμεση ολοκλήρωση ($y(t) = C$, $C \in \mathbb{R}$). Στη γενική περίπτωση με $\alpha \neq 0$ μπορούμε να λύσουμε την ομογενή μορφή με άμεση ολοκλήρωση, αφού την φέρουμε σε κατάλληλη μορφη. Αφαιρούμε το αy και από τα δύο μέλη της εξίσωσης και στη συνέχεια διαιρούμε με y. Έτσι καταλήγουμε:

$\dot{y} + ay = 0 \Rightarrow \dot{y} = -ay \Rightarrow \frac{\dot{y}}{y} = -a$

$$\frac{\dot{y}}{y} = -\alpha$$

$\Rightarrow \int \frac{\dot{y}}{y} dt = \int -a \, dt = -at + C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \frac{dy}{\cancel{dt}} \cdot \frac{1}{y} \cdot \cancel{dt} = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C_2$

$\ln|y| + C_2 = -at + C_1 \Rightarrow$

$\ln|y| = -at + C_1 - C_2 \Rightarrow$

$e^{\ln|y|} = e^{-at + C_1 - C_2} = e^{-at} e^{C_1 - C_2} = e^{-at} C$

Η ομογενής λύση

Στη μορφή αυτή μπορούμε να ολοκληρώσουμε κάθε μέλος ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή, έστω t, δηλαδή

$$\int \frac{\dot{y}}{y} dt = -\int \alpha dt$$

Το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους είναι $-\alpha t + C_1$ όπου C_1 είναι μία σταθερά ολοκλήρωσης. Το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους γράφεται ως

$$\int \frac{\dot{y}}{y} dt$$

Δεδομένου ότι $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, αυτό γίνεται

$$\int \frac{dy/dt}{y} dt$$

και μετά την απαλοιφή των όρων dt, παίρνει τη μορφή

$$\int \frac{1}{y} dy$$

Η ομογενής λύση

Το ολοκλήρωμα του $1/y$ είναι $\ln|y| + C_2$, όπου C_2 είναι μία σταθερά ολοκλήρωσης. Τώρα έχουμε βρει το ολοκλήρωμα και των δύο μελών και καταλήγουμε στη σχέση:

$$\ln|y| + C_2 = -\alpha t + C_1$$

Έτσι:

$$|y| = e^{-\alpha t + C_1 - C_2} =$$

$$e^{-\alpha t} e^{C_1 - C_2} =$$

$$Ce^{-\alpha t}$$

Θεώρημα: Η γενική λύση της **ομογενούς** μορφής της γραμμικής, αυτόνομης διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης είναι:

$$y_h(t) = Ce^{-\alpha t}$$

Παράδειγμα

$\dot{y} + ay = b$

Να επιλυθεί η ομογενής μορφή της διαφορικής εξίσωσης $\dot{y} = 3y + 2$.

$\Downarrow$

$\dot{y} - 3y = \boxed{2}$

$\Downarrow b=0$

Η ομογενής μορφή είναι:

$$\dot{y} - \overset{a}{3}y = 0 \Leftrightarrow \int \frac{\dot{y}}{y}dt = \int 3\,dt \Leftrightarrow$$

$$\ln|y| + C_2 = 3t + C_1 \Leftrightarrow y_h(t) = Ce^{3t}$$

Η μερική λύση

Ορισμός: Μία **τιμή σταθερής κατάστασης ισορροπίας** προσδιορίζεται από τη συνθήκη $\dot{y} = 0$. Είναι η τιμή της y, στην οποία αυτή είναι στάσιμη. Θα την συμβολίσουμε με $\bar{y}$.

Θέτοντας $\dot{y} = 0$ έχουμε

$\dot{y} + ay = b$

$$0 + \alpha\bar{y} = b \Leftrightarrow \bar{y} = \frac{b}{\alpha}$$

Άρα $y_p = \bar{y}$. Αντικαθιστώντας το $\bar{y}$ στην πλήρη διαφορική εξίσωση έχουμε

$$0 + \alpha\bar{y} = b$$

που ισχύει.

Η γενική λύση

Θεώρημα: Η λύση μίας οποιασδήποτε γραμμικής αυτόνομης διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης είναι ίση με το άθροισμα της ομογενούς λύσης και μίας οποιασδήποτε μερικής λύσης της πλήρους διαφορικής εξίσωσης:

$$y = \underline{y_h} + \underline{y_p}$$

$\dot y + a y = 0$

Απόδειξη: Έστω ότι y_1 και y_2 είναι δύο οποιεσδήποτε λύσεις της πλήρους διαφορικής εξίσωσης και ορίζουμε ως $z = y_1 - y_2$ τη διαφορά ανάμεσα σε αυτές τις δύο λύσεις. Μπορούμε να δείξουμε ότι η z είναι μία λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. Αυτό γίνεται ως εξής:

$$\dot z = \dot y_1 - \dot y_2 = \underbrace{(-\alpha y_1 \cancel{+ b})}_{\dot y_1} - \underbrace{(-\alpha y_2 \cancel{+ b})}_{\dot y_2} = -\alpha\overbrace{(y_1 - y_2)}^{z} = -\alpha z$$

Επομένως

$z = y_1 - y_2$

$$\dot z + \alpha z = 0$$

που σημαίνει ότι η z ικανοποιεί την ομογενή μορφή της διαφορικής εξίσωσης και συνεπώς είναι μία λύση της.

Η γενική λύση

Έστω τώρα ότι y είναι μία γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης και έστω y_p ότι είναι μία μερική λύση. Αφού η y και η y_p είναι δύο λύσεις της πλήρους εξίσωσης, τότε, όπως αποδείξαμε, η $z = y - y_p$ θα είναι μία λύση της ομογενούς μορφής της. Επειδή είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης την ονομάζουμε y_h. Συνεπώς $y_h = y - y_p \Leftrightarrow y = y_h + y_p$

Θεώρημα: Η γενική λύση της πλήρους, αυτόνομης διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης είναι:

$$y(t) = \underset{y_h}{Ce^{-\alpha t}} + \underset{y_p}{\frac{b}{\alpha}}$$

Παράδειγμα

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$\dot{y} + \overset{a}{2}y = \overset{b}{8}$$

$Y = Y_h + Y_p$

Η ομογενής μορφή είναι $\dot{y} = -2y$.

$= Ce^{-at}$

Επομένως η λύση της ομογενούς μορφής είναι $y_h(t) = \underline{Ce^{-2t}}$

Η μερική λύση προκύπτει από την τιμή σταθερής κατάστασης της y στη γενική μορφή της διαφορικής εξίσωσης θέτοντας $\dot{y} = 0$. Συνεπώς:

$\dot{y} = 0$

$$0 + 2\bar{y} = 8 \Leftrightarrow \bar{y} = 4$$

$y = \bar{y}$

Επομένως, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$y = Ce^{-2t} + \underline{4}$$

Το πρόβλημα της αρχικής τιμής

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\dot{y} = 0.1y - 1 \Rightarrow \dot{y} - 0.1y = -1$$

$a \quad b$

$y = y_h + y_p$

$y_h = Ce^{-at}$

ώστε να ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = 5$. $t=0$

$\bar{y} = \frac{b}{a} = \frac{-1}{-0.1} = 10$

Η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι: $y_h = Ce^{0.1t}$

Η μερική λύση που χρησιμοποιούμε είναι η λύση της σταθερής κατάστασης: $\bar{y} = 10$

Συνεπώς η γενική λύση είναι:

$$y(t) = Ce^{0.1t} + 10$$

Για την αρχική συνθήκη έχουμε:

$$5 = C + 10 \Leftrightarrow C = -5$$

Συνεπώς η γενική λύση η οποία ικανοποιεί την αρχική συνθήκη είναι

$$\Rightarrow \quad y = -5e^{0.1t} + 10$$

Η μέθοδος των χωριζόμενων μεταβλητών

Αν μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης είναι της μορφής:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

τότε είναι δυνατό να χωρίσουμε τις μεταβλητές και έτσι η παραπάνω εξίσωση να γραφεί

$$\int \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}\,dx = \int f(x)\,dx$$

Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη ως προς x έχουμε:

$$\int \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = \int f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$$

Παράδειγμα 1

Έστω η διαφορική εξίσωση:

$y(x)$

$$x\frac{dy}{dx} = y(y+1),\ x > 0$$

Χωρίζουμε τις μεταβλητές

$$\int \frac{1}{y(y+1)}\frac{dy}{\cancel{dx}}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$1 = Ay + A + By = (A+B)y + A$

Θέτοντας $\frac{1}{y(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1}$ έχουμε ισοδύναμα $\frac{1}{y(y+1)} = \frac{Ay+A+By}{y(y+1)}$. Ισοδύναμα παίρνουμε ότι $A+B=0$ και $A=1$. Συνεπώς $B=-1$.

Άρα $\frac{1}{y(y+1)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}$

Παράδειγμα 1

Συνεπώς

$$\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) dy = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\ln|y| - \ln|y+1| = \ln x + C \Leftrightarrow$$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$e^{\ln\left|\frac{y}{y+1}\right|} = e^{\ln x + C}$

$\left|\frac{y}{y+1}\right| = e^C x \Rightarrow \frac{y}{y+1} = kx$, όπου $k = e^C$. Ισοδύναμα
$y = kxy + kx \Leftrightarrow (1-kx)y = kx \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{kx}{1-kx}}$. Θέτοντας $A = \frac{1}{k}$ και πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρανομαστή με A έχουμε:

$$y = \frac{x}{A - x}$$

Παράδειγμα 2

Έστω η διαφορική εξίσωση:

$$y' = y^2 e^{-x}$$

Χωρίζουμε τις μεταβλητές (για $y \neq 0$, για $y = 0$ η εξίσωση ικανοποιείται)

$$\int \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}\,\cancel{dx} = \int e^{-x}\,dx$$

Συνεπώς έχουμε

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int e^{-x}dx \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{y} + C_1 = -e^{-x} + \cancel{C} + C_2 \Leftrightarrow \qquad C = C_2 - C_1$$

$$y = \frac{1}{e^{-x} - C}$$

Παράδειγμα 3

Έστω η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x + y - 2} - 1, \text{ με } y(0) = 3$$

Επειδή ο διαχωρισμός των μεταβλητών δεν μπορεί να γίνει άμεσα, θα θέσουμε $z(x) = x + y(x) - 2$, επομένως:

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

επομένως η αρχική μας διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\frac{dz}{dx} \cancel{-1} = \sqrt{z} \cancel{-1} \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = \sqrt{z}$$

Αυτή η Σ.Δ.Ε. είναι χωριζομένων μεταβλητών, οπότε:

$$\frac{1}{\sqrt{z}}\frac{dz}{dx} = 1 \Leftrightarrow \int z^{-\frac{1}{2}} dz = \int dx \Leftrightarrow \frac{z^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = x + c \Leftrightarrow 2\sqrt{z} = x + c$$

Παράδειγμα 3

$y(0)=3$

$z(0)$

Χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη $y(0) = 3$ στη σχέση $z(x) = x + y(x) - 2$, παίρνουμε

$z(0) = 0 + 3 - 2$

$$z = 0 + 3 - 2 = 1$$

οπότε η $2\sqrt{z} = x + c$ για $t = 0$ δίνει

$$2\sqrt{1} = 0 + c \Leftrightarrow c = 2$$

Άρα η σχέση $2\sqrt{z} = x + c$ γίνεται:

$$2\sqrt{z} = x + 2 \Leftrightarrow \boxed{2\sqrt{x+y-2} = x+2} \Leftrightarrow \sqrt{x+y-2} = \frac{x+2}{2}, \ x+2 \geq 0$$

Άρα

$$x + y - 2 = \left(\frac{x}{2}+1\right)^2 \Leftrightarrow x + y - 2 = \frac{x^2}{4} + 1 + x \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4} + 3, \ x + 2 \geq 0$$

Η σταθερή κατάσταση ισορροπίας και η σύγκλιση

$\bar{y} = \frac{b}{a}$

$y(0)$

Η εξίσωση της γενικής λύσης $(y(t) = Ce^{-at} + \frac{b}{a})$ για $t = 0$ δίνει

$t=0$

$y(0) = y_0 = C + b/\alpha \Leftrightarrow C = y_0 - (b/\alpha)$. Επειδή $\bar{y} = b/\alpha$ έχουμε $\boxed{C = y_0 - \bar{y}}$ και μπορούμε να γράψουμε

C

$$\lim_{t\to\infty} \; y(t) = (y_0 - \bar{y})e^{-\alpha t} + \bar{y}$$

Τότε

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}((y_0 - \bar{y})e^{-\alpha t} + \bar{y})$$

0 $\quad \frac{1}{e^{at}}$ $\quad \xrightarrow[t\to\infty]{}$ $\quad a>0, \; 0 \quad a<0, \; \infty \quad a=0$

Αν $\alpha > 0$ τότε το $y(t)$ συγκλίνει στο $\bar{y}$ ενω αν $\alpha < 0$ τότε το $y(t)$ αποκλίνει.

$\dot{y} + ay = b$

$\boxed{\dot{y} = b}$

$\boxed{y = bt + c}$

Θεώρημα Η λύση $y(t)$ σε μία γραμμική αυτόνομη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης συγκλίνει προς την σταθερή κατάσταση ισορροπίας $\bar{y} = b/\alpha$, ανεξάρτητα από την αρχική τιμή y_0 αν και μόνο αν ο συντελεστής α της διαφορικής εξίσωσης είναι θετικός.

Παράδειγμα

Έστω η διαφορική εξίσωση

$$\dot{y} = 5y - 10 \Rightarrow \dot{y} - \overset{a}{5}y = -10 \qquad \bar{y} = \frac{-10}{-5} = 2$$

Αν κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$, $y(0) = 100$ να βρεθεί αν συγκλίνει προς μία κατάσταση ισορροπίας:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = Ce^{5t} + 2$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ πρέπει να ικανοποιεί την $y(0) = 100$. Αυτό σημαίνει

$$100 = C + 2 \Leftrightarrow C = 98$$

Η λύση γίνεται:

$$y(t) = 98e^{5t} + 2$$

που αποκλίνει από την σταθερή κατάσταση ισορροπίας $\bar{y} = 2$ γιατί το e^{5t} τείνει στο άπειρο καθώς $t \to +\infty$.

Η περίπτωση του $\alpha = 0$

Αν $\alpha = 0$ η λύση της σταθερής κατάστασης δεν ορίζεται. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\underline{\dot{y} = b}$$

μπορεί να ολοκληρωθεί άμεσα και έχουμε $y(t) = \underline{bt + C}$

$\lim_{t \to \infty}$

Μη αυτόνομες εξισώσεις

Εαν ο συντελεστής α ή/και ο όρος b σε μία γραμμική διαφορική εξίσωση είναι συνάρτηση του χρόνου τότε η εξίσωση είναι *μη αυτόνομη*.

Ορισμός: Η γενική μορφή της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης είναι

$$\dot{y} + \underbrace{\alpha(t)}_{}^{\alpha} y = \overbrace{b(t)}^{b}$$

όπου $\alpha(t)$ και $b(t)$ είναι γνωστές συνεχείς συναρτήσεις του t.

Θεώρημα: Η γενική λύση μίας οποιασδήποτε γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης είναι

$$y(t) = e^{-A(t)} \left(\int e^{A(t)} b(t) dt + C \right)$$

Μη αυτόνομες εξισώσεις

$\dot{y} + a(t)y = b(t)$

Στο θεώρημα χρησιμοποιούμε τον όρο $A(t)$, ο οποίος ορίζεται ως το ολοκλήρωμα του συντελεστή $\alpha(t)$ $(A(t) = \int a(t)dt)$. Για να δούμε πώς μπορούμε να πάρουμε τη γενική λύση, παραγωγίζουμε τη συνάρτηση:

$$\frac{d\left(e^{A(t)}y(t)\right)}{dt} = \frac{de^{A(t)}}{dt}y(t) + e^{A(t)} \cdot \frac{dy}{dt} = e^{A(t)} \cdot \frac{dA(t)}{dt} \cdot y(t) + e^{A(t)} \cdot \dot{y}$$

όπου προκύπτει:

$$e^{A(t)}\left(\frac{dA(t)}{dt}y(t) + \dot{y}\right)$$

Αφού $\alpha(t) = \frac{dA(t)}{dt}$ έχουμε δείξει ότι

$$\frac{d}{dt}(e^{A(t)}y(t)) = e^{A(t)}(\alpha(t)y(t) + \dot{y})$$

$e^{\int a(t)dt}$

Μη αυτόνομες εξισώσεις

$\dot{y} + a(t)y = b(t)$ $e^{A(t)}$

Το προηγούμενο αποτέλεσμα δείχνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη τεχνική για να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση: Πολλαπλασιάζουμε ολόκληρη την εξίσωση επί τον όρο $e^{A(t)}$. Έτσι προκύπτει:

$$e^{A(t)}(\alpha(t)y(t) + \dot{y}) = e^{A(t)}b(t)$$

Όπως δείξαμε προηγουμένως το αριστερό μέλος είναι ίσο με $\frac{d}{dt}(e^{A(t)}y(t))$ οπότε

$$\rightarrow \int \frac{d}{dt}(e^{A(t)}y(t))\,dt = \int e^{A(t)}b(t)\,dt$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$e^{A(t)}y(t) = \int e^{A(t)}b(t)dt + C$$

Μη αυτόνομες εξισώσεις

Διαιρώντας με $e^{A(t)}$ προκύπτει τελικά

$$y(t) = e^{-A(t)} \left(\int e^{A(t)} b(t) dt + C \right)$$

Θεώρημα: Η γενική μορφή του παράγοντα ολοκλήρωσης για τη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης είναι:

$$e^{A(t)}$$

$A(t) = \int a(t) dt$

όπου $A(t) = \int \alpha(t) dt$.

Παράδειγμα

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$a(t) = -2t$ $\quad b(t) = b \cdot t$

$$\dot{y} - 2ty = bt$$

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $\alpha(t) = -2t$, επομένως

$$e^{A(t)} = e^{-t^2} \qquad A(t) = \int (-2t)dt = -t^2 + c \; ?$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης επί τον παράγοντα ολοκλήρωσης έχουμε:

$$e^{-t^2}(\dot{y} - 2ty) = e^{-t^2} bt$$

Ισοδύναμα

$$\rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\overset{e^{A(t)}}{e^{-t^2}} y) = e^{-t^2} bt$$

Παράδειγμα

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη έχουμε:

$$e^{-t^2} y = -\frac{be^{-t^2}}{2} + C$$

Διαιρώντας με e^{-t^2}

$$y = e^{t^2}\left(-\frac{be^{-t^2}}{2} + C\right) = -\frac{b}{2} + Ce^{t^2}$$

Παράδειγμα 2

$\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx$

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\cos(x)\frac{dy}{dx} + (\cos(x) + \sin(x))y = \sin(x)\cos^2(x), \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Διαιρούμε πρώτα με $\cos(x)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + (\overset{a(x)}{1 + \tan(x)})y = \overset{b(x)}{\sin(x)\cos(x)}$$

$A(x) = \int a(x)dx$

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $\alpha(x) = 1 + \tan(x)$ επομένως

$$A(x) = \int (1 + \tan(x))dx = x - \ln(\cos(x))$$

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι

$$e^{x-\ln(\cos(x))} = \frac{e^x}{\cos(x)}$$

Παράδειγμα 2

Πολλαπλασιάζοντας την αρχική Σ.Δ.Ε. με τον ολοκληρωτικό παράγοντα έχουμε:

$$\frac{e^x}{\cos(x)}\frac{dy}{dx} + \frac{e^x}{\cos(x)}(1+\tan(x))y = e^x \sin(x)$$

Το πρώτο μέλος αυτής της εξίσωσης πρέπει να είναι της μορφής

$e^{A(x)}$ $-y$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{\cos(x)}y\right)$$

Έτσι έχουμε (μπορούμε να το επαληθεύσουμε)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{cos(x)}y\right) = e^x \sin(x)$$

(Όντως $\frac{d}{dx}(\frac{e^x}{\cos(x)}y) = \frac{e^x}{\cos(x)}\frac{dy}{dx} + \frac{e^x\cos(x) - e^x(-\sin(x))}{\cos^2(x)}y = \frac{e^x}{\cos(x)}\frac{dy}{dx} + \frac{e^x}{\cos(x)}(1+\tan(x))y$)

Παράδειγμα 2

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη έχουμε:

$$\rightarrow \frac{e^x}{\cos(x)} y = \int e^x \sin(x) dx = \int (e^x)' \sin(x) dx =$$

$$= e^x \sin(x) - \int e^x (\sin(x))' dx$$

$K = \int e^x \sin(x) dx$ που ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες δίνει
$K = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x) dx$. Συνεπώς
$2K = e^x(\sin(x) - \cos(x)) + C$ ή $\int e^x \sin(x) dx = \frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + C_1$, όπου
$C_1 = C/2$.
Αντικαθιστώντας έχουμε

$$\frac{e^x}{\cos(x)} y = \frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + C_1$$

ή ισοδύναμα

$$y = \frac{\cos(x)}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + C_1 \cos(x) e^{-x}$$

Διαφορικές εξισώσεις Bernoulli

Οι διαφορικές εξισώσεις Bernoulli είναι της μορφής

$$y' + g(x)y = f(x)y^n$$

Οι εξισώσεις αυτές μετασχηματίζονται σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της με y^{-n}

$$y'y^{-n} + g(x)y^{1-n} = f(x)$$

Στη συνέχεια θέτουμε $u(x) = y^{1-n}$, οπότε $u'(x) = (1-n)y^{-n}y'(x)$, και παίρνουμε

$$\frac{u'(x)}{1-n} + g(x)u(x) = f(x) \Leftrightarrow$$

$$u'(x) + (1-n)g(x)u(x) = (1-n)f(x)$$

που είναι γραμμική διαφορική εξίσωση.

Παράδειγμα

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $y' = \frac{3}{x}y + x^4\sqrt[3]{y}$ $y^{1/3}$

Η διαφορική εξίσωση γράφεται και ως

$$y' - \frac{3}{x}y = x^4 y^{\frac{1}{3}}$$

$n = 1/3$

οπότε είναι διαφορική εξίσωση Bernoulli με $n = \frac{1}{3}$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με $y^{-\frac{1}{3}}$ και παίρνουμε

$A(x) = \int a(x)dx$

$$y'y^{-\frac{1}{3}} - \frac{3}{x}y^{\frac{2}{3}} = x^4$$

Θέτουμε $u(x) = y^{1-\frac{1}{3}} = y^{\frac{2}{3}}$, οπότε $u'(x) = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'(x) \Rightarrow y'(x) = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}u'(x)$, επομένως καταλήγουμε στη γραμμική εξίσωση

$a(x)$ $b(x)$

$$\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}u'(x)y^{-\frac{1}{3}} - \frac{3}{x}u(x) = x^4 \Rightarrow \frac{3}{2}u'(x) - \frac{3}{x}u(x) = x^4 \Rightarrow u'(x) - \frac{2}{x}u(x) = \frac{2}{3}x^4$$

Παράδειγμα

Η γενική λύση της γραμμικής εξίσωσης είναι

$$
\begin{aligned}
u(x) &= e^{-\int -\frac{2}{x}dx}\left(\int \frac{2}{3}x^4 e^{\int -\frac{2}{x}dx}dx + c\right)\\
&= e^{\ln(x^2)}\left(\int \frac{2}{3}x^4 e^{\ln x^{-2}}dx + c\right)\\
&= x^2\left(\int \frac{2}{3}x^2 dx + c\right)\\
&= x^2\left(\frac{2}{9}x^3 + c\right)\\
&= \frac{2}{9}x^5 + cx^2
\end{aligned}
$$

Άρα τελικά

$$
y^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{9}x^5 + cx^2 \Leftrightarrow y = \left(cx^2 + \frac{2}{9}x^5\right)^{\frac{3}{2}}
$$

Διαφορικές εξισώσεις Riccati

Οι διαφορικές εξισώσεις Riccati είναι της μορφής

$$y' + f(x)y^2 + g(x)y + h(x) = 0$$

Εάν γνωρίζουμε μία μερική τους λύση, έστω $y_1(x)$, τότε μετασχηματίζονται σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με την αντικατάσταση

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}$$

Παράδειγμα

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$y' + \frac{1-x}{2x^2}y^2 - \frac{y}{x} + \frac{x-1}{2} = 0$$

η οποία έχει μερική λύση την $y_1(x) = x$.

Θέτουμε $y(x) = x + \frac{1}{u(x)}$, οπότε $y'(x) = 1 - \frac{u'(x)}{u^2(x)}$ άρα η αρχική μας διαφορική γίνεται

$$1 - \frac{u'}{u^2} + \frac{1-x}{2x^2}\left(x^2 + \frac{2}{u}x + \frac{1}{u^2}\right) - \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{u}\right) + \frac{x-1}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$1 - \frac{u'}{u^2} + \frac{1-x}{2} + \frac{1-x}{xu} + \frac{1-x}{2x^2u^2} - 1 - \frac{1}{xu} + \frac{x-1}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{u'}{u^2} + \frac{1-x}{xu} + \frac{1-x}{2x^2u^2} - \frac{1}{xu} = 0 \Rightarrow$$

Παράδειγμα

$$-2x^2u' + 2xu(1-x) + (1-x) - 2xu = 0 \Rightarrow$$

$$-2x^2u' - 2x^2u + (1-x) = 0 \Rightarrow u' + \overset{a(x)}{1\cdot} u = \overset{b(x)}{\frac{1-x}{2x^2}}$$

Η λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $u' + u = \frac{1-x}{2x^2}$ είναι

$$u(x) = e^{-\boxed{\int dx}}\left(\int \frac{1-x}{2x^2} e^{\int dx} dx + c\right) = e^{-x}\left(\int \frac{1-x}{2x^2} e^{x} dx + c\right)$$

$$= e^{-x}\left(\int \left(-\frac{e^x}{2x}\right)' dx + c\right) = e^{-x}\left(-\frac{e^x}{2x} + c\right) = -\frac{1}{2x} + ce^{-x}$$

Άρα

$$y(x) = x + \frac{1}{u(x)} = x + \frac{1}{-\frac{1}{2x} + ce^{-x}}$$

Μαθηματική Ανάλυση
Διάλεξη 11

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Σπύρος Χαλκίδης
Ε.ΔΙ.Π.

Δεκέμβριος 2022

Θέματα 11ης διάλεξης

- Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης
- Λύση ομογενούς εξίσωσης
- Πλήρης λύση
- Σύγκλιση εξισώσεων δεύτερης τάξης
- Μη αυτόνομες διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

Ορισμός: Η **γραμμική, αύτονομη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης** εκφράζεται ως εξής:

$$\ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_2 y = b$$

Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι η πλήρης λύση μίας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι ίση με το άθροισμα της λύσης της ομογενούς μορφής της και μίας μερικής λύσης της πλήρους εξίσωσης, έχουμε:

$$y = y_h + y_p$$

Ορισμός: Η ομογενής μορφή της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$\ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_2 y = 0$$

y(t)

Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης

Για να λύσουμε τη ομογενή εξίσωση, θα χρησιμοποιήσουμε αυτά που γνωρίζουμε σχετικά με τη λύση της γραμμικής, ομογενούς διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Έχουμε δει ότι οι λύσεις των εξισώσεων αυτού του είδους έχουν τη μορφή:

$$y(t) = Ae^{rt}$$

$\dot{y} = Are^{rt}$

$\ddot{y} = Ar^2e^{rt}$

όπου οι τιμές για το A και το r καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες για τον συντελεστή της εξίσωσης. Μία λογική υπόθεση είναι ότι οι λύσεις των εξισώσεων δεύτερης τάξης έχουν την ίδια μορφή.

$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = 0$

$Ar^2e^{rt} + a_1 Are^{rt} + a_2 Ae^{rt} = \underset{\neq 0}{Ae^{rt}}(r^2 + a_1 r + a_2) = 0$

$A \neq 0$

$r^2 + a_1 r + a_2 = 0$

Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης

Αν είναι σωστή η υπόθεσή μας, τότε η εξίσωση αυτή πρέπει να ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση. Αντικαθιστώντας την εικαζόμενη λύση ($y(t) = Ae^{rt}$) και τις παραγώγους της στην ομογενή εξίσωση το αριστερό μέλος γίνεται:

$$\ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_2 y = r^2 Ae^{rt} + \alpha_1 r Ae^{rt} + \alpha_2 Ae^{rt} =$$

$$Ae^{rt}(r^2 + \alpha_1 r + \alpha_2)$$

Αν εξαιρέσουμε την ειδική περίπτωση όπου $A = 0$, η υπόθεσή μας είναι σωστή αν η έκφραση εντός των παρενθέσεων είναι μηδέν, γιατί τότε η λύση που υποθέσαμε ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση. Αν επιλέξουμε το r να ικανοποιεί την:

$$r^2 + \alpha_1 r + \alpha_2 = 0$$

τότε η εξίσωση είναι πράγματι μία λύση της ομογενούς εξίσωσης.

Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης

Ορισμός: Η **χαρακτηριστική εξίσωση** της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι:

$$r^2 + \alpha_1 r + \alpha_2 = 0$$

Οι τιμές του r που επιλύουν τη χαρακτηριστική εξίσωση είναι γνωστές ως **χαρακτηριστικές ρίζες** της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Θεώρημα: Έστω ότι y_1 και y_2 είναι δύο διαφορετικές ρίζες της ομογενούς εξίσωσης. Αν c_1 και c_2 είναι δύο οποιεσδήποτε σταθερές, τότε η συνάρτηση $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ είναι μία λύση της ομογενούς εξίσωσης. Αντίστροφα, αν y είναι μία οποιαδήποτε λύση της ομογενούς εξίσωσης, τότε υπάρχουν μοναδικές σταθερές, η c_1 και η c_2, για τις οποίες ισχύει $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

Απόδειξη

$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = 0$

Απόδειξη: Αν y_1 και y_2 είναι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης τότε έπεται ότι $\ddot{y}_1 + \alpha_1\dot{y}_1 + \alpha_2 y_1 = \ddot{y}_2 + \alpha_1\dot{y}_2 + \alpha_2 y_2 = 0$.
Έχουμε ως δεδομένο ότι $\boxed{y = c_1 y_1 + c_2 y_2}$. Αν η y είναι μία λύση, τότε πρέπει να είναι αληθές ότι:

$\dot{y} = c_1\dot{y}_1 + c_2\dot{y}_2$

$\ddot{y} = c_1\ddot{y}_1 + c_2\ddot{y}_2$

$$\ddot{y} + \alpha_1\dot{y} + \alpha_2 y = 0$$

Όμως $\dot{y} = c_1\dot{y}_1 + c_2\dot{y}_2$ και $\ddot{y} = c_1\ddot{y}_1 + c_2\ddot{y}_2$. Μετά από αντικατάσταση καταλήγουμε στο:

$$\ddot{y} + \alpha_1\dot{y} + \alpha_2 y = \overbrace{(c_1\ddot{y}_1 + c_2\ddot{y}_2)}^{\ddot{y}} + \alpha_1\overbrace{(c_1\dot{y}_1 + c_2\dot{y}_2)}^{\dot{y}} + \alpha_2\overbrace{(c_1 y_1 + c_2 y_2)}^{y} =$$

$$c_1\underbrace{(\ddot{y}_1 + \alpha_1\dot{y}_1 + \alpha_2 y_1)}_{0} + c_2\underbrace{(\ddot{y}_2 + \alpha_1\dot{y}_2 + \alpha_2 y_2)}_{0} = 0$$

Επομένως η y είναι μία λύση της ομογενούς εξίσωσης.
Το δεύτερο μέρος του θεωρήματος λέει ότι οποιαδήποτε λύση της διαφορικής εξίσωσης μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός της y_1 και της y_2 μέσω κατάλληλης επιλογής των σταθερών c_1 και c_2. Για να γίνει αυτό πρέπει η y_1 και η y_2 να είναι διακεκριμένες, πράγμα που σημαίνει ότι πρέπει να είναι *γραμμικά ανεξάρτητες*.

Συνέπειες του θεωρήματος

Οι συνέπειες του θεωρήματος είναι ότι η γενική λύση της ομογενούς μορφής της εξίσωσης είναι:

$$y_h = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

r_1, r_2

$D \geq 0$

όπου έχουμε δύο νέες σταθερές $C_1 = c_1 A_1$ και $C_2 = c_2 A_2$.

Απόδειξη για την περίπτωση της διπλής ρίζας

$\Delta = 0$

Αν $r_1 = r_2 = r$, οι δύο διακεκριμένες ρίζες της ομογενούς εξίσωσης δίνονται από:

$$y_1 = A_1 e^{rt} \text{ και } y_2 = tA_2 e^{rt}$$

Οι λύσεις αυτές είναι διακεκριμένες επειδή είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Επίσης είναι δυνατόν να επαληθεύσουμε ότι η δεύτερη λύση ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση. Στη συνέχεια παραγωγίζουμε την y_2 για να πάρουμε:

$$\dot{y}_2 = A_2 e^{rt} + rtA_2 e^{rt}$$

Παραγωγίζοντας πάλι παίρνουμε:

$$\ddot{y}_2 = rA_2 e^{rt} + rA_2 e^{rt} + r^2 tA_2 e^{rt}$$

Απόδειξη για την περίπτωση της διπλής ρίζας

$\Delta = 0$

$r^2 + \alpha_1 r + \alpha_2 = 0$

$r = -\frac{\alpha_1}{2}$

Το αριστερό μέλος της ομογενούς εξίσωσης παίρνει τη μορφή:

$$\ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_2 y = 2rA_2 e^{rt} + r^2 t A_2 e^{rt} + \alpha_1 (A_2 e^{rt} + rtA_2 e^{rt}) + \alpha_2 (tA_2 e^{rt})$$
$$= A_2 e^{rt} \left(t(r^2 + \alpha_1 r + \alpha_2) + 2r + \alpha_1 \right)$$

Όμως $r = -\alpha_1/2$ συνεπώς η παραπάνω έκφραση ισούται με:

$$A_2 e^{rt} (t(\alpha_1^2/4 - \alpha_1^2/2 + \alpha_2) \cancel{- \alpha_1} \cancel{+ \alpha_1}))$$
$$= A_2 e^{rt} \left(\frac{t}{4} \underbrace{(4\alpha_2 - \alpha_1^2)}_{-\Delta = 0} \right) = 0$$

Επειδή η διακρίνουσα είναι ίση με μηδέν, αυτή η έκφραση είναι ίση με μηδέν.

Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης

Αν $r_1 = r_2 = r$ οι δύο διακεκριμένες ρίζες της ομογενούς εξίσωσης δίνονται από:

$$y_1 = A_1 e^{rt} \text{ και } y_2 = tA_2 e^{rt}$$

Θεώρημα: Η λύση της ομογενούς μορφής της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές, εφόσον οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης r_1, r_2 είναι πραγματικοί αριθμοί είναι:

$$\begin{cases} y_h(t) = C_1 \overset{y_1}{e^{r_1 t}} + C_2 \overset{y_2}{e^{r_2 t}} \text{ αν } r_1 \neq r_2 & \Delta > 0 \\ y_h(t) = C_1 \underset{y_1}{e^{rt}} + C_2 \underset{y_2}{te^{rt}} \text{ αν } r_1 = r_2 = r & \Delta = 0 \end{cases}$$

Παράδειγμα

Να λυθεί η ακόλουθη ομογενής διαφορική εξίσωση:

$$4\ddot{y} - 8\dot{y} + 3y = \overset{b}{0} \Rightarrow \ddot{y} - 2\dot{y} + \frac{3}{4}y = 0$$

Αφού διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με 4, η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$r^2 - 2r + \frac{3}{4} = 0$$

$\Delta = 4 - 3 = 1 > 0$ και οι ρίζες είναι $r_1 = 1/2$ και $r_2 = 3/2$. Με βάση το προηγούμενο θεώρημα η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$y_h(t) = C_1 e^{t/2} + C_2 e^{3t/2}$$

Παράδειγμα 2

Να λυθεί η ακόλουθη ομογενής διαφορική εξίσωση:

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 0$$

$\Delta = 0$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 - 4r + 4 = 0$ με διπλή ρίζα $r_1 = r_2 = 2$. Συνεπώς σύμφωνα με το θεώρημα:

$$y_h(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}$$

Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης

h+vi

Δ<0 h−vi

Θεώρημα: Αν οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι μιγαδικοί αριθμοί $z_{1,2} = h \pm vi$, η λύση της ομογενούς μορφής της διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές μπορεί να εκφραστεί ως:

$$y_h = A_1 e^{ht} \cos(vt) + A_2 e^{ht} \sin(vt)$$

Μιγαδικές ρίζες

Αν $\Delta = \alpha_1^2 - 4\alpha_2 < 0$ τότε οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι μιγαδικοί αριθμοί. Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε τη λύση ως:

Im

Re

$$r_{1,2} = \frac{-\alpha_1 \pm i\sqrt{4\alpha_2 - \alpha_1^2}}{2}$$

Συνεπώς $r_{1,2} = h \pm vi$ όπου $h = -\frac{\alpha_1}{2}$ και $v = \pm\frac{\sqrt{4\alpha_2 - \alpha_1^2}}{2}$.

$y_h = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$

Τώρα μπορούμε να διατυπώσουμε τη λύση ως εξής:

$y_h = C_1 e^{(h+vi)t} + C_2 e^{(h-vi)t} = \boxed{e^{ht}(C_1 e^{vit} + C_2 e^{-vit})}$

$\to C_1 e^{ht} e^{vit} + C_2 e^{ht} e^{-vit}$

Από τον τύπο του Euler έχουμε:

$$e^{i(vt)} = \cos(vt) + i\sin(vt)$$

και

$$e^{-i(vt)} = e^{i(-vt)} = \cos(-vt) + i\sin(-vt) = \cos(vt) - i\sin(vt)$$

Μιγαδικές ρίζες

$C_1 = a + bi$

$C_2 = a - bi$

$C_1 + C_2 = a + bi + a - bi = 2a + 0i$

$C_1 - C_2 = (a+bi) - (a-bi) = a + bi - a + bi = 2bi$

Συνεπώς

$$y_h = e^{ht}(C_1(\cos(vt) + i\sin(vt)) + C_2(\cos(vt) - i\sin(vt)))$$

ή

$$y_h = \underbrace{e^{ht}(\overbrace{C_1 + C_2}^{A_1})\cos(vt)}_{Re} + \underbrace{i e^{ht}(\overbrace{C_1 - C_2}^{A_2})\sin(vt)}_{Im}$$

Αφού $(C_1 + C_2)$ και $(C_1 - C_2)i$ είναι σταθερές, μπορούμε να τις μετονομάσουμε σε A_1 και A_2

$C_1, C_2 \in \mathbb{C}$

$$\boxed{A_1 = C_1 + C_2} \in \mathbb{R}$$

και

$$A_2 = \overset{\in \mathbb{R}}{(C_1 - C_2)i}$$

Οι A_1 και A_2 είναι πραγματικοί αριθμοί. Ο λόγος είναι ότι οι C_1 και C_2 είναι συζυγείς μιγαδικοί, όπως οι ρίζες. Όμως το άθροισμα συζυγών μιγαδικών είναι πάντα πραγματικός αριθμός. Το γινόμενο του i και της διαφοράς συζυγών μιγαδικών είναι πάλι πραγματικός αριθμός. Συνεπώς παίρνουμε μία πραγματική λύση της διαφορικής εξίσωσης ακόμη κι όταν οι ρίζες είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Μιγαδικές ρίζες

Θεώρημα: Αν οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι μιγαδικοί αριθμοί, η λύση της ομογενούς μορφής της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές μπορεί να εκφραστεί ως:

$$y_h = A_1 e^{ht} \cos(vt) + A_2 e^{ht} \sin(vt)$$

όπου $h = -\frac{\alpha_1}{2}$ και $v = \frac{\sqrt{4\alpha_2 - \alpha_1^2}}{2}$

Παράδειγμα

Να λυθεί η ακόλουθη ομογενής διαφορική εξίσωση:

$$\ddot{y} + \overset{a_1}{2}\dot{y} + \overset{a_2}{5}y = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$r^2 + 2r + 5 = 0$$

$\Delta = -16$, $r_{1,2} = \frac{-2\pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$
Συνεπώς, με βάση το θεώρημα έχουμε:

$$y_h(t) = A_1 e^{-t}\cos(2t) + A_2 e^{-t}\sin(2t)$$

Η πλήρης λύση

$\cancel{\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2\bar{y} = b}$

$\ddot{y} + a_1\dot{y} = b$

$r^2 + a_1 r = 0$

$r(r + a_1) = 0$

$r = 0$ ή $r = -a_1$

Η μερική λύση βρίσκεται θέτοντας $\ddot{y} = \dot{y} = 0$. Αυτό μας δίνει για $\alpha_2 \neq 0$: $y_p = \bar{y} = \frac{b}{\alpha_2}$.

Η **πλήρης λύση** μίας διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης είναι το άθροισμα της ομογενούς λύσης και της μερικής λύσης

$$y = y_h + y_p$$

Θεώρημα: Η πλήρης λύση της γραμμικής αυτόνομης διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης (με σταθερούς συντελεστές και έναν σταθερό όρο) είναι

$$\begin{cases} y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \frac{b}{\alpha_2}, \text{ αν } r_1 \neq r_2 \\ y(t) = C_1 e^{rt} + tC_2 e^{rt} + \frac{b}{\alpha_2}, \text{ αν } r_1 = r_2 = r \\ y(t) = e^{ht}(A_1 \cos(vt) + A_2 \sin(vt)) + \frac{b}{\alpha_2} \text{ αν οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι μιγαδικοί αριθμοί.} \end{cases}$$

Παράδειγμα

Να λυθεί η ακόλουθη γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 10$$

Η μερική λύση είναι η $y_p = 2$. Συνεπώς με βάση τη λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης που βρήκαμε προηγουμένως, η γενική λύση είναι:

$$y(t) = A_1 e^{-t}\cos(2t) + A_2 e^{-t}\sin(2t) + 2$$

Η ισορροπία και η σύγκλιση

Θεώρημα: Η λύση μίας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές και σταθερό όρο συγκλίνει προς την σταθερή κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας αν και μόνο αν τα πραγματικά μέρη των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσής της είναι αρνητικά.

Η ισορροπία και η σύγκλιση

Δ>0

Περίπτωση 1: *Οι ρίζες είναι πραγματικές και άνισες.* Η πλήρης λύση σε αυτήν την περίπτωση είναι

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \frac{b}{\alpha_2}$$

Συνεπώς:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = C_1 \lim_{t\to\infty} \overset{\infty}{(e^{r_1 t})} + C_2 \lim_{t\to\infty} \overset{0}{(e^{r_2 t})} + \boxed{\frac{b}{\alpha_2}}$$

$r_1, r_2 > 0$

$r_1, r_2 < 0$

$r_1 > 0,\ r_2 < 0$

Αν και οι δύο ρίζες είναι αρνητικές οι δύο εκθετικοί όροι συγκλίνουν στο 0 ως όριο και συνεπώς η $y(t)$ συγκλίνει στο $\frac{b}{\alpha_2}$. Αν και οι δύο ρίζες είναι θετικές, τότε οι δύο όροι που εμπεριέχουν το t αποκλίνουν στο άπειρο, έτσι ώστε η $y(t)$ αποκλίνει προς το $+\infty$ ή στο $-\infty$.

Αν η μία ρίζα είναι θετική και η άλλη αρνητική, ο όρος με την αρνητική ρίζα συγκλίνει προς το μηδέν, αλλά ο άλλος όρος αποκλίνει προς το άπειρο εκτός από την περίπτωση που η αντίστοιχη σταθερά είναι μηδέν. Ως αποτέλεσμα η $y(t)$ αποκλίνει, εκτός από αυτήν την ειδική περίπτωση.

Η ισορροπία και η σύγκλιση

$\Delta = 0$

Περίπτωση 2: *Οι ρίζες είναι πραγματικές και ίσες.* Η πλήρης λύση σε αυτήν την περίπτωση είναι:

$$\rightarrow \quad y(t) = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt} + \frac{b}{\alpha_2}$$

$\lim_{t\to\infty} t \cdot e^{rt}$

$\infty \cdot \infty \quad r>0$

$\infty \cdot 0 \quad r<0$

Παίρνοντας τα όρια και στα δύο μέλη έχουμε:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{b}{\alpha_2} + C_1 \underbrace{\lim_{t\to\infty}(e^{rt})}_{0} + C_2 \underbrace{\lim_{t\to\infty}(te^{rt})}_{0}$$

$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{-rt}} = \lim \frac{1}{-re^{-rt}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{-r} e^{rt} = 0$

Αν η διπλή ρίζα r είναι θετική, τότε η $y(t)$ θα αποκλίνει προς το θετικό ή το αρνητικό άπειρο. Αν η ρίζα είναι αρνητική, τότε η $y(t)$ θα συγκλίνει προς το $\frac{b}{\alpha_2}$. Τότε ο όρος te^{rt} παίρνει τη μορφή $(\infty \cdot 0)$. Μπορούμε να τον φέρουμε στη μορφή (∞/∞) γράφοντας τον ως t/e^{-rt}. Στη συνέχεια, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα L' Hospital και παραγωγίζοντας αριθμητή και παρανομαστή παίρνουμε $(-1/r)e^{rt}$, το όριο της οποίας είναι μηδέν για $r < 0$.

Η ισορροπία και η σύγκλιση

$\Delta < 0$

$-1 \le \cos(vt) \le 1$

$-A_1 \le A_1 \cos(vt) \le A_1$

$-A_2 \le A_2 \sin(vt) \le A_2$

$-(A_1+A_2)e^{ht} \le \ldots \le (A_1+A_2)e^{ht}$

Περίπτωση 3: *Μιγαδικές ρίζες.* Η πλήρης λύση σε αυτήν την περίπτωση είναι

$h<0$

$$y(t) = e^{ht}(A_1 \cos(vt) + A_2 \sin(vt)) + \frac{b}{\alpha_2}$$

$\lim_{t\to\infty}$ $h<0$

Ο όρος εντός των παρενθέσεων είναι μία ταλαντούμενη συνάρτηση που είναι φραγμένη καθώς $t \to \infty$. Ο όρος αυτός πολλαπλασιάζεται επί e^{ht} και θα αυξάνεται απεριόριστα αν $h > 0$.

Αν $h < 0$, τότε η e^{ht} συγκλίνει προς το μηδέν.

Συνεπώς η $y(t)$ αποκλίνει με αυξανόμενες ταλαντώσεις αν $h > 0$, ενώ συγκλίνει προς $\frac{b}{\alpha_2}$ με διαρκώς συρρικνούμενες ταλαντώσεις αν $h < 0$. Το h είναι όμως το πραγματικό μέρος της μιγαδικής ρίζας ($h = -a_1/2$) και συμπεραίνουμε ότι η $y(t)$ συγκλίνει προς το $\frac{b}{\alpha_2}$ αν το πραγματικό μέρος των μιγαδικών ριζών είναι αρνητικό.

Παράδειγμα

> Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η διαφορική εξίσωση:
>
> $$\ddot{y} + 3\dot{y} + \underline{4}y = \underline{10}$$

Έχουμε $\Delta = -7$, 10 άρα $r_{1,2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2}$.
Το πραγματικό μέρος των ριζών είναι αρνητικό $(-3/2)$ συνεπώς η λύσεις συγκλίνουν στο σταθερό σημείο $\bar{y} = 5/2$. $= \frac{10}{4}$

Η γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξης με ένα μεταβλητό όρο

$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b(t)$

Περίπτωση 1: Αν ο όρος $b(t)$ είναι ένα πολυώνυμο n-οστού βαθμού ως προς t, έστω το $p_n(t)$ τότε υποθέτουμε ότι η μερική λύση είναι και αυτή ένα πολυώνυμο. Δηλαδή υποθέτουμε ότι:

$$y_p = A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \cdots + A_1 t + A_0$$

όπου A_i είναι οι σταθερές, οι τιμές των οποίων καθορίζονται με αντικατάσταση της εικαζόμενης μερικής λύσης στη διαφορική εξίσωση και στη συνέχεια εξισώνοντας τους συντελεστές των όμοιων όρων.

Περίπτωση 2: Αν ο όρος $b(t)$ είναι της μορφής $e^{\alpha t} p_n(t)$, όπου $p_n(t)$ είναι ένα πολυώνυμο ως προς t και αν α είναι μία γνωστή σταθερά, τότε υποθέτουμε ότι η μερική λύση δίνεται από την:

$$y_p = e^{\alpha t}(A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \cdots + A_1 t + A_0)$$

$\sin(3t)$, $k=0$, $m=3$ $\quad n_1=0$, $n_2=0$ $\quad p_1(t)=0$, $p_2(t)=1$ $\quad b(t)=$

Περίπτωση 3: Αν ο όρος $b(t)$ είναι της μορφής $e^{kt}(p_1(t)\cos(mt) + p_2(t)\sin(mt))$, όπου $p_1(t)$, $p_2(t)$ είναι πολυώνυμα βαθμού n_1 και n_2 αντίστοιχα, τότε αναζητούμε μερική λύση της μορφής:

$$n = \max\{n_1, n_2\}$$

$$y_p = e^{kt}(Q_n(t)\cos(mt) + R_n(t)\sin(mt))$$

όπου $Q_n(t)$ και $R_n(t)$ είναι πολυώνυμα βαθμού n, όπου n ο μέγιστος των n_1 και n_2.

Σε κάθε περίπτωση, αν ένας οποιοσδήποτε όρος της εικαζόμενης λύσης είναι και όρος της y_h, τότε η υποτιθέμενη λύση πρέπει να τροποποιηθεί ως εξής: Πολλαπλασιάζουμε την υποτιθέμενη λύση επί t^k, όπου k είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος ώστε οι κοινοί όροι να εξαλείφονται.

Παράδειγμα 1

Να λυθεί η εξίσωση $\ddot{y} + 3\dot{y} - 4y = t^2$ b(t)

Πρώτα επιλύουμε την ομογενή εξίσωση

$$\ddot{y} + 3\dot{y} - 4y = 0$$

$r^2+3r-4=0$

$\Delta = 25$, >0 $r_{1,2} = \frac{-3\pm 5}{2}$ με ρίζες 1 και -4. Άρα

$e^{rt} = 1$

$$y_h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-4t}$$

$r=0$

Για να βρούμε μία μερική λύση, παρατηρούμε ότι ο όρος $b(t)$ είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς t. Επομένως, υποθέτουμε ότι

$$y_p = A_2 t^2 + A_1 t + A_0 t$$

$\dot{y}_p = A_2 2t + A_1$

$\ddot{y}_p = 2A_2$

Παράδειγμα 1

$$\dot{y}_p = 2A_2 t + A_1$$

$$\ddot{y}_p = 2A_2$$

Αντικαθιστούμε τη μερική λύση στη διαφορική εξίσωση και έχουμε:

$$\underline{2A_2 + 3(2A_2 t + A_1) - 4(A_2 t^2 + A_1 t + A_0)} = t^2$$

Ισοδύναμα:

$$-(4A_2 + 1)\underline{t^2} + (6A_2 - 4A_1)\underline{t} + (2A_2 + 3A_1 - 4A_0)t^{0} = 0$$

Συνεπώς: $A_2 = -\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{2} - 4A_1 = 0 \Leftrightarrow A_1 = -\frac{3}{8}$,
$2A_2 + 3A_1 - 4A_0 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} - \frac{9}{8} - 4A_0 = 0 \Leftrightarrow A_0 = -\frac{13}{32}$ Συνεπώς η γενική λύση είναι:

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-4t} - \frac{1}{\underline{4}} t^2 - \frac{3}{\underline{8}} t - \frac{13}{\underline{32}}$$

Παράδειγμα 2

$b(t)$

Να λυθεί η εξίσωση: $\ddot{y} + 3\dot{y} - 4y = 5e^t$.

Η ομογενής λύση είναι η ίδια όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Η μεριγή λύση βρίσκεται υποθέτοντας ότι

$\alpha = 1$

$$y_p = A_0 e^t = p_n e^{\alpha t}$$

Όμως αυτή έχει την ίδια μορφή με έναν από τους όρους της λύσης της ομογενούς εξίσωσης. Συνεπώς, πολλαπλασιάζουμε με t και έχουμε $\boxed{y_p = tA_0e^t}$. Συνεπώς $\dot{y}_p = A_0e^t + tA_0e^t$ και $\ddot{y}_p = 2A_0e^t + tA_0e^t$. Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$2A_0e^t + tA_0e^t + 3A_0e^t + 3tA_0e^t - 4tA_0e^t = 5e^t \Leftrightarrow 5A_0e^t = 5e^t$$

Συνεπώς $A_0 = 1$ και η λύση είναι:

$$y(t) = \overbrace{te^t}^{y_p} + \overbrace{C_1e^t + C_2e^{-4t}}^{y_h}$$

Παράδειγμα 3

Να λυθεί η εξίσωση: $\ddot{y} - 4\dot{y} + 5y = \overset{b(t)}{\sin(3t)}$.

Η ομογενής εξίσωση είναι η $\ddot{y} - 4\dot{y} + 5y = 0$, έχοντας χαρακτηριστικό πολυώνυμο $r^2 - 4r + 5 = 0$ με ρίζες $r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i$.

$r^2 - 4r + 5 = 0$

Η λύση της ομογενούς είναι $y_h = e^{2t}(C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t))$. ←

Το δεύτερο μέλος της διαφορικής ($\sin(3t)$) είναι της μορφής της Περίπτωσης 3 με $k = 0$, $m = 3$ και $n = 0$. Επομένως, η μερική λύση θα είναι της μορφής (τα πολυώνυμα $Q_n(t)$, $R_n(x)$ μηδενικού βαθμού θα είναι σταθερές):

$$y_p = \overset{Q}{a} \sin(3t) + \overset{R}{b} \cos(3t)$$

Παράδειγμα 3

Υπολογίζουμε τις παραγώγους:

$$\dot{y}_p = (a\sin(3t) + b\cos(3t))' = 3a\cos(3t) - 3b\sin(3t)$$

$$\ddot{y}_p = (3a\cos(3t) - 3b\sin(3t))' = -9a\sin(3t) - 9b\cos(3t)$$

Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση:
$-9a\sin(3t) - 9b\cos(3t) - 4(3a\cos(3t) - 3b\sin(3t)) + 5(a\sin(3t) + b\cos(3t)) = \sin(3t) \Rightarrow (-4a + 12b)\sin(3t) + (-12a - 4b)\cos(3t) = \sin(3t) \Rightarrow$

$$-4a + 12b = 1 \text{ και } -12a - 4b = 0$$

Επιλύοντας το γραμμικό σύστημα προκύπτει ότι $a = -\frac{1}{40}$ και $b = \frac{3}{40}$. Έτσι, η μερική λύση είναι:

$$y_p = -\frac{1}{40}\sin(3t) + \frac{3}{40}\cos(3t)$$

και η γενική λύση:

$$y = e^{2t}(C_1\cos(t) + C_2\sin(t)) - \frac{1}{40}\sin(3t) + \frac{3}{40}\cos(3t)$$

Μαθηματική Ανάλυση
Διάλεξη 12

Κωνσταντίνος Γιαννουτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Σπύρος Χαλκίδης
Ε.ΔΙ.Π.

Ιανουάριος 2023

Θέματα 12ης διάλεξης

- Συστήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης
- Ομογενής λύση
- Πλήρης λύση
- Άμεση μέθοδος
- Ευστάθεια και διαγράμματα φάσης

Συστήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

$\dot{y} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}$

Ορισμός: Ένα σύστημα δύο αυτόνομων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης ορίζεται ως:

$y_1(t)$ $y_2(t)$

$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + b_1 \\ \dot{y}_2 = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + b_2 \end{cases}, a_{ij}, b_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \dot{y} = Ay + b$$

Διαχωρίζουμε το πρόβλημα της εύρεσης των **πλήρων λύσεων** σε δύο μέρη. Πρώτα βρίσκουμε τις **ομογενείς λύσεις** και ύστερα τις **μερικές λύσεις**. Οι πλήρεις λύσεις είναι το άθροισμα των ομογενών και των μερικών λύσεων. Δηλαδή:

$$\begin{cases} y_1 = y_1^h + y_1^p \\ y_2 = y_2^h + y_2^p \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \cdot \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

όπου y_i είναι η πλήρης λύση, y_i^h είναι η γενική ομογενής λύση της y_i και y_i^p είναι η μερική λύση της y_i.

Η γενική λύση στις ομογενείς μορφές

Ορισμός: Η *ομογενής μορφή του συστήματος δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης είναι*:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 \color{red}{+0} \\ \dot{y}_2 = \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 \color{red}{+0} \end{cases}$$

Είναι δυνατό να μετασχηματίσουμε αυτό το σύστημα των δύο διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης σε μία μόνο διαφορική εξίσωση *δεύτερης τάξης* χρησιμοποιώντας συνδυασμό παραγωγίσεων και αντικαταστάσεων.

Η γενική λύση στις ομογενείς μορφές

Παραγωγίζουμε την πρώτη εξίσωση και έχουμε:

$$\ddot{y}_1 = \alpha_{11}\dot{y}_1 + \alpha_{12}\dot{y}_2$$

Χρησιμοποιούμε τη δεύτερη εξίσωση για να αντικαταστήσουμε την $\dot{y}_2$. Αυτό μας δίνει:

$$\ddot{y}_1 = \alpha_{11}\dot{y}_1 + \alpha_{12}(\alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2)$$

Επιλύουμε την πρώτη εξίσωση ως προς y_2:

$$y_2 = \tfrac{\dot{y}_1 - \alpha_{11}y_1}{\alpha_{12}}$$

υποθέτοντας ότι $\alpha_{12} \neq 0$. Αντικαθιστώντας αυτήν την έκφραση του y_2 έχουμε:

$$\ddot{y}_1 = \alpha_{11}\dot{y}_1 + \alpha_{12}\left(\alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}\frac{\dot{y}_1 - \alpha_{11}y_1}{\alpha_{12}}\right)$$

Η γενική λύση στις ομογενείς μορφές

Με απλοποιήσεις και αναδιάταξη των όρων παίρνουμε:

$$\ddot{y}_1 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\dot{y}_1 + (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})y_1 = 0$$

Η οποία είναι γραμμική ομογενής διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Βρίσκουμε τις λύσεις για το y_1 και οι λύσεις για το y_2 προκύπτουν από την $y_2 = \frac{\dot{y}_1 - \alpha_{11} y_1}{\alpha_{12}}$.

Παράδειγμα

Να λυθεί το ακόλουθο σύστημα ομογενών διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 - 3y_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{1}{4}y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

$y_1(t)$
$y_2(t)$

$y_2 = \frac{y_1 - \dot{y}_1}{3}$

Παραγωγίζουμε την πρώτη εξίσωση και έχουμε:

$$\ddot{y}_1 = \dot{y}_1 - 3\dot{y}_2$$

Χρησιμοποιούμε τη δεύτερη εξίσωση για να αντικαταστήσουμε το $\dot{y}_2$. Αυτό μας δίνει:

$$\ddot{y}_1 = \dot{y}_1 - 3\left(\frac{1}{4}y_1 + 3y_2\right)$$

Χρησιμοποιούμε την πρώτη εξίσωση για να πάρουμε μία έκφραση για το y_2:

$$y_2 = \frac{y_1 - \dot{y}_1}{3}$$

Παράδειγμα

Συνεπώς:

$$\ddot{y}_1 = \dot{y}_1 - 3\left(\frac{1}{4}y_1 + 3\frac{y_1 - \dot{y}_1}{3}\right)$$

Ισοδύναμα:

$$\ddot{y}_1 - 4\dot{y}_1 + \frac{15}{4}y_1 = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$r^2 - 4r + \frac{15}{4} = 0$$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 1$ και οι ρίζες $r_{1,2} = \frac{4 \pm 1}{2}$, δηλαδή $r_1 = 3/2$, $r_2 = 5/2$.
Επομένως, η λύση για την y_1 είναι:

$$y_1(t) = C_1 e^{3t/2} + C_2 e^{5t/2}$$

Παράδειγμα

Για να βρούμε την y_2 με βάση την $y_2 = \frac{y_1 - \dot{y}_1}{3}$, υπολογίζουμε την $\dot{y}_1$:

$$\underline{\dot{y}_1(t)} = \frac{3}{2} C_1 e^{3t/2} + \frac{5}{2} C_2 e^{5t/2}$$

Με βάση την $y_2 = \frac{y_1 - \dot{y}_1}{3}$ έχουμε:

$$y_2(t) = \frac{1}{3}\left(C_1(1 - 3/2)e^{3t/2} + C_2(1 - 5/2)e^{5t/2}\right)$$

$$= \underline{-\frac{1}{6} C_1 e^{3t/2} - \frac{1}{2} C_2 e^{5t/2}}$$

Η λύση της σταθερής κατάστασης ισορροπίας

Ορισμός: Η **λύση σταθερής κατάστασης ισορροπίας** ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων είναι το ζεύγος τιμών $\bar{y}_1$ και $\bar{y}_2$ όπου οι $\dot{y}_1$ και $\dot{y}_2$ είναι ίσες με μηδέν.

Οι πλήρεις λύσεις - Παράδειγμα

Να βρεθεί η πλήρης λύση στο ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 - 3y_2 - 5 \\ \dot{y}_2 = \frac{1}{4}y_1 + 3y_2 - 5 \end{cases}$$

Πρώτα διατυπώνουμε το σύστημα στην ομογενή μορφή του:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 - 3y_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{1}{4}y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

Βρήκαμε προηγουμένως ότι:

$$y_1^h(t) = C_1 e^{3t/2} + C_2 e^{5t/2}$$

$$y_2^h(t) = -\frac{1}{6} C_1 e^{3t/2} - \frac{1}{2} C_2 e^{5t/2}$$

Οι πλήρεις λύσεις - Παράδειγμα

Για να βρούμε τις λύσεις ισορροπίας θέτουμε $\dot{y}_1 = 0$ και $\dot{y}_2 = 0$. Συνεπώς έχουμε:

$$\begin{cases} \bar{y}_1 - 3\bar{y}_2 - 5 = 0 \\ \frac{1}{4}\bar{y}_1 + 3\bar{y}_2 - 5 = 0 \end{cases}$$

Άρα $\bar{y}_1 = 3\bar{y}_2 + 5$ και συνεπώς:

$$\frac{1}{4}(3\bar{y}_2 + 5) + 3\bar{y}_2 - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{15}{4}\bar{y}_2 = \frac{15}{4} \Leftrightarrow$$

$$\bar{y}_2 = 1$$

και $\bar{y}_1 = 8$.

Οι πλήρεις λύσεις - Παράδειγμα

Έτσι, οι πλήρεις λύσεις είναι:

$t=0$

$$1 = y_1(0) = y_1(t) = \overbrace{C_1 e^{3t/2} + C_2 e^{5t/2}}^{y_1^h} + \overset{y_1^p}{\underline{8}} = C_1 + C_2 + 8$$

$$3 = y_2(0) = y_2(t) = \underbrace{-\frac{1}{6} C_1 e^{3t/2} - \frac{1}{2} C_2 e^{5t/2}}_{y_2^h} + \overset{y_2^p}{\underline{1}} = -\frac{1}{6} C_1 - \frac{1}{2} C_2$$

Οι πλήρεις λύσεις - Παράδειγμα

Να βρεθούν οι σταθερές ολοκλήρωσης στο προηγούμενο παράδειγμα ώστε οι λύσεις να ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες $y_1(0) = 1$ και $y_2(0) = 3$.

$t=0$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$1 = C_1 + C_2 + 8$$

$$3 = -\frac{1}{6}C_1 - \frac{1}{2}C_2 + 1$$

Έχουμε $C_1 = 1 - C_2 - 8$ και αντικαθιστώντας:

$$3 = -\frac{1}{6}(1 - C_2 - 8) - \frac{1}{2}C_2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$3 = \frac{1}{6}(C_2 + 7) - \frac{1}{2}C_2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{6} = -\frac{2}{6}C_2 \Leftrightarrow C_2 = -\frac{5}{2}$$

και $C_1 = -9/2$.

Οι πλήρεις λύσεις - Παράδειγμα

Συνεπώς οι πλήρεις λύσεις δίνονται από τις σχέσεις:

$$y_1(t) = -\frac{9}{2}e^{3t/2} - \frac{5}{2}e^{5t/2} + 8$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \frac{9}{12}e^{3t/2} + \frac{5}{4}e^{5t/2} + 1 \\ &= \frac{3}{4}e^{3t/2} + \frac{5}{4}e^{5t/2} + 1 \end{aligned}$$

Η άμεση μέθοδος

Ορισμός: Ένα **γραμμικό σύστημα** με n αυτόνομες διαφορικές εξισώσεις εκφράζεται με τη μορφή μήτρας ως εξής:

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$\dot{y} = 0$, $y = \bar{y}$

$0 = A\bar{y} + b \Rightarrow A\bar{y} = -b \Rightarrow \bar{y} = -A^{-1}b$

όπου A είναι μία μήτρα $n \times n$ σταθερών συντελεστών $\mathbf{b}$ είναι ένα διάνυσμα σταθερών όρων $\mathbf{y}$ είναι ένα διάνυσμα n μεταβλητών και $\dot{\mathbf{y}}$ είναι ένα διάνυσμα n παραγώγων.

Η λύση στο πλήρες σύστημα εξισώσεων προκύπτει αθροίζοντας τις *ομογενείς λύσεις* και τις *μερικές λύσεις*. Ξεκινούμε γράφοντας το πλήρες σύστημα στην ομογενή μορφή του:

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$$

Η άμεση μέθοδος

Συνεχίζουμε ‘εικάζοντας’ ότι οι ομογενείς λύσεις είναι της μορφής:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \mathbf{y} = \mathbf{k}e^{rt} \qquad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

όπου $\mathbf{k}$ είναι ένα διάνυσμα n διαστάσεων με σταθερές και r ένα βαθμωτό. Για να διαπιστώσουμε αν αυτή η υπόθεση που κάναμε είναι σωστή, ελέγχουμε αν η εικαζόμενη λύση και η πρώτη παράγωγός της ικανοποιούν το σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Η παράγωγος της λύσης που δοκιμάζουμε είναι:

$$\dot{\mathbf{y}} = r\mathbf{k}e^{rt}$$

Με αντικατάσταση των παραγώγων αυτών και των εικαζόμενων λύσεων στο αρχικό σύστημα εξισώσεων παίρνουμε:

$$r\mathbf{k}e^{rt} = A\mathbf{k}e^{rt} \Rightarrow r\mathbf{k} = A\mathbf{k} \Rightarrow A\mathbf{k} - r\mathbf{k} = 0 \Rightarrow$$

$$(A - rI)\mathbf{k} = 0$$

ισοδύναμα:

$$B\mathbf{k} = 0$$

$$(A - rI)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

όπου I είναι η μοναδιαία μήτρα και $\mathbf{0}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα.

Η άμεση μέθοδος

Το προηγούμενο σύστημα έχει μη μηδενική λύση, όταν και μόνο όταν η ορίζουσα της μήτρας $[A - rI]$ είναι ίση με το μηδέν. Επομένως οι τιμές των λύσεων για την r προκύπτουν λύνοντας την:

$$|A - rI| = 0$$

που είναι μία πολυωνυμική εξίσωση βαθμού n ως προς τον άγνωστο r. Αυτή είναι γνωστή ως **χαρακτηριστική εξίσωση** της μήτρας A και οι λύσεις της ονομάζονται χαρακτηριστικές ρίζες ή **ιδιοτιμές** της μήτρας A. Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{k}_1$ το οποίο είναι λύση της εξίσωσης $[A - rI]\mathbf{k} = \mathbf{0}$ για μία συγκεκριμένη ιδιοτιμή r_1 ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα** της μήτρας A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή r_1.

Παράδειγμα

$y \to \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ $\begin{cases} \dot{y}_1 = 4y_1 - y_2 \\ \dot{y}_2 = -4y_1 + 4y_2 \end{cases}$

Να λυθεί το ακόλουθο 2x2 σύστημα διαφορικών εξισώσεων με χρήση της άμεσης μεθόδου:

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$|A - \overset{\lambda}{r}I| = \begin{vmatrix} 4 - r & -1 \\ -4 & 4 - r \end{vmatrix} = 0$$

η οποία γίνεται: $(4 - r)^2 - 4 = 0 \iff 16 + r^2 - 8r - 4 = 0 \iff r^2 - 8r + 12 = 0$,
$\Delta = 64 - 48 = 16$, $r_{1,2} = \frac{8 \pm 4}{2}$ άρα $r_1 = 2$ και $r_2 = 6$.

Παράδειγμα

$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} =$

$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ 2k_1 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Για $r_1 = 2$ θέλουμε να υπολογίσουμε μη μηδενικές λύσεις για τα ιδιοδιανύσματα:

$(A - rI)\begin{pmatrix} k_1 \\ k \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix} 4-2 & -1 \\ -4 & 4-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} 2k_1 - k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = 2k_1 \\ -4k_1 + 2k_2 = 0 \Rightarrow k_1 = \end{cases}$$

Αυτό μας δίνει $2k_1 - k_2 = 0$. Θέτουμε $k_1 = 1$ που δίνει $k_2 = 2$. Επομένως, το πρώτο σύνολο λύσεων είναι:

$$\mathbf{y}^1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t}$$

Παράδειγμα

Για $r_2 = 6$ τα ιδιοδιανύσματα είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$(A-rI)k = (A-6I)k = \begin{bmatrix} 4-6 & -1 \\ -4 & 4-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

που δίνει $-2k_1 - k_2 = 0$. Με $k_1 = 1$ έχουμε $k_2 = -2$ Επομένως, το δεύτερο σύνολο λύσεων είναι:

$$\mathbf{y}^2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{6t}$$

Δεδομένου ότι οι δύο λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες, η γενική λύση είναι:

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{6t}$$

Θεώρημα

Θεώρημα: Αν ένα ομογενές γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων έχει ως ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης έναν μιγαδικό αριθμό r, τότε ρίζες του συστήματος αποτελούν το διάνυσμα του πραγματικού και το διάνυσμα του φανταστικού μέρους που προκύπτουν από τα ιδιοδιανύσματα-λύσεις της $[A - rI]\mathbf{k} = \mathbf{0}$.

Παράδειγμα 2

Να λυθεί το ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}, \text{ όπου } A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$|A - rI| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-r & -5 \\ 2 & -4-r \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -8 + 2r + r^2 + 10 = 0 \Leftrightarrow r^2 + 2r + 2 = 0$$

$\Delta = 4 - 8 = -4$, $r_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2}$. Συνεπώς $r_1 = -1 + i$ και $r_2 = -1 - i$.
Για $r_1 = -1 + i$ (στην περίπτωση των μιγαδικών ιδιοτιμών μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε από τις δύο) τα ιδιοδιανύσματα είναι η λύσεις της:

$$(A - r_1 I)k = \begin{bmatrix} 3-i & -5 \\ 2 & -3-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Παράδειγμα 2

Από την πρώτη γραμμή έχουμε $(3-i)k_1 - 5k_2 = 0$ ή $k_2 = (3-i)k_1/5$. Θέτοντας $k_1 = 5$ έχουμε $k_2 = 3 - i$. Επομένως η πρώτη λύση είναι:

$$\mathbf{y}^1(t) = \overset{k}{\begin{bmatrix} 5 \\ 3-i \end{bmatrix}} e^{(-1+i)t}$$

Άρα το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην $r_1 = -1 + i$ είναι:

$$k = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} + (-i)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Η μιγαδική λύση που προκύπτει είναι:

$$y(t) = e^{(-1+i)t} \cdot k = e^{-1t} e^{it} = e^{-t}(\cos(t) + i\sin(t)) \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -i \end{bmatrix} \right) =$$

$$e^{-t}(\cos(t) + i\sin(t)) \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

Παράδειγμα 2

Χωρίζουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος και έχουμε τις δύο βασικές λύσεις του συστήματος:

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-t}\cos(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}\sin(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 5\cos(t) \\ 3\cos(t)+\sin(t) \end{bmatrix}$$

$$y^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} cos(t) + \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-t}\sin(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 5\sin(t) \\ -\cos(t)+3\sin(t) \end{bmatrix}$$

Τελικά, η γενική λύση του συστήματος είναι:

$$y(t) = C_1 y^{(1)} + C_2 y^{(2)} =$$

$$e^{-t}\left(C_1 \begin{bmatrix} 5\cos(t) \\ 3\cos(t)+\sin(t) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 5\sin(t) \\ -\cos(t)+3\sin(t) \end{bmatrix} \right)$$

Οι μερικές λύσεις

Οι λύσεις σταθερής κατάστασης ισορροπίας μας δίνουν τις μερικές λύσεις. Θέτουμε $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$ στο πλήρες σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Αυτό μας δίνει:

$$A\bar{\mathbf{y}} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

για το οποίο η λύση είναι:

$$\bar{\mathbf{y}} = -A^{-1}\mathbf{b}$$

υπό τον όρο ότι η αντίστροφη μήτρα A^{-1} υπάρχει.

Παράδειγμα

Έστω το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{b}, \text{ όπου } A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \text{ και } b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Βρήκαμε προηγουμένως την ομογενή λύση του συστήματος:

$$y^h(t) = e^{-t}\left(C_1 \begin{bmatrix} 5\cos(t) \\ 3\cos(t) + \sin(t) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 5\sin(t) \\ -\cos(t) + 3\sin(t) \end{bmatrix}\right)$$

Η μερική λύση υπολογίζεται ως

$$y^p(t) = \bar{\mathbf{y}} = -A^{-1}\mathbf{b} = -\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -2 & 5/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Έτσι η πλήρης λύση είναι:

$$y(t) = y^h(t) + y^p(t) = e^{-t}\left(C_1 \begin{bmatrix} 5\cos(t) \\ 3\cos(t) + \sin(t) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 5\sin(t) \\ -\cos(t) + 3\sin(t) \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Ανάλυση ευστάθειας και γραμμικά διαγράμματα φάσης

Οι λύσεις σταθερής κατάστασης ισορροπίας για ένα αυτόνομο σύστημα διαφορικών εξισώσεων λέμε ότι είναι *ευσταθείς* αν το σύστημα *συγκλίνει* προς τις λύσεις αυτές.

Θεώρημα: Η λύση σταθερής κατάστασης ισορροπίας ενός συστήματος γραμμικών, αυτόνομων διαφορικών εξισώσεων είναι ασυμπτωτικά ευσταθής αν και μόνο αν οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι αρνητικές (στην περίπτωση μιγαδικών ριζών αν το πραγματικό μέρος είναι αρνητικό).

Ισορροπία σαγματικού σημείου

Θεώρημα: Αν μία από τις χαρακτηριστικές ρίζες είναι θετική και η άλλη είναι αρνητική, η κατάσταση ισορροπίας ονομάζεται **ισορροπία σαγματικού σημείου**. Είναι ασταθής. Όμως η $y_1(t)$ και η $y_2(t)$ συγκλίνουν προς τις λύσεις της σταθερής τους κατάστασης ισορροπίας αν οι αρχικές συνθήκες για την y_1 και την y_2 ικανοποιούν την παρακάτω εξίσωση:

$$y_2 = \frac{r_1 - \alpha_{11}}{\alpha_{12}}(y_1 - \bar{y}_1) + \bar{y}_2$$

όπου r_1 είναι η αρνητική ρίζα. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (y_1, y_2) που ορίζεται από αύτην την εξίσωση είναι γνωστός ως **σαγματική διαδρομή**.

Διάγραμμα φάσης για δύο αρνητικές ρίζες (Ευσταθής κόμβος)

$$\begin{cases} 0 = -2\bar{y}_1 + 2 \Rightarrow \bar{y}_1 = 1 \\ 0 = -3\bar{y}_2 + 6 \Rightarrow \bar{y}_2 = 2 \end{cases}$$

Έστω οι διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -2y_1 + 0 \cdot y_2 + 2 \\ \dot{y}_2 = 0 \cdot y_1 - 3y_2 + 6 \end{cases}$$

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

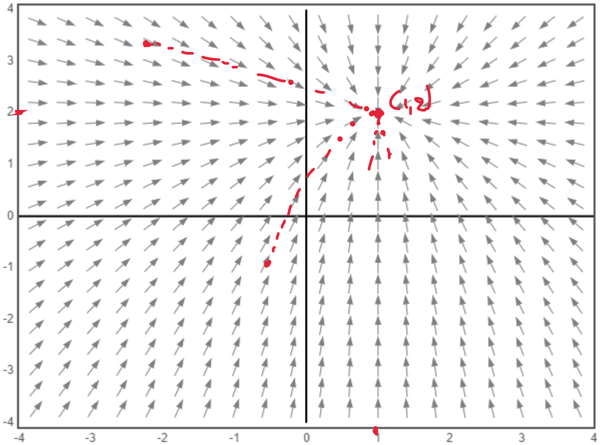
Οι διαφορικές εξισώσεις είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη και οι λύσεις είναι

$$y_1(t) = C_1 e^{-2t} + \underline{1}$$

$$y_2(t) = C_2 e^{-3t} + \underline{2}$$

Διάγραμμα φάσης για δύο αρνητικές ρίζες (Ευσταθής κόμβος)

Το διάγραμμα φάσης είναι:



$Y_1(0)$

$Y_2(0)$

Σχήμα: Διάγραμμα φάσης για ευσταθή κόμβο

Διάγραμμα φάσης για δύο θετικές ρίζες (Ασταθής κόμβος)

Έστω οι διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_1 - 2 \\ \dot{y}_2 = 3y_2 - 6 \end{cases}$$

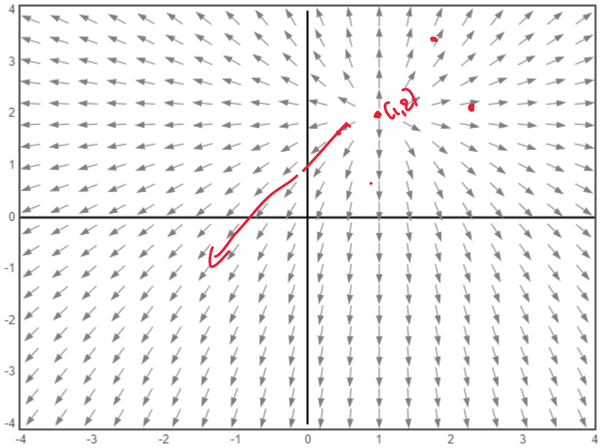
Οι διαφορικές εξισώσεις είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη και οι λύσεις είναι

$$y_1(t) = C_1 e^{2t} + 1$$

$$y_2(t) = C_2 e^{3t} + 2$$

Διάγραμμα φάσης για δύο θετικές ρίζες (Ασταθής κόμβος)

Το διάγραμμα φάσης είναι:



Σχήμα: Διάγραμμα φάσης για ασταθή κόμβο

Διάγραμμα φάσης για ρίζες με αντίθετα πρόσημα (Σαγματικό σημείο)

Έστω οι διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 - 2 \\ \dot{y}_2 = \frac{y_1}{4} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow 0 = \bar{y}_2 - 2 \Rightarrow \bar{y}_2 = 2$

$\Rightarrow 0 = \frac{\bar{y}_1}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow \bar{y}_1 = 2$

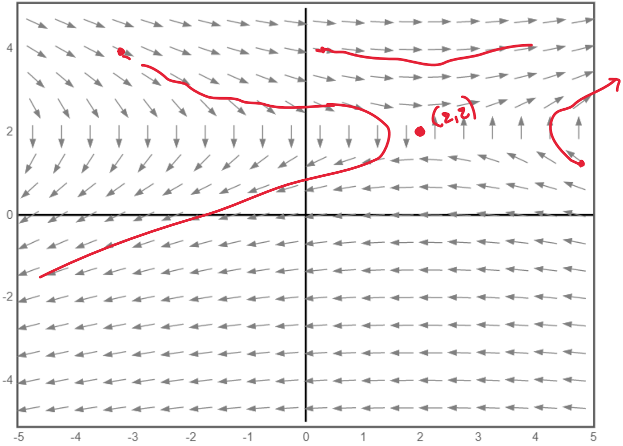
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} 0 - r & 1 \\ 1/4 & 0 - r \end{vmatrix}$$

με ρίζες $r_1 = -1/2$ και $r_2 = 1/2$. Δεδομένου ότι οι ρίζες έχουν αντίθετο πρόσημο, η λύση σταθερής κατάστασης είναι μία ισορροπία σαγματικού σημείου.

Διάγραμμα φάσης για ρίζες με αντίθετα πρόσημα (Σαγματικό σημείο)

Το διάγραμμα φάσης είναι:



Σχήμα: Διάγραμμα φάσης για σαγματικό σημείο

Διάγραμμα φάσης για μιγαδικές ρίζες με αρνητικό πραγματικό μέρος (ευσταθής εστία)

Έστω οι διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_2 + 2 \\ \dot{y}_2 = y_1 - y_2 + 1 \end{cases}$$

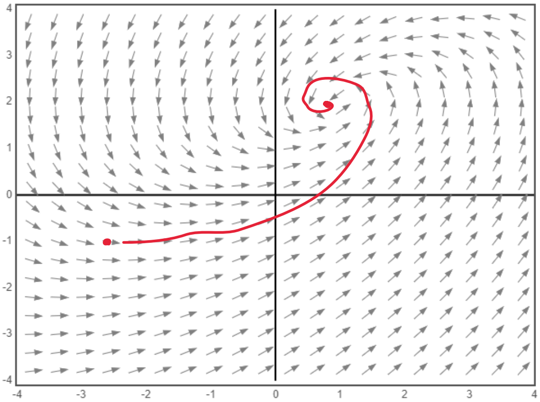
Τότε:

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} -r & -1 \\ 1 & -1 - r \end{vmatrix} = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 + r + 1 = 0$, $\Delta = 1 - 4 = -3$. Οι ρίζες είναι $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.
Οι λύσεις σταθερής κατάστασης είναι $\bar{y}_1 = 1$ και $\bar{y}_2 = 2$.

Διάγραμμα φάσης για μιγαδικές ρίζες με αρνητικό πραγματικό μέρος (ευσταθής εστία)

Το διάγραμμα φάσης είναι:



Σχήμα: Διάγραμμα φάσης για ευσταθή εστία

Διάγραμμα φάσης για μιγαδικές ρίζες με θετικό πραγματικό μέρος (ασταθής εστία)

Έστω οι διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -2y_1 + y_2 \end{cases}$$

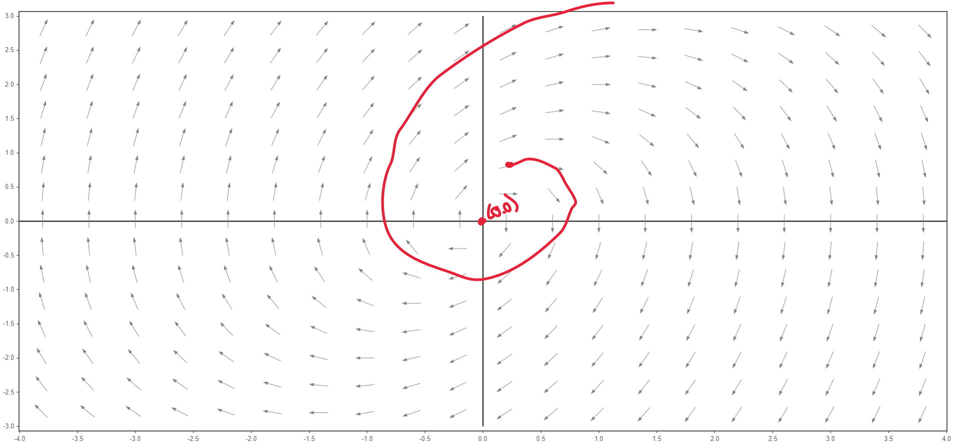
Τότε:

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} -r & 1 \\ -2 & 1-r \end{vmatrix} = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 - r + 2 = 0$, $\Delta = 1 - 8 = -7$. Οι ρίζες είναι $r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$.
Οι λύσεις σταθερής κατάστασης είναι $\bar{y}_1 = 0$ και $\bar{y}_2 = 0$.

Διάγραμμα φάσης για μιγαδικές ρίζες με θετικό πραγματικό μέρος (ασταθής εστία)

Το διάγραμμα φάσης είναι:



Σχήμα: Διάγραμμα φάσης για ασταθή εστία

Είδη ισορροπίας

- Εάν $|A| < 0$
  - οι $r_1,\ r_2$ ετερόσημοι πραγματικοί τότε έχουμε σαγματικό σημείο
- Εάν $|A| > 0$
  - Εάν $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$
    - $r_1, r_2 < 0$ τότε έχουμε ευσταθή κόμβο
    - $r_1, r_2 > 0$ τότε έχουμε ασταθή κόμβο
    - $r_1 = r_2 < 0$ τότε έχουμε γενικευμένο ευσταθή κόμβο
    - $r_1 = r_2 > 0$ τότε έχουμε γενικευμένο ασταθή κόμβο
  - Εάν $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ (με $\mathrm{Im}(r_1), \mathrm{Im}(r_2) \neq 0$)
    - $\mathrm{Re}(r_1), \mathrm{Re}(r_2) < 0$ τότε έχουμε ευσταθή εστία
    - $\mathrm{Re}(r_1), \mathrm{Re}(r_2) > 0$ τότε έχουμε ασταθή εστία
    - $\mathrm{Re}(r_1) = \mathrm{Re}(r_2) = 0$ τότε έχουμε κέντρο (δίνη)

$\pm bi$